

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ  
ГРАЂЕВИНСКИ ФАКУЛТЕТ

Љубо Д. Дивац

**ПРИЛОГ АНАЛИЗИ КРИТЕРИЈУМА И  
МЕТОДА ЗА ОЦЕНУ СИГУРНОСТИ  
НАСУТИХ БРАНА УЗ ИНТЕГРАЦИЈУ  
ПОДАТАКА ОСМАТРАЊА**

докторска дисертација

Београд, 2025.

UNIVERSITY OF BELGRADE  
FACULTY OF CIVIL ENGINEERING

Ljubo D. Divac

**CONTRIBUTION TO THE CRITERIA AND  
METHODS FOR THE EMBANKMENT DAMS  
SAFETY EVALUATION INCLUDING THE  
INTEGRATION OF MONITORING DATA**

Doctoral Dissertation

Belgrade, 2025

Универзитет у Београду  
Грађевински факултет

Љубо Д. Дивац, маг. инж. грађ.

ПРИЛОГ АНАЛИЗИ КРИТЕРИЈУМА И МЕТОДА ЗА ОЦЕНУ СИГУРНОСТИ НАСУТИХ  
БРАНА УЗ ИНТЕГРАЦИЈУ ПОДАТАКА ОСМАТРАЊА  
докторска дисертација

Ментор:

Доц. др Сања Јоцковић, дипл. грађ. инж.

Грађевински факултет Универзитета у Београду

Комисија за оцену и одбрану докторске дисертације:

1. Проф. др Владан Кузмановић, дипл. грађ. инж.

Грађевински факултет Универзитета у Београду

2. Доц. др Милош Марјановић, мастер инж. грађ.

Грађевински факултет Универзитета у Београду

3. Проф. др Мирослав Живковић, дипл. маш. инж.

Факултет инжењерских наука Универзитета у Крагујевцу

Датум одбране:

## Изјаве захвалности

Докторска дисертација која се налази испред читаоца представља круну мог досадашњег научног пута, рефлектује резултат вишегодишњег рада и истрајности, али она не одражава само мој лични напор. Током десетак година учења и истраживања, имао сам срећу да ме окружују изузетни људи који су својим знањем, стрпљењем и љубављу допринели томе да овај рад угледа светлост дана. Било је тренутака одушевљења, али и оних када је било тешко наставити и управо су речи подршке, разумевања и присуство ближњих учинили да никада не посустанем. Зато овде, са искреним осећањем поштовања и захвалности, желим да се обратим свима који су веровали у мене и у овај рад више него што сам понекад и сам умео.

Искрену захвалност дугујем доц. др Сањи Јоцковић, која је, прихвативши улогу ментора, пружила неопходну подршку овом истраживању, указала поверење у мој истраживачки рад и препознала вредност сарадње са колегама који су ме водили кроз све фазе овог пројекта.

Највећу захвалност желим да изразим доц. др Милошу Марјановићу и доц. др Вељку Пујевићу. Од првих разговора до завршне верзије рада, њихова подршка, знање и посвећеност били су стални ослонац у свим фазама овог истраживања. Заједно су ме водили кроз научне и практичне изазове, несебично делили своје време и искуство, постављали права питања у правим тренуцима и подстицали ме да размишљам дубље, шире и храбрије. Сарадња са њима оставила је неизбрисив траг у свему што чини ову дисертацију и дубоко сам им захвалан на томе. Обојица су се посветили као ментори у пуном смислу те речи и били пожртвовани сапутници у овом научном путовању.

Посебну захвалност дугујем Институту за водопривреду „Јарослав Черни“, који је овом истраживању дао пресудну подршку кроз вишеструки допринос. Институт ми је омогућио реализацију студије случаја уступањем свеобухватне документације за брану Првонек из периода пројектовања, изградње и експлоатације, а нарочито стављањем на располагање МКЕ модела хидродинамичких и напонско-деформацијских процеса који сам користио за своја истраживања. Поред тога, омогућена ми је комуникација и координирана сарадња са стручњацима Института, као и са сарадницима Института са Универзитета у Крагујевцу чиме је обезбеђена стручна и техничка подршка у решавању сложених нумеричких проблема. Желим да се захвалим колегама из Института „Јарослав Черни“: Владимиру Миливојевићу, Дејану Вучковићу, Урошу Мирковићу и др Николи Миливојевићу, али и свим осталим колегама које нисам поименце навео, а који су својим знањем, техничком подршком и добром вољом значајно допринели успешном спровођењу овог истраживања.

Нарочито велику захвалност дугујем проф. др Бобану Стојановићу, професору на Природно-математичком факултету Универзитета у Крагујевцу и директору компаније „Водена“, за драгоцене сугестије и смернице током иницијалних фаза истраживања. Његова подршка је утицала на неке од кључних концептуалних корака, а помоћ у реализацији масовних прорачуна била је од пресудног значаја за извођење студије случаја представљене у овој дисертацији.

Велику захвалност желим да изразим и професорима са Факултета инжењерских наука Универзитета у Крагујевцу: проф. др Мирославу Живковићу, доц. др Драгану Ракићу и доц. др Снежани Вуловић за стручну помоћ и подршку у решавању сложених нумеричких проблема применом методе коначних елемената, као и за конструктивне разговоре који су значајно допринели квалитету и поузданости спроведених анализа.

Посебно место у овом истраживању има и моје професионално окружење – компанија Gruner Stucky Ltd. Рад на великим, амбициозним и захтевним пројектима пружио ми је прилику да продубим знања и проширим видике у области сигурности брана. Желим да изразим захвалност др Цанету Чекеревцу и Владимиру Шумарцу, који су несебично подржавали моје истраживање, показујући разумевање за изазове научног рада и охрабрујући ме да своја

стручна искуства преточим у академски допринос. Неке идеје које су се касније развиле у овом раду настале су управо у разговорима са њима али и осталим колегама који су, осим што су показивали стрпљење за моја непрестана размишљања о теми доктората, умели да понуде и корисне савете, подршку и охрабрење.

Најдубљу захвалност дугујем својим родитељима, Владислави и Дејану, који су ми читавог живота били најсигурнији ослонац, а истовремено и најјаснији узор. Њихова љубав, поверење и вредности које су ми пренели били су темељ свега што сам у животу градио. Одрастао сам уз оца чија су поузданост и мудрост дубоко обликовали мој поглед на свет. Његова љубав је била ненаметљива али свеprisутна, љубав која се не исказује речима већ делима, она која носи, обликује и усмерава. Био је неко ко је веровао у ову тему од самог почетка и ко је својим знањем и саветима дубоко утицао на суштину и садржај рада. Његова поуздана подршка обележила је сваки део овог процеса. Моја мајка је током читавог живота била мој ослонац, увек несебично стављајући моје потребе испред својих. Њена непрестана брига, пожртвованост и љубав, које никада нису тражиле ништа заузврат, пратили су ме у сваком кораку, од детињства до данас.

Захвалан сам и свом брату Николи, чија подршка ми је одувек значила више него што он то може да наслути и чију подршку сам схватао и осећао више него што би он то икада експонирао. Веома сам захвалан и његовој породици, Јовани и Соњи, што су увек били уз мене с осмехом на лицу.

Захвалност дугујем и мојој широј породици: баки Славки и тетке Весни, које су ме одувек обасипале топлином и нежношћу, ујаку Милошу, који је својим позитивним духом умео да унесе комичну ноту и у најозбиљније расправе, као и деди Стеви (и његовој породици), поузданом чувару породичних вредности, који је увек знао како да окупи све генерације за истим столом.

Са дубоким поштовањем, поносом и љубављу сећам се и оних који више нису са нама: баке Лозанке и деде Ивана, чија ненаметљива љубав ме је пратила кроз детињство и одрастање, затим деде Славка, који ме је својим причама стрпљиво и ситематично увео у свет физике и математике и нарочито баке Мире, која је, бринући о мени као друга мајка, оставила неизбрисив траг у мом срцу.

Искрено сам захвалан и породици моје супруге: њеној мајци Ћини и оцу Горану, као и браћи Јовану (са породицом) и Марку, за добродошлицу испуњену топлином и за континуирану подршку и разумевање.

Највећа захвалност коју могу да изразим припада мојој породици – супрузи Дуњи и нашем сину Доротеју. Дуња је била уз мене у сваком кораку овог пута, у тренуцима неизвесности, напора и тишине која прати дуге радне ноћи. Њена љубав није била само подршка, већ и чврсто тло на коме сам сигурно стајао. Стрпљење и разумевање којима је испуњавала наш дом били су моје уточиште онда када је време, које је требало да припадне њима, одлазило на исписивање страница овог рада. Моја дисертација зато носи и њену снагу, јер без њене подршке и несебичне жртве она не би ни постојала. За искрену веру у мене, неизмерно стрпљење и безусловну подршку, остајем јој заувек бескрајно захвалан. Долазак Доротеја у мој живот променио је све, дубоко и неповратно. Са његовим првим осмехом, мој свет је добио нови смисао. Његова доброта, разиграни кикот и топао поглед постали су моја најдубља покретачка снага и свакога дана ме подсећају због чега вреди уложити труд. Безусловна блискост која постоји само између родитеља и детета, дају смисао свему што сам до сада радио.

Са дубоком захвалношћу,  
Љубо Дивац

Београд, Јун 2025.

*Мојој породици, с љубављу*

# ПРИЛОГ АНАЛИЗИ КРИТЕРИЈУМА И МЕТОДА ЗА ОЦЕНУ СИГУРНОСТИ НАСУТИХ БРАНА УЗ ИНТЕГРАЦИЈУ ПОДАТАКА ОСМАТРАЊА

## Резиме

Овај рад настоји да пружи допринос формирању доследне методологије за процену сигурности постојећих насутих брана, која се ослања на пробабилистички концепт, узимајући при томе у обзир податке техничког осматрања. Таквим приступом систематски се обухватају бројни елементи варијабилности уткани у природу геотехничких проблема, укључујући и варијабилност самих података осматрања.

Изложена је квази-бајесијанска методологија за процену сигурности постојећих насутих брана која интегрише податке осматрања, уз уважавање њиховог стохастичког карактера, у оквир пробабилистичке Монте-Карло анализе на МКЕ моделу бране, не захтевајући при томе калибрацију статистичких расподела улазних параметара модела. Оваквим приступом добијају се резултати анализе поузданости који боље одражавају стварно понашање конструкције, а истовремено омогућавају доследну процену утицаја варијабилности свих релевантних параметара на ниво сигурности.

Предложена методологија омогућава јединствену синтезу примене различитих нумеричких техника из домена теорије поузданости, напредних тродимензионалних нелинеарних МКЕ анализа и сурогат моделе засноване на машинском учењу. Примена ових техника спроведена је у овом раду у циљу побољшања ефикасности и тачности резултата пробабилистичке анализе, чиме се обезбеђује свеобухватна, поуздана и рачунски ефикасна процена сигурности постојећих насутих брана у складу са савременим инжењерским тенденцијама.

Основне идеје предложене методологије су најпре верификоване на једноставним примерима, након чега је методологија у целости примењена на студију случаја насуте бране Првонек, где је спроведена комплетна пробабилистичка анализа сигурности са интеграцијом расположивих података осматрања.

Кључни иновативни елемент методологије је увођење тежинских коефицијената за сваку симулацију Монте Карло анализе, чиме се изражава различит ниво поверења у исходе на основу њихове сличности са стварно забележеним понашањем бране. У студији случаја на примеру бране Првонек показано је да укључивање података осматрања значајно повећава индекс поузданости у односу на анализу без интеграције података осматрања, при чему расподеле резултата много боље репродукују осмотрено понашање конструкције.

Добијени резултати потврђују делотворност и применљивост предложене методологије за процену сигурности брана. На тај начин, дисертација даје допринос унапређењу теоријског оквира и инжењерске праксе у области сигурности насутих брана, пружајући поузданију основу за процену ризика и доношење одлука у погледу експлоатације и одржавања ових објеката.

**Кључне речи:** насута брана, сигурност, подаци осматрања, пробабилистичка анализа, Монте-Карло анализа, бајесијанско ажурирање, метода коначних елемената, сурогат модел

**Научна област:** Грађевинарство

**Ужа научна област:** Механика тла, фундирање и геоеколошко инжењерство

**УДК број:**

# CONTRIBUTION TO THE CRITERIA AND METHODS FOR THE EMBANKMENT DAMS SAFETY EVALUATION INCLUDING THE INTEGRATION OF MONITORING DATA

## Abstract

This study aims to contribute to a coherent methodology for evaluating the safety of existing embankment dams by creating a probabilistic approach that explicitly incorporates monitoring data. The approach systematically captures the full spectrum of uncertainties inherent in geotechnical problems, including the variability within the monitoring records themselves.

The thesis introduces a Bayesian-inspired methodology to directly integrate actual dam monitoring records, with full recognition of their stochastic character, into a Monte Carlo probabilistic safety assessment using a finite element framework, without recalibrating the original input parameters distributions. The resulting reliability estimates more faithfully reflect the actual observed behaviour of the structure while enabling a consistent appraisal of how all relevant sources of variability influence the safety.

The numerical framework established in this thesis unifies advanced reliability techniques, nonlinear 3D finite-element (FE) analyses, and machine-learning-based surrogate modelling. Their combined use improves both the efficiency and accuracy of probabilistic analyses, providing a comprehensive, reliable, and computationally tractable approach that aligns well with a modern engineering practice.

After verification on simple benchmark problems, the complete procedure is applied to a case study of the Prvonek embankment dam, where a full probabilistic safety analysis with monitoring data integration is performed.

A key innovative element of the proposed methodology is the introduction of weighting coefficients for each Monte Carlo simulation, expressing varying degrees of confidence in individual outcomes according to their similarity to the observed dam behaviour. For the Prvonek case study, incorporating monitoring data markedly increases the reliability index relative to an analysis that ignores monitoring data, while the resulting response distributions reproduce the observed behaviour much more closely.

The results demonstrate the effectiveness and practical applicability of the proposed methodology for dam safety evaluation, therefore contributing to the development of the theoretical framework and engineering practice in the field of embankment dam safety assessment. The thesis offers a more robust foundation for risk evaluation and decision-making regarding the operation and maintenance of these critical structures.

**Keywords:** embankment dam; safety; monitoring data; probabilistic analysis; Monte Carlo analysis; Bayesian updating; finite element method (FEM); surrogate model

**Scientific field:** Structural engineering

**Scientific subfield:** Soil Mechanics, Foundation and Geoenvironmental Engineering

**UDC number:**



# Садржај

<b>1</b>	<b>Увод .....</b>	<b>1</b>
1.1	Предмет истраживања.....	1
1.2	Циљеви истраживања.....	4
1.3	Садржај рада .....	4
<b>2</b>	<b>Основне поставке о сигурности насутих брана .....</b>	<b>6</b>
2.1	Начини и узроци рушења насутих брана .....	6
2.2	Опште о критеријумима за процену сигурности .....	9
2.3	Улога техничког осматрања у управљању сигурношћу брана .....	13
<b>3</b>	<b>Сажет приказ прорачунских метода потребних за анализу сигурности .....</b>	<b>17</b>
3.1	Рачунске симулације на бази физички заснованих модела .....	17
3.1.1	Рачунске симулације филтрационих процеса .....	18
3.1.2	Рачунске симулације напонско-деформационих процеса.....	18
3.1.3	Прорачун коефицијента сигурности методом редукције смичуће чврстоће.....	19
3.2	Примена теорије поузданости .....	20
3.2.1	Основе теорије поузданости.....	20
3.2.2	Примена Монте-Карло анализе за процену сигурности брана.....	23
3.2.3	Глобална анализа осетљивости према методи Собоља.....	28
3.2.4	Псеудо-насумичне методе за узорковање .....	29
3.3	Сурогат модел.....	30
3.3.1	Тренинг сурогат модела.....	30
3.3.2	Машинско учење .....	31
3.3.3	Приказ <i>XGBoost</i> методе .....	33
<b>4</b>	<b>Предлог методе за пробабилистички прорачун сигурности бране уз интеграцију података осматрања .....</b>	<b>35</b>
4.1	Концепт методе.....	35
4.2	Опсег примене методе, опсервације и ограничења .....	39
4.3	Методе за израчунавање тежинског коефицијента симулације .....	40
4.4	Селективна <i>SSR</i> анализа .....	47
<b>5</b>	<b>Демонстрација предложене методологије на једноставним примерима .....</b>	<b>48</b>
5.1	Триаксијални тест.....	48
5.1.1	Поставка проблема .....	48
5.1.2	Претходно тестирање материјала .....	50
5.1.3	Подаци осматрања.....	53
5.1.4	Моделирање триаксијалног теста применом <i>МКЕ</i> .....	54

5.1.5	Моделирање варијабилности прорачунских параметара .....	59
5.1.6	Детерминистичка анализа сигурности .....	65
5.1.7	Пробабилитичка анализа сигурности .....	67
5.2	Филтрација навише кроз вертикално услојено тло .....	75
5.2.1	Поставка проблема .....	75
5.2.2	Варијабилност прорачунских параметара .....	84
5.2.3	Резултати пробабилитичке анализе .....	88
<b>6</b>	<b>Студија случаја: Брана Првонек .....</b>	<b>90</b>
6.1	Основни подаци о брани Првонек .....	90
6.1.1	Технички опис бране .....	90
6.1.2	Материјали у телу бране .....	92
6.1.3	Систем за техничко осматрање .....	93
6.2	МКЕ модел .....	94
6.2.1	Мрежа коначних елемената .....	94
6.2.2	Параметри материјала .....	98
6.2.3	Варијабилност улазних параметара .....	100
6.3	Модалитет лома бране у разматраној прорачунској ситуацији .....	104
6.4	Сурогат модел .....	109
6.4.1	Тренинг модела .....	109
6.4.2	Верификација модела .....	112
6.5	Глобална анализа осетљивости .....	116
6.6	Монте-Карло анализа сигурности бране – базна пробабилитичка анализа .....	120
6.7	Подаци осматрања .....	124
6.7.1	Сажет преглед података осматрања .....	124
6.7.2	Варијабилност података осматрања .....	131
6.8	Анализа сигурности бране уз интеграцију података осматрања .....	137
6.8.1	Комплетна пробабилитичка анализа .....	139
6.8.2	Пробабилитичка анализа која укључује само варијабилност филтрационих параметара .....	140
6.9	Утицај избора агрегатора тежинских коефицијената на резултате и конвергенцију прорачуна .....	141
<b>7</b>	<b>Завршна разматрања .....</b>	<b>150</b>
7.1	Закључци извршених истраживања .....	150
7.2	Смернице за примену предложене методологије .....	152
7.3	Препоруке за даља истраживања .....	153
<b>8</b>	<b>Литература .....</b>	<b>155</b>

<b>АНЕКС 1 – Теоријске основе моделирања физичких процеса .....</b>	<b>162</b>
A.1.1 Филтрациони процеси.....	162
A.1.2 Напонско-деформацијски процеси .....	163
A.1.3 Конститутивни модели изабрани за примере у овом раду .....	168
<b>АНЕКС 2 – Преглед основних појмова теорије вероватноће .....</b>	<b>174</b>
<b>АНЕКС 3 – Python програми .....</b>	<b>180</b>

## Списак слика

Слика 1.1	Илустрације и примери за бетонске гравитационе, лучне и насуте бране: Бердап 1 (лево, [54]), Гранчарево (у средини, ауторска фотографија) и Првонек (десно, [56]) .....	2
Слика 2.1	Број забележених рушења насутих брана за сва три модалитета лома (броне од каменог набачаја – <i>Rockfill</i> и земљане – <i>Earthfill</i> ) [64] .....	7
Слика 2.2	Узроци рушења насутих брана у различитим периодима [64] .....	7
Слика 2.3	Број забележених рушења насутих брана категорисаних према начину рушења и контексту екстерних утицаја [64] .....	9
Слика 3.1	Редуковање нелинеарне анvelope лома модела (пример корака 1, слика преузета из [59]) .....	20
Слика 3.2	Илустрација концепта функције граничног стања (слика преузета из [50]) .....	22
Слика 3.3	Метода инверзне трансформације (слика преузета из [83]) .....	24
Слика 3.4	Пример хистограма са 5 бинова .....	25
Слика 3.5	Пример хистограма са 50 бинова .....	25
Слика 3.6	Примери хистограма са 2 (лево) или 1000 бинова (десно) .....	26
Слика 3.7	Пример дијаграма конвергенције резултата .....	26
Слика 3.8	Дијаграм тока базне Монте Карло анализе .....	27
Слика 4.1	Поступак одређивања појединачних тежинских коефицијената $f_{ij}$ .....	36
Слика 4.2	Дијаграм тока пондерисане Монте-Карло анализе са имплементацијом података осматрања .....	38
Слика 4.3	Резултати пондерисане анализе за различите односе расподела резултата базне анализе и података осматрања: (лево) униформна-униформна и (десно) униформна-нормална .....	39
Слика 4.4	Резултати пондерисане анализе за различите односе расподела резултата базне анализе и података осматрања: (лево) нормална-униформна и (десно) нормална-нормална .....	40
Слика 4.5	Резултати пондерисане анализе за систем са 4 расподеле података осматрања за сваку од 9 предложених метода агрегације ( $N=10^6$ ) .....	43
Слика 4.6	Резултати пондерисане анализе за систем са 4 расподеле података осматрања ( $N=10^6$ ) .....	44
Слика 4.7	Резултати понд. анализе за систем са 4 расподеле података осматрања ( $N=10^3$ ) .....	44
Слика 4.8	Утицај избора агрегатора на конвергенцију стандардних девијација пондерисаних расподела .....	46
Слика 5.1	Путања напона у триаксијалном опиту (скица преузета из [27]) .....	49
Слика 5.2	Путања напона у триаксијалном опиту (скица преузета из [27]) – p-q простор .....	49
Слика 5.3	Типичне путање напона претходно тестираних узорака за различите нивое свестраног притиска у првој фази опита ( $\sigma_3=250, 500, 1000$ и $2000$ kPa) .....	50
Слика 5.4	Збијеност (лево) и порозност (десно) узорака на крају прве фазе теста .....	51
Слика 5.5	Запреминска деформација узорака током изотропне консолидације у првој фази триаксијалног опита .....	51
Слика 5.6	Девијаторско напрезање у функцији вертикалне (лево) и девијаторске (десно) деформације узорака у другој фази триаксијалног опита .....	51
Слика 5.7	Промена волуметријске деформације (сетована на 0 након прве фазе) у функцији средњег напона (лево) и девијаторске деформације (десно) током фазе смицања .....	52
Слика 5.8	Однос напона $\sigma_1/\sigma_3$ у функцији девијаторске деформације узорка током фазе смицања .....	52
Слика 5.9	Однос напона $\sigma_1/\sigma_3$ у функцији нивоа напрезања током фазе смицања .....	53
Слика 5.10	Дефиниција прорачунског тренутка $P$ .....	53
Слика 5.11	Путање напона до прорачунског тренутка ( $P$ ) .....	54
Слика 5.12	Аксијална и волуметријска деформација разматраног узорка до прорачунског тренутка ( $P$ ) .....	54
Слика 5.13	МКЕ прорачунски модел триаксијалног теста (централна симетрија) .....	55
Слика 5.14	3D прорачунски модел триаксијалног теста .....	55
Слика 5.15	Гранични услови при моделирању прве (лево) и друге (десно) фазе триаксијалног теста на 2D моделу .....	56
Слика 5.16	Гранични услови при моделирању прве (лево) и друге (десно) фазе триаксијалног теста на 3D моделу .....	56
Слика 5.17	Гранични услови при моделирању прве (лево) и друге (десно) фазе триаксијалног теста на 2D моделу .....	57
Слика 5.18	Гранични услови при моделирању прве (лево) и друге (десно) фазе триаксијалног теста на 3D моделу .....	57
Слика 5.19	Зависности калибрисаних вредности $\phi$ , $E$ и $\psi$ од нивоа свестраног притиска $\sigma_3$ .....	59
Слика 5.20	Функције расподела улазних променљивих (густине вероватноће) .....	60
Слика 5.21	Зависности $\phi-E$ и $\phi-\psi$ које произилазе из резултата дванаест опита .....	61
Слика 5.22	Зависности $\phi-E$ и $\phi-\psi$ (црвене тачке представљају калибрисане параметре из 12 опита) .....	61
Слика 5.23	Хистограм узоркованих вредности за променљиве $\phi$ и $E$ .....	62
Слика 5.24	Хистограм узоркованих вредности за променљиве $\psi$ и $\nu$ .....	62
Слика 5.25	Узорковани (увезани и неувезани) параметри – међусобни однос $\phi-E$ .....	63
Слика 5.26	Узорковани (увезани и неувезани) параметри – међусобни однос $\phi-\psi$ .....	63

Слика 5.27	Узорковани (увезани и неувезани) параметри – међусобни однос $\varphi$ - $v$ .....	63
Слика 5.28	Узорковани (увезани и неувезани) параметри – међусобни однос $E$ - $\psi$ .....	64
Слика 5.29	Узорковани (увезани и неувезани) параметри – међусобни однос $E$ - $v$ .....	64
Слика 5.30	Путања напона и редукована анвелопа лома .....	65
Слика 5.31	Резултати базе пробабилистичке анализе – густина вероватноће (PDF) аксијалне (вертикалне) деформације $\varepsilon_1$ .....	67
Слика 5.32	PDF аксијалне деформације $\varepsilon_1$ - резултати базе и пондерисане анализе .....	67
Слика 5.33	PDF фактора сигурности FS - резултати базе и пондерисане анализе .....	68
Слика 5.34	Поређење резултата анализа са увезаним и независним параметрима .....	69
Слика 5.35	Дијаграм конвергенције средње вредности и стандардне девијације расподеле FS .....	70
Слика 5.36	Поређење резултата анализа са увезаним и независним параметрима .....	70
Слика 5.37	Број ефективних симулација <i>Nweighted</i> у функцији стандардне девијације расподеле података осматрања ( $\sigma_{mon}$ ) .....	71
Слика 5.38	PDF аксијалне деформације $\varepsilon_1$ - поређење резултата базе и пондерисане анализе са различитим распонима функција расподеле $\sigma_{mon}$ .....	72
Слика 5.39	PDF фактора сигурности FS - поређење резултата базе и пондерисане анализе са различитим распонима функција расподеле $\sigma_{mon}$ .....	73
Слика 5.40	Поставка проблема .....	75
Слика 5.41	Кретање воде управно на хоризонтално усложњено тло [81] .....	76
Слика 5.42	Дијаграм ефективних напона при струјању навише (скица преузета из [81]) .....	77
Слика 5.43	Промена потенцијала по висини .....	79
Слика 5.44	Дијаграм порних притисака по висини .....	79
Слика 5.45	Тотални вертикални напони .....	80
Слика 5.46	Ефективни вертикални напони .....	81
Слика 5.47	Ефективни вертикални напони на нивоу В .....	82
Слика 5.48	Резултати филтрационе и напонске анализе у програму RS2 (лево: $k_2/k_1=1$ , десно: $k_2/k_1=0.1$ ) .....	83
Слика 5.49	Функције расподеле улазних променљивих (густине вероватноће) .....	85
Слика 5.50	Функција расподеле односа $k_2/k_1$ .....	86
Слика 5.51	Илустрација распона могућих вредности мерења $\Delta H_{izm}$ и распона расподеле измерених вредности $\Delta H_{izm}, B$ .....	87
Слика 5.52	Функције расподеле података осматрања $H_{mon}$ .....	87
Слика 5.53	Резултати базе пробабилистичке анализе (независни и увезани параметри материјала) .....	88
Слика 5.54	Резултати пробабилистичке анализе са имплементираним параметрима осматрања (анализе А1-А4) .....	89
Слика 6.1	Диспозиција бране Првонек (слика преузета из [58]) .....	91
Слика 6.2	Попречни пресек бране Првонек (слика преузета из [58]) .....	91
Слика 6.3	Тродимензионални МКЕ модел за филтрационе и напонско-деформацијске анализе (поглед са узводне стране) .....	94
Слика 6.4	Тродимензионални МКЕ модел за филтрационе и напонско-деформацијске анализе (поглед са низводне стране) .....	95
Слика 6.5	Ниво 370-420 .....	96
Слика 6.6	Ниво 420-460 .....	96
Слика 6.7	Ниво 460-490 .....	96
Слика 6.8	Ниво 490-500 .....	96
Слика 6.9	Ниво 500-510 .....	96
Слика 6.10	Ниво 510-520 .....	96
Слика 6.11	Ниво 520-530 .....	96
Слика 6.12	Ниво 530-540 .....	96
Слика 6.13	Ниво 540-550 .....	96
Слика 6.14	Ниво 550-560 .....	96
Слика 6.15	Ниво 560-570 .....	97
Слика 6.16	Ниво 570-580 .....	97
Слика 6.17	Ниво 580-590 .....	97
Слика 6.18	Ниво 590-600 .....	97
Слика 6.19	Ниво 600-610 .....	97
Слика 6.20	Ниво 610-620 .....	97
Слика 6.21	Ниво 620-630 .....	97
Слика 6.22	Функције густине вероватноће (PDF) за логаритме коефицијената филтрације .....	101
Слика 6.23	Функције густине вероватноће (PDF) за логаритме коефицијената филтрације са горњом граничном вредношћу .....	101
Слика 6.24	Функције густине вероватноће (PDF) за параметре чврстоће материјала каменог набачаја у различитим зонама .....	102

<b>Слика 6.25</b>	Усвојени распони за 95% података из усвојених нормалних расподела параметара чврстоће Максимовићевог модела за материјале каменог набачаја .....	103
<b>Слика 6.26</b>	Усвојени распони за равномерне расподеле параметара Cam-Clay модела за материјал глине (слика преузета из ПУО, [57]) .....	104
<b>Слика 6.27</b>	Хистограмске расподеле за свих 21 улазних променљивих и узорковане комбинације параметара за МКЕ анализе С1-С4. Различитим бојама су обележени бинови из којих су узорковани параметри за сваку од 4 комбинације. ....	105
<b>Слика 6.28</b>	Резултати SSR анализе за МКЕ моделе са комбинацијама улазних параметара С1-С4 .....	107
<b>Слика 6.29</b>	Модалитет лома у 3Д погледу са низводне стране .....	108
<b>Слика 6.30</b>	Модалитет лома у попречном пресеку бране .....	108
<b>Слика 6.31</b>	Хистограмске расподеле LHS узорака за свих 21 улазних променљивих. Жутим бојом су обележени бинови из којих су узорковани параметри за једну случајно одабрану симулацију. ....	110
<b>Слика 6.32</b>	Расипни (енг. <i>scatter</i> ) дијаграми за 20 одабраних парова улазних параметара. Свака плава тачка представља један од 2000 LHS узорака, чиме се илуструје равномерно покривање 2Д пројекција простора улазних променљивих. Жуте тачке означавају комбинације параметара за једну случајно одабрану симулацију. ....	111
<b>Слика 6.33</b>	3D приказ LHS узорака у простору три одабране улазне величине. Свака плава тачка представља један од 2000 LHS узорака чиме се илуструје равномерно покривање 3Д пројекција простора улазних променљивих. Жута тачка означава комбинацију параметара за једну случајно одабрану симулацију. ....	112
<b>Слика 6.34</b>	Поређење резултата 200 верификационих симулација. X-оса – МКЕ модел, Y-оса – сурогат модел .....	113
<b>Слика 6.35</b>	Функције густине вероватноће (PDF) резултата прорачуна МКЕ модел (плава линија); Сурогат модел (зелена линија) .....	115
<b>Слика 6.36</b>	Лево – остаци грешке за FS у функцији израчунате вредности Десно – густина вероватноће остатака за FS (PDF) .....	116
<b>Слика 6.37</b>	Приказ првих (S1 – плава боја) и тоталних (ST – наранџаста боја) Собољевих индекса осетљивости .....	118
<b>Слика 6.38</b>	Корелациона мапа (матрица) између свих 55 излазних величина модела добијених у пробабилистичкој анализи (0-FS, 1-55-резултати филтрационе анализе) .....	119
<b>Слика 6.39</b>	Функције густине вероватноће (PDF) за све излазне величине у базној пробабилистичкој анализи .....	122
<b>Слика 6.40</b>	Поређење расподела фактора сигурности (FS) за три сценарија анализе: истовремена варијација свих параметара („Full“, плава крива), варијација само филтрационих параметара $k$ уз фиксиране параметре чврстоће („Only $k$ “, жута крива) и варијација само параметара чврстоће уз фиксирани $k$ („Only strength“, зелена крива).....	123
<b>Слика 6.41</b>	Ниво воде у акумулацији – цео период осматрања [60] .....	124
<b>Слика 6.42</b>	Положај мерних профила са порним и тоталним ћелијама.....	124
<b>Слика 6.43</b>	Распоред ћелија за мерење порних и тоталних притисака у брани .....	125
<b>Слика 6.44</b>	Распоред порних и тоталних ћелија у пресеку 7-7.....	125
<b>Слика 6.45</b>	Порни притисци у попречном пресеку 7-7 .....	126
<b>Слика 6.46</b>	Распоред порних и тоталних ћелија у пресеку 11-11 [60] .....	127
<b>Слика 6.47</b>	Порни притисци у попречном пресеку 11-11 [60].....	127
<b>Слика 6.48</b>	Распоред порних и тоталних ћелија у пресеку 16-16 [60] .....	128
<b>Слика 6.49</b>	Порни притисци у попречном пресеку 16-16 [60].....	129
<b>Слика 6.50</b>	Пијезометри на левој и десној обали.....	129
<b>Слика 6.51</b>	Ниво подземне воде у пијезометрима на десној обали [60] .....	130
<b>Слика 6.52</b>	Ниво подземне воде у пијезометрима на десној обали [60] .....	130
<b>Слика 6.53</b>	Идентификација референтних периода осматрања.....	131
<b>Слика 6.54</b>	Хистограми податка осматрања и функције густине вероватноће (PDF) усвојене за свако мерно место (нормалне расподеле) .....	134
<b>Слика 6.55</b>	Поређење опсега резултата базне пробабилистичке анализе и података осматрања .....	136
<b>Слика 6.56</b>	Поређење опсега резултата пондерисане (црвена линија), базне (плава линија) пробабилистичке анализе и података осматрања (зелена линија) .....	139
<b>Слика 6.57</b>	Поређење густине вероватноће фактора сигурности FS пондерисане (црвена линија) и базне (плава линија) комплетне пробабилистичке анализе .....	139
<b>Слика 6.58</b>	Поређење резултата процене сигурности примерном пондерисане (црвена линија) и базне (плава линија) парцијалне пробабилистичке анализе .....	140
<b>Слика 6.59</b>	Утицај избора агрегатора на конвергенцију параметара $\mu_{FS}$ и $\sigma_{FS}$ .....	142
<b>Слика 6.60</b>	Утицај избора агрегатора на конвергенцију параметара $P_f$ и $\beta$ .....	143
<b>Слика 6.61</b>	Утицај избора агрегатора на конвергенцију параметара ESS и KL.....	144
<b>Слика 6.62</b>	Резултати пробабилистичке анализе са агрегатором M1 за различит број симулација .....	145
<b>Слика 6.63</b>	Резултати пробабилистичке анализе са агрегатором M2 за различит број симулација .....	145

<b>Слика 6.64</b> Резултати пробабилистичке анализе са агрегатором М3 за различит број симулација .....	146
<b>Слика 6.65</b> Резултати пробабилистичке анализе са агрегатором М4 за различит број симулација .....	146
<b>Слика 6.66</b> Резултати пробабилистичке анализе са агрегатором М5 за различит број симулација .....	147
<b>Слика 6.67</b> Резултати пробабилистичке анализе са агрегатором М6 за различит број симулација .....	147
<b>Слика 6.68</b> Резултати пробабилистичке анализе са агрегатором М7 за различит број симулација .....	148
<b>Слика 6.69</b> Резултати пробабилистичке анализе са агрегатором М8 за различит број симулација .....	148
<b>Слика 6.70</b> Резултати пробабилистичке анализе са агрегатором М9 за различит број симулација .....	149
<b>Слика А1.1</b> Еласто-пластично понашања материјала [59].....	165
<b>Слика А1.2</b> Шематски приказ методе еластичног предиктора-пластичног коректора (Return mapping) [59] ....	167
<b>Слика А1.3</b> Нелинеарна анVELOпа напона лома и параметри (слика преузета из [57]) .....	168
<b>Слика А1.4</b> Параметри Sam-Clay модела - површ течења (слика преузета из [57]) .....	169
<b>Слика А1.5</b> Понашање при изотропној компресији (слика преузета из [57]).....	170
<b>Слика А1.6</b> Редукована смичућа чврстоћа Sam-Clay modela (слика преузета из [57]).....	171
<b>Слика А1.7</b> Површ течења Генерализованог Ноек-Вrown-овог модела (слика преузета из [57]).....	172
<b>Слика А1.8</b> Површ течења Mohr-Coulmb-овог модела (слика преузета из [57]) .....	173
<b>Слика А2.1</b> Функције вероватноће случајне променљиве $X$ (слика преузета из [25]) .....	176
<b>Слика А2.2</b> Илустрација значења коефицијента поузданости (слика преузета из [25]) .....	177
<b>Слика А2.3</b> Униформна функција расподеле вероватноће: (лево) PDF, (десно) CDF (слика преузета из [25])	178
<b>Слика А2.4</b> Нормална функција расподеле вероватноће: (лево) PDF, (десно) CDF (слика преузета из [25]) ...	179
<b>Слика А2.5</b> Лог-нормална функција расподеле вероватноће: (лево) PDF променљиве $\log(X)$ , (десно) PDF променљиве $X$ , (слика преузета из [25]) .....	179

## Списак табела

Табела 2-1	Дефиниција класа према последицама (CC – Consequences Class) [33].....	12
Табела 2-2	Препоручене најмање вредности за индекс поузданости $\beta$ (гранично стање носивости) [33] .....	12
Табела 2-3	Веза између индекса поузданости $\beta$ и вероватноће лома $P_f$ [33].....	12
Табела 2-4	Врсте мерења у склопу техничког осматрања насуте бране са њеним окружењем [61].....	14
Табела 5-1	Претходно тестирани узорци .....	50
Табела 5-2	Калибрисани параметри материјалних модела на основу лабораторијских тестова.....	58
Табела 5-3	Дефиниције разматраних опсега расподеле ( $\epsilon_1, range = 0,2$ ).....	72
Табела 5-4	Утицај опсега расподеле података осматрања на пондерисану расподелу FS.....	73
Табела 5-5	Резултати филтрационог прорачуна за различите вредности односа $k_2/k_1$ .....	78
Табела 5-6	Тотални напони на карактеристичним нивоима .....	80
Табела 5-7	Ефективни напони на карактеристичним нивоима.....	80
Табела 5-8	Резултати пондерисаних пробабилистичких анализа.....	88
Табела 6-1	Усвојени материјални модели .....	98
Табела 6-2	Прорачунски параметри материјала за филтрационе и напонско-деформацијске анализе .....	98
Табела 6-3	Вредности константи у пробабилистичком прорачуну.....	99
Табела 6-4	Параметри нормалних расподела логаритама коефицијената филтрације.....	100
Табела 6-5	Референтни периоди за анализу података осматрања .....	131
Табела 6-6	Списак инструмената – они који су прошли селекцију за пондерисану пробабилистичку анализу (зелена боја) и остали (црвена) .....	136



## Списак скраћеница

CD	Консолидовани дренирани триаксијални тест
CC	Класа према последицама
CDF	Кумулативна функција расподеле
CEN	Европски комитет за стандардизацију
ESS	Ефективна величина узорка
FEMA	Савезна агенција за управљање ванредним ситуацијама САД
FRCOLD	Француски комитет за високе бране
FS	Коефицијент сигурности
ICOLD	Међународна комисија за високе бране
IQR	Интерквартилни распон
ISO	Међународна организација за стандардизацију
KL	Кулбак–Лајблерова дивергенција
LHS	Latin Hypercube узорковање
MKE	Метода коначних елемената
NRMSE	Normalized Root Mean Square Error – метода за оцену грешке
PDF	Функција густине вероватноће
$P_f$	Вероватноћа отказа
RC	Класа поузданости
SSR	Метод редукције смичне чврстоће
USACE	Инжењерски корпус војске САД
USBR	Биро за рекламације САД
XGBoost	Extreme Gradient Boosting – алгоритам машинског учења
ПАО	Пројекат изведеног објекта бране Првонек
ПУО	Пројекат управљања и одржавања бране Првонек

# 1 УВОД

## 1.1 Предмет истраживања

Бране су хидротехнички објекти који се подижу на водотоцима са основним циљем управљања водним ресурсима. Њихова основна функција је сакупљање воде са узводне стране како би се омогућила регулација протока и коришћење воде у различите сврхе.

Главни разлози за изградњу брана укључују следеће:

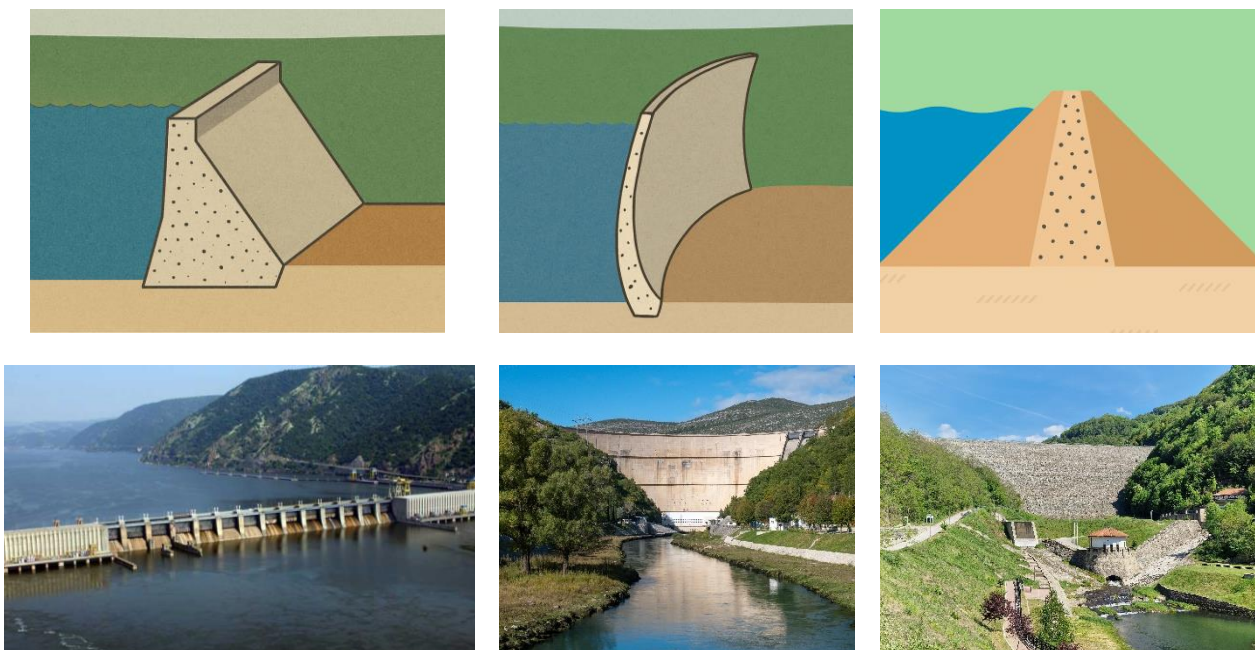
- Активности у вези са водоснабдевањем и наводњавањем – Активности водоснабдевања и наводњавања често захтевају значајне количине воде. Бране обезбеђују акумулацију воде која се може користити за снабдевање градова, индустрије и пољопривреде. У регионима са израженом сезонском варијабилношћу падавина, бране омогућавају складиштење воде за употребу током сушних периода.
- Регулација протока у водотоку низводно од бране – Бране се користе за регулисање протока воде како би се спречиле поплаве у низводним областима или омогућила константна количина воде током сушних периода. Ова функција је посебно значајна за заштиту насеља и инфраструктуре, као и за очување екосистема који зависе од стабилног протока воде.
- Производња електричне енергије – Бране се често користе за искоришћавање водне снаге у сврху производње хидроелектричне енергије. Хидроелектране које функционишу уз помоћ брана представљају један од најчистијих и најодрживијих извора енергије, јер користе обновљиви ресурс (воду) без значајних емисија гасова стаклене баште.

Према дефиницији Међународне комисије за велике бране (ICOLD), бране се могу поделити на високе и ниске према конструктивној висини мереној од најниже тачке темеља до круне: бране чија је висина прелази 15 m категоришу се као високе, док се бране ниже од 15 m сврставају у ниске. Бране се најчешће граде од бетона или насутих материјала, мада постоје (ретки) примери (углавном ниских) брана од дрвета, метала и зиданих брана. Насуте бране изграђене су од природних материјала као што су глина, земља, шљунак и камен.

Постоје следећи типови брана [62]:

- Гравитационе бране: Ове бране ослањају се на своју масу како би пренеле хидростатичко оптерећење директно на подлогу. Гравитационе бране могу бити изграђене од бетона или као бране од насутих материјала.
- Лучне бране: Лучне бране преносе део оптерећења на бочне стране клисуре користећи своју закривљену форму (раде као комбинација лука и конзоле). Оне су најпогодније за уске и дубоке клисуре са чврстом стеном у боковима.
- Контрафорне бране: Контрафорне бране представљају тип конструкције где се оптерећење воде прихвата танким бетонским плочама које чине узводну контурну површину бране. Ове плоче су пројектоване тако да равномерно расподеле оптерећење на систем контрафора. Контрафори преносе примљено оптерећење даље на стенску масу или темељну подлогу. Овај конструктивни принцип омогућава значајну уштеду у количини употребљеног бетона у поређењу са масивним гравитационим бранама. Контрафорне бране се углавном примењују на локацијама са добрим геолошким условима, где стенска маса може ефикасно примити оптерећења која се преносе кроз контрафоре.

Сваки тип бране има специфичне предности и ограничења, која се морају пажљиво размотрити при пројектовању, у контексту геотехничких и хидролошких карактеристика конкретне локације. У овом раду фокус се ставља на бране од насутог материјала.



**Слика 1.1** Илустрације и примери за бетонске гравитационе, лучне и насуте бране:

Бердап 1 (лево, [54]), Гранчарево (у средини, ауторска фотографија) и Првонек (десно, [56])

Бране од насутог материјала представљају хидротехничке конструкције саграђене од природног материјала који је доступан у близини градилишта. У зависности од типа материјала у свом саставу могу бити земљане (са хомогеним или хетерогеним пресеком) или бране од каменог набачаја. Према подацима ICOLD-а [65], постоји више од 58 хиљада високих брана на свету, од којих се чак 75% може сврстати у насуте бране. Процена сигурности насутих брана намеће се као значајна тема услед катастрофалних последица које рушење ових система има по људске животе и економију

Процена сигурности насутих брана представља изузетно сложен задатак због наглашених непоузданости које су присутне при решавању геотехничких проблема. Насуте бране се граде од природних материјала (земља, камен) који су по природи хетерогени. Геометрија бране је просторно сложена, а физички процеси којима је конструкција изложена, као што су консолидација језгра или померања услед пуњења и пражњења резервоара, неретко су нестационарни и компликовани. Уз то, напонско-деформацијско понашање природних материјала је само по себи сложено (нелинеарно и анизотропно). Процена сигурности насутих брана зато прибегава поједностављењима у геометрији, физичким процесима и понашању материјала, уносећи тиме додатну непоузданост у проблем. Због свега наведеног, разумевање и квантификовање непоузданости постало је саставни део савремене процене сигурности насутих брана.

Традиционални приступи процени сигурности брана углавном су детерминистички. Параметри се уносе као константне (најчешће конзервативне) вредности, а резултат прорачуна јесте коефицијент сигурности. Иако је такав приступ једноставан за примену, он не пружа информацију о вероватноћи отказа нити о разноликости могућих стања конструкције. Насупрот томе, пробабилистички приступ укључује непоузданост параметара директно у анализу, третирајући их као случајне величине са одговарајућим расподелама вероватноће. Пробабилстичком анализом добија се читав спектар могућих исхода уместо једне вредности. На основу тога може се израчунати вероватноћа отказа бране као квантитативна мера њене сигурности, уместо да се сигурност оцењује имплицитно преко коефицијента сигурности.

Осим тога, пробабилистички приступ омогућава одређивање варијансе резултујућих ефеката (нпр. распона фактора сигурности, порних притисака или померања), чиме се јасно сагледава колики је степен неизвесности присутан у проблему. Уместо категоризације објекта као апсолутно „безбедног” или „небезбедног” на основу јединственог фактора сигурности, конструкција се посматра кроз призму нивоа ризика (вероватноће неповољног исхода) и оцене поузданости у односу на захтеване критеријуме. Пробабилистичка филозофија процене ризика у складу је са модерним инжењерским стандардима, који све више захтевају квантитативну анализу поузданости (нпр. Еврокод [33]).

Последњих деценија објављен је низ радова који уводе методе вероватноће и поузданости у анализу сигурности насутих брана. Један правац истраживања усмерен је на стохастички третман процеса са циљем да се покаже како просторна променљивост водопропустљивости тла утиче на порне притиске ([2], [16], [20] и [37]). Поред филтрације, велика пажња поклања се и процени ризика од унутрашње ерозије (енг. *piping*) у брани ([3] и [39]). Глобална стабилност насуте бране је још један аспект процене сигурности где је могуће применити пробабилистички приступ. Током протеклих деценија објављен је значајан број радова у којима су чврстоћа тла, порни притисак и остали релевантни параметри третирано као случајне величине при процени глобалне стабилности ([50], [4], [15], [17], [45], [49], [55], [118], [116], [84], [19], [28], [76], [113], [69], [119], [21], [77], [78] и [114]).

Процена сигурности постојеће насуте бране мора да се ослања и на податке о стварном понашању објекта. Током експлоатације бране се опремају опсежним системима за осматрање. Прикупљени подаци осматрања имају стохастички карактер: они варирају у времену услед променљивих услова, а могу садржати и одређени ниво грешке при мерењу. Међутим, посматрани у целини, ти подаци пружају непроцењив увид у стварно понашање конструкције, што омогућава реалистичнију оцену њене сигурности. Коришћењем података осматрања могу се идентификовати потенцијални знаци деградације (нпр. пораст проциривања или деформација), и калибрисати параметри прорачунског модела тако да боље репродукује уочено понашање бране.

Досадашње студије су дале одређени допринос увођењу пробабилистичког приступа при квантификацији сигурности насутих брана, али је уочљиво да се у те анализе ретко уносе реални подаци техничког осматрања бране. Теоријски оквир за интеграцију података осматрања у анализу сигурности разматран је у неколицини студија ([89], [90]), при чему оне сугеришу калибрацију улазних параметара модела уз детерминистички третман података осматрања или ажурирање улазних расподела модела применом бајесијанске теорије вероватноће. Бајесијански приступ комбинује претходна инжењерска знања (приорне информације – понашање модела пре интеграције параметара осматрања) са подацима осматрања бране (новим доказима) да би се добила апостериорна, односно ажурирана процена вероватноће отказа. Примери успешне примене бајесијанског ажурирања углавном се односе на мање или једноставније геотехничке системе, као што су клизишта и стенске косине ([73], [32], [120], [117], [107], [106] и [80]). Иако у теорији има велики потенцијал, бајесијански приступ наилази на практична ограничења када се примени на сложене системе као што су велике насуте бране са десетинама или стотинама мерних инструмената и мноштвом непоузданих улазних параметара. За такве проблеме, примена бајесијанских метода још увек је веома компликована и носи извесна ограничења [93].

Предмет овог истраживања је процена сигурности постојећих насутих брана заснована на нумеричким симулацијама понашања на физички заснованим моделима кроз пробабилистички оквир који истовремено обухвата неодређености прорачунског модела, али и стохастичку природу података осматрања. На тај начин постављају се темељи за прецизнију и поузданију оцену сигурности и одлучивање у управљању бранама.

## 1.2 Циљеви истраживања

Процена сигурности постојећих насутих брана, која у пробабилистичком оквиру квантитативно обухвата различите изворе непоузданости, укључујући и стохастичку природу података осматрања, представља комплексан инжењерски изазов који захтева интеграцију напредних нумеричких метода и техника. У том светлу, главни циљ овог истраживања јесте допринос развоју интегралне методологије која, користећи технике метода поузданости, тродимензионални нелинеарни физички заснован прорачунски модел, машинско учење за формирање сурогат модела и предложену процедуру за интеграцију статистички третираних података осматрања, омогућава поуздану и ефикасну процену сигурности постојећих насутих брана.

Да би се остварио задати циљ, неопходно је спровести мање, партикуларне циљеве. Партикуларни циљеви истраживања су следећи:

- Преглед и анализа досадашњих истраживања других аутора која се односе на пробабилистичке анализе сигурности насутих конструкција. Преглед постојећих метода и критеријума за одређивање сигурности (детерминистичких и пробабилистичких).
- Формулисање методологије за пробабилистички прорачун сигурности уз интеграцију података осматрања бране. Израда нумеричке платформе за спровођење пробабилистичких прорачуна у складу са предложеном методологијом (програми за моделирање варијабилности и узорковање улазних параметара, спровођење масовних прорачуна, обраду резултата итд.). Верификација предложене методологије на једноставним примерима.
- Креирање сурогат модела за основни 3D прорачунски модел конструкције заснован на методи коначних елемената, у циљу спровођења анализе осетљивости и пробабилистичке анализе за студију случаја – брану Првонек.
- Спровођење глобалне анализе осетљивости за брану Првонек.
- Пробабилистичка процена сигурности бране Првонек као свеобухватна верификација предложене методологије на студији случаја.

## 1.3 Садржај рада

Рад је сачињен од 7 поглавља и 3 анекса. У наставку је изложен кратак опис сваког поглавља.

**Поглавље 2:** дискутују се узроци и начини рушења насутих брана и уводи се појам сигурности, односно критеријума за оцену сигурности. Посебан акценат стављен је на улогу техничког осматрања као интегралног дела управљања ризиком и на формулисање граничних стања која ће се касније користити у анализама.

**Поглавље 3:** представљен је репертоар нумеричких алата потребних за анализу сигурности. Поглавље има две целине: прва се тиче физички заснованих модела и прорачуна на бази методе коначних елемената (МКЕ), а друга објашњава методе поузданости које су коришћене у овом раду.

**Поглавље 4:** описана је интегрална методологија за пробабилистичку процену сигурности насуте бране уз уважавање података осматрања. Наведене су све потребне математичке формулације уз пропратну дискусију која се тиче примене методологије.

**Поглавље 5:** предложена методологија је верификована на једноставним примерима. Први пример јесте процена сигурности референтног узорка изложеног консолидованом дренажном (CD) триаксијалном тесту под претпоставком да је тест заустављен у неком произвољном тренутку пре достизања вршне чврстоће материјала. У другом примеру разматра се проблем

хидрауличке нестабилности тла услед појаве флуидизације узроковане кретањем воде навише кроз хоризонтално услојено тло.

**Поглавље 6:** приказана је студија случаја на конкретној насуттој брани (брана Првонек) ради верификације развијене методологије у реалним условима. Дате су основне карактеристике предметне бране и сажети подаци о њеном инструменталном осматрању и резултатима истраживања, након чега је описан нумерички модел бране израђен методом коначних елемената. На примеру ове бране изведена је пробабистичка анализа при чему су анализирани ефекти варијабилности улазних параметара и података осматрања.

**Поглавље 7:** у овом поглављу дат је закључак у коме су приказани основни ставови о резултатима добијеним на основу целокупног истраживања у оквиру дисертације. Такође су дате препоруке за даља истраживања у овој области.

**Анекс 1:** приложене су теоријске основе које се тичу моделирања филтрационих и напонско-деформацијских процеса, као и основне поставке конститутивних модела коришћених у нумеричким примерима у овом раду.

**Анекс 2:** приложена је рекапитулација основних појмова теорије вероватноће који се сматрају неопходним за разумевање предложене методологије изложене у овом раду.

**Анекс 3:** садржи компјутерске програме написане у програмском језику Python, који чине основу за примену методологије изложене у главним поглављима рада. Изложени су програми коришћени у студији случаја – поглављу 6.

## 2 ОСНОВНЕ ПОСТАВКЕ О СИГУРНОСТИ НАСУТИХ БРАНА

Ово поглавље је посвећено објашњењу основних појмова и концепата који се тичу сигурности и квантификације нивоа сигурности насутих брана. У инжењерској пракси, многи од термина су током развоја струке коришћени унакрсно и са различитим нијансама значења, али се временом развио консензус око њихове садржине и значаја.

### 2.1 Начини и узроци рушења насутих брана

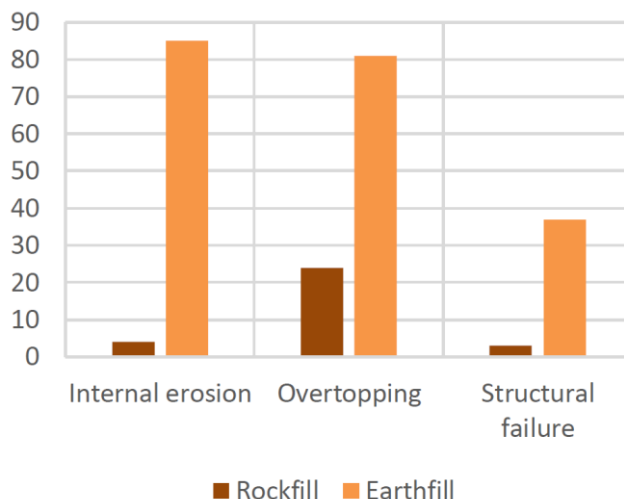
Лом (односно рушење) насутих брана у најширем смислу представља катастрофалан сценарио при коме конструкција не може да издржи дејство оптерећења и долази до (барем једног од) следећих инцидената [64]:

- Неконтролисано испуштање воде из језера (акумулације)
- Потпуни губитак интегритета конструкције (и/или њених темеља)

Лом насутих брана догађа се у највећем броју случајева као последица неког од следећих процеса [111]:

- Преливање преко круне бране – овај модалитет рушења дешава се услед прогресивног ерозивног дејства воде која неконтролисано тече изнад и око насуте бране, услед недовољног капацитета евакуационих органа. Једном када ерозија насутог материјала започне, готово је немогуће зауставити рушење. Насуте бране се по правилу пројектују тако да ниво воде у резервоару никада не прелази коту круне бране и у случају великих поплавних таласа власник бране у обавези је да пажљиво осматра и управља нивоом воде како не би дошло до преливања преко круне. Да би се избегло преливање бране неопходно је: обезбедити поуздане хидролошке подлоге и рачунати са поплавним таласом одговарајуће величине и исправно одредити тип и капацитет евакуационих органа и такав капацитет постићи правилним извођењем и одржавањем објекта. Предмет ове дисертације нису хидролошки нити хидраулички аспекти сигурности брана, па о преливању као начину рушења није даље дискутовано.
- Унутрашња ерозија материјала бране или њених темеља (енг. *pipiing*) – догађа се услед неконтролисаног провирања воде кроз темеље или тело бране што изазива испирање (унутрашњу ерозију) материјала доводећи до коначног рушења објекта. Фостер и др. у свом раду [39] су закључили да различите диспозиције зона материјала у телу бране другачије утичу на учесталост рушења услед неконтролисаног провирања. Тако на пример не постоје записани случајеви рушења брана услед провирања у случају да се ради о бранама са централним глиеним језгром, док су 16 високих хомогених земљаних брана оштећене или срушене услед филтрационих нестабилности.
- Глобална стабилност бране – овај модалитет рушења настаје када се унутар материјала од кога је брана изграђена и/или темеља бране појави пукотина услед прекорачења чврстоће материјала, формирајући клизну површ у телу бране. У овом случају може доћи до смичућег лома тла и до великих померања масе тла изнад клизне површи, односно до рушења косине.

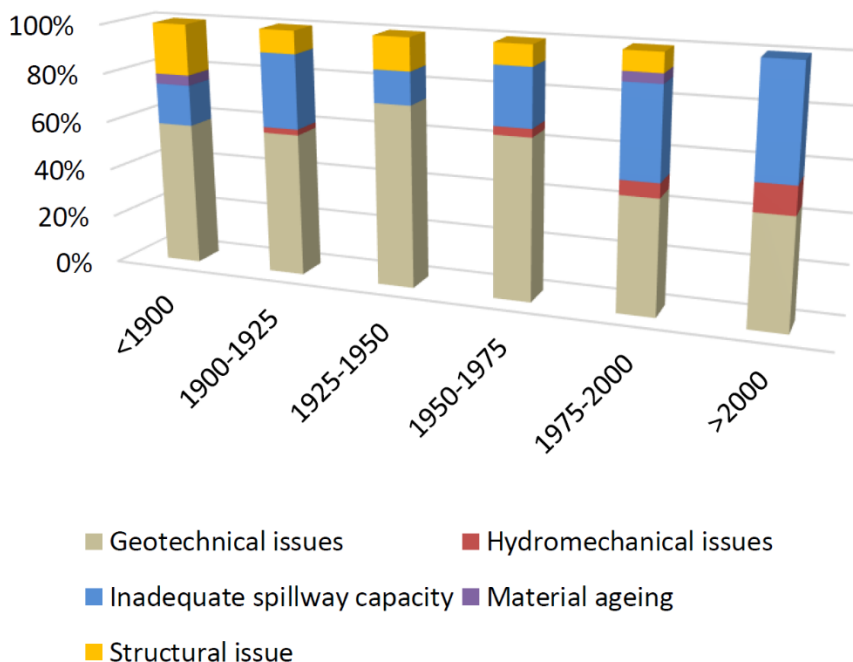
**Слика 2.1** приказује број забележених рушења насутих брана у зависности од описаних начина рушења [64]. Најчешћи начин рушења брана представља преливање преко круне, док је најмање брана доживело лом услед механичке нестабилности (смичућег лома).



**Слика 2.1** Број забележених рушења насутих брана за сва три модалитета лома (бране од каменог набачаја – *Rockfill* и земљане – *Earthfill*) [64]

Могући узроци рушења брана су [61]:

- Екстремни природни утицаји (изузетне поплаве, земљотрес и др.).
- Деградација материјала бране или темеља (дуготрајне промене физичких, хемијских и механичких карактеристика материјала у телу и темељу бране под дејством спољних утицаја – воде, мраза, високих температура итд.)
- Квар опреме (квар затварача на евакуационим органима, услед чега долази до немогућности да се преливање-испуштање воде контролише, квар опреме задужене за нормално функционисање дренажног система и сл.).
- Екстремни антропогени утицаји (експлозије и сл.).



**Слика 2.2** Узроци рушења насутих брана у различитим периодима [64]

Без обзира што су наведени узроци углавном последица природних процеса, практично увек, главну одговорност за рушења брана ипак носи човек, јер их је или лоше саградио или лоше одржавао. Релативно ретке, али не и занемариве су појаве намерног рушења бране (бомбардовање или терористички акт), док су огромном већином кривци за лом бране управо



они који су, у разним фазама живота бране, задужени за њену сигурност. У том смислу, можемо узроке рушења класификовати и на следећи начин:

- Грешке у пројектовању и/или извођењу радова,
- Грешке у управљању и одржавању бране,
- Ратна дејства и терористички напади.

Грешке у пројектовању и извођењу су људске грешке, које настају у току процеса настајања бране. Могу настати услед недовољног познавања утицаја којима ће брана бити изложена, или услед недовољног познавања карактеристика и понашања материјала или услед непажње, несавесног рада и др.

Као грешке у пројектовању могу да се издвоје: потцењени протикај и трајање великих вода и последично, недовољан капацитет евакуационих органа; неодговарајући или недовољни истражни радови и последично, прецењена носивост темељног тла/стенске масе, услед чега конструкцији прете оштећења или рушење услед проблема са темељима; недовољно познавање понашања грађевинских материјала у зависности од протока времена и последично, конструкције којима прете оштећења или рушење; потцењена могућност појаве јаког земљотреса и последично, неодговарајући или недовољно сигуран конструктивни систем; неодговарајуће методе хидрауличких и напонско-деформацијских прорачуна и анализа и др.

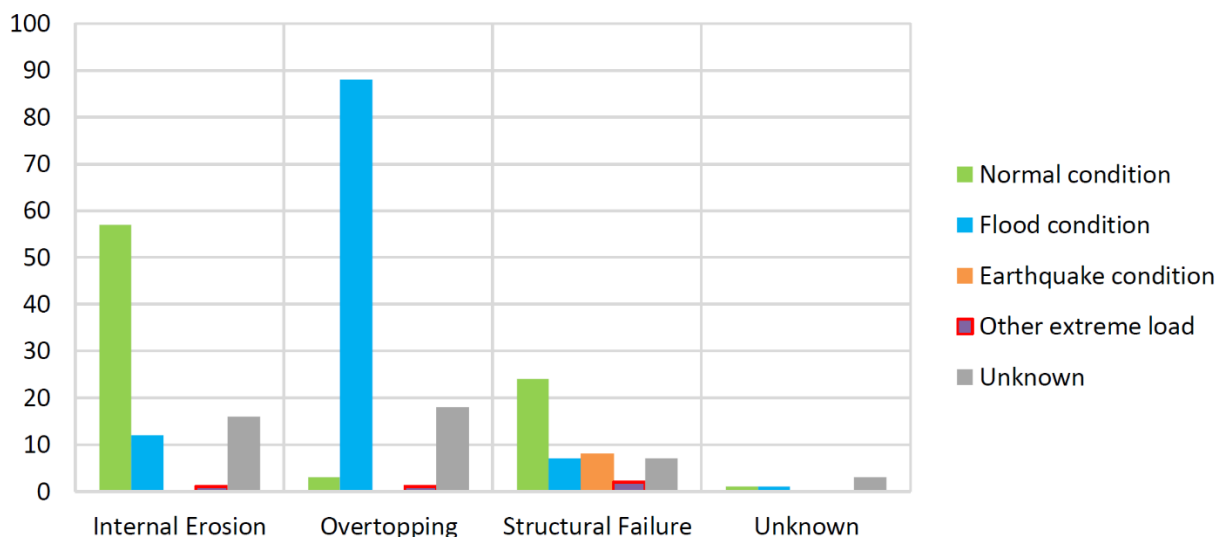
Као грешке у извођењу, начешће се јављају: уградња материјала са лошијим карактеристикама од пројектованих; неодговарајући квалитет радова (слаба контрола изградње) код бетонирања, код насипања, код уграђивања језгра насутих брана, код ињекционих и дренажних радова и др.

Грешке у управљању и одржавању могу да настану у разним околностима као што су: неправилно одржавање и руковање затварачима на евакуационим органима, услед чега долази до хаварије затварача и немогућности да се преливање-испуштање воде контролише; неправилно одржавање канала за евакуацију воде, када бивају запречени вегетацијом или другим материјалом и не могу да евакуишу потребну количину велике воде; квар опреме задужене за нормално функционисање устава, дренажног система, затварача темељног испуста и сл.; недостатак или лош рад опреме за осматрање; примена неодговарајуће методологије или одсуство анализа података о понашању бране током експлоатације.

У случају ратног стања или терористичког напада, безбедност бране може бити угрожена саботажом, бомбардовањем и сл.

Напоменимо и да се могу јавити различите комбинације претходно наведених узрока. На пример: рушење бране услед наиласка пројектом непредвиђене велике воде, где због фабричког квара или лошег одржавања хидромеханичке опреме не могу да се отворе евакуациони органи. Или, када се услед лошег или никаквог осматрања не уочи деградација материјала бране или темеља и не предузму благовремене мере санације и ојачања конструкције, и на тај начин се угрози сигурност објекта и људи.

**Слика 2.3** [64] сугерише да се највећи број рушења насутих брана догађа у условима нормалне експлоатације бране или у случају доласка поплавног таласа.



Слика 2.3 Број забележених рушења насутих брана категорисаних према начину рушења и контексту екстерних утицаја [64]

## 2.2 Опште о критеријумима за процену сигурности

**Сигурност** бране (синоним је појам безбедност) подразумева да се брана увек налази у стању у коме може да испуњава све своје пројектоване функције без неповољних последица по околину, људе и имовину [61]. Према дефиницији датој у ICOLD-овом билтену 154 [63], основна идеја која стоји иза појма сигурности брана јесте заштита људи, имовине и животне средине од потенцијалних ризика који могу настати услед неправилног функционисања или отказа (лома) конструкције или неправилног управљања акумулацијом.

Сигурност бране мора бити задовољена у сваком тренутку, тј. брана мора имати задовољавајућу сигурност према прописаним критеријумима и ограничењима. Због тога је једна од најважнијих активности која се тиче управљања сигурношћу бране (било постојеће или бране у фази пројектовања) процена њене сигурности. Према најопштијој дефиницији [21], процена сигурности има за циљ да се стекне свеукупна конкретна слика о стварном стању сигурности бране и да се пронађу евентуални недостаци који би могли да угрозе људе, имовину и животну средину низводно. Другим речима, неопходно је установити да ли брана задовољава критеријуме прихватљивог ризика.

Постоје многе препоруке и приступи различитих земаља и струковних удружења за анализу и процену сигурности брана. Примери техничке регулативе која се бави сигурношћу брана долазе из следећих организација:

- ICOLD - International Commission on Large Dams [62],
- USBR - United States Bureau of Reclamation [112],
- USACE - United States Army Corps of Engineers [109],
- FEMA - Federal Emergency Management Agency [36],
- FRCOLD - French Committee on Dams and Reservoirs и др.

Такође, CEN (European Committee for Standardization) донео је Еврокод [33] стандарде чија се основна начела могу применити и за анализу сигурности брана. У овом раду Еврокод стандард одабран је да служи као референтни оквир за студију случаја изложену у поглављу 6.

Предвиђање понашања и процена сигурности бране ослањају се на спровођење, анализу и интерпретацију рачунских симулација релевантних физичких процеса: хидрауличких (филтрационих), термичких (ређе код насутих брана) и напонско-деформацијских, узимајући

при томе у обзир и њихову интеракцију. Критеријуми сигурности у оквиру рачунских симулација најчешће се формулишу користећи идеју граничних стања (енг. limit states)<sup>1</sup> објашњену у општем смислу у наставку и детаљније у поглављу 3.2.1.

Гранична стања представљају, у контексту процене сигурности, прорачунске показатеље да конструкција није више у стању да одговори прорачунским захтевима. То је конфигурација резултата прорачуна која означава прелаз конструкције из прихватљивог (сигурног) у неприхватљиво (небезбедно) стање. Достижање граничних стања у прорачунима се интерпретира као догађај „лома“ и служи као основ за квантификацију сигурности. Процена сигурности подразумева рачунску проверу (детерминистичку или пробабилистичку) да ли конструкција испуњава одговарајуће критеријуме сигурности у односу на сва гранична стања.

Историјски посматрано, процена сигурности конструкција ослањала се углавном на детерминистичке анализе у којима се сигурност квантификовала кроз коефицијенте сигурности. Коефицијент сигурности бране (или фактор сигурности) се може дефинисати као мера резерве сигурности у односу на гранично стање при коме долази до лома. У случају насутих брана и граничних стања која се дефинишу у складу са конструктивним начинима рушења дефинисаних у поглављу 2.1, детерминистички критеријуми сигурности могу се дефинисати на следећи начин<sup>2</sup>:

- Унутрашња ерозија (piping) јавља се када хидраулички градијент кроз тело бране или темељ премаша критичну вредност при којој струјање кроз поре може да покрене честице тла. Критеријум сигурности за овај модалитет лома најчешће подразумева идентификовање највећих градијената у моделу (заснованом најчешће на методи коначних елемената) и поређење са критичним вредностима за поједине материјале у телу бране. Квантификација нивоа сигурности у овом случају се изражава кроз фактор сигурности за филтрациону стабилност (унутрашњу ерозију) који представља однос критичног и прорачунатог градијента или маргину сигурности која представља разлику критичног и прорачунатог градијента.
- Глобална стабилност бране представља модалитет лома који се јавља формирањем клизне површи услед прекорачења чврстоће материјала у телу бране и/или околне стене. Критеријум сигурности у овом случају зависи од одабране прорачунске методе (методе граничне равнотеже, метода коначних елемената или друге). Квантификација сигурности изражава се кроз фактор сигурности за глобалну стабилност који представља меру удаљености конфигурације прорачунских резултата од лома. У складу са одабраном прорачунском методом, удаљеност од лома дефинише се на различите начине (видети поглавље 3.1.3 за више детаља о прорачуну фактора сигурности бране применом МКЕ).

Многи стандарди и данас прописују арбитрарне критеријуме сигурности засноване на дозвољеним вредностима фактора сигурности. Такав приступ, иако примењен у многим практичним случајевима нема утемељење у математичком апарату нити има јасну методолошку позадину. Осим тога овакав приступ не разликује и не квантификује различите изворе непоузданости. Фактор сигурности (у Н-теорији) не одражава јасно и експлицитно ниво сигурности већ је у питању релативна мера сигурности. Релативна, јер је дефинисана искуствено на основу историјски документованих рушења конструкција. У другој половини прошлог века, у струци се јавља потреба за систематским уважавањем непоузданости. Током 1978. објављени су први радови који уводе концепт анализе ризика за бране (Bowles и др. [66]). Ови пионирски кораци трасирали су пут ка модернијим стандардима у којима се формулација критеријума сигурности заснива на принципима вероватноће и појма поузданости.

---

<sup>1</sup> Гранична стања која се везу за појам сигурности називају се гранична стања носивости.

<sup>2</sup> Ово није једини могући начин да се дефинишу функције граничног стања.

Долазак теоријских оквира вероватноће и поузданости у инжењерство брана отворио је врата широком спектру метода за квантификацију сигурности које се називају пробабилистичке анализе. Пробабилистичке анализе омогућавају да се моделира вероватноћа свих значајних извора непоузданости (параметри понашања тла, оптерећења и др.) и прорачунски добије мерљива информација о вероватноћи отказа и индексу поузданости конструкције, који постају нова мера сигурности. Ове вредности могуће је упоредити са захтеваним вредностима вероватноће отказа или индекса поузданости који се прописују у различитим стандардима заснованим на теорији поузданости. ISO стандарди (попут [67]) су још од 1980-их формулисали општа начела за циљни ниво поузданости и методе анализе поузданости, чиме су поставили теоријску основу за савремене критеријуме сигурности брана. Еврокод стандарди [33] такође прописују циљане индексе поузданости као кровне критеријуме сигурности.

Развој појма поузданости и саме теорије поузданости (енг. *Reliability Theory*) као примењене гране теорије вероватноће (видети поглавље 3.2) може се пратити од прве половине 20. века, најпре у контексту електронике и војне индустрије. Теорија поузданости је добила значајан замах педесетих година прошлог века, када су објављени први велики радови који су формално дефинисали концепте вероватноће отказа [11]. Од тада се теорија поузданости проширила и на друга подручја технике – нуклеарну индустрију, телекомуникације, машинство и, нарочито, грађевинарство ([71], [67]).

У савременој инжењерској пракси, поузданост (енг. *Reliability*) конструкције представља кровни појам који у себе укључује појмове сигурности, употребљивости и трајности (у новије време све више укључује и појмове попут резилијентности и робустности). Поузданост представља идеју да конструкција мора да одговори свим критеријумима који су важни за њено успешно и дугорочно функционисање и дефинише се као вероватноћа да ће конструкција у предвиђеном животном веку испунити све захтеве у погледу сигурности, употребљивости и трајности ([67]).

Теорија поузданости представља својеврсни математички „полигон“ који повезује вероватноћу, статистику и инжењерску праксу, омогућавајући успостављање објективних, мерљивих и уједначених критеријума поузданости конструкција [67], у које се убрајају између осталог и критеријуми сигурности<sup>3</sup>.

Основни принципи поузданости конструкција примењени у Еврокоду су описани у стандардима EN 1990 [33] и ISO 2394 [67]. Избор нивоа поузданости, зависи од:

- узрока и начина достизања граничног стања,
- последица лома у погледу ризика живота и повреда људи, као и потенцијалних економских губитака,
- трошкова и поступака неопходних за смањење ризика појаве лома.

Имајући у виду наведене параметре, Еврокод [33] дефинише три различите класе према последицама CC (Consequences Classes), у циљу разликовања нивоа поузданости.

---

<sup>3</sup> Поред критеријума сигурности постоје и дефинисани критеријуми употребљивости и трајности који морају бити задовољени да би конструкција била поуздана. Ови критеријуми везују се за гранична стања употребљивости и трајности. У ранијим детерминистичким анализама, ови критеријуми су такође били детерминистички дефинисани.

**Табела 2-1** Дефиниција класа према последицама (CC – Consequences Class) [33]

Класа према последицама	Опис	Примери зграда и инжењерско грађевинских објеката
CC3	Велике последице за губитак људских живота, или врло велике економске и социјалне последице, или последице по животну средину	Трибине, јавне зграде код којих су последице лома велике (на пример концертна дворана)
CC2	Средње последице за губитак људских живота, значајне економске и социјалне последице, или последице по животну средину	Стамбене и административне зграде, јавне зграде код којих су последице лома средње (на пример административна зграда)
CC1	Мале последице за губитак људских живота, као и мале или занемарљиве економске и социјалне последице, или последице по животну средину	Пољопривредне зграде у које људи нормално не улазе (на пример зграде за складиштење), стаклене баште

Директно у вези са класама према последицама, дефинисане су и класе поузданости RC (Reliability Classes) за које је мера поузданости изражена помоћу захтеваног индекса поузданости  $\beta$ . Детаљнији преглед и објашњење основних појмова теорије поузданости, укључујући индекс поузданости  $\beta$  и вероватноћу лома  $P_f$ , дат је у поглављу 3.2.1.

У следећој табели дате су везе између класа поузданости и вредности индекса поузданости за различите референтне периоде за гранична стања носивости.

**Табела 2-2** Препоручене најмање вредности за индекс поузданости  $\beta$  (гранично стање носивости)<sup>4</sup> [33]

Класа према поузданости	Најмање вредности за $\beta$	
	Референтни период 1 година	Референтни период 50 година
RC3	5,2	4,3
RC2	4,7	3,8
RC1	4,2	3,3

Индекс поузданости  $\beta$  је функција вероватноће лома  $P_f$ :

$$P_f = \phi(-\beta) \quad [1]$$

где је  $\phi$  функција кумулативне расподеле за стандардизовану нормалну расподелу. Негативан предзнак се уводи да би индекс  $\beta$  био позитиван за  $P_f < 0,5$ . Веза између  $P_f$  и  $\beta$  приказана је у следећој табели:

**Табела 2-3** Веза између индекса поузданости  $\beta$  и вероватноће лома  $P_f$  [33]

$P_f$	$10^{-1}$	$10^{-2}$	$10^{-3}$	$10^{-4}$	$10^{-5}$	$10^{-6}$	$10^{-7}$
$\beta$	1,28	2,32	3,09	3,72	4,27	4,75	5,20

Насуте бране спадају у објекте са веома великим последицама отказа (губитак живота, огромна материјална штета и утицај на околину) па се обично сврставају у највишу класу поузданости RC3. За такве конструкције захтева се изузетно мала вероватноћа отказа, што одговара високој вредности индекса  $\beta$ . На пример, за конструкције RC3 које подразумевају велики ризик по животе и имовину (попут брана), Еврокод препоручује  $\beta \approx 4,3$  за референтни период од 50 година. Дакле, конструкција се, према пробабилистичком критеријуму, сматра довољно сигурном ако је прорачунски индекс поузданости  $\beta_{\text{постигнуто}} \geq \beta_{\text{захтевано}}$  (нпр.  $\geq 4,3$  за RC3) за сва

<sup>4</sup> Граничне вредности индекса поузданости дефинисане су и за гранична стања употребљивости, али она нису у фокусу овог рада.

разматрана гранична стања. Докази граничних стања морају да се спроведу за све релевантне прорачунске ситуације и комбинације оптерећења [33].

Еврокод експлицитно наводи да се за конструкције са високим ризиком и нетипичне конструкције препоручује примена праве пробабилистичке анализе. Ово посебно важи за објекте као што су насуте бране великих димензија, где потенцијални отказ може имати катастрофалне последице.

Пробабилистички приступ омогућава реалистичнију процену сигурности брана од детерминистичког, одговарајући између осталог на питања колика је реална вероватноћа отказа за различите прорачунске сценарије и како варијабилност параметара утиче на сигурност бране. Овај рад бави се пробабилистичким анализама сигурности насутих брана (уз имплементацију података осматрања), и као такав се ослања на критеријуме сигурности у својој основној пробабилистичкој формулацији.

### **2.3 Улога техничког осматрања у управљању сигурношћу брана**

Брига о безбедности бране не престаје након њене изградње, већ се наставља током њеног читавог животног века. Континуирано осматрање и анализа података о понашању бране представљају критичан аспект одржавања њене безбедности. Савремене бране су опремљене бројним инструментима и подлежу редовним визуелним прегледима како би се благовремено уочиле промене у конструкцији. Тачно идентификовање и дефинисање трендова у подацима осматрања и праћење њиховог развоја од суштинске је важности за безбедност бране. Пажљивим анализама измерених података кроз време може се детектовати могуће критично стање за безбедност бране. Супротно томе, измерени подаци могу бити средство којим се потврђује уобичајено стање бране, које не захтева мере санације [61].

Сигурност бране се мора посматрати и анализирати кроз интегрално сагледавање свих информација и резултата о понашању бране током њене експлоатације [63]. У фази пројектовања, многи фактори и параметри се претпостављају у односу на коришћене материјале, понашање бране под предвиђеним оптерећењима, услове темељења и понашање темеља у току експлоатације. У већини случајева материјали се испитују у лабораторијама, а пројекти су засновани на прорачунима да ће брана и темељ деловати у оквиру постављених претпоставки, испуњавајући захтеване мере сигурности. У стварним условима, увек постоје велике варијације у својствима материјала и конструкцијском понашању бране, што доводи до услова који одступају од првобитних претпоставки. Такође, неадекватно познавање темеља, као резултат недовољних геолошких истраживања или погрешног тумачења и неодговарајућег третмана, доводи до нежељених безбедносних проблема бране. Постојеће искуство у вези осматрања брана заједно са познавањем механике тла и стена, као и искуства извучена из многих отказа брана, довели су до појаве и напретка инструменталног надзора и технолошких иновација у овој области. Подаци који се сада добијају са мерних инструмената су електронски са аутоматским читавањем, што омогућава њихово преношење у реалном времену у центре за даљинско управљање безбедношћу брана. Међутим, иако је дошло до великог напретка у прикупљању података, обради и техникама мерења, фактори који утичу на перформансе бране или индикатори учинка нису се променили, стављајући већи нагласак на важност надзора мерних инструмената као једног од заштитних механизма за сигурност бране [61].

Величине које се осматрају на самим бранама, директно показују одговор конструкције на спољашње утицаје, изражавајући најпре њено померање као целине и промену унутрашњег напонско-деформационог стања. Ове су величине најтесније повезане са примењеним конструктивним системом, као и са стањем његове носивости и употребљивости. Избор величина које треба пратити и мерити на сваком појединачном објекту није могуће универзално дефинисати, с обзиром да он зависи од много чега: врсте конструкције, њених димензија, карактеристика терена, последица евентуалног рушења и сл. У том смислу, сваки

систем осматрања је посебан и односи се на једну одређену брану, одређеног конструктивног типа, одређених карактеристика фундамента и др. [61]

За сваку велику брану су, по правилу, у склопу пројекта система за техничко осматрање дате врсте мерења, број и локација мерних места, начин и динамика вршења мерења и прикупљања података, принцип рада мерне опреме и остале карактеристике изведеног система техничког осматрања бране и њеног окружења [63]. У случају да пројекат система за техничко осматрање није израђен, онда се наведене карактеристике могу наћи у пројектној документацији за извођење или у главној пројектној документацији.

У следећој табели су дате врсте мерења у склопу техничког осматрања великих брана са њиховим окружењем [61]. Наведено је које се мерне величине осматрају, на који начин (визуелно, мануелно или аутоматски) и којом мерном опремом.

**Табела 2-4** Врсте мерења у склопу техничког осматрања насуте бране са њеним окружењем [61]

Мерне величине	Начин мерења	Мерна опрема
Ниво воде у акумулацији	Визуелно	Водомерна летва
	Аутоматски	Електрични нивомер
Ниво (кота) доње воде	Визуелно	Водомерна летва
	Аутоматски	Електрични нивомер
Температура ваздуха у окружењу	Визуелно	Термометар за ваздух (нпр. са алкохолом)
	Аутоматски	Електрични термометар за ваздух
Падавине	Мануелно	Хелманов кишомер
	Аутоматски	Електрични кишомер
Температура воде из акумулације	Аутоматски	Електрични термометар за воду
Температура доње воде	Аутоматски	Електрични термометар за воду
Температура ваздуха у галеријама	Визуелно	Термометар за ваздух (нпр. са алкохолом)
	Аутоматски	Електрични термометар за ваздух или термистор (у склопу инструмента друге намене)
Пијезониво (или хидростатички притисак), мерен најчешће у темељима бране	Мануелно	Пијезометар са манометром
	Аутоматски	Пијезометар са електричном пијезометарском сондом
Ниво воде у брани	Мануелно	Мерна пантљика са индикатором нивоа воде, отворена пијезометарска конструкција
Ниво подземне воде на обали	Мануелно	Мерна пантљика са индикатором нивоа воде, отворена пијезометарска конструкција
	Аутоматски	Пијезометар са електричном пијезометарском сондом
Порни притисак у глиненом језгру	Аутоматски	Ћелија за порни притисак
Проток дренажне и процурне (процедне) воде	Мануелно	Избаждарена мерна посуда и штоперица
	Аутоматски	Електрични нивомер у зони преливног прага
Проток на профилу низводно од бране	Визуелно	Водомерна летва
	Аутоматски	Електрични нивомер
Вертикално померање измерено геодетским методама	Мануелно	Геодетски нивелир
Хоризонтално померање измерено геодетским методама	Мануелно	Теодолит (геодетски инструмент за мерење праваца и дужина)
Тотални притисак у брани и/или на темељној спојници	Аутоматски	Ћелија за тотални притисак
Инклинација бране по висини	Мануелно	Инклинометар, инклинометарска цевна конструкција
Слегање насуте бране по висини	Мануелно	Електромагнетна сонда, цевна конструкција са магнетним или металним прстеновима

Најчешће се током експлоатације брана не осматрају све приказане величине, већ се систем техничког осматрања прилагођава у зависности од потреба и специфичности објеката, а разликује од бране до бране. Рецимо, ако насута брана нема изведену контролну (ињекциону) галерију у њеним темељима, онда се не може осматрати хидростатички притисак у темељима бране помоћу пијезометара са манометром, као ни температура ваздуха у галерији. Такође, нису ни све приказане мерне величине од истог значаја за сигурност бране, али се осматрају ради стицања комплетне слике понашања објекта и окружења.

Проток дренажне и процурне (процедне) воде се најчешће осматра у темељним галеријама бране где се она скупља, те испумпава у доњу воду. У случају да није формирано мерно место за мерење протока ове воде (преливни праг са нивомером), могуће је одредити количину испумпане воде на основу времена рада пумпи познатог капацитета. Осим овако кумулативно прикупљене воде, постоје и мерна места за локално одређивање количине издрениране воде.

Понашање и функционисање сваке високе бране потребно је пратити током њене експлоатације коришћењем и анализирањем резултата техничког осматрања (укључујући и редовно визуелно осматрање).

Преглед и анализа података осматрања у циљу доношења закључака у вези оцене стања и понашања објекта је веома сложена и опсежна активност, нарочито ако је мерни систем обиман. Оцена стања и понашања није искључиво бројчана и квантитативна, већ је често описна (на пример: задовољавајуће стање, одговара стању нормалне експлоатације и сл.), заснована на инжењерском расуђивању.

Подаци добијени осматрањем немају пуни значај док се детаљно не анализирају и протумаче у контексту сигурности, која у великој мери зависи од раног уочавања и разумевања промена у понашању конструкције. Истраживања показују да је идентификација трендова у низовима података о понашању бране и праћење њихове еволуције један од кључних аспеката за процену сигурности бране. Анализа прикупљених информација омогућава инжењерима да разликују нормално понашање конструкције од потенцијално опасних одступања и да предузму превентивне мере пре настанка озбиљних проблема [23]. У циљу дубље анализе података осматрања и процене стања бране, користе се разни статистички и аналитички алати. Интерпретација података се мора радити периодично, у унапред предвиђеним размацима [21].

За сваки инструмент или параметар утврђује се уобичајени (очекивани) опсег вредности на основу вишегодишњег праћења и инжењерских процена на основу генералног разумевања понашања конструкције. Прегледом дијаграма временских серија може се уочити да ли вредности имају генерални пораст, пад или периодичне обрасце. Сви подаци се упоређују са очекиваним опсезима вредности. Поред појединачних дијаграма, често се различити подаци приказују заједно ради поређења – нпр. дијаграм на коме су на истој временској оси приказани ниво језера и читавања пијезометра у брани.

Пожељно је инжењерски анализирати и проверити да ли су мерења, која могу бити на неки начин повезана, међусобно сагласна. Повезаност може бити локацијске природе (мерења на суседним мерним местима) или физичке природе (физички различите величине које осликавају јединствен модел понашања – на пример померања и ротације или узгони и протоци).

Један од главних циљева интерпретације података осматрања бране је рано препознавање ризика, тј. индикатора да би могао настати некакав проблем. Међутим, ова активност не даје конкретан одговор на питање *колико* је брана сигурна – одговор на ово питање добија се проценом сигурности бране заснованој на рачунским анализама.

Резултати мерења се традиционално користе и за одређивање (калибрацију) термичких, филтрационих и напонско-деформационих параметара МКЕ модела бране и околног терена, тако да резултати термичких, филтрационих и напонско-деформационих прорачуна (израчунатих употребом МКЕ модела) најбоље одговарају резултатима извршених мерења. С



обзиром на то да се приликом пројектовања брана користе претпостављени параметри (који су у најбољем случају усклађени са резултатима истражних радова у зони бране и са резултатима испитивања материјала у процесу грађења бране), накнадним анализама понашања бране на бази резултата техничког осматрања и калибрисањем параметара одговарајућег МКЕ модела, може се утврдити колико се они разликују од пројектних.

Подаци осматрања представљају репере запаженог понашања конструкције који приликом моделирања понашања постојеће бране у фази експлоатације постају најбитнији критеријум за контролу резултата МКЕ модела. С обзиром на то да су оптерећења и експлоатациони услови бране у општем случају променљиве величине, подаци осматрања такође ће бити променљиве величине. Могуће је увидети одређене трендове у њиховом понашању, али због комплексне суперпозиције спољних утицаја и нелинеарног понашања материјала који дефинише одговор конструкције подаци осматрања не могу бити увек идентичне величине у посматраним прорачунским ситуацијама. Прецизност мерног инструмента такође утиче на ову дисперзију измерених података, као и грешке при мерењима, записивању резултата и слично. Подаци осматрања у некој дефинисаној прорачунској ситуацији због тога немају детерминистичку, него стохастичку природу и њихово понашање прикладно је описати функцијом расподеле осматраних вредности.

Уобичајен приступ укључивања података осматрања у прорачуне подразумева калибрацију улазних параметара материјалних модела путем повратних анализа, што представља сложен и често нумерички захтеван процес, посебно у случајевима када се осматрања третирају као стохастичка величина. Због тога су подаци осматрања у анализама најчешће разматрани у оквиру детерминистичког оквира, док је њихова примена у пробабилистичким анализама била ограничена и ретка. Иако је у теорији могуће вршити ажурирање улазних расподела на основу података осматрања применом бајесијанске теорије вероватноће, у пракси се овај приступ суочава са озбиљним нумеричким ограничењима, посебно у случајевима сложених система као што су велике насуте бране са десетинама или стотинама мерних места и значајном непоузданошћу у вези са улазним параметрима [93]. У овом раду предлаже се методологија која омогућава интеграцију података осматрања у оквир пробабилистичке анализе сигурности без потребе за ажурирањем улазних расподела. Предложени приступ уважава стохастичку природу осматраних података и омогућава њихово коришћење у анализи на нумерички ефикасан начин.

Подразумева се да претходно наведене активности, контроле и анализе у циљу оцене стања и понашања бране треба вршити коришћењем само исправних, валидних и квалитетних резултата техничког осматрања.

### 3 САЖЕТ ПРИКАЗ ПРОРАЧУНСКИХ МЕТОДА ПОТРЕБНИХ ЗА АНАЛИЗУ СИГУРНОСТИ

#### 3.1 Рачунске симулације на бази физички заснованих модела

Предвиђање понашања и процена сигурности бране ослањају се на спровођење, анализу и интерпретацију рачунских симулација релевантних физичких процеса на одговарајућим физички заснованим нумеричким моделима. У случају насутих брана, на одговарајућим физички заснованим нумеричким моделима треба да се врше симулације филтрационих и напонско-деформационих процеса, узимајући при томе у обзир и њихову интеракцију (у општем случају ту су и термички процеси, али они за насуте конструкције углавном нису од интереса).

Прве нумеричке анализе брана ослањале су се на класичан приступ решавања напонско-деформацијских проблема, развијен у првој половини XX века, када је Карл Терцаги (1943) у својој *Теоријској механици тла* геотехничке проблеме сврстао у две групе: проблеме деформација (првенствено слегања) и проблеме стабилности (стабилност косина, носивост тла, земљани притисци) [25]. Проблеми деформисања су решавани применом закона теорије еластичности, тако што је у домену радних напона понашање тла моделирано линеарним Хуковим законом [108]. За решавање проблема стабилности најједноставније је било реално тло представити моделом идеално пластичног материјала. Проблем се у потпуности решава преко услова равнотеже и услова лома. Нумеричка метода којом се овај проблем најчешће решава назива се Метода граничне равнотеже [30]. Тачност решења која се добијају применом ове методе често се доводи у питање због свих претпоставки које је неопходно увести, али је и упркос томе овај приступ и данас присутан у инжењерској пракси због своје једноставности и општог карактера.

Генерално, савремена нумеричка анализа брана представља сложен инжењерски и рачунски задатак. Развој нумеричких метода за анализу конструкција у интеракцији са тлом и водом се одвијао постепеним повећавањем сложености прорачунског модела, како би се у обзир узело што више аспеката реалног понашања конструкције. Метода коначних елемената (МКЕ) данас се сматра најпоузданијом и најчешће коришћеном нумеричком методом за инжењерску анализу сложених конструктивних система у геотехници. МКЕ се заснива на физичкој дискретизацији разматраног проблема на скуп коначних елемената који су међусобно повезани у заједничким тачкама (чворовима), између којих се помоћу одговарајућих интерполационих функција описује термичко, напонско-деформационо и филтрационо стање [121]. Код геотехничких конструкција, МКЕ омогућава детаљно моделовање свих компоненти проблема: геометрија конструкције, нелинеарно понашање грануларне средине, интеракција напонско-деформационих процеса са термичким и филтрационим процесима и др.

Важно је да нумерички модели буду репрезентативни за све процесе који се симулирају на брани како би им се могло дати довољно поверења за контролу сигурности и употребљивости. Да би модели били репрезентативни, потребно је да буду развијени на савременим софтверским платформама и да се заснивају на реалним подацима о измереним величинама, односно да се произвољне претпоставке у што већој мери замене чињеницама.

Нумеричко понашање физички заснованих модела зависи од помоћу одговарајућих параметара система. Параметри филтрационих процеса су коефицијенти филтрације за поједине квазихомогене зоне у моделу. Параметри напонско-деформационих процеса зависе од усвојеног конститутивног модела за одређене зоне. Конститутивни модели који коректно

математички изражавају везу између напона и деформација у целом распону могућих стања напона, укључујући и лом, интензивно су се развијали у последњих пола века. Развој почиње почетком шездесетих година XX века на Кембриџу [100], од модела који се заснивају на концепту критичног стања, а који су актуелни и данас. Од избора сложености конститутивног модела зависи и број параметара. За комплексније еласто-пластичне конститутивне моделе материјала који могу да симулирају ојачање и/или оштећење у материјалу број параметара је веома велики. Параметри напонско-деформационих процеса се морају дефинисати за сваку квазихомогену зону у моделу, па се самим тим цео поступак значајно усложњава.

У наставку је дат кратак осврт на математичке формулације филтрационих и напонско-деформацијских процеса. Нешто детаљније теоријске основе о моделирању ових процеса приложене су у Анексу 1.

### 3.1.1 Рачунске симулације филтрационих процеса

Филтрациони процеси на брани се најчешће морају посматрати интегрално на целокупном објекту у интеракцији са околном стенском масом, нарочито због контурних услова, дренажног и заптивног система. У неким ситуацијама могућа је израда и једноставнијих појединачних модела појединих сегмената бране, што опет зависи од стварног понашања и оправданости примене таквог приступа.

Вода се у порозној средини креће кроз сложен систем међусобно спојених пора. За постављање основних једначина уводи се модел континуума. Основну једначину која дефинише закон струјања (у ламинарном режиму течења), поставио је Дарси (Henry Darcy) још 1856. године, према коме је флуks пропорционалан градијентима потенцијала [23]. На основу једначине континуитета и Дарсијевог закона изводи се хидродинамичка једначина за нестационарно струјање, која садржи основне параметре који утичу на струјање: коефицијент филтрације и ефективну порозност (за слободно струјање), односно специфичну акумулативност (за струјање под притиском), као нелинеарне функције порног притиска. Ове зависности се одређују емпиријским и експерименталним методама [7]. Гранични услови који се срећу у решавању проблема струјања кроз порозну средину могу бити: задат потенцијал, задат површински проток (флуks), као и гранични услов слободне површине. За ове диференцијалне једначине не постоји у општем случају аналитички облик решења. У инжењерској пракси данас се користе нумеричке методе (метод централних разлика, метод коначних елемената) за њихово решавање.

За анализу филтрационих процеса су развијени нумерички солвери за решавање проблема струјања подземних вода кроз порозну непрекидну средину (солид) методом коначних елемената, са произвољним граничним условима. Почетни услови (почетни потенцијал) се задају само за нестационарну анализу. Гранични услови могу бити: задат потенцијал, задат површински проток (флуks) и задат запремински извор/понор. Када се потенцијал и флуks мењају током времена, ради се о нестационарној филтрационој анализи.

Нумеричком анализом филтрационих процеса добијају се следеће величине: порни притисци, хидраулички градијенти, проток (флуks), потенцијали и друго.

### 3.1.2 Рачунске симулације напонско-деформационих процеса

Анализом напонско-деформацијских процеса одређује се поље померања, повратних и неповратних деформација, напона и других релевантних величина уведених као интерне променљиве, а за дефинисане контурне и почетне услове и у општем случају у функцији времена. Коришћењем услова равнотеже и граничних услова изводи се принцип виртуалног рада, који се заснива на једнакости виртуалног рада унутрашњих и спољашњих сила. Виртуални рад унутрашњих сила представља рад напона на виртуалним деформацијама, док

виртуални рад спољашњих сила представља рад запреминских и површинских сила. Ова релација представља основну једначину равнотеже у механици деформабилног тела.

Осим наведених једначина равнотеже, неопходно је дефинисати и конститутивне релације, односно изразе који доводе у везу напон и деформацију (и време, када је реч о материјалима осетљивим на брзину промене стања напона и деформација). Конститутивне релације у општем случају могу имати веома сложен облик [121].

За анализу напонско-деформационих процеса су развијени нумерички солвери за решавање линеарних и нелинеарних проблема изложених дејству статичких и динамичких врста оптерећења. Намењени су анализама различитих типова проблема, као што су: материјална нелинеарност, геометријска нелинеарност, анализа стабилности, анализа посткритичног понашања конструкција, нелинеарна динамика, контактни проблеми, велика померања, велике деформације и др. Нумерички солвер за анализу напонско-деформационих процеса садржи различите типове 1Д, 2Д и 3Д коначних елемената са и без међучворова, као и велики број материјалних модела намењених анализама механичког понашања различитих типова материјала.

Приликом анализе напонско-деформационих процеса контурни услови могу бити задати по померањима и/или напонима. Нумеричком анализом напонско-деформационих процеса добијају се следеће величине (векторске и скаларне): померања, силе, напони, укупне деформације, пластичне деформације и др.

### 3.1.3 Прорачун коефицијента сигурности методом редукције смичуће чврстоће

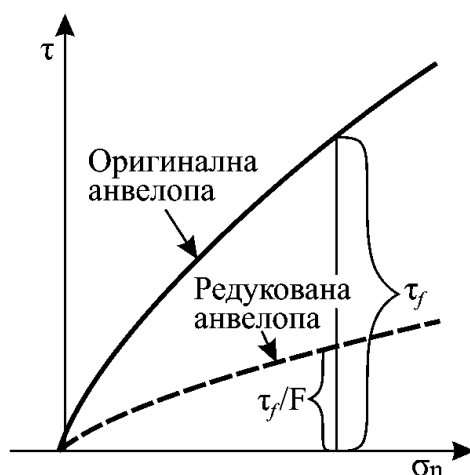
Глобална стабилност представља модалитет лома који се јавља формирањем клизне површи услед прекорачења чврстоће материјала у телу бране и/или околне стене. У нелинеарним МКЕ анализама, неуспех решавања (неконвергенција) прорачуна указује на то да је модел достигао гранично стање, односно да је у тлу дошло до развоја пластичног клизања које спречава успостављање равнотеже. Квантификација нивоа сигурности за ово гранично стање применом МКЕ се процењује применом методе редукције смичуће чврстоће материјала (*Shear Strength Reduction - SSR*) чији резултат представља фактор сигурности који се односи на стабилност косина. Метода SSR подразумева да се иницијални параметри чврстоће редукују прогресивно и прорачун сукцесивно понавља све док постоји нумеричка конвергенција резултата [48]. Максимална вредност редукционог фактора иницијалне чврстоће за коју је остварена нумеричка конвергенција напонско-деформацијског прорачуна дефинише се као удаљеност од отказа, односно фактор сигурности.

Главне карактеристике методе редуковања смичуће чврстоће су:

- могуће је наћи површ по којој ће доћи до клизања услед губитка стабилности, која у општем случају не мора бити кружно-цилиндрична, као што се то претпоставља код метода граничне равнотеже
- ову методу је могуће примењивати за различите услове оптерећења
- могуће је добити информације о расподели напона, деформације, померања и порних притисака непосредно пре тренутка губитка стабилности.

Редуковање смичуће чврстоће у случају произвољног материјалног модела који нема ојачање/омекшање се састоји од следећих корака:

- Редуковање анvelope лома за фактор  $F$
- Фитовање материјалних константи које одговарају редукованој анvelopи
- Коришћење фитованих материјалних константи у поновној МКЕ анализи.



**Слика 3.1** Редуковање нелинеарне анvelope лома модела (пример корака 1, слика преузета из [59])

На основу редуковане анvelope одређују се параметри чврстоће одговарајућег материјалног модела, на основу кога се врши напонско-деформациони прорачун. Израчунавање вредности материјалних константи за редуковану анvelope лома се врши коришћењем неке од метода за налажење минималног одступања (метода најмањих квадрата и слично).

За модификовани Cam-Clay материјални модел важи другачија методологија јер се јавља ојачање, односно омекшање материјала (видети Анекс 1 за детаљнији опис).

## 3.2 Примена теорије поузданости

Циљ овог поглавља јесте да прикаже основне идеје пробабилистичке анализе сигурности која се заснива на теоријама вероватноће и поузданости, као и да опише методе које су коришћене у оквиру овог рада. Иако су међусобно повезане и често се примењују истовремено, ове две области нису истоветне.

Теорија вероватноће (пробабилистичка теорија) је базична научна дисциплина. Она је грана математике која описује насумичне појаве и бави се анализом расподела случајних величина, вероватноћом њихове појаве и проучавањем закона који управљају тим процесима. Користи се у свим областима науке и технике (физика, статистика, инжењерство, економија) као теоријски темељ за било који вид анализе непоузданости. У пробабилистичкој анализи насутих брана, теорија вероватноће омогућава да се моделира расподела насумичних параметара (нпр. карактеристике материјала). Захваљујући теорији вероватноће, добијају се статистички модели прорачунских параметара који осликавају реалне услове. Она пружа математичке алате за дефинисање расподела случајних величина и омогућава да се кроз статистичку анализу историјских или експерименталних података одреде параметри поменутих расподела. Основни појмови теорије вероватноће изложени су у Анексу 2.

Теорија поузданости је примењена дисциплина, настала као инжењерска грана која на директан начин примењује методе вероватноће и статистике у циљу квантификације поузданости посматраног система. Она се бави конкретним питањима – како да се процени вероватноћа да нека конструкција (као сложен систем) безбедно функционише у одређеним условима у задатом временском периоду. У ту сврху развијене су математичке методе чији основни циљ јесте процена вероватноће отказа за сва дефинисана гранична стања.

### 3.2.1 Основе теорије поузданости

Конструкција која је предмет анализе поузданости (енг. *Reliability Analysis*) се у теорији поузданости назива систем који садржи просторне и временске компоненте које описују

његово постојање и процесе који се у њему одвијају [35] (на пример, насута брана у садејству са околном стеном и водом представља систем). Стога први корак у анализи поузданости представља дефинисање модела система, односно усвајање претпоставки које се тичу нумеричке репрезентације система и идеализација које су усвојене за потребе анализе (на пример, креирање модела заснованог на методи коначних елемената, усвајање одговарајућих материјалних модела за различите материјале, усвајање идеализација везаних за моделирање физичких процеса итд.). Ниво детаљности и сложености модела зависи од типа проблема који се разматра, могућих последица и других фактора и може веома варирати (метода нумеричке анализе, дводимензионална или тродимензионална анализа, линеарна или нелинеарна веза између улазних величина и одговора система итд.). Модел система суштински представља нумерички алат који претвара улазне параметре (оптерећења, параметри понашања материјала, геометријске карактеристике итд.) у одговоре система који описују понашање конструкције у задатим условима (померања, напони, порни притисци, градијенти, SSR фактори итд.). Одговори система, као и улазни параметри, су пробабилистичке величине и могу се представити функцијама расподеле вероватноће [83].

Након дефинисања система потребно је утврдити на који начин може бити угрожена поузданост система [35]. Овај корак подразумева пре свега идентификацију могућих граничних стања која угрожавају поузданост система (или неких његових компоненти). Ово је веома важан корак и представља неизоставан део пробабилистичке анализе. У теорији поузданости систем се сматра непоузданим уколико је неко од граничних стања достигнуто, односно уколико је одговор система такав да нарушава барем један од критеријума поузданости дефинисаних за његова гранична стања. Критеријуми за достизање граничних стања формулишу се у функцији неког од одговора система (кроз граничне величине за померања, хидрауличке градијенте, SSR факторе и слично). Критеријуми за гранична стања носивости насутих брана су описани у поглављу 2.2.

У општем случају, непоузданости у анализи понашања конструкција односе се на оптерећења (*eng. load*) и отпорност (*eng. resistance*), тј. понашање материјала и ове две непоузданости су међусобно независне. Потпуни пробабилистички модел система стога обухвата статистички третман и једне и друге компоненте. Моделирање варијабилности оптерећења и материјала заснива се на статистичкој обради свих релевантних података у циљу дефинисања расподела вероватноће параметара модела који се на њих односе.

У пракси се често раздвајају различити случајеви оптерећења (прорачунске ситуације) и за сваки засебно спроводи анализа поузданости у којој статистички третман имају само параметри понашања материјала. Разлог лежи у томе што се ниво прихватљивог ризика може разликовати у зависности од разматране комбинације оптерећења. У том случају оптерећење има детерминистички третман.

Одговори система (нпр. померања, градијенти, SSR фактори), на основу којих су формулисани критеријуми за достизање граничних стања, математички представљају функције расподеле вероватноће које, у општем случају, зависе од вектора улазних променљивих. Вектор улазних променљивих ( $X$ ) може бити сачињен од  $M$  случајних променљивих ( $X_1, X_2, \dots, X_M$ ) које заједно чине простор улазних променљивих (*input space*) [50].

Уколико је простор улазних променљивих једнодимензионалан, то значи да постоји само једна случајна променљива (нека је то параметар отпорности материјала, означен са  $R$  – *resistance*) дефинисана функцијом расподеле  $f_R(r)$ . У скупу могућих вредности променљиве  $R$  може се дефинисати вредност  $s^*$  која дели скуп на два дела:

- Вредности променљиве које не нарушавају гранично стање ( $R > s^*$ ) – поуздано стање
- Вредности променљиве које доводе до отказа ( $R \leq s^*$ ) – стање отказа

Вероватноћа отказа  $P_f$  система са једном улазном променљивом се дефинише на следећи начин [35]:

$$P_f = P(R \leq s^*) = P\left(\frac{R}{s^*} \leq 1\right) \quad [2]$$

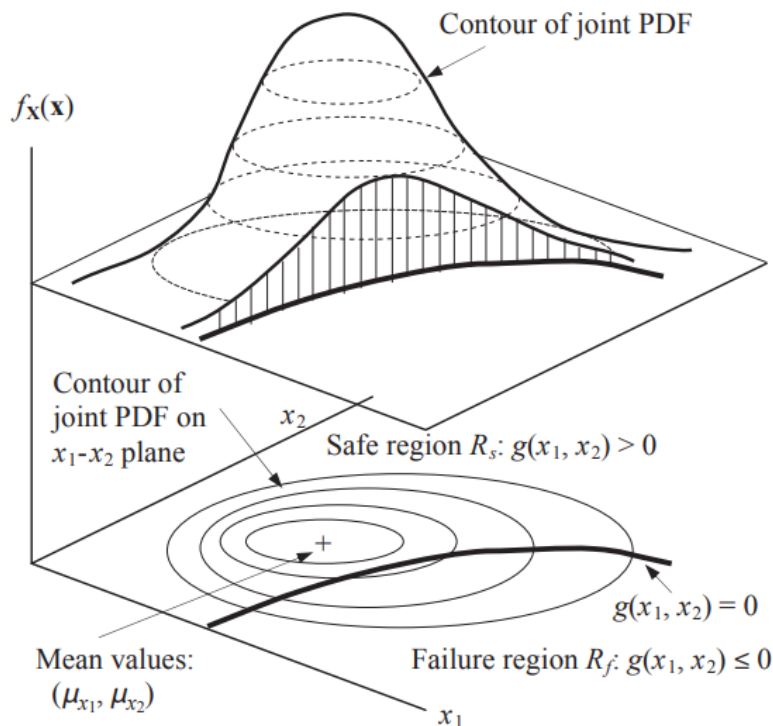
Вредност  $s^*$  представља граничну вредност у једнодимензионалном простору улазних променљивих. Аналогно томе, за  $M$ -димензионални простор улазних променљивих може се дефинисати површ која има  $(M-1)$  димензија (за  $M = 2$  то је крива, за  $M = 3$  то је равна итд.) која раздваја простор улазних променљивих на безбедан део  $R_s$  ( $s$  – safe) и небезбедан део простора  $R_f$  ( $f$  – failure). Ова површ може се математички дефинисати у форми  $g(X) = 0$ , а функција  $g(X)$  назива се функција граничног стања (енг. *Limit State Function - LSF*). Позитивне вредности функције  $g(X)$  представљају поуздано стање у простору улазних променљивих, док негативне представљају отказ [50].

$$\begin{aligned} R_s: g(X) &> 0 \\ R_f: g(X) &\leq 0 \end{aligned} \quad [3]$$

Вероватноћа отказа  $P_f$  (*Probability of failure*) дефинише се као вероватноћа да вектор  $(X)$  случајних  $M$  улазних променљивих  $(X_1, X_2, \dots, X_M)$  узме вредности које се налазе у домену простора улазних променљивих  $R_f$  [50]. Нека је  $f_j(X)$  заједничка функција расподеле вероватноће за све улазне променљиве из вектора  $(X)$ . Тада се вероватноћа отказа математички дефинише на следећи начин:

$$P_f = \int_{R_f} f_j(X) dX \quad [4]$$

Наредна слика приказује визуелизацију концепта функције критичног стања на дводимензионалном простору случајних променљивих:



Слика 3.2 Илустрација концепта функције граничног стања (слика преузета из [50])

Решење интеграла дефинисаног у изразу [4] у општем случају не постоји у затвореном облику. Проблем решавања овог интеграла није тривијалан и представља један од основних задатака теорије поузданости и основу за многе нумеричке методе и технике које су се са таквим циљем

развиле - тзв. методе поузданости (*енг. Reliability methods*). Иако постоје разлике у томе како различити аутори врше њихову класификацију, један од широко прихваћених приступа јесте подела према начину на који апроксимирају или израчунавају вероватноћу отказа [50]:

- методе апроксимације, међу којима су најпознатије:
  - Метода поузданости првог реда (*FORM, енгл. First-Order Reliability Method*)
  - Метода поузданости другог реда (*SORM, енгл. Second-Order Reliability Method*)
- методе узорковања (најпознатија метода из ове групе је Монте-Карло анализа).

Овај рад се фокусира на имплементацију података осматрања у анализу сигурности насутих брана применом Монте Карло анализе на сурогат моделу. У наставку су изложене теоријске основе које си тичу примене Монте-Карло методе (поглавље 3.2.2) и одабране методе машинског учења за креирање сурогат модела (поглавље 3.3).

### 3.2.2 Примена Монте-Карло анализе за процену сигурности брана

Монте-Карло анализа добила је име по Монте-Карло казину у Монаку, што сугерише на идеју случајног узорковања која се налази у срцу ове методе. Случајним узорковањем улазних параметара креира се велики број симулација одређеног проблема чији се резултати статистички обрађују и на тај начин формирају његово решење [83].

У контексту проблема везаних за поузданост конструкција Монте-Карло симулација подразумева да се за сваку улазну променљиву  $X_j$  (из вектора улазних променљивих  $X$ ) на случајан начин изабере узорак  $\hat{x}_i$ , чиме се формира вектор случајно изабраних вредности  $\hat{x}$  који је карактеристичан за сваку појединачну симулацију разматраног система. За узорковани вектор  $\hat{x}$  проверава се да ли је задовољено претходно дефинисано гранично стање (*limit state function LSF* – функција граничног стања, која се најчешће записује у облику  $g(\hat{x}) = 0$ ). Уколико је гранично стање нарушено, односно  $g(\hat{x}) \leq 0$ , сматра се да је конструкција несигурна за разматрани случај са вектором улазних параметара  $\hat{x}$ . Описани процес – узорковање новог вектора  $\hat{x}$  и провера граничног стања понавља се много пута (број понављања означава се са  $N$ ). Вероватноћа лома, односно нарушавања дефинисаног граничног стања конструкције дефинише се као [83]:

$$P_f = \frac{n(g(\hat{x}) \leq 0)}{N} \quad [5]$$

где  $n(g(\hat{x}) \leq 0)$  означава број симулација  $n$  у којима је дошло до лома. Јасно је да Монте-Карло метода много пута спроводи “лутрију” са предефинисаним улазним расподелама како би кроз анализу и обраду великог броја резултата симулација дошла до решења проблема, односно вероватноће лома [83]. За случај великог броја понављања  $N$ , овако срачуната вероватноћа лома тежи теоријској вредности вероватноће лома.

Сигурност насутих брана процењује се одређивањем вероватноће лома за сва гранична стања носивости дефинисана за овај тип конструкција (видети поглавље 2.1). Уколико је прорачунски модел заснован на методи коначних елемената, вероватноћа лома за свако од граничних стања (видети поглавље 2.2) дефинише се на следећи начин:

- Унутрашња ерозија (прекорачење хидрауличких градијената)

$$P_f = \frac{n(i^{MKE} \leq i^{cr})}{N} = \frac{n(i^{cr} - i^{MKE} \leq 0)}{N}, \quad g(X) = i^{cr} - i^{MKE} \quad [6]$$

где  $i^{MKE}$  представља прорачунску вредност максималног хидрауличног градијента за разматрану зону или цео модел, док  $i^{cr}$  представља критичну вредност хидрауличног градијента.



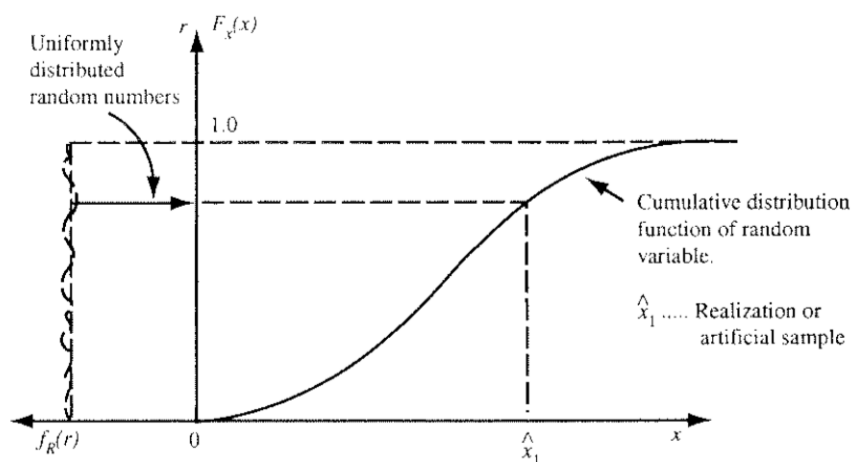
- Глобална стабилност

$$P_f = \frac{n(FS^{SSR} \leq 1)}{N} = \frac{n(FS^{SSR} - 1 \leq 0)}{N}, \quad g(X) = FS^{SSR} - 1 \quad [7]$$

где  $FS^{SSR}$  представља фактор сигурности срачунат методом редукције смичуће чврстоће (SSR).

### Генерисање случајних узорака (Sampling)

Случајни узорак  $\hat{x}_i$  из произвољне статистичке дистрибуције која описује улазну променљиву  $X_j$  у Монте-Карло методи добија се математичком техником која се назива метода инверзне трансформације [83]. Суштина ове методе заснива се на коришћењу кумулативне функције расподеле  $F_{X_j}$  у којој се све вредности  $F_{X_j}(\hat{x}_i)$  налазе по дефиницији у распону (0, 1). Случајним избором из униформне расподеле (0, 1) одређује се број  $r_i$  ( $0 < r_i < 1$ ) који се затим изједначава са  $F_{X_j}(\hat{x}_i)$ .



Слика 3.3 Метода инверзне трансформације (слика преузета из [83])

### Обрада резултата

Резултати Монте-Карло анализе су функције расподеле одговора система на основу којих су формулисани критеријуми за достизање граничних стања (у случају насутих брана то су градијенти  $i^{MKE}$  и SSR фактори  $FS^{SSR}$ ). Обрада резултата  $N$  симулација у Монте-Карло анализи може се вршити на више начина, као што су процена параметара претпостављене расподеле и метода хистограма.

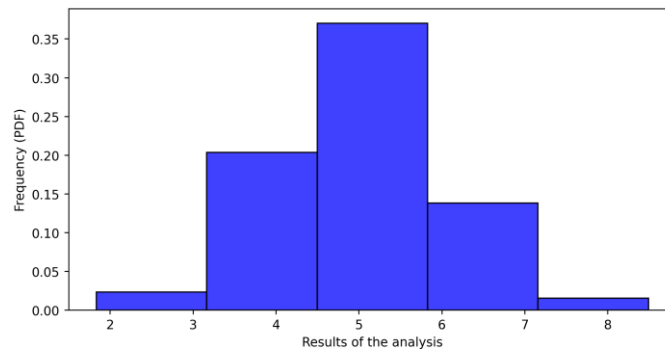
За резултате Монте-Карло анализе (обележимо сада функцију расподеле одговора система са  $X$ ) веома често се може претпоставити да прате Гаусову функцију нормалне расподеле. У том случају довољно је на основу скупа резултата  $N$  симулација система (где  $x_i$  представља резултат појединачне симулације,  $i = 1, 2 \dots N$ ) израчунати параметре претпостављене расподеле – средњу вредност  $\mu$  и стандардну девијацију  $\sigma$ .

Претпоставка нормалне (или било које друге) расподеле није у свим случајевима одговарајућа. Генералнији приступ за обраду резултата омогућава примена методе хистограма. Метод хистограма је један од најчешће коришћених начина за визуелизацију расподеле било каквог скупа података. Он подразумева поделу опсега података у више интервала, познатих као бинови, и пребројавање података који се налазе у сваком бину. Ово омогућава визуелизацију фреквенције података у различитим деловима њиховог опсега. Математички записано, вредност густине вероватноће за тачку  $x_i$  која се налази у центру посматраног бина  $i$  једнака је:

$$f_x(x_i) \approx \frac{1}{Nh} F_i = \frac{1}{Nh} \sum_{i=1}^N I\left(\frac{x_i - x}{h}\right) \quad [8]$$

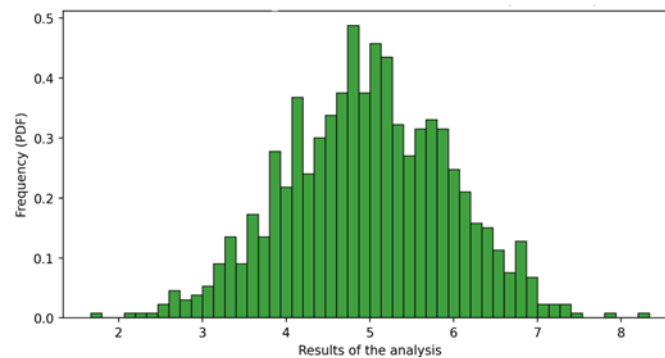
где  $h$  представља ширину бина, а  $I\left(\frac{x_i - x}{h}\right)$  представља функцију индикатора удаљености појединачних резултата симулације  $x$  од центра бина  $x_i$ . Уколико се резултат симулације  $x$  налази унутар посматраног бина, индикатор  $I\left(\frac{x_i - x}{h}\right) = 1$ , док је у супротном  $I\left(\frac{x_i - x}{h}\right) = 0$ . Висина сваког бина дефинисана је бројем резултата анализе  $x$  који се налазе унутар опсега бина дефинисаног ширином бина  $h$ . Ова сума се назива фреквенција резултата у посматраном бину  $i$  и обележава се  $F_i$ .

Пример хистограма са 5 бинова приказан је на следећој слици где је сортирано 1000 случајно изабраних података из нормалне дистрибуције ( $\mu = 5, \sigma = 1$ ).



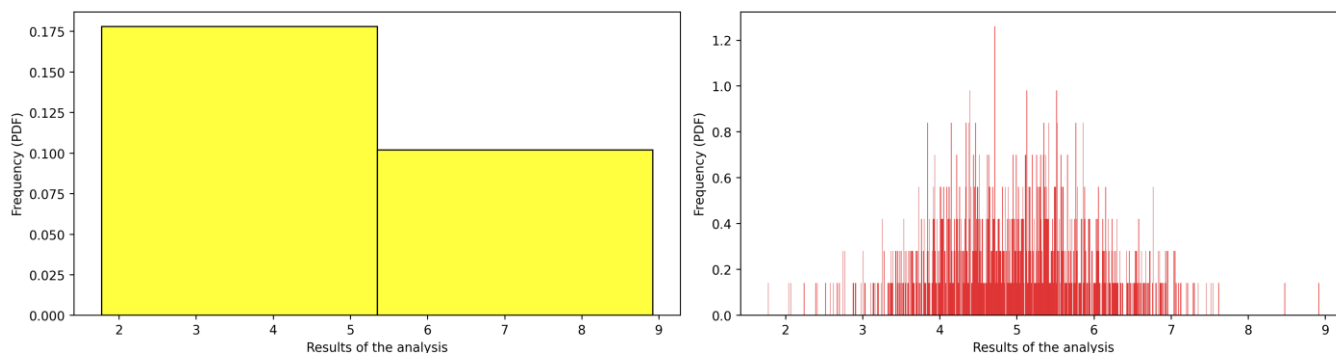
Слика 3.4 Пример хистограма са 5 бинова

Очигледно је да резултати обрађени методом хистограма зависе од изабраног броја бинова. Уколико је овај број премали, резултати могу бити непрецизни или чак потпуно погрешни услед превелике симплификације при обради података. Повећањем броја бинова повећава се прецизност резултата. На следећој слици приказана је обрада истих 1000 података који су приказани на претходној слици, са тим што је број бинова у хистограму повећан на 50.



Слика 3.5 Пример хистограма са 50 бинова

Са друге стране, превелико повећање броја бинова може довести до расипања резултата (енг. *noisy histogram*). На следећој слици приказана је обрада истих 1000 података који су приказани на претходним сликама, са тим што је изабран број бинова у хистограму премали (2) или превелики (1000).



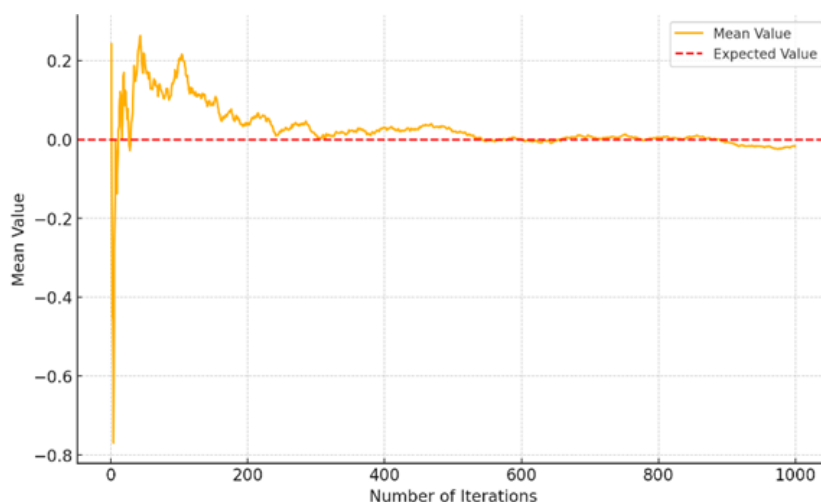
Слика 3.6 Примери хистограма са 2 (лево) или 1000 бинова (десно)

Постоје многе препоруке за израчунавање оптималне ширине бинова у хистограму од којих је најпознатије Фридман-Диаконисово правило (енг. *Freedman-Diaconis Rule* [40]):

$$h = 2 \frac{IQR}{\sqrt[3]{N}} \quad [9]$$

где  $IQR$  означава интерквартални распон података (енг. *Interquartile range*), односно разлику између 75. и 25. перцентила, а  $N$  укупан број симулација.

Важно је ширину бинова изабрати на такав начин да се њен утицај на резултате анализе може сматрати занемарљивим. У оквиру Монте-Карло анализе најчешће се приказује и дијаграм конвергенције резултата, који приказује како се статистички параметри расподеле резултата прорачуна мењају у односу на број симулација. Уколико је промена резултата занемарљива након повећања броја симулација, сматра се да је прорачун нумерички стабилан, односно да је конвергенција остварена.



Слика 3.7 Пример дијаграма конвергенције резултата

Након што се креира хистограм резултата прорачуна, помоћу њега је могуће израчунати све статистичке величине које карактеришу овај скуп резултата, као што су: најчесталија вредност, средња вредност, варијанса итд. Хистограмом су дефинисане вредности  $x_i$  (центар бина) и фреквенција  $F_i$  (број симулација чији се резултат налази у опсегу бина  $i$ ).

- Средња вредност:

$$\mu_x = \frac{\sum (f_i x_i)}{\sum F_i} \quad [10]$$

- Варијанса:

$$\sigma_X^2 = \frac{\sum F_i (x_i - \mu)^2}{\sum F_i} \quad [11]$$

- Стандардна девијација:

$$\sigma_X = \sqrt{\sigma_X^2} \quad [12]$$

- Модус:

$$Mode = x_i(\max(F_i)) \quad [13]$$

У овом раду метода хистограма је примењена за обраду резултата Монте Карло анализе.

На **слици 3.8** схематски је приказан дијаграм тока за Монте-Карло анализу на коме су приказани кључни кораци прорачуна. Такав поступак, примењен без укључења података техничког осматрања, користи се у раду као полазна пробабилистичка анализа. Он чини методолошку основу за приступ развијен у поглављу 4, где се приказује како се подаци осматрања могу интегрисати у даљу анализу. Уједно, служи и као референтни оквир за поређење са резултатима прорачуна који обухватају податке осматрања, па ће се у наставку рада називати базна анализа.



Слика 3.8 Дијаграм тока базе Монте Карло анализе

### 3.2.3 Глобална анализа осетљивости према методи Собоља

Пробабилитичка анализа сигурности омогућава да се применом метода поузданости (нпр. Монте-Карло метода) процени расподела излазних величина (одговора) које карактеришу сигурност бране. Међутим, она не пружа увид у то колико који улазни параметар доприноси уоченој варијабилности излаза. Ту на сцену ступа анализа осетљивости (енг. *Sensitivity analysis*) – скуп метода који квантитативно испитују осетљивост резултата модела на промене улазних параметара. Глобална анализа осетљивости испитује утицај варијација улазних параметара широм целог опсега њихових вредности, истовремено обухватајући и могуће међусобне интеракције између параметара [99].

Један од најраширенијих поступака за глобалну анализу осетљивости јесте **Собољева** (Sobol) метода [104]. Собољева анализа осетљивости полази од тога да се укупна варијанса излазне променљиве модела може одвојити на компоненте које се приписују појединачним улазима или њиховим комбинацијама. Излазна функција  $Y = F(X)$ , где је  $X = (X_1, X_2, \dots, X_M)$  вектор улазних случајних променљивих, може се декомпоновати на следећи начин [68]:

$$Y = F(X) = F_0 + \sum_{i=1}^M F_i(X_i) + \sum_{i<j}^M F_{ij}(X_i, X_j) + \dots + F_{1\dots M}(X_1, X_2 \dots X_M) \quad [14]$$

где:

- $F_0 = \mathbb{E}[F(X)]$  је очекивана (средња) вредност излазне функције – константна величина
- $F_i(X_i)$  представља изоловани утицај параметра  $X_i$
- $F_{ij}(X_i, X_j)$  је ефекат интеракције параметара  $X_i$  и  $X_j$
- $F_{1\dots M}(X_1, X_2 \dots X_M)$  је вишередни интерактивни ефекат свих параметара.

Аналогно, тотална варијанса излазне величине дата је следећом декомпозицијом (сума доприноса појединачних улазних параметара и њихових интеракција):

$$V_t(Y) = \sum_{i=1}^M V_i(Y) + \sum_{i<j}^M V_{ij}(Y) + \dots + V_{1\dots M}(Y) \quad [15]$$

где је:

- $V_i(Y) = \text{Var}[\mathbb{E}(Y \parallel X_i)]$  је компонента тоталне варијансе која потиче само од утицаја улазне променљиве  $X_i$ .
- $V_{ij}(Y) = \text{Var}[\mathbb{E}(Y \parallel X_i, X_j)] - V_i(Y) - V_j(Y)$  је компонента тоталне варијансе која потиче од интеракције утицаја улазних променљивих  $X_i$  и  $X_j$  [68].

Да би се утицаји одређених компонената квантификовали, дефинишу се **Собољеви индекси осетљивости** (енг. *Sobol indices*). Основни су Собољев индекс првог реда и тотални Собољев индекс за сваки улазни параметар. Индекс првог реда (енг. *first-order*) улазног параметра  $X_i$  представља део варијансе излаза који се може приписати искључиво том параметру, независно од других [98]:

$$S_i = \frac{V_i(Y)}{V_t(Y)} \quad [16]$$

Постоје и Собољеви индекси другог и виших редова који се односе на компоненте варијансе које потичу од специфичних комбинација параметара, по угледу на следећи израз:

$$S_{ij} = \frac{V_{ij}(Y)}{V_t(Y)} \quad [17]$$

Тотални (енг. *total-order*) индекс за дати параметар  $X_i$  обухвата све ефекте тог параметра на варијансу излаза, укључујући и његове интерактивне ефекте са било којим другим параметрима [98], [99]:

$$S_t = S_i + \sum_{i \neq j} S_{ij} + \dots + S_{1, \dots, M} \quad [18]$$

У пракси се најчешће анализирају први и тотални Собољеви индексни на основу којих се стиче идеја о утицају сваке улазне променљиве на резултате од интереса у пробабилистичкој анализи.

Собољеви индекси се рачунају нумеричким путем спровођењем великог броја симулација на комбинацијама параметара који на равномеран (и довољно детаљан) начин репрезентују читав улазни простор. На основу добијеног скупа излазних вредности рачунају се процентуални доприноси варијанси. Најједноставнији начин за узорковање улазног простора јесте да се могући распон сваке променљиве  $X_i$  подели на  $n$  једнаких делова (чиме се улазна променљива представља са  $n + 1$  прорачунских вредности), да би се потом систематично урадиле анализе за све могуће комбинације улазних параметара. Укупан број потребних анализа тада износи  $(n + 1)^M$  и јасно је да је, за велики број улазних променљивих  $M$ , чак и за тривијалну анализу осетљивости (у којој су распони  $X_i$  представљени са две тачке, ивицама очекиваних опсега), потребан огроман број појединачних (детерминистичких) анализа система. Због тога се анализе сигурности данас најчешће спроводе коришћењем квази Монте-Карло техника узорковања улазног простора (нпр. Собољево узорковање - енг. *Sobol sampling*).

### 3.2.4 Псеудо-насумичне методе за узорковање

Монте-Карло узорковање традиционално подразумева генерисање великог броја потпуно насумичних комбинација улазних параметара (видети поглавље 3.2.2). Међутим, овај приступ не даје гаранције да ће сви делови опсега сваког улазног параметра бити испитани, нарочито када је број симулација мали. За проблеме као што је, на пример, тренирање сурогат модела (видети поглавље 3.3.1), потребно је спровести релативно мали број симулација на оригиналном моделу, али оне морају бити репрезентативни узорак простора улазних променљивих. За такве потребе радије се уместо насумичног узорковања користе псеудо-насумичне методе као што су *Latin Hypercube Sampling* (LHS) и Собољево узорковање (*Sobol sampling*). За разлику од потпуно насумичног узорковања, псеудо-насумичне методе обезбеђују равномерније „покривање“ вишедимензионалног простора улазних променљивих, чиме се смањује вероватноћа да неки део простора остане непроучен.

*Latin Hypercube Sampling* (LHS) је статистичка техника узорковања развијена за ефикасније генерисање скупова улазних параметара из вишедимензионалног простора улазних променљивих. Основна идеја LHS-а је да обезбеди равномерну покривеност целог домена сваког улазног параметра путем стратификације. Конкретно, распон сваке случајне променљиве дели се на  $M$  подједнако вероватних интервала. Затим се из ових интервала бира  $M$  тачака (узорака) тако да сваки од  $M$  интервала садржи тачно један узорак. LHS се може посматрати као облик структурног насумичног узорковања, где се комбинује насумичност (узорци се бирају насумично унутар сваког интервала) са контролисаном покривеношћу (један узорак по интервалу). Захваљујући томе, LHS осигурава да дистрибуција сваког улазног параметра буде адекватно заступљена [82].

Собољево узорковање представља један од типичних квази-Монте Карло приступа, где се уместо истински насумичних тачака користе детерминистички низови са ниском неправилношћу (*discrepancy*). Предност Соболевих секвенци је што обезбеђују изузетно уједначен распоред узорака у вишедимензионалном простору – много равномернији него типичан случајни узорак исте величине [103]. Практично, Собољеви узорци често постижу

још мању варијансу резултата од LHS-а, јер минимизирају појаву празних подручја или гомилања тачака.

У студији случаја приказаној у овом раду (брана Првонек) коришћене су обе методе:

- LHS метода за узорковање тренинг сета за изградњу сурогат модела
- Собољево узорковање за глобалну анализу осетљивости бране

### 3.3 Сурогат модел

Сурогат модел (или метамодел) представља поједностављени модел који апроксимира понашање неког сложеног нумеричког система (као што је тродимензионални нелинеарни прорачун бране методом коначних елемената), са циљем да омогући брже и/или јефтиније добијање резултата [102]. Другим речима, уместо директног прорачуна одговора система на оригиналном прорачунском моделу користи се приближни математички модел који даје сличне излазне вредности уз занемарљиво мали утрошак рачунарског времена. У инжењерским и научним анализама, сурогат модели играју важну улогу уколико извођење великог броја директних симулација или експеримента није могуће, односно није практично.

Сурогат модел се обично гради на основу скупа података добијених из оригиналног модела. Он се не ослања на физичке једначине нити на интерну структуру оригиналног симулатора (на пример методе коначних елемената), већ се може замислити као „црна кутија“ која повезује улазне параметре система и излазне величине (одговоре). Важно је нагласити да увођење сурогат модела неминовно уноси одређену грешку апроксимације, али је та грешка прихватљива уколико је пажљиво контролисана и ако добитак у брзини израчунавања превазилази губитак у тачности.

#### 3.3.1 Тренинг сурогат модела

Да би се изградио поуздан сурогат модел, неопходно је спровести одговарајући процес прикупљања података и обучавања (тренинга) модела [38]. Тај процес почиње планирањем узорка (сетова) података за тренинг и валидацију. Циљ узорковања за тренинг јесте одабрати репрезентативан скуп тачака у простору улазних променљивих на којима се врше прорачунске симулације у оригиналном моделу (на пример МКЕ). Овај скуп одабраних узорака назива се тренинг сет и његов обим мора бити довољно велики да омогући довољно прецизно тренирање сурогат модела, а довољно мали да омогући извршење потребних симулација у оригиналном моделу уз разумни утрошак времена. Постоји више стратегија за одабир узорака за тренинг сет (нпр. LHS).

Након узорковања тренинг сета, на одабраним тачкама се спроводе временски захтевне рачунарске симулације оригиналног модела. Резултат овог корака је скуп података који чине парове улаз–излаз (*feature–target*), а који служе као репрезентативни тренинг подаци за машинско учење.

Наредни корак представља обучавање сурогат модела применом метода машинског учења на прикупљеним подацима. Током тренинга, параметри модела (нпр. тежине у неуронској мрежи или коефицијенти полинома) подешавају се тако да модел што боље преслика односе између улаза и одговарајућих излаза у тренинг скупу. Циљ је да добијени метамодел има што мању грешку предвиђања на познатим подацима, али и добру способност генерализације на нове (некоришћене) податке [38].

Валидација модела је завршна фаза развоја сурогата. Она подразумева проверу тачности обученог модела на посебном скупу података који није коришћен током тренинга. Избор тачака за валидацију из простора улазних променљивих најчешће се ради тако што се усвоји одређен број тачака које су максимално удаљене у простору од тренинг тачака. Оцене грешке

(попут NRMSE (*Normalized Root Mean Square Error*), или коефицијента детерминације  $R^2$ ) служе да се квантитативно измери квалитет апроксимације. Уколико сурогат модел не задовољи критеријуме тачности, процес се може поновити (нпр. прикупљањем додатних узорака или избором другог типа машинског учења). Важно је напоменути да тачност сурогат модела зависи и од квалитета узорка и од избора методе машинског учења. Ако је број узорака премали или не покрива добро цео простор променљивих, сурогат ће имати лошију екстраполациону способност. Исто ће се догодити уколико је метода машинског учења превише једноставна -на пример заснива се на линеарним везама између улазних и излазних величина. Са друге стране, превише сложен модел може претренирати податке (*overfitting*) и тиме лоше генерализовати проблем.

### 3.3.2 Машинско учење

Машинско учење је научно-истраживачка област из домена вештачке интелигенције која се бави развојем алгоритама способних да уче из података и на основу тога доносе предикције или одлуке. За разлику од класичних програма који прате унапред исписана правила, системи машинског учења стичу искуство тако што се излажу репрезентативном скупу примера и постепено побољшавају своје перформансе.

У контексту креирања сурогат модела, највећи део метода спада у надгледано учење (*supervised learning*), јер се заснива на улазно-излазним подацима добијеним из симулација оригиналног модела. Конкретно, проблем апроксимације континуалне функције од више варијабли (што сурогат модел јесте) представља задатак регресионе анализе. Стога се за израду сурогата примењују разноврсне методе супервизоване регресије, од класичних линеарних и полиномских модела, до сложених неуронских мрежа и ансамбл модела. Неколико главних типова техника машинског учења које се користе при креирању метамодела јесу [38]:

- Гаусовска процесна регресија (*Gaussian Process Regression – GPR*): Овај приступ, познат и под именом Кригинг у инжењерским применама, претпоставља да су излазне вредности модела реализација Гаусовог стохастичког поља, чија коваријанса зависи од међусобне удаљености тачака улазног простора [96]. GPR је нарочито користан када је број расположивих узорака мали.
- Полиномијална експанзија хаоса (*Polynomial Chaos Expansion – PCE*): Основна идеја је да се излазна функција представи као линеарна комбинација ортогоналних полинома који представљају функције улазних случајних променљивих [105]. Ова метода је аналогна Фуријеовој анализи, али у простору случајних варијабли: сложена нелинеарна зависност се разлаже на спектар полинома.
- Машина потпорних вектора (*Support-vector machines – SVM*): SVM представља класу алгоритама надгледаног учења који су првобитно развијени за класификацију, али су касније прилагођени и за регресију (тзв. *support vector regression, SVR*). Код SVM-а, идеја је да се улазни подаци пресликају (евентуално помоћу кернел функција) у простор више димензије у коме се затим тражи хиперповршина која најбоље апроксимира зависност (у случају регресије) [22].
- Вештачке неуронске мреже (*Artificial neural networks – ANN*): Вештачке неуронске мреже су модел инспирисан структуром нервног система, који се састоји од међусобно повезаних једноставних процесних јединица – неурона. Неурони су организовани у слојеве (улазни слој, један или више скривених слојева, и излазни слој), при чему свака веза носи тежину. Током тренинга, мрежа пролази кроз бројне примере и прилагођава тежине користећи разне математичке алгоритме. Неуронске мреже могу апроксимирати изузетно сложене и нелинеарне односе између улаза и излаза. Теоријски је доказано да чак и један скривени слој довољно неурона може да буде



универзални апроксиматор произвољне континуалне функције. У пракси, дубље мреже (са више слојева) често боље апроксимирају сложене обрасце [46].

- Ансамбл модели (*Ensemble models*) представљају један од најефикаснијих приступа у машинском учењу, који комбинује више појединачних модела ради побољшања тачности предвиђања и робусности [97]. Основна идеја ансамбл метода је да више слабијих модела (*base learners*) може заједно дати бољи резултат него било који од тих модела појединачно. Постоји неколико основних типова ансамбл метода у машинском учењу, од којих су најпознатији *Bagging*, *Boosting* и *Stacking*.
  - *Bagging* [12] је техника ансамбл учења која смањује варијансу модела кроз коришћење више верзија истог модела, тренираних на различитим подскуповима улазних података (ови подскупови се добијају насумичним узорковањем података са понављањем, тзв. *bootstrap* узорковање [31]). Најпознатији *Bagging* алгоритам назива се *Random Forest* [13] и представља ансамбл стабала одлуке који побољшава тачност и смањује варијансу модела користећи комбинацију *Bagging*-а и насумичног избора карактеристика у сваком чвору стабла.
  - *Boosting* [41] је техника ансамбл учења која редом гради низ слабих модела (обично стабала одлуке), при чему свако наредно стабло покушава да исправи грешке претходних модела. За разлику од *Bagging*-а, где су сва стабла независна, код *Boosting*-а стабла су међусобно повезана у итеративном процесу. Пример за *Boosting* алгоритме су методе *Gradient Boosting Machines* (GBM) [43] и *XGBoost* (Extreme Gradient Boosting) [18].
  - *Stacking* [115] комбинује различите типове модела (нпр. неуронске мреже, стабла одлуке, SVM) тако да мета модел учи како да најбоље искористи њихова предвиђања. Више различитих модела се обучава на истом скупу података. Излазне вредности сваког модела користе се као нови улаз за мета-модел који учи да комбинује резултате појединачних модела у најпрецизније могуће предвиђање.

Поред наведених техника, постоје и многи други приступи који се примењују у метамоделовању, као што су RBF интерполација [92], Бајезијанске мреже [88] и др. Често се у пракси испроба више различитих модела и упореде њихове перформансе, будући да није унапред јасно који тип модела ће дати најбоље резултате за конкретан проблем.

Данас се методе машинског учења лако користе захваљујући развоју бројних библиотека и софтверских пакета у програмским језицима попут Python-а, који омогућавају имплементацију сложених алгоритама уз минималан број линија кода. Библиотеке као што су *scikit-learn* [91], *TensorFlow* [1], *PyTorch* [87], *XGBoost* [18], и *LightGBM* [72] интегришу напредне технике машинског учења у интуитивне интерфејсе, где корисници могу једноставно позвати модел, подесити неколико хиперпараметара и тренирати га на доступним подацима (улазне и излазне вредности из тренинг сета). Овај приступ омогућава да чак и они који нису дубоко упућени у математичку теорију која стоји иза алгоритама (попут градијентног бустинга, неуралних мрежа или Гаусовских процеса) могу применити машинско учење у свом раду. Иако разумевање основне математике и статистике може бити корисно за дубљу анализу и подешавање модела, савремени алати омогућавају практичну примену машинског учења чак и без стручног знања из области линеарне алгебре, оптимизације или вероватноће, што је значајно допринело широкој примени ове технологије у различитим индустријама.

Приликом израде сурогат модела у студији случаја у овом раду (брана Првонек) изабрана је метода машинског учења *XGBoost* [18]. У наставку су изложене основне идеје и принципи коришћења ове методе (али не и математичка формулација јер њено познавање није неопходно за примену и не представља суштину овог рада).

### 3.3.3 Приказ *XGBoost* методе

*XGBoost* је савремена метода машинског учења заснована на техници „градијентног бустинга”, која је последњих година стекла изузетну популарност због своје високе ефикасности и способности да моделује комплексне нелинеарности. Назив *XGBoost* је акроним за *eXtreme Gradient Boosting*, што указује да представља унапређење класичног градиентног бустинга. Развили су је Тјанки Чен и Карлос Гестрин (Chen & Guestrin) 2016. године [18], при чему је фокус био на оптимизацији брзине и перформанси алгорита за примену на веома великим скуповима података [18]. *XGBoost* се прославио у практичним круговима остваривши победе на бројним такмичењима у науци о подацима и машинском учењу (нпр. *Kaggle*), и данас спада међу најчешће коришћене алате [18]. У основи *XGBoost*-а је ансамбл модел састављен од већег броја једноставних модела (тзв. слабих ученика), најчешће обичних стабала одлуке са малом дубином. За разлику од *Bagging* метода попут *Random forest*-а где се дрвећа граде паралелно и независно, код *Boosting* приступа дрвећа се граде секвенцијално – свако наредно дрво покушава да исправи грешке претходно изграђеног ансамбла.

*XGBoost* примењује градијентни бустинг, алгоритам који је формално предложио Фридман (Jerome Friedman) 2001. године [42]. Идеја градијентног бустинга је да се дефинише функција губитка (нпр. средњи квадрат грешке *MSE – Mean Square Error*) и да сваки нови модел (дрво) буде обучен да приближно представља негативни градијент (најстрмији пад) те функције губитка у тренутном ансамблу. На тај начин, додавањем нових дрвећа, ансамбл се итеративно поправља у правцу смањења грешке за читав тренинг сет. Коначни модел је сума доприноса свих појединачних стабала. Оно што *XGBoost* чини посебно моћним јесу бројне инжењерске и алгоритамске оптимизације уграђене у имплементацију бустинга [18]. Уведен је јак механизам регулације: свако кандидатско стабло у процесу грађења добија и казнени термин који зависи од броја листова и суме квадрата тежина листова. Овај термин спречава да дрво постане прекомплексно осим ако то не доноси значајно смањење грешке. Тако *XGBoost* одржава добар баланс између претренираности (*overfitting*) и потцењености (*underfitting*) модела [18].

Кључни хиперпараметри *XGBoost* модела: Као и код других алгоритама машинског учења, понашање *XGBoost*-а може се подесити кроз више хиперпараметара. Неки од најважнијих су:

- *n\_estimators* (број стабала): одређује колико ће се узастопних дрвећа укључити у ансамбл. Већи број стабала потенцијално даје моћнији модел, али предуго тренирање и ризик од претренирања ако нема довољно регуларизације.
- *learning\_rate* (стопа учења,  $\eta$ ): мали позитиван број (нпр. 0.1, 0.01) који скалира допринос сваког новододатог дрвета. Мања стопа учења значи да сваки појединачни модел мање утиче на крајњу предикцију, па је обично потребан већи број стабала, али се смањује ризик од претренирања и модел је често прецизнији.
- *max\_depth* (максимална дубина стабла): колико нивоа разграновања сме имати свако дрво. Дубља стабла могу апроксимирати сложеније зависности (интеракције између више варијабли), али превелика дубина може довести до претренирања. Типичне вредности су 3-10.
- *min\_child\_weight*: минимална сумарна тежина (или број) узорака потребних у једном чвору да би се он могао даље разгранати. Већа вредност овог параметра чини модел конзервативнијим (спречава раздвајање чворова са мало података), чиме се смањује претренирање.
- *subsample*: проценат (фракција) узорака који се насумично узимају из тренинг скупа за свако дрво. Подразумевана вредност је 1.0 (сваки пут се користе сви подаци), али

вредности мање од 1 уносе стохастичност као у *random forest*-у, што може побољшати способност генерализације модела смањењем корелације међу стаблима.

- *colsample\_bytree*: проценат карактеристика (улазних променљивих) који се насумично бирају као кандидати при грађењу сваког стабла. Слично *subsample*-у, овај параметар уноси додатну случајност – свако дрво види само подскуп променљивих – што може бити корисно ако постоји веома велики број улаза или ако су неки од њих међусобно корелисани.
- *gamma* (минимално смањење губитка за расцеп): овај параметар поставља праг колико се најмање мора умањити вредност функције губитка да би се направио нови расцеп у дрвету. Виша вредност  $\gamma$  значи строжи критеријум – мање расцепа ће бити дозвољено, чинећи тиме стабла једноставнијим.
- *lambda* и *alpha*: параметри L2 и L1 регуларизације тежина листова. Они кажњавају превелике вредности тежина у листовима. Више вредности  $\lambda$  и  $\alpha$  уводе јачу регуларизацију, што обично смањује претренирање по цену малог повећања систематске грешке.

Подешавање ових хиперпараметара зависи од природе проблема. Често се користе технике аутоматске оптимизације хиперпараметара (нпр. мрежна претрага, бајезијанска оптимизација) да би се пронашла комбинација која даје најбоље резултате на валидационом скупу.

Сумирано, *XGBoost* представља један од најефикаснијих алата за креирање сурогат модела када се захтева висока прецизност у апроксимацији комплексних односа. У многим студијама је потврђено да надмашује традиционалне методе по тачности предвиђања на независним тест примерима, нарочито у случајевима са нелинеарностима и интеракцијама које је тешко ухватити линеарним или једноставним нелинеарним моделима. Због тога је *XGBoost* данас често први избор за креирање метамодела за реалне инжењерске проблеме.

## 4 ПРЕДЛОГ МЕТОДЕ ЗА ПРОБАБИЛИСТИЧКИ ПРОРАЧУН СИГУРНОСТИ БРАНЕ УЗ ИНТЕГРАЦИЈУ ПОДАТАКА ОСМАТРАЊА

### 4.1 Концепт методе

Традиционални приступи пробабилистичких анализа углавном су засновани на претходно дефинисаним расподелама улазних параметара које произилазе из прелиминарних истраживања и стручне процене. Међутим, дуготрајно техничко осматрање брана генерише обиље измерених података који садрже значајне информације о стварном стању и понашању конструкције током њеног радног века. Стога интеграција ових података у пробабилистичке моделе може значајно повећати квалитет и реалистичност процена сигурности брана. Ово није једноставан задатак, јер се подаци осматрања односе на величине које се у прорачунима појављују тек као излазни производи, односно резултати анализе (померања, порни притисци итд.).

У овом поглављу је предложена методологија која омогућава имплицитну интеграцију података осматрања (уз уважавање њихове стохастичке природе) у базни пробабилистички прорачун сигурности бране применом Монте Карло анализе. Основна идеја методологије јесте да се свака појединачна симулација вреднује и тежински коригује на основу њене сличности са стварним понашањем бране добијеним из података осматрања. На овај начин се директно утиче на вероватноће сценарија отказа, односно даје се већи значај симулацијама које репрезентују стварно стање бране, а смањује значај оних које су мање реалистичне. За разлику од традиционалних схватања у којима се подаци осматрања користе за калибрацију улазних параметара, у предложеној методи они се директно интегришу у Монте Карло анализу.

Приказани приступ мотивисан је основним принципима Бајесове теорије вероватноће [44], која подразумева ажурирање функција расподеле улазних параметара на основу расположивих функција расподеле података осматрања. Иако предложена методологија не представља у потпуности бајезијански приступ, јер се експлицитно не спроводи ажурирање априорних расподела параметара у постериорне расподеле, принцип тежинске корекције симулација суштински представља имплицитно ажурирање почетних претпоставки на основу реалних података, чиме се задржава кључна идеја бајезијанског приступа. Оваквим приступом је могуће значајно редуковати неизвесности анализе и добити веродостојније оцене поузданости насутих брана.

Важно је напоменути да екстремне прорачунске ситуације, као што су највећа очекивана поплава (РМФ) или земљотрес, представљају имагинарне ситуације које се (највероватније) нису догодиле током претходног животног века бране. Оно чиме у пракси располажемо су подаци осматрања током реалних експлоатационих услова. Стога, прорачунске ситуације које се анализирају и валидирају у складу са подацима осматрања морају, у погледу историје оптерећења и граничних услова, осликавати експлоатационе услове, било да се ради о детерминистичкој или пробабилистичкој анализи. Екстремне прорачунске ситуације могу се једино анализирати на претходно валидованим прорачунском моделу у прорачунској ситуацији са реалним експлоатационим граничним условима.

У наставку поглавља је изложена математичка формулација предложене методологије.

Расподеле података осматрања означене су као  $S_j^{mon}$  (*monitoring*), где  $j = 1, 2 \dots n^{mon}$  означава појединачне измерене величине којих има укупно  $n^{mon}$ . Оне представљају улазни податак у предложеној пробабилистичкој анализи, која се може назвати *пондерисана или ажурирана пробабилистичка анализа*. Моделирање функција расподеле података осматрања  $S_j^{mon}$  врши се пре почетка прорачуна, статистичком анализом доступних измерених величина.

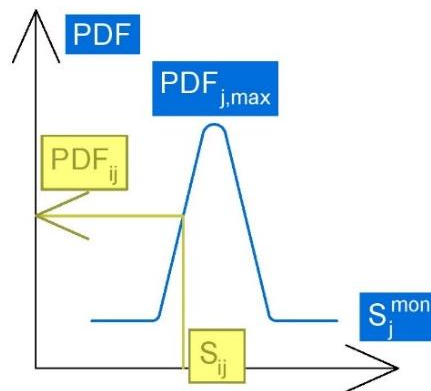
Пондерисана Монте-Карло анализа започиње на исти начин као и базна анализа (видети поглавље 3.2.2), узорковањем улазних променљивих ( $N$  узоркованих комбинација) за прорачунски модел. Затим се за сваку комбинацију параметара спроводи МКЕ прорачун чији су резултати, у случају насуте бране, филтрациона и напонско-деформациона слика у прорачунском моделу, као и фактори сигурности одређени методом редуковања смичуће чврстоће (SSR – видети поглавље 3.1.3). Како су подаци осматрања такође познати и обрађени, њихове расподеле користе се за валидацију одговарајућих резултата МКЕ анализе.

Нека  $i = 1, 2 \dots N$  означава појединачну симулацију система, док  $j = 1, 2 \dots n^{mon}$  представља један од резултата прорачуна за које постоје подаци осматрања). Основна хипотеза је да резултати МКЕ прорачуна  $S_{ij}$  немају исти значај (тежину). Они резултати који се боље поклапају са подацима осматрања  $S_j^{mon}$  више се вреднују од других, увођењем тежинских коефицијената  $f_i$  за сваку симулацију  $i$ . Коефицијент  $f_i$  добија се агрегацијом појединачних тежинских коефицијената  $f_{ij}$  који се односе на појединачне очекиване расподеле података осматрања.

Поступак израчунавања појединачних тежинских коефицијената  $f_{ij}$  описан је у наставку:

- Након завршене МКЕ анализе у симулацији  $i$  записују се резултати од интереса  $S_{ij}$  за које постоје подаци осматрања.
- Вредности  $S_{ij}$  уносе се у функције расподеле података осматрања  $S_j^{mon}$  како би се одредиле вредности густине вероватноће  $PDF_{ij}$ , које описују вероватноће појаве резултата посматране симулације у односу на расподелу података осматрања.
- Појединачни тежински коефицијенти  $f_{ij}$  за сваку расподелу података осматрања  $S_j^{mon}$  рачунају се као однос густине вероватноће резултата симулације  $PDF_{ij}$  и максималне густине вероватноће функције  $S_j^{mon}$  која се означава са  $PDF_{j,max}$ :

$$f_{ij} = \frac{PDF_{ij}}{PDF_{j,max}} \cdot I_j^w \quad [19]$$



Слика 4.1 Поступак одређивања појединачних тежинских коефицијената  $f_{ij}$

Коефицијент  $I_j^w$  представља коефицијент важности (*eng. Importance Weight*) сваке очекиване расподеле  $S_j^{mon}$  који може имати вредност од 0 до 1. Уколико сви резултати имају једнаку вредност, усваја се  $I_j^w = 1$  за све вредности  $j$ .

Укупан тежински коефицијент  $f_i$  (који се односи на симулацију  $i$ ), добија се помоћу појединачних тежинских коефицијената  $f_{ij}$  неком од математичких метода агрегације разматраних у поглављу 4.3.

Хистограм резултата прорачуна креира се узимајући у обзир тежинске коефицијенте симулација  $f_i$ . Фреквенција резултата  $F_k^{weighted}$  за посматрани бин  $k$  у случају пондерисаног

хистограма једнака је суми тежинских коефицијената оних симулација чија се решења налазе унутар опсега бина, односно:

$$F_k^{weighted} = \sum_{i=1}^{n_k} f_i \quad [20]$$

где  $n_k$  представља број симулација чија се решења налазе унутар опсега бина. Пондерисани хистограми узимају у обзир тежински коефицијент сваке симулације приликом израчунавања фреквенције, што омогућава прецизнију процену густине вероватноће када се подаци разликују по значају [101].

Густина вероватноће  $PDF(x_k)$  за тачку  $x_k$  која се налази у центру посматраног бина  $k$  једнака је:

$$PDF(x_k) \approx \frac{1}{N^{weighted}h} F_k^{weighted} = \frac{1}{N^{weighted}h} \sum_{i=1}^{n_k} f_i = \frac{\sum_{i=1}^{n_k} f_i}{h \cdot \sum_{i=1}^N f_i} \quad [21]$$

где  $N^{weighted} = \sum_{i=1}^N f_i$  представља укупну суму свих тежинских коефицијената.

Након што је креиран хист ограм резултата прорачуна који узима у обзир тежинске коефицијенте, помоћу њега је могуће израчунати све статистичке величине које карактеришу овај скуп резултата (као што су најчесталија вредност, средња вредност, варијанса и стандардна девијација) користећи изразе [10], [11], [12] и [13].

У циљу даљег квантитативног оцењивања утицаја података осматрања на резултате пондерисане анализе, у рад се уводе две допунске статистичке метрике: ефективни број узорака (Effective Sample Size, ESS) и Кулбек-Лајблерова дивергенција (Kullback–Leibler, KL).

- За пондерисану анализу са тежинским коефицијентима  $f_i$  информативна процена ефективног броја узорака добија се Кишовом формулом [74]:

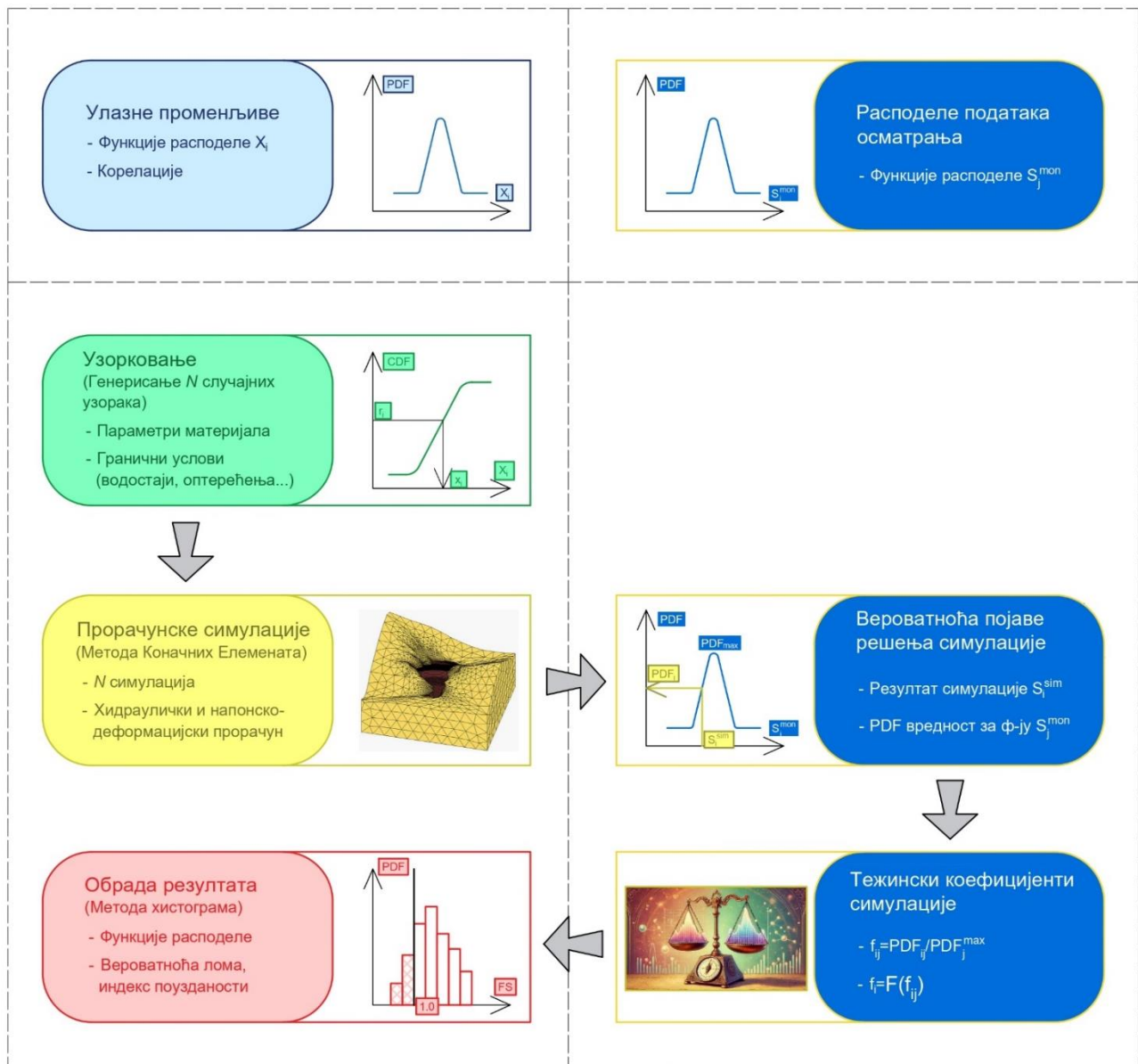
$$N_{eff} = ESS = \frac{(\sum_{i=1}^N f_i)^2}{\sum_{i=1}^N f_i^2} \quad [22]$$

- Информативна дистанца између резултата пондерисане ( $q(x)$ ) и базне ( $p(x)$ ) расподеле резултата представљене хистограмима са истом ширином бина  $h$  дефинисана је формулом [75]:

$$KL(q \parallel p) = h \sum_{k=1}^M q_k \ln \frac{q_k}{p_k} \quad [23]$$

где  $p_k = \frac{F_k}{Nh}$  и  $q_k = \frac{F_k^{weighted}}{N^{weighted}h}$  представљају базне и пондерисане фреквенције резултата у бину  $k$ , а  $M$  представља укупан број бинова (дискретних интервала) у хистограмима. С обзиром на то да у формули фигурише природни логаритам односа фреквенција, јединица информације о дистанци између функција  $q(x)$  и  $p(x)$  се назива nat (natural unit). Већа вредност  $KL$  указује на веће одступање пондерисане дистрибуције од базне и, сходно томе, на снажније утицаје података осматрања. У примењеној статистици се најчешће усваја орјентациона скала по којој  $KL < 0,1$  указује на практично занемарљиво ажурирање,  $0,1 - 0,5$  на слабо,  $0,5 - 1$  на умерено,  $1 - 2$  на јако, док  $KL > 2$  означава врло снажно ажурирање и значајну промену расподеле.

На слици испод схематски је приказан дијаграм тока за Монте-Карло анализу са имплементацијом података осматрања на коме су приказани кључни кораци прорачуна.

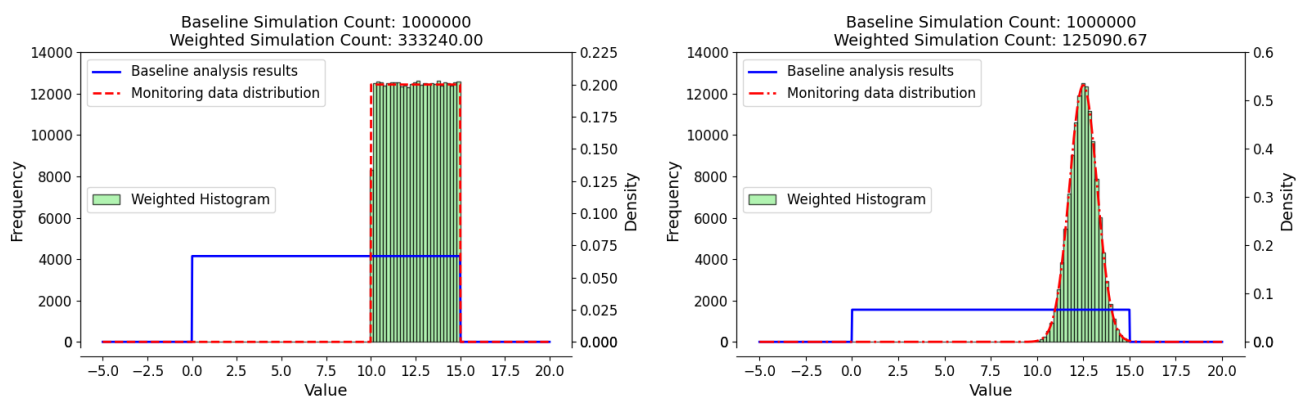


Слика 4.2 Дијаграм тока пондерисане Монте-Карло анализе са имплементацијом података осматрања

## 4.2 Опсег примене методе, опсервације и ограничења

У овом одељку приказана су запажања и ограничења која прате примену предложене методологије. У бајезијанском духу, базна Монте-Карло анализа представља *apriori* предвиђање понашања бране, односно она осликава све што се сматра вероватним без знања о стварном понашању конструкције. Подаци осматрања затим улазе у анализу у форми статистичке расподеле, доносећи оцену степена сагласности сваког прорачунског исхода са стварним забележеним подацима *in-situ*. Применљивост и ефикасност предложене методологије у многострукој зависе од односа између статистичких расподела резултата базне анализе и одговарајућих расподела података осматрања. И облик и опсег ових расподела утичу на исход пондерисане анализе, што је илустровано у наставку. Такође, како тежински коефицијент сваке симулације може имати вредности између 0 и 1, ефективан број пондерисаних симулација не може бити већи од почетне величине узоркованог сета.

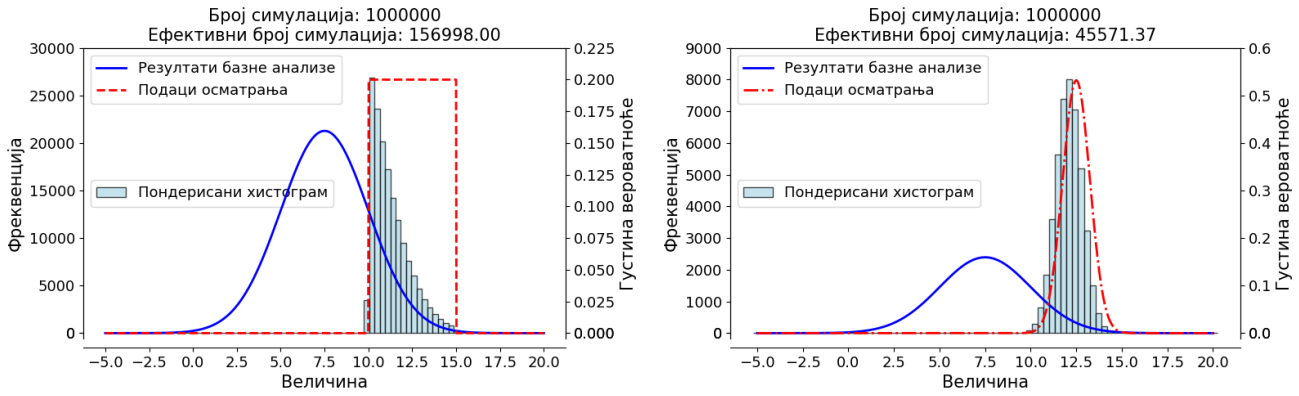
**Слика 4.3** приказује како се равномерно распоређени резултати базне анализе трансформишу пондерисањем када подаци осматрања прате равномерну и нормалну расподелу. У оба случаја пондерисани хистограм испуњава читав преклапајући опсег. Пошто варијабилност података осматрања обухвата тачно једну трећину опсега базне анализе, задржава се управо  $1/3$  симулација, а пондерисани исходи се у потпуности поклапају са расподелама података осматрања. Сви појединачни тежински коефицијенти су у случају равномерне расподеле података осматрања једнаки јединици, док се у случају нормалне расподеле далеко мањи број симулација „одржи” без умањења тежинског коефицијента.



**Слика 4.3** Резултати пондерисане анализе за различите односе расподела резултата базне анализе и података осматрања: (лево) равномерна-равномерна и (десно) равномерна-нормална.

**Слика 4.4** илуструје како поступак пондерисања преобликује резултате базне анализе са нормалном расподелом када расподеле података осматрања описују равномерна, односно нормална расподела. Ако су подаци осматрања равномерно распоређени, сви тежински коефицијенти симулација једнаки су јединици, али се са опсегом осматрања преклапа само реп нормалне базне расподеле, па пондерисани хистограм садржи искључиво тај део исхода базне анализе. Када су и базна и расподела података осматрања нормалне, резултати пондерисане анализе ограничени су на област у којој се две нормалне расподеле преклапају. Обе функције утичу на облик и распон пондерисаног исхода, а приметно је и значајно смањење  $N^{weighted}$ .





**Слика 4.4** Резултати пондерисане анализе за различите односе расподела резултата базне анализе и података осматрања: (лево) нормална-униформна и (десно) нормална-нормална.

Да би пондерисана анализа имала смисла, расподела података осматрања мора барем делимично да се преклопи са расподелом резултата базне анализе. Само у том заједничком опсегу тежински коефицијенти могу добити вредности које нису једнаке нули. Ако се посматрани подаци у целости налазе изван априорног опсега, сви тежински коефицијенти постају нула, па конвергенција изостаје. Успешност примене предложене методологије стога веома зависи од паметног усаглашавања ових расподела: априор мора бити довољно широк да обухвати реални распон исхода осматрања, али не толико разуђен да се корективни утицај података осматрања утопи у статистички шум. Зато је пресудно да се простор улазних параметара базне анализе, као и варијабилност података осматрања осмисле промишљено. У противном, предложена квази-бајесијанска метода може лако одвести или у неинформативно понављање априора, или у нестабилан апостериор заснован на премалој укупној суми тежина  $N^{weighted}$ .

### 4.3 Методе за израчунавање тежинског коефицијента симулације

У овом раду размотрено је 9 математичких приступа (функција агрегатора) за одређивање укупног тежинског коефицијента  $f_i$  за посматрану симулацију  $i$  (укупан број симулација је  $N$ ), помоћу појединачних тежинских коефицијената  $f_{ij}$  ( $j$  означава појединачне измерене величине (податке осматрања) којих има укупно  $n^{mon}$ ):

- M1: Геометријска средина тежина у симулацији  $i$  [14]:

$$f_{i,g} = \sqrt[n^{mon}] {f_{i1} \cdot f_{i2} \cdot \dots \cdot f_{ij}} = \left( \prod_{j=1}^{n^{mon}} f_{ij} \right)^{\frac{1}{n^{mon}}} \quad [24]$$

Према овој методи рачуна се геометријска средина тежинских коефицијената у оквиру једне посматране симулације.

- M2: Хармонијска средина тежина у симулацији  $i$  [5]:

$$f_{i,h} = \frac{n^{mon}}{\sum_{j=1}^{n^{mon}} \frac{1}{f_{ij}}} \quad [25]$$

Према овој методи рачуна се хармонијска средина тежинских коефицијената у оквиру једне посматране симулације.

- М3: Аритметичка средина (Метода просечне тежине) тежина у симулацији  $j$  [70]:

$$f_{i,avg} = \frac{\sum_{j=1}^{n^{mon}} f_{ij}}{n^{mon}} \quad [26]$$

Према овој методи рачуна се просечна тежина тежинских коефицијената у оквиру једне посматране симулације.

- М4: Квадратна средина (RMS) [47]:

$$f_{i,q} = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{n^{mon}} f_{ij}^2}{n^{mon}}} \quad [27]$$

Према овој методи рачуна се квадратни корен просечне тежине квадрата тежинских коефицијената у оквиру једне посматране симулације.

- М5: Нормализација по максималном збиру тежина у анализи [10]:

$$f_{i,ns} = \frac{\sum_{j=1}^{n^{mon}} f_{ij}}{\max_{i=1\dots N} (\sum_{j=1}^{n^{mon}} f_{ij})} \quad [28]$$

Ова метода нормализује збир тежинских коефицијената у посматраној симулацији са максималним збиром коефицијената у свим симулацијама.

- М6: Збир тежина [29]:

$$f_{i,sum} = \sum_{j=1}^{n^{mon}} f_{ij} \quad [29]$$

Према овој методи рачуна се збир тежинских коефицијената у оквиру једне посматране симулације.

- М7: Производ тежина [85]:

$$f_{i,product} = \prod_{j=1}^{n^{mon}} f_{ij} \quad [30]$$

Према овој методи рачуна се производ тежинских коефицијената у оквиру једне посматране симулације.

- М8: Минимална тежина [47]:

$$f_{i,min} = \min (f_{i1}, f_{i2}, \dots, f_{ij}) \quad [31]$$

Ова метода нормализује збир тежинских коефицијената у посматраној симулацији са максималним тежинским коефицијентом у истој симулацији.

- М9: Инверзна варијанса [53]:

$$f_{i,iv} = \frac{n^{mon}}{\sum_{j=1}^{n^{mon}} \frac{1}{f_{ij}^2}} \quad [32]$$

Према овој методи рачуна се хармонијска средина са квадратима тежинских коефицијената у оквиру једне посматране симулације.

Девет предложених функција агрегатора (M1–M9) обухватају различите концептуалне приступе комбиновању парцијалних тежинских коефицијената у јединствену укупну тежину симулације. Могу се разликовати четири основна принципа: мултипликативни, адитивни, екстремни и нормализациони агрегатори.

Мултипликативне агрегаторе карактерише инваријантност при мултипликативном скалирању – ако се сви парцијални коефицијенти помноже истом константом  $c$ , укупна тежина симулације се пропорционално скалира. Типичан представник је производ тежина (M7), који множи све парцијалне коефицијенте и на тај начин уважава све податке осматрања истовремено. Овој групи припадају и агрегатори који укључују елемент множења, попут геометријске средине (M1), као и агрегатори засновани на хармонијским срединама (M2 и M9). Геометријска средина рачуна корен производа ( $n$ -ти корен од производа  $n$  парцијалних тежина), док хармонијска средина користи реципрочне вредности свих парцијалних тежина и наглашава утицај најмањих тежина. Што је нека парцијална тежина мања, њена реципрочна вредност је већа, па тиме више доприноси збиру у имениоцу.

Адитивни агрегатори заснивају се на сабирању или упросечавању парцијалних тежинских коефицијената, чиме су знатно „толерантнији“ на варијације међу парцијалним коефицијентима. У ову групу спадају аритметичка средина (M3), квадратна средина RMS (M4) и збир тежина (M6). За разлику од производа, ови приступи дозвољавају да симулација која у једном погледу не одговара осматраним подацима ипак задржи изврстан утицај кроз друге парцијалне тежине. Уколико један од парцијалних коефицијената знатно одступа (ниска вредност), аритметичка или квадратна средина могу ту мању вредност „надоместити“ већим вредностима осталих коефицијената и тиме очувати вредности симулације. Тако укупна тежина симулације остаје умерена уместо да постане готово нулта, као што би био случај код строгих мултипликативних метода. Нормализовани збир (M5) такође припада овој групи по форми јер сабира тежине, али уводи и нормализацију – збир парцијалних тежина у појединачној симулацији дели се максималним укупним збиром у читавој анализи, чиме се вредност M5 агрегата скалира у интервал  $[0, 1]$ .

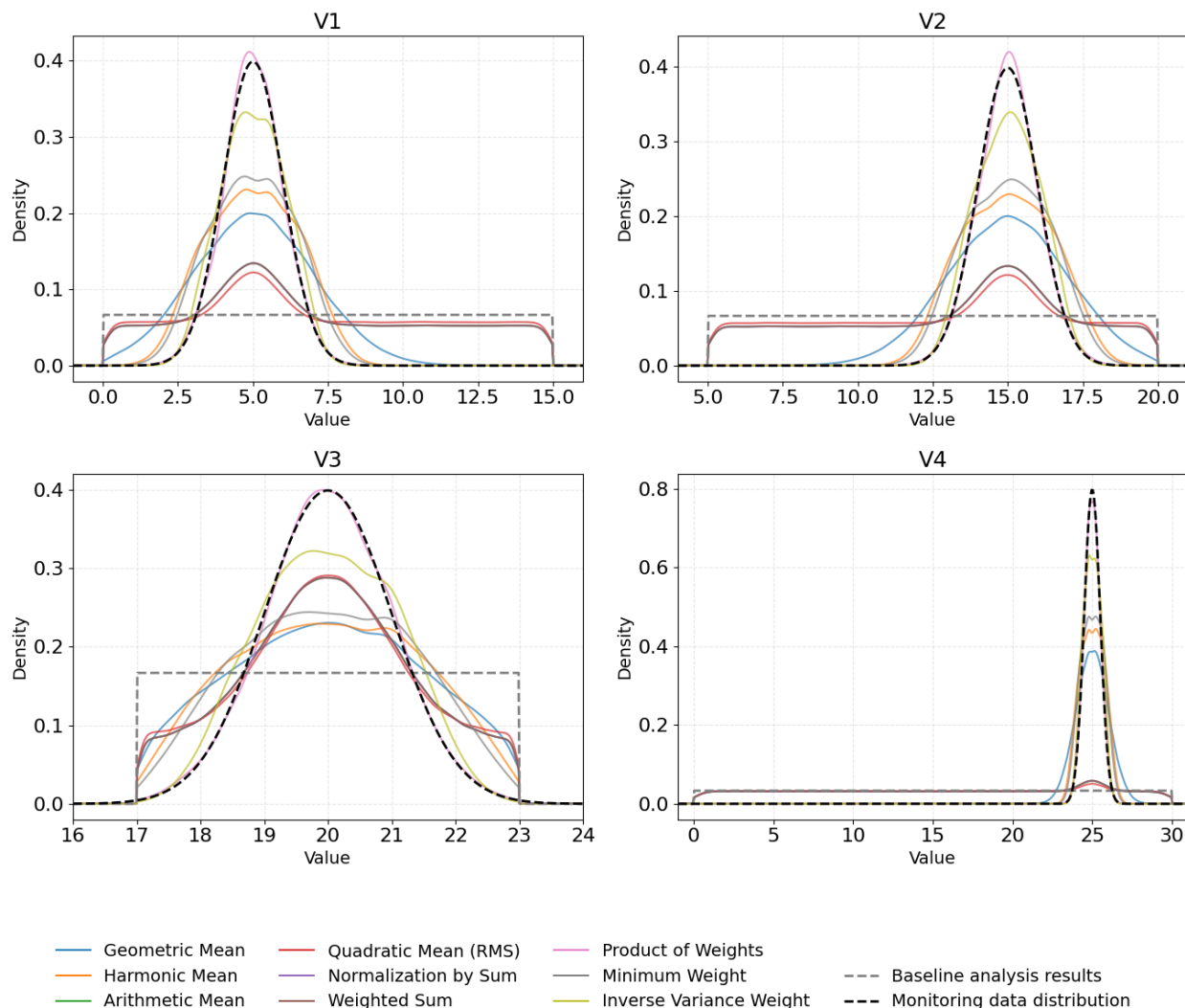
Екстремни агрегатори ослањају се на екстремне вредности парцијалних тежина (минималне или максималне). У ову категорију спада метод минималне вредности (M8), који тотални тежински коефицијент симулације одређује према најнеповољнијем парцијалном коефицијенту. Практично, M8 агрегатор се води принципом „најслабије карике“: симулација добија укупну тежину једнаку најмањој од свих својих парцијалних тежина. Овакав екстремно строг критеријум осигурава да ће и најмање одступање од посматрања снажно “казнити” симулацију (ако је један скуп података лоше репродукован, целокупан исход се сматра непоузданим). Супротан екстремни приступ – ослањање на максималну тежину – није експлицитно разматран у M1–M9 сету.

Описане групе су у директној вези са тим колико агресивно одређени агрегатор „кажњава” симулације које не задовољавају све критеријуме. Адитивни агрегатори (попут просека) су блажи и дозвољавају компензацију, док су мултипликативни и екстремни агрегатори строжи и код њих најмања слабост може драстично умањити укупни тежински коефицијент симулације.

Посматрано са становишта теоријске тачности, најисправнији начин комбиновања независних информација из више скупова података је бајесијански производ њихових вероватноћа односно парцијалних тежина. Уколико се претпостави да су парцијални тежински коефицијенти пропорционални вероватноћама да дата симулација репродукује појединачне податке осматрања, онда је њихов производ (метод M7) пропорционалан апостериорној вероватноћи те симулације која узима у обзир све податке осматрања. Другим речима, агрегатор M7 у идеалном случају (када су резултати базне анализе на домену расподела података осматрања униформне расподеле) даје укупну тежину која тачно одражава колико је

симулација веродостојна у односу на све расположиве податке. Отуда М7 представља теоријски најтачнији агрегатор, јер директно изводи решење бајесијанске анализе.

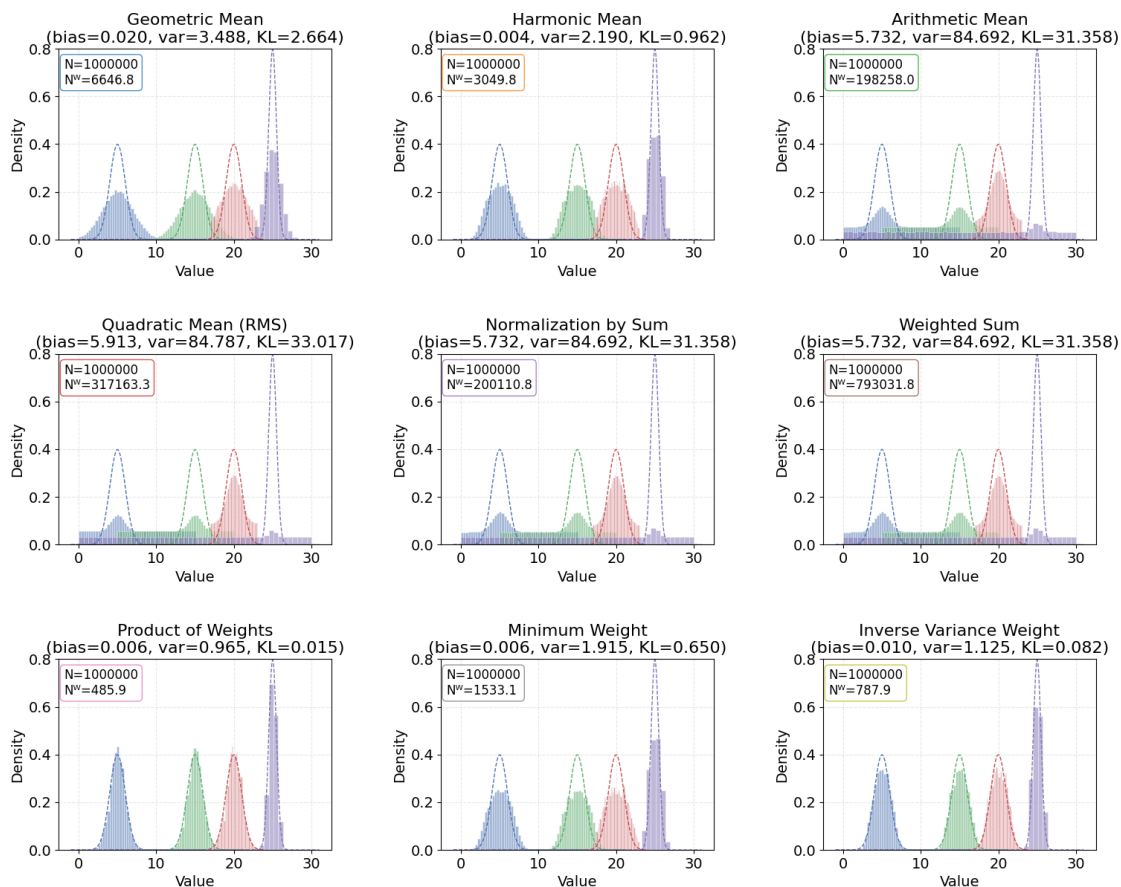
**Слика 4.5** илуструје разлике у резултатима пондерисане анализе са великим бројем симулација ( $N=10^6$ ) за сваку од предложених 9 метода агрегације парцијалних тежинских коефицијената:



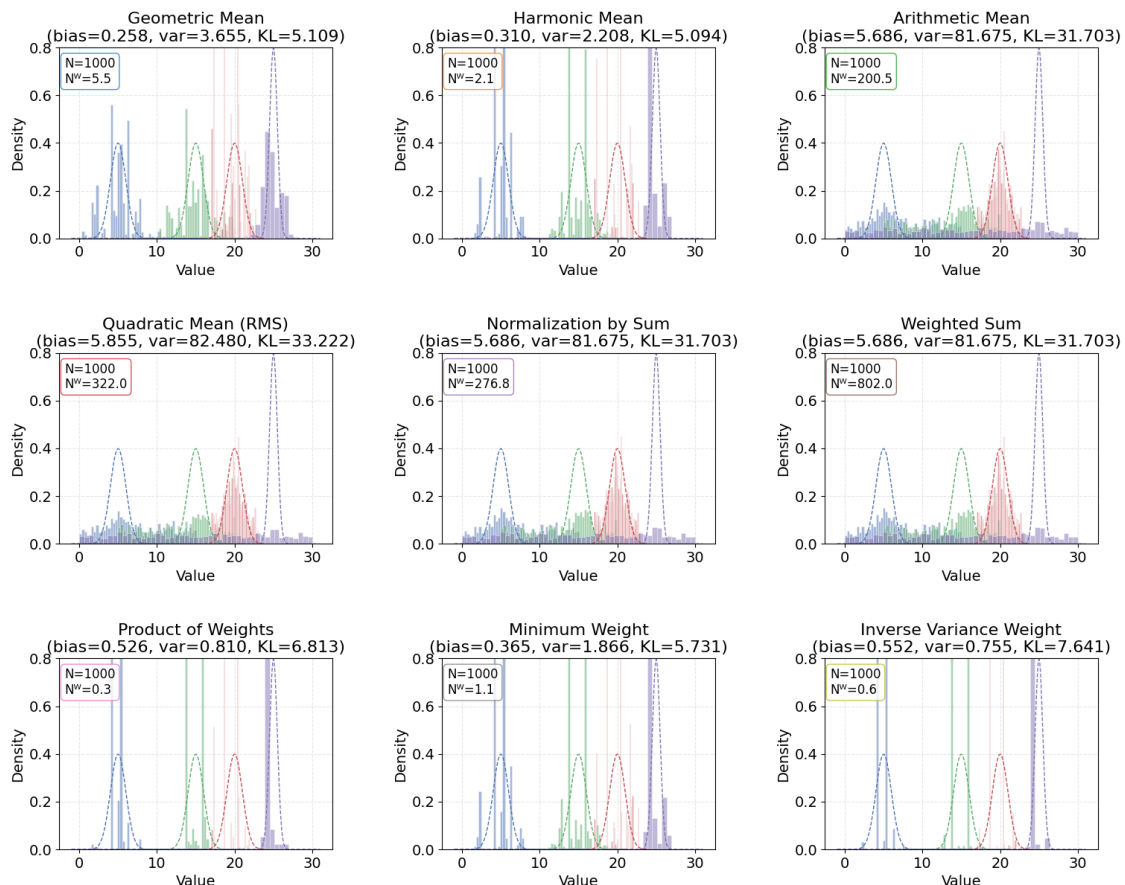
**Слика 4.5** Резултати пондерисане анализе за систем са 4 расподеле података осматрања за сваку од 9 предложених метода агрегације ( $N=10^6$ )

Иако најтачнији, мултипликативни приступ пати од озбиљног нумеричког проблема у пракси, познатог као дегенерација тежина (енг. *weight degeneracy* [79]). У вишедимензионалним анализама, где се рачуна велики број парцијалних коефицијената (нпр. више различитих осматраних величина), производ тих коефицијената врло брзо постаје екстремно мали за већину симулација. Разлог је то што је мало вероватно да ће једна симулација истовремено бити блиска свим посматраним вредностима. Довољно је да у једној прорачунској вредности постоји значајно одступање од података осматрања и већ тај један чинилац (парцијална тежина близу нуле) обара производ на готово нулту вредност. Како број расподела података осматрања (димензионалност) расте, тако расте и вероватноћа да свака симулација има бар неколико мањих парцијалних тежина. Последице, скоро све симулације добијају занемарљиво мале укупне тежине. Само веома мали подкуп (они статистички „најсрећнији” који задовољавају све критеријуме) носиће доминантне тежине.

Наредне слике приказују разлику у хистограмима резултата пондерисане анализе у случају великог ( $N=10^6$ ) и малог ( $N=10^3$ ) номиналног броја симулација.



Слика 4.6 Резултати пондерисане анализе за систем са 4 расподеле података осматрања ( $N=10^6$ )



Слика 4.7 Резултати понд. анализе за систем са 4 расподеле података осматрања ( $N=10^3$ )

Дегенерација тежина доводи до тога да је укупна сума тежина  $N^{weighted}$  које заиста доприносе резултатима мала, чак и ако је укупан генерисан узорак  $N$  велики. Практична последица је отежана конвергенција Монте-Карло анализе. Процене излазних величина (нпр. средње вредности и варијансе фактора сигурности) веома споро се стабилизују, јер се свде на мали број релевантних исхода. У случајевима брана које имају јако много података осматрања, за поуздане резултате базиране на чистом производу тежина био би потребан екстремно велики број симулација  $N$  (више милиона или више), што је рачунарски непрактично. Проблем дегенерације тежина добро је познат у бајесијанским Монте Карло методама [93], где се јавља потреба за редуковањем димензионалности проблема како би се одржао довољан број  $N^{weighted}$ .

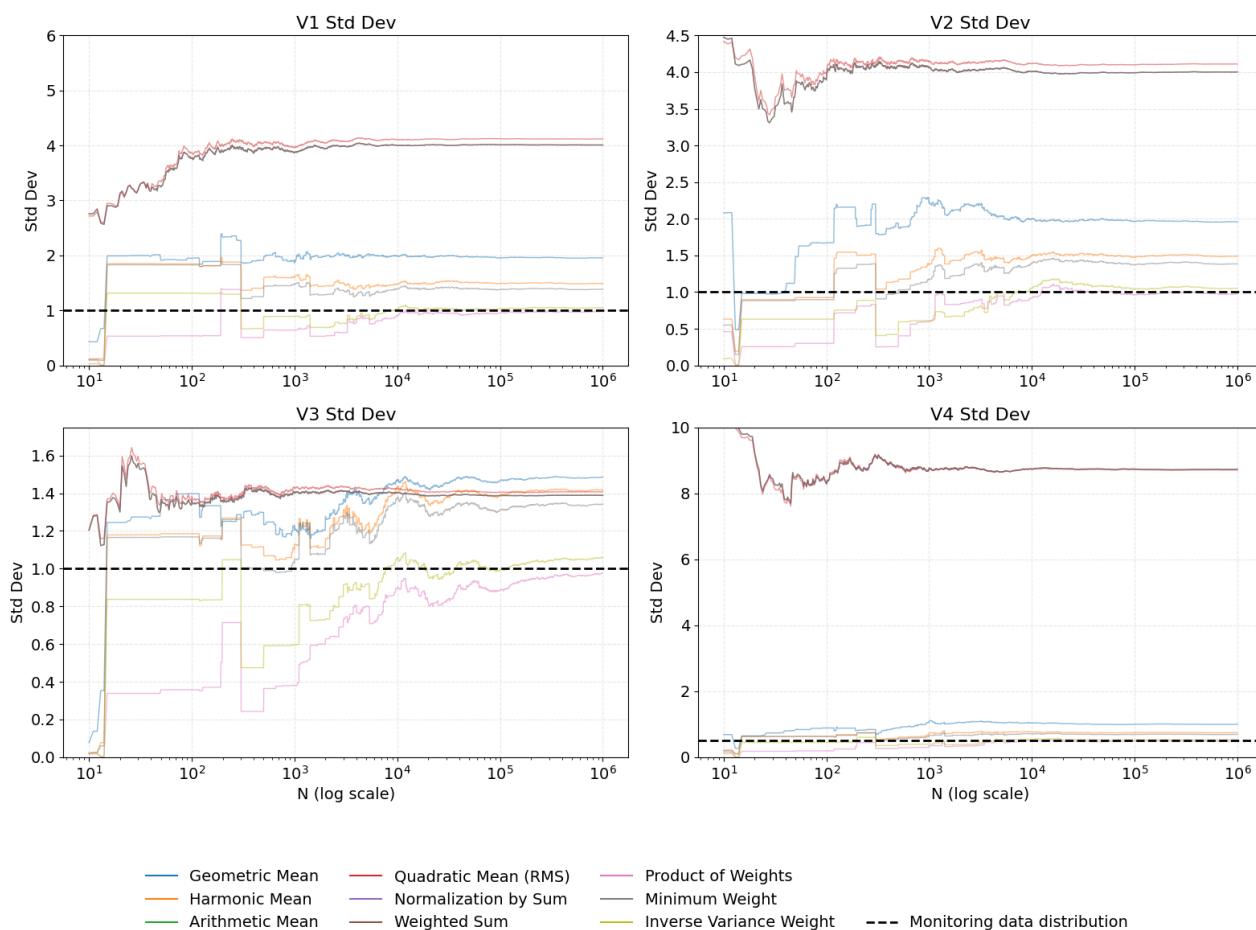
Узимајући у обзир наведено ограничење, у овом раду се предлажу алтернативни агрегатори који повећавају  $N^{weighted}$  и тиме ублажавају проблем конвергенције. Идеја је да се намерно одступи од строге бајесијанске формулације (M7) како би се добило више „употребљивих” симулација са ненултим тежинама, уз прихватљиво мали губитак тачности. Практично, то значи да агрегатор додељује релативно већу тежину оним симулацијама које би по чисто бајесијанским критеријумима биле готово одбачене, чиме се повећава ефективни узорак и убрзава статистичка стабилизација резултата. Ово је компромис између статистичке прецизности и брзине конвергенције – жртвује се део тачности да би се резултати добили брже и поузданије са мањим бројем симулација. Применом неке од предложених метода за агрегацију парцијалних тежина, уместо њиховог производа, добија се вредност која је већа од производа (осим у тривијалном случају када су све парцијалне тежине једнаке). На тај начин, укупни тежински коефицијенти постају мање распршени (распон од најмање до највеће тежине је сужен), што доводи до учешћа већег броја симулација у коначним резултатима. С друге стране, пошто више нису строго пропорционални бајесијанској вероватноћи, ови агрегатори уносе извесно систематско одступање (енг. *bias*) у резултате због чега процена вероватноће лома може бити благо конзервативна или потцењена у односу на „истинску” вредност коју би дао бесконачан број симулација са производом тежина. У инжењерској примени, овај губитак тачности обично је прихватљива цена за добијање стабилног решења у разумном времену.

**Слика 4.8** представља дијаграме конвергенције за 9 различитих функција агрегације тежинских коефицијената за синтетички систем са 4 расподеле података осматрања чији су резултати пондерисане анализе разматрани на претходним сликама.

M1 агрегатор представља добар компромис између строгости и ефикасности и препознат је као најпогоднији за рутинску инжењерску примену. У овом раду M1 је одабран као основни метод пондерисања, управо због наведених уравнотежених карактеристика.

Поред геометријске средине, анализирани су и други агрегатори који концептуално теже да обухвате све парцијалне информације, али на различите начине: хармонијска средина (M2), минимална тежина (M8) и инверзна варијанса (M9). Ове методе имају сличан циљ као M1, али њихова формулација доводи до строжег кажњавања одступања, услед чега је уочено да имају спорију конвергенцију и захтевају већи број симулација за стабилан резултат (реф. **Слика 4.8**).

Хармонијска средина (M2) је изразито осетљива на мале вредности: једна веома мала парцијална тежина доминира у формули и обара укупан резултат ближе њеној вредности него што би то урадила геометријска средина. Стога M2 често додељује знатно мању укупну тежину симулацијама које нису униформно добре по свим критеријумима. Последица је да расподела тежина код M2 остаје јако неуједначена (слично као код производа), па статистичка стабилизација захтева већи број симулација (реф. **Слика 4.8**).



**Слика 4.8** Утицај избора агрегатора на конвергенцију стандардних девијација пондерисаних расподела

Метод минималне тежине (М8), као што је описано, узима најмању парцијалну тежину као мерило поузданости целе симулације. Иако у формули М8 није експлицитно производ (већ екстремум), ефекат је сличан или још строжи: било какво озбиљније одступање у било ком посматраном параметру доводи до тога да та симулација добије врло низак тежински коефицијент. У поређењу са геометријском средином, М8 има тенденцију да чешће даје изузетно мале тежине, јер не дозвољава да остале, веће парцијалне тежине поправе утисак о симулацији. Са становишта конвергенције, и М8 трпи проблем малог ефективног узорка – многе симулације бивају практично елиминисане из доприноса резултатима због једне слабе карике (реф. **Слика 4.8**).

Инверзна варијанса (М9) представља варијацију хармонијске средине. Овај приступ још више наглашава разлике у тежинама: мањим парцијалним тежинама још више умањује утицај (јер се у обзир узима њихов квадрат, што додатно повећава однос у односу на веће тежине). Уколико симулација има један или два изразито мала парцијална коефицијента, М9 ће јој доделити још мању укупну тежину него стандардна хармонијска средина. Према томе, и М9 се суочава са сличним проблемима – велика варијанса тежина, споро приближавање стабилним статистикама и потреба за много већим  $N$  да би се постигао прецизан резултат (реф. **Слика 4.8**).

Са друге стране спектра налазе се агрегатори засновани на збировима и просечним вредностима (М3–М6), који показују супротну склоност – у настојању да побољшају конвергенцију, они умањују „контраст” између добрих и лоших симулација, што може довести до извесног разводњавања резултата. Како ови методи дозвољавају да и симулације које делимично одступају од резултата осматрања задрже извесну тежину, добијена пондерисана

расподела излазне величине биће шире распрострањена. Практично, резултат анализе са, рецимо, аритметичком или квадратном средином тежина има тенденцију да покаже мање разлике између најповољнијих и најнеповољнијих исхода. Већи део генерисаног узорка носиће сразмерно уједначене (умерене) тежине, па ће и вредности фактора сигурности (или друге анализиране величине) из свих делова опсега утицати на коначну процену. Овакав ефекат може се описати као уношење шума широм распона могућих вредности исхода. Иако то обезбеђује врло брзу конвергенцију, нуспојава је да се сигнал који носе подаци осматрања делимично губи у позадини „буке”. Последишно, добијена процена вероватноће лома је мање тачна него што би била уз строже пондерисање (реф. **Слика 4.8**).

Сума тежина ( $M_6$ ) је најекстремнији пример разводњавања – она једноставно збраја све парцијалне тежине, па свака компонента доприноси линеарно, без икаквог кажњавања одступања. Аритметичка и квадратна средина ( $M_3$ ,  $M_4$ ) донекле ублажавају тај ефекат, али и даље дозвољавају знатно већу толерантност него мултипликативни приступ. Нормализовани збир ( $M_5$ ) држи вредности у контролисаном опсегу  $[0, 1]$ , али не мења суштински линеарну природу суме, већ само релативно скалира резултат. Стога су сви ови методи показали изузетно брзу конвергенцију у експериментима (стабилизација већ након хиљаду симулација), али уз цену да су пондерисани резултати нешто више растркани (реф. **Слика 4.8**).

За инжењерску примену, ова група агрегатора може бити корисна када је примарни циљ брзо добијање грубе процене резултата, или када су подаци осматрања сами по себи несигурни па претерана строгост није пожељна.

Закључно, избор агрегатора представља битан корак који утиче на равнотежу између тачности и ефикасности пондерисане анализе. Мултипликативни (бајесијански) приступ обезбеђује теоријски најутемељеније резултате, али уз ризик дегенерације тежина и споре конвергенције. Адитивни приступ гарантује стабилност са мањим узорком, али по цену развученије расподеле резултата и умањеног утицаја података осматрања. Између ова два екстрема, агрегатори попут геометријске средине представљају успешан компромис, задржавајући већину информативности бајесијанског производа уз значајно бољу нумеричку стабилност. Ове методе могу се препоручити као најпрактичнији избор за инжењерску примену пондерисане пробабилистичке анализе, јер омогућавају поуздане резултате уз разумну прорачунску цену.

#### 4.4 Селективна SSR анализа

Базна Монте-Карло анализа подразумева да се вероватноћа отказа за гранично стање које се односи на нестабилност косина одређује према изразу [7], као однос броја симулација у којима је фактор сигурности добијен методом SSR мањи од граничне величине (обично  $n(FS^{SSR} < 1)$ ) и укупног броја симулација  $N$ . То значи да је у свакој симулацији осим напонско-деформацијског прорачуна потребно применити и поступак редукције смичуће чврстоће, што је нумеричка процедура која је веома захтевна у погледу потребног рачунарског времена.

У пондерисаној пробабилистичкој анализи која је предложена у овом раду немају све симулације једнаку тежину. Сходно томе, уводи се принцип селективне SSR анализе који се може формулисати на следећи начин:

- На основу методологије изложене у поглављима 4.1 и 4.3 одређују се укупни тежински коефицијенти  $f_i$  за сваку симулацију ( $i = 1, 2 \dots N$ ).
- За симулације чији је укупни тежински коефицијент  $f_i$  мањи од 1% вредности максималног укупног тежинског коефицијента у анализи  $f_i^{max}$  усваја се вредност  $f_i = 0$  и за њих се не спроводи SSR анализа.

Овај поступак омогућава значајну уштеду времена и ресурса потребних за примену методе SSR у процесу одређивања сигурности.



## 5 ДЕМОНСТРАЦИЈА ПРЕДЛОЖЕНЕ МЕТОДОЛОГИЈЕ НА ЈЕДНОСТАВНИМ ПРИМЕРИМА

У овом поглављу приказани су једноставни примери који имају за циљ демонстрацију и верификацију предложене методологије интеграције података осматрања у пробабилистички прорачун сигурности насутих брана описане у поглављу 4.

### 5.1 Триаксијални тест

#### 5.1.1 Поставка проблема

Триаксијални опит, захваљујући једноставним и у потпуности контролисаним граничним условима представља добар пример за тестирање методологије изложене у поглављу 4. Основна идеја је да се узорак у триаксијалном опиту посматра као пандан реалној конструкцији чија се сигурност испитује, чиме се сложена просторна расподела напрезања у телу реалне конструкције (као што је брана) своди на једноставан, потпуно контролисан напонски пут који је лако пратити и интерпретирати.

Задатак је процена сигурности референтног узорка изложеног консолидованом дренажном (CD) триаксијалном опиту под претпоставком да је опит заустављен у неком произвољном тренутку, пре достизања вршне чвстоће материјала. Напонско-деформацијско понашање узорка је познато (осматрано) од почетка испитивања до тренутка заустављања опита и представља основ за имплементацију података осматрања у пробабилистичку анализу сигурности.

Анализа сигурности спроведена је применом МКЕ модела у коме је репродукован референтни тест до тренутка заустављања. Прорачун фактора сигурности (FS), као основне мере сигурности у детерминистичкој анализи, урађен је у МКЕ моделу применом SSR методе. Пробабилистичка анализа сигурности спроведена је применом Монте-Карло анализе и МКЕ модела референтног теста.

Параметри материјала референтног узорка за прорачунски модел усвојени су на основу серије од дванаест независних триаксијалних опита претходно изведених на истом материјалу. Тестови су изведени при различитим нивоима напрезања због претпоставке да није могуће знати ком напонском стању ће референтни узорак бити изложен. Разлике у резултатима поменутих опита користе се за статистичко описивање варијабилности улазних параметара.

У овако компактном, али репрезентативном окружењу извршено је поређење три различита приступа и мера сигурности референтног узорка у тренутку заустављања теста:

- Детерминистичка анализа – фактор сигурности FS добијен SSR методом
- Базна пробабилистичка анализа – расподела FS заснована на номиналним расподелама улазних параметара (*prior*).
- Пондерисана пробабилистичка анализа – расподела FS заснована на коригованим расподелама резултата базе анализе у складу са познатим подацима осматрања (*posterior*).

#### Теоријске основе

При стандардним испитивањима у триаксијалном апарату оптерећење се у начелу наноси у две фазе:

- I фаза – изотропна консолидација: наноси се свестрани притисак  $\sigma_r = \sigma_a = \sigma_3 = \sigma_2 = \sigma_1$ . Радијални притисак  $\sigma_r = \sigma_3$  након наношења остаје константан за један узорак током

целог трајања опита. У случају CD теста омогућава се изотропна консолидација дренарањем воде услед нанесеног свестраног притиска. Промена запремине узорка једнака је запремини истиснуте воде из узорка.

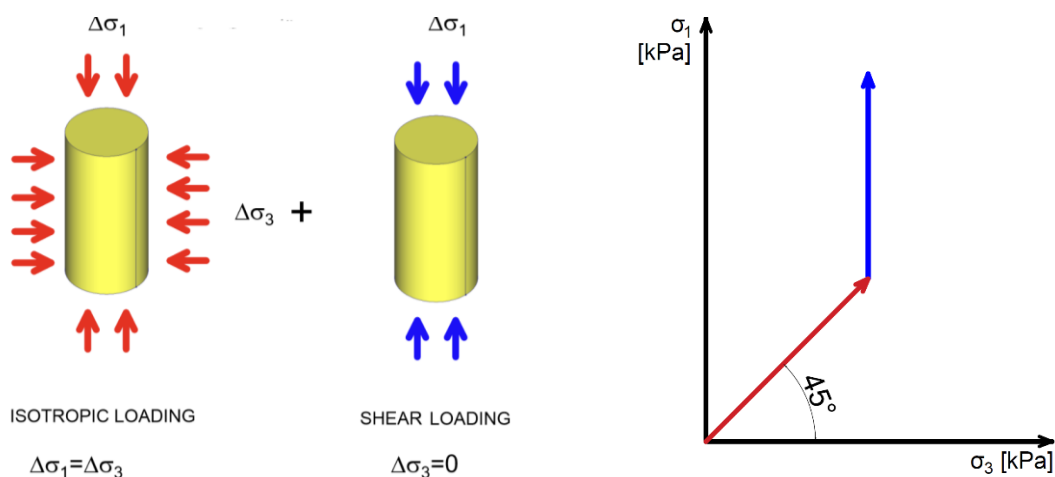
- II фаза – стандардна триаксијална компресија: повећава се аксијални притисак  $\sigma_a = \sigma_1$  до лома или до аксијалне деформације  $\epsilon_a$  од око 20% висине узорка. У случају CD теста притисак се повећава у дренараним условима, споро, па су измерени тотални напони једнаки ефективним напонима.

Током читавог трајања теста мере се следеће величине: вертикални притисак ( $\sigma_1$ ), радијални притисак ( $\sigma_3$ ), аксијална деформација ( $\epsilon_a$ ) и запреминска деформација ( $\epsilon_v$ ) узорка.

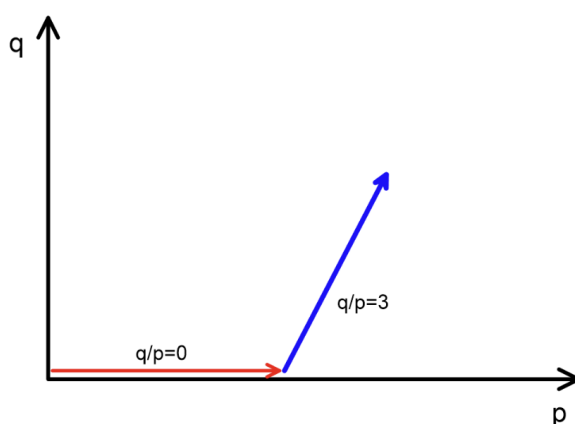
Стање напона у узорку погодено је описати применом  $p$ - $q$  простора напонских инваријанти, у коме  $p$  представља средњи нормални напон, а  $q$  девијаторски напон према следећим изразима:

$$p = \frac{1}{3}(\sigma_1 + 2\sigma_3) \quad [33]$$

$$q = \sigma_1 - \sigma_3 \quad [34]$$



Слика 5.1 Путања напона у триаксијалном опиту (скица преузета из [27])



Слика 5.2 Путања напона у триаксијалном опиту (скица преузета из [27]) –  $p$ - $q$  простор

У првој фази теста дешава се волуметријска контракција узорка услед хидростатичког оптерећења на узорак у триаксијалној ћелији. Збијени крупнозрни материјали и преконсолидоване глине показују особину дилатанције, односно повећање порозности и запремине при смицању у другој фази теста. Код растреситих и мање збијених тла, као и код нормално консолидованих глина, јавља се контракција узорка у другој фази опита, услед затварања пора. Сви материјали при великим деформацијама достижу стадијум константне

запремине, када додатни прираштај аксијалне деформације не утиче на промену запремину узорка.

### 5.1.2 Претходно тестирање материјала

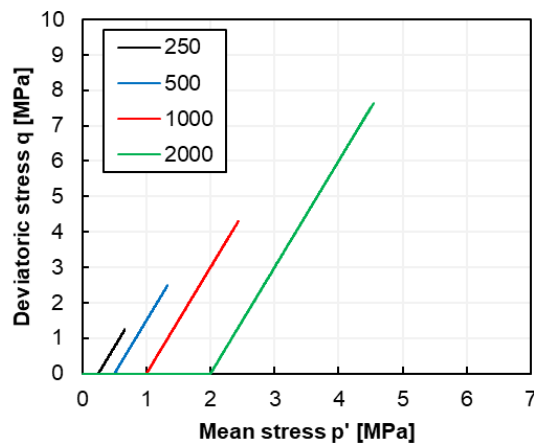
Разматраних 12 опита, чији су подаци коришћени за калибрацију параметара материјала за МКЕ анализе у оквиру овог примера, јесу део лабораторијских испитивања за насуте материјале у циљу пројектовања и изградње једне бране у Азији. Тестирање је спроведено у оквиру лабораторије ISMGEO која се налази у Бергаму (Италија). Посматрани материјал је **камени набачај алувијалног порекла** који улази у састав косина бране и штити централно глинено језгро.

Испитивања су вршена за **четири** нивоа свестраног притиска у првој фази опита: 250 kPa, 500 kPa, 1000 kPa и 2000 kPa. Број узорка који су тестирани приказан је у следећој табели у функцији свестраног притиска коме су изложени у првој фази.

**Табела 5-1** Претходно тестирани узорци

Свестрани притисак $\sigma'_3$ [kPa]	Број узорка
250	3
500	3
1000	3
2000	3

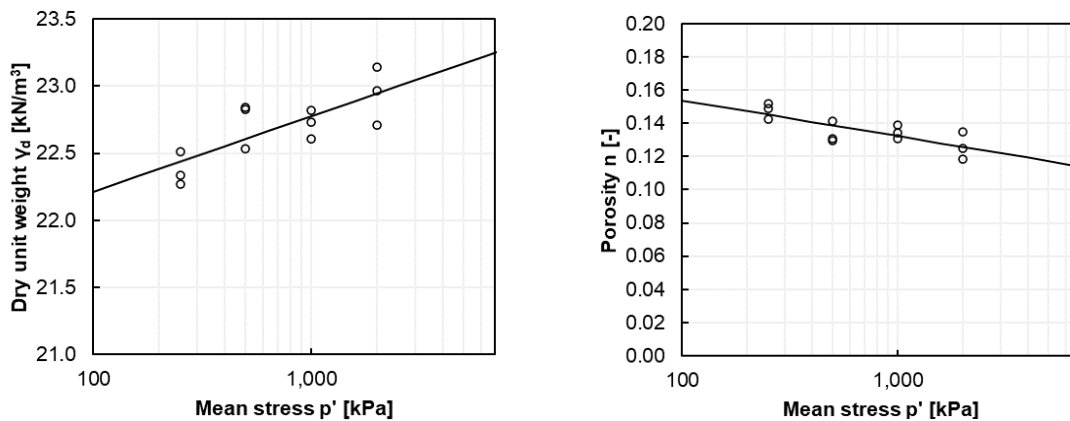
Путање напона за обе фазе теста (изотропна консолидација и смицање) приказане су на следећој слици. Прва фаза теста осликава волуметријско, а друга претежно девијаторско понашање испитиваног материјала.



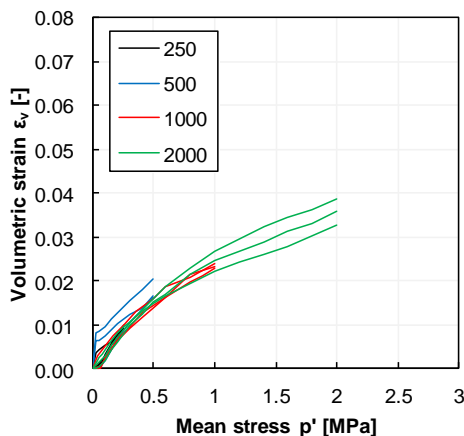
**Слика 5.3** Типичне путање напона претходно тестираних узорка за различите нивое свестраног притиска у првој фази опита ( $\sigma_3=250, 500, 1000$  и  $2000$  kPa)

### Прва фаза – изотропна консолидација

На следећим сликама приказани су резултати прве фазе триаксијалног теста. Током прве фазе теста повећава се збијеност узорка, а порозност се смањује. Запремина узорка се услед затварања пора такође смањује.



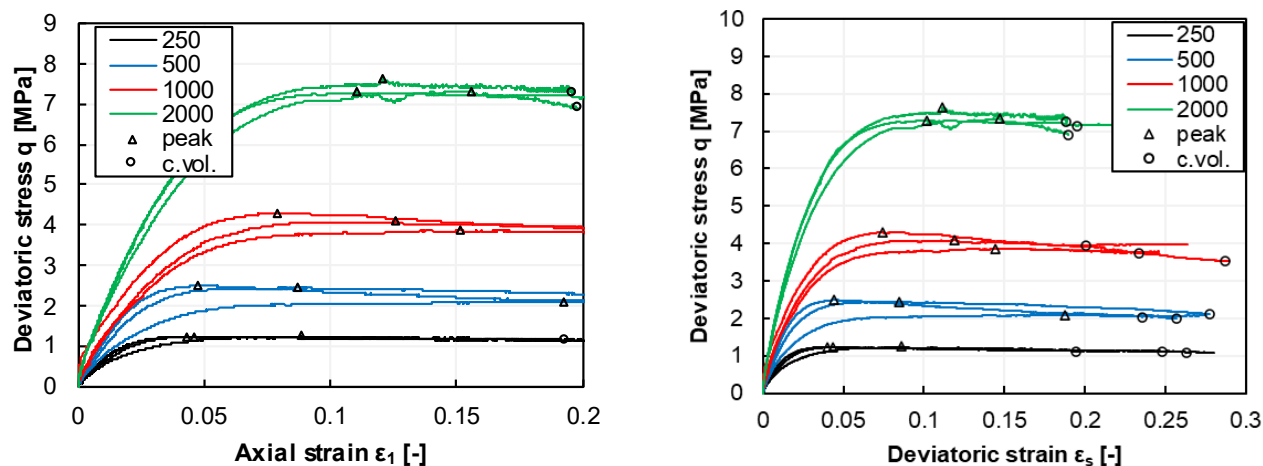
Слика 5.4 Збијеност (лево) и порозност (десно) узорака на крају прве фазе теста



Слика 5.5 Запреминска деформација узорака током изотропне консолидације у првој фази триаксијалног опита

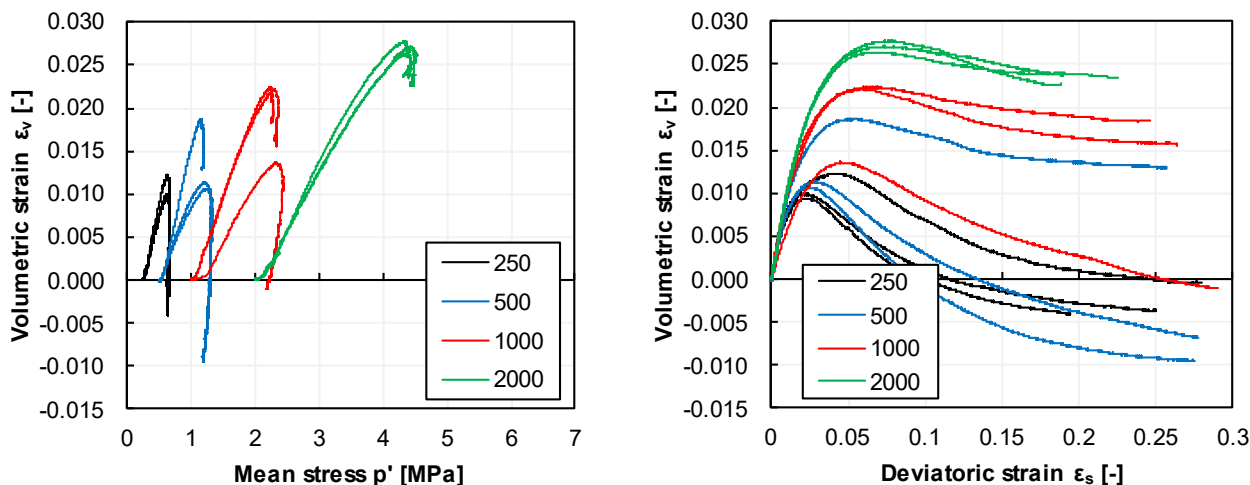
### Друга фаза – смицање

Девиијаторско понашање при смицању у фази триаксијалне компресије приказано је на следећим сликама. Сви узорци показују нелинеарно ојачање, већ при малим деформацијама, све до достизања вршне чврстоће. Узорци тестирани са мањим свестраним притисцима показују (благу) тенденцију ка омекшању након достизања вршне чврстоће (највероватније због велике збијености током припреме узорка).



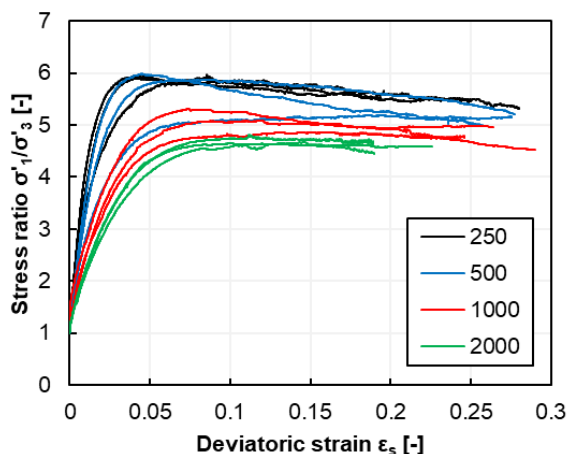
Слика 5.6 Девиијаторско напрезање у функцији вертикалне (лево) и девијаторске (десно) деформације узорака у другој фази триаксијалног опита

Запреминска деформација се смањује (узорци се контрактују) отприлике до достигања вршне чврстоће, након чега се јавља експанзивно понашање (дилатанција), што је приказано на следећој слици. Иако је тестирање рађено до  $\epsilon_s \approx 25\%$ , нису сви узорци достигли стадијум константне запремине. Узорци тестирани са мањим свестраним притисцима показују већу тенденцију ка дилатативном понашању.



Слика 5.7 Промена волуметријске деформације (сетована на 0 након прве фазе) у функцији средњег напона (лево) и девијаторске деформације (десно) током фазе смицања

На следећем дијаграму приказана је зависност напонског односа  $\sigma_1/\sigma_3$  и девијаторске деформације која даје јаснију визуелну потпору за поређење вршног стања и стања константне запремине (CV). Разлика у односу  $\sigma_1/\sigma_3$  између вршног и стања деформисања при константној запремини је јасно видљива за  $\sigma_3=250$  kPa и све више се смањује како свестрани притисак расте, па је готово немогуће видети за  $\sigma_3=2000$  kPa.

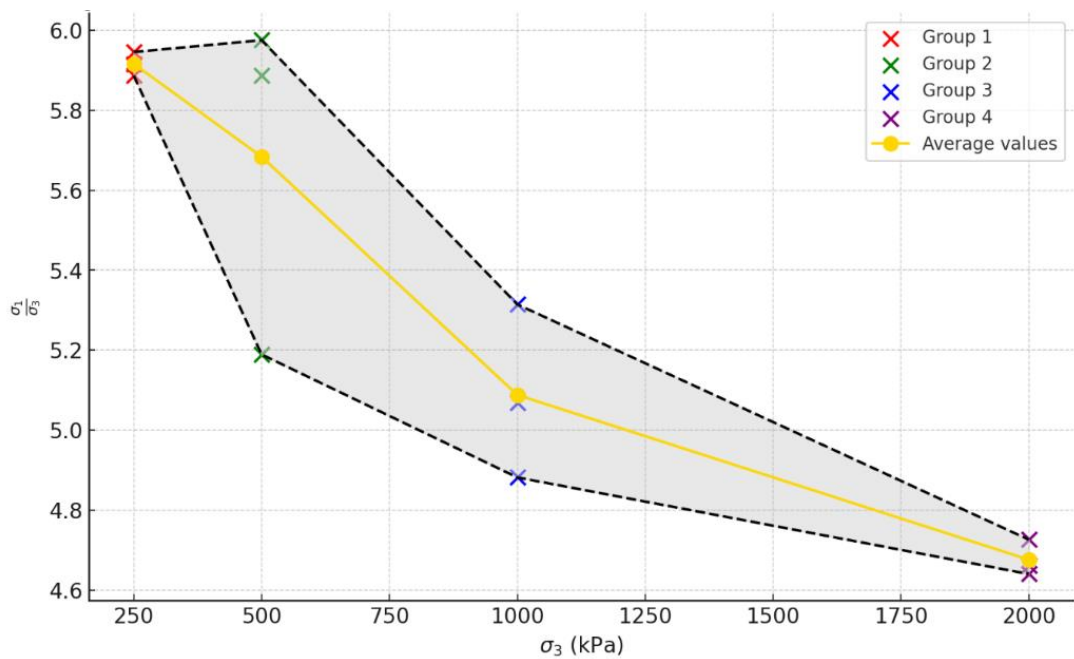


Слика 5.8 Однос напона  $\sigma_1/\sigma_3$  у функцији девијаторске деформације узорка током фазе смицања

### Резиме резултата тестирања

Напонско-деформациони односи (чврстоћа материјала, крутост, дилатативно понашање) мењају се у зависности од нивоа свестраног притиска  $\sigma_3$  на следећи начин:

- Крутост материјала се повећава са повећањем нивоа напрезања (Слика 5.6)
- Дилатативно понашање материјала је мање изражено при већим напрезањима, за четврту групу узорака је готово потпуно занемарљиво (Слика 5.7)
- Чврстоћа материјала се нелинеарно повећава са повећањем нивоа напрезања, при чему се однос  $\sigma_1/\sigma_3$  при лому смањује са повећањем свестраног притиска  $\sigma_3$  (Слика 5.7 и Слика 5.9)

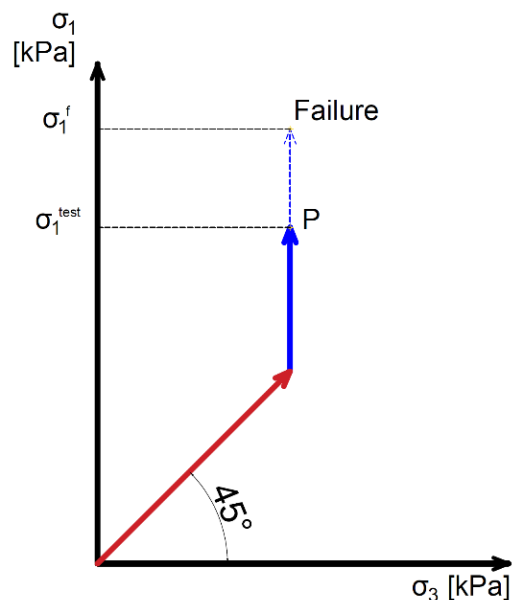


Слика 5.9 Однос напона  $\sigma_1/\sigma_3$  у функцији нивоа напрезања током фазе смицања

### 5.1.3 Подаци осматрања

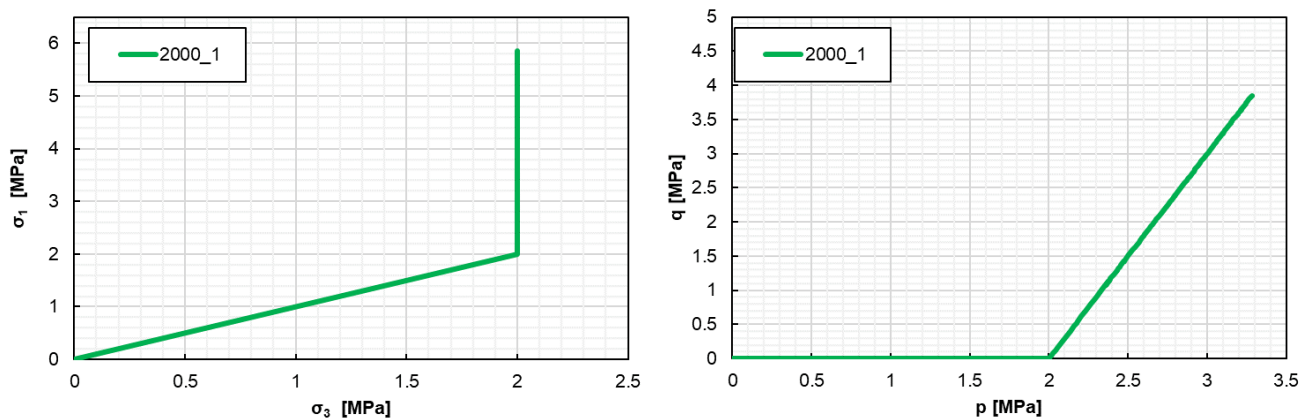
За разматрани референтни узорак тест се завршава у прорачунском тренутку (P), који се дефинише тако да буде задовољена следећа релација:

$$\sigma_1^{test} < \sigma_1^f \quad [35]$$



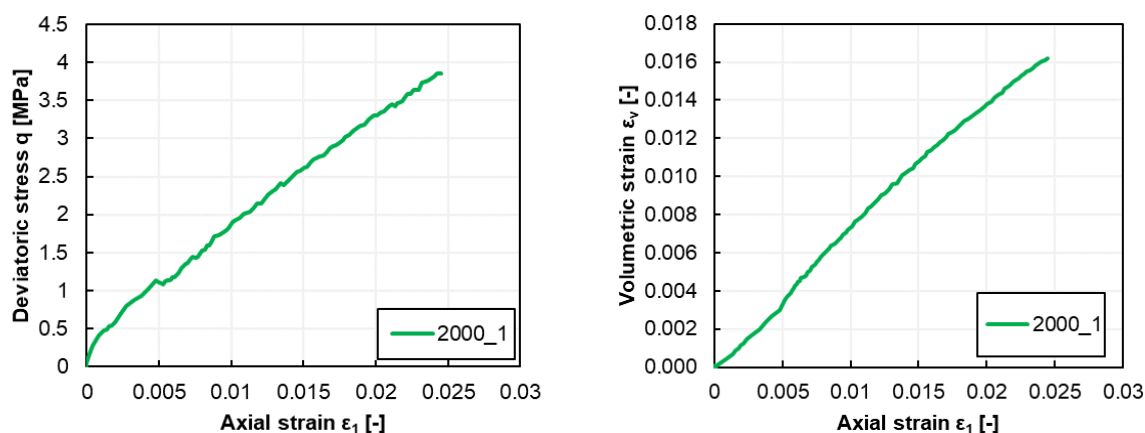
Слика 5.10 Дефиниција прорачунског тренутка P

Слика 5.11 приказује напонско стање у тренутку (P). Одабрани прорачунски тренутак (P) дефинисан је следећим нивоом напрезања референтног узорка у фази смицања:  $\sigma_3=2000$  kPa,  $\sigma_1=5860$  kPa. У овом тренутку тест је заустављен и потребно је одредити сигурност узорка.



Слика 5.11 Путање напона до прорачунског тренутка (P)

Разматрани узорак се до прорачунског тренутка (P) понаша на начин који илуструје Слика 5.12 .



Слика 5.12 Аксијална и волуметријска деформација разматраног узорка до прорачунског тренутка (P)

Измерене вредности деформација у прорачунском тренутку (P) су следеће:

- Вертикална (аксијална) деформација  $\epsilon_1^{izm} = 2.45\%$ ,
- Запреминска деформација  $\epsilon_v^{izm} = 1.62\%$ .

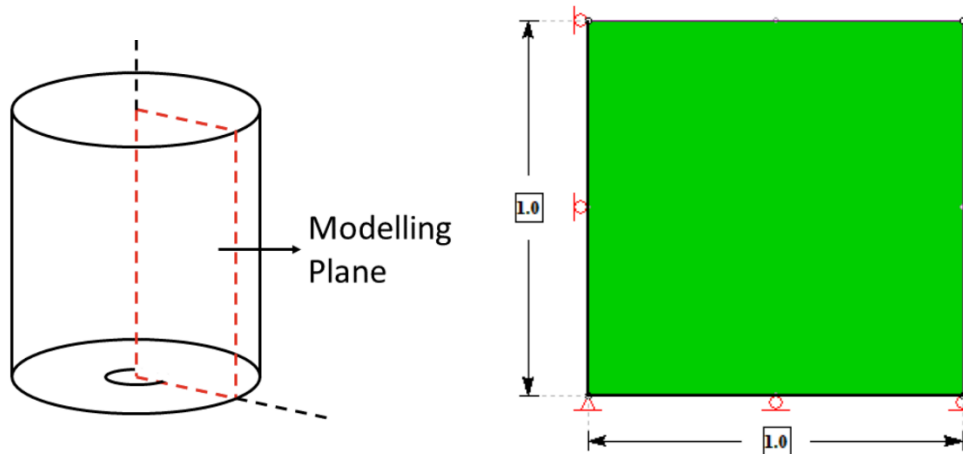
Прорачунска ситуација дефинисана на овај начин ставља референтни узорак у зону високог напрезања ( $\sigma_3=2000$  kPa). Прорачунски параметри материјала базирани на понашању дванаест претходно тестираних узорака при различитим нивоима напрезања не могу бити калибрисани да пруже тачну слику понашања материјала на свим нивоима могућих напрезања. Због тога је, у случају овако дефинисане прорачунске ситуације, веома важна улога података осматрања, чији је смисао да усмере резултате анализе сигурности која обухвата шири спектар могућег понашања у зону стварног понашања материјала.

#### 5.1.4 Моделирање триаксијалног теста применом МКЕ

Анализа сигурности референтног узорка врши се (детерминистички или пробабилистички) користећи МКЕ прорачунски модел референтног теста. Осим тога, реконструкција 12 претходно тестираних узорака такође се ради применом МКЕ модела сваког од 12 појединачних тестова. У овом поглављу приказано је формирање МКЕ модела, како за прорачун сигурности референтног узорка, тако и за реконструкцију претходног лабораторијског тестирања.

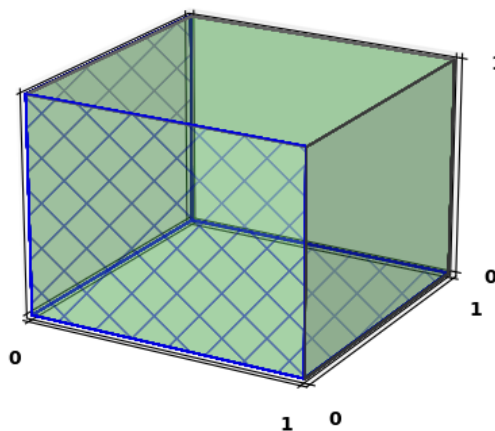
У триаксијалном тесту узорак је цилиндричног облика. Услови теста могу се моделирати у дводимензионалном и тродимензионалном окружењу. Због ротационе симетрије узорка и

граничних услова током извођења теста, дводимензионални прорачунски приступ подразумева централно симетричан прорачунски модел – моделира се само половина узорка. За моделирање се користи један (или више) квадратни коначни елемент са 8 чворова, јединичних димензија (1.0x1.0 m), уз имплементацију услова симетрије као на слици 5-13. Спречено вертикално померање на доњој ивици представља гранични услов реалног експеримента.



**Слика 5.13** МКЕ прорачунски модел триаксијалног теста (централна симетрија)

У тродимензионалном окружењу моделира се коцка јединичних димензија (Слика 5-14). Такође се користе услови симетрије при чему се спречавају померања нормална на две суседне вертикалне стране коначног елемента (две равни симетрије), као и вертикална померања на доњој страни коцке.



**Слика 5.14** 3D прорачунски модел триаксијалног теста

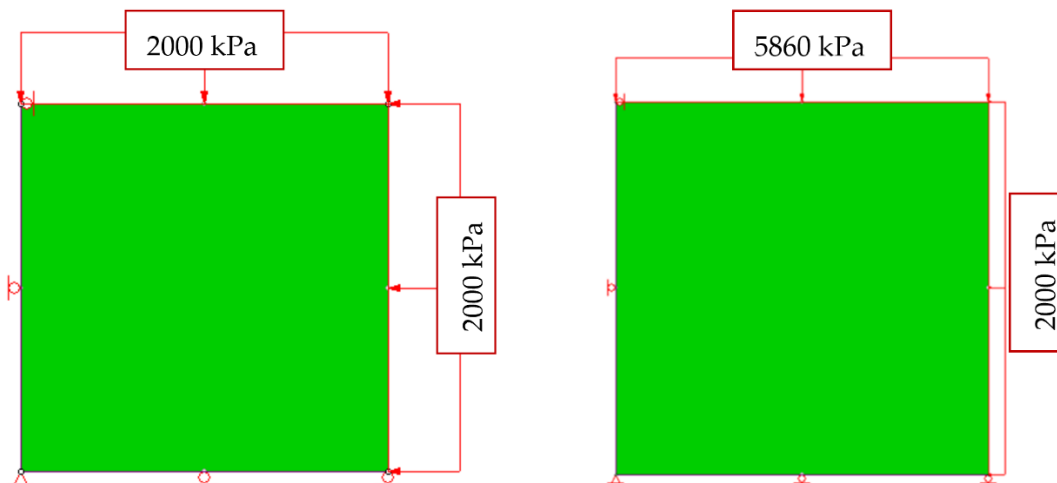
За овај пример одабран је Мор Кулонов материјални модел (видети Анекс 1), који је заснован на принципу линеарне еластичности до достизања границе еластичности, након које материјал прелази у стање идеалне пластичности. Мор-Кулонов модел је једноставан и интуитиван за разумевање и широко је примењен у пракси, нарочито за проблеме стабилности, што представља разлоге због којих је изабран за коришћење у овом демонстрационом примеру. Недостаци Мор-Кулоновог модела су следећи:

- Константна крутост при различитим нивоима напрезања
- Константан угао дилатанције при различитим нивоима напрезања
- Линеарни услов лома

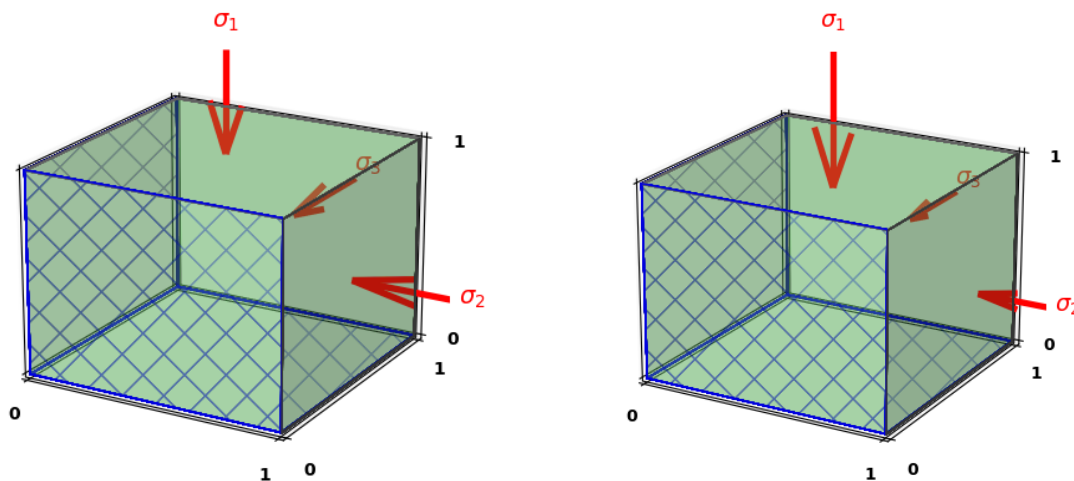


### Моделирање теста референтног узорка и процена фактора сигурности (Модел 1)

Триаксијални тест се моделира у фазама. Прва фаза теста (изотропна компресија) постиже се применом граничних услова по силама ( $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 2000 \text{ kPa}$ ), односно постављањем оптерећења на слободним страницама модела. У другој фази теста на бочним слободним странама задржава се предвиђено радијално оптерећење ( $\sigma_2 = \sigma_3$ ) које остаје константно до краја теста, док се гранични услов на горњој ивици мења тако што се величина вертикалног оптерећења усваја према дефинисаном напонском стању у прорачунској ситуацији ( $\sigma_1 = 5860 \text{ kPa}$ ). **Слика 5.15** приказује граничне услове по силама у првој и другој фази теста референтног узорка.



**Слика 5.15** Гранични услови при моделирању прве (лево) и друге (десно) фазе триаксијалног теста на 2D моделу



**Слика 5.16** Гранични услови при моделирању прве (лево) и друге (десно) фазе триаксијалног теста на 3D моделу

Удаљеност од лома рачуна се применом Методе редуковања смичуће чврстоће (SSR – *Shear Strength Reduction*) у којој се иницијални параметри чврстоће (кохезија и угао унутрашњег трења у случају Мор-Кулоновог модела) редукују прогресивно и прорачун понавља све док постоји нумеричка конвергенција резултата (видети поглавље 3.1.3). Максимална вредност редуционог фактора иницијалне чврстоће за коју је остварена нумеричка конвергенција напонско-деформацијског прорачуна дефинише се као фактор сигурности FS.

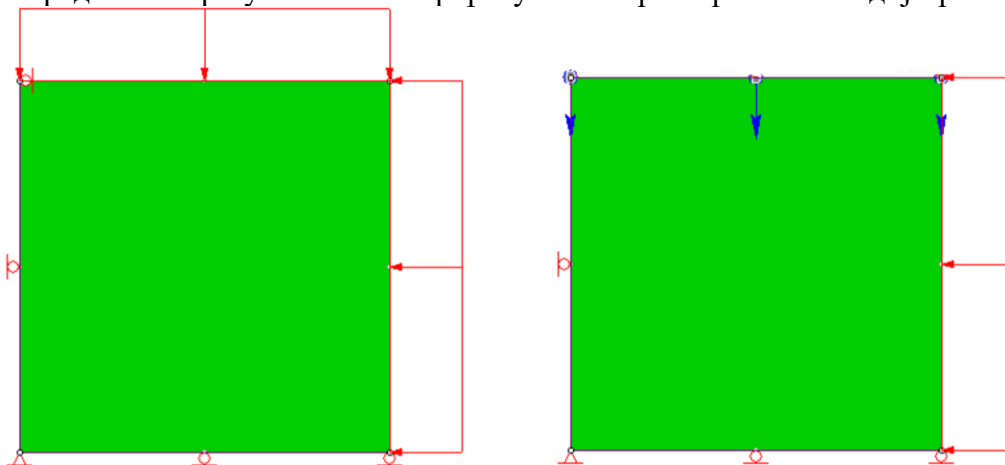
## Реконструкција претходно извршених опита у МКЕ моделу (Модел 2)

У условима експлоатације реалне конструкције не налазе се у конфигурацији која би могла довести до лома. Подаци о чврстоћи материјала у телу конструкције добијају се искључиво спровођењем истражних радова, није могуће добити их на основу осматрања постојеће конструкције. Један од експеримената који доводи узорке материјала до лома у лабораторијским условима је триаксијални тест.

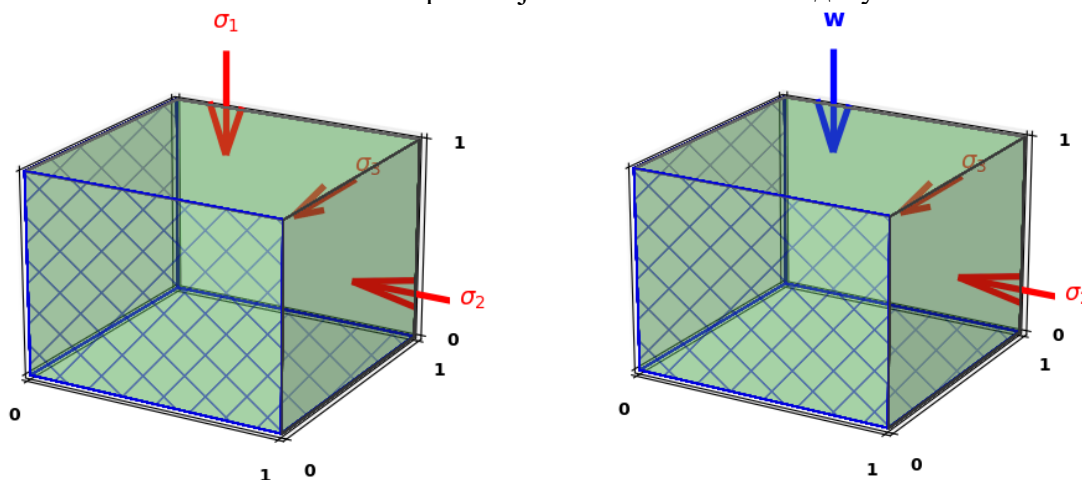
Реконструкција извршених 12 тестова применом МКЕ је од интереса јер је потребно дефинисати параметре изабраног материјалног модела за прорачун сигурности референтног узорка. На овај начин могуће је калибрисати параметре чврстоће материјала, као и параметре конститутивног модела који описују напонско-деформационе односе који су претходили лому.

Прва фаза модела за реконструисање претходних испитивања је потпуно иста као у случају моделирања референтног узорка. Друга фаза теста (фаза смицања) контролише се коришћењем мешовитих граничних услова. На бочним слободним странама задржава се предвиђено радијално оптерећење ( $\sigma_2 = \sigma_3$ ) које остаје константно до краја теста, док се на горњој страни инкрементално задају вертикалне деформације узорка које симуларију повећање аксијалног притиска до лома. Гранични услови у обе фазе теста су приказани на **сликама 5.17 и 5.18**.

Верификација резултата МКЕ прорачуна спроводи се кроз поређење експериментално добијених вредности и резултата МКЕ прорачуна на карактеристичним дијаграмима.



**Слика 5.17** Гранични услови при моделирању прве (лево) и друге (десно) фазе триаксијалног теста на 2D моделу



**Слика 5.18** Гранични услови при моделирању прве (лево) и друге (десно) фазе триаксијалног теста на 3D моделу

**Прорачунски параметри материјала реконструисаних тестова**

За сваки урађени тест у лабораторији (укупно 12) калибрисани су параметри прорачунског Мор-Кулоновог материјалног модела применом програма RS2 [94], уз усвајање следећих претпоставки:

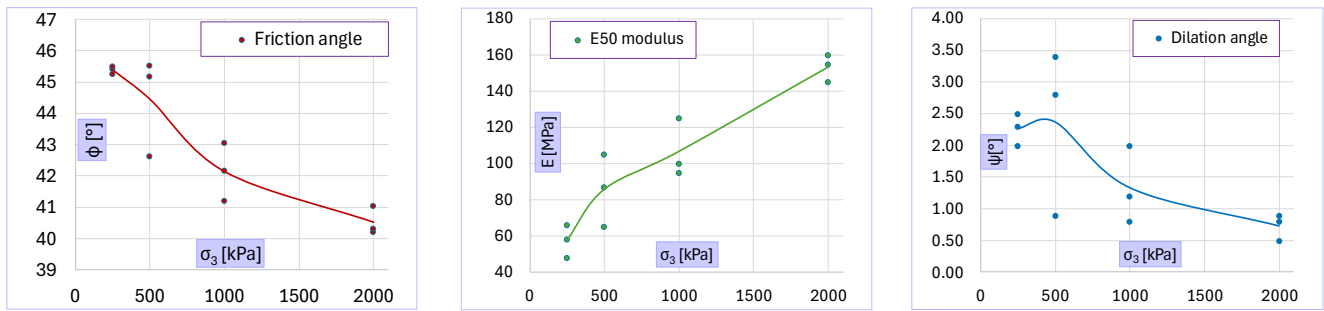
- Резултати експеримената указују на некохерентну структуру материјала, што је и очекивано с обзиром да се ради о каменом набачају. Кохезија се занемарује за свих 12 прорачунских модела узорака ( $c = 0$ ) и једини параметар материјала који дефинише чврстоћу јесте угао унутрашњег трења  $\varphi$ .
- Чврстоћа материјала (односно параметар  $\varphi$ ) усваја се према максималном вертикалном напону  $\sigma_1$  коме је узорак био изложен. Евентуално омекшање материјала након достизања вршне чврстоће се занемарује.
- Модуо еластичности материјала  $E$  усваја се као секантни модуо  $E_{50}$  који одговара 50% вредности напона  $\sigma_1$  на дијаграму вертикални напон  $\sigma_1$  – вертикална деформација  $\varepsilon_1$ .
- Поасонов коефицијент ( $\nu$ ) и угао дилатације ( $\psi$ ) калибришу се тако да се добије најбоље поклапање (методом најмањих квадрата) са измереним дилатативним понашањем описаним на дијаграму који показује зависност волуметријске и аксијалне деформације.

У следећој табели изложени су резултати калибрације - параметри материјалних модела на основу лабораторијских испитивања за свих 12 узорака.

**Табела 5-2** Калибрисани параметри материјалних модела на основу лабораторијских тестова

Бр. узорка	$\sigma'_z$ (kPa)	$\varphi$ [°]	$E_{50}$ [MPa]	$\psi$ [°]	$\nu$ [-]
1	250	45.2	58	2.5	0.28
2		45.4	66	2.3	0.24
3		45.5	48	2.0	0.25
4	500	45.5	105	3.4	0.27
5		45.2	87	2.8	0.30
6		42.6	65	0.9	0.21
7	1000	43.1	125	2.0	0.30
8		42.2	100	1.2	0.22
9		41.2	95	0.8	0.22
10	2000	40.2	155	0.5	0.22
11		40.3	145	0.9	0.22
12		41.0	160	0.8	0.21

На следећим сликама су приказане зависности калибрисаних параметара материјала од нивоа напрезања. У складу са стварним понашањем материјала при тестирању, могу се уочити пад чврстоће, повећање крутости и смањење дилатанце са повећањем нивоа напрезања код калибрисаних параметара прорачунских материјалног модела. Поасонов коефицијент не показује јасну зависност од нивоа напрезања.



Слика 5.19 Зависности калибрисаних вредности  $\phi$ ,  $E$  и  $\psi$  од нивоа свестраног притиска  $\sigma_3$

### 5.1.5 Моделирање варијабилности прорачунских параметара

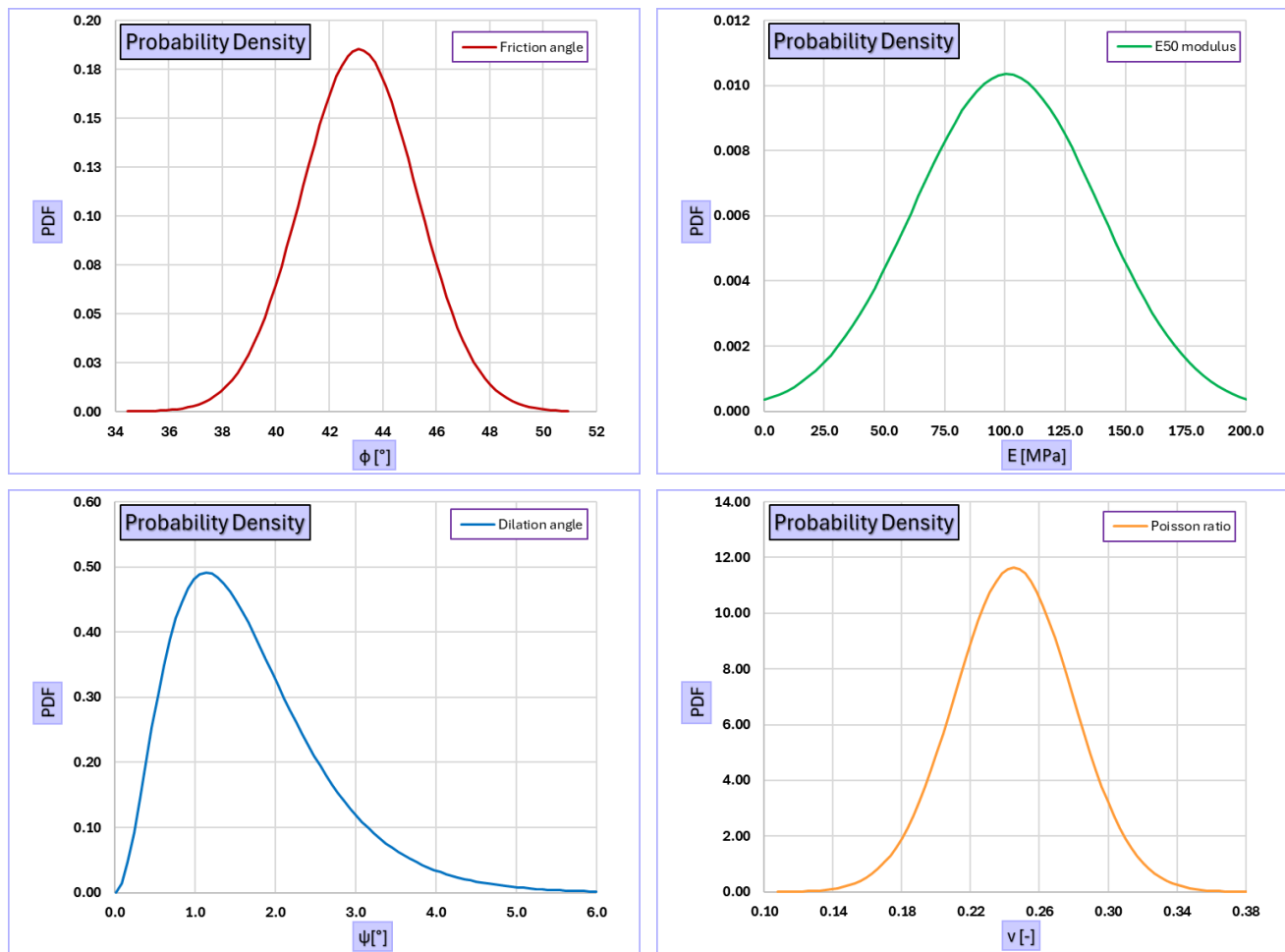
#### Параметри материјалног модела

Улазни параметри (материјала) се у пробабилистичкој анализи третирају као случајне променљиве које су описане функцијама расподеле. Први корак у пробабилистичкој анализи представља моделирање варијабилности улазних параметара, односно функција које дефинишу њихове статистичке расподеле. Основу за моделирање функција улазних променљивих представљају параметри материјалних модела добијени калибрацијом 12 лабораторијских опита – подаци сумирани у поглављу 5.1.4 (Табела 5-2).

У овом примеру су претпостављене **нормалне расподеле** за параметре чврстоће (односно угла унутрашњег трења  $\phi$ ) и параметара еластичности ( $E$  и  $\nu$ ), односно **гама расподела** за угао дилатације  $\psi$ . На основу 12 вредности за сваки од поменутих параметара материјала, срачунате су статистичке величине који дефинишу функције расподеле (средња вредност и стандардна девијација за нормалне расподеле, односно параметри  $\alpha$  и  $\beta$  за гама расподелу). За променљиве за које се претпоставља да прате нормалну расподелу ( $\phi$ ,  $E$ ,  $\nu$ ), средња вредност и стандардна девијација израчунате су директно из скупа калибрисаних параметара. За променљиву  $\psi$ , која се моделира гама расподелом, параметри облика ( $\alpha$ ) и размере ( $\beta$ ) одређени су релацијама заснованим на моментима:  $\alpha = \mu^2/\sigma^2$  и  $\beta = \sigma^2/\mu$ , где  $\mu$  и  $\sigma$  представљају средњу вредност и стандардну девијацију, респективно.

Параметри функција расподеле за пробабилистичку анализу сигурности у овом примеру су следећи:

- Угао унутрашњег трења:  $\mu = 43.12^\circ$ ,  $\sigma = 2.15^\circ$  (нормална расподела)
- Модуло еластичности:  $\mu = 100.8 \text{ MPa}$ ,  $\sigma = 38.54 \text{ MPa}$  (нормална расподела)
- Угао дилатације:  $\alpha = 3.13$ ,  $\beta = 0.54$  (гама расподела)
- Поасонов коефицијент:  $\mu = 0.25$ ,  $\sigma = 0.03$  (нормална расподела)

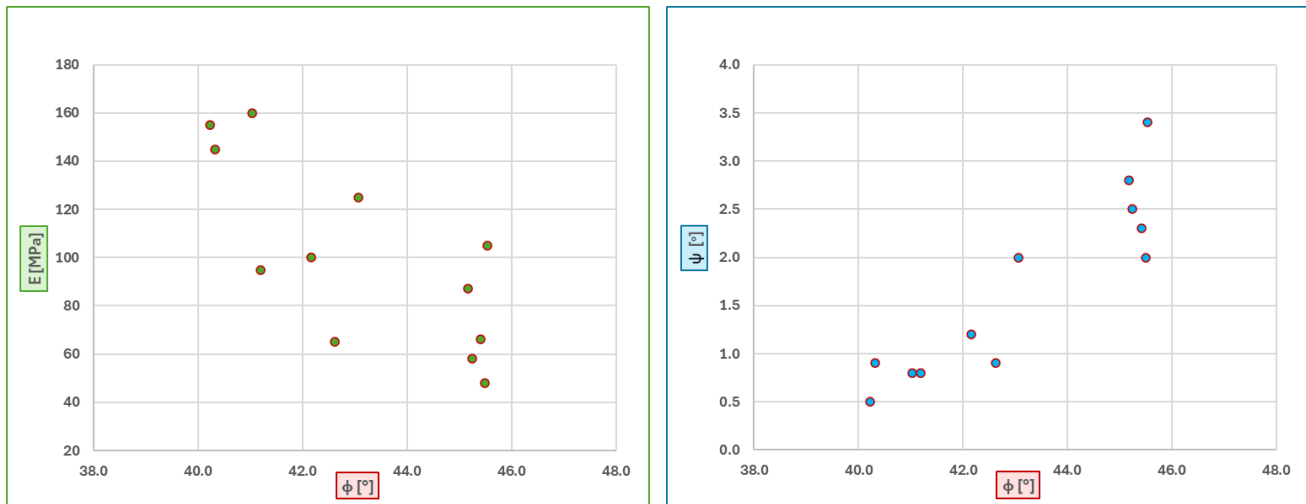


Слика 5.20 Функције расподела улазних променљивих (густине вероватноће)

### Увезаност улазних променљивих (корелације између параметара)

Дефинисане улазне променљиве (Слика 5.20) су међусобно независне. То значи да се за сваку симулацију пробабилистичког прорачуна (Монте-Карло анализе) уређени пар улазних параметара ( $\phi$ ,  $E$ ,  $\psi$  и  $\nu$ ) бира случајним избором у складу са одговарајућом функцијом расподеле, али без икаквих ограничења која се односе на међусобне релације између ових параметара. Овакав тип пробабилистичке анализе у наставку ћемо звати **прорачун са независним (неувезаним) параметрима**.

Уколико у пробабилистичком прорачуну постоји више улазних променљивих, потребно је водити рачуна о њиховим међусобним односима (уколико постоје) да би прорачун био смислен и произвео тачне резултате, што је демонстрирано на овом примеру. У поглављу 5.1.2 показано је да параметри  $\phi$ ,  $E$  и  $\psi$  показују јасну зависност од нивоа напрезања, што се такође одражава и на њихову међусобну зависност. Тако је очигледно већа вероватноћа да узорци са мањим модулом еластичности имају већу чврстоћу, односно да узорци са већим модулом еластичности имају мању чврстоћу (овакав однос се назива негативна корелација). Такође је очигледно да постоји зависност угла дилатанце  $\psi$  и угла унутрашњег трења  $\phi$ . На следећој слици визуелно су приказане уочене зависности  $\phi$ - $E$  и  $\phi$ - $\psi$ :



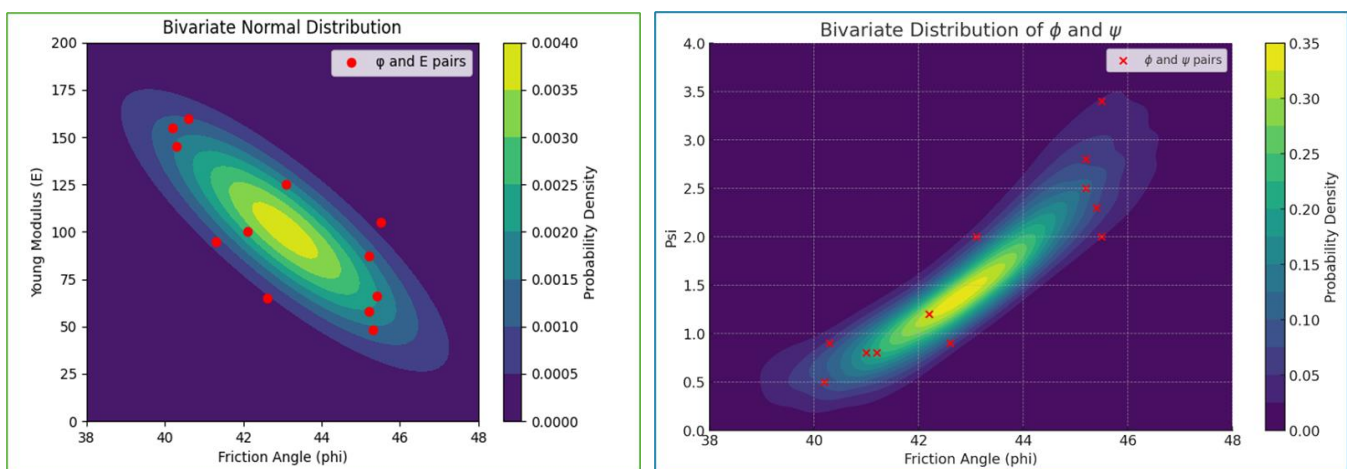
Слика 5.21 Зависности  $\varphi$ - $E$  и  $\varphi$ - $\psi$  које произилазе из резултата дванаест опита

Моделирање корелација између променљивих може се урадити на више начина, од којих су неки споменути у Анексу 2. Избор методе за корелацију може утицати на узорковање улазних података у пробабилистичкој анализи и самим тим на тачност њеног резултата.

У овом примеру одлучено је да се узму у обзир и квантификују следеће зависности између улазних променљивих:

- Функције расподеле параметара  $\varphi$  и  $E$  повезане су Пирсоновим линеарним коефицијентом корелације [70] у такозвану би-варијантну нормалну дистрибуцију. Пирсонов коефицијент корелације процењен из 12 опита износи  $\rho = -0,76$ .
- Функције расподеле параметара  $\varphi$  и  $\psi$  повезане су Гаусовом копулом [86]. Гаусова копула се користи за стварање униформне дистрибуције из променљиве  $\varphi$ , који се затим трансформишу у гама расподелу за променљиву  $\psi$ . У првом кораку се користи функција кумулативне расподеле (CDF) нормалне расподеле да би се променљива  $\varphi$  трансформисала у униформну расподелу на интервалу  $[0, 1]$ . Променљива  $\psi$  се генерише применом PPF - инверзне кумулативне функције расподеле гама расподеле. На нивоу калибрисаних параметара 12 опита ова веза има Спирманов коефицијент  $\rho_s=0,87$  и Кендалов коефицијент  $\tau=0,71$ .

На следећим сликама приказане су густине вероватноће увезаних функција расподеле за променљиве  $\varphi$  и  $E$ , као и  $\varphi$  и  $\psi$ . Овакав тип пробабилистичке анализе у наставку ћемо звати прорачун са увезаним параметрима.



Слика 5.22 Зависности  $\varphi$ - $E$  и  $\varphi$ - $\psi$  (црвене тачке представљају калибрисане параметре из 12 опита)

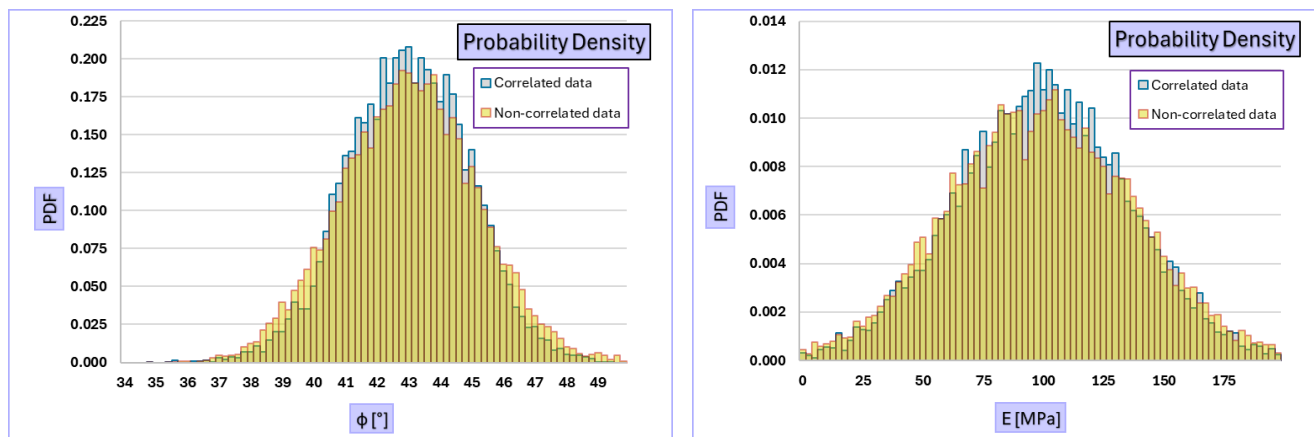
### Узорковање парова улазних променљивих (Sampling)

Пробабилистички прорачун сигурности референтног узорка спроведен је применом Монте-Карло анализе на узорку од 10 000 симулација. Урађене су анализе са увезаним и независним параметрима како би се демонстрирала важност моделирања корелација између улазних параметара.

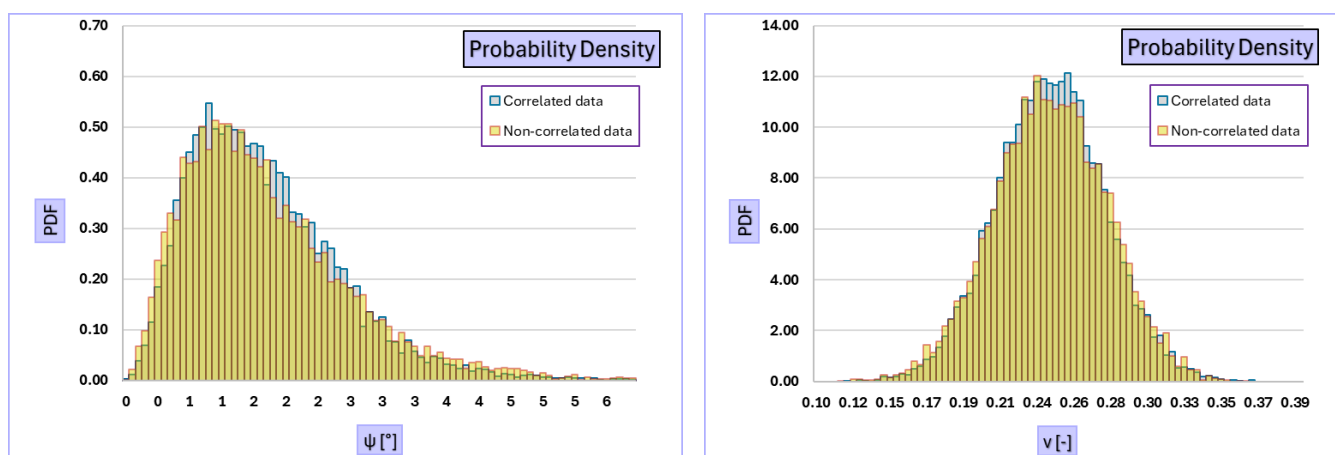
На почетку прорачуна применом Монте-Карло технике, а у складу са функцијама расподеле улазних променљивих, врши се случајан избор параметара материјала за 10 000 симулација. Овај корак пробабилистичке анализе се назива Узорковање (*Sampling*).

Резултат узорковања представља 10 000 уређених парова улазних параметара за МКЕ прорачуне ( $\phi$ ,  $E$ ,  $\psi$  и  $\nu$ ). Процес узорковања испрограмиран је у програмском језику Python, посебно за независне и увезане параметре.

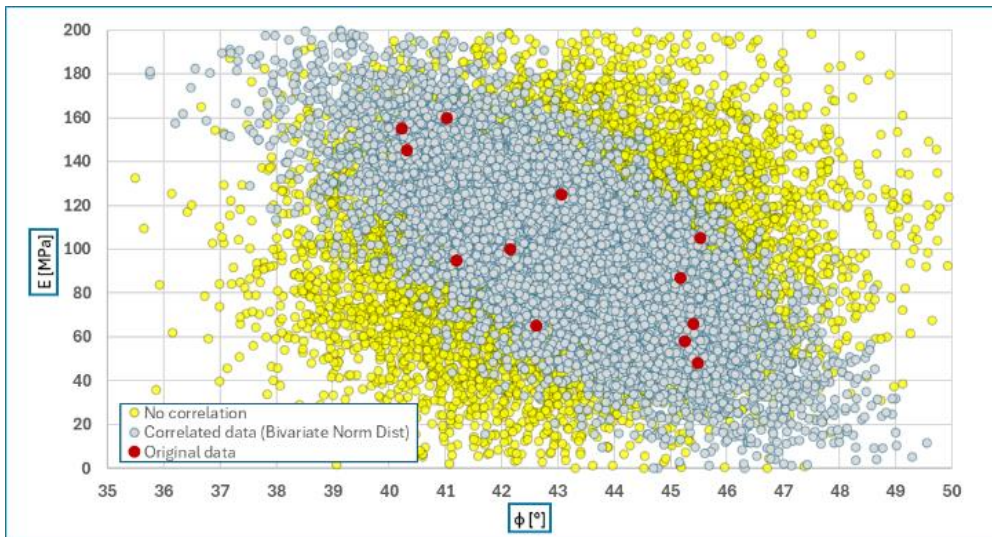
На следећим сликама приказани су узорковани параметри (увезани и независни) и њихови међусобни односи. На сликама се уочава да су иницијалне функције расподеле испоштоване за све променљиве без обзира на то да ли су подаци увезани или не. Ипак, увезано узорковање даје смисленије комбинације уређених парова које је у складу са међусобним односима параметара  $\phi$  и  $E$ , односно  $\phi$  и  $\psi$ , које је запажено међу иницијалним подацима. Корелација између  $E$  и  $\psi$  није директно моделирана, али постоји као индиректна последица моделираних зависности  $\phi$ ,  $E$  и  $\psi$ .



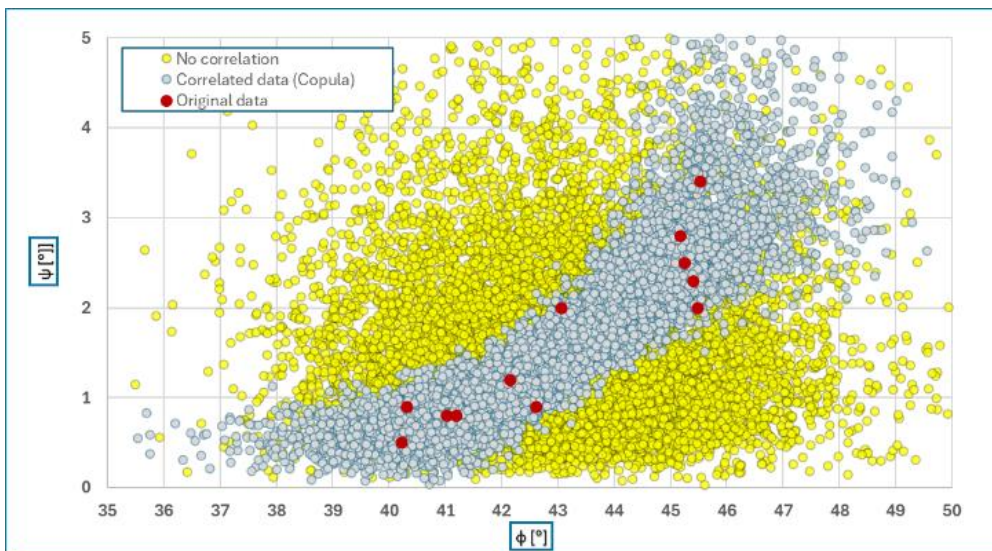
Слика 5.23 Хистограм узоркованих вредности за променљиве  $\phi$  и  $E$



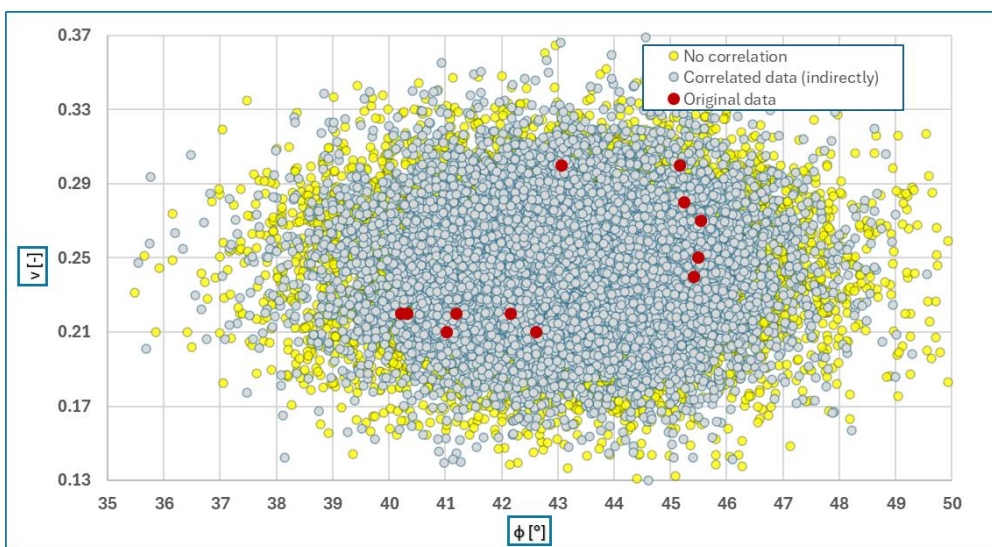
Слика 5.24 Хистограм узоркованих вредности за променљиве  $\psi$  и  $\nu$



Слика 5.25 Узорковани (уезани и неуезани) параметри – међусобни однос  $\phi$ - $E$

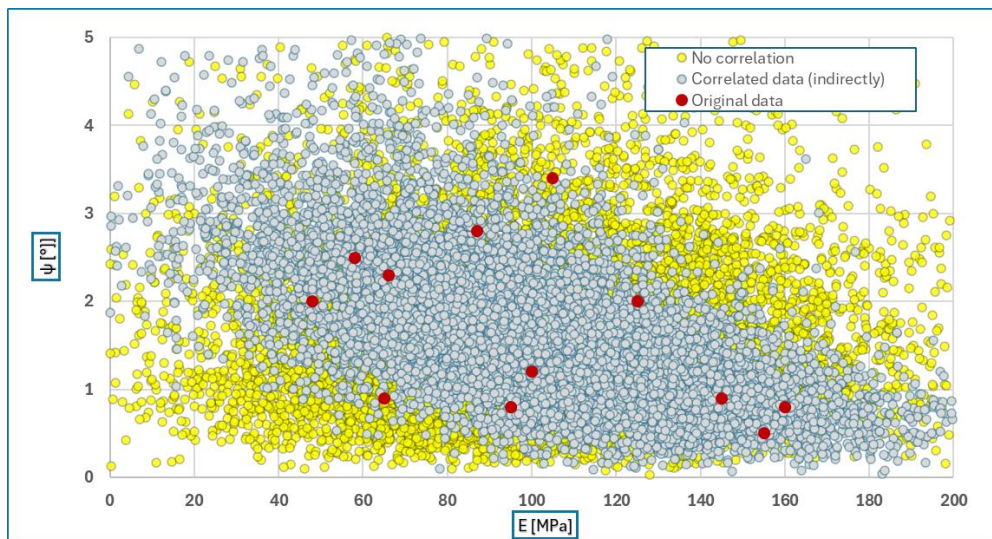


Слика 5.26 Узорковани (уезани и неуезани) параметри – међусобни однос  $\phi$ - $\psi$

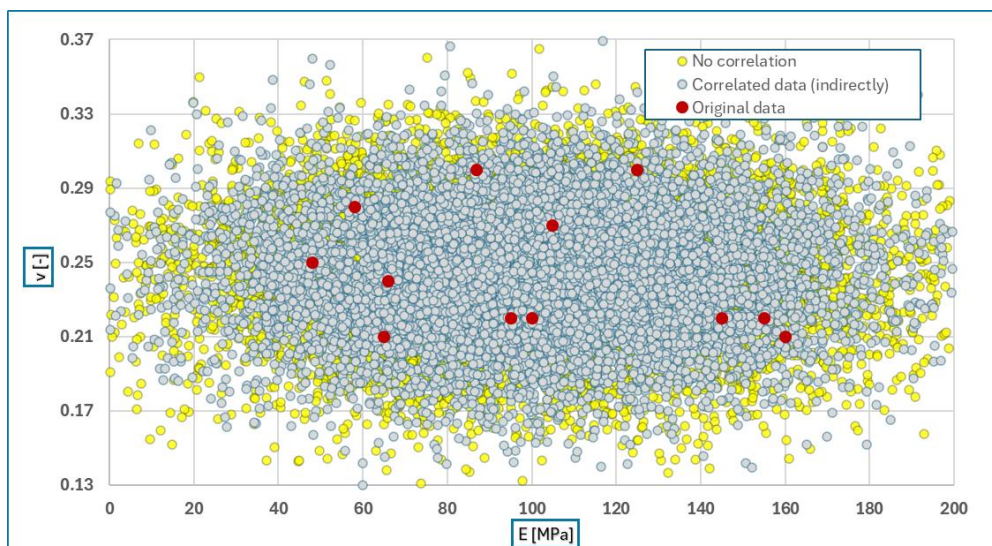


Слика 5.27 Узорковани (уезани и неуезани) параметри – међусобни однос  $\phi$ - $\nu$





Слика 5.28 Узорковани (увезани и неувезани) параметри – међусобни однос  $E$ - $\psi$



Слика 5.29 Узорковани (увезани и неувезани) параметри – међусобни однос  $E$ - $\nu$

### **Варијабилност података осматрања**

Подаци осматрања представљају деформације (аксијална, волуметријска...) у прорачунском тренутку ( $P$ ), након заустављања теста. Измерене вредности деформација у прорачунском тренутку су следеће: вертикална (аксијална) деформација  $\varepsilon_1^{izm} = 2.45\%$ , запреминска деформација  $\varepsilon_v^{izm} = 1.62\%$ .

Да би се подаци осматрања референтног узорка уклопили у пробабилистички оквир и задржала доследност са предложеном формулацијом методологије, аксијална деформација се третира као променљива која следи нормалну расподелу са средњом вредношћу  $\mu = 2,45\%$  и стандардном девијацијом  $\sigma=0,002$ , уместо да се посматра као једна фиксна (детерминистичка) вредност. Изабрана мала (али ненулта) стандардна девијација омогућава да расподела података осматрања остане уско концентрисана око стварне измерене вредности, а да се при томе избегне нумеричка нестабилност коју би савршено детерминистичка формулација ( $\sigma=0$ ) изазвала приликом накнадног додељивања тежинских коефицијената. Строжа, квази-детерминистичка вредност, попут  $\sigma=0,0002$ , захтевала би око  $10^6$  симулација да би се постигла нумеричка конвергенција прорачуна, док  $\sigma=0,002$  захтева приближно 10 000 симулација.

Информација о запреминској информацији није узета у обзир у овом примеру.

### 5.1.6 Детерминистичка анализа сигурности

Мера сигурности у случају детерминистичког прорачуна је фактор сигурности који се добија применом SSR методе која се спроводи у односу на задате детерминистичке улазне прорачунске параметре. Фактор сигурности дефинише се у случају Мор-Кулоновог материјалног модела као однос између усвојеног и редукованог (тангенса) угла унутрашњег трења:

$$FS^{SSR} = \frac{\tan \varphi}{\tan \varphi_{red}} \quad [36]$$

где  $\varphi_{red}$  представља угао унутрашњег трења (чврстоћу) материјала који у напонским условима прорачунског тренутка (P) губи носивост.

Параметар  $\varphi_{red}$  може се аналитички одредити на начин приказан у наставку. Мор-Кулонов редуковани услов лома, у функцији главних напона  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$ , дефинисан је следећим изразом:

$$\sigma_1 = \sigma_3 \frac{1 + \sin \varphi_{red}}{1 - \sin \varphi_{red}} + \frac{2c \cos \varphi_{red}}{1 - \sin \varphi_{red}} \quad [37]$$

Девијатор напона при лому (за редуковану анвелопу лома) у условима разматране прорачунске ситуације једнак је:

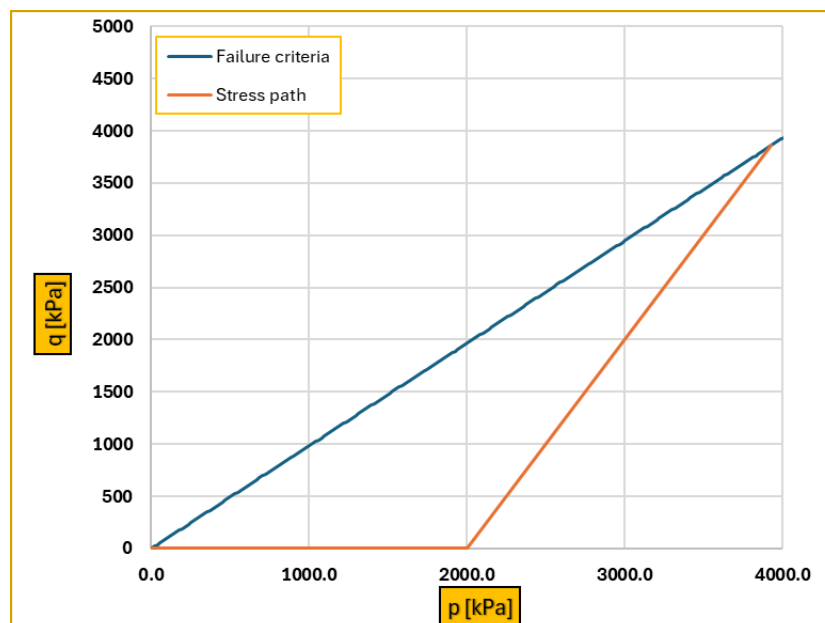
$$q_{f,red} = \sigma_1 - \sigma_3 = 5860 \text{ MPa} - 2000 \text{ MPa} = 3860 \text{ MPa} \quad [38]$$

Комбиновањем ова два израза добија се:

$$q_{f,red} = \frac{2 \sin \varphi_{red}}{1 - \sin \varphi_{red}} (\sigma_3 + c \cot \varphi_{red}) \quad [39]$$

Коначно, аналитичко решење за редуковани угао унутрашњег трења  $\varphi_{red}$  изводи се из претходног израза (рачунајући  $c = 0$ ):

$$\varphi_{red} = \arcsin \left( \frac{q_{f,red}}{2\sigma_3 + q_{f,red}} \right) = 29.4^\circ \quad [40]$$



Слика 5.30 Путања напона и редукована анвелопа лома

Параметри материјала за детерминистички прорачун сигурности усвајају се на основу параметара реконструисаних лабораторијских тестова који су приказани у поглављу 5.1.4. Код детерминистичког приступа одређује се јединствени уређени пар свих улазних параметара ( $\varphi$ ,  $E$ ,  $\psi$  и  $\nu$ ) који представља репрезентативну генерализацију понашања посматраног материјала, без обзира на установљену варибилност поменутих параметара. У пракси је веома устаљена примена оваквог приступа при чему решење проблема зависи од избора прорачунских параметара материјала (конкретно чврстоће, односно угла унутрашњег трења  $\varphi$ ).

Чврстоћа материјала креће се (реф. **Табела 5-2**) од  $\varphi = 40.2^\circ$  (узорак 10) до  $\varphi = 45.5^\circ$  (узорци 3 и 4). То значи да се могући детерминистички резултат анализе сигурности налази између вредности коефицијената сигурности који се добијају за екстремне углове  $\varphi$ , конкретно:

$$FS_{min}^{det} = \frac{\tan \varphi_{min}}{\tan \varphi_{red}} = \frac{\tan 40.2^\circ}{\tan 29.4^\circ} = 1.50 \quad [41]$$

$$FS_{max}^{det} = \frac{\tan \varphi_{max}}{\tan \varphi_{red}} = \frac{\tan 45.5^\circ}{\tan 29.4^\circ} = 1.8 \quad [42]$$

У случају да се као репрезентативни прорачунски угао унутрашњег трења одабере вредност  $\varphi = 40.2^\circ$  (конзервативан избор), резултат детерминистичког прорачуна дао би конзервативно решење  $FS_{min}^{det} = 1,5$ . Узмимо да је критеријум за избор репрезентативног угла  $\varphi$  за детерминистички прорачун минимизација грешке при апроксимирању понашања материјала на основу претходног тестирања. У том случају репрезентативна вредност угла унутрашњег трења јесте средња вредност свих измерених углова  $\varphi$  која износи  $\varphi = 43.1^\circ$ . Детерминистички коефицијент сигурности тада износи:

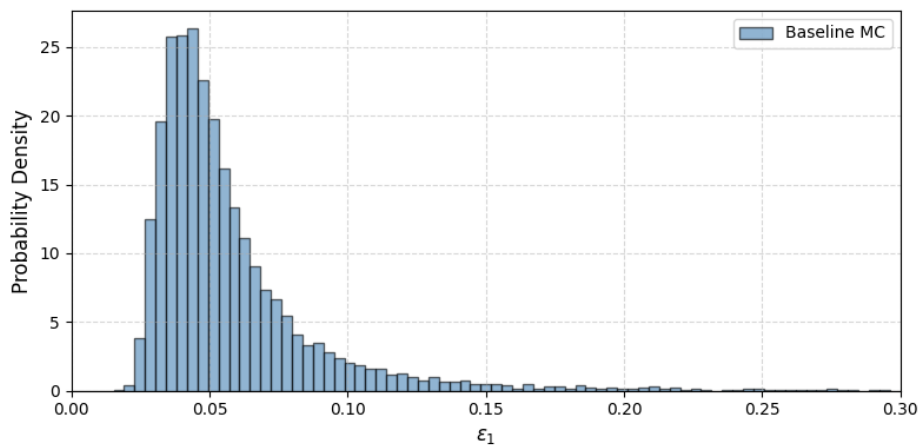
$$FS_{avg}^{det} = \frac{\tan \varphi_{avg}}{\tan \varphi_{red}} = \frac{\tan 43.1^\circ}{\tan 29.4^\circ} = 1.66 \quad [43]$$

Кључна ограничења детерминистичког приступа произилазе из његове природе: прорачун се ослања на једну генерализацију материјалног понашања, без обзира на то како су прорачунски параметри калибрисани. Тиме се стохастичка суштина проблема занемарује – унапред одређено, фиксно понашање подразумева се као довољно репрезентативно за процену сигурности. У таквом оквиру фактор сигурности добијен методом редукације чврстоће (SSR) представља тек показатељ колико је разматрани систем удаљен од унапред задате линије лома, и то за једну поједностављену, апроксимирану слику стварности. Варијабилност материјалних параметара потпуно је изостављена из анализе.

### 5.1.7 Пробабилитичка анализа сигурности

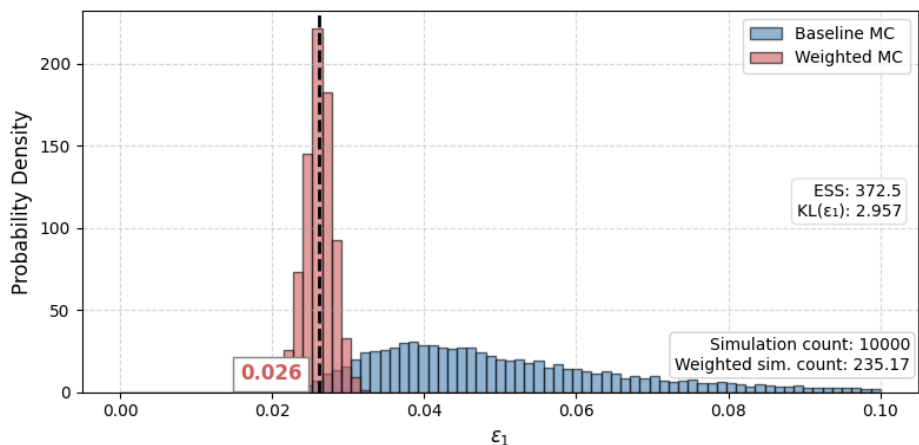
У овом поглављу приказани су и дискутовани резултати спроведених пробабилитичких анализа сигурности референтног узорка за које су улазни параметри представљени као случајне променљиве (поглавље 5.1.5). Паралелно су спроведене базна пробабилитичка анализа (без података осматрања) и пробабилитичка анализа са имплементацијом података осматрања како би се анализирале разлике у резултатима. Анализом резултата 10 000 МКЕ симулација триаксијалног теста добијене су функције расподеле (густине вероватноће) резултата прорачуна – аксијалне деформације и фактора сигурности FS у прорачунском тренутку (P).

**Слика 5.31** приказује густину вероватноће (PDF) аксијалне деформације  $\epsilon_1$  добијену из базне пробабилитичке анализе. Већина симулација предвиђа деформацију мању од 0,2, иако постоји мали број симулација које предвиђају вредност  $\epsilon_1$  чак и изнад 0,25 због тога што су у њима узорковани и примењени веома ниски модули еластичности E. За потребе дискусије у овом примеру као распон могућих резултата базне анализе довољно је прецизно усвојити  $\epsilon_{1,range} = 0.2$ .



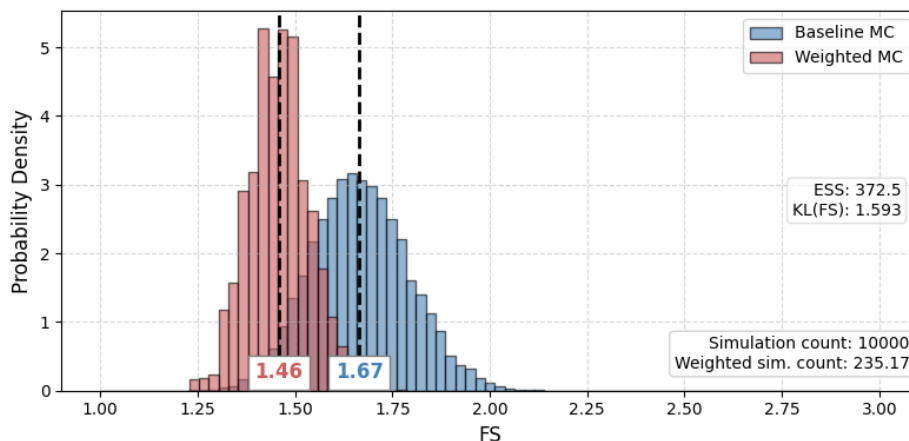
**Слика 5.31** Резултати базне пробабилитичке анализе – густина вероватноће (PDF) аксијалне (вертикалне) деформације  $\epsilon_1$

**Слика 5.32** приказује поређење расподела  $\epsilon_1$  пре и након пондерисања према предложеној методологији. Ради прегледности графика, одсечена је базна крива за  $\epsilon_1 > 0,10$ . Дугачак десни “реп” (до приближно  $\epsilon_1 \approx 0,30$ ) остаје у скупу података, али је визуелно без већег значаја. Након пондерисања, расподела  $\epsilon_1$  се концентрише око осмотрене вредности у референтном тесту, показујући да предложени поступак усмерава базно решење анализе ка уоченом понашању, што потврђује висока вредност KL дивергенције ( $\approx 2.96$  nats) између пондерисане и базне расподеле резултата.



**Слика 5.32** PDF аксијалне деформације  $\epsilon_1$  - резултати базне и пондерисане анализе

Што се тиче фактора сигурности (FS), базна анализа даје расподелу FS са средњом вредношћу  $\mu=1,66$  и стандардном девијацијом  $\sigma=0,11$  (Слика 5.33). Уношењем података осматрања – нормалне расподеле концентрисане око измерене аксијалне деформације ( $\epsilon_1=2,45\%$ ,  $\sigma=0,002=1\% \epsilon_{1,range}$ ) – и пондерисањем сваке симулације у складу с тим, исход се значајно мења ( $KL \approx 1.59$  nats): средња вредност FS опада на  $\mu = 1,46$ , а распон се сужава на  $\sigma = 0,08$ . Смањење редње вредности фактора сигурности са 1,66 у базној анализи на 1,46 у пондерисаној анализи одражава чињеницу да се на вишем нивоу напрезања углавном мобилише нижи угао унутрашњег трења.



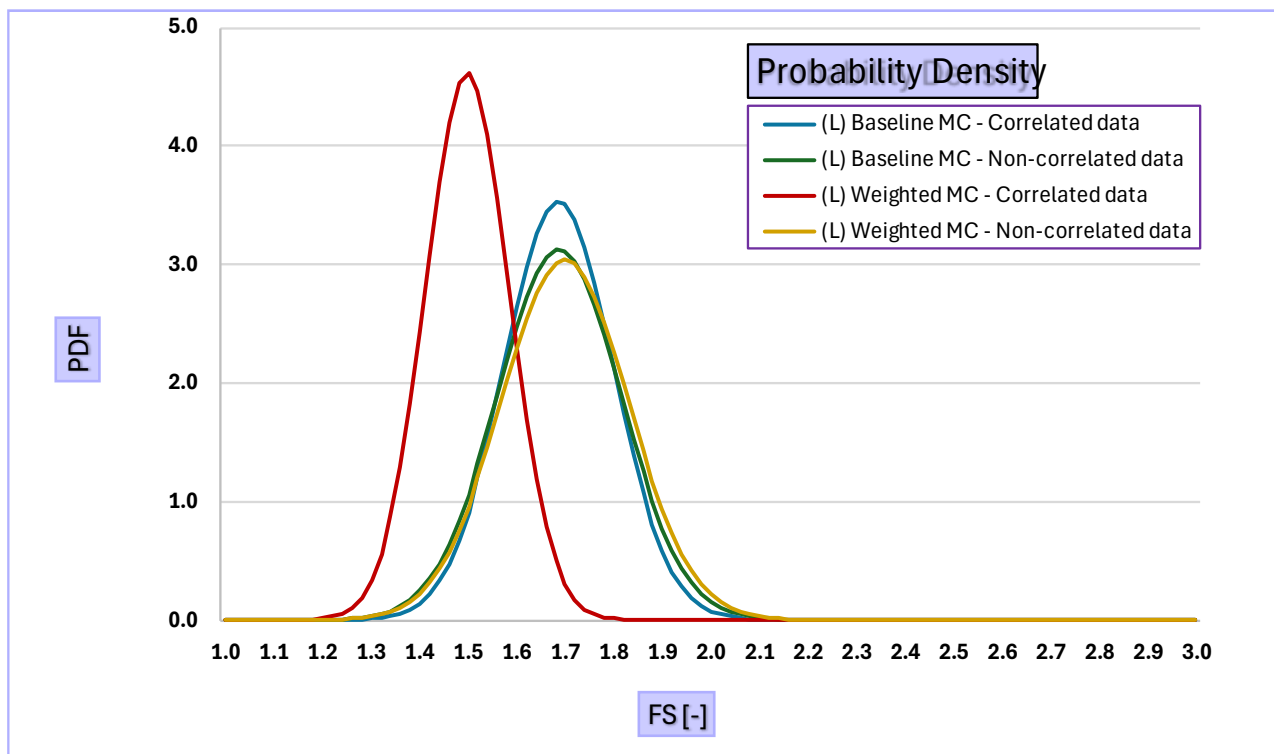
Слика 5.33 PDF фактора сигурности FS - резултати базне и пондерисане анализе

Иако је базна анализа обухватала  $10^4$  симулација, корак пондерисања је смањио ефективни узорак ( $ESS$ ) на свега 372.5, док укупна сума тежинских коефицијената у пондерисаној анализи износи  $N^{weighted} \approx 235$  (Слика 5.33). Због тога је резултујући хистограм приметно мање гладак од оног у базној анализи.

### Значај корелације између улазних параметара

У складу са узорковањем параметара представљеним у поглављу 5.1.5 анализе су спроведене са увезаним параметрима материјалног модела и са независним параметрима материјалног модела. У случају примене увезаних параметара пробабилистичка анализа са имплементацијом параметара осматрања резултује хистограмом фактора сигурности са нижом средњом вредношћу и мањом стандардном девијацијом у односу на резултате базне анализе. Овај резултат је очекиван јер осликава варијабилност понашања материјала при вишим напрезањима, за разлику од резултата базне анализе који се односе на понашање материјала у целокупном могућем спектру напрезања. Анализа са независним параметрима нема начин да узме у обзир разлику у понашању материјала при вишим и нижим напрезањима, због чега су резултати пондерисане анализе без увезивања параметара готово идентични као резултати базне анализе.

На следећој слици сумиран је резултат базних и пондерисаних пробабилистичких анализа које су спроведене са параметрима који су увезани и независни. Увезивање, односно корелација између прорачунских параметара има јако важну улогу у тачности резултата у овом примеру. У случају примене независних параметара материјала, пробабилистичка анализа није довела до побољшања тачности решења.



Слика 5.34 Поређење резултата анализа са увезаним и независним параметрима

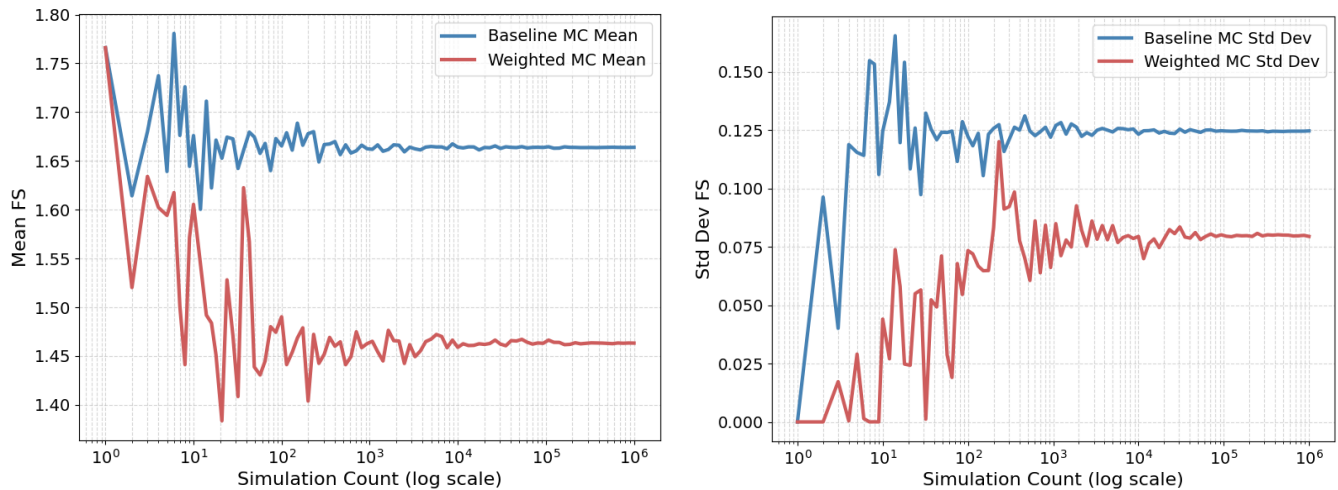
У наставку више нису дискутоване пробабилистичке анализе са неувезаним параметрима, јер је јасно да са таквим узорковањем није могуће имплементирати податке осматрања према предложеној методологији.

### Конвергенција прорачуна – број потребних симулација

Да би се утврдило колико је симулација потребно за нумеричку стабилност прорачуна, испитана је конвергенција средње вредности и стандардне девијације  $FS$  за базу и пондерисану анализу. Процена је извршена тако што је обављено 100 додатних потпуних Монте Карло анализа са величинама узорака логаритамски распоређених у интервалу од 1 до  $10^6$ , након чега су  $\mu$  и  $\sigma$  приказани у функцији броја симулација. Поред тога, у оквиру исте нумеричке процедуре генерисан је и дијаграм конвергенције  $KL(FS)$ .

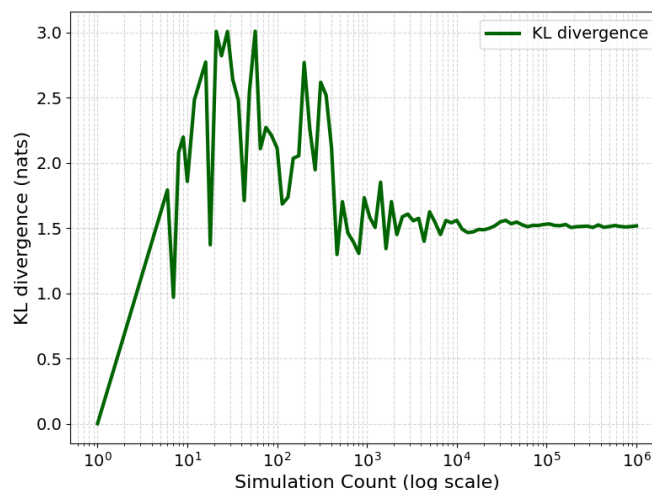
Слика 5.35 приказује дијаграме конвергенције за средњу вредност и стандардну девијацију расподеле  $FS$ . Из ових графика се види да је 10 000 симулација оптималан број: након тог броја,  $\mu$  и  $\sigma$  хистограма пондерисане анализе више се не мењају осетно. Такође се види да база и пондерисана анализа не постижу конвергенцију при истом броју симулација. Конвергенција пондерисане анализе зависи од ефективног подскупа номиналног броја симулација који задржава незанемарљиву тежину након имплементације параметара осматрања. Тај подскуп се квантификује сумом тежинских коефицијената  $N^{weighted}$  и ефективним бројем узорака  $ESS$ .

Слика 5.35 показује да се резултати базе Монте Карло анализе стабилизују након приближно 200 симулација, док пондерисана анализа постиже конвергенцију тек када се номинални број симулација повећа на око  $10^4$ . До ове разлике долази зато што се након пондерисања споменутих  $10^4$  симулација своди на укупну суму тежина од око  $N^{weighted} \approx 235$  (Слика 5.33), што је упоредиво са 200 симулација које су довољне за конвергенцију у случају базе анализе. Ефективни број симулација показује исти ред величине у својој процени ефективног узорка  $ESS \approx 372$ .



Слика 5.35 Дијаграм конвергенције средње вредности и стандардне девијације расподеле FS

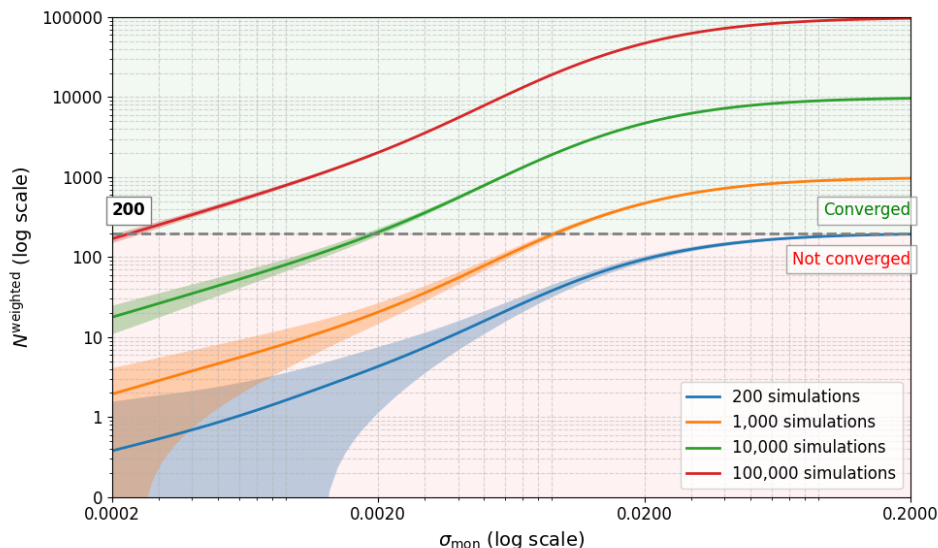
Слика 5.36 показује да  $KL$  дивергенција има изражену варијабилност при малом броју симулација, услед недовољне попуњености пондерисаних хистограма. Када број симулација пређе око  $10^4$ ,  $KL$  конвергира ка стабилној вредности од око 1,6 nats, вредности која се поклапа са извештеном  $KL$  дивергенцијом на слици 5.33. Након овог прага, додатне симулације доводе до занемарљиво малих промена  $KL$  дивергенције, што указује да је информациони садржај који подаци осматрања могу да пренесу у анализу практично исцрпљен.



Слика 5.36 Поређење резултата анализа са увезаним и независним параметрима

Сума тежинских коефицијената  $N^{weighted}$  приказана је на слици 5.37 у функцији стандардне девијације расподеле података осматрања ( $\sigma_{mon}$ ), и номиналног броја симулација  $N$ . Формирана су четири узоркована сета уређених парова улазних података за Монте Карло анализе: један сет од 200 парова (на ивици конвергенције за базну анализу) и три већа скупа за анализе од  $10^3$ ,  $10^4$  и  $10^5$  симулација. За сваки од ових скупова, комплетна пондерисана анализа је поновљена 100 пута, при чему је стандардна девијација података осматрања  $\sigma_{mon}$  варирана логаритамски од 0,0002 до 0,2 (0,1% – 99%  $\epsilon_{1,range}$ ). За сваку вредност  $\sigma_{mon}$ , тежински коефицијенти су сумирани како би се израчунао  $N^{weighted}$ .

Целокупна описана процедура је затим поновљена 50 пута, сваки пут са новим узоркованим подацима за сва четири скупа. На тај начин је добијено 50 вредности  $N^{weighted}$  за било коју разматрану вредност  $\sigma_{mon}$ . Слика 5.37 приказује просечну вредност тих 50 извођења као пуну криву, а засенчене области покривају опсег  $\pm 2$  стандардне девијације расподела  $N^{weighted}$ . Засенчене области тако визуелизују могуће распоне  $N^{weighted}$  који се јављају искључиво као последица случајног избора номиналних симулација  $N$ .



**Слика 5.37** Број ефективних симулација  $N^{weighted}$  у функцији стандардне девијације расподеле података осматрања ( $\sigma_{mon}$ )

Када је стандардна девијација мониторинга отприлике један проценат (0,002) или више од базног распона  $\varepsilon_{1,range}$ , номинални скуп од око  $10^4$  узорака гарантује неколико стотина ефективних симулација, што резултује добро дефинисаним апостериором уз умерену цену прорачуна. Међутим, ако се  $\sigma_{mon}$  смањи на неколико десетина процента  $\varepsilon_{1,range}$ , сума тежинских коефицијената  $N^{weighted}$  опада испод прага од 200 симулација, и резултат пондерисане анализе постаје нестабилан, осим ако се номинални број симулација  $N$  не увећа за неколико редова величине. Засенчене области које представљају опсег  $\pm 2\sigma$  визуелно показују где је конвергенција обезбеђена. Када засенчење остаје уско и у потпуности изнад референтне линије од 200 симулација, ефективна величина узорка  $N^{weighted}$  је стабилна, што указује на то да је пондерисана анализа конвергирала. Тамо где се засенчење знатно проширује (испод линије од 200 симулација), велика дисперзија  $N^{weighted}$  указује на неконвергенцију, што значи да је потребан већи номинални број симулација  $N$  или мање рестриктивна вредност  $\sigma_{mon}$ .

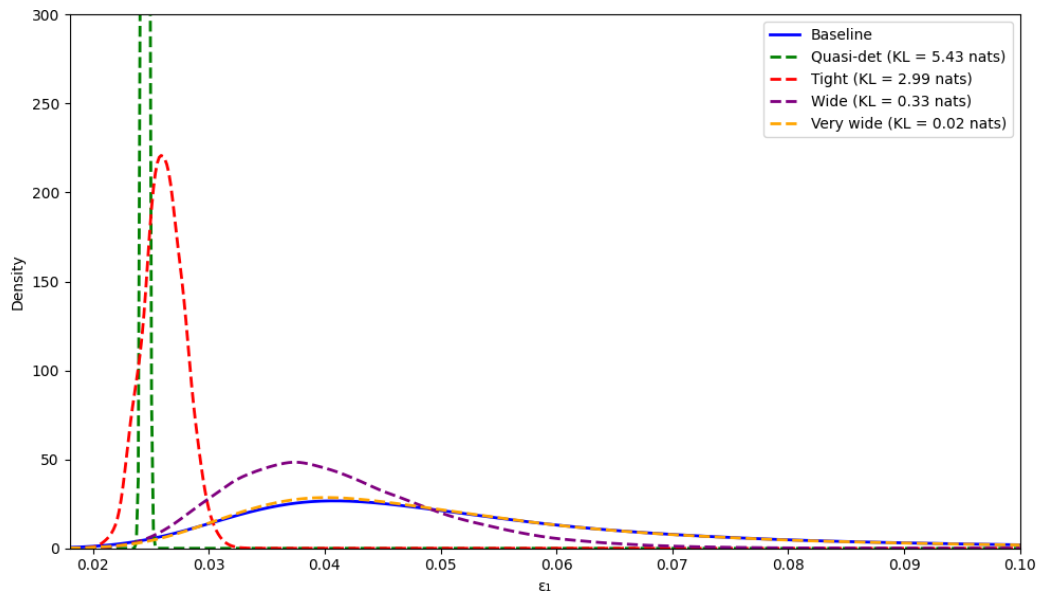
### **Значај распона функције расподеле података осматрања**

У пондерисаној анализи измерена аксијална деформација ( $\varepsilon_1=2,45\%$ ) моделирана је нормалном расподелом. Њена стандардна девијација ( $\sigma_{mon}$ ) одређује колико строго поступак пондерисања усмерава Монте Карло анализу ка осмотреној вредности. Да би се тај утицај квантификовао, размотрена су четири различита опсега расподеле аксијалне деформације, а пробабилистичка анализа је поновљена са  $N=10^6$  симулација, како би се обезбедила конвергенција и у случају врло малих (квази-детерминистичких) стандардних девијација.



**Табела 5-3** Дефиниције разматраних опсега расподеле ( $\epsilon_{1,range} = 0,2$ )

Распон	$\sigma_{mon} / \epsilon_{1,range}$	$\sigma_{mon}$
Квази-детерминистички	0,1%	0,0002
Узак	1%	0,002
Широк	10%	0,02
Веома широк	100%	0,2

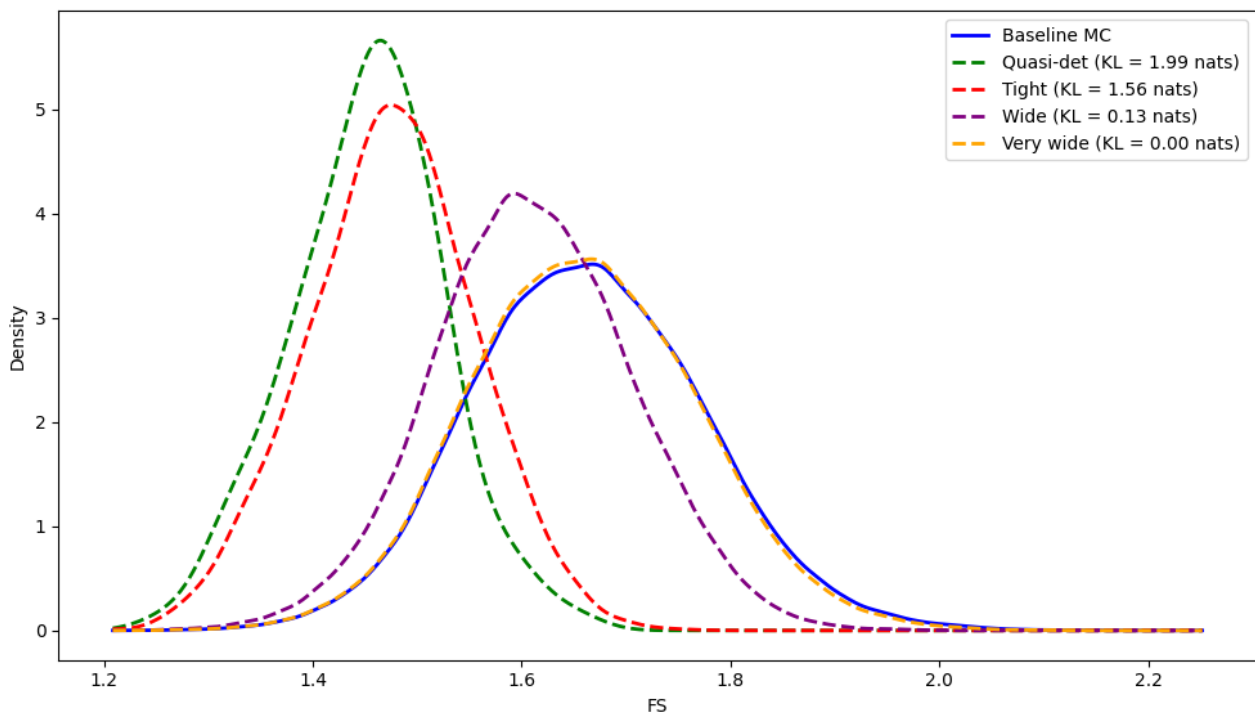


**Слика 5.38** PDF аксијалне деформације  $\epsilon_1$  - поређење резултата базне и пондерисане анализе са различитим распонима функција расподеле  $\sigma_{mon}$

Криве густине вероватноће (Слика 5.38 ) показују како избор опсега расподеле података осматрања ( $\sigma_{mon}$ ) утиче на резултате пондерисане анализе:

- Квази-детерминистички опсег – PDF се дегенерише у скоро детерминистичку вредност  $\epsilon_1=2,45\%$ . Само неколицина симулација задржава приметну тежину, што потврђује да изузетно узак опсег  $\sigma_{mon}$  усмерава анализу ка готово детерминистичком поклапању са осматрањем (ово потврђује екстремно висока вредност  $KL=5.43$  nats), али по цену веома великог броја симулација потребних за конвергенцију.
- Узак опсег – расподела  $\epsilon_1$  остаје концентрисана близу измерене деформације, међутим јавља се мали, али не занемарљив распон ( $KL=2.99$  nats осликава и даље значајно ажурирање). Овај опсег елиминише више од 98% репа базне расподеле, обезбеђујући снажан утицај података осматрања, а статистички поуздани резултати постижу се већ са око  $10^4$  симулација.
- Широки опсег – врх пондерисане расподеле у односу на базну се помера само умерено ка осмотреној величини ( $KL=0.33$  nats); остатак десног репа и даље је присутан. Податак осматрања утиче на резултате, али варијабилност из базне анализе није у потпуности потиснута.
- Врло широки опсег – пондерисана крива практично се не разликује од базног хистограма (вредност  $KL=0.02$  квантификује занемарљиво ажурирање), што указује на то да идентичан опсег података осматрања и расподеле резултата базне анализе оставља анализу ефективно непондерисаном.

**Слика 5.39** приказује резултате за исти образац промене опсега  $\sigma_{mon}$ , али сада за расподеле фактора сигурности (FS).



**Слика 5.39** PDF фактора сигурности FS - поређење резултата базне и пондерисане анализе са различитим распонима функција расподеле  $\sigma_{\text{mon}}$

Како се стандардна девијација података осматрања смањује од веома широког ка квази-детерминистичком опсегу, цела функција густине вероватноће FS систематски се помера улево и истовремено постаје ужа:

- Квази-детерминистички опсег – зелена PDF достиже максимум при  $\mu \approx 1,45$  и има најужи распон; представља најизраженији утицај података осматрања ( $KL=1.99$  nats), али захтева анализу са око  $10^6$  симулација да би се обезбедила конвергенција.
- Узани опсег – црвена крива се јасно помера ( $KL=1.56$  nats) у домен нижих вредности фактора сигурности ( $\mu \approx 1,48$ ), а варијанса опада отприлике за једну четвртину; резултати одражавају генерално нижи ефективни угао унутрашњег трења који се мобилише при већем напрезању.
- Широки опсег – љубичаста крива показује умерено померање улево ( $\mu \approx 1,62$ ) и благо сужење; утицај података осматрања јесте видљив, али варијабилност базне анализе преовлађује (што потврђује ниска вредност  $KL=0.13$  nats).
- Врло широки опсег – наранџаста крива готово је иста као плава базна крива; када опсег података осматрања обухвата цео распон резултата базне анализе, пондерисање практично нема утицаја ( $KL \approx 0$ ).

**Табела 5-4** Утицај опсега расподеле података осматрања на пондерисану расподелу FS

$\sigma_{\text{mon}} / \epsilon_{i,\text{range}}$	$\mu(\text{FS})$	$\sigma(\text{FS})$	$KL(\text{FS})$
0,1%	1,45	0,06	1.99
1%	1,48	0,08	1.56
10%	1,62	0,10	0.13
100%	1,69	0,11	0

Узак опсег расподеле података осматрања снижава процењени ниво сигурности (до око 14% у односу на базну средњу вредност  $\mu=1,69$ ) и истовремено сужава дисперзију резултата; ови резултати одражавају варијабилност (нижег) ефективног угла унутрашњег трења који се

мобише при високом напрезању. Како се опсег расподеле  $\sigma_{\text{mon}}$  проширује, резултати се постепено враћају на вредности FS добијене у базној анализи.

Комбиновањем ових налаза са резултатима за  $\epsilon_1$  (Слика 5.38) показује се да опсег података осматрања од приближно 1%  $\epsilon_{i,\text{range}}$  представља најбољи компромис: ажурира процену сигурности (вредност KL дивергенције су високе како за  $\epsilon_1$  тако и за FS), умањује варијансу, а и даље је нумерички изводљив уз  $10^4$  симулација.

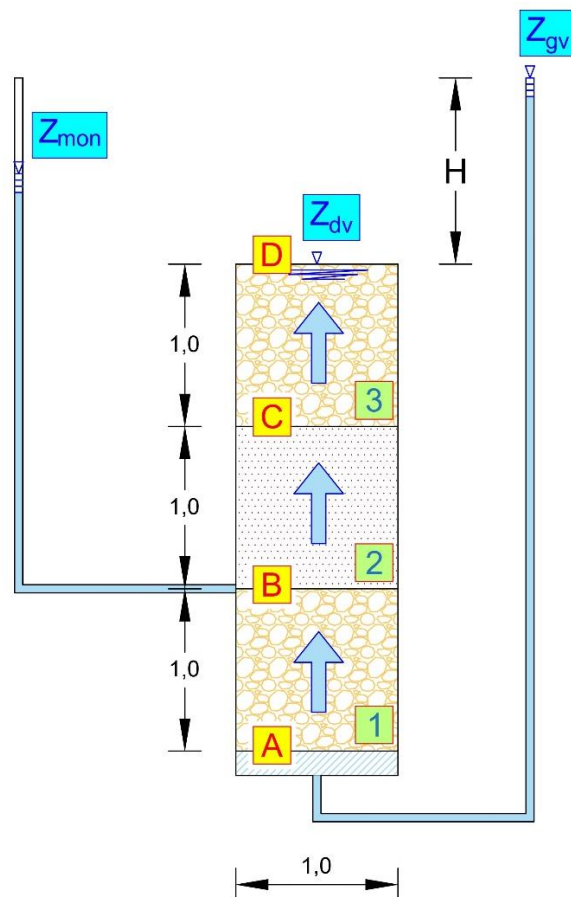
## 5.2 Филтрација навише кроз вертикално услојено тло

У овом примеру илустрована је имплементација података осматрања у пробабилистичку анализу за одређивање сигурности на примеру филтрације воде навише кроз трослојно вертикално услојено тло. Овај пример није заснован на реалним ситуацијама нити мерењима. Поставка проблема, која укључује вредности прорачунских параметара и података осматрања, је фиктивна и осмишљена у циљу демонстрације пондерисане пробабилистичке анализе чије су улазне променљиве коефицијенти филтрације.

### 5.2.1 Поставка проблема

#### Опис проблема и циљ анализе

У овом демонстрационом примеру разматра се проблем нестабилности тла услед појаве затезања узроковане кретањем воде навише кроз хоризонтално услојено тло са 3 слоја, као на слици испод, при чему слојеви 1 и 3 (песак) представљају материјал са једнаким коефицијентом водопрпусности  $k_1$ , док слој 2 (глина) представља материјал са коефицијентом водопрпусности  $k_2$ <sup>5</sup>. Циљ анализе јесте процена вероватноће лома, односно појаве затезања у тлу, због чега је урађена пробабилистичка анализа сигурности. Коефицијенти водопрпусности  $k_1$  и  $k_2$  представљају улазне променљиве за пробабилистички прорачун и једине су величине које имају статистички третман у овом примеру. Њихове функције расподеле су дефинисане у поглављу 5.2.2.



Слика 5.40 Поставка проблема

<sup>5</sup> Сценарио у коме се материјал са мањом водопрпусношћу налази између материјала са већом водопрпусношћу је веома уобичајен код насутих брана са централним језгром.

На нивоу В приказаног стуба тла постављен је пијезометар чија мерења представљају податке осматрања који ће бити интегрисани у пробабилистички прорачун. Функција расподеле која описује податке осматрања (потенцијал на нивоу В) дефинисана је у поглављу 5.2.2.

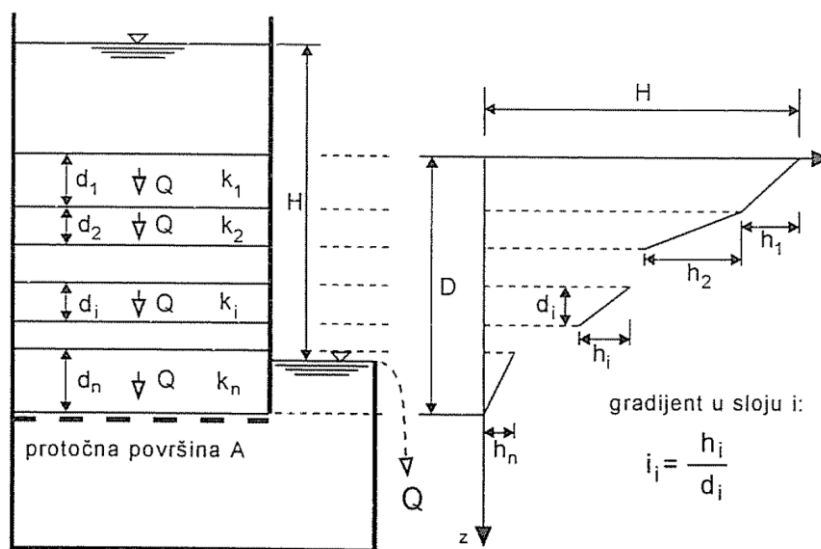
Димензије (висина, ширина и дубина управно на раван слике) сваког од слојева тла посматраног система усвојене су као јединичне. Користећи ознаке са **слике 5.41**, то значи да је  $d_1 = d_2 = d_3 = 1 \text{ m}$ , проточна површина  $A = 1$ , а укупна висина трослојног система  $D = 3$ .

Вредности потенцијала на нивоима А ( $Z_{gv}$ ) и D ( $Z_{dv}$ ) усвојени су на следећи начин:  $Z_{gv} = 5.5$  и  $Z_{dv} = 3.0$  (ове вредности представљају граничне услове хидрауличког проблема). Разлика потенцијала која износи  $H = 5.5 - 3.0 = 2.5 \text{ m}$  представља иницијатор струјања воде навише у посматраном систему.

Коначно, усваја се једнака тежина засићеног тла за сва 3 материјала у посматраном услојеном тлу која је једнака  $\gamma_z = 22 \text{ kN/m}^3$  и сматра се да је затежућа чврстоћа за сва 3 слоја тла једнака нули ( $\sigma_t = 0$ ).

### Теоријске основе

Аналитичко решење проблема кретања воде кроз хоризонтално услојено тло укратко је представљено у наставку (скица, ознаке и изрази преузети из [81]). Познате величине су дебљине слојева  $d_i$ , коефицијенти водопрпусности слојева  $k_i$  и гранични услови (потенцијал) на доњој и горњој површини, односно укупан пад потенцијала  $H$  кроз целокупан вишеслојни систем.



**Слика 5.41** Кретање воде управно на хоризонтално услојено тло [81]

Претходна слика приказује кретање воде наниже, али потпуно иста логика и изрази важе и за кретање воде навише. Проток воде, у случају кретања навише кроз вертикално услојена тла, је константна вредност и рачуна се према изразу:

$$Q = \frac{AH}{\sum d_i/h_i} \quad [44]$$

где је  $A$  проточна површина која је константна величина (**Слика 5.41**). Појединачни падови потенцијала кроз слојеве  $h_i$  рачунају се према изразу:

$$h_i = \frac{Qd_i}{Ak_i} \quad [45]$$

Хидраулички градијенти кроз појединачне слојеве се рачунају према изразу:

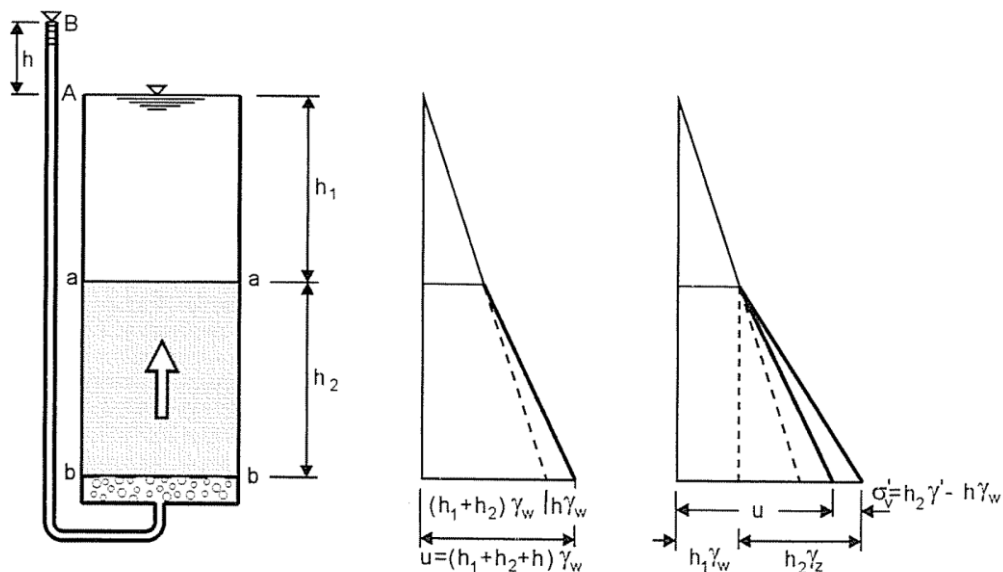
$$i_i = \frac{h_i}{d_i} \quad [46]$$

Вертикално кретање воде навише приказано је на следећој слици (преузето из [81]). Тотални напони и порни притисци на нивоу b-b дефинишу се као:

$$\sigma_v = h_1\gamma_w + h_2\gamma_z \quad [47]$$

$$u = (h_1 + h_2 + h)\gamma_w \quad [48]$$

где је  $\gamma_w$  тежина воде а  $\gamma_z$  тежина водом засићеног тла.



Слика 5.42 Дијаграм ефективних напона при струјању навише (скица преузета из [81])

Вертикални ефективни напон на нивоу b-b износи [81]:

$$\sigma_v' = \sigma_v - u = h_2\gamma' - h\gamma_w \quad [49]$$

где  $\gamma' = \gamma_z - \gamma_w$  представља запреминску тежину тла у потоњеном стању. Из претходног израза види се да је вертикални ефективни напон у случају струјања воде навише мањи него што би био у хидростатичком случају без кретања воде. Што се више повећава разлика потенцијала (односно висина  $h$ ) која доводи до филтрације, вертикални ефективни напон на нивоу b-b је све мањи. Постоји критична разлика потенцијала  $h_{cr}$  која доводи до тога да је вертикални ефективни напон  $\sigma_v'$  на нивоу b-b једнак нули, након чега тло губи структуру и долази до појаве која се назива кључање тла.

### Аналитичко решење филтрационе анализе

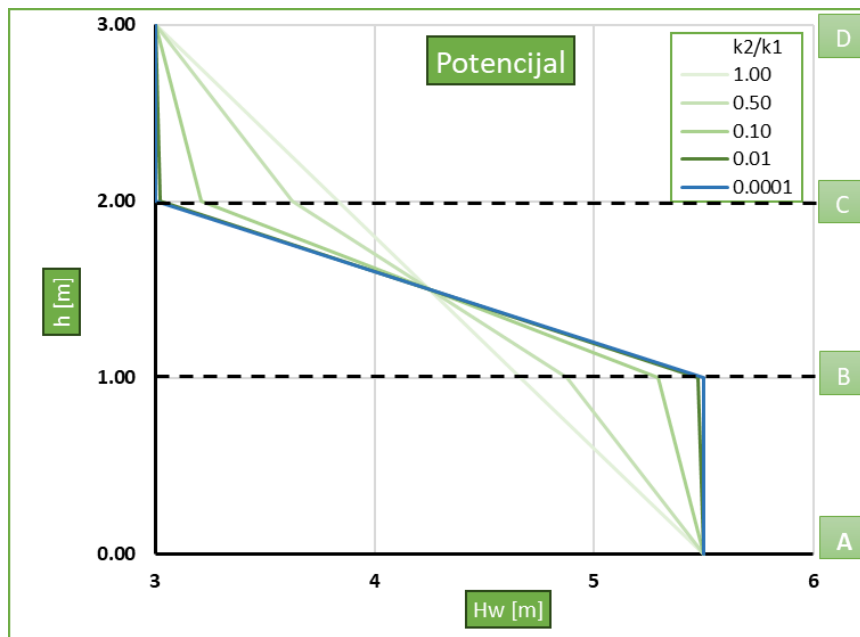
У овом поглављу приказан је распон могућих решења хидрауличког проблема кретања воде навише кроз трослојни систем, у зависности од односа коефицијената водопрпусности  $k_2/k_1$ . Филтрациона слика аналитички се може одредити на горе наведени начин.

Резултати филтрационог прорачуна представљени су у наставку (табела и дијаграми) за различите односе коефицијената водопрпусности  $k_2/k_1$ .

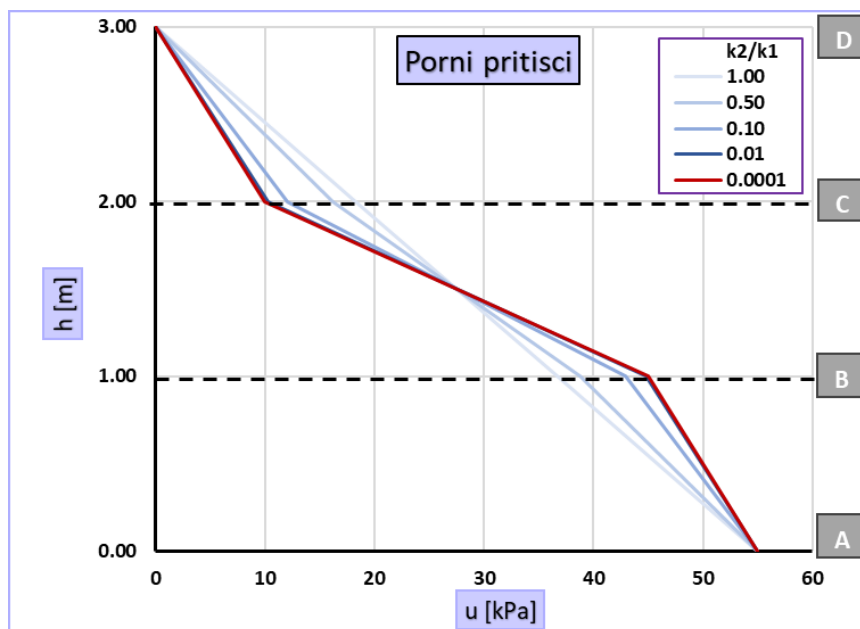
**Табела 5-5** Резултати филтрационог прорачуна за различите вредности односа  $k_2/k_1$

$k_2/k_1=$	1.00	0.50	0.10	0.01	0.0001
<b>Пад потенцијала по слоју</b>					
$h_1=$	0.83	0.63	0.21	0.02	0.00
$h_2=$	0.83	1.25	2.08	2.45	2.50
$h_3=$	0.83	0.63	0.21	0.02	0.00
<b>Градијенти</b>					
$i_1=$	0.83	0.63	0.21	0.02	0.00
$i_2=$	0.83	1.25	2.08	2.45	2.50
$i_3=$	0.83	0.63	0.21	0.02	0.00
<b>Потенцијал</b>					
$H_A=$	5.50	5.50	5.50	5.50	5.50
$H_B=$	4.67	4.88	5.29	5.48	5.50
$H_C=$	3.83	3.63	3.21	3.02	3.00
$H_D=$	3.00	3.00	3.00	3.00	3.00
<b>Порни притисци</b>					
$u_A=$	55.00	55.00	55.00	55.00	55.00
$u_B=$	36.67	38.75	42.92	44.75	45.00
$u_C=$	18.33	16.25	12.08	10.25	10.00
$u_D=$	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00

Прва ( $\frac{k_2}{k_1} = 1$ ) и последња колона ( $\frac{k_2}{k_1} = 0.0001$ ) могу се сматрати граничним случајевима могућих резултата у смислу њихове зависности од односа водопрпусности слојева. У првој колони приказан је случај у коме су водопрпусности свих слојева једнаке, па је градијент исти кроз читав систем, а потенцијал се линеарно смањује од нивоа А према нивоу D. Последња колона приказује случај у коме је водопрпусност средњег слоја готово бесконачно пута већа од водопрпусности спољних слојева, па се целокупан пад потенцијала дешава кроз средњи слој, док су градијенти у спољним слојевима једнаки нули. Следећи дијаграми илуструју резултате филтрационог прорачуна.



Слика 5.43 Промена потенцијала по висини



Слика 5.44 Дијаграм порних притисака по висини

### Стање напона у посматраном трослојном систему

Напонска слика у разматраном трослојном тлу може се одредити применом принципа ефективних напона. Величина вертикалног тоталног напона једнака је тежини стуба засићеног тла изнад посматране тачке [81]:

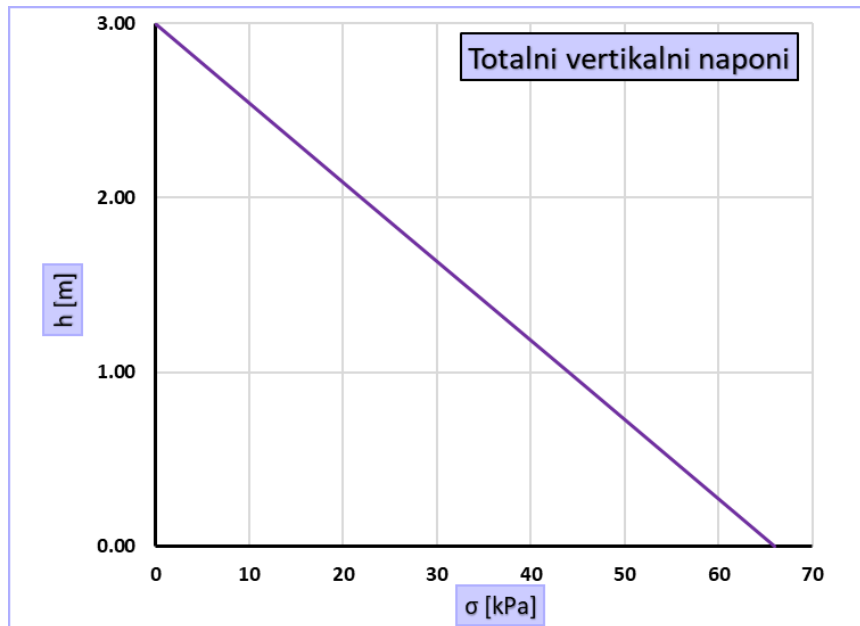
$$\sigma_v = \gamma_z h \quad [50]$$

где  $h$  представља дубину посматране тачке (посматрано од врха стуба – ниво D), док  $\gamma_z = 22\text{kN/m}^3$  представља претходно дефинисану тежину засићеног тла која је константна у свим слојевима. Вредности тоталних вертикалних напона на карактеристичним нивоима приказани су у наставку.



**Табела 5-6** Тотални напони на карактеристичним нивоима

Тотални вертикални напони		
$\sigma_{A=}$	66.00	kPa
$\sigma_{B=}$	44.00	kPa
$\sigma_{C=}$	22.00	kPa
$\sigma_{D=}$	0.00	kPa



**Слика 5.45** Тотални вертикални напони

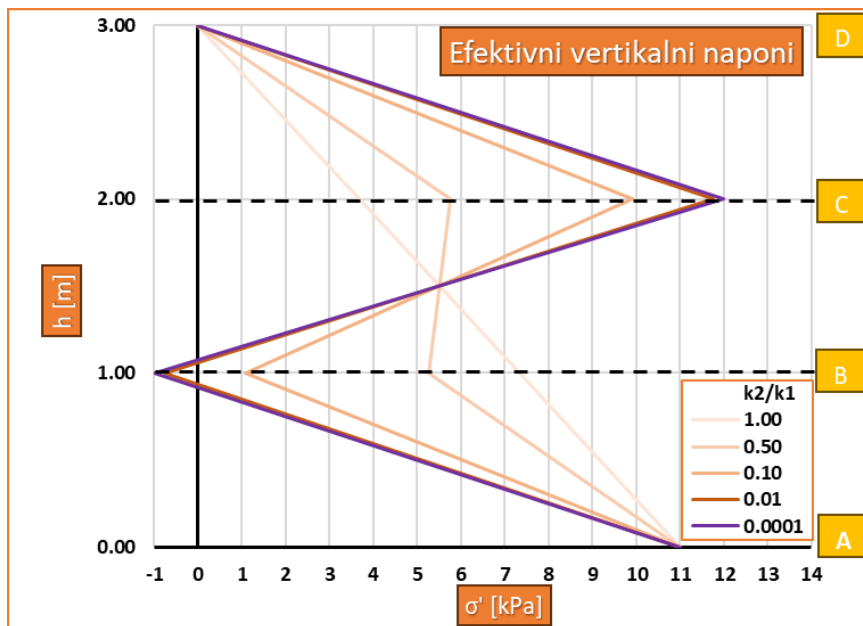
Ефективни напони представљају разлику тоталних напона и порних притисака:

$$\sigma_v' = \sigma_v - u \quad [51]$$

Поље порних притисака претходно је одређено је и дискутовано. У наставку је приказано напонско стање у трослојном тлу за различите односе коефицијената водопрпусности  $k_2/k_1$ .

**Табела 5-7** Ефективни напони на карактеристичним нивоима

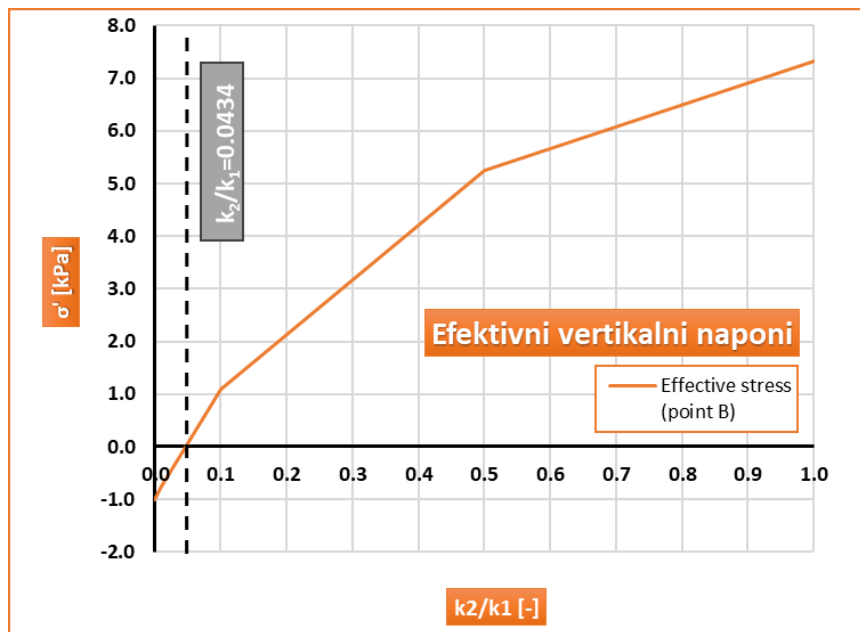
$k_2/k_1=$	1.00	0.50	0.10	0.01	0.0001
Ефективни вертикални напони					
$\sigma'_{A=}$	11.00	11.00	11.00	11.00	11.00
$\sigma'_{B=}$	7.33	5.25	1.08	-0.75	-1.00
$\sigma'_{C=}$	3.67	5.75	9.92	11.75	12.00
$\sigma'_{D=}$	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00



Слика 5.46 Ефикасни вертикални напони

Анализом дијаграма вертикалних ефикасних напона долази се до следећих закључака:

- Ефикасни напони на доњој (ниво А) и горњој (ниво D) страни трослојног стуба тла су увек једнаки и зависе искључиво од граничних услова. У овом случају на доњој страни напон је једнак  $\sigma_v' = 11$  kPa (притисак) што значи да укупна разлика потенцијала  $H = 2.5$  m није достигла критичну вредност која изазива кључање тла.
- Напонска слика унутар трослојног стуба тла зависи од односа коефицијената водопропусности  $k_2/k_1$ . У случају константне водопропусности ( $k_2 = k_1$ ), ефикасни напон линеарно опада од доње према горњој страни стуба. Како коефицијент  $k_2$  опада ситуација се мења и промена напона више није константна дуж целог стуба. Уочава се пад вредности напона кроз слој 1, затим пораст кроз средњи слој 2 и коначно линеаран пад до нulte вредности на горњој страници.
- Вредност напона на нивоу В смањује се са смањењем водопропусности средњег слоја. У исто време вредност напона на нивоу С повећава се са смањењем водопропусности средњег слоја.
- Ниво В представља критичну позицију у систему. Са смањењем односа  $k_2/k_1$  уочава се да постоји могућност појаве затезања у тлу које максималну вредност достиже на висини нивоа В. Како је носивост свих слојева тла на затезање нула, јасно је да је могуће креирање зоне нестабилности око нивоа В. Промена ефикасног напона у односу на различите вредности  $k_2/k_1$  приказана је на следећем дијаграму. При вредности  $\frac{k_2}{k_1} = 0.0434$  ефикасни напон на нивоу В има вредност 0. Дакле, уколико је однос водопропусности  $k_2/k_1$  једнак или мањи од ове вредности долази до појаве затезања у тлу.



Слика 5.47 Ефективни вертикални напони на нивоу В

### Вероватноћа лома и маргина сигурности

Нарушавање сигурности у посматраном систему своди се на вероватноћу догађаја који подразумева да је вертикални ефективни напон на нивоу В једнак или мањи од нуле. Напон на нивоу В стога представља тзв. *маргину сигурности (MS)* која сугерише да је:

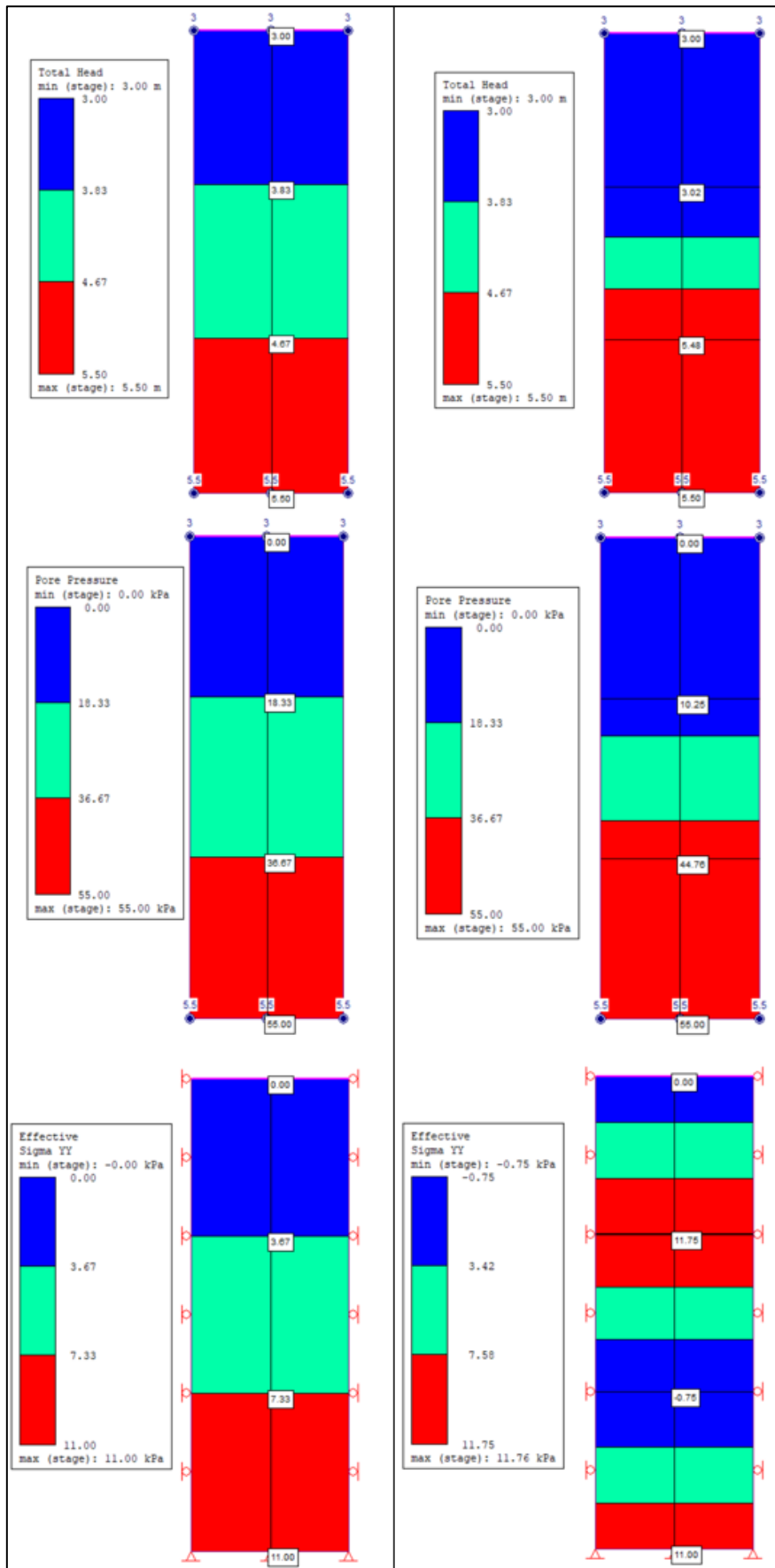
- Сигуран систем уколико је напон већи од нуле
- Несигуран систем уколико је напон једнак или мањи од нуле

Функција расподеле вертикалног ефективног напона на нивоу В у исто време представља расподелу маргине сигурности  $MS$  у посматраном проблему. Интеграцијом функције густине вероватноће маргине сигурности за све вредности  $MS \leq 0$  добија се вероватноћа лома  $P_f$ .

### Провера аналитичког решења применом МКЕ анализе

Аналитичка решења филтрационе и напонске анализе проверена су применом МКЕ анализе у програму RS2 [94] за односе коефицијената водопропусности  $k_2/k_1=1$  и  $k_2/k_1=0.1$ .

Следеће слике приказују поља потенцијала, порних притисака и ефективних напона у трослојном стубу тла.



Слика 5.48 Резултати филтрационе и напонске анализе у програму RS2  
(лево:  $k_2/k_1=1$ , десно:  $k_2/k_1=0.1$ )

## 5.2.2 Варијабилност прорачунских параметара

### Варијабилност параметара материјалног модела

Улазни параметри (материјала) се у пробабилистичкој анализи третирају као случајне променљиве које су описане функцијама расподеле. Први корак у пробабилистичкој анализи представља моделирање варијабилности улазних параметара, односно функција које дефинишу њихове статистичке расподеле.

Улазне променљиве јесу коефицијенти водопрпусности слојева тла  $k_1$  и  $k_2$ . Коефицијент водопрпусности је веома сложена величина која зависи од величине и распореда пора и облика простора кроз који вода тече [81]. Прецизност процене ових величина мери се у распону од неколико редова величине и најчешће изражава на логаритамској скали. Према [51], варијабилност коефицијента водопрпусности најчешће се моделира применом лог-нормалне расподеле, у којима *логаритми* коефицијената филтрације имају нормалне расподеле.

У овом примеру су претпостављене лог-нормалне расподеле (са основом 10) за коефицијенте водопрпусности слојева тла  $k_1$  и  $k_2$ . Параметри ових расподела усвојени су на основу очекиваних вредности за одређене типове тла (песак и глина) које су преузете из литературе [24]. Према [24], распони могућих вредности коефицијената водопрпусности за различите типове тла су следећи:

- Глина:  $10^{-9} - 10^{-7}$
- Песак:  $10^{-6} - 10^{-3}$
- Шљунак:  $10^{-3} - 10^{-1}$

Средња вредност и стандардна девијација логаритама коефицијената  $k_1$  и  $k_2$  у овом примеру су усвојени на следећи начин:

$$\mu_{\log(k_1)} = -5 \quad [52]$$

$$\sigma_{\log(k_1)} = 0.33 \quad [53]$$

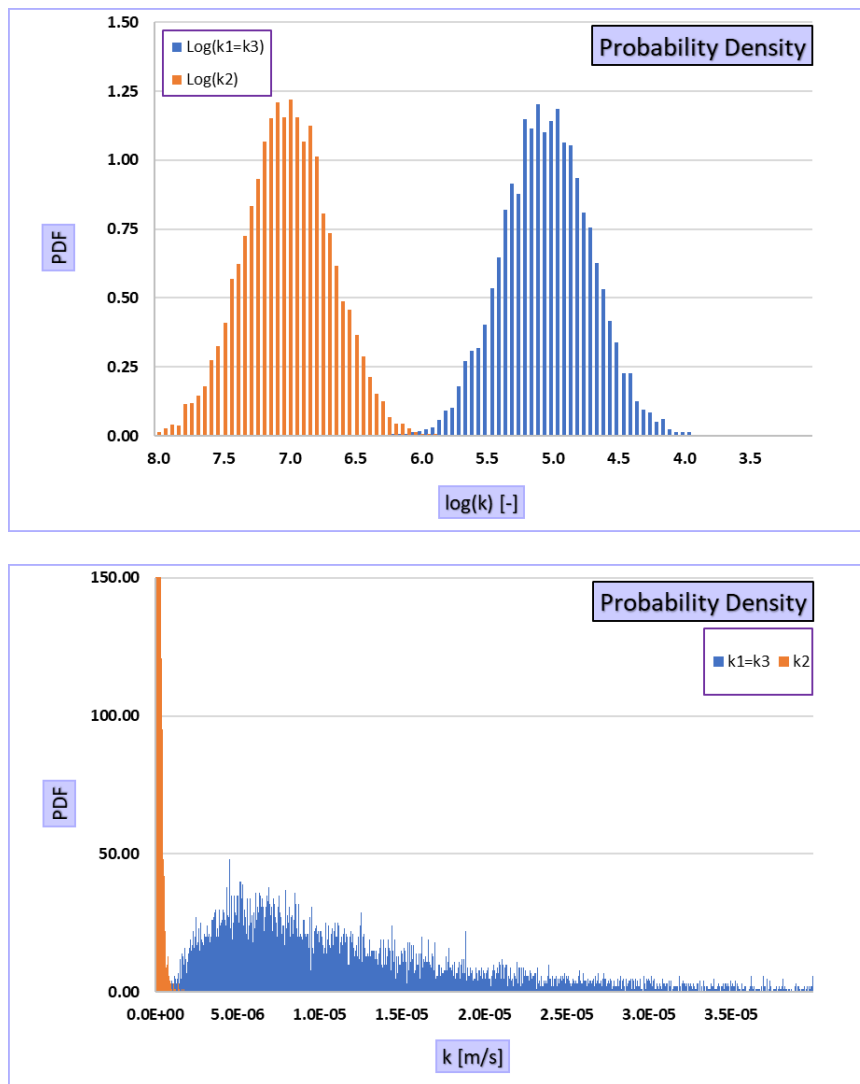
$$\mu_{\log(k_2)} = -7 \quad [54]$$

$$\sigma_{\log(k_2)} = 0.33 \quad [55]$$

Стандардна девијација од 0.33 значи да се 99% вредности обе функције налази у распону од по један ред величине удаљености (3 стандардне девијације) од средњих вредности (распон вредности  $k_1$  креће се од  $10^{-6} - 10^{-4}$ , распон вредности  $k_2$  од  $10^{-8} - 10^{-6}$ ).

Усвојене лог-нормалне функције расподеле коефицијената водопрпусности  $k_1$  и  $k_2$ , као и логаритама коефицијената (нормалне расподеле), приказане су на следећој слици. Лог-нормалне расподеле су по својој природи асиметричне и померене на леву страну. Код њих се средња вредност не поклапа са најчесталијом вредношћу (модус) у расподели као у случају нормалних расподела.

Модуси функција  $k_1$  и  $k_2$  износе  $M_{k_1} = 3.7 \cdot 10^{-6} \text{ m/s}$ , односно  $M_{k_2} = 6.0 \cdot 10^{-8} \text{ m/s}$ .



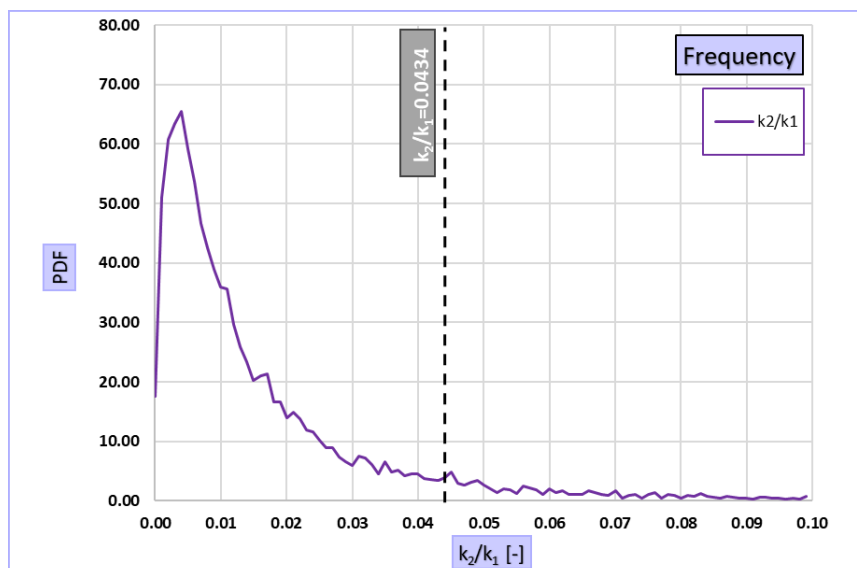
Слика 5.49 Функције расподела улазних променљивих (густине вероватноће)

### Узорковање парова улазних променљивих (Sampling)

Прорачун сигурности спроведен је применом Монте-Карло анализе на узорку од 10'000 симулација. На почетку прорачуна применом Монте-Карло технике, а у складу са функцијама расподеле улазних променљивих, врши се случајан избор параметара материјала за 10 000 симулација. Овај корак пробабилистичке анализе се назива *Узорковање* (енг. *Sampling*).

Резултат узорковања представља 10 000 уређених парова улазних параметара ( $k_1$  и  $k_2$ ) за прорачун напона аналитичком методом. Процес узорковања испрограмиран је у програмском језику Python.

Следећи дијаграм приказује расподелу односа узоркованих коефицијената  $k_2/k_1$ , а на њему је обележена и критична вредност овог односа  $\frac{k_2}{k_1} = 0.0434$  (видети поглавље 5.2.1).



Слика 5.50 Функција расподеле односа  $k_2/k_1$

Са претходног дијаграма види се да су најчесталији односи коефицијената у прорачуну испод критичне вредности (конкретно модус функције  $M_{k_2/k_1} 0.005$ ), па је очекивана вероватноћа лома (појаве затезања у тлу) као резултат базне пробабилистичке анализе са овако усвојеним прорачунским параметрима велика.

### **Варијабилност података осматрања**

Подаци осматрања представљају читавања пијезометра постављеног на нивоу В (Слика 5.40).

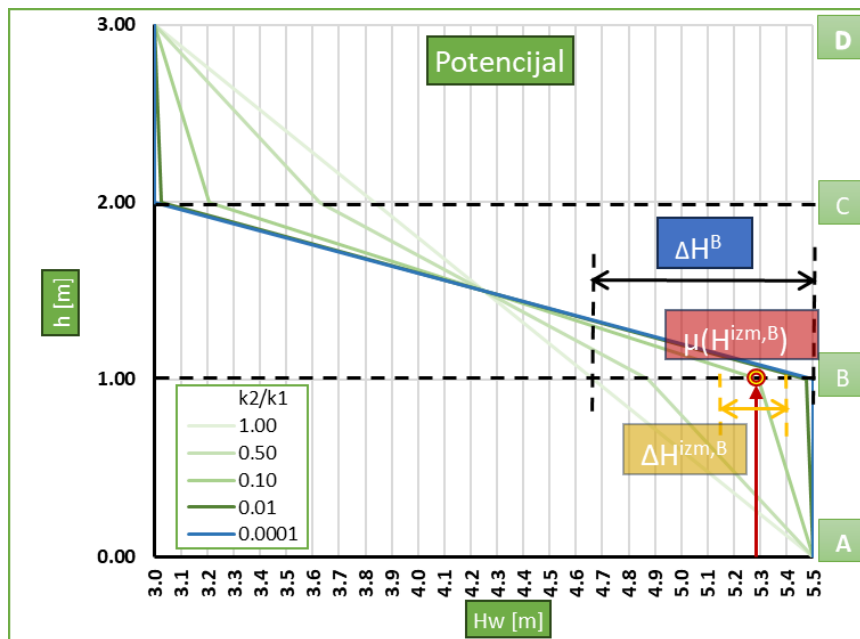
Измерене вредности потенцијала на нивоу В ( $H^{izm,B}$ ) могу се представити нормалном расподелом чија је средња вредност  $\mu = 5.29$ .

Стандардна девијација је варирана како би се приказала зависност резултата прорачуна од распона расподеле података осматрања. Под распонем расподеле ( $\Delta H^{izm,B}$ ) сматра се интервал у који се може сместити 99% вредности из посматране функције расподеле. Овај интервал налази се на удаљености од по 3 стандардне девијације од средње вредности расподеле у оба смера. Могуће вредности потенцијала на нивоу В у зависности од односа водопрпусности слојева приказане су у поглављу 5.2.1. Распон могућих вредности ( $\Delta H^B$ ) креће се између вредности 4.67 за  $k_2 = k_1$  и 5.50 за  $k_2 \ll k_1$  (Табела 5-5).

Зависност резултата пондерисане пробабилистичке анализе од распона расподеле измерених вредности ( $\Delta H^{izm,B}$ ) анализирана је спровођењем 4 анализе (А1-А4, стандардне девијације одређене у функцији укупног распона могућих вредности  $\Delta H^B$ ):

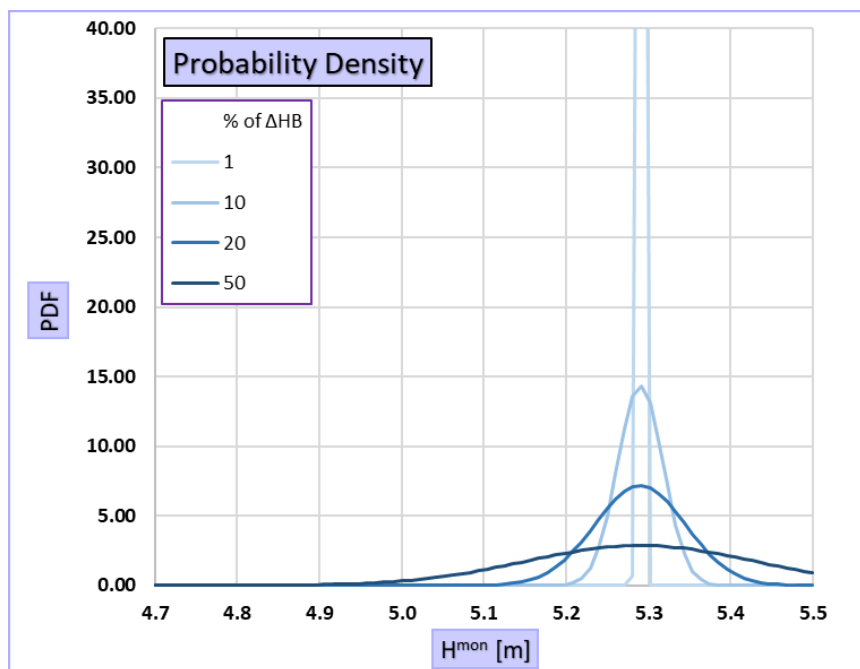
- А1:  $\Delta H^{izm,B} = 1\% \Delta H^B$ ;  $\sigma = 0.0028$  (квази-детерминистичка анализа)
- А2:  $\Delta H^{izm,B} = 10\% \Delta H^B$ ;  $\sigma = 0.028$
- А3:  $\Delta H^{izm,B} = 20\% \Delta H^B$ ;  $\sigma = 0.055$
- А4:  $\Delta H^{izm,B} = 50\% \Delta H^B$ ;  $\sigma = 0.139$

На следећој слици илустровани су распони  $\Delta H^B$  и  $\Delta H^{izm,B}$ .



Слика 5.51 Илустрација распона могућих вредности мерења  $\Delta H^B$  и распона расподеле измерених вредности  $\Delta H^{izm,B}$

На следећој слици приказане су функције расподеле података осматрања за које су урађене пондерисане пробабилистичке анализе.



Слика 5.52 Функције расподеле података осматрања  $H^{mon}$

Напомена: средња вредност функције расподеле података осматрања  $\mu = 5.29$  одговара аналитички израчунатој вредности за однос коефицијената водопропусности  $\frac{k_2}{k_1} = 0.1$  (Табела 5-5). За ову конкретну вредност потенцијала није угрожена сигурност система, јер на нивоу В нема напона затезања (Табела 5-7, Слика 5.46).



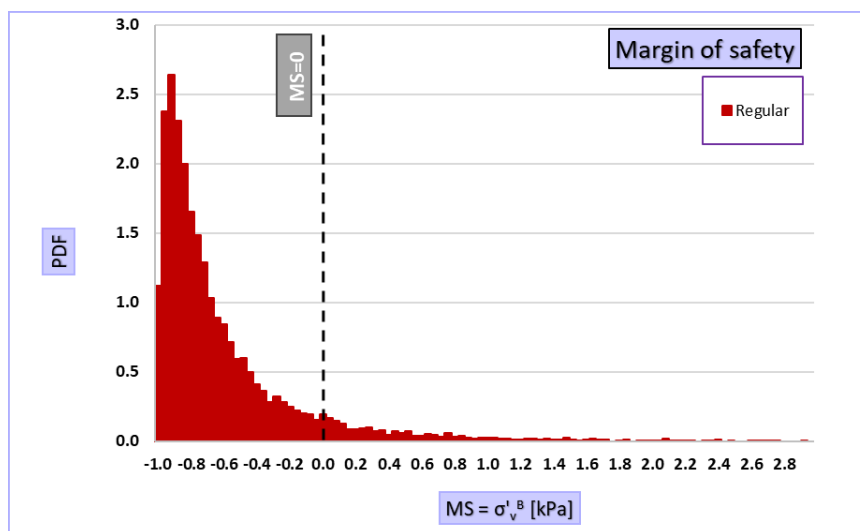
### 5.2.3 Резултати пробабилистичке анализе

У овом поглављу приказани су и дискутовани резултати спроведених пробабилистичких анализа за које су улазни параметри представљени у поглављу 5.2.2. Паралелно су спровене базна пробабилистичка анализа (без података мониторинга) и пробабилистичка анализа са имплементацијом података осматрања како би се анализирале разлике у резултатима.

#### **Базна пробабилистичка анализа**

Базна пробабилистичка анализа не узима у обзир функцију расподеле података осматрања ни на који начин. Резултати анализе (вертикални ефективни напони на нивоу В који у исто време представљају и маргине сигурности  $MS$ ) су приказани на следећој слици:

- Модус расподеле маргине сигурности (најучесталија вредност):  $M = -0.90$
- Вероватноћа лома (интеграл вредности  $MS \leq 0$ ):  $P_f = 90.95\%$



Слика 5.53 Резултати базне пробабилистичке анализе (независни и увезани параметри материјала)

Очекивано, резултати базне анализе блиско прате расподелу узоркованих односа коефицијената филтрације  $k_2/k_1$  (Слика 5.50) и сугеришу на високу вероватноћу лома.

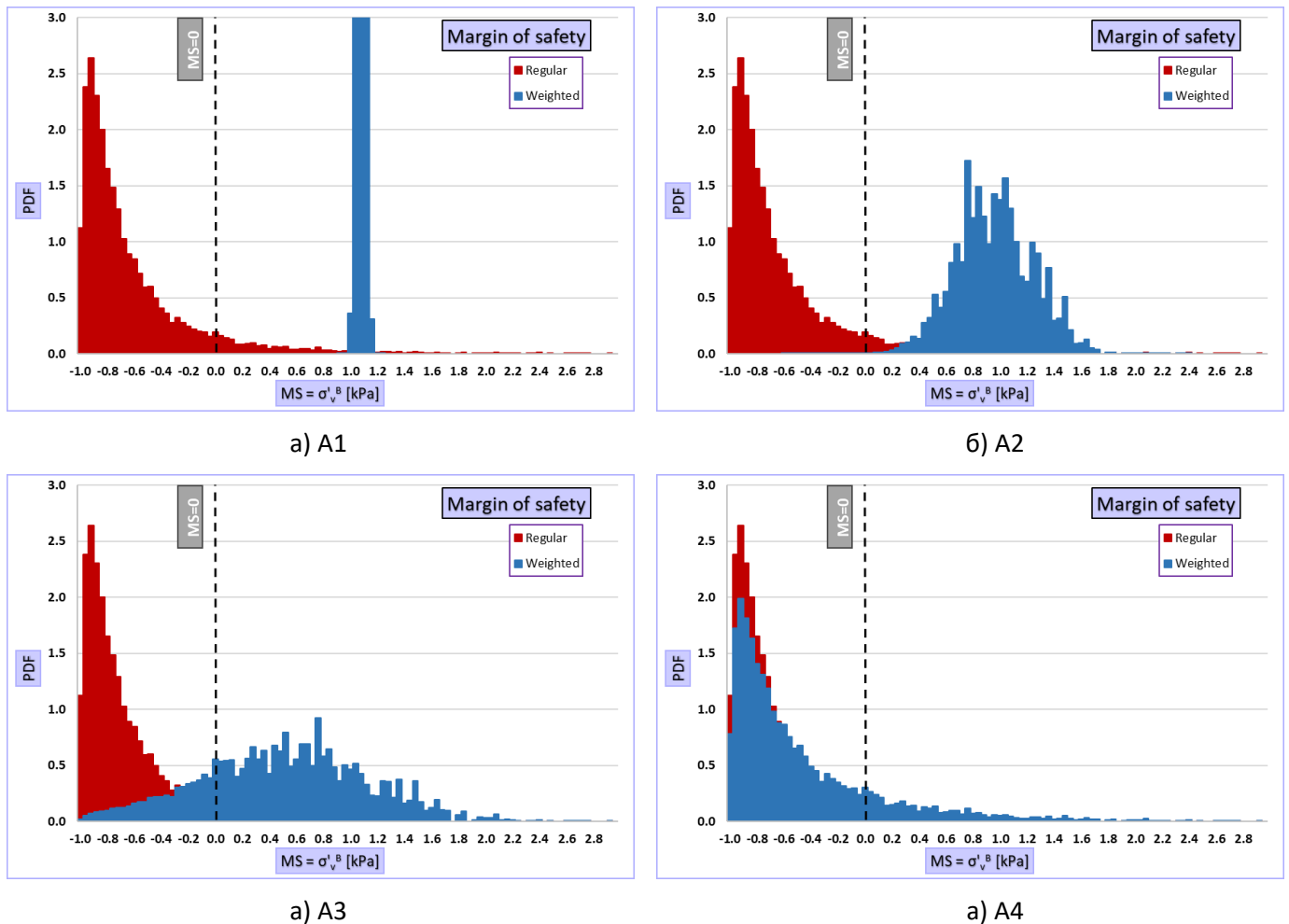
#### **Пробабилистичка анализа са имплементацијом параметара осматрања**

У оквиру анализе са имплементацијом података осматрања, функција расподеле за измерене потенцијале на нивоу В се уводи у прорачун приликом креирања хистограма фреквенција резултата према методологији описаној у поглављу 4. Резултати су приказани у наставку.

Табела 5-8 приказује резултате прорачуна – маргине сигурности и вероватноће лома за 4 пондерисане анализе А1-А4 (поглавље 5.2.1). Слика 5.54 приказује резултате пондерисане анализе и поређење са резултатима базне анализе.

Табела 5-8 Резултати пондерисаних пробабилистичких анализа

Анализа	MS	$P_f$ [%]
A1	1.1	0.00
A2	0.8	0.03
A3	0.7	20.27
A4	-0.9	83.46



Слика 5.54 Резултати пробабилистичке анализе са имплементираним параметрима осматрања (анализе A1-A4)

### Резиме и дискусија резултата

На основу резултата пробабилистичких анализа могу се потврдити следећи закључци:

- Подаци осматрања могу модификовати резултате пробабилистичке анализе тако да њени резултати буду у складу са стварним понашањем конструкције, без обзира на то што иницијални прорачунски параметри доводе до другачијег решења.
- Модус расподеле маргина сигурности у квази-детерминистичкој анализи A1 се поклапа са очекиваном вредношћу маргине сигурности 1.08
- Како се распон (стандардна девијација) расподеле података осматрања повећава дисторзија очекиваних резултата је све већа.

## 6 СТУДИЈА СЛУЧАЈА: БРАНА ПРВОНЕК

У овом поглављу приказана је студија случаја на примеру постојеће насуте бране „Првонек“. Њен циљ је да демонстрира практичну примену предложене методологије, представљене у поглављу 4, за пробабилистичку оцену сигурности насутих брана уз интеграцију података осматрања. Студија случаја ослања се на теоријске основе изложене у претходним поглављима и користи расположиве резултате истражних радова, као и податке техничког осматрања прикупљене током експлоатације бране. На реалном примеру постојеће бране и уз употребу стварних података приказује се како предложена методологија функционише у пракси.

Конкретан прорачунски задатак у оквиру ове студије случаја је процена сигурности бране „Првонек“ у погледу модалитета лома – глобалне стабилности. Анализа се спроводи за прорачунску ситуацију која одговара преливању воде у евакуациони орган, односно условима великих вода.

Ова прорачунска ситуација одабрана је јер представља најкритичнију комбинацију оптерећења за глобалну стабилност, а којој је ова брана била изложена током досадашње експлоатације и за коју постоје подаци осматрања. За услов да је кота горње воде изнад коте круне прелива доступно је довољно података техничког осматрања, што омогућава директну примену методологије интеграције тих података у пробабилистички прорачун сигурности, у складу са принципима изложеним у поглављу 4.

### 6.1 Основни подаци о брани Првонек

#### 6.1.1 Технички опис бране

Брана „Првонек“ се налази на Бањској реци, десној притоци Јужне Мораве. Преградно место се налази на око 9 km од ушћа у Јужну Мораву, на локалитету села Првонек. Брана „Првонек“ је регионални вишенаменски водопривредни објекат, чије су основне намене: снабдевање водом становништва и индустрије града Врања, општине Бујановац и евентуално општине Прешево, заштита од поплава, оплемењивање малих вода у периодима неповољних хидролошких услова у сливу, као и производња електричне енергије.

Акумулацију бране „Првонек“ прихрањују воде Бањске реке и Градашнице. Бањска река је типичан планински водоток који дренира воде са западних падина Бесне Кобиле. Акумулација је формирана приближно на средини речног тока, са запремином од око 20 милиона m<sup>3</sup>. Слив бране Првонек лежи на надморској висини између 540 и 1806 mm. Основни ток реке је кратак (око 12 km), а слив је под значајним нагибом (34%), тако да се спољни утицаји веома брзо преносе у речни ток.

Акумулација бране „Првонек“ има следеће основне карактеристике:

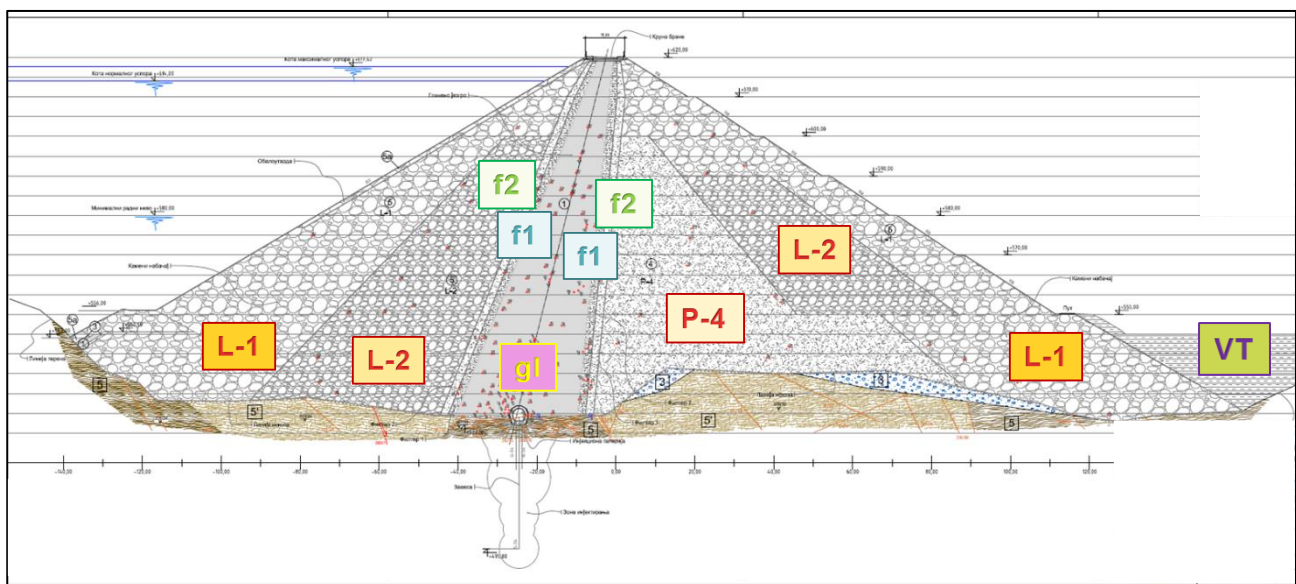
- |   |                          |
|---|--------------------------|
| • површина слива до профила бране ..... | 91,2 km <sup>2</sup>     |
| • кота нормалног успора (КНУ) .....     | 614,00 mm                |
| • површина акумулације при КНУ .....    | 690 000 m <sup>2</sup>   |
| • укупна запремина при КНУ .....        | 18,6 мил. m <sup>3</sup> |
| • кота максималног успора (КМУ) .....   | 617,4 mm                 |
| • површина акумулације при КМУ .....    | 750 000 m <sup>2</sup>   |

Преградну конструкцију чини насута-камена брана са косим централним глиненим језгром у склопу тела бране. Узводно и низводно потпорно тело бране је од каменог набачаја са потребним филтарским зонама. Оса бране је права линија. Узводно потпорно тело је од

гранодиорита, нагиба 1:1,7, фундирано на стени. Низводно потпорно тело изведено је од комбинације гранодиорита и шкриљаца, генералног нагиба 1:1,7.



Слика 6.1 Диспозиција бране Првонек (слика преузета из [58])



Легенда материјала	
gl	Глинено језгро
f1	Филтер 1 (песак)
f2	Филтер 2 (шљунак)
L-1	Камен – грандиорит (спољна призма)
L-2	Камен – грандиорит (унутрашња призма)
P-4	Камен – микашист
VT	Вештачки терен

Слика 6.2 Попречни пресек бране Првонек (слика преузета из [58])

Преко круне бране изграђена је саобраћајница ширине 6 m према командно контролном центру и кули водозахвата. Унутар преградне конструкције налази се инјекциона галерија, која је изведена на споју стенске масе фундамента преградне конструкције и глиненог језгра.

За преливање вишкова воде изнад коте нормалног успора, у стенској маси на десној обали изграђен је главни евакуациони орган - шахтни прелив. Шахтни прелив је левкасте конструкције, максималног пречника 26,5 m. Кота врха прелива је 614,8 mm. Шахтни прелив се наставља преливним тунелом, пречника 7,0 m, укупне дужине 292 m. Преливни тунел се завршава отвореном армирано-бетонском конструкцијом са ски-скоком.

За пражњење акумулације и испуштање воде у случају наиласка поплавног таласа, у стенској маси на левој обали изведен је тунел темељног испуста. Тунел је пречника 3,0 до 3,1 m. Пропусна моћ при коти воде 614,00 mm износи 40 m<sup>3</sup>/s. Тунел се завршава масивном армирано-бетонском конструкцијом - излазном грађевином, затварачницом темељног испуста.

Најважнији подаци о преградној конструкцији:

• кота круне бране .....	620,00 mm
• максимална грађевинска висина.....	93 m
• максимална висина бране од терена .....	78 m
• ширина бране у круни .....	10 m
• дужина бране у круни .....	250 m
• максимална ширина у стопи .....	321 m
• кота круне прелива .....	614,8 mm
• нагиб узводне и низводне косине .....	1:1,7

### 6.1.2 Материјали у телу бране

Језгро бране је изведено од глине са позајмишта "Гложје". Глинено језгро бране је нагнуто низводно са нагибом осе 1:0,25. Узводни нагиб језгра је 1:0,4; низводни нагиб језгра 1:0,1. Ширина језгра у круни је 4 m. Језгро почиње од коте 619,0 mm, непосредно изнад коте максималног успора у акумулацији. Глинено језгро је фундирано на стени, а у оси језгра, на споју са стеном, изведена је инјекциона галерија, из које је формирана инјекциона завеса. Галерија је до пола укопана у стени, а горња половина је у језгру.

Резултати испитивања глине уграђене у језгро бране и предбране, дати су у оквиру збирних елабората о контролним геомеханичким испитивањима материјала уграђених у тело насуте бране "Првонек" у 1990, 1991, 1992, 1993, 1994, 1995, 1996, 1997, 1998, 1999 и 2002. години [56].

На узорцима материјала узетим из језгра бране изведена су испитивања запреминске тежине, влажности, специфичне тежине, збијености по Проктору, граница конзистенције, садржаја органских материја, садржај СаСО<sub>3</sub>, садржаја сагорљивих материја, степена засићења, збијености, модула деформација, водопропустљивости, затим едометарски опити, консолидовани дренирани триаксијални опити и др. [56]

Са узводне и низводне стране језгра изведене су филтерске зоне од филтера 1 и филтера 2. Ширина сваке зоне је 2 метра. Од коте 610,00 филтри се линеарно сужавају на по 1 метар у круни бране тј. на коти 619,00 mm. Филтри су фундирани на стенској маси на којој је фундирана и глина.

Резултати испитивања филтера уграђених у тело бране и предбране, дати су у оквиру збирних елабората о контролним геомеханичким испитивањима материјала уграђених у тело насуте

бране "Првонек" у 1990, 1991, 1992, 1993, 1994, 1995, 1996, 1997, 1998, 1999 и 2002. години [56].

На узорцима материјала узетим из филтерских зона бране изведена су испитивања запреминске тежине, влажности, степена збијености [56].

Потпорно тело бране изведено је од камена из више каменолома: позајмишта гранодиорита Лазине које се налази на 5 km узводно од преградног места, позајмишта шкриљца (гнајсомикашист) Повољно I и II и Стари Глог, непосредно узводно од преградног места на левој обали. Узводна косина бране изведена је у нагибу 1:1,7 и у целини је изведена од каменог набачаја гранодиорита. Фундирана је на стени, а у боковима је фундирана на очишћену стенску површину. Од коте 578,00 изведена је заштитна облога узводне косине од каменог набачаја крупноће  $D_{\min}=45$  cm, од гранодиорита у хоризонталном правцу. Низводна косина бране изведена је од следећег каменог набачаја:

- Унутрашњи део, непосредно поред језгра (филтра II), изведен је од каменог набачаја - шкриљца (микашиста). Низводни нагиб овог материјала је 1:1,2; а ширина на коти 600,00 mm (где се и завршава) је 7,00 m. Фундиран је у наносу, који је пре почетка насипања очишћен од растиња и хумуса.
- Спољни део је изграђен од каменог набачаја - гранодиорита. Генерални нагиб низводне косине износи 1:1,7. На сваких 10 метара висине, почевши од коте 570 изведене су берме ширине 2 метра. На коти 550 mm изведена је берма ширине 8 метара, преко које прелази приступни пут излазној затварачници темељног испуста.

Резултати испитивања камена уграђеног у тело бране и предбране, дати су у оквиру збирних елабората о контролним геомеханичким испитивањима материјала уграђених у тело насуте бране "Првонек" у 1990, 1991, 1992, 1993, 1994, 1995, 1996, 1997, 1998, 1999 и 2002. години [56].

На узорцима материјала камених набачаја узетих из тела преградне конструкције изведена су испитивања запреминске тежине, влажности, степена збијености, као и опити директног смицања у великој размери. [56].

### 6.1.3 Систем за техничко осматрање

На брани "Првонек" реализован је обиман и савремен информациони систем за техничко осматрање, како аутоматско (у реалном времену), тако и ручно (периодично) [57].

Подаци о осматрању бране односе се на следеће врсте осматрања и мерење величине [60]:

- Метеоролошка осматрања (метеоролошка осматрања на брани, метеоролошка осматрања у сливном подручју)
- Хидролошка осматрања (ниво воде у акумулацији, ниво доње воде, протицај на улазу у акумулацију, протицај на излазу из акумулације)
- Хидрогеолошка осматрања (ниво подземне воде у терену уз брану, ниво подземне воде у темељу бране, провирне воде у инјекционој галерији)
- Геодетска осматрања (хоризонтална радијална померања, хоризонтална тангенцијална померања, вертикална померања)
- Осматрања у телу бране (порни притисци у глиненом језгру и темељу бране, тотални напони у глиненом језгру, релативна слегања у телу бране)
- Осматрања косине шахтног прелива (релативна померања косине, силе у сидрима)
- Остала осматрања (сеизмичка осматрања, мерење количине наноса – засутости акумулације, протоци у излазној затварачници темељног испуста, осматрања квалитета воде).

У овом раду од интереса су подаци који се односе на ниво воде (горње у акумулацији и доње низводно од бране), ниво подземне воде у терену уз брану и темељу бране, као и порни притисци у језгру и темељу бране.

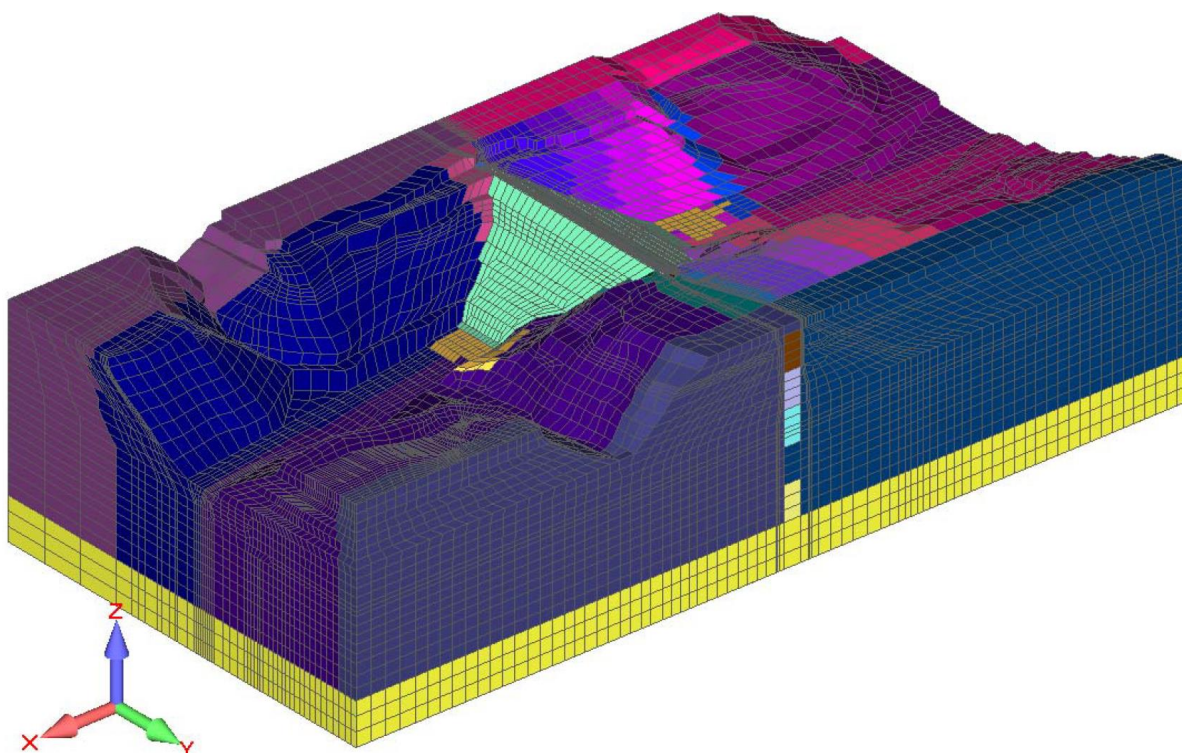
Када се узму у обзир сва мерна места у телу бране и темељу која су у функцији, укупан број података осматрања је 54 и то:

- Порне ћелије у телу бране – 41
- Пијезометри у боковима – 13

## 6.2 МКЕ модел

### 6.2.1 Мрежа коначних елемената

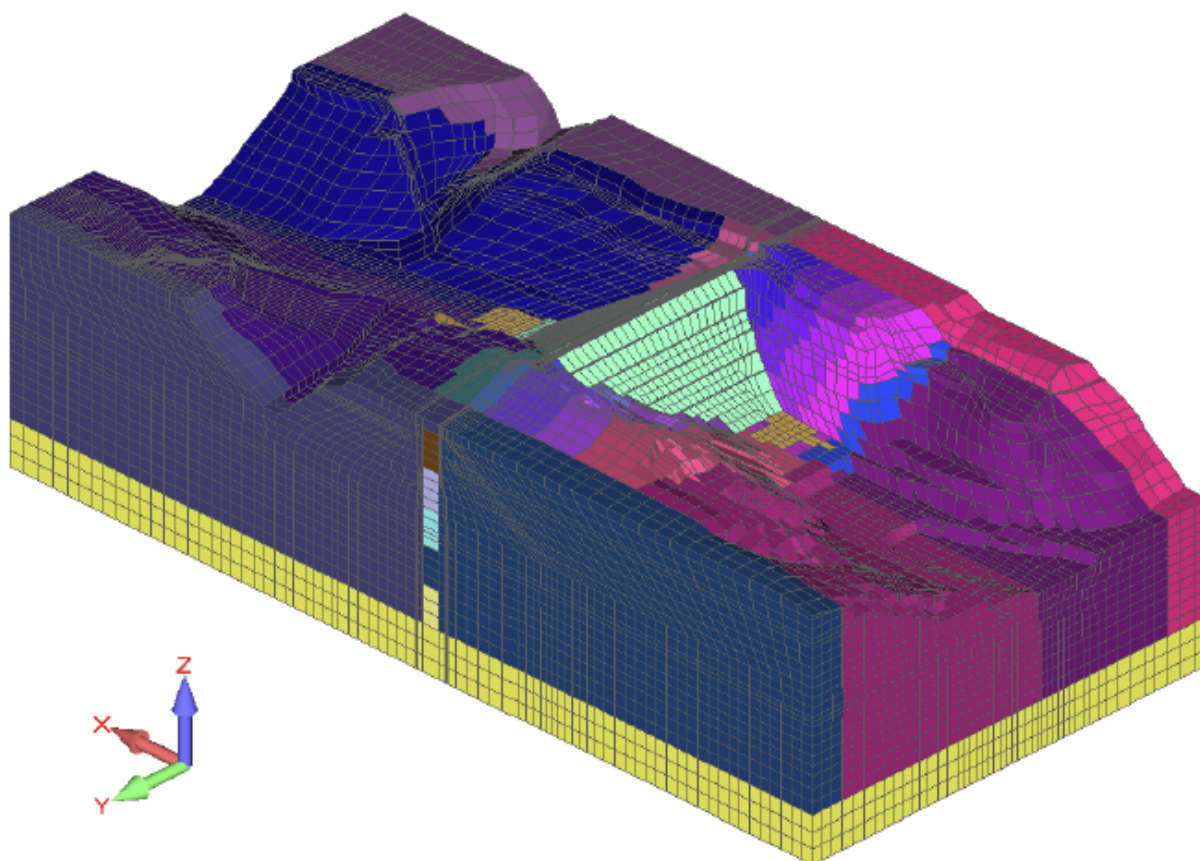
За анализу филтрационих и напонско-деформационих процеса формиран је просторни (тродимензионални) модел, који је заснован на примени методе коначних елемената (МКЕ) у програму ПАК [122]. Модел је у геометријском смислу направљен тако што је искоришћен скуп цртежа из Пројекта изведеног објекта (ПИО, [58]) и припремљени хоризонтални пресеци (са распоредом материјала који одговарају стварном стању на терену), међусобно вертикално спојени. Модел је иницијално припремљен и нумерички верификован за потребе управљања и одржавања бране Првонек [57], у оквиру кога је предвиђена процена сигурности применом детерминистичке методе. У овом раду иницијални модел је коришћен за пробабилистичку анализу тако што је омогућено варирање одговарајућих улазних параметара и спровођење sukcesивних детерминистичких прорачуна (засебних симулација), при чему су геометријске карактеристике и нумеричке поставке при свакој појединачној симулацији задржане као у иницијалном верификованом моделу.



Слика 6.3 Тродимензионални МКЕ модел за филтрационе и напонско-деформацијске анализе (поглед са узводне стране)

Моделу је терен преградног места у околини преградне конструкције димензија у основи, 498 x 1000 м, од коте 370 до коте 630. Границе модела захватају шири простор око објекта у циљу постављања реалних контурних услова по протицају ( $w = 0$ ), и обухватају све меродавне

квазихомогене зоне. За моделирање су коришћени 3Д коначни елементи са 8 чворова. Развијена је мрежа просторних (3Д) елемената са укупно 94986 чворова и 87128 елемената.



**Слика 6.4** Тродимензионални МКЕ модел за филтрационе и напонско-деформацијске анализе (поглед са низводне стране)

У филтрационим анализама, гранични услови по потенцијалу дефинисани су на следећи начин: на делу контуре модела који одговара површини терена испод коте успора воде у језеру – задат је потенцијал који је једнак коти успора (вода на коти круне прелива према пројектном задатку – 614.8 mpm); на делу контуре модела који одговара површини терена испод коте доње воде – задат је потенцијал који једнак коти доње воде (530 mpm). Контурни услови по протицају (флуксу) су задати по границама модела ( $w = 0$ ).

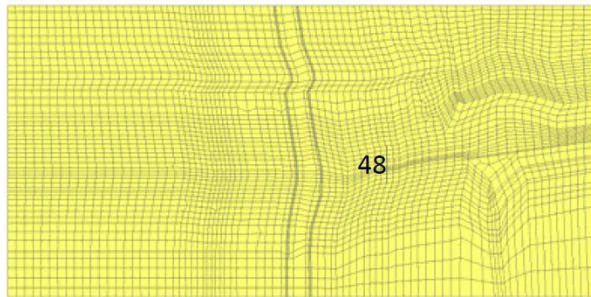
У анализи напонско-деформационих процеса, гранични услови су дати по померањима на границама модела (спречено померање чворова). Спречено је померање чворова на границама модела у управном правцу, док је дозвољено њихово померање у вертикалном правцу. На доњој граници модела су спречена померања у сва три правца.

У овој студији је примењено једносмерно спрезање између филтрационог и напонско-деформацијског проблема. У првом кораку се решава филтрациони проблем, чији резултати (распоред порних притисака у моделу) представљају улазни податак у напонско-деформацијској анализи у другом кораку.

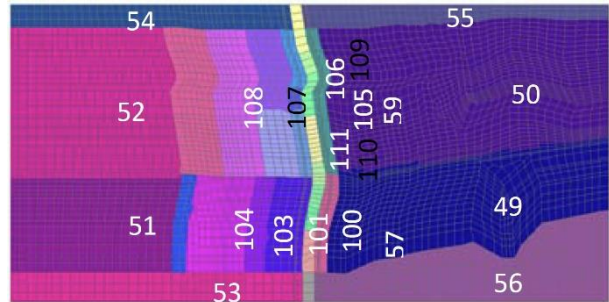
Иницијални модел који се користи за потребе управљања и одржавања бране Првонек [57] садржи 111 различитих квази-хомогених зона, од којих се највећи број налази у стенској маси. Идеја овако великог броја зона јесте могућност задавања различитих улазних параметара материјала за сваку од зона (нарочито за филтрациону анализу) чиме се омогућава прецизнија манипулација улазним подацима модела ради бољег поклапања резултата прорауна са репрезентативним детерминистички усвојеним подацима осматрања.



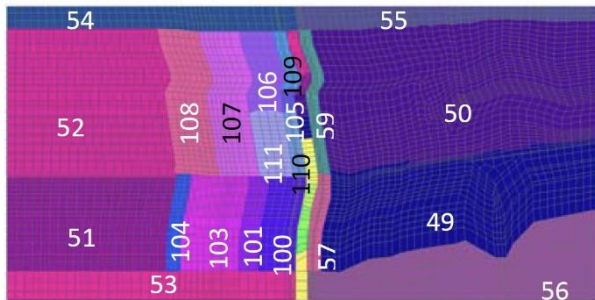
Мрежа коначних елемената по хоризонтима, са распоредом квазихомогених зона, приказана је на следећим сликама (Слика 6.5 – Слика 6.21).



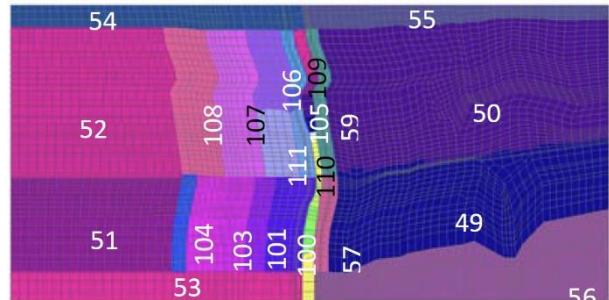
Слика 6.5 Ниво 370-420



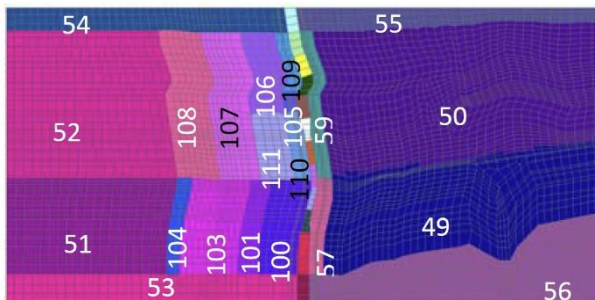
Слика 6.6 Ниво 420-460



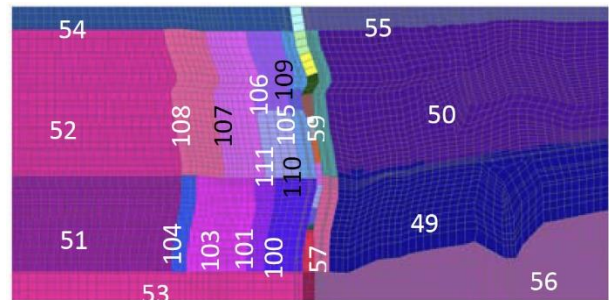
Слика 6.7 Ниво 460-490



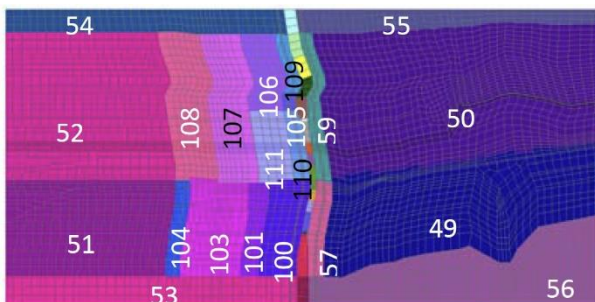
Слика 6.8 Ниво 490-500



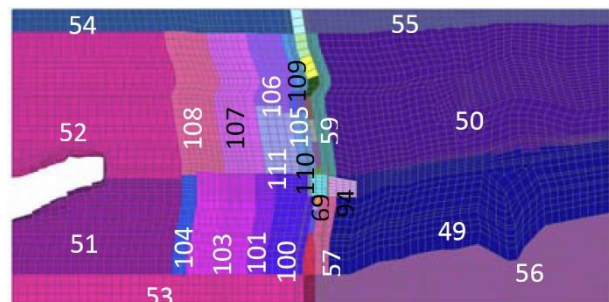
Слика 6.9 Ниво 500-510



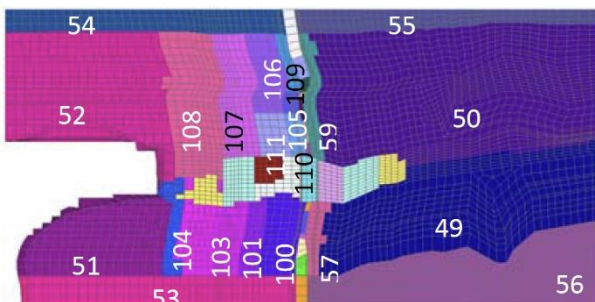
Слика 6.10 Ниво 510-520



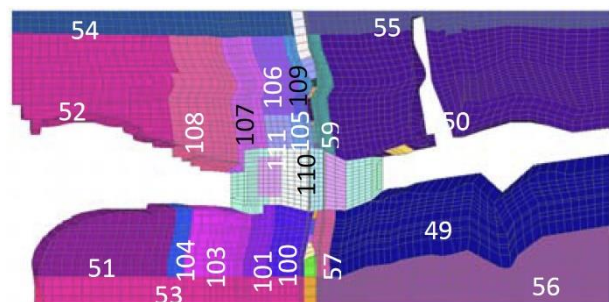
Слика 6.11 Ниво 520-530



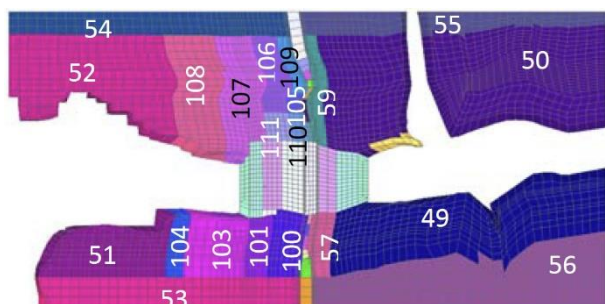
Слика 6.12 Ниво 530-540



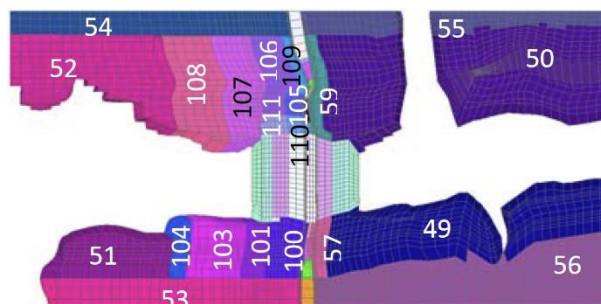
Слика 6.13 Ниво 540-550



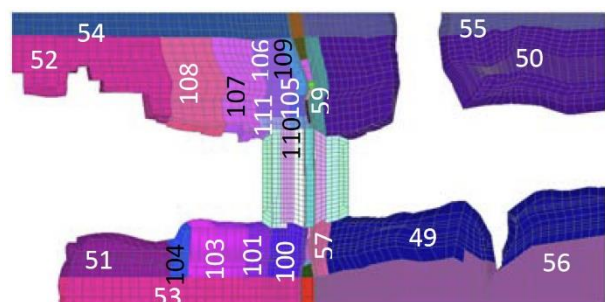
Слика 6.14 Ниво 550-560



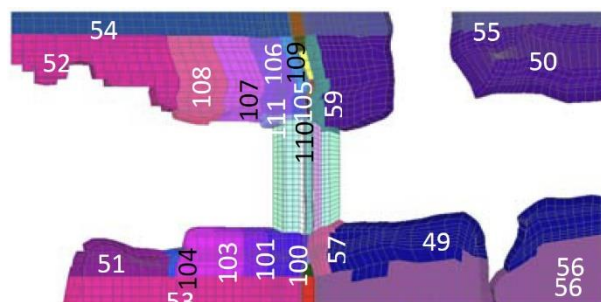
Слика 6.15 Ниво 560-570



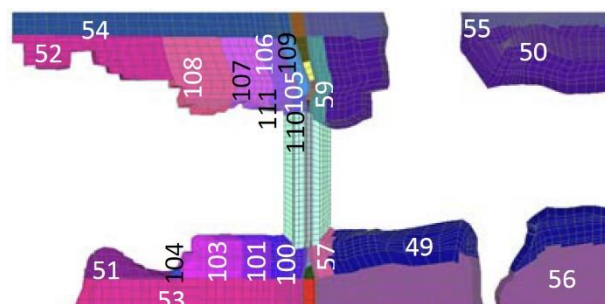
Слика 6.16 Ниво 570-580



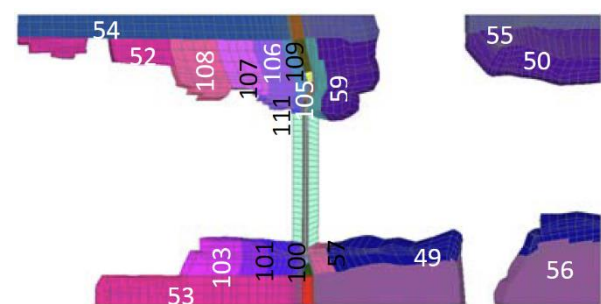
Слика 6.17 Ниво 580-590



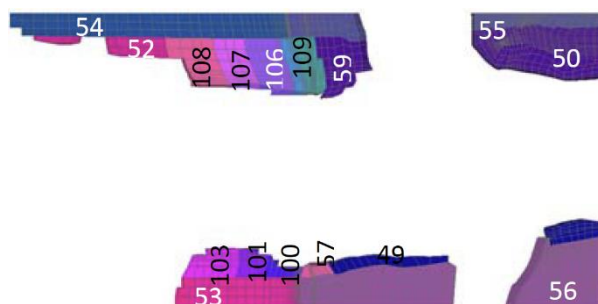
Слика 6.18 Ниво 590-600



Слика 6.19 Ниво 600-610



Слика 6.20 Ниво 610-620



Слика 6.21 Ниво 620-630

У овом раду модел је, за потребе извршења пробабилистичке анализе, упрошћен тако што је задржано свега 11 зона које могу имати различите улазне параметре: Камен L-1, Камен L-2, Камен P-4, Глинено језгро, Филтер 1, Филтер 2, Вештачки терен, Стена на левој обали (Стена LO), Стена на десној обали (Стена DO), Инјектирана стена на левој обали (Завеса LO) и Инјектирана стена на десној обали (Завеса DO).

У следећој табели прецизно је наведено на који начин је 111 зона (различитих материјала) из иницијалног модела груписано у 11 материјала који су коришћени у овом раду, као и материјални модели који су одабрани за описивање напонско-деформацијског понашања сваког од материјала.

Табела 6-1 Усвојени материјални модели

Материјал	Зона у иницијалном моделу (ПУО, [57])	Материјални модел
Камен L-1	93, 96	Максимовић
Камен L-2	94	Максимовић
Камен P-4	95	Максимовић
Глинено језгро	61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69	Мод. Sam-Clay
Филтер 1	91	Мор-Кулон
Филтер 2	92	Мор-Кулон
Вештачки терен	97	Мор-Кулон
Стена LO	48, 1, 2, 5, 6, 7, 12, 13, 14, 15, 22, 23, 24, 25, 26, 35, 36, 37, 38, 39, 49, 56, 57, 51, 53, 100, 101, 103, 104, 58, 60, 98, 99, 102	Ген. Хоек-Brown
Стена DO	3, 4, 8, 9, 10, 11, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 50, 55, 59, 105, 109, 110, 106, 111, 107, 108, 52, 54	Ген. Хоек-Brown
Завеса LO	70, 71, 72, 73, 74, 75, 76	Ген. Хоек-Brown
Завеса DO	77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90	Ген. Хоек-Brown

### 6.2.2 Параметри материјала

Параметри материјала коришћени у анализи заснивају се на лабораторијским и теренским испитивањима изведеним током пројектовања и изградње бране (видети поглавље 6.1.2). Укупан број улазних параметара материјала је 95, сви су наведени у наредној табели.

Табела 6-2 Прорачунски параметри материјала за филтрационе и напонско-деформацијске анализе

Материјал	Променљиве					Константе								
	Филтрација	Чврстоћа				Тежина и порозност		Еластичност		Чврстоћа				
Камен L-1	k	ФВ	Δφ			γ	n	E	v	P <sub>N</sub>				
Камен L-2	k	ФВ	Δφ			γ	n	E	v	P <sub>N</sub>				
Камен P-4	k	ФВ	Δφ			γ	n	E	v	P <sub>N</sub>				
Глина	k	M	λ	κ	ρ <sub>0</sub>	γ	n	E	v	<sup>0</sup> e				
Филтер 1	k					γ	n	E	v	c	φ			
Филтер 2	k					γ	n	E	v	c	φ			
Веш. терен	k					γ	n	E	v	c	φ			
Стена LO	k					γ	n	E	v	σ <sub>ci</sub>	m <sub>i</sub>	m <sub>b</sub>	s	a
Стена DO	k					γ	n	E	v	σ <sub>ci</sub>	m <sub>i</sub>	m <sub>b</sub>	s	a
Завеса LO	k					γ	n	E	v	σ <sub>ci</sub>	m <sub>i</sub>	m <sub>b</sub>	s	a
Завеса DO	k					γ	n	E	v	σ <sub>ci</sub>	m <sub>i</sub>	m <sub>b</sub>	s	a
<b>Укупно променљивих</b>		<b>21</b>												
<b>Укупно константи</b>		<b>74</b>												

Сваки од наведених параметара је стохастичке природе и карактерише га одређени степен варијабилности. Међутим, варијабилност сваког од параметара није једнако релевантна при одређивању сигурности бране у односу глобалну стабилност. Комплетна пробабилистичка обрада свих 95 променљивих била би нумерички изузетно захтевна, те је, ради рационализације поступка, спроведена прелиминарна селекција. На основу стручно-инжењерске процене идентификовани су кључни параметри који најзначајније утичу на оцену сигурности. Ови параметри су задржани као случајне променљиве, док су преостале величине третиране као детерминистичке константе. У **табели 6-2**, у којој су набројани сви параметри материјала, приказана је и подела између променљивих и константних величина што омогућава јасну диференцијацију у даљим корацима пробабилистичке анализе.

Константне величине усвојене су идентично као у моделу који се користи за потребе управљања и одржавања бране (ПУО, [57]). Њихове вредности дате су у **табели 6-3**.

**Табела 6-3** Вредности константи у пробабилистичком прорачуну

1	$\gamma_{\text{Kamen\_L1}}$	21.00	kN/m <sup>3</sup>	38	$v_{\text{Filter f1}}$	0.30	[-]
2	$\gamma_{\text{Kamen\_L2}}$	21.00	kN/m <sup>3</sup>	39	$v_{\text{Filter f2}}$	0.30	[-]
3	$\gamma_{\text{Kamen\_P4}}$	21.50	kN/m <sup>3</sup>	40	$v_{\text{Veš. teren}}$	0.30	[-]
4	$\gamma_{\text{Glina}}$	17.00	kN/m <sup>3</sup>	41	$v_{\text{Stena\_LO}}$	0.20	[-]
5	$\gamma_{\text{Filter f1}}$	18.00	kN/m <sup>3</sup>	42	$v_{\text{Zavesa\_LO}}$	0.20	[-]
6	$\gamma_{\text{Filter f2}}$	20.00	kN/m <sup>3</sup>	43	$v_{\text{Stena\_DO}}$	0.20	[-]
7	$\gamma_{\text{Veš. teren}}$	22.50	kN/m <sup>3</sup>	44	$v_{\text{Zavesa\_DO}}$	0.20	[-]
8	$\gamma_{\text{Stena\_LO}}$	26.00	kN/m <sup>3</sup>	45	$P_{\text{N\_Kamen\_L1}}$	450.00	kPa
9	$\gamma_{\text{Zavesa\_LO}}$	26.00	kN/m <sup>3</sup>	46	$P_{\text{N\_Kamen\_L2}}$	450.00	kPa
10	$\gamma_{\text{Stena\_DO}}$	26.00	kN/m <sup>3</sup>	47	$P_{\text{N\_Kamen\_P4}}$	450.00	kPa
11	$\gamma_{\text{Zavesa\_DO}}$	26.00	kN/m <sup>3</sup>	48	$^0e_{\text{Glina}}$	1.60	[-]
12	$n_{\text{Kamen\_L1}}$	0.07	[-]	49	$c_{\text{Filter f1}}$	0.00	kPa
13	$n_{\text{Kamen\_L2}}$	0.07	[-]	50	$c_{\text{Filter f2}}$	0.00	kPa
14	$n_{\text{Kamen\_P4}}$	0.08	[-]	51	$c_{\text{Veš. teren}}$	20.00	kPa
15	$n_{\text{Glina}}$	0.36	[-]	52	$\varphi_{\text{Filter f1}}$	30.00	[°]
16	$n_{\text{Filter f1}}$	0.14	[-]	53	$\varphi_{\text{Filter f2}}$	35.00	[°]
17	$n_{\text{Filter f2}}$	0.10	[-]	54	$\varphi_{\text{Veš. teren}}$	22.00	[°]
18	$n_{\text{Veš. teren}}$	0.10	[-]	55	$\sigma_{\text{ci\_Stena\_LO}}$	55.00	Mpa
19	$n_{\text{Stena\_LO}}$	0.03	[-]	56	$\sigma_{\text{ci\_Zavesa\_LO}}$	55.00	Mpa
20	$n_{\text{Zavesa\_LO}}$	0.03	[-]	57	$\sigma_{\text{ci\_Stena\_DO}}$	55.00	Mpa
21	$n_{\text{Stena\_DO}}$	0.03	[-]	58	$\sigma_{\text{ci\_Zavesa\_DO}}$	55.00	Mpa
22	$n_{\text{Zavesa\_DO}}$	0.03	[-]	59	$m_{\text{i\_Stena\_LO}}$	16.00	[-]
23	$E_{\text{Kamen\_L1}}$	8.80E+04	kPa	60	$m_{\text{i\_Zavesa\_LO}}$	16.00	[-]
24	$E_{\text{Kamen\_L2}}$	1.25E+05	kPa	61	$m_{\text{i\_Stena\_DO}}$	16.00	[-]
25	$E_{\text{Kamen\_P4}}$	1.15E+05	kPa	62	$m_{\text{i\_Zavesa\_DO}}$	16.00	[-]
26	$E_{\text{Glina}}$	5.50E+04	kPa	63	$m_{\text{b\_Stena\_LO}}$	1.223	[-]
27	$E_{\text{Filter f1}}$	5.44E+05	kPa	64	$m_{\text{b\_Zavesa\_LO}}$	1.223	[-]
28	$E_{\text{Filter f2}}$	5.44E+05	kPa	65	$m_{\text{b\_Stena\_DO}}$	1.223	[-]
29	$E_{\text{Veš. teren}}$	4.67E+06	kPa	66	$m_{\text{b\_Zavesa\_DO}}$	1.223	[-]
30	$E_{\text{Stena\_LO}}$	6.00E+06	kPa	67	$s_{\text{Stena\_LO}}$	0.0007	[-]
31	$E_{\text{Zavesa\_LO}}$	6.00E+06	kPa	68	$s_{\text{Zavesa\_LO}}$	0.0007	[-]
32	$E_{\text{Stena\_DO}}$	6.00E+06	kPa	69	$s_{\text{Stena\_DO}}$	0.0007	[-]
33	$E_{\text{Zavesa\_DO}}$	6.00E+06	kPa	70	$s_{\text{Zavesa\_DO}}$	0.0007	[-]
34	$v_{\text{Kamen\_L1}}$	0.30	[-]	71	$a_{\text{Stena\_LO}}$	0.508	[-]
35	$v_{\text{Kamen\_L2}}$	0.30	[-]	72	$a_{\text{Zavesa\_LO}}$	0.508	[-]
36	$v_{\text{Kamen\_P4}}$	0.30	[-]	73	$a_{\text{Stena\_DO}}$	0.508	[-]
37	$v_{\text{Glina}}$	0.45	[-]	74	$a_{\text{Zavesa\_DO}}$	0.508	[-]

### 6.2.3 Варијабилност улазних параметара

Функције расподеле улазних променљивих за пробабилистички прорачун дефинисане су на основу анализе резултата лабораторијских испитивања изведених током пројектовања и изградње бране.

#### Коефицијенти филтрације

Варијабилност коефицијената филтрације за све материјале описана је лог-нормалним расподелама са основом 10.

Коефицијенти филтрације су директно мерени једино за глину [56]. За све материјале, међутим, доступна је велика количина података везаних за гранулометријски састав материјала уграђених у тело бране, уз помоћ којих се посредно, путем емпиријских правила (Бејер [9], Хајзен [52], USBR [110] итд.), могу апроксимирати коефицијенти филтрације [56]. Анализом постојећих података усвојене су следеће нормалне расподеле за логаритме коефицијената филтрације:

**Табела 6-4** Параметри нормалних расподела логаритама коефицијената филтрације

Материјал	Норм. расподела (база 10)	
	Ср. вредност	Ст. дев.
Камен L-1	-2.00	2.00
Камен L-2	-2.00	1.90
Камен P-4	-2.50	1.50
Глина	-10.00	0.70
Филтер 1	-5.00	1.00
Филтер 2	-3.00	1.00
Веш. терен	-4.00	1.00
Стена LO, DO	-7.00	0.50

За материјале стене на левој и десној обали усвојене су исте функције расподеле.

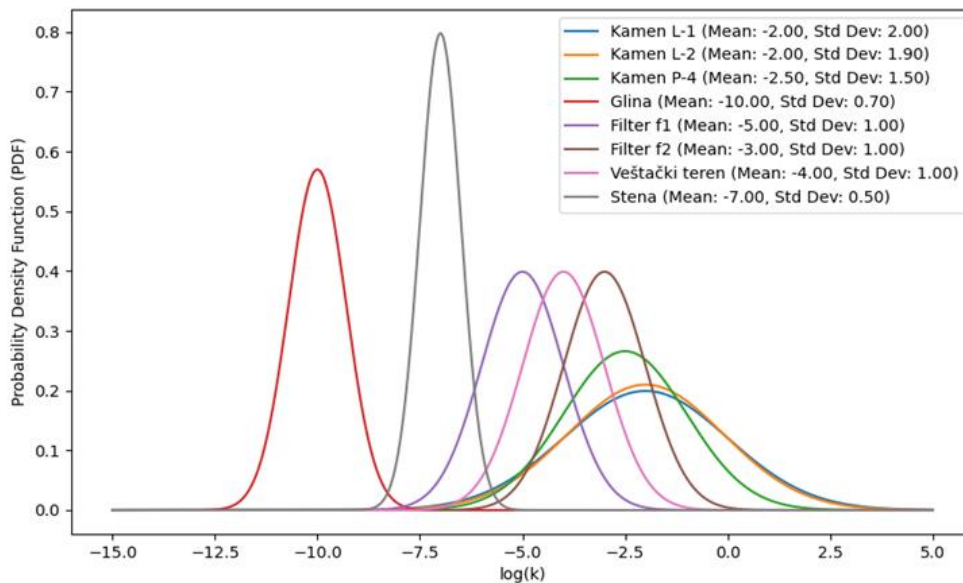
Коефицијент филтрације инјекционе завесе (на левој и десној страни) моделиран је у корелацији са материјалом стенске масе. Тешко је прецизно дефинисати колико инјектирање побољшава водонепоропусност стене, тако да су при дефинисању корелације параметара уведене следеће претпоставке:

- Водопропусност инјектиране стене не може бити већа од водопропусности стене која није инјектирана.
- Инјектирање не може побољшати водонепоропусност стене за више од два реда величине, изражено преко коефицијента филтрације

Усвојено је да параметар корелације  $m$  који повезује логаритме коефицијената филтрације стене и инјекционе завесе (како на левој, тако и на десној страни) прати нормалну расподелу тако да се 99% могућих вредности  $m$  налази између 0 и 2 (средња вредност расподеле параметра корелације  $m$  једнака је 1, а стандардна девијација 0,33). Тако се за сваку појединачну узорковану вредност логаритма коефицијента филтрације стене случајно одређује параметар  $m$  између 0 и 2 (у 99% случајева) који се додаје на узорковани логаритам коефицијента филтрације оригиналне стене. На овај начин коефицијент филтрације завесе увек је исти или до два реда величине мањи од коефицијента филтрације стене:

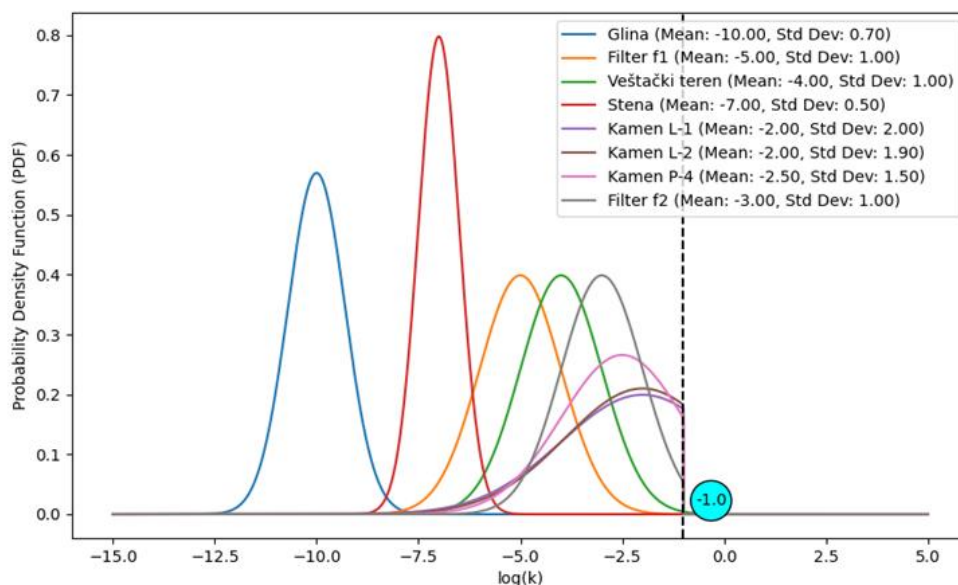
$$k_{Stena} = 10^{-m} \cdot k_{Zavesa}, \quad \text{где } m \sim N(1, 0,33) \quad [56]$$

Усвојене функције расподеле логаритама коефицијената филтрације свих материјала (изузев инјекционих завеса) приказане су на следећој слици.



**Слика 6.22** Функције густине вероватноће (PDF) за логаритме коефицијената филтрације

Са претходне слике се види да су анализом података добијене функције које, у случају камена у одређеним деловима распона, сугеришу превисоке вредности коефицијента филтрације, за које више не важи Дарсијев закон. Из овог разлога се уводи физичко ограничење  $\log k < -1$  кроз поступак „меког одсецања” репа расподеле. Ако процењена граница  $\mu + 3\sigma$  не прелази горњу границу од  $-1$ , дистрибуција остаје непромењена. При генерисању узорака, вредности које би премашиле границу трансформишу се назад у уски појас испод  $-1$  применом стохастичног фактора ублажавања, што омогућава да се облик расподеле и главне статистичке карактеристике у релевантном домену очувају, а да се истовремено уважава физичко ограничење за максималну пропусност материјала.



**Слика 6.23** Функције густине вероватноће (PDF) за логаритме коефицијената филтрације са горњом граничном вредношћу

## Параметри чврстоће

Варијабилност параметара чврстоће материјала (у складу са усвојеним материјалним моделима – Табела 6-1) описана је нормалним расподелама свих променљивих параметара чврстоће (Табела 6-2).

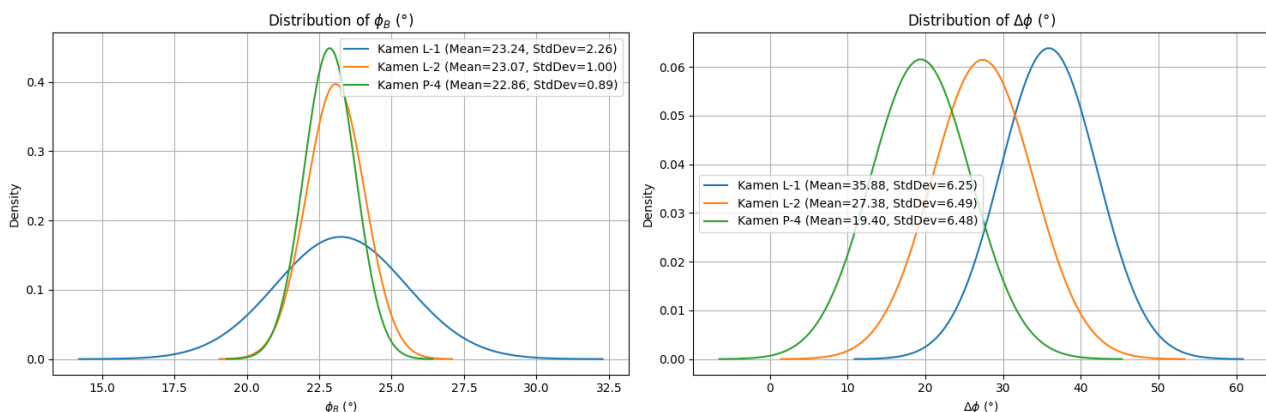
Полазну основу за моделирање варијабилности параметара чврстоће каменог набачаја чине резултати опита директног смицања, где су за сва три материјала каменог набачаја измерени парови нормалног и смичућег напрезања при лому у широком опсегу  $\sigma$ -нивоа. Чврстоћа се описује хиперболичком функцијом проф. Максимовића [81], која експлицитно уважава пад угла унутрашњег трења са растом нормалног напона, уз усвојени фиксни параметар  $P_N = 450$  kPa (константа – Табела 6-3). За сваки материјал параметри  $\varphi_B$  и  $\Delta\varphi$  одређени су методом најмањих квадрата над комплетним скупом података. Добијене вредности третирају се као очекиване (средње) у расподелама улазних променљивих.

Да би се квантитативно обухватила експериментална расејања, потребно је установити физички оправдане границе у којима се параметри могу кретати. Због тога су дефинисане следеће криве:

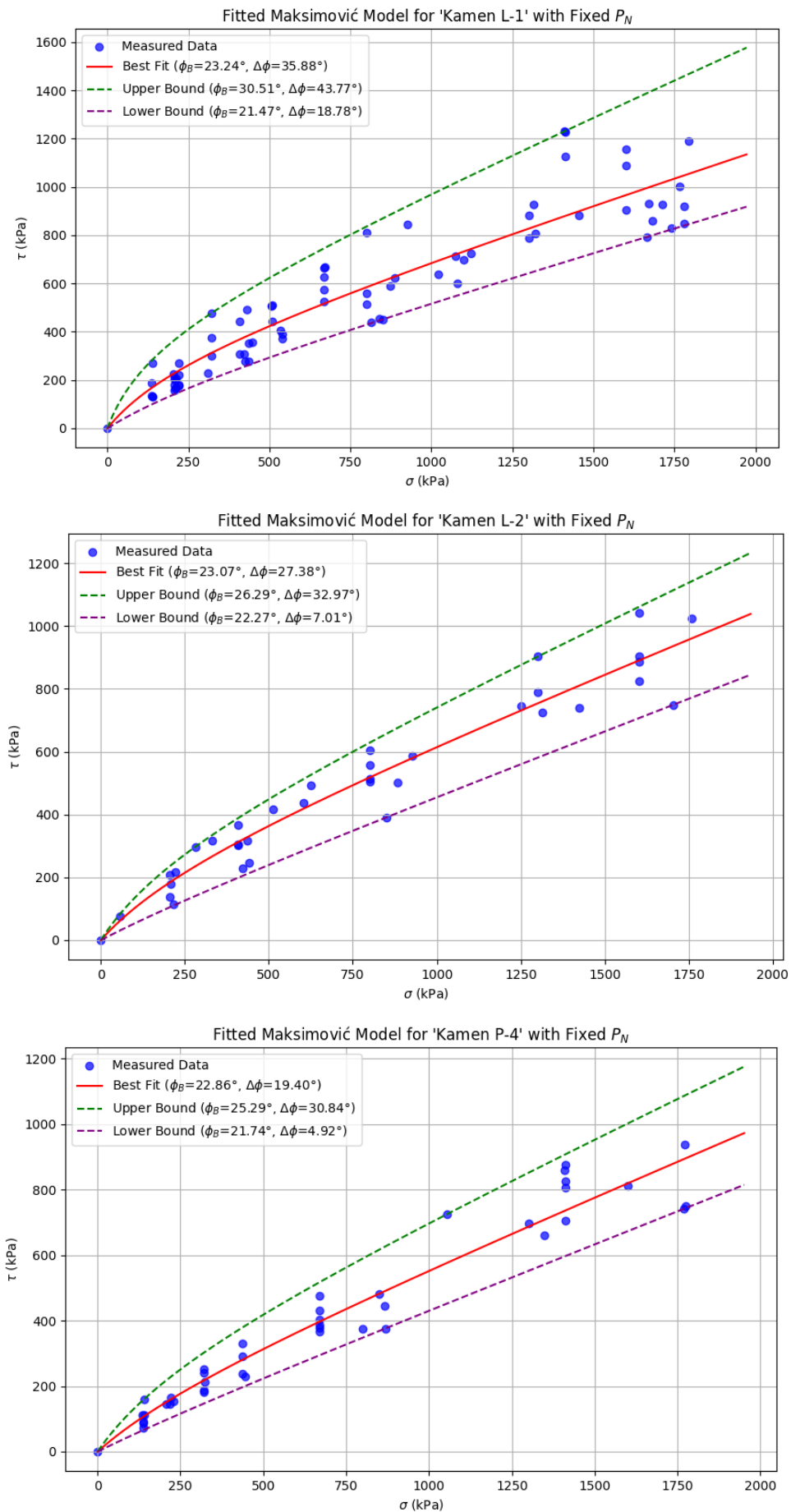
- Горња анвелопа (upper bound) – помоћу оптимизације (диференцијална еволуција – Python код приказан у Анексу 3) максимизује се угао трења при задатом облику функције тако да свака измерена тачка остане испод те криве. Практично се тражи најмањи пар  $(\varphi_B^U, \Delta\varphi^U)$  за који је  $\tau^U(\sigma_i) \geq \tau_i$  за све податке (тачке на дијаграму)  $i$ .
- Доња анвелопа (lower bound) – аналогно се минимизује угао трења условљен да све тачке буду изнад криве  $\tau^L(\sigma_i) \leq \tau_i$ .

Тако добијени парови  $(\varphi_B^U, \Delta\varphi^U)$  и  $(\varphi_B^L, \Delta\varphi^L)$  представљају крајње реалистичне границе чврстоће – сва експериментална мерења физички су „ухваћена“ између ове две хиперболе.

Да би се границе преточиле у употребљиве улазне расподеле за Монте-Карло анализу, усвојене су нормалне расподеле за сваки параметар засебно уз услов да се 95% (две стандардне девијације) података налази унутар распона између горње и доње анвелопе. Испитивања нису показала значајну корелацију између  $\varphi_B$  и  $\Delta\varphi$ , због чега су њихове расподеле третиране као међусобно независне.



Слика 6.24 Функције густине вероватноће (PDF) за параметре чврстоће материјала каменог набачаја у различитим зонама



Слика 6.25 Усвојени распони за 95% података из усвојених нормалних расподела параметара чврстоће Максимовићевог модела за материјале каменог набачаја



Варијабилност параметара Cam-Clay модела за материјал глине описана је униформном расподелом у распонима који су дефинисани у оквиру пројекта за управљање и одржавање бране (ПУО, [57]), а на основу претходних испитивања која су рађена на узорцима глине. За потребе овог рада није рађена додатна статистичка анализа резултата тестова на узорцима глине, због чега су усвојене униформне расподеле параметара на основу распона дефинисаних у [57].

Сегмент	Ознака	Материјал	E [kPa]	$\nu$	$\gamma$ [kN/m <sup>3</sup> ]	M	$\lambda$	$\kappa$	$p_0$ [kPa]	$\sigma_e$
Глинено језгро	gl	Глина	5.10e4	0.45	17.0	0.30	0.04	0.007	100	1.6
			-			-	-	-		
			5.90e4			0.70	0.10	0.009	600	

Слика 6.26 Усвојени распони за униформне расподеле параметара Cam-Clay модела за материјал глине (слика преузета из ПУО, [57])

### 6.3 Модалитет лома бране у разматраној прорачунској ситуацији

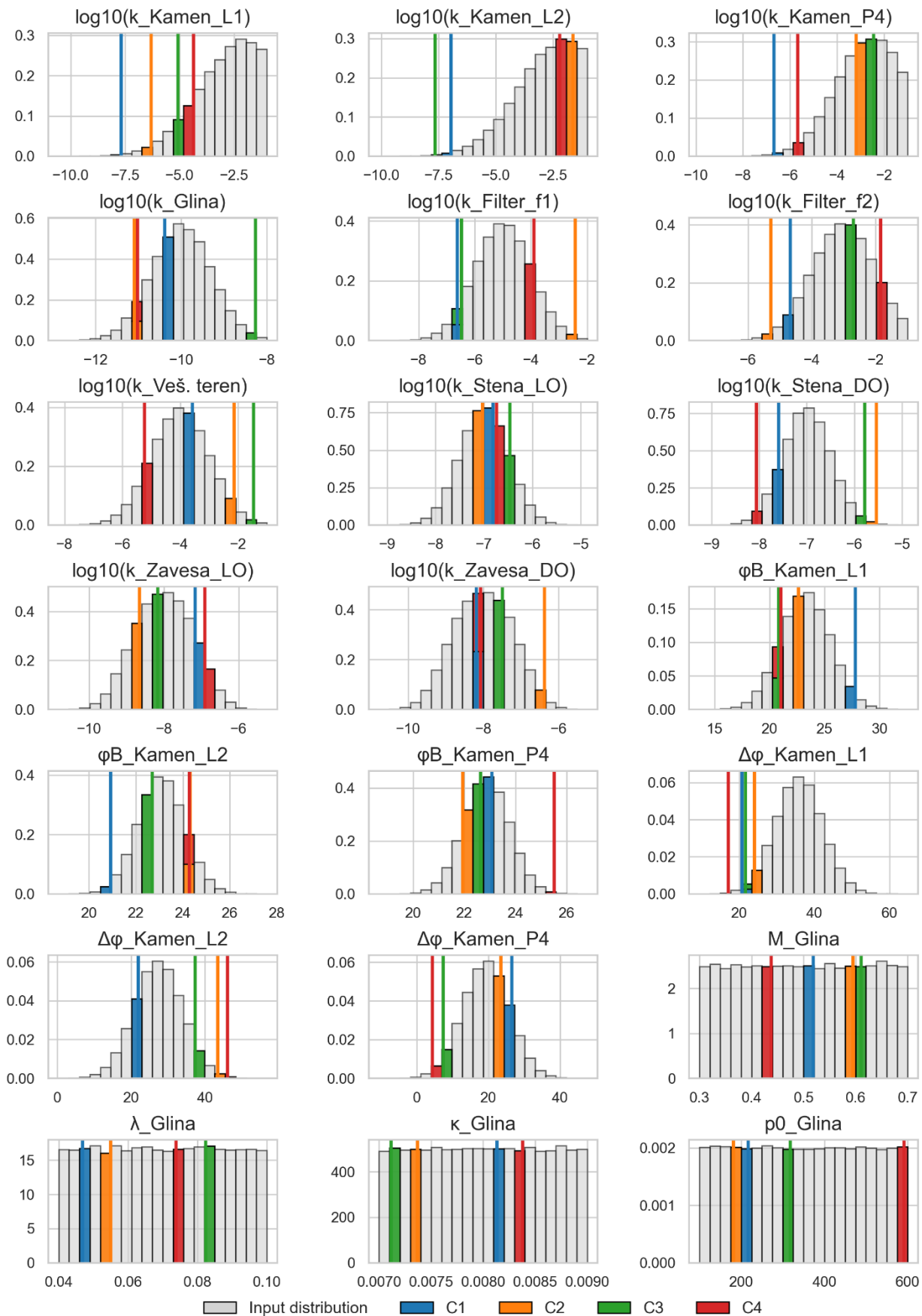
Метод редукције смичуће чврстоће (SSR) представља нелинеарну нумеричку методу за процену коефицијента сигурности који се односи на глобалну стабилност бране у складу са процедуром описаном у поглављу 3.1.3. За разлику од метода граничне равнотеже, геометрија клизне површи се не задаје унапред, она настаје непосредно у току анализе као нумеричка манифестација губитка носивости. Механизам лома (његова локација и облик) закључује се директно из решења анализе, евалуацијом развоја пластичних деформација у моделу које прате постепено смањење чврстоће материјала у SSR процедури.

Како би се установио модалитет лома бране у овом примеру анализирани су резултати четири независна МКЕ прорачуна са различитим комбинацијама улазних параметара (C1–C4), при чему су улазни параметри за сваку комбинацију узорковани из простора улазних променљивих дефинисаног у поглављу 6.2.3. Оваква поставка омогућава (i) идентификацију области у моделу у којима се акумулира пластична деформација и, сходно томе, процена положаја и облика зоне лома бране у дефинисаној прорачунској ситуацији, и (ii) процену варијабилности уоченог модалитета лома у односу на различите комбинације улазних параметара.

Случајно изабране комбинације (C1–C4) параметара добро покривају домен улазног простора, тако да разматрани резултати пружају поуздану основу за доношење закључака о механизму лома који се јавља у разматраној прорачунској ситуацији (преливању воде у евакуациони орган, односно условима великих вода).

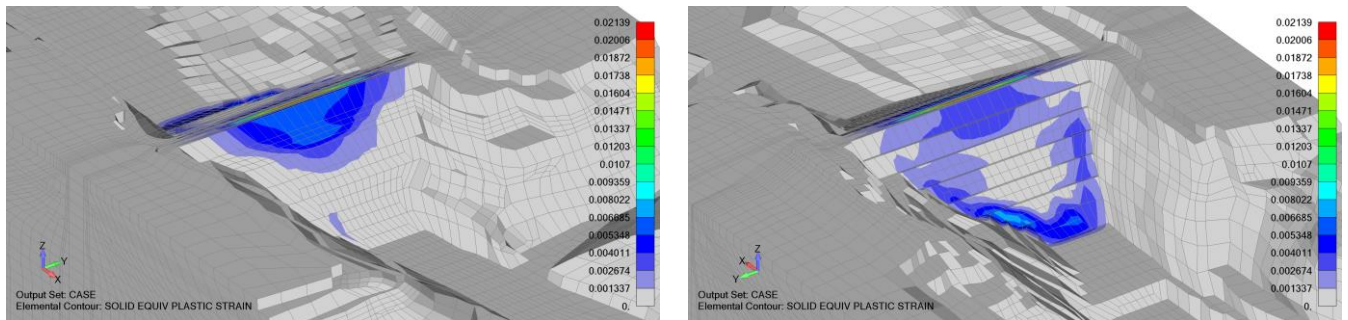
Слика 6.27 илуструје покривеност простора улазних променљивих са разматраних 4 комбинације узоркованих параметара. Сиве колоне представљају хистограмску представу расподела 21 улазне променљиве, док су различитим бојама обојене колоне у којима се налазе узорковани параметри. Свака од 4 комбинације параметара илустрована је својом бојом на дијаграмима. Са слике се може закључити да одабрани узорци обухватају и репове и централне делове расподела насумично.

Резултати приказане 4 анализе сматрају се у овом раду довољно репрезентивним за квалитативну анализу модалитета лома. Ипак, потребно је рећи да тако ограничен број разматраних анализа није статистички довољан за свеобухватно генерализовање понашања бране на читавом домену улазних расподела и не може се са апсолутном сигурношћу гарантовати да потенцијално не постоје и другачији модалитети лома који се јављају при другим комбинацијама узоркованих улазних параметара.



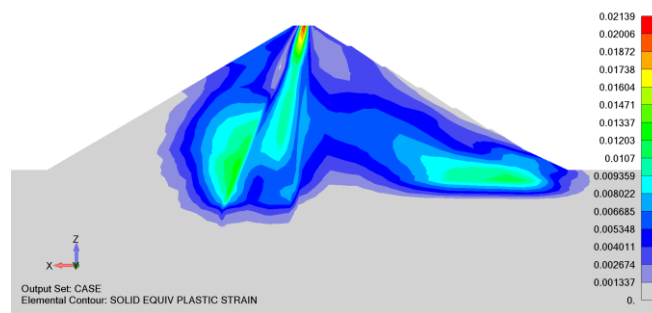
**Слика 6.27** Хистограмске расподеле за свих 21 улазних променљивих и узорковане комбинације параметара за МКЕ анализе C1-C4. Различитим бојама су обележени бинови из којих су узорковани параметри за сваку од 4 комбинације.

**Слика 6.28** приказује резултате SSR анализе за четири претходно дефинисане анализе C1-C4. Приказане су пластичне деформације у последњој итерацији SSR анализе у којој је остварена нумеричка конвергенција резултата. Ове деформације јављају се непосредно пред лом при максималној вредности редукционог фактора иницијалне чврстоће.



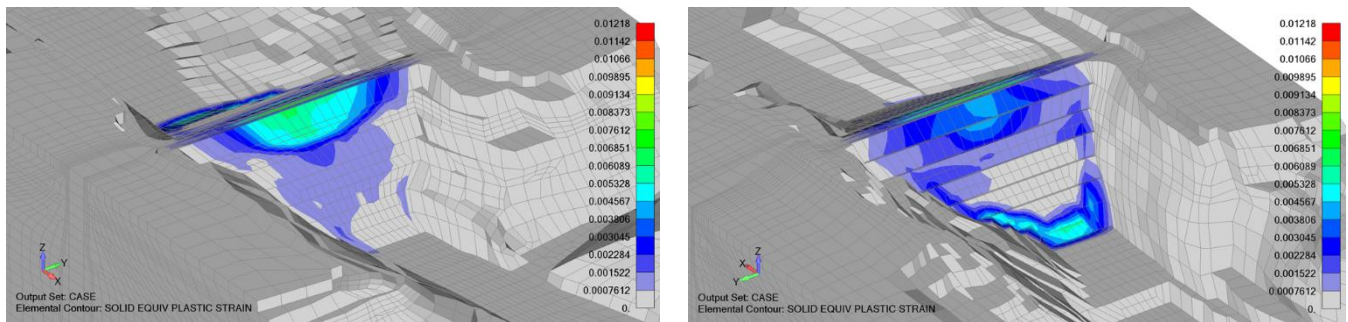
а) Поглед са узводне стране

б) Поглед са низводне стране



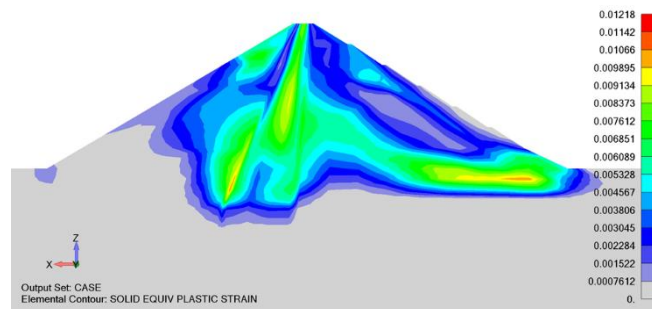
в) Централни попречни пресек

1) Комбинација улазних параметара C1



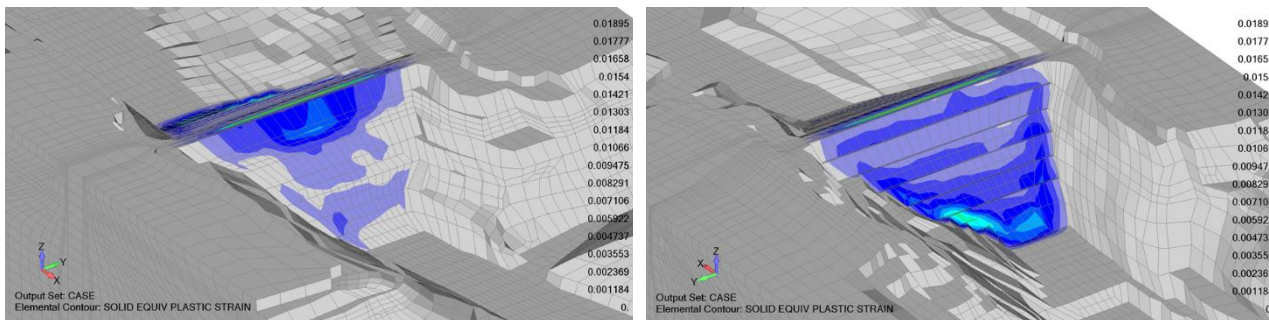
а) Поглед са узводне стране

б) Поглед са низводне стране



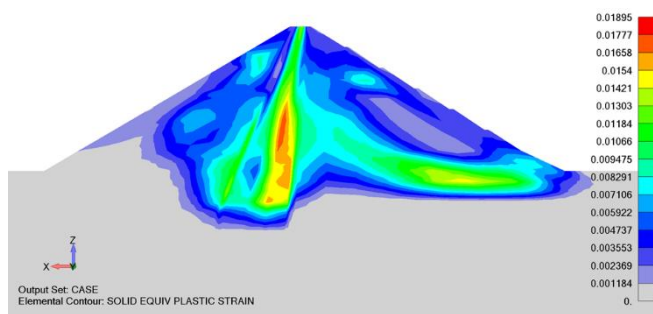
в) Централни попречни пресек

2) Комбинација улазних параметара C2



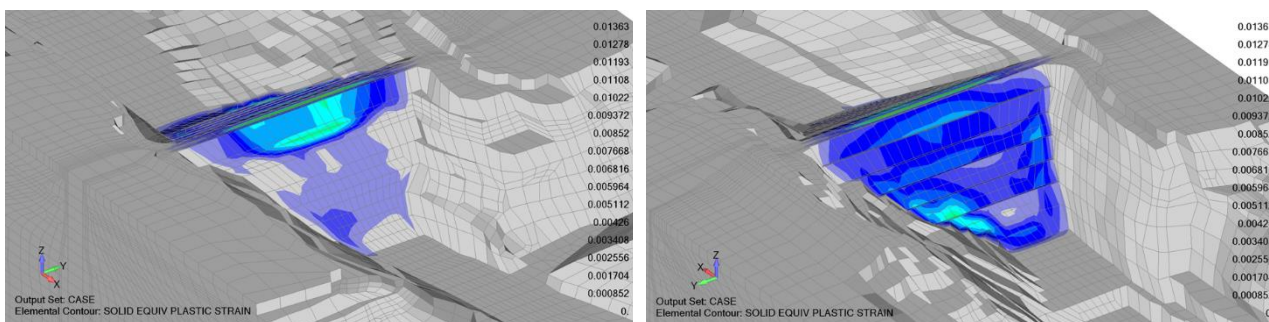
а) Поглед са узводне стране

б) Поглед са низводне стране



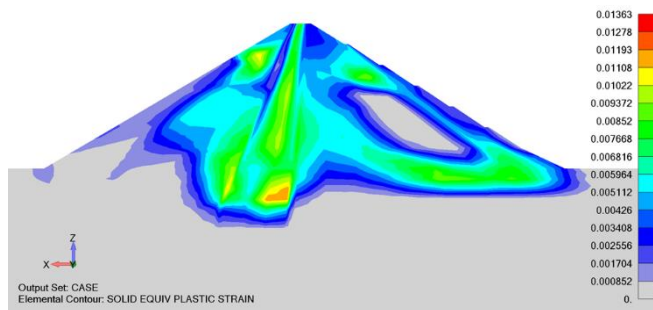
в) Централни попречни пресек

3) Комбинација улазних параметара С3



а) Поглед са узводне стране

б) Поглед са низводне стране



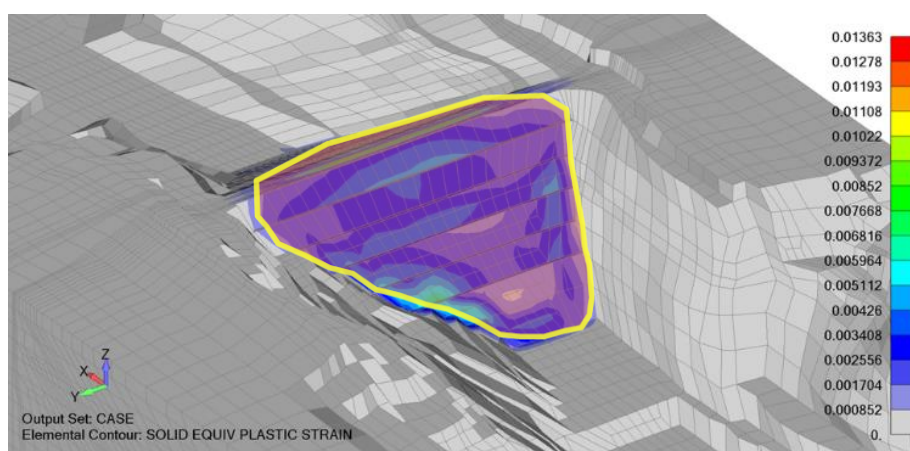
в) Централни попречни пресек

4) Комбинација улазних параметара С4

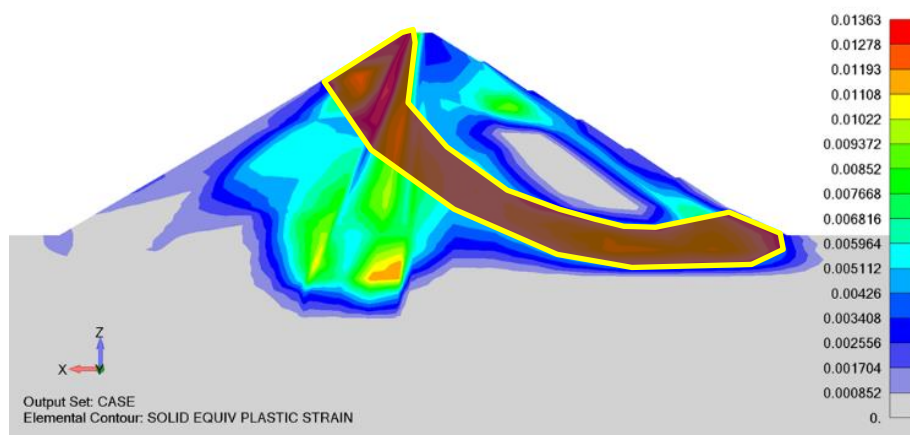
Слика 6.28 Резултати SSR анализе за МКЕ моделе са комбинацијама улазних параметара С1-С4

Приказани резултати SSR анализе за анализе C1–C4 доследно указују на исти модалитет лома кога карактерише следеће понашање бране:

- 3Д погледи сугеришу да се пластичне деформације које доводе до лома у моделу развијају у материјалима који чине брану, а не у фундаменту испод бране и у боковима. Ово практично значи да је у посматраном систему брана најслабија карика, и може се закључити да нису регистровани модалитети лома у околним стенским косинама који би указивали на друге типове нестабилности модела који се не тичу саме бране.
- Приметно је да се велике деформације јављају у језгру бране (што је очекивано јер глина има најмању чврстоћу од свих материјала). Ипак, рушење бране догађа се онда када у једном од потпорних тела дође до исцрпљења носивог капацитета.
- У телу бране формира се дубока квази-елипсоидна клизна површ која указује на глобалну нестабилност читаве низводне косине (Слика 6.29). У попречним пресецима јасно се диференцира површ дефинисана квази-кружним исечком у којој долази до развијања великих пластичних деформација (Слика 6.30).



Слика 6.29 Модалитет лома у 3Д погледу са низводне стране



Слика 6.30 Модалитет лома у попречном пресеку бране

Закључује се да се лом у SSR анализама посматраног проблема догађа доминантно услед нестабилности низводне косине, без обзира на варијацију улазних параметара.

## 6.4 Сурогат модел

Оригинални тродимензионални МКЕ модел (који сукцесивно решава проблеме филтрације, напонско-деформационог понашања и стабилности методом SSR) изузетно је захтеван са аспекта рачунарског времена и ресурса. Спровођење већег броја таквих симулација за различите комбинације параметара практично није изводљиво у разумном временском оквиру. Због тога је уведен сурогат модел – поједностављени мета-модел који апроксимира понашање оригиналног МКЕ модела, са циљем да се драстично убрзају анализе осетљивости и пробабилистичке анализе које следе. Сурогат модел омогућава да се велики број симулација изврши готово тренутно, чиме се технике попут Монте-Карло анализе могу применити ефикасно.

У оквиру развоја сурогат модела разматран је сет од 21 улазног параметра (све променљиве величине у моделу, видети поглавље 6.2.2), а модел је трениран да предвиђа 55 излазних величина које описују одговор бране (фактор сигурности добијен методом SSR и 54 резултата филтрационе анализе на местима где постоје подаци осматрања, видети поглавље 6.7). За тренинг модела коришћени су резултати укупно 2000 симулација оригиналног 3D МКЕ модела.

### 6.4.1 Тренинг модела

Процес тренирања сурогат модела започет је генерисањем репрезентативног скупа података. За планирање узорака улазних параметара примењена је техника Latin Hypercube Sampling (LHS), као што је објашњено у поглављу 3.2.4. LHS је обезбедио да 2000 одабраних комбинација улазних променљивих равномерно покрије читав опсег сваке од 21 променљиве, чиме се постиже да мета-модел буде што тачнији за целокупан простор улазних променљивих. Опсежи улазних променљивих утврђени су према усвојеним статистичким моделима сваког параметра:

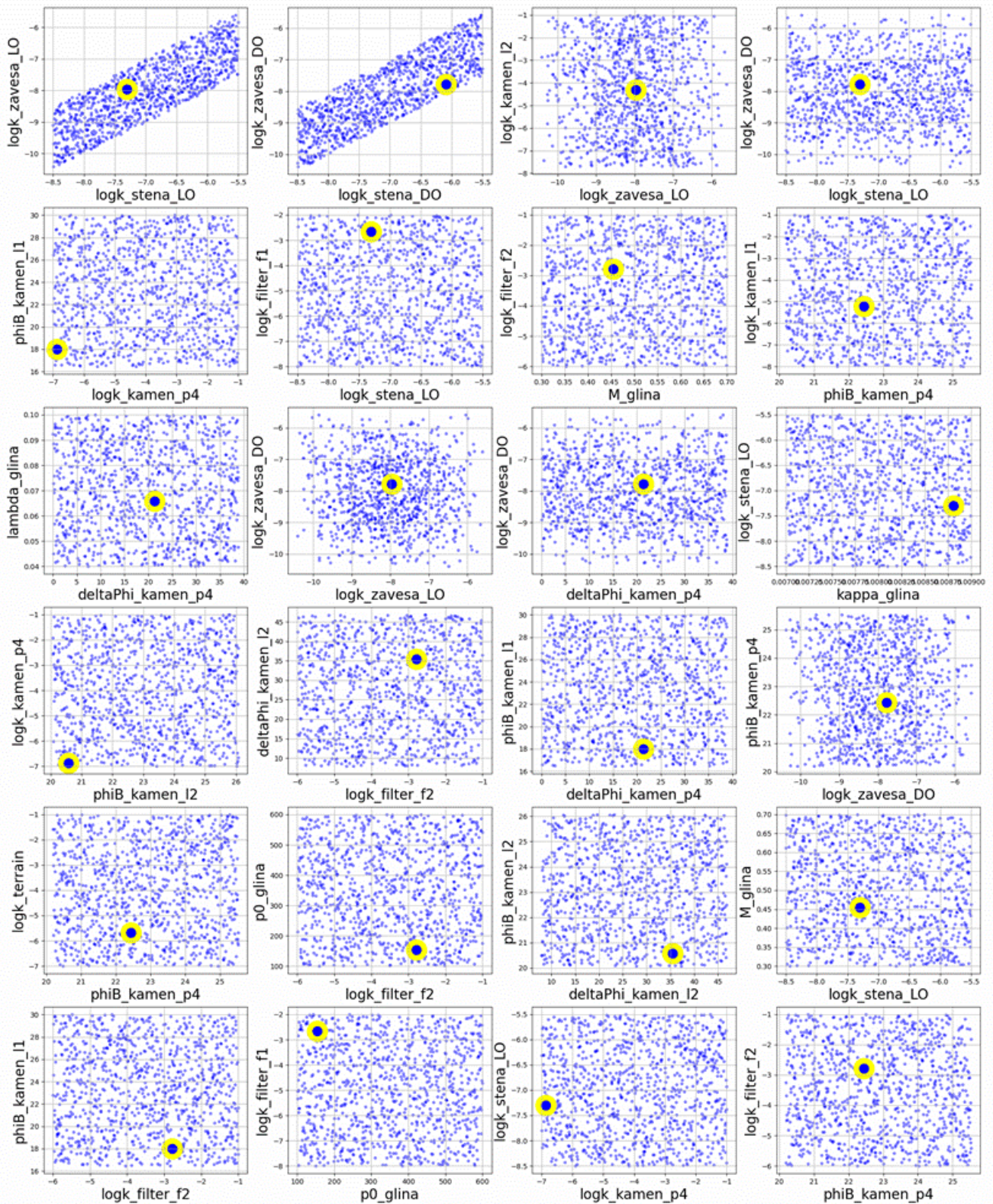
- Променљиве са униформном расподелом – опсег је задат директно границама саме расподеле.
- Променљиве са нормалном расподелом – иако је теоријски домен бесконачан, у пракси је модел трениран унутар интервала  $\mu \pm 3\sigma$ , који обухвата  $\approx 99,7$  % свих могућих вредности, што обезбеђује да мета-модел буде обучен у домену који је и статистички репрезентативан и инжењерски релевантан.

На овај начин смањена је вероватноћа да неки део високдимензионалног простора улаза остане непокривен узорцима. За сваки од 2000 узорака извршена је скупочена нумеричка симулација на оригиналном МКЕ моделу бране, чиме је добијен скуп од 2000 парова улаз–излаз (комбинација улазних параметара и одговарајућих резултата). Ови подаци чине тренинг сет који служи као основа за обучавање мета-модела машинским учењем. Визуализације равномерно узоркованог простора улазних променљивих за тренинг симулације приказан је на наредним сликама.



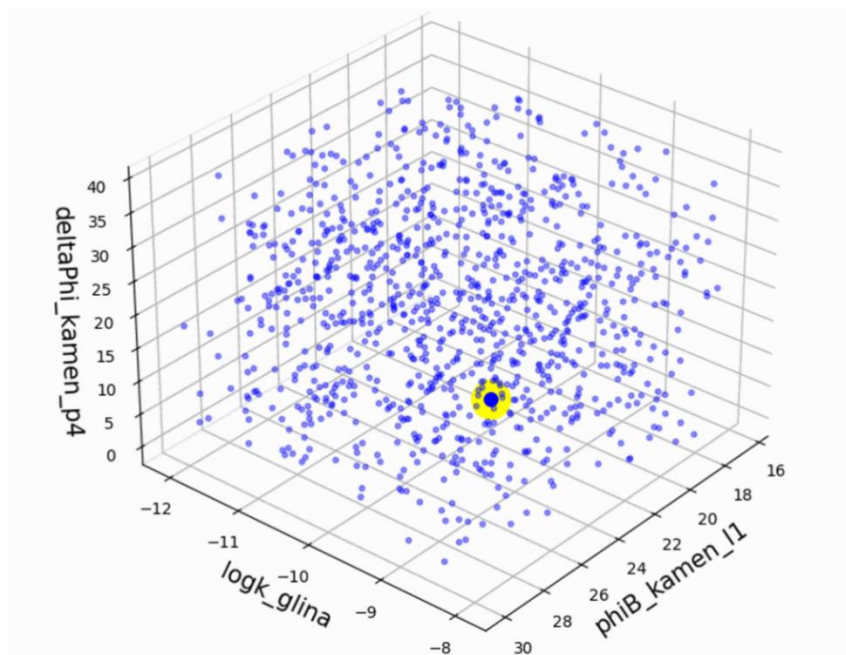
**Слика 6.31** Хистограмске расподеле LHS узорка за свих 21 улазних променљивих. Жутим бојом су обележени бинови из којих су узорковани параметри за једну случајно одабрану симулацију.<sup>6</sup>

<sup>6</sup> Материјал завесе на левој и десној страни не прати униформну расподелу због претходно дефинисане корелације са материјалима стене. Корелација између материјала стене и завесе се најбоље осликава на дводимензионалним расипним дијаграмима на наредној слици.



Слика 6.32 Расипни (енг. *scatter*) дијаграми за 20 одабраних парова улазних параметара. Свака плава тачка представља један од 2000 LHS узорака, чиме се илуструје равномерно покривање 2Д пројекција простора улазних променљивих. Жуте тачке означавају комбинације параметара за једну случајно одабрану симулацију.





**Слика 6.33** 3D приказ LHS узорака у простору три одабране улазне величине. Свака плава тачка представља један од 2000 LHS узорака чиме се илуструје равномерно покривање 3Д пројекција простора улазних променљивих. Жута тачка означава комбинацију параметара за једну случајно одабрану симулацију.

За креирање сурогат модела одабран је алгоритам XGBoost (поглавље 3.2.3). Пошто је потребно истовремено предвиђање више излазних величина (укупно 55), коришћена је вишеструка регресија са више излаза – имплементирана путем класе MultiOutputRegressor (склоп библиотеке scikit-learn у програмском језику Python) која омогућава паралелно обучавање појединачних XGBoost модела за сваки излазни параметар.

Пре процеса обучавања извршена је обрада података: све улазне променљиве скалиране су на опсег  $[0, 1]$  применом MinMax нормализације (MinMaxScaler) ради уједначавања размера и брже конвергенције приликом учења модела. Излазне величине задржане су у изворним јединицама (нису скалиране). XGBoost модел (регресор) је затим трениран над припремљеним подацима – подешен је на унапред одабране вредности хиперпараметара које обезбеђују добар компромис између прецизности и генерализације:

- $n\_estimators = 300$  стабала одлуке,
- максимална дубина стабла  $max\_depth = 6$ ,
- стопа учења  $learning\_rate = 0.1$ ,

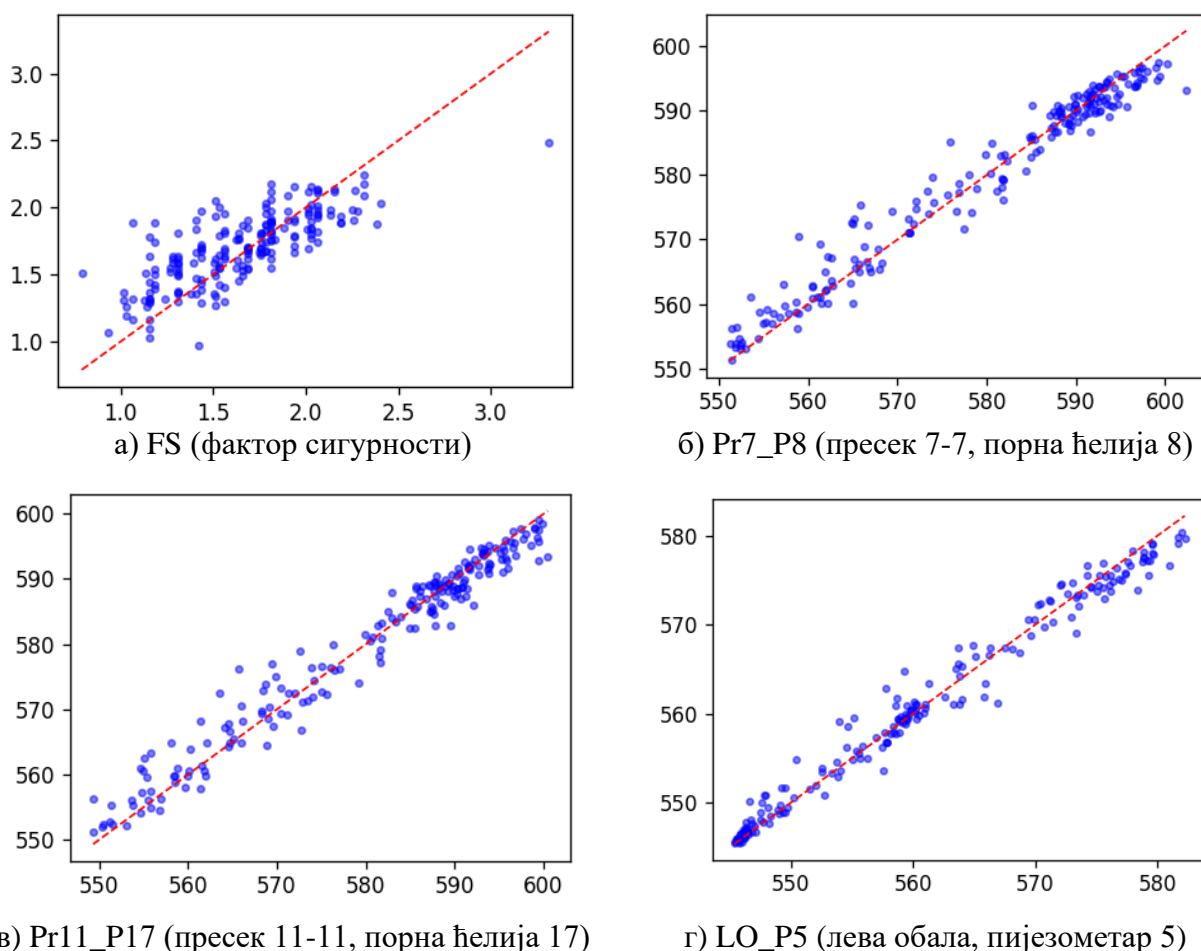
уз подразумеване вредности осталих параметара. Ови хиперпараметри одабрани су на основу експерименталног тестирања, како би сурогат модел постигао високу тачност при предвиђању, а притом избегао претренираност (*overfitting*). Python кодови којима су извршени LHS узорковање параметара и тренинг мета модела приложени су у Анексу 3.

## 6.4.2 Верификација модела

Након обучавања, квалитет сурогат модела провераван је помоћу засебног скупа података који није коришћен при тренингу. За верификацију је издвојено 200 додатних МКЕ симулација оригиналног модела (независно генерисаних комбинација улазних параметара), тако да ови узорци представљају тест сет за оцену прецизности мета-модела. Предвиђања сурогат модела упоређена су са стварним резултатима МКЕ анализа за сваки од 55 излазних параметара, а као мере тачности разматрани су коефицијент детерминације  $R^2$  и NRMSE (*Normalized Root Mean*

*Square Error*, видети поглавље 3.3.1). За 54 излазне величине из филтрационе анализе сурогат модел показује изузетну тачност ( $R^2 \geq 0,98$ ; просечан NRMSE  $\approx 1\%$ ). За фактор сигурности FS тачност је скромнија, али и даље прихватљива за инжењерску примену:  $R^2 \approx 0,6$ , уз NRMSE  $\approx 9\%$ . На наредној слици приказани су дијаграми који илуструју поређење резултата оригиналног МКЕ модела и мета модела на резултатима 200 валидационих симулација за следеће излазне прорачунске величине:

- FS – фактор сигурности одређен методом SSR
- Три (од 54) насумично изабрана резултата филтрационе анализе: Pr7\_P8, Pr11\_P17 и LO\_P5 (остали резултати показују слична поклапања)



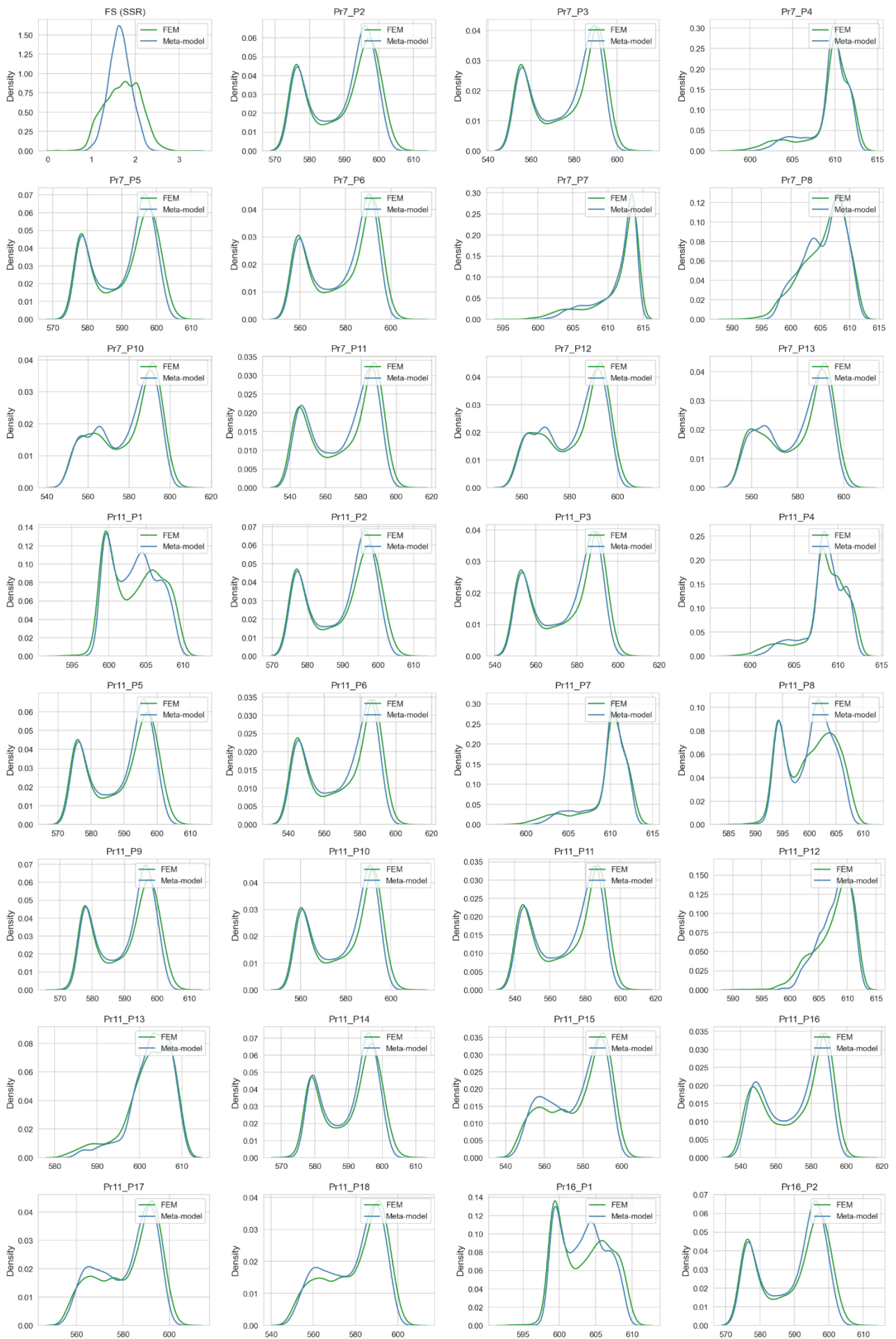
**Слика 6.34** Поређење резултата 200 верификационих симулација.

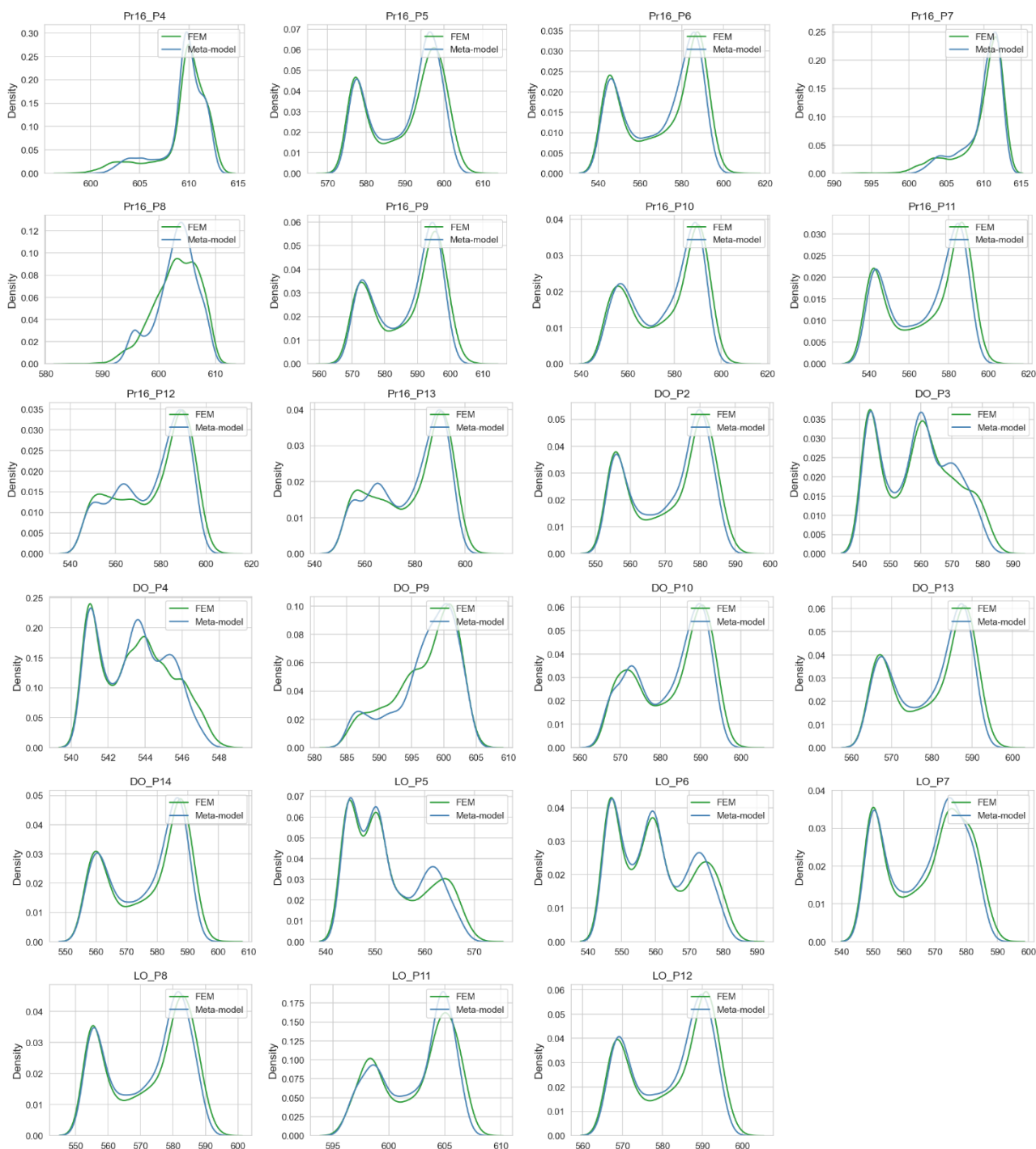
X-оса – МКЕ модел, Y-оса – сурогат модел

Овакво понашање је очекивано, јер је FS изразито нелинеарна функција улазних параметара, док су појединачни пијезонивои у телу бране и боковима једноставније повезани са улазним параметрима.

За додатну проверу успешности мета-модела извршено је 2000 нових симулација сурогат моделом унутар истих статистичких опсега улазних променљивих који су коришћени за тренинг (видети поглавље 6.4.1). **Слика 6.35** представља поређење расподела резултата оригиналног 3-D МКЕ модела и предвиђања сурогат-модела за нових 2000 насумичних комбинација улаза:

- Зелене криве представљају емпиријску расподелу резултата из оригиналног 3-D МКЕ модела (тј. на 2200 тачака почетног тренинг скупа и валидационог скупа).
- Плаве криве приказују расподелу предвиђања сурогат-модела за нових 2000 насумичних комбинација улаза из истог опсега из кога је узоркован тренинг сет.



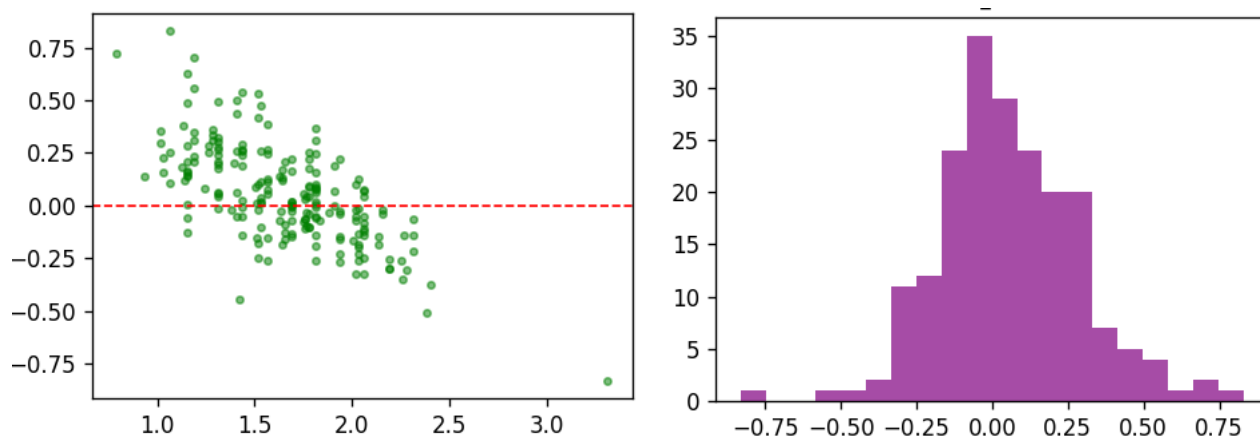


Слика 6.35 Функције густине вероватноће (PDF) резултата прорачуна МКЕ модел (плава линија); Сурогат модел (зелена линија)

Слика 6.35 илуструје и потврђује претходне закључке:

- Мета-модел исправно репродукује статистички одговор оригиналног МКЕ модела
- Видљива одступања јављају се само у реповима расподеле фактора сигурности FS

Мета-модел даје најпрецизнија предвиђања у централном делу распона фактора сигурности ( $\approx 1,3 - 1,9$ ), док показује систематску пристрасност на крајевима: мање вредности FS благо потцењује, а веће вредности благо прецењује. Карактер и распон ових одступања приказани су на наредној слици: лево су графички дати остаци (резидууми) грешке (разлике између резултата оригиналног и мета-модела на валидационом сету од 200 симулација) дуж целог опсега FS, а десно је њихова процењена густина вероватноће.



Слика 6.36 Лево – остаци грешке за FS у функцији израчунате вредности  
Десно – густина вероватноће остатака за FS (PDF)

Постојеће одступање услед апроксимације сматра се прихватљивим, имајући у виду огромно убрзање прорачуна које је постигнуто увођењем сурогат модела. Стога се сурогат модел може користити за даље анализе осетљивости и поузданости бране које следе, уз поверење у тачност добијених резултата.

## 6.5 Глобална анализа осетљивости

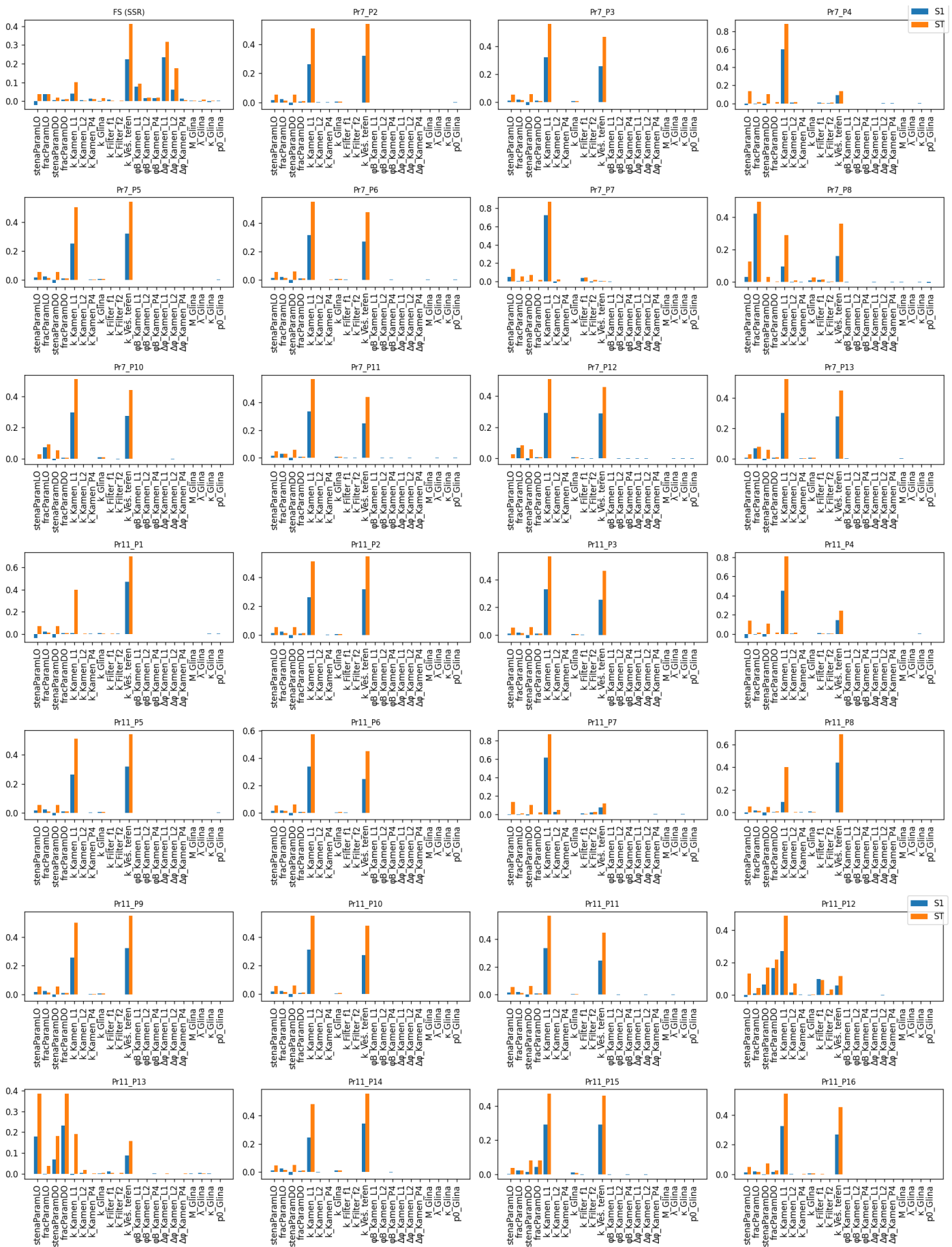
Анализа осетљивости (детаљнији теоријски опис дат је у поглављу 3.2.3) служи да квантитативно оцени колики утицај поједине улазне променљиве или њихове комбинације имају на варијабилност излазних величина модела. У овој студији случаја израчунати су Собољеви глобални индекси  $S_1$  (појединачни ефекат) и  $S_T$  (укупни ефекат).

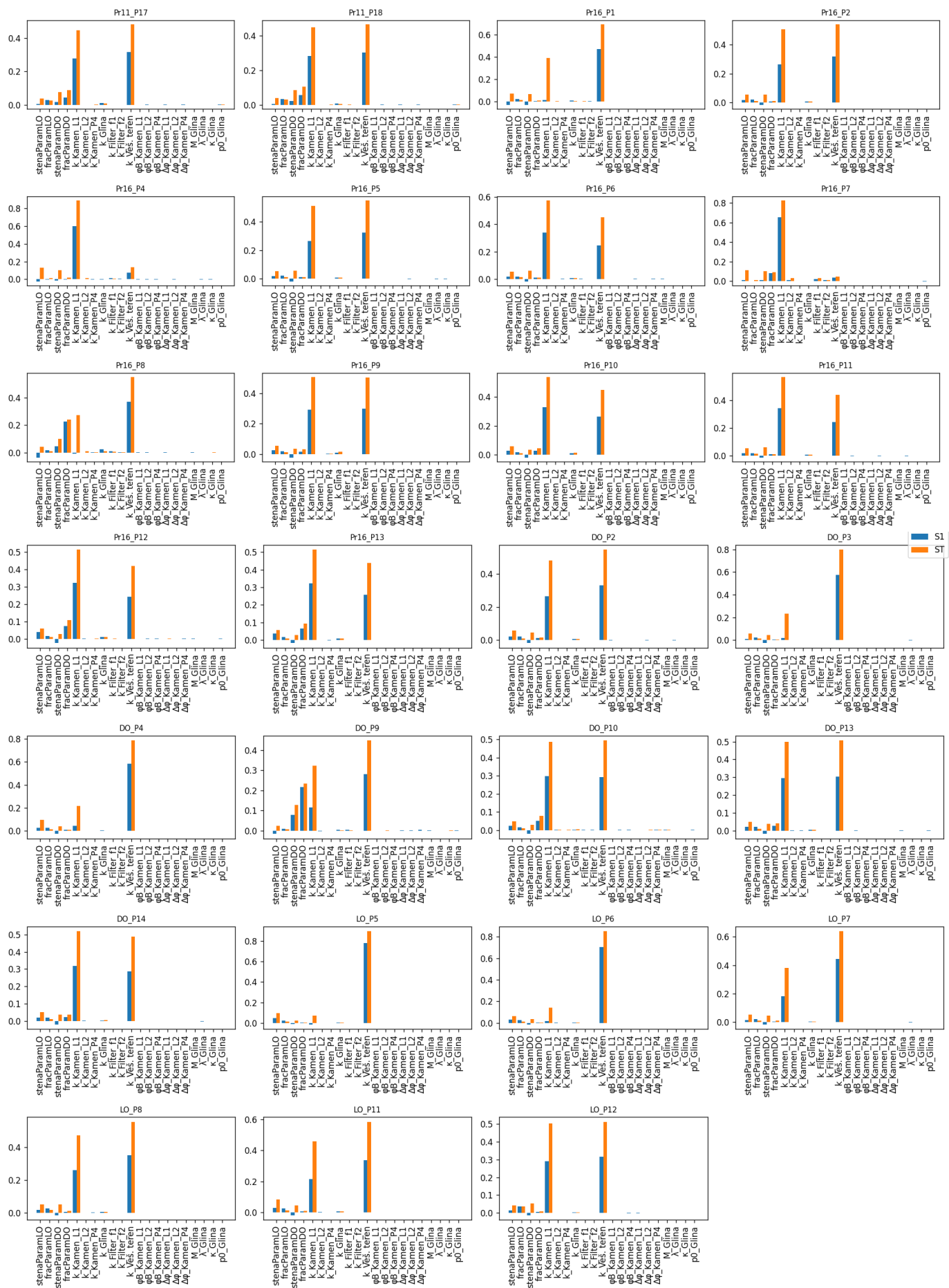
Простор од 21 променљиве узоркован је квази-случајном Sobol–Saltelli секвенцом основне величине  $N = 256$ . То даје  $(2D+2)N=11264$  дискретних комбинација улазних података, што је довољно да се стабилно процене индекси првог реда  $S_1$ , тотални индекси  $S_T$  и интеракције  $S_2$ . Свака симулација евалуирана је применом сурогат модела (поглавље 6.3). Компјутерски програм креиран у програмском језику Python приложен је у Анексу 3.

Следеће слике приказују резултате анализе осетљивости:

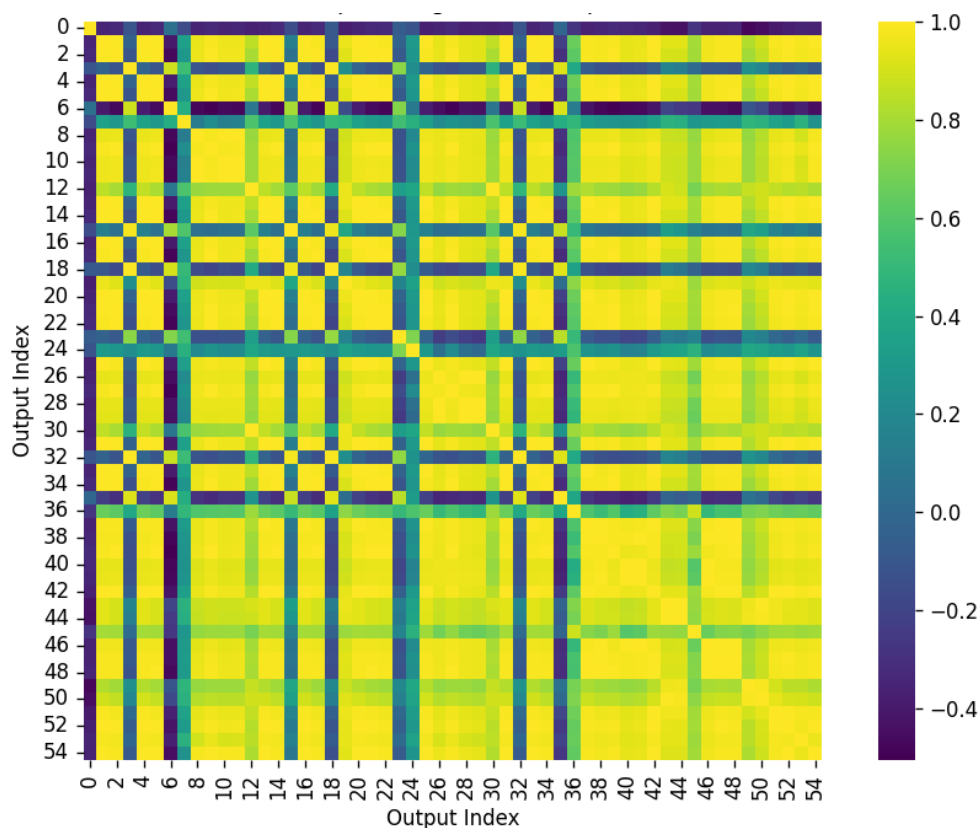
- **Слика 6.37** – Приказ првих и тоталних Соболевих индекса осетљивости
- **Слика 6.38** – Корелациона мапа (матрица) између свих 55 излазних величина модела добијених у пробабилистичкој анализи

Вредности Пирсоновог коефицијента корелације између сваког пара излаза приказане су колор шемом (реф. Слика 6.38), жуто – јака позитивна корелација, плаво/тегет – нема корелације, зелено – слаба до умерена корелација).





Слика 6.37 Приказ првих (S1 – плава боја) и тоталних (ST – наранџаста боја) Соболевих индекса осетљивости



**Слика 6.38** Корелациона мапа (матрица) између свих 55 излазних величина модела добијених у пробабилистичкој анализи (0-FS, 1-55-резултати филтрационе анализе)

Резултати анализе осетљивости указују на следеће закључке:

- Сви резултати филтрационе анализе највише зависе од два параметра – коефицијената филтрације камена (зона L1) и вештачког терена. Овај закључак има смисла с обзиром на то да је варијанса код оба параметра велика, док њихов однос практично одређује положај пијезометарске линије у низводној ножици бране.
- Фактор сигурности је зависан готово подједнако од коефицијената филтрације (доминантно вештачког терена и камена L1) и параметара чврстоће камена (све зоне). Овај закључак сугерише на то да расподела фактора сигурности свој облик подједнако дугује варијабилности резултата филтрационе анализе и чврстоће материјала у телу бране.
- Порни притисци у оквиру једног пресека бране међусобно су корелисани
- Порни притисци у телу бране и пијезометарски нивои у бочним деловима показују ниске корелације

Корелациона анализа излазних величина пружа додатну потврду налаза из анализе осетљивости. Груписања јасно показују да излазне величине које деле доминантне улазне параметре испољавају међусобну узаваност, док излази вођени различитим параметрима остају практично независни. Ови резултати указују на то да многе мерене величине на брани пружају сличне информације о стању конструкције (због високе међусобне корелације), те би се у теорији могао направити робуснији модел који нема толико много излазних величина. У пракси, ипак, одлучено је да се задржи комплетан модел (са свим улазима и излазима) због тога што подаци осматрања који су доступни у посматраним тачкама нису увек репрезентативни и валидни.

Глобална анализа осетљивости методом Собоља у овој студији пружила је дубљи увид у однос између улазних параметара и одговора бране Првонек. Идентификовани су кључни параметри модела који доминантно доприносе резултатима анализа (поређење S1 и ST индекса), као и



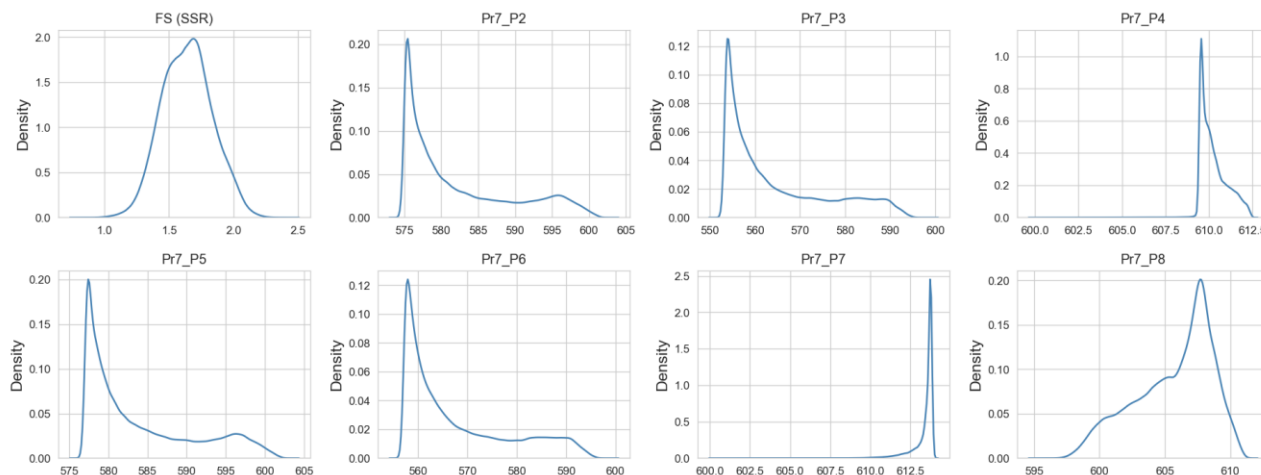
области где су излазне величине међусобно повезане (корелациона мапа). Високе корелације уочене између сродних величина су у складу са физичком интуицијом, док одсуство корелација између различитих група потврђује да је модел успео да разлучи одвојене механизме. Све ово доприноси свеобухватнијем сагледавању сигурности бране Првонек.

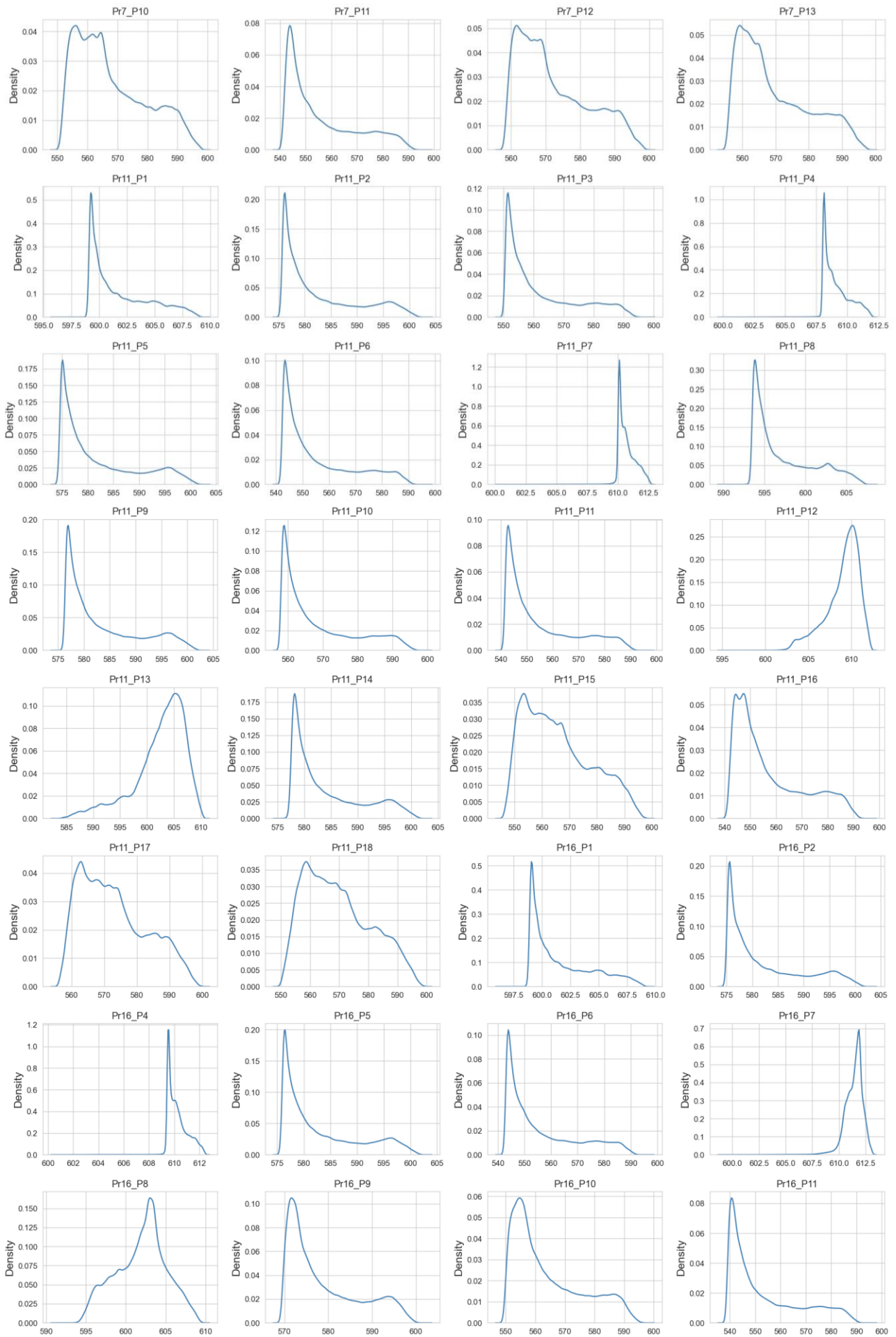
## 6.6 Монте-Карло анализа сигурности бране – базна пробабилистичка анализа

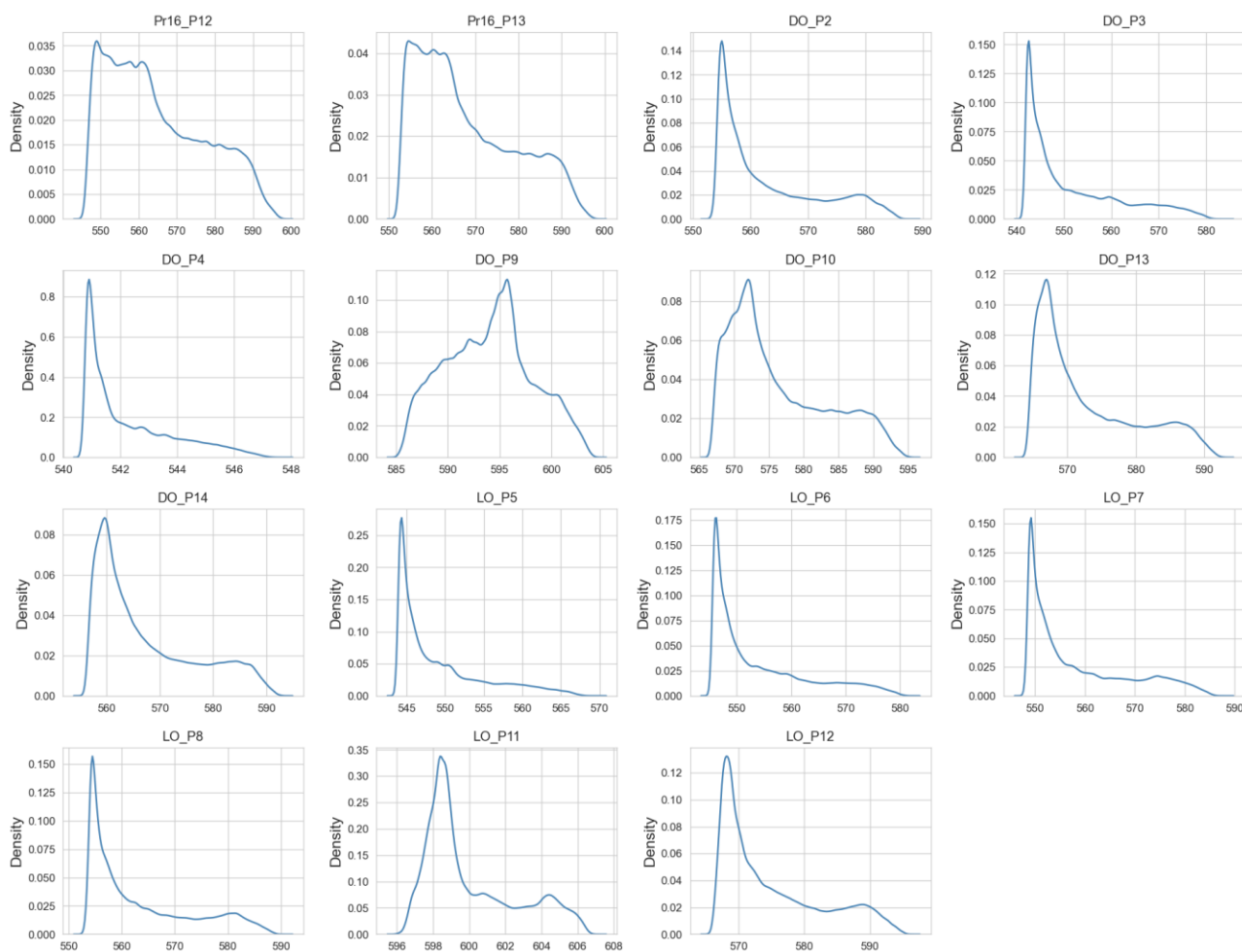
Након дефинисања варијабилности улазних параметара за брану Првонек (поглавље 6.2.3) и израде мета-модела (поглавље 6.4), спроведена је базна Монте Карло анализа стабилности насуте бране користећи споменути сурогат модел. Резултати базне анализе добијени су на основу случајних променљивих чије су расподеле дефинисане према резултатима испитивања без накнадног ажурирања резултата анализе на основу података осматрања. Сходно томе, добијени резултати служе као референтни оквир за поређење са анализом која укључује податке осматрања, као и за сагледавање утицаја појединих извора непоузданости на сигурност бране.

Монте Карло анализа реализована је према методологији шематски приказаној у поглављу 3.2.2 (Python код приложен је у Анексу 3). Сматрано је да су улазне случајне променљиве, изузев коефицијента водопропусности стене и инјекционе завесе, међусобно статистички независне. Укупно је спроведено  $N = 10^7$  симулација Монте-Карло анализе, што је омогућено применом обученог мета-модела уместо директних МКЕ прорачуна за сваки узорковани уређени пар улазних величина. Оволики број симулација усвојен је као максимална могућа вредност у контексту могућности персоналних рачунара данашњег времена, како би се обезбедила што је могуће стабилнија конвергенција резултата. Свака појединачна симулација даје вредности фактора сигурности бране и резултата филтрационе анализе за једну реализацију скупа улазних параметара, према дефинисаним функцијама расподеле.

Резултати пробабилистичке анализе приказани на наредној слици обухватају процењене расподеле фактора сигурности и карактеристичних резултата филтрационе анализе. Поред фактора сигурности, који се уочава као једномодална расподела концентрисана око вредности  $\sim 1,55$ , дате су и расподеле пијезонивоа у 54 карактеристичне тачке. Уочава се да су ове расподеле углавном асиметричне (нпр. позитивно издужење – дужи десни реп), што је очекивано због лог-нормалне природе варирања филтрационих параметара. Неке од добијених расподела показују изражене двоструке врхове (двимодалне расподеле), што указује на постојање два доминантна режима понашања.





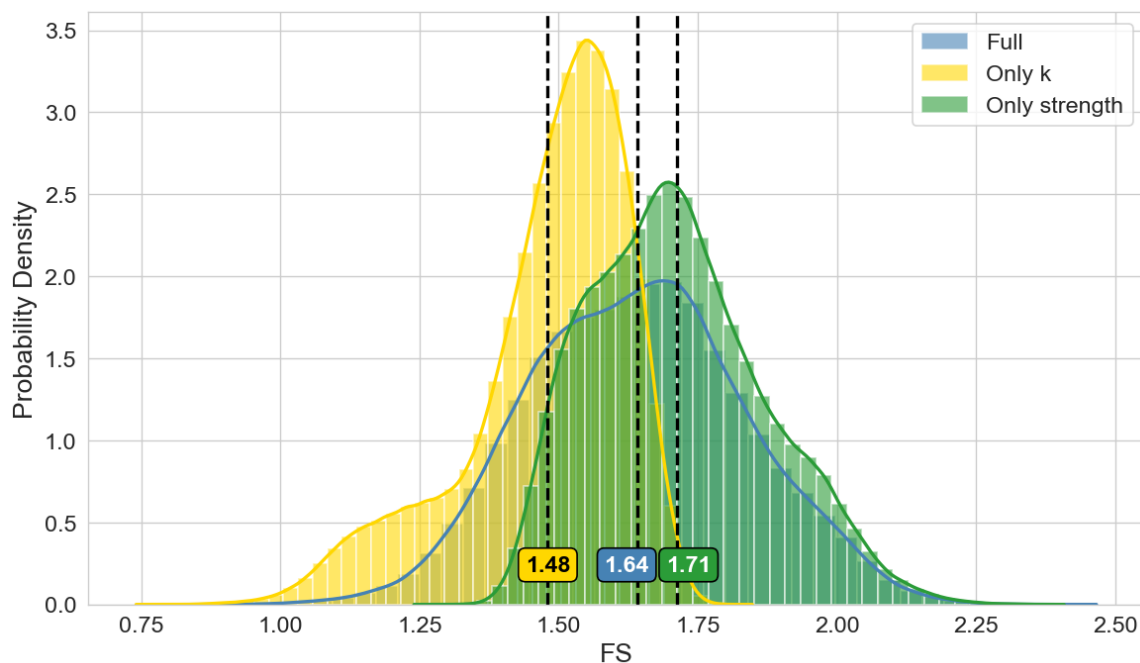


Слика 6.39 Функције густине вероватноће (PDF) за све излазне величине у базној пробабилистичкој анализи

Анализа осетљивости (видети поглавље 6.5) показала је да је варијабилност фактора сигурности  $FS$  резултат суперпозиције два доминантна механизма: варијабилности филтрационе слике у телу бране и варијабилности параметара чврстоће каменог набачаја. Да би се квантитативно раздвојили њихови појединачни доприноси извршене су још две посебне пробабилистичке анализе (Python код приложен је у Анексу 3):

- Утицај варијације филтрационих параметара – коефицијенти филтрације су третирани као случајне променљиве са расподелама дефинисаним у поглављу 6.2.3, док су параметри чврстоће проглашени константама (детерминистичке величине) и фиксирани на своје средње вредности (видети поглавље 6.2.3).
- Анализа утицаја параметара чврстоће – параметри чврстоће су третирани као случајне променљиве са расподелама дефинисаним у поглављу 6.2.3, док су коефицијенти филтрације проглашени константама (детерминистичке величине), при чему је сваком параметру додељена средња вредност из расподела њихових логаритама дефинисаних у поглављу 6.2.3.

На наредној слици приказани су резултати споменутих парцијалних пробабилистичких анализа и њихово поређење са првобитном, потпуном анализом која укључује све улазне променљиве.



**Слика 6.40** Поређење расподела фактора сигурности (FS) за три сценарија анализе: истовремена варијација свих параметара („Full“, плава крива), варијација само филтрационих параметара  $k$  уз фиксиране параметре чврстоће („Only  $k$ “, жута крива) и варијација само параметара чврстоће уз фиксирани  $k$  („Only strength“, зелена крива).

**Слика 6.40** показује да варијабилност коефицијената филтрације (жута крива) више утиче на критичне сценарије за нестабилност бране од варијабилности параметара чврстоће. Средња вредност фактора сигурности пада са 1,64 у комплетној анализи која укључује варијабилност свих параметара на  $\approx 1,48$ , а леви реп расподеле ( $FS < 1,3$ ) постаје израженији. Када се варирају искључиво параметри чврстоће (зелена крива) средња вредност расте на  $\approx 1,71$  а леви реп расподеле је практично елиминисан. То указује да чак и конзервативна расподела чврстоће, уз фиксиране средње вредности коефицијената филтрације, не доводи до сценарија који највише угрожавају стабилност, али проширује десни реп расподеле и тиме повећава опсег могућих сигурних стања.

Ови резултати представљају полазну тачку за даљу анализу која укључује податке осматрања у прорачун, са циљем да се смањи неизвесност и поузданије одреди ниво сигурности насуте бране.

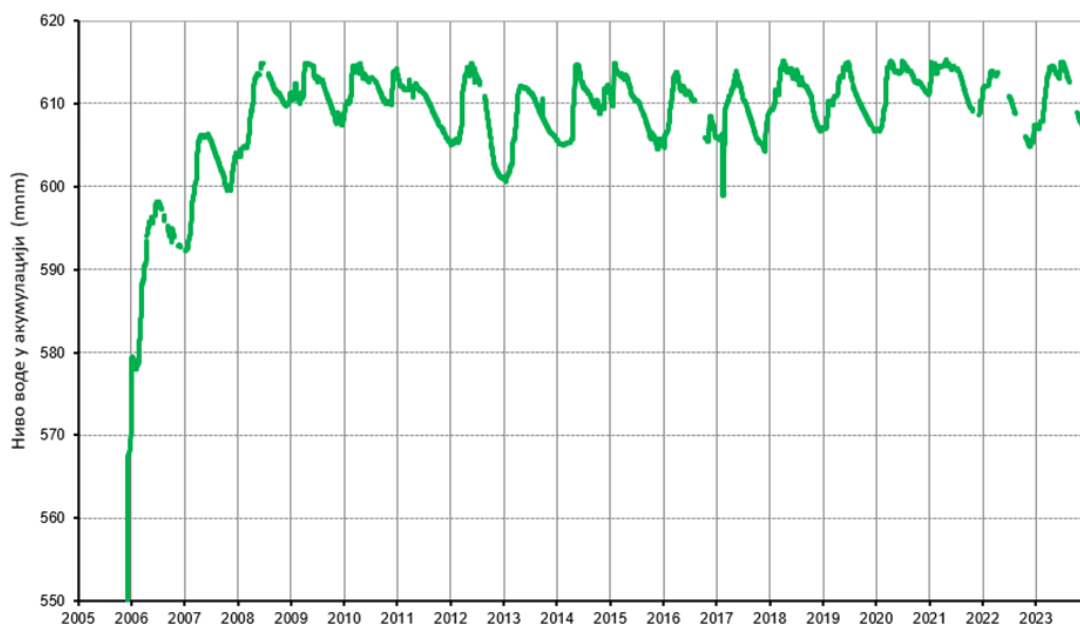
Пондерисана пробабилистичка анализа урађена је за случај истовремене варијације свих променљивих параметара (комплетна пробабилистика анализа) и за случај варијације искључиво параметара филтрационе анализе. Како се сви разматрани подаци осматрања односе на резултате филтрационе анализе, они не могу утицати на варијабилност резултата анализе која потиче од варијабилности параметара чврстоће. Због тога пондерисана анализа која узима у обзир само варијабилност параметара чврстиће није од интереса.

## 6.7 Подаци осматрања

### 6.7.1 Сажет преглед података осматрања

#### Ниво воде

Ниво воде у акумулацији мери се помоћу савременог електричног уређаја за континуално мерење нивоа који се налази у кули водозахвата. Контролна мерења нивоа воде у акумулацији обављају се на мануелни начин, читавањем водомерне летве која се налази на низводном лицу куле водозахвата [60].

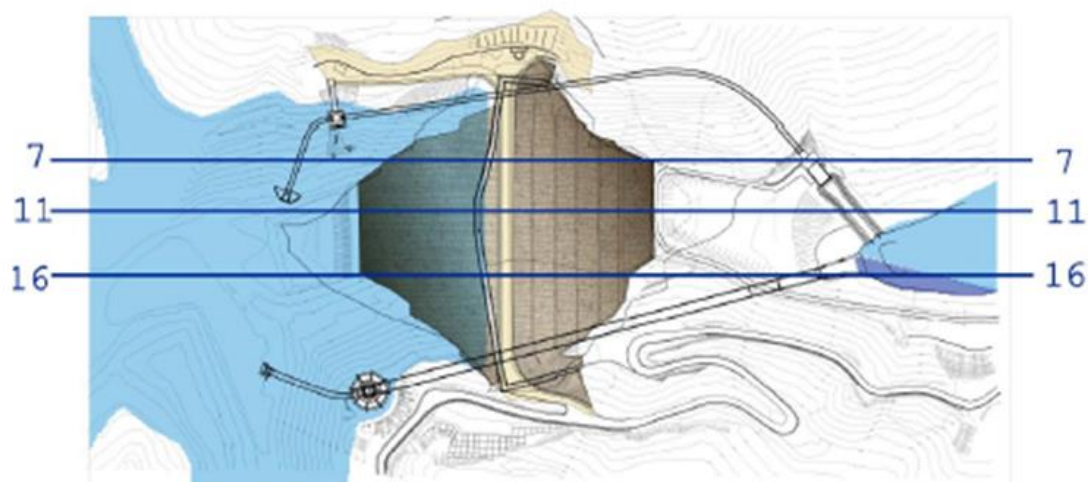


Слика 6.41 Ниво воде у акумулацији – цео период осматрања [60]

Ниво доње воде константно се налази на коти 530 mm.

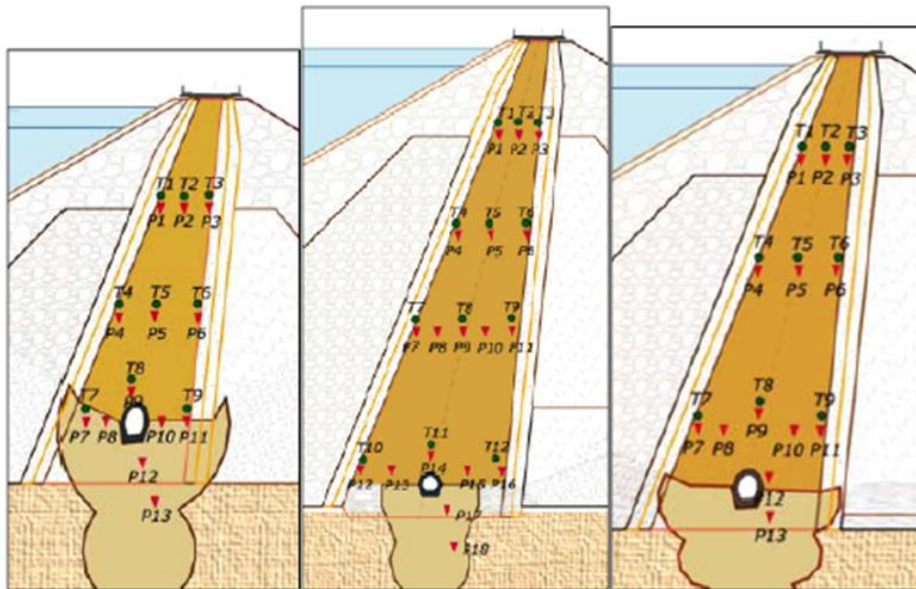
#### Порни притисци

Порне ћелије су уграђене у тело бране у 3 попречна мерна пресека (7-7, 11-11 и 16-16), на различитим котама по висини пресека [57].



Слика 6.42 Положај мерних профила са порним и тоталним ћелијама

Укупно је уграђено 38 порних ћелија [57].



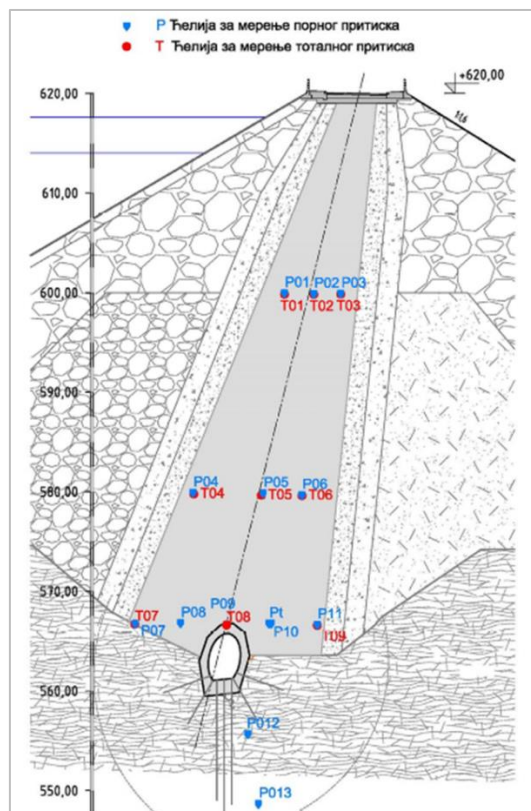
Слика 6.43 Распоред ћелија за мерење порних и тоталних притисака у брани

### Порни притисци у пресеку 7-7

За мерење порних притисака у овом пресеку уграђено је 13 порних ћелија [60].

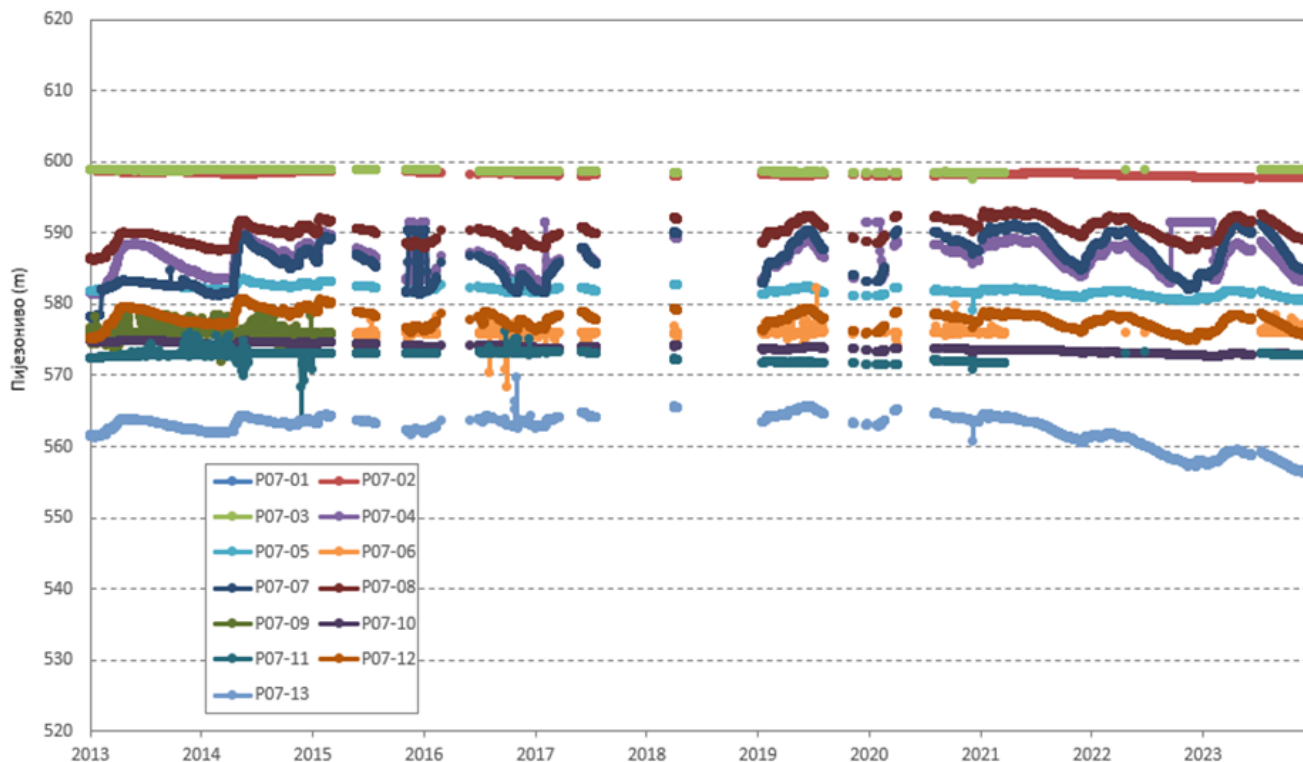
Порне ћелије су уграђене приближно на следећим котама:

- Кота 600 м: 3 ћелије (P01, P02, P03),
- Кота 580 м: 3 ћелије (P04, P05, P06),
- Кота 567 м: 5 ћелија (P07, P08, P09, P10, P11),
- Темелј бране: 2 ћелије (P12, P13).



Слика 6.44 Распоред порних и тоталних ћелија у пресеку 7-7

На ћелији P07-01 нема мерења још од 2009. године. На осталим ћелијама постоје резултати мерења, али од 2015. године нема података мерења за ћелију P07-09. Ово значи да се од 13 уграђених ћелија подаци мерења добијају на 11 ћелија.



Слика 6.45 Порни притисци у попречном пресеку 7-7

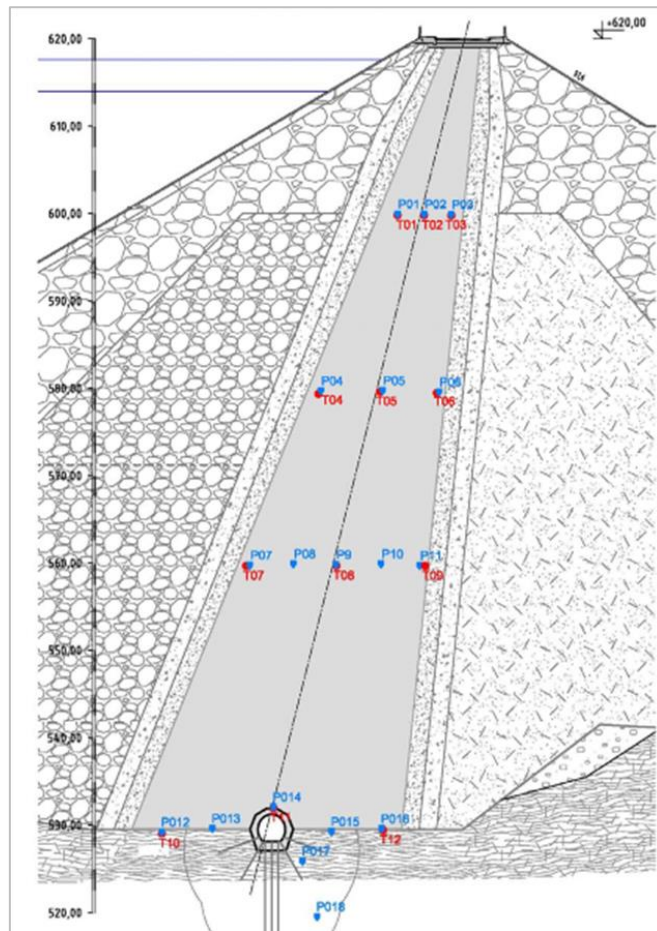
Као што се са претходног дијаграма може видети, у периоду 2013-2023 не постоје сви подаци мерења у континуитету. На пример, за цео период 2017-2018 постоји само неколико краћих секвенци мерења, иако би ова мерења морала да имају податке за сваки дан. За скорашњи период 2021-2023, може се сматрати да постоје подаци у континуитету за 8 ћелија, мада и то није апсолутно, будући да има краћих периода без података.

#### Порни притисци у пресеку 11-11

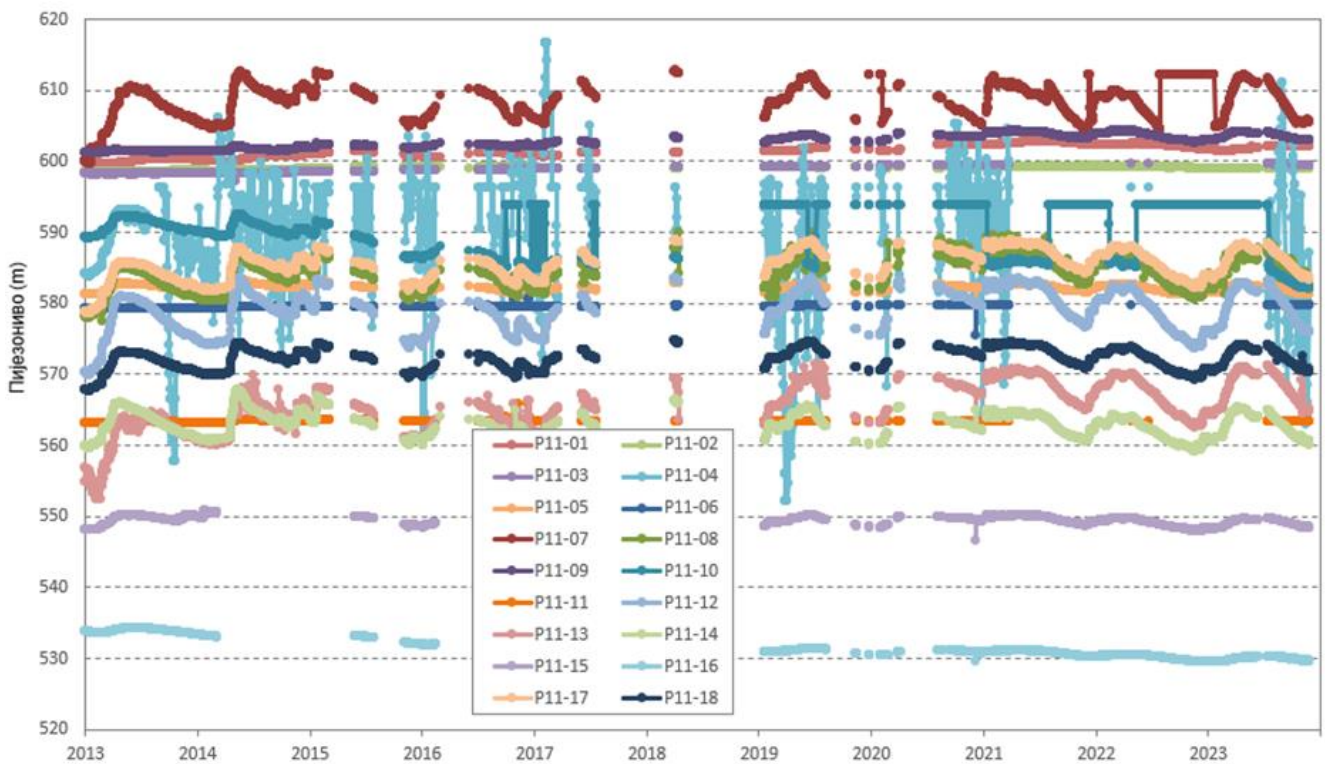
За мерење порних притисака у овом пресеку уграђено је 18 порних ћелија [60].

Ћелије су уграђене приближно на следећим котама:

- Кота 600 m: 3 ћелије (P01, P02, P03),
- Кота 580 m: 3 ћелије (P04, P05, P06),
- Кота 560 m: 5 ћелија (P07, P08, P09, P10, P11),
- Кота 530 m: 5 ћелија (P12, P13, P14, P15, P16),
- Темелј бране: 2 ћелије (P17, P18).



Слика 6.46 Распоред порних и тоталних ћелија у пресеку 11-11 [60]



Слика 6.47 Порни притисци у попречном пресеку 11-11 [60]

Као што се са претходног дијаграма може видети, у периоду 2013-2023 не постоје сви подаци мерења у континуитету. На пример, за цео период 2017-2018 постоји само неколико краћих секвенци мерења, иако би ова мерења морала да имају податке за сваки дан. За скорашњи



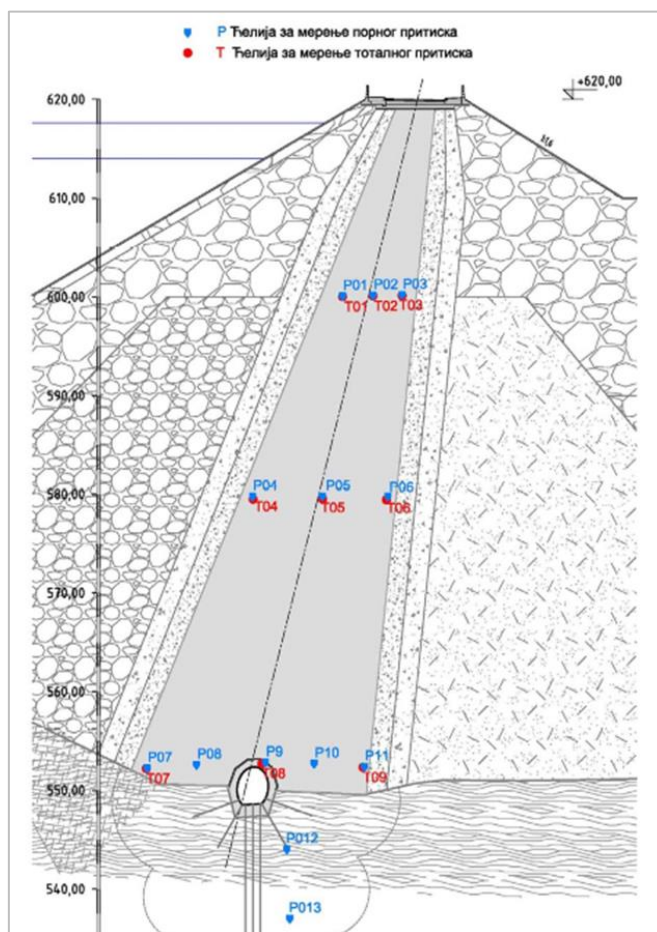
период 2021-2023, може се сматрати да постоје подаци у континуитету за 14 ћелија, мада и то није апсолутно, будући да има краћих периода без података, као и периода у којима су подаци константни, без икакве промене.

### Порни притисци у пресеку 16-16

За мерење порних притисака у овом пресеку уграђено је 13 порних ћелија [60].

Ћелије су уграђене приближно на следећим котама:

- Кота 600 m: 3 ћелије (P01, P02, P03),
- Кота 580 m: 3 ћелије (P04, P05, P06),
- Кота 553 m: 5 ћелија (P07, P08, P09, P10, P11),
- Темелј бране: 2 ћелије (P12, P13).

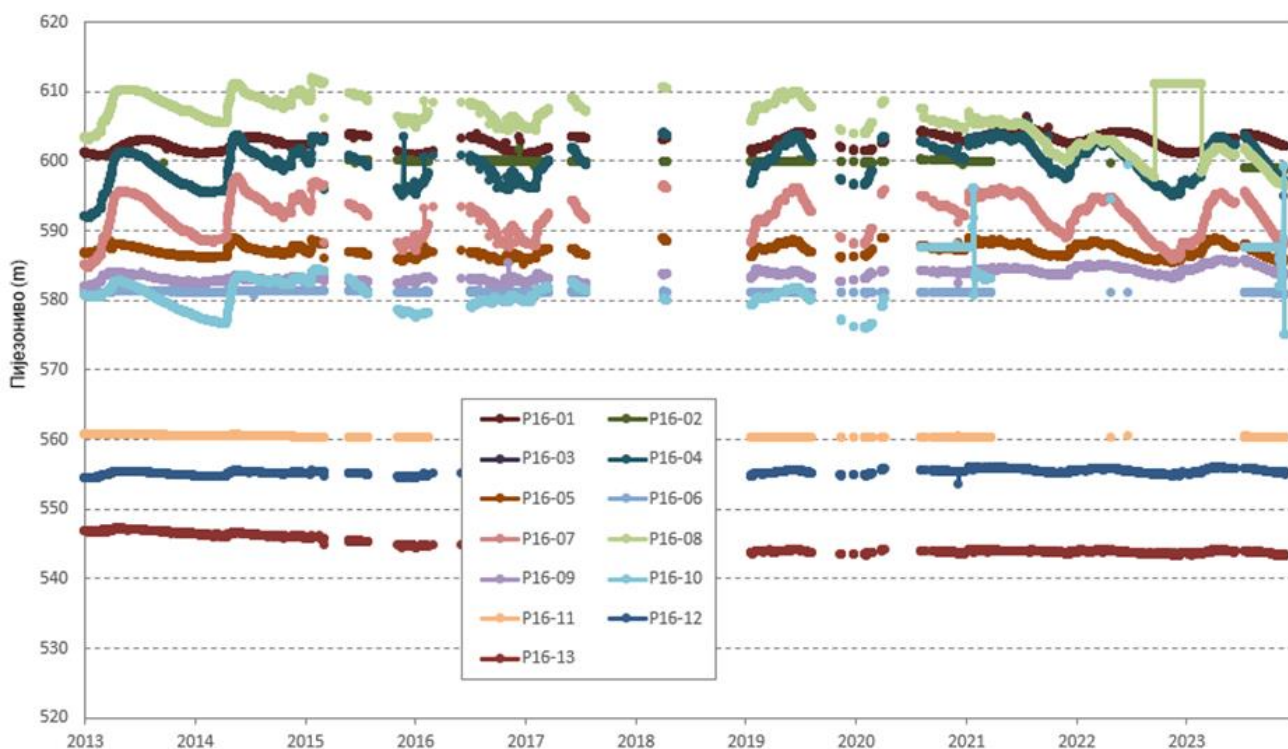


**Слика 6.48** Распоред порних и тоталних ћелија у пресеку 16-16 [60]

На ћелији P16-03 не постоје очитана мерења.

Као што се са следећег дијаграма може видети, у периоду 2013-2023 не постоје сви подаци мерења у континуитету. Исто као и у другим пресецима, за цео период 2017-2018 постоји само неколико података мерења, иако би ова мерења морала да имају податке за сваки дан.

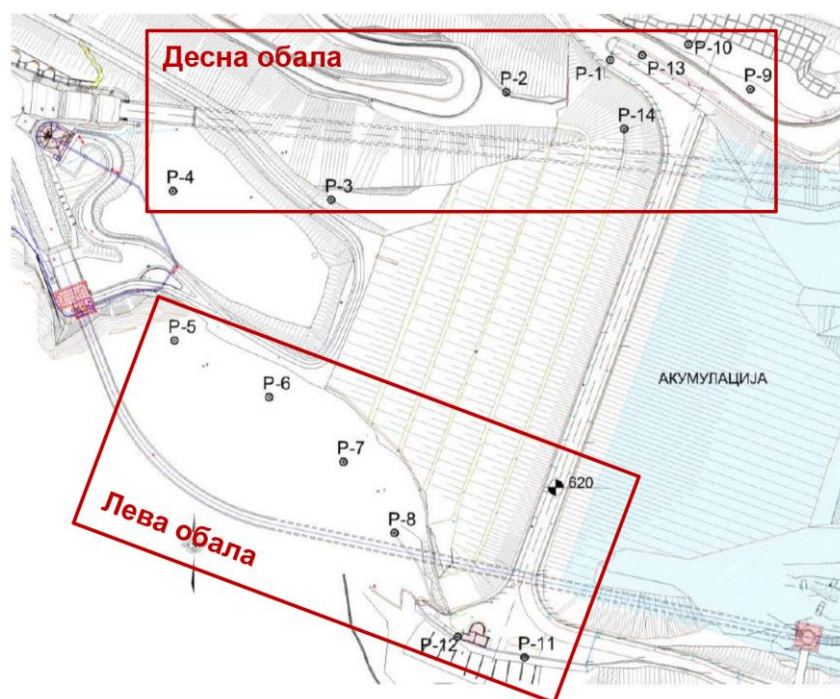
За скорашњи период 2021-2023, може се сматрати да постоје подаци у континуитету за 8 ћелија, мада и код њих има краћих периода без података.



Слика 6.49 Порни притисци у попречном пресеку 16-16 [60]

### Ниво подземне воде у терену уз брану

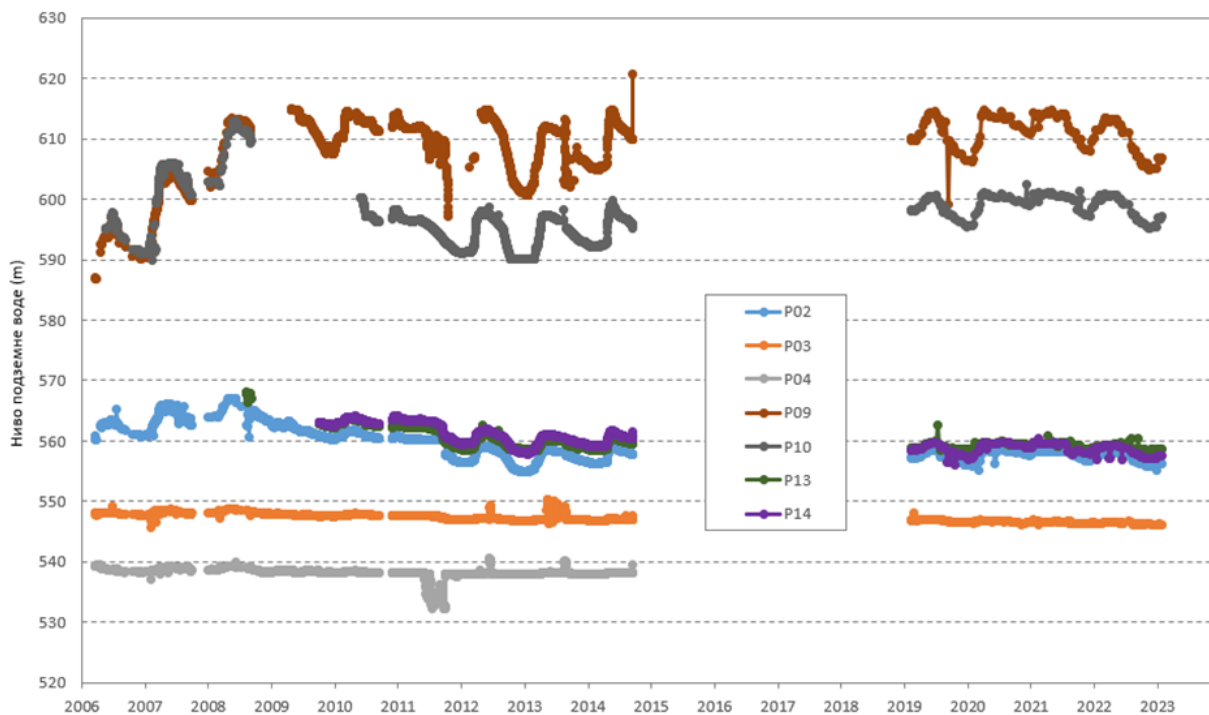
Ниво подземне воде у терену око бране мери се на пијезометрима који су уграђени на 14 мерних места. Пијезометарске конструкције су стандардне са слободним нивоом воде. Пијезометар Р-1 није у функцији јер је преко њега изведен коловоз. Мерење нивоа воде у цевима пијезометарских конструкција се врши континуално, аутоматски преко електричних пијезометарских сонди које су уграђене у цеви. Контролна периодична мерења нивоа у пијезометрима се обављају мерном пантљиком са пиштаљком.



Слика 6.50 Пијезометри на левој и десној обали

### Пијезометри на десној обали

На десној обали налазе се пијезометри: P-1, P-2, P-3, P-4, P-9, P-10, P-13, P-14.

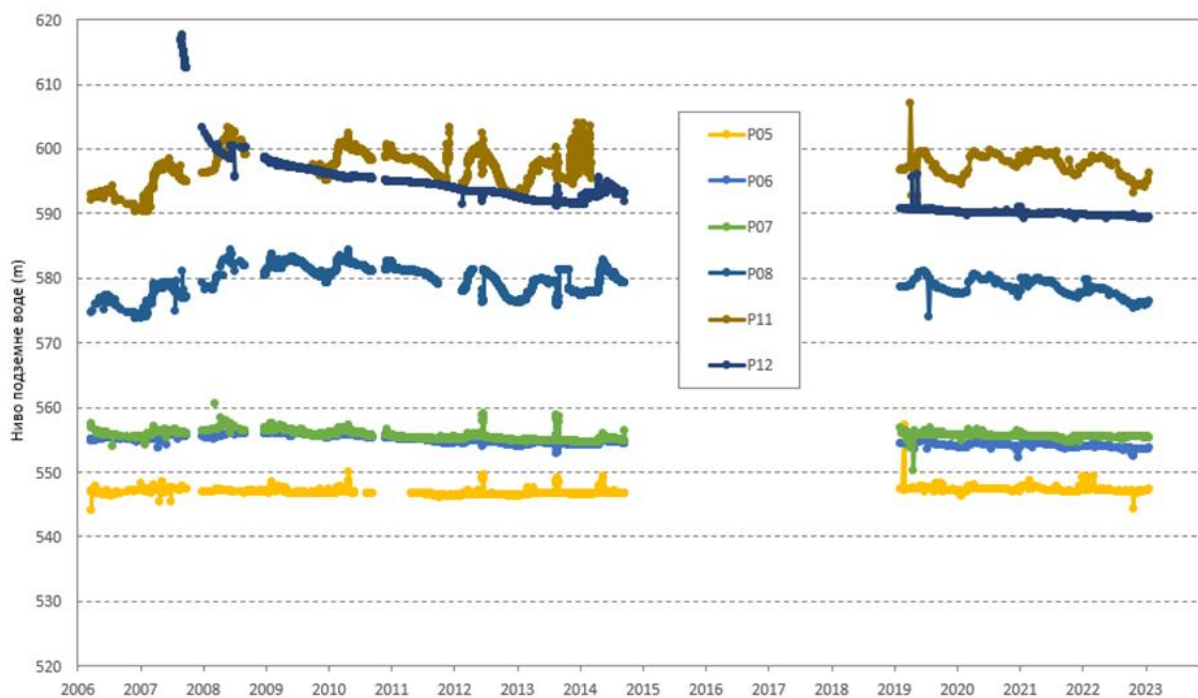


Слика 6.51 Ниво подземне воде у пијезометрима на десној обали [60]

Као што се са горњег дијаграма може видети, у периоду 2013-2023. не постоје сви подаци мерења. Практично, скоро цео период 2015-2018 је без података. Подаци у континуитету постоје за период од фебруара 2019. до јануара 2023. године.

### Пијезометри на левој обали

На левој обали налазе се пијезометри: P-5, P-6, P-7, P-8, P-11, P-12.



Слика 6.52 Ниво подземне воде у пијезометрима на десној обали [60]

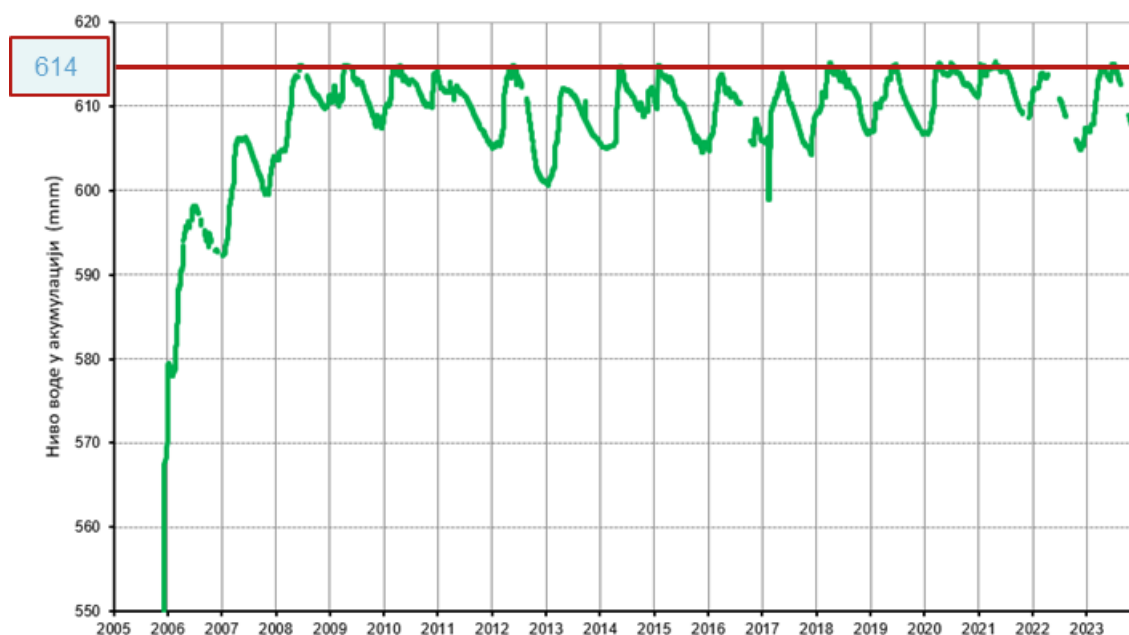
Исто као и код пијезометара на десној обали, у периоду 2013-2023 ни код пијезометара на левој обали, не постоје сви подаци мерења. Практично, скоро цео период 2015-2018 је без података. Подаци у континуитету постоје за период од фебруара 2019. до јануара 2023.

### 6.7.2 Варијабилност података осматрања

Ово поглавље приказује анализу варијабилности података осматрања на брани Првонек током сценарија преливања, у складу са постављеним задатком у овој студији случаја.

#### Меродавни подаци за задати проблем

Анализа је спроведена за оне периоде када је ниво воде у акумулацији био изнад коте круне прелива (614 мм), према осмотреним подацима који се односе на ниво воде у резервоару.



Слика 6.53 Идентификација референтних периода осматрања

У посматраном периоду идентификовано је укупно 9 таквих епизода преливања (периоди великих вода), при чему је свака епизода продужена за додатних 30 дана након престанка преливања како би се обухватио ефекат могућег кашњења одговора конструкције бране на флукуације нивоа воде у резервоару.

Табела 6-5 Референтни периоди за анализу података осматрања

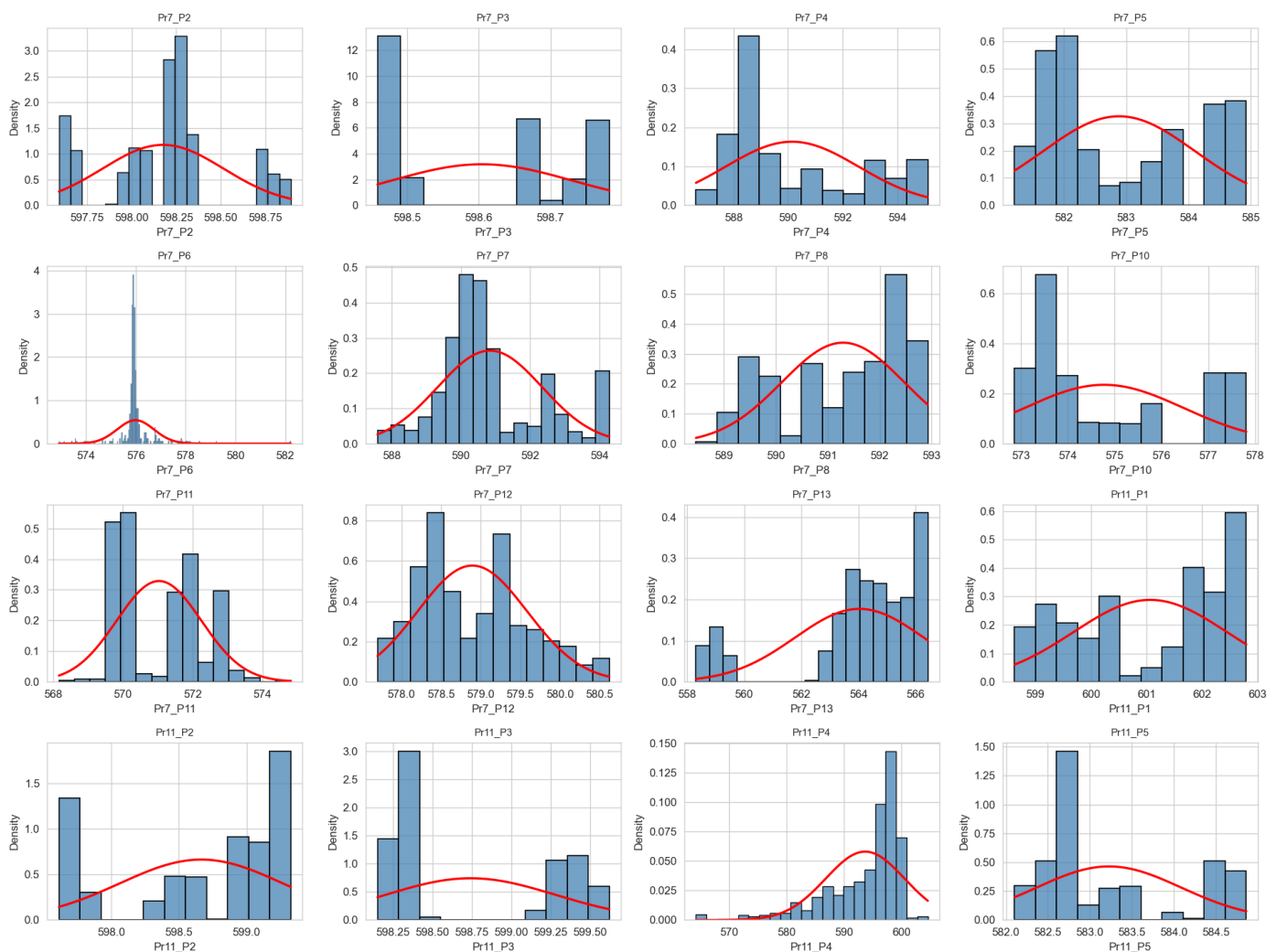
	Почетак преливања	Крај преливања	Дужина епизоде	Крај референтног периода осматрања
1	02.04.2009.	04.06.2009.	63	04.07.2009.
2	26.02.2010.	30.04.2010.	63	30.05.2010.
3	21.04.2012.	08.06.2012.	48	08.07.2012.
4	07.05.2014.	01.06.2014.	25	01.07.2014.
5	14.03.2018.	28.05.2018.	75	28.06.2018.
6	17.05.2019.	03.07.2019.	47	03.08.2019.
7	16.03.2020.	03.05.2020.	48	03.06.2020.
8	11.01.2021.	14.07.2021.	184	14.08.2021.
9	05.04.2023.	23.07.2023.	109	23.08.2023.

## Моделирање статистичких расподела података осматрања

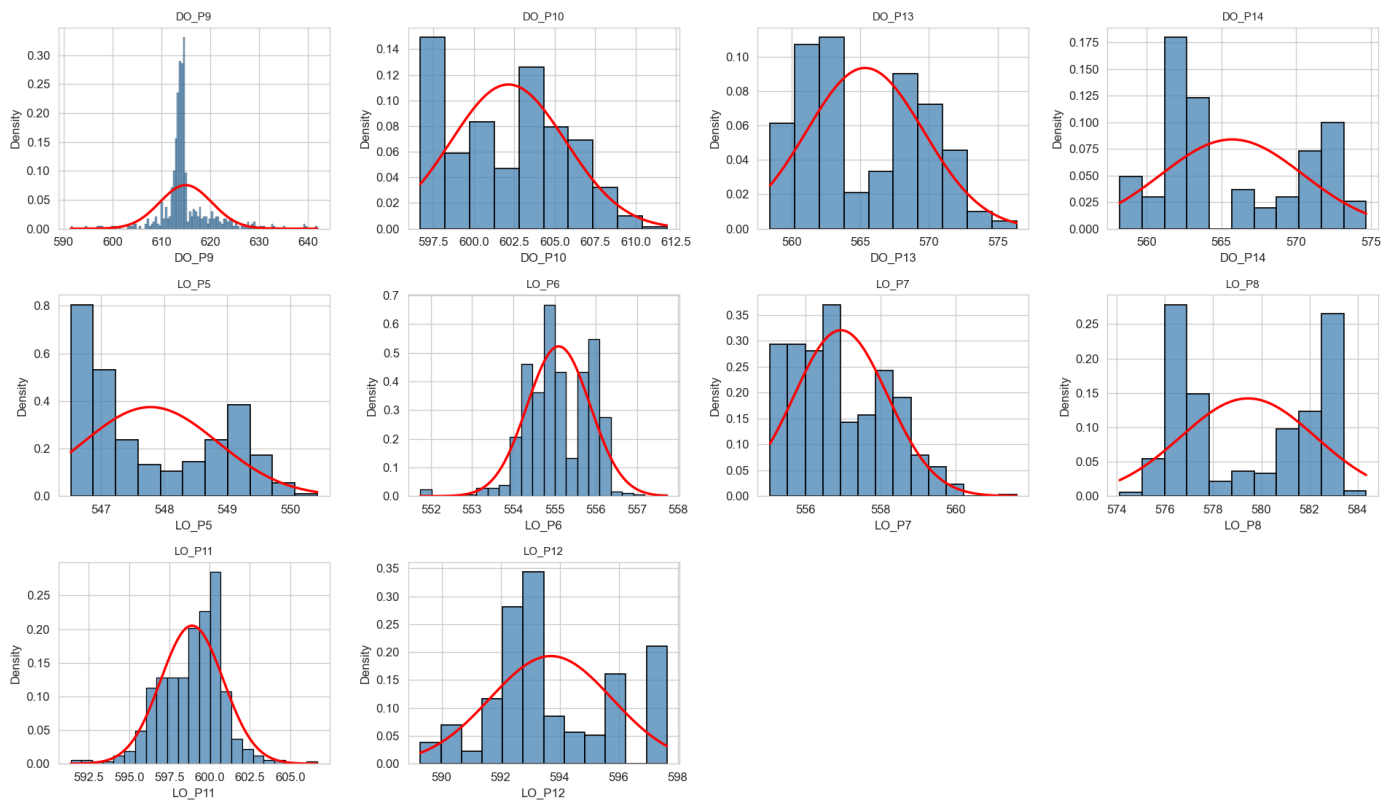
За све мерне инструменте који су разматрани, конструисани су хистограми измерених вредности, на основу којих је извршено прилагођавање нормалне расподеле подацима. Другим речима, за сваки сет података одређени су параметри нормалне расподеле (средња вредност и стандардна девијација) који најбоље описују облик добијеног хистограма. Овако добијене функције расподеле пружају квантитативан увид у варијабилност података осматрања.

Нормална расподела је усвојена као одговарајући модел због неколико практичних разлога: (i) она је једноставна за параметризацију, јер је довољно одредити само средњу вредност и стандардну девијацију датог низа података; (ii) нормална расподела је широко заступљена у инжењерској пракси при моделовању стохастичких варијабли, што олакшава интерпретацију и поређење резултата; (iii) у већини случајева ова расподела пружа довољно добру апроксимацију емпиријски добијених расподела података, те се може сматрати оправданим избором у контексту анализе сигурности бране са ограниченим скупом података осматрања. Python код којим је извршено моделирање статистичких расподела података осматрања приложен је у Анексу 3.

На следећој слици приказани су хистограми података осматрања за сва мерна места, као и функције нормалних расподела које су им придружене и коришћене за имплементацију података осматрања у пробабилистичку анализу.





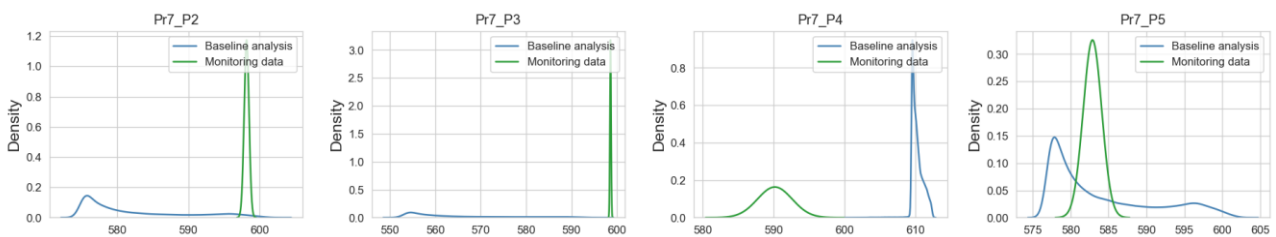


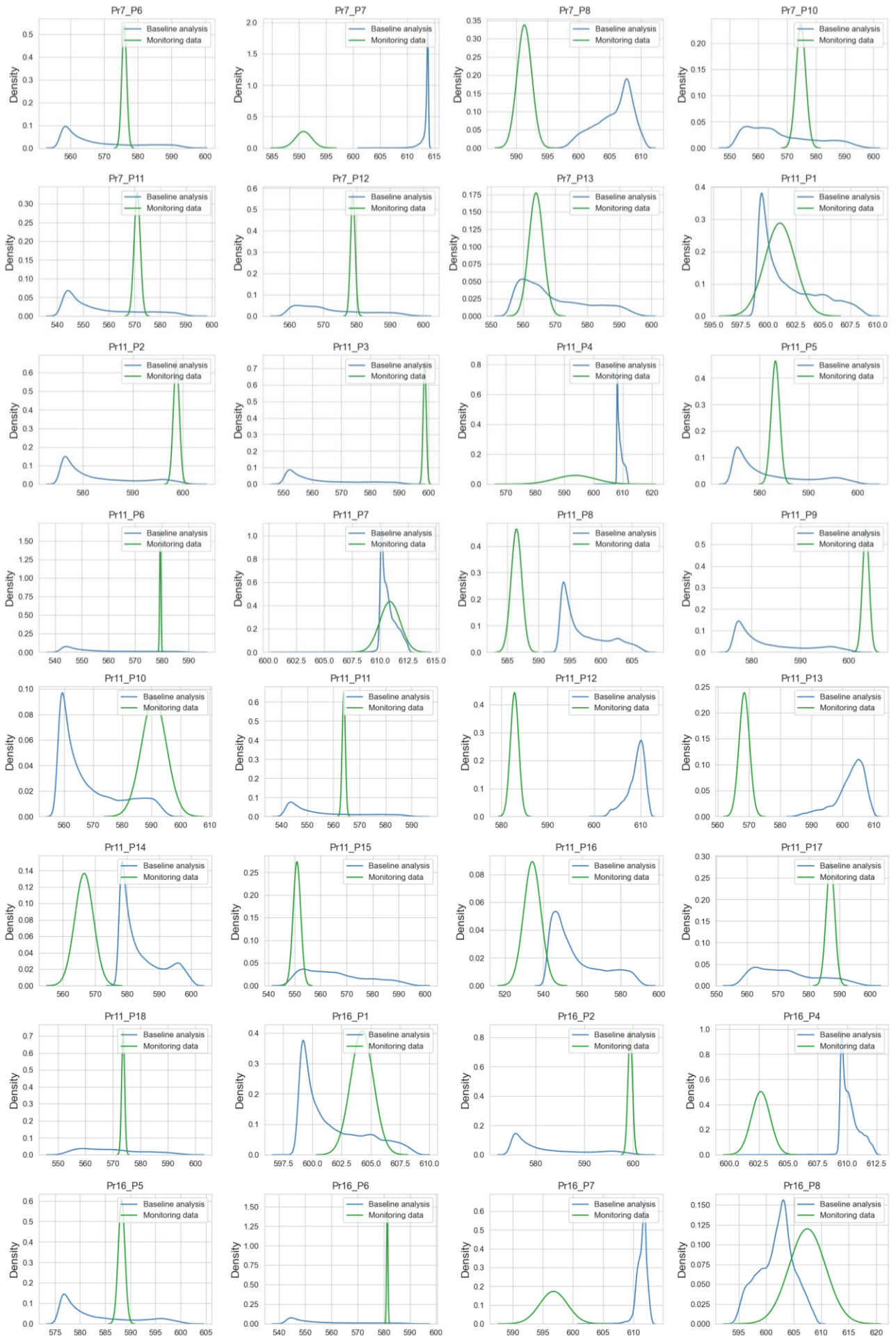
Слика 6.54 Хистограми податка осматрања и функције густине вероватноће (PDF) усвојене за свако мерно место (нормалне расподеле)

**Селекција инструмената (података осматрања) за пробабилистичку анализу**

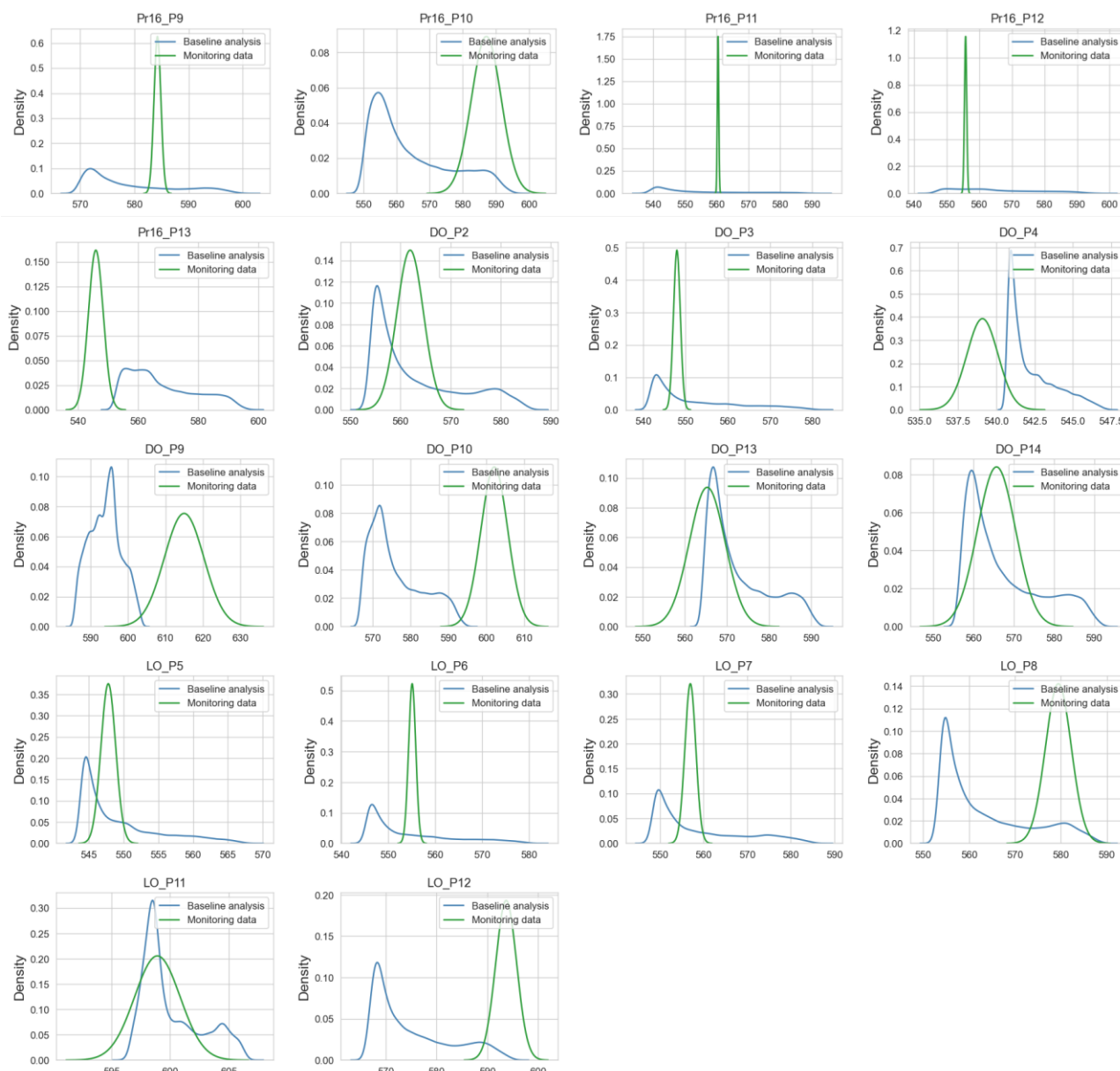
Иако је систем мониторинга бране обухватао велики број мерних места, реална поузданост сваког инструмента варира. Одређени број инструмената бележи непоуздана или нефизичка читавања – најчешће се издвајају инструменти који се налазе у сувом делу језгра (изнад пијезометарске линије) и константно читавају сопствену висинску координату. Очекивано је да се одређени број података одбаци услед грешака при мерењу и то је један од разлога што се поставља велики број инструмената у конструкцију. Стога су пре спровођења пондерисане пробабилистичке анализе извршене детаљне ревизије свих серија података:

- Визуелна верификација трендова и упоредни преглед са суседним инструментима
- Логичка контрола минималних и максималних читавања у односу на конструктивну висинску коту и граничне услове,
- Поређење опсега вредности података осматрања са израчунатим опсезима резултата базе пробабилистичке анализе. Ова провера је важна за нумеричку стабилност резултата пондерисане пробабилистичке анализе, у складу са закључцима датим у поглављу 4.2.









Слика 6.55 Поређење опсега резултата базне пробабилистичке анализе и података осматрања

Након визуелне ревизије извршене су и додатне нумеричке провере: искључивање инструмената са премало важних читавања у издвојеним периодима преливања, као и искључивање серија са изузетно малом стандардном девијацијом.

Одлучено је да инструменти наведени у наредној табели буду укључени у пондерисану пробабилистичку анализу, тако да коначни скуп валидних података обухвата тачно 21 инструмент.

Табела 6-6 Списак инструмената – они који су прошли селекцију за пондерисану пробабилистичку анализу (зелена боја) и остали (црвена)

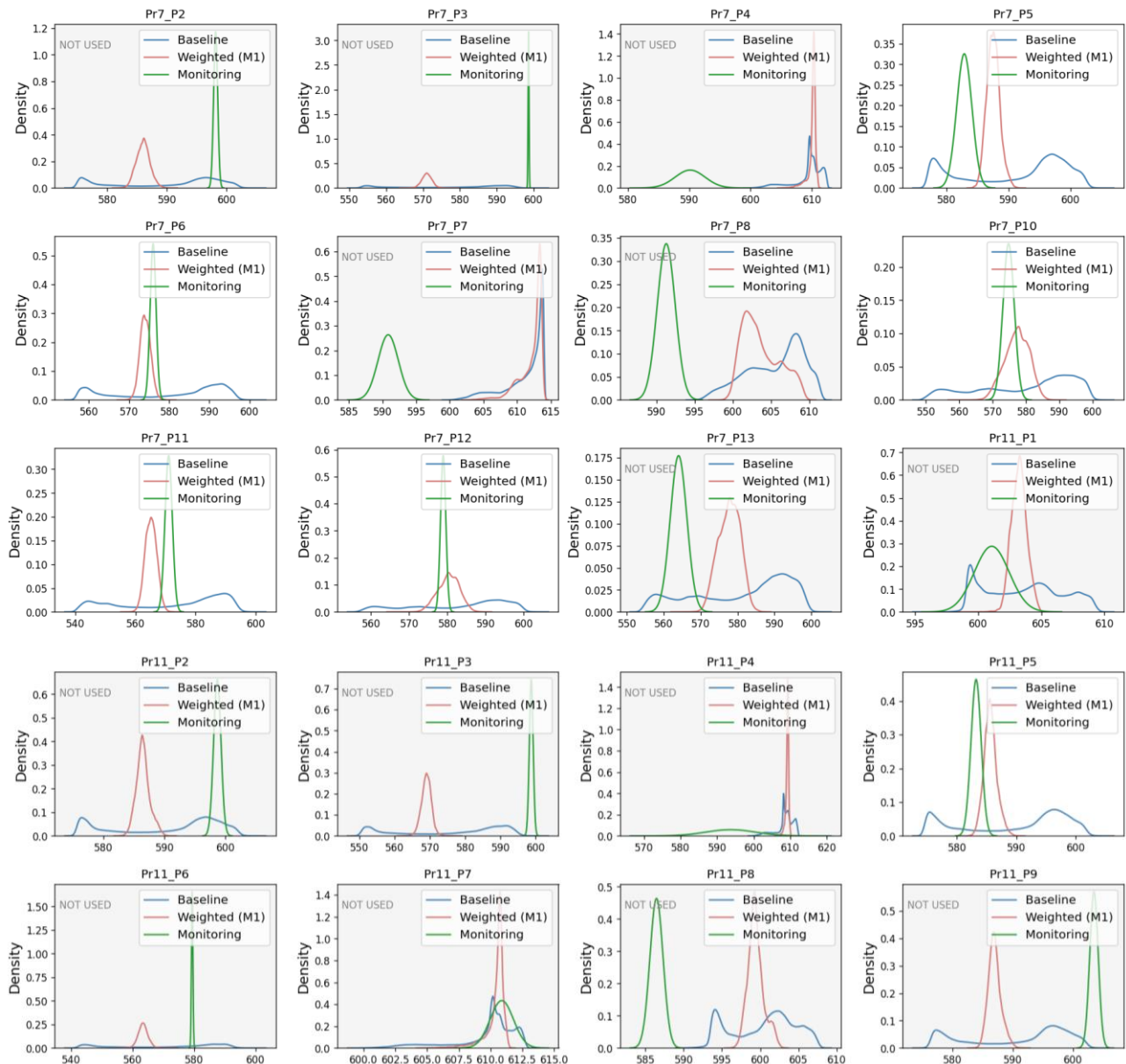
Pr7_P2	Pr7_P3	Pr7_P4	Pr7_P5	Pr7_P6	Pr7_P7	Pr7_P8	Pr7_P10	Pr7_P11
Pr7_P12	Pr7_P13	Pr11_P1	Pr11_P2	Pr11_P3	Pr11_P4	Pr11_P5	Pr11_P6	Pr11_P7
Pr11_P8	Pr11_P9	Pr11_P10	Pr11_P11	Pr11_P12	Pr11_P13	Pr11_P14	Pr11_P15	Pr11_P16
Pr11_P17	Pr11_P18	Pr16_P1	Pr16_P2	Pr16_P4	Pr16_P5	Pr16_P6	Pr16_P7	Pr16_P8
Pr16_P9	Pr16_P10	Pr16_P11	Pr16_P12	Pr16_P13	DO_P2	DO_P3	DO_P4	DO_P9
DO_P10	DO_P13	DO_P14	LO_P5	LO_P6	LO_P7	LO_P8	LO_P11	LO_P12

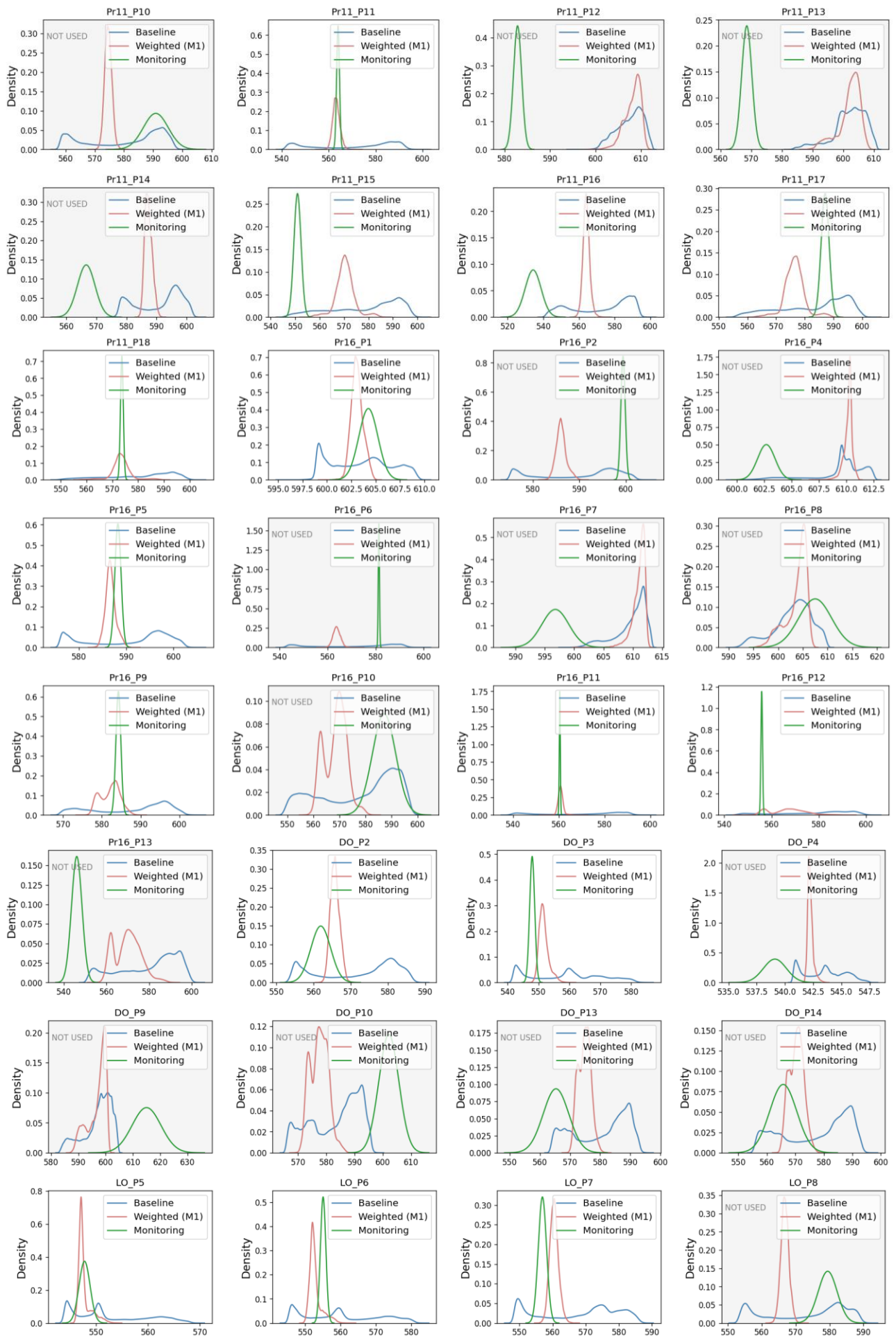
Ове расподеле су интегрисане у пондерисану Монте Карло анализу према методологији из поглавља 4, чиме се обезбеђује да резултати пробабилистичког прорачуна одражавају стварно (осмотрено) стање бране.

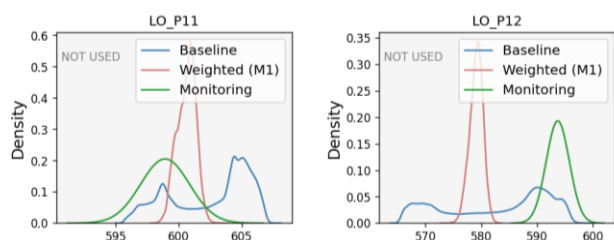
## 6.8 Анализа сигурности бране уз интеграцију података осматрања

Према методологији описаној у поглављу 4, спроведена је пондерисана пробабилистичка анализа сигурности (конкретно стабилности косина) насуте бране Првонек. У овој анализи примењен је исти мета-модел (сурогат модел) калибрисан у поглављу 6.4, уз коришћење свих претходно дефинисаних прорачунских параметара (поглавље 6.2.3). Монте Карло анализа реализована је у програмском језику Python са  $N=10^7$  симулација. Пондерисање резултата симулација извршено је на основу интеграције података осматрања – применом тежинских коефицијената заснованих на нормалним расподелама измерених величина (видети поглавље 6.7). Метода која је коришћена као агрегатор парцијалних тежинских коефицијената јесте метода геометријске средине (M1 из поглавља 4.3).

Наредна слика на којој су приказане пондерисане (постериор) расподеле резултата филтрационе анализе, као и поређење са базним расподелама (приор) и расподелама података осматрања илуструје бајезијанску идеју која стоји иза методологије.





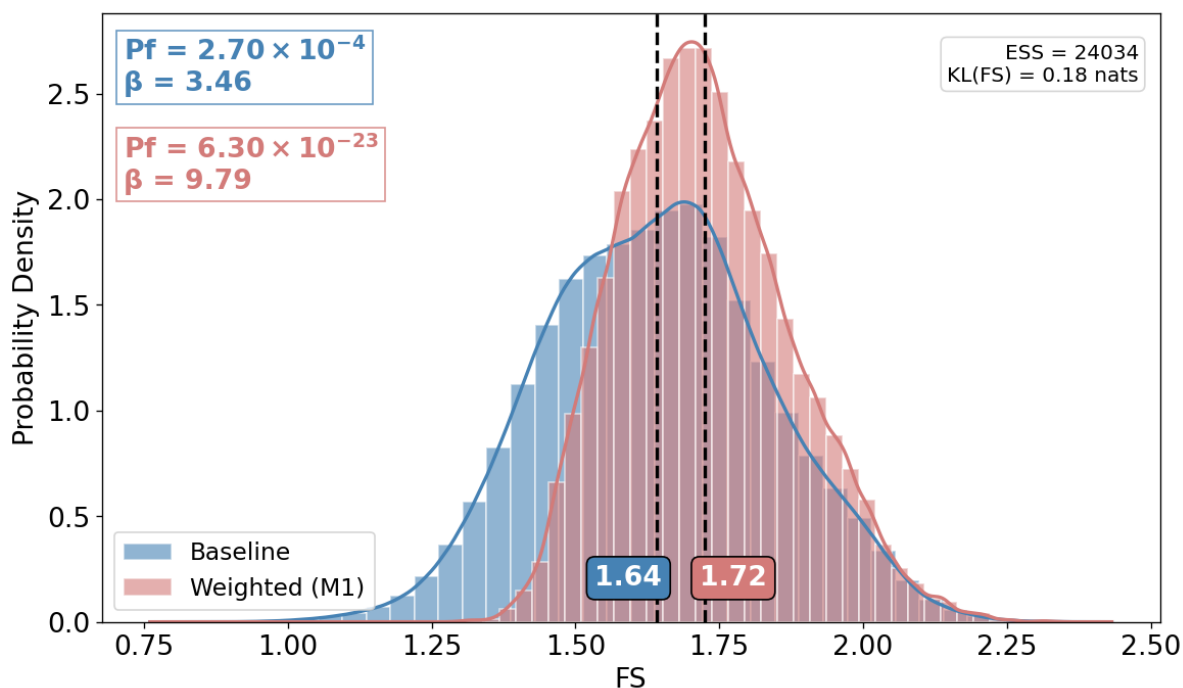


**Слика 6.56** Поређење опсега резултата пондерисане (црвена линија), базне (плава линија) пробабилистичке анализе и података осматрања (зелена линија)

Анализиране су две засебне пробабилистичке анализе. Прва је комплетна пробабилистичка анализа у којој су истовремено варирани сви улазни параметри модела дефинисани у поглављу 6.2.2 (и филтрациони параметри и параметри чврстоће материјала). Друга је парцијална анализа у којој су варирани само параметри филтрације, док су параметри чврстоће држани константним на нивоу својих средњих вредности дефинисаних у поглављу 6.2.3 (ова варијанта је одабрана како би се изоловало дејство оних параметара који су директно повезани са подацима осматрања – пијезонивоима у телу бране и боковима).

### 6.8.1 Комплетна пробабилистичка анализа

На следећој слици (Python код приложен у Анексу 3) приказано је поређење расподела фактора сигурности (FS) бране за пробабилистичку анализу са варирањем свих параметара: базна анализа (плава крива) насупротив пондерисаној анализи (црвена крива). Ефективни број узорака у пондерисаној анализи је већи од 24 хиљаде.



**Слика 6.57** Поређење густина вероватноће фактора сигурности FS пондерисане (црвена линија) и базне (плава линија) комплетне пробабилистичке анализе

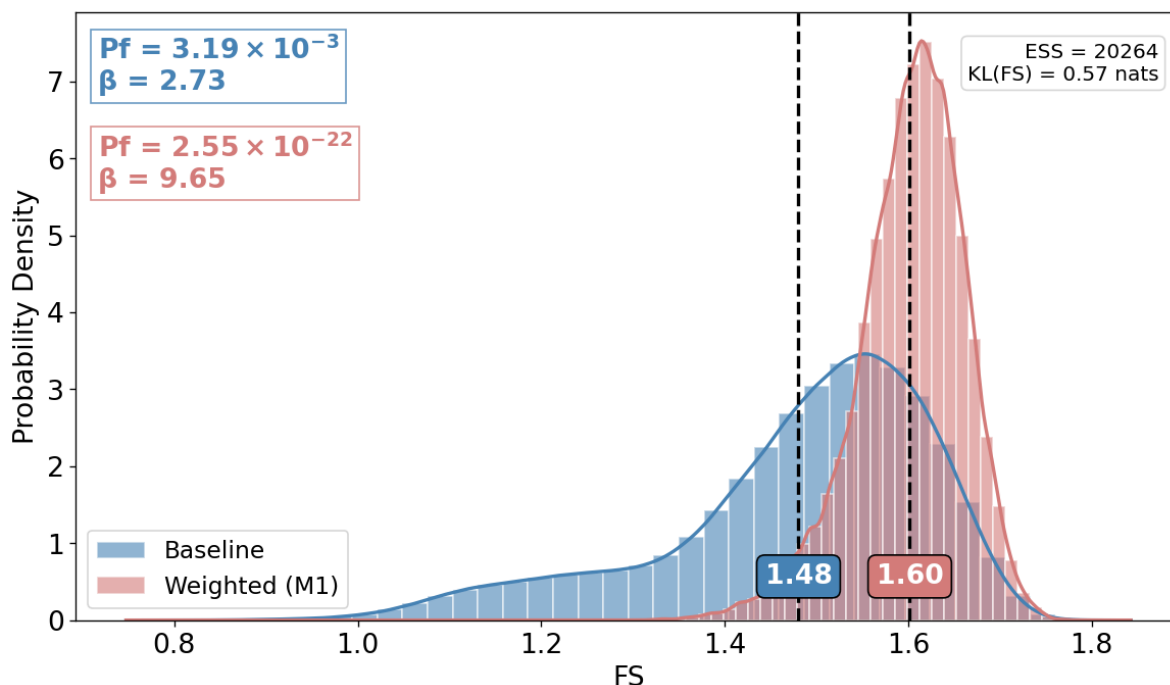
Уочава се да базна расподела има нешто шири распон – вредности FS су углавном концентрисане око средње вредности  $\mu_{FS} = 1,64$ , али са значајном дисперзијом (постоји продор ка нижим вредностима испод 1,3). Насупрот томе, пондерисана расподела фактора сигурности је ужег облика (смањена стандардна девијација) и њен главни максимум је померен ка нешто вишој вредности. KL дивергенција једнака 0,18 nats указује на умерен интензитет ажурирања. Доминирајуће вредности фактора сигурности у пондерисаном случају су центриране око  $\mu_{FS} = 1,72$ , при чему је вероватноћа појаве изразито ниских вредности FS знатно умањена у

односу на базну анализу. Ово имплицира да интегрисање података осматрања редукује неизвесност у моделу: сузбијају се екстремне комбинације улазних параметара које нису конзистентне са стварним понашањем бране, чиме се расподела исхода сужава и центрира ка вероватнијим (повољнијим) вредностима фактора сигурности.

Извршена је и квантитативна процена вероватноће лома и индекса поузданости конструкције, ради поређења резултата базног и ажурираног приступа са инжењерским критеријумима поузданости које предлаже Еврокод [33]. Вероватноћа лома бране дефинисана је као вероватноћа да фактор сигурности падне испод 1,0 ( $FS < 1$  означава губитак глобалне стабилности – достизање граничног стања носивости). Базна анализа дала је процену вероватноће лома  $P_f \approx 2,7 \times 10^{-4}$  (око 0,03%), што одговара индексу поузданости  $\beta \approx 3,5$ . Овако добијене вредности су испод захтеваног нивоа поузданости за бране, јер за конструкције класе поузданости RC3 Еврокод препоручује  $\beta \approx 4,3$  (референтни период 50 година, Табела 2-2). С друге стране, пондерисана анализа показује готово занемарљиву вероватноћу лома: процењено је  $P_f \approx 6,5 \times 10^{-23}$  (практично нула у оквиру  $10^7$  симулираних сценарија), што одговара индексу поузданости од око  $\beta \approx 9,8$ . Овако висока вредност  $\beta$  далеко превазилази тражени минимум за класу RC3 и указује на изузетно мали ризик од отказа конструкције када се у прорачун укључе информације које потичу од осматрања бране.

### 6.8.2 Пробабилитичка анализа која укључује само варијабилност филтрационих параметара

Наредна слика (Python код приложен у Анексу 3) илуструје резултате анализе у којој су варирани само филтрациони параметри (коэффициенти водопрпусности), док су параметри чврстоће фиксирани. Плава крива представља расподелу фактора сигурности за случај базне анализе, а црвена крива након пондерисања на основу података осматрања. Ефективни број узорака у пондерисаној анализи је већи од 20 хиљада.



Слика 6.58 Поређење резултата процене сигурности примерном пондерисане (црвена линија) и базне (плава линија) парцијалне пробабилитичке анализе

Видљиво је да базна расподела има дугачак реп на левој страни, који је последица лог-нормалне расподеле улазних параметара филтрационе анализе. Резултати унутар репа одговарају неповољнијој филтрационој слици у телу бране (нпр. висок ниво воде у низводној ножици услед мале водопрпусности вештачког терена низводно од бране, што доводи до

смањене стабилности) која не одговара ономе што подаци осматрања осликавају. Након укључивања података осматрања у анализу, ажурирана расподела фактора сигурности значајно смањује реп на левој страни и помера средњу вредност расподеле ( $\mu_{FS} = 1,48$  у базној анализи) према вишим вредностима фактора сигурности ( $\mu_{FS} = 1,60$ ).

Ажурирање је значајно веће од оног у комплетној пробабилистичкој анализи (вредност KL дивергенције износи 0,57 nats наспрам 0,18 nats комплетној анализи). Симулације које су давале екстремно неповољну филтрациону слику добиле су занемарљиве тежине јер значајно одступају од податка осматрања, па је вероватноћа исхода са врло ниским FS сведена на минималан ниво. Истовремено, маса расподеле се концентрисала око виших вредности FS, што одражава мању варијабилност резултата. Укратко, утицај пондерисања у овој варијанти је још наглашенији него у комплетној пробабилистичкој анализи: средња вредност FS је повећана (померање ка десно), а стандардна девијација смањена, чиме је поузданије обухваћен стварни домен понашања бране који одговара подацима осматрања.

Базна (непондерисана) анализа дала је процену вероватноће лома  $Pf \approx 3 \times 10^{-3}$  (око 0,3%), што одговара индексу поузданости  $\beta \approx 2,7$ . Овако добијене вредности су знатно испод захтеваног нивоа поузданости за бране (за конструкције класе поузданости RC3 Еврокод препоручује  $\beta_{min} \approx 4,3$ ). С друге стране, пондерисана анализа показује готово занемарљиву вероватноћу лома: процењено је  $Pf \approx 2,5 \times 10^{-22}$ , што одговара индексу поузданости од око  $\beta \approx 9,7$ . Овако висока вредност  $\beta$  далеко преазилази тражени минимум за класу RC3 и указује на изузетно мали ризик од отказа конструкције када се у прорачун укључе информације које потичу од осматрања бране.

Добијени резултати јасно указују да примена пондерисане пробабилистичке анализе пружа потпуно другачију и реалистичнију слику сигурности бране у односу на базну анализу. Интеграцијом података осматрања смањује се почетна неизвесност модела – расподеле одговора конструкције постају уже и боље усредсређене око највероватнијих вредности, елиминишући при томе нереалистично екстремне сценарије које би прорачун који не узима у обзир податке осматрања могао дати. У случају бране Првонек, пондерисана анализа је показала да конструкција поседује висок ниво поузданости (већи него што је иницијално сугерисано применом базне анализе), што је у сагласности са дугогодишњим стабилним понашањем бране забележеним кроз осматрање. Стога се може закључити да укључивање резултата мониторинга у пробабилистичке прорачуне обезбеђује поузданију и информативнију оцену сигурности насуте бране, чиме се унапређује процена ризика и доношење одлука у вези са експлоатацијом и одржавањем оваквих објеката.

## 6.9 Утицај избора агрегатора тежинских коефицијената на резултате и конвергенцију прорачуна

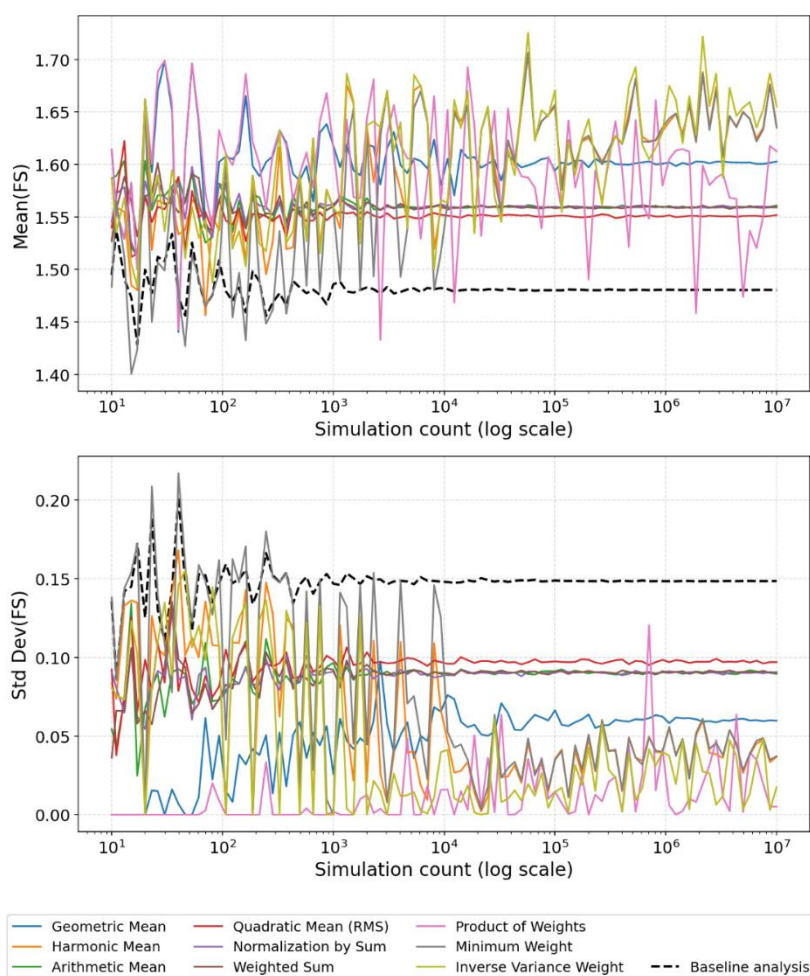
Један од кључних корака у предложеној методологији за имплементацију података осматрања у пробабилистичку анализу је одређивање укупног тежинског коефицијента за сваку симулацију, што се постиже применом функције агрегатора којом се комбинују парцијални тежински коефицијенти добијени за различите скупове посматраних података. У поглављу 4.3 дефинисано је девет различитих функција агрегатора (означених M1–M9) које представљају предложене начине израчунавања укупне тежине симулације на основу више парцијалних тежина. У овом поглављу анализира се утицај избора агрегатора тежинских коефицијената на добијене резултате пондерисане анализе и на брзину њихове конвергенције. У оквиру поглавља 6.8 је већ приказан резултат ажуриране пробабилистичке анализе са агрегатором геометријске средине (M1).

Девет предложених агрегатора представљају спектар различитих приступа комбиновању тежинских коефицијената. Агрегатори засновани на адицији (M3–M6) дају могућност да симулација која једним делом не одговара осматраним подацима ипак задржи велики утицај

на резултате кроз друге парцијалне тежине. Насупрот њима, агрегатори попут производа, хармонијске средине или минималне вредности (M2, M7, M8, M9) веома оштро кажњавају сваку неповољност – ако симулација у било којем погледу одступа од посматрања, њен укупни тежински коефицијент постаје изузетно мали.

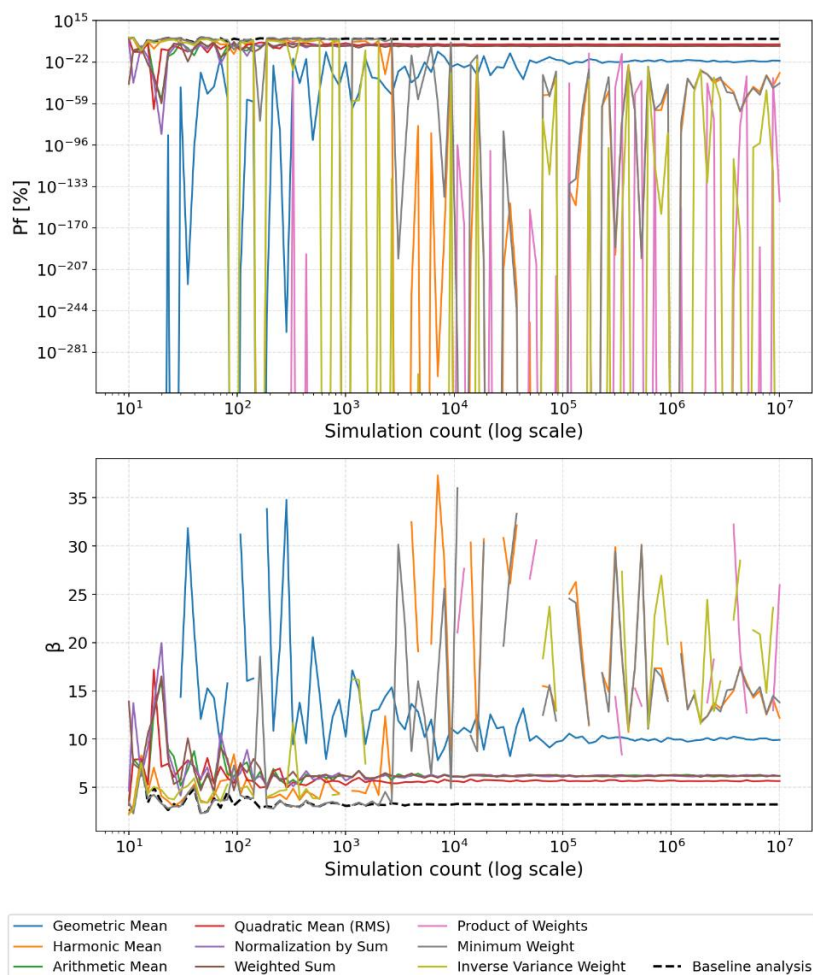
Да би се утврдило колико је симулација потребно за нумеричку стабилност прорачуна, испитана је конвергенција средње вредности и стандардне девијације FS, као и вероватноће лома  $P_f$  и индекса поузданости  $\beta$  за базну и пондерисану анализу. Процена је извршена тако што је обављено 100 додатних потпуних Монте Карло анализа са величинама узорака логаритамски распоређеним у интервалу од 1 до  $10^7$ , након чега су  $\mu_{FS}$ ,  $\sigma_{FS}$ ,  $P_f$ ,  $\beta$ , ESS и KL приказани у функцији броја прорачунских симулација. Компјутерски код написан у програму Python приложен је у Анексу 3.

Добијени резултати јасно показују да избор агрегатора утиче на брзину конвергенције пондерисане анализе, али и на утицај података осматрања на ажурирање решења базне анализе. Базна анализа остварује конвергенцију прорачуна са око  $10^3$  симулација. Стабилну конвергенцију у пондерисаној анализи су остварили агрегатори M1, M3, M4, M5 и M6. Адитивне методе M3-M6 конвергирале су готово једнако брзо као базна анализа већ са око  $N \approx 10^3$  симулација (или између  $10^3$  и  $10^4$ ). Метода M1 захтевала је око  $10^5$  симулација за стабилну конвергенцију свих разматраних резултата. Остале методе агрегације (M7, M2, M8 и M9) нису биле ни близу остварења конвергенције резултата и захтевале би много редова величине више симулација што није рачунски изводљиво у уобичајеним условима. Најближа од поменутих је била метода M8 (минимум) али би и за њену конвергенцију био потребан број симулација већи за неколико редова величине од максималног разматраног.



Слика 6.59 Утицај избора агрегатора на конвергенцију параметара  $\mu_{FS}$  и  $\sigma_{FS}$

Наведени резултати могу се објаснити карактером сваког агрегатора у погледу осетљивости на расподелу тежина. Агрегатори М2, М7, М8 и М9 изразито су осетљиви на екстремно мале тежине парцијалних коефицијената. Уколико симулација има и једну компоненту која озбиљније одступа од података осматрања (нпр. један парцијални коефицијент близу нуле), ове методе ће јој доделити готово нулту укупну тежину, што практично значи да ће велики део генерисаних симулација бити одбачен из пондерисане анализе. Са друге стране, агрегатори М3–М6 (и умерено М1) су толерантнији на појединачна одступања. Последице, далеко већи део узорка задржава одређени утицај.

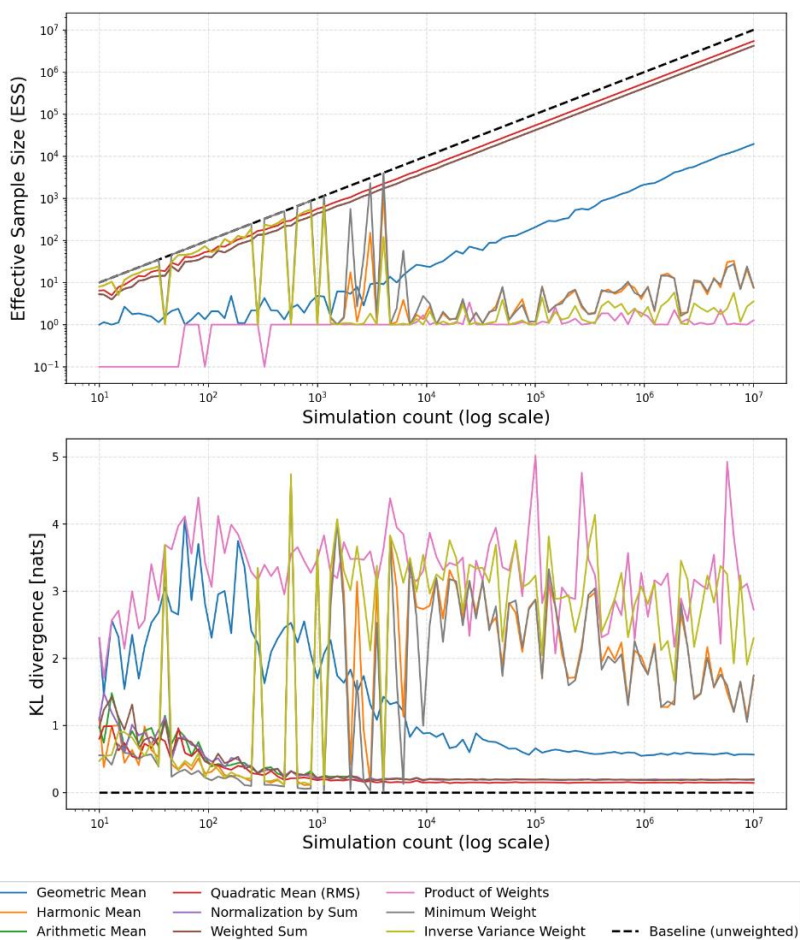


Слика 6.60 Утицај избора агрегатора на конвергенцију параметара  $P_f$  и  $\beta$

Слика 6.60 приказује дијаграме конвергенције параметара  $P_f$  и  $\beta$ , док Слика 6.61 приказује конвергенцију за величине ESS и KL. Сагледавањем резултата може се извући јасан закључак да агрегатор тежинских коефицијената треба бирати сходно жељеном балансу између јачине утицаја података осматрања на ажурирање резултата и нумеричке захтевности анализе. Агрегатори попут аритметичке или квадратне средине, као и нормализованог збира (М3, М4, М5), показали су се као најпогоднији за инжењерску примену јер пружају брзу и поуздану конвергенцију резултата, уз релативно низак степен ажурирања решења (KL параметар код примене ових метода конвергира према вредности 0,2-0,25 nats – Слика 6.61) који ипак пружа одређену слику о утицају података осматрања и повећава тачност процене сигурности. Слика 6.60 показује да се индекс поузданости након ажурирања овим методама повећао са вредности  $\beta \approx 2,7$  у базној анализи на вредност  $\beta \approx 5,5-6,0$  чиме се значајно мења представа о сигурности конструкције. Међутим, метод геометријске средине (М1), који је коришћен и за анализу сигурности у претходним поглављима, представља најбољи компромис између нумеричке захтевности и ефикасности ажурирања. Број потребних симулација за ову методу ( $10^5$ ) не представља огроман рачунарски напор, а утицај података осматрања на резултате се драстично повећава у односу на адитивне методе (KL код примене ове методе конвергира према



вредности  $\approx 0,6$  nats, а индекс поузданости на вредност  $\beta \approx 9,65$  што одговара вредностима које су извештене на **слици 6.58**).

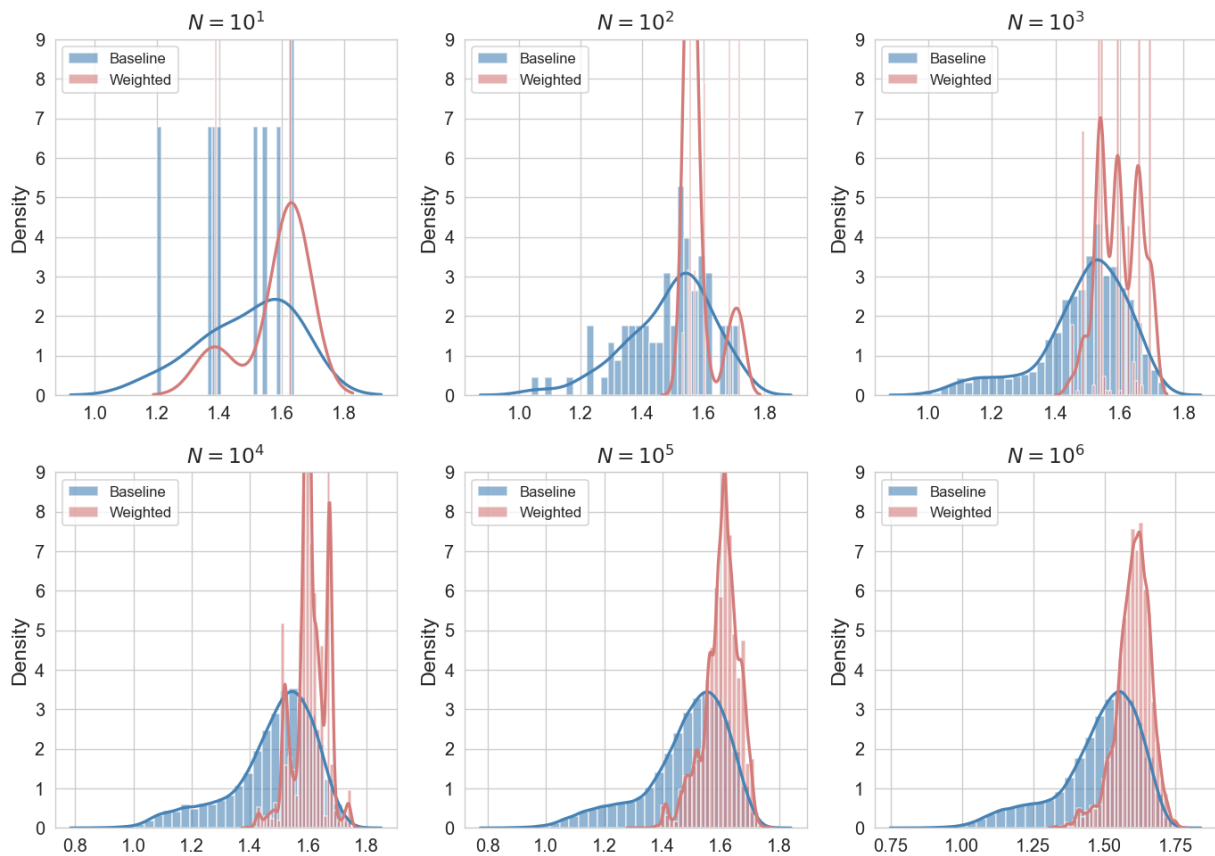


**Слика 6.61** Утицај избора агрегатора на конвергенцију параметара ESS и KL

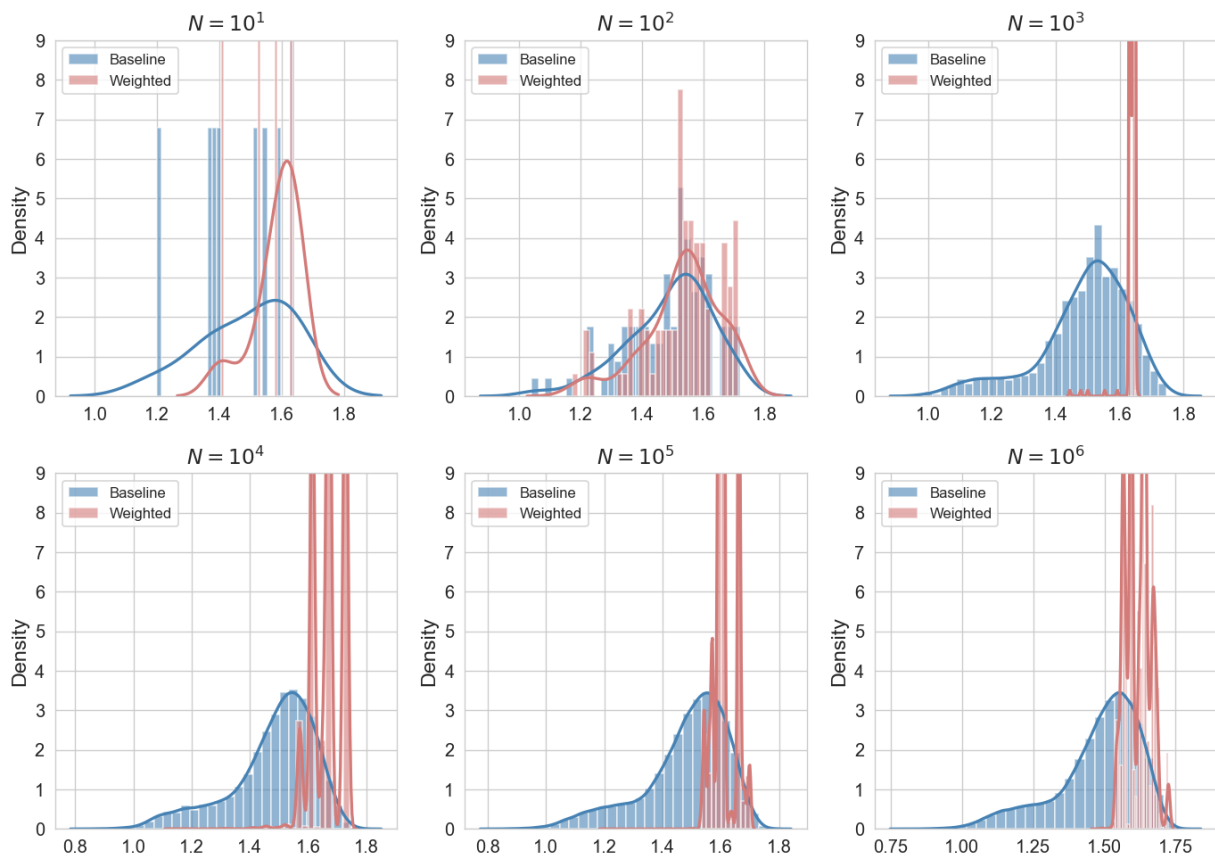
**Слика 6.61** показује да ефективни узорак у случају примене адитивних метода М3-М6 тек нешто мањи од укупног броја симулација, што потврђује да оне конвергирају готово еквивалентно брзо као и базна анализа. ESS линија за методу М1 удаљена је за између 2 и 3 реда величине од линија које репрезентују адитивне методе, док је са дијаграма јасно да су методе М7, М2, М8 и М9 остале на јако малом ефективном броју узорака (између 1 и 10) чак и након  $10^7$  симулација.

Истраживање у оквиру овог рада показало је да агрегаторе М2, М7, М8, М9 треба користити опрезно. Иако ове методе теоретски могу да обезбеде најверније уклапање пондерисане расподеле исхода са подацима осматрања (јер практично елиминишу сваки несклад у симулацијама, а нарочито метода М7), њихов захтев за огромним бројем симулација чини их непрактичним у проблемима са великим бројем података осматрања (вишедимензионално ажурирање). Уколико рачунарски ресурси не представљају ограничење или је неопходно добити максимално тачну постериорну расподелу по сваку цену, ове строже методе се морају разматрати јер у теорији осликавају највећи утицај података осматрања на резултате. Међутим, за рутинску инжењерску анализу безбедности брана, препоручује се примена агрегатора који пружају бржу конвергенцију, јер омогућавају добијање поузданих резултата (процене фактора сигурности и његове варијабилности) са знатно мањим бројем симулација.

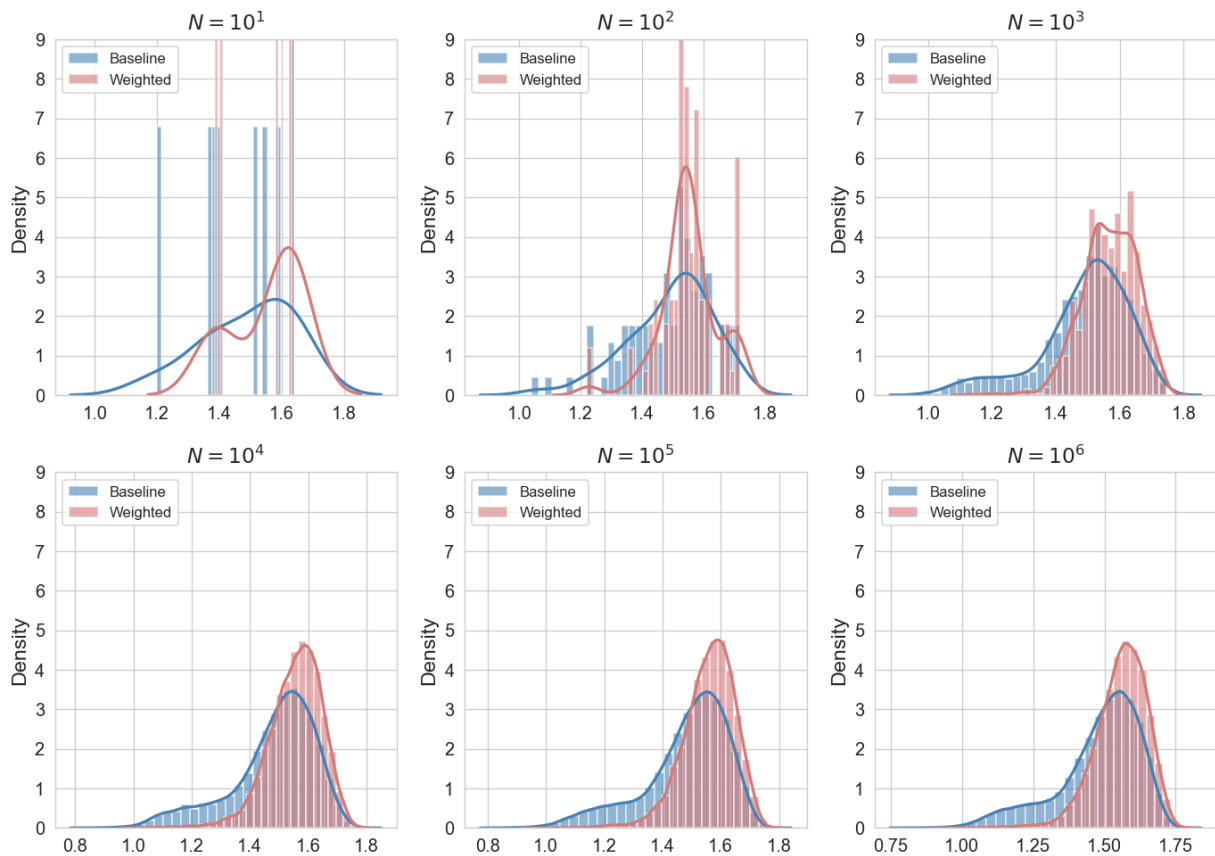
Наредне слике (**Слика 6.62** - **Слика 6.70**) илуструју резултате базне и пондерисане пробабилистичке анализе при различитим примењеним методама агрегације за различите бројеве симулација између  $10^1$  и  $10^6$ . На њима се може приметити да адитивне методе М3-М6 конвергирају већ са око  $10^3$  симулација (између  $10^3$  и  $10^4$ ), метода М1 око  $10^5$ , док методе М2, М7, М8 и М9 нису формирале валидне хистограме ни са  $10^6$  симулација.



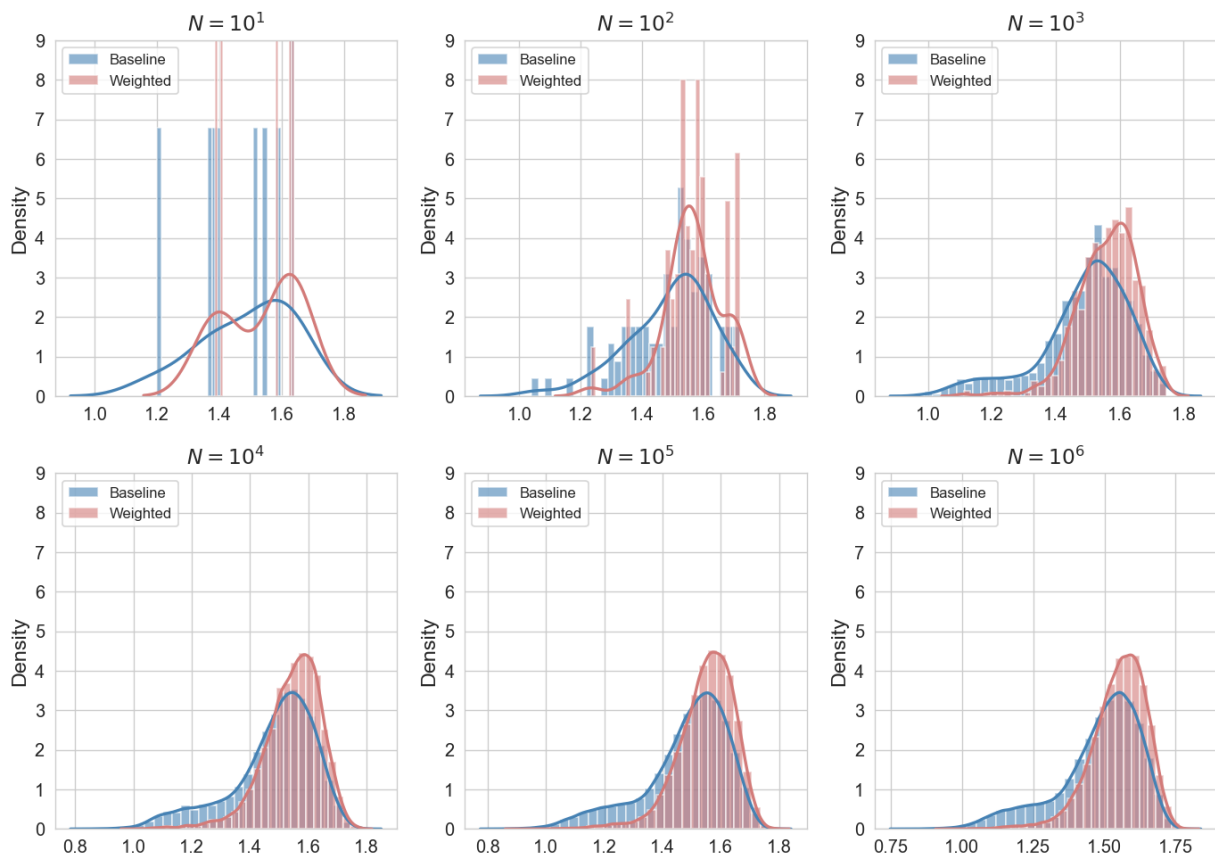
Слика 6.62 Резултати пробабилистичке анализе са агрегатором M1 за различит број симулација



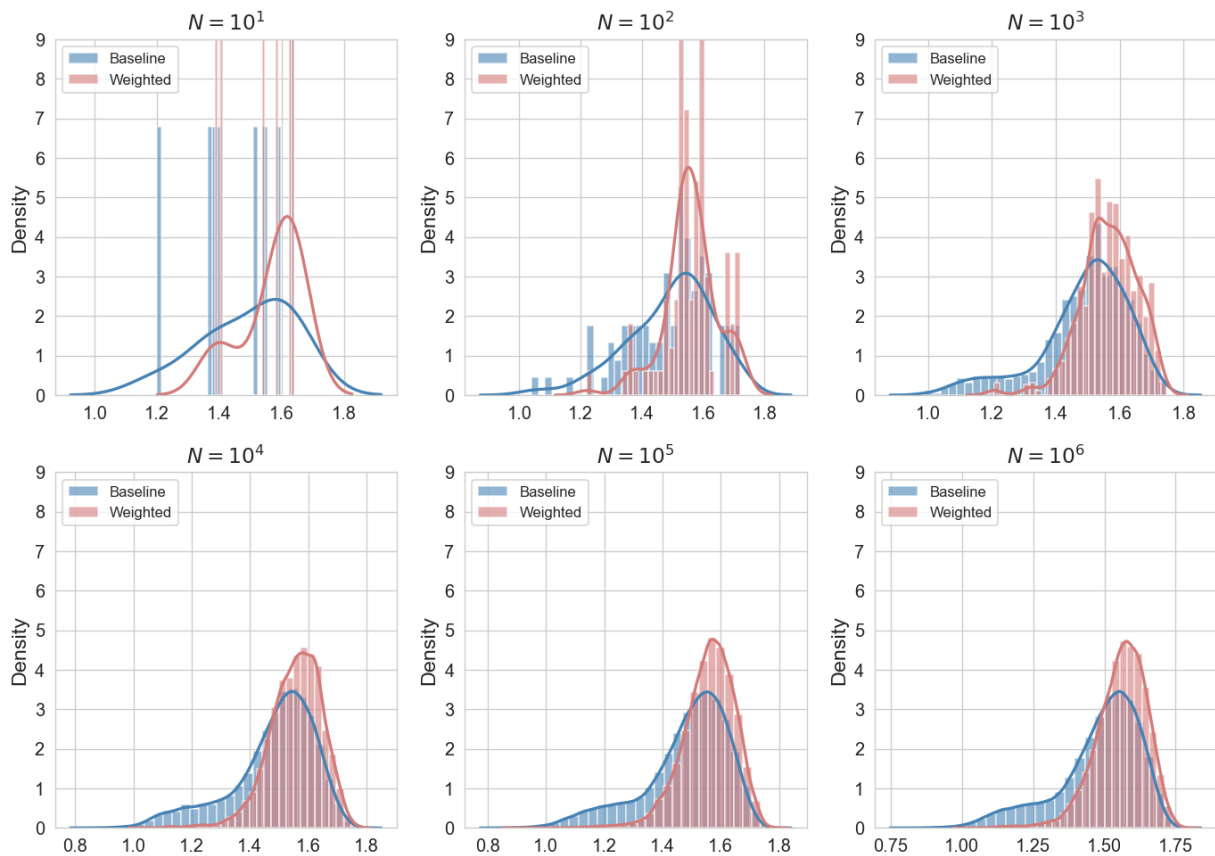
Слика 6.63 Резултати пробабилистичке анализе са агрегатором M2 за различит број симулација



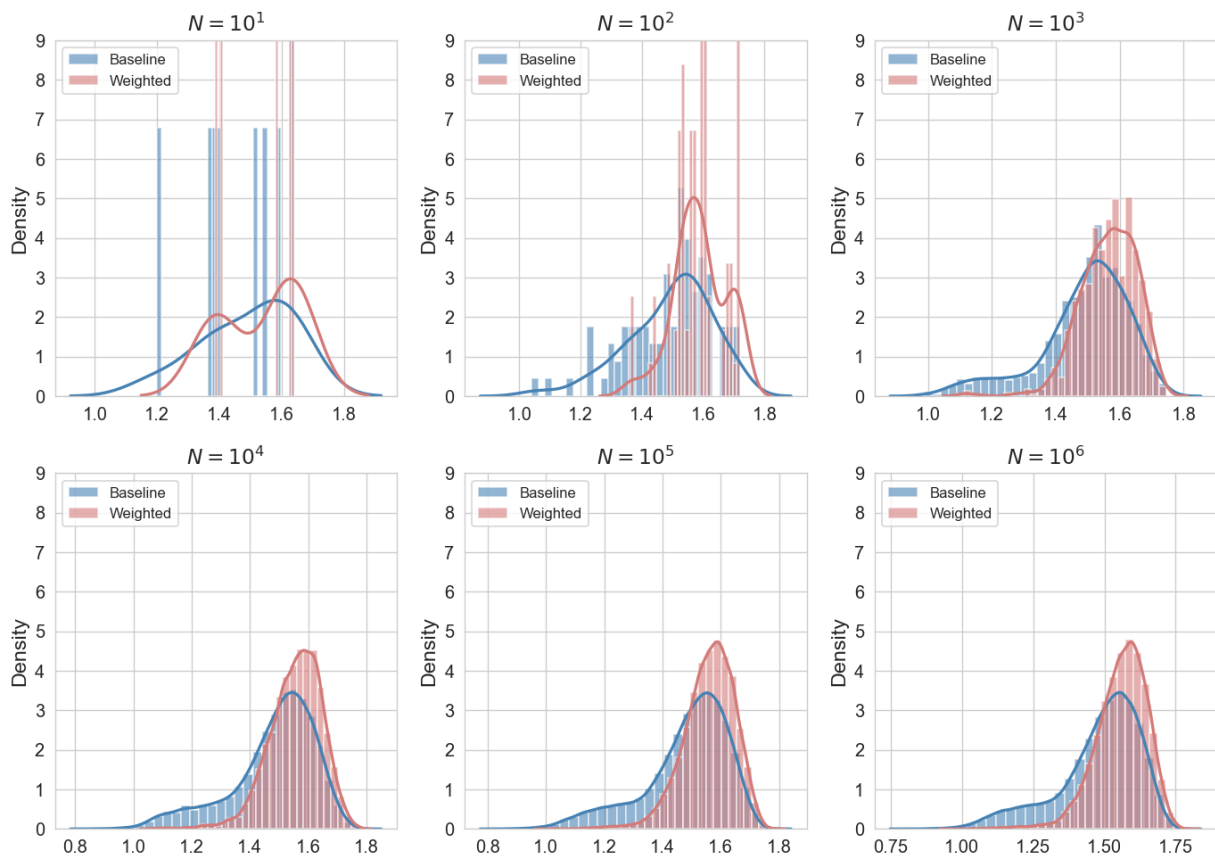
Слика 6.64 Резултати пробабилистичке анализе са агрегатором М3 за различит број симулација



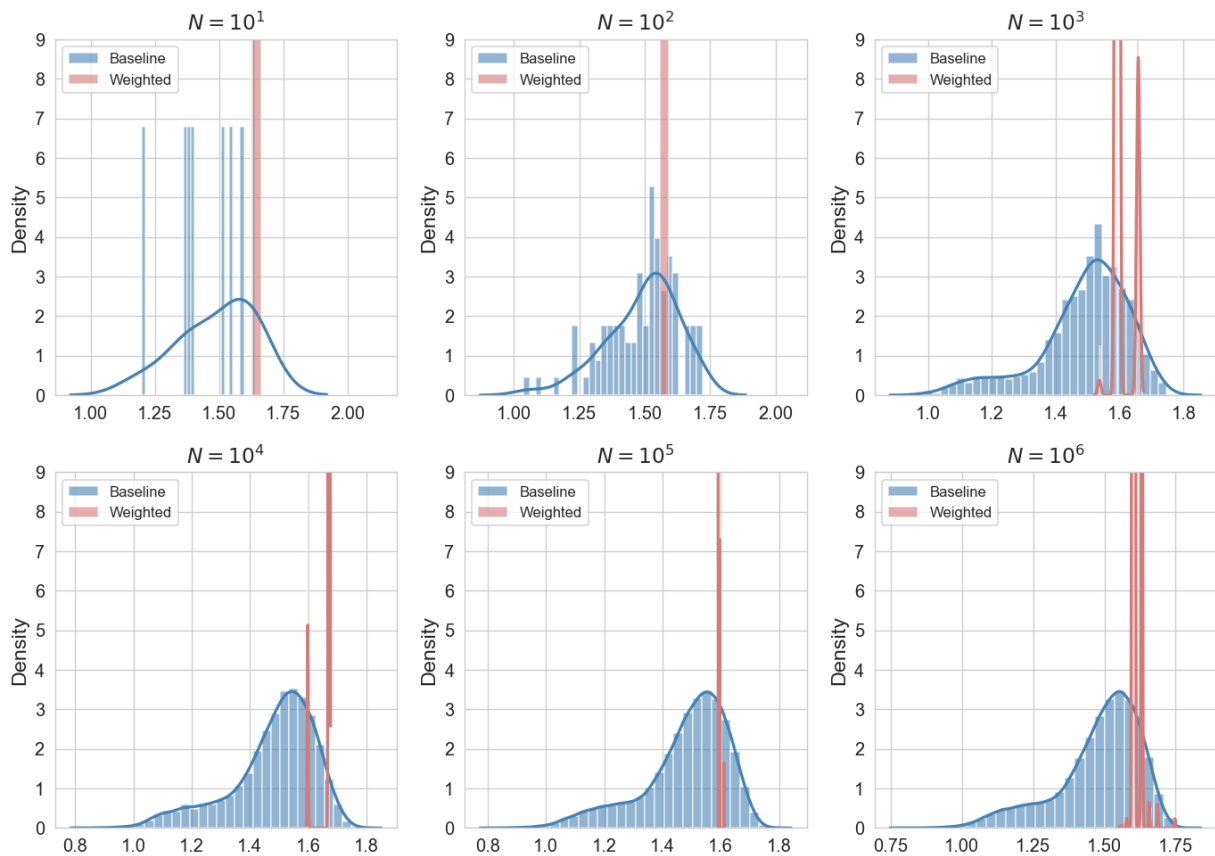
Слика 6.65 Резултати пробабилистичке анализе са агрегатором М4 за различит број симулација



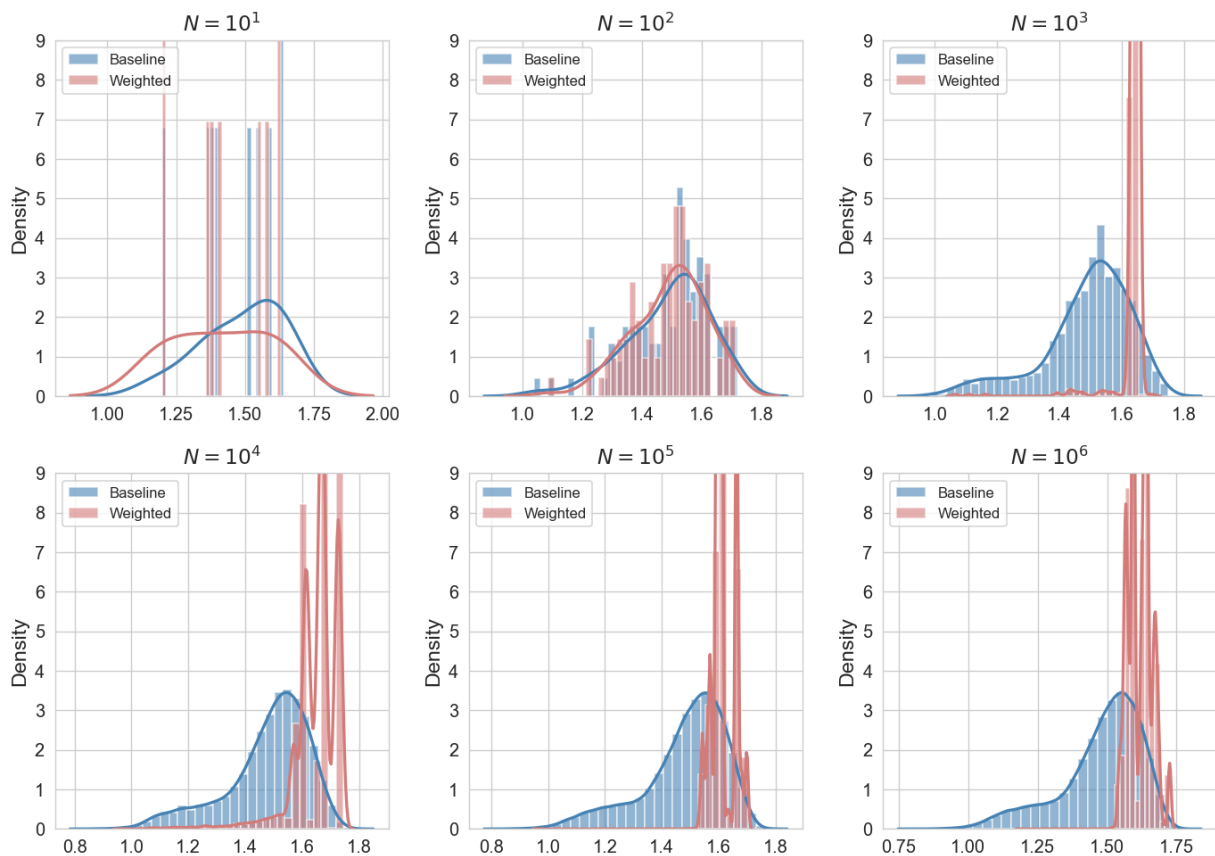
Слика 6.66 Резултати пробабилистичке анализе са агрегатором М5 за различит број симулација



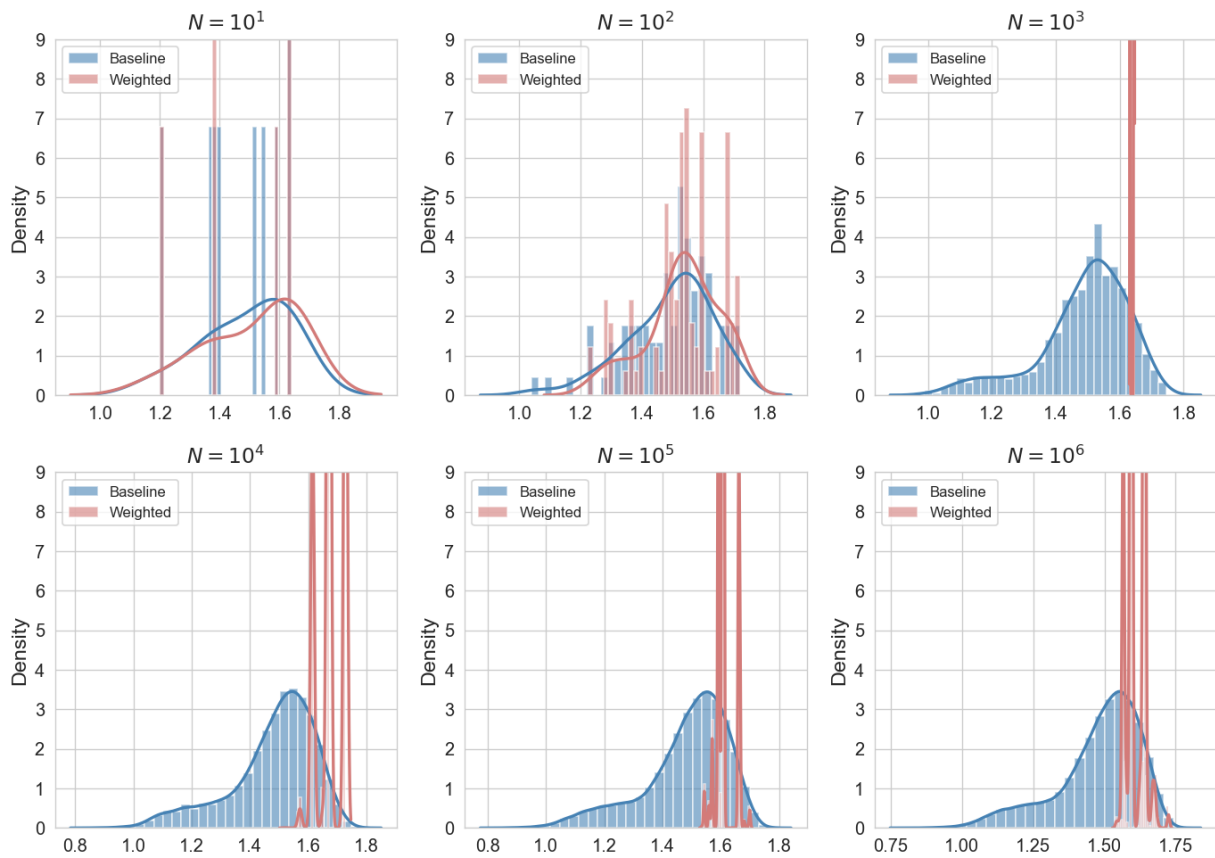
Слика 6.67 Резултати пробабилистичке анализе са агрегатором М6 за различит број симулација



Слика 6.68 Резултати пробабилистичке анализе са агрегатором M7 за различит број симулација



Слика 6.69 Резултати пробабилистичке анализе са агрегатором M8 за различит број симулација



Слика 6.70 Резултати пробабилистичке анализе са агрегатором М9 за различит број симулација

## 7 ЗАВРШНА РАЗМАТРАЊА

### 7.1 Закључци извршених истраживања

У овој дисертацији представљен је предлог методологије за процену сигурности насутих брана, која интегрише податке осматрања у квази-бајесијаснку пробабилистичку анализу. Методологија омогућава обједињену примену техника метода поузданости, напредних 3D нелинеарних МКЕ модела, машинског учења за изградњу сурогат модела и статистички третман података осматрања, чиме у оквиру анализе обезбеђује свеобухватну, поуздану и рачунски ефикасну процену сигурности постојећих насутих брана, усаглашену с најсавременијим инжењерским тенденцијама. За примену предложене методологије развијена је одговарајућа нумеричка платформа, која је најпре верификована на једноставним примерима. Након тога, методологија је примењена на студији случаја насуте бране Првонек, где је спроведена комплетна пробабилистичка анализа сигурности конструкције уз интеграцију расположивих података осматрања.

Математичка формулација методологије путем увођења тежинских коефицијената за сваку симулацију Монте-Карло анализе омогућава изражавање различитог нивоа поверења у резултате на основу сличности са стварним понашањем бране, добијеним на основу података осматрања. Сличност резултата прорачуна и стварног понашања конструкције евалуира се увођењем парцијалних тежинских коефицијената који дају оцену резултата у посматраној симулацији у односу на расподеле података осматрања дефинисане за свако мерно место. Кроз демонстрационе примере и студију случаја анализарани су успешност и опсег примене предложене методологије, донешени су закључци дискутовани у наставку, и формулисане су смернице за примену методологије у пракси.

Предложена методологија за интеграцију података осматрања у пробабилистичку анализу представља значајно унапређење како у односу на традиционалне детерминистичке приступе, тако и на класичне пробабилистичке методе. Традиционалне детерминистичке методе ослањају се на податке осматрања у детерминистичкој форми, занемарујући њихов стохастички карактер, и уводе их у анализу кроз калибрацију улазних параметара детерминистичког модела који сам по себи не пружа довољно информација о ефектима варијабилности присутним у проблему. Са друге стране, класичне пробабилистичке методе, због нумеричких проблема и високе цене прорачуна, углавном занемарују податке осматрања у потпуности и ослањају се искључиво на варијабилност улазних података која се заснива на претходним истраживањима и уверењима. Предложена методологија на иновативан и технички изводљив начин омогућава директно укључивање стохастичких података осматрања у пробабилистички прорачун, чиме се поузданост и информативна вредност анализе сигурности брана знатно унапређују. Оваквим приступом добијају се резултати анализе поузданости који боље одражавају стварно понашање конструкције, а истовремено омогућавају доследну процену утицаја варијабилности свих релевантних параметара на ниво сигурности. Интеграција података осматрања систематски помера резултате ка понашању које се заиста бележи на терену и смањује њихово расипање. За узорак из демонстрационог примера триаксијалног опита средња вредност фактора сигурности (FS) опала је са 1,69 на 1,45, а стандардна девијација се смањила за приближно једну четвртину, што указује на конзервативнију и бољу процену сигурности која одговара стварним условима у овом примеру. У пробабилистичкој анализи спроведеној у оквиру студије случаја на примеру бране Првонек индекс поузданости се значајно повећао (9,7 у пондерисаној анализи наспрам 2,7 у базној) након интеграције података осматрања у пробабилистичку анализу, при чему је показано да прорачунско понашање конструкције (порни притисци у телу бране и темељима)

далеко боље репрезентује стварно понашање измерено на терену од оног у случају резултата базне анализе.

Применљивост методологије веома зависи од усклађености распона расподела података осматрања и распона одговарајућих резултата базне пробабилистичке анализе (априорна расподела резултата анализе која не укључује податке осматрања). Показано је да различити односи облика поменутих расподела утичу на облик и распон резултата пондерисане анализе. Претесна расподела података осматрања (у односу на резултате базне анализе) смањује ефективан број симулација са не-нултим тежинским коефицијентом и долази до нумеричких проблема са конвергенцијом. Преширока расподела података осматрања доводи до скоро униформних тежинских коефицијената и последично занемарљивог ажурирања. Демонстрациони пример триаксијалног теста јасно илуструје претходну тврдњу. Узак опсег расподеле података осматрања снижава процењени ниво сигурности ( $\mu=1,45$ , до око 14% мање у односу на базну средњу вредност  $\mu = 1,69$ ) и истовремено сужава дисперзију резултата. Међутим, тако узак опсег податка осматрања захтевао је ред величине  $10^6$  симулација, док је базна анализа конвергирала за свега 200 симулација у овом примеру. Како се опсег расподеле података осматрања проширује, резултати се постепено враћају ближе вредности  $\mu=1,69$  добијене у базној анализи, а број потребних симулација се смањује.

Зона преклапања између расподеле резултата базне анализе и расподеле података осматрања има ограничени смислени опсег. Ако су подаци осматрања у потпуности изван опсега априори расподеле резултата, сви тежински коефицијенти теже нули и анализа не може да конвергира. У другом екстремном случају, ако расподела података осматрања обухвата целокупну априори расподелу, ажурирање постаје неинформативно.

Кроз спроведена истраживања у раду анализирани су различити начини агрегирања парцијалних тежинских коефицијената. Размотрено је девет предложених функција агрегатора, при чему су посебно истакнуте методе М1 (заснован на геометријској средини) и М7 (заснован на производу тежинских фактора). Теоријски посматрано, агрегатор М7 одговара логици примене Бајесове теореме на скуп свих расположивих података, те као такав обезбеђује најтачније бајесијанско ажурирано решење према постојећим подацима осматрања. Међутим, показало се да примена овог агрегатора може довести до нумеричких потешкоћа у конвергенцији када се у анализу укључује веома велики број података. С друге стране, агрегатор М1, базиран на геометријској средини тежинских коефицијената, показао се као знатно стабилнији у таквим околностима. Овај приступ даје добар компромис између блискости ажурираног решења са подацима осматрања и нумеричке стабилности прорачуна, нарочито када се интегрише велики број различитих извора података осматрања. Методе М2, М8 и М9 су се показале као нумерички готово једнако захтевне као супериорнија метода М7. Методе М3, М4, М5 и М6 су значајно брже и мање захтевне по питању конвергенције од свих осталих, али нуде мањи утицај података осматрања на ажурирање решења базне анализе. Треба напоменути да чак ни прорачун са највећим могућим технички изводљивим бројем симулација није довео до конвергенције прорачуна за методе М7, М2, М8 и М9 у спроведеној студији случаја на примеру бране Првонек. Највећи разматрани број симулација био је  $10^7$ . Прорачун са  $10^8$  симулација углавном није изводљив на данашњим рачунарима, тако да повећање броја симулација изнад  $10^7$  није разматрано.

Развој сурогат модела представља веома важан корак у овом истраживању, који драстично олакшава извршавање масовних прорачуна потребних за Монте-Карло анализу, посебно у контексту предложене методологије која у општем случају захтева већи број потребних симулација за постизање статистички стабилних и поузданих резултата. У оквиру студије случаја на брани Првонек је успешно примењен одговарајући сурогат модел за оригинални физички засновани тродимензионални МКЕ модел бране. Развојем сурогат модела омогућено је спровођење огромног броја симулација у разумном временском оквиру и са прихватљивим рачунарским ресурсима, без значајног губитка тачности у резултатима. Овај корак обезбеђује



практичну применљивост анализе и у сложеним проблемима где би цена прорачуна на оригиналним моделима била превелика.

Једна од значајних особина предложеног приступа је да током поступка ажурирања процене сигурности није неопходно вршити измене или поновну калибрацију почетних расподела улазних параметара, што је супротно од логике потпуног бајесијасног ажурирања. Задржавање оригиналних расподела вероватноће за све улазне променљиве доприноси једноставности и брзини спровођења прорачуна јер није потребно вршити поновно узорковање ажурираних улазних параметара и радити пробабилистичку анализу изнова. Ова карактеристика поједностављује примену методе у пракси.

Полазећи од чињенице да подаци осматрања осликавају понашање бране у стварним условима у којима се брана налази, методологија за пробабилистичку анализу сигурности уз интеграцију података осматрања предложена у овој дисертацији доприноси унапређењу поступака процене сигурности насутих брана и даје одређени допринос инжењерској пракси у домену процене ризика ових објеката.

## 7.2 Смернице за примену предложене методологије

Имајући у виду изложене закључке, у наставку се наводе смернице за примену предложене методологије:

- Распон резултата базне анализе требало би да у потпуности обухвати расподеле података осматрања, али однос ових распона не сме да буде превелики да конвергенција пондерисане анализе не би била угрожена. Због тога се препоручује да се моделирање варијабилности улазних параметара за Монте Карло анализу изврши у складу са резултатима претходних истраживања или претходним уверењима о понашању материјала, али без тенденције ка сужавању улазних расподела параметара. Подаци осматрања усмериће резултате базне анализе према стварном понашању, али само уколико се њихов распон налази унутар распона резултата базне анализе. Екстраполација резултата базне анализе ван свог базног опсега према подацима осматрања није могућа.
- У складу са претходном ставком, моделирање варијабилности података осматрања требало би такође урадити пажљиво. Потребно је ригорозно прегледати читавања са свих мерних места и отклонити све нерегулане податке који пружају погрешну слику о понашању конструкције. Уношење оваквих вредности у анализу не само да суштински не доприноси тачности решења, већ може довести до расподела података осматрања која се налазе ван распона резултата базне анализе и потпуно онемогућавају конвергенцију прорачуна или прешироких расподела података осматрања које чине прорачун неинформативним.
- Након завршетка базне анализе пожељно је прегледати преклапања између распона резултата базне анализе и одговарајућих расподела података осматрања. Уколико се одређени распони података осматрања налазе ван распона резултата базне анализе потребно је размотрити њихову валидност. Уколико се установи да нису валидни треба их уклонити из пондерисане анализе. Уколико се установи да су валидни, потребно је ревидовати улазне параметре базне анализе и извршити је поново.
- За највећи ефекат ажурирања резултата према подацима осматрања потребно је изабрати методу агрегације парцијалних тежинских коефицијената  $M7$  – производ парцијалних тежинских коефицијената. У том случају добија се право бајесијасно решење које у потпуности тежи осмотреном понашању на терену. Уколико је могуће успоставити конвергенцију резултата применом ове методе добиће се највећи ефекат ажурирања и последично процена сигурности која највише одговара измереном стању на терену. Ипак, за проблеме са веома много осматраних величина, што насуте бране

свакако јесу, проблеми са конвергенцијом у случају примене ове методе су забележени у литератури и у овом раду показани у оквиру студије случаја на примеру бране Првонек.

- Метода агрегације М1 (геометријска средина парцијалних тежинских коефицијената) показала се као одличан баланс између тачности ажурираног решења и нумеричке захтевности анализе. Ова метода се зато предлаже за процену сигурности насутих брана за велики број проблема у којима метода М7 не доводи до конвергенције.
- За прелиминарне анализе у којима је циљ брзо сагледавање ефеката укључења података осматрања у анализу, или у случајевима када нема потпуног поверења у податке осматрања (али се ипак жели њихов утицај на резултате), препоручује се избор стабилнијих метода М3, М4, М5 или М6 које конвергирају једнако брзо као базна анализа и не захтевају много редова величине више симулација. Овакав избор у исто време гарантује најмању могућу цену прорачуна, али чак и у том случају треба рачунати на спровођење између  $10^3$  и  $10^4$  симулација.
- С обзиром на то да је прорачун у сваком случају нумерички захтеван потребно је имати паметну стратегију за спровођење масовних анализа. У том смислу сугерише се примена сурогат модела која омогућава вишеструко брже спровођење масовних прорачуна од основног физички заснованог модела бране који могу бити изразито захтевни. Сурогат модел би требало обучити тако да на основу произвољно задатих променљивих параметара основног модела предвиђа резултате од интереса (одговарајуће величине за које постоје подаци осматрања и фактори сигурности за разматрана гранична стања у свакој симулацији). Експанзија примене метода машинског учења у грађевинским проблемима омогућава све ширу примену ових техника у пракси, а за спровођење предложене методологије развој сурогат модела свакако налази своју употребну вредност.
- Уколико се пробабилистички прорачун спроводи на основном физички заснованом МКЕ моделу предлаже се спровођење селективне SSR анализе што омогућава значајну уштеду времена и ресурса потребног за овај поступак. За све симулације чији је тежински коефицијент мањи од 1% од максималног оствареног тежинског коефицијента, усваја се вредност нула, и за те симулације се не изводи SSR анализа.

### 7.3 Препоруке за даља истраживања

У току израде дисертације, уочене су разноврсне могућности за наставак истраживања и даљи развој. Смернице се могу формулисати на следећи начин:

- Требало би истражити могућности за остваривање веће прецизности сурогат модела у домену предвиђања резултата SSR анализе од оне остварене у овом истраживању методом XGBoost, како би се смањила грешка и повећала прецизност резултата пробабилистичке анализе. Фактор сигурности добијен SSR методом је изразито нелинеарна функција улазних параметара модела, а потенцијално и скоковита услед могућих промена модалитета лома које прате различите конфигурације улазних параметара.
- Потребно је истражити појединости везане за спровођење селективне SSR анализе приликом примене предложене методологије која подразумева прорачуне на основном МКЕ моделу. У овом раду концептуално је предложено спровођење селективне SSR анализе, али оно није примењено у студији случаја на примеру бране Првонек, због тога што је у овом примеру коришћен сурогат модел чија примена негира директну употребу SSR поступка у пробабилистичкој анализи.
- Примена предложене методологије подразумева стохастички третман података осматрања. Моделирање варијабилности података осматрања стога представља важан

корак у анализи. У том смислу требало би додатно истражити који је најбољи начин за креирање статистичких расподела које описују сваки од података, у односу на то која се величина осматра (порни притисци, померања или нешто треће) и полагај мерног инструмента у телу бране (узводно или низводно од језгра итд.). Уз то, овакво истраживање могло би да дефинише конкретне критеријуме за филтрирање података осматрања у зависности од прорачунске ситуације која се разматра, као и правила која би се односила на ригорозну статистичку обраду података (валидацију појединачних измерених вредности, избор функције расподеле итд.).

- Потребно је истражити појединости везане за примењивост методологије на прорачунске ситуације за које не постоје подаци осматрања. Постоји потенцијал за примену предложене методологије и на имагинарне или екстремне сценарије који до сада нису забележени у току експлоатације бране. Уколико би се разматрали екстремни сценарији или услови знатно изван оквира стварног понашања бране, логичан наредни корак могла би бити калибрација (ажурирање) самих расподела улазних параметара на основу података осматрања у забележеним прорачунским ситуацијама, пре него што се уђе у нову пробабилистичку анализу за екстремне сценарије са ажурираним расподелама. Примена методологије за прорачун сигурности у оквиру екстремних сценарија остаје ипак тема за наредна истраживања у области пробабилистичких анализа насутих брана.
- Било би пожељно укључити примену предложене пробабилистичке анализе са интеграцијом података осматрања у постојеће стандарде и регулативе (нпр. Еврокод [34]) и у складу са тим анализирати и евентуално ажурирати постојеће критеријуме сигурности.

## 8 ЛИТЕРАТУРА

- [1] Abadi, M., Barham, P., Chen, J., et al. (2016). TensorFlow: A system for large-scale machine learning. In *Proceedings of OSDI '16* (pp. 265–283).
- [2] Ahmed, A. A. (2009). Stochastic analysis of free surface flow through earth dams. *Computers and Geotechnics*, 36(7), 1186–1190. <https://doi.org/10.1016/j.compgeo.2009.04.003>
- [3] Andreini, M., Gardoni, P., Pagliara, S., & Sassi, M. (2016). Probabilistic models for erosion parameters and reliability analysis of earth dams and levees. *ASCE-ASME Journal of Risk and Uncertainty in Engineering Systems, Part A: Civil Engineering*, 2(4), 04016002. <https://doi.org/10.1061/AJRUA6.0000865>
- [4] Babu, G. S., & Srivastava, A. (2010). Reliability analysis of earth dams. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 136(7), 995–998. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)GT.1943-5606.0000266](https://doi.org/10.1061/(ASCE)GT.1943-5606.0000266)
- [5] Barlow, R. J. (1993). *Statistics: A guide to the use of statistical methods in the physical sciences*. Wiley.
- [6] Bathe, K. J. (1996). *Finite element procedures*. Prentice Hall
- [7] Bear, J. (1972). *Dynamics of fluids in porous media*. Dover.
- [8] Benjamin, J. R., & Cornell, C. A. (2014). *Probability, statistics, and decision for civil engineers*. Dover.
- [9] Beyer, W. (1964). Zur Bestimmung der Wasserdurchlässigkeit von Kiesen und Sanden aus der Kornverteilungskurve. *Wasserwirtschaft – Wassertechnik*, 14(6), 165–168.
- [10] Bishop, C.M. (2006). *Pattern Recognition and Machine Learning*. Springer.
- [11] Blischke, W. R., & Murthy, D. N. P. (2000). *Reliability: Modeling, prediction, and optimization*. Wiley. <https://doi.org/10.1002/9781118150481>
- [12] Breiman, L. (1996). Bagging predictors. *Machine Learning*, 24(2), 123–140. <https://doi.org/10.1007/BF00058655>
- [13] Breiman, L. (2001). Random forests. *Machine Learning*, 45(1), 5–32. <https://doi.org/10.1023/A:1010933404324>
- [14] Brown, M. (2012). *Mathematical statistics with applications*. Cengage Learning.
- [15] Çalamak, M., & Yilmaz, A. M. (2014). Probabilistic assessment of slope stability for earth-fill dams having random soil parameters. In *Proceedings of the 5th International Symposium on Hydraulic Structures* (pp. 1–10). Brisbane, Australia.
- [16] Çalamak, M., Kentel, E., & Yilmaz, A. M. (2013, October). Spatial variability in seepage flow through earth-fill dams. In *Proceedings of the Canadian Dam Association 2013 Annual Conference* (p. 37).
- [17] Chen, Q., & Chang, L.-Y. (2011). Probabilistic slope stability analysis of a 300 m high embankment dam. *GeoRisk*, 5(4), 403–410. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)GT.1943-5606.0000275](https://doi.org/10.1061/(ASCE)GT.1943-5606.0000275)
- [18] Chen, T., & Guestrin, C. (2016). XGBoost: A scalable tree boosting system. In *Proceedings of the 22nd ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining* (pp. 785–794). ACM. <https://doi.org/10.1145/2939672.2939785>

- [19] Chen, Z., Du, J., Yan, J., Sun, P., Li, K., & Li, Y. (2019). Point estimation method: Validation, efficiency improvement, and application to embankment slope stability reliability analysis. *Engineering Geology*, 263, 105232. <https://doi.org/10.1016/j.enggeo.2019.105232>
- [20] Cho, S. E. (2012). Probabilistic analysis of seepage that considers the spatial variability of permeability for an embankment on soil foundation. *Engineering Geology*, 133–134, 30–39. <https://doi.org/10.1016/j.enggeo.2012.01.013>
- [21] Cho, S. E. (2013). First-order reliability analysis of slope considering multiple failure modes. *Engineering Geology*, 178, 98–105. <https://doi.org/10.1016/j.enggeo.2014.05.001>
- [22] Cortes, C., & Vapnik, V. (1995). Support-vector networks. *Machine Learning*, 20(3), 273–297. <https://doi.org/10.1007/BF00994018>
- [23] Darcy, H. P. G. (1856). *Les fontaines publiques de la ville de Dijon: Exposition et application*. Dalmont.
- [24] Das, B. M. (2010). *Principles of geotechnical engineering* (7th ed.). Cengage Learning.
- [25] Davidović, N. (2013). *Primena probabilističkog koncepta u geotehničkim računskim analizama stabilnosti* (Doktorska disertacija, Građevinsko-arhitektonski fakultet, Univerzitet u Nišu).
- [26] DeGroot, M. H., & Schervish, M. J. (2012). *Probability and statistics* (4th ed.). Pearson.
- [27] DIANA FEA. (2024). *DIANA FEA user manuals*. Delft, The Netherlands. <https://manuals.dianafea.com>
- [28] Ding, D. (2020). Stability analysis of earth rock dam slope under temperature stress coupling. *Fresenius Environmental Bulletin*, 29, 9834–9841.
- [29] Duda, R.O., Hart, P.E., and Stork, D.G. (2000). *Pattern Classification*. Wiley.
- [30] Duncan, J. M., Wright, S. G., & Brandon, T. L. (2014). *Soil strength and slope stability* (2nd ed.). Wiley.
- [31] Efron, B. (1979). Bootstrap methods: Another look at the jackknife. *Annals of Statistics*, 7(1), 1–26. <https://doi.org/10.1214/aos/1176344552>
- [32] Ering, P., & Babu, G. L. S. (2016). Probabilistic back-analysis of rainfall-induced landslide: A case study of Malin landslide, India. *Engineering Geology*, 208, 154–164. <https://doi.org/10.1016/j.enggeo.2016.05.002>
- [33] European Committee for Standardization. (2002). *Eurocode — Basis of structural design* (EN 1990:2002).
- [34] European Committee for Standardization. (2004). *Eurocode 7 — Geotechnical design — Part 1: General rules* (EN 1997-1:2004).
- [35] Faber, M. H. (2009). *Statistics and probability theory: In pursuit of engineering decision support*. Springer.
- [36] Federal Emergency Management Agency. (2019). *Federal guidelines for dam safety* (FEMA P-93).
- [37] Fenton, G. A., & Griffiths, D. V. (1997). Extreme hydraulic gradient statistics in stochastic earth dams. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 123(12), 1175–1185. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)1090-0241\(1997\)123:12\(1175\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)1090-0241(1997)123:12(1175))
- [38] Forrester, A., Sobester, A., & Keane, A. (2008). *Engineering design via surrogate modelling: A practical guide*. Wiley.

- [39] Foster, M., Fell, R., & Spannagle, M. (2000). The statistics of embankment dam failures and accidents. *Canadian Geotechnical Journal*, 37(5), 1000–1024. <https://doi.org/10.1139/t00-031>
- [40] Freedman, D., & Diaconis, P. (1981). On the histogram as a density estimator: L2 theory. *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete*, 57(4), 453–476. <https://doi.org/10.1007/BF01025868>
- [41] Freund, Y., & Schapire, R. E. (1997). A decision-theoretic generalization of online learning and an application to boosting. *Journal of Computer and System Sciences*, 55(1), 119–139. <https://doi.org/10.1006/jcss.1997.1504>
- [42] Friedman, J. H. (2001). Greedy function approximation: A gradient boosting machine. *Annals of Statistics*, 29(5), 1189–1232. <https://doi.org/10.1214/aos/1013203451>
- [43] Friedman, J. H. (2002). Stochastic gradient boosting. *Computational Statistics & Data Analysis*, 38(4), 367–378. [https://doi.org/10.1016/S0167-9473\(01\)00065-2](https://doi.org/10.1016/S0167-9473(01)00065-2)
- [44] Gelman, A., Carlin, J. B., Stern, H. S., Dunson, D. B., Vehtari, A., & Rubin, D. B. (2013). *Bayesian data analysis* (3rd ed.). CRC Press.
- [45] Ghanem, R., Saad, G., & Doostan, A. (2007). Efficient solution of stochastic systems: Application to the embankment dam problem. *Structural Safety*, 29(3), 238–251. <https://doi.org/10.1016/j.strusafe.2006.06.002>
- [46] Goodfellow, I., Bengio, Y., & Courville, A. (2016). *Deep Learning*. MIT Press.
- [47] Grabisch, M., Marichal, J.-L., Mesiar, R., & Pap, E. (2009). *Aggregation functions*. Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/CBO9781139644150>
- [48] Griffiths, D. V., & Lane, P. A. (1999). Slope stability analysis by finite elements. *Géotechnique*, 49(3), 387–403. <https://doi.org/10.1680/geot.1999.49.3.387>
- [49] Gui, S., Zhang, R., Turner, J. P., & Xue, X. (2020). Probabilistic slope stability analysis with stochastic soil hydraulic conductivity. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 146(7), 04020070. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)GT.1943-5606.0002291](https://doi.org/10.1061/(ASCE)GT.1943-5606.0002291)
- [50] Guo, X. (2016). *Probabilistic stability analysis of an earth dam using field data* (Doctoral dissertation, Université Grenoble Alpes).
- [51] Harr, M. E. (1987). *Reliability-based design in civil engineering*. McGraw-Hill.
- [52] Hazen, A. (1892). Some physical properties of sands and gravels with special reference to their use in filtration. In *24th Annual Report of the Massachusetts State Board of Health* (pp. 539–556).
- [53] Hedges, L. V., & Olkin, I. (1985). *Statistical methods for meta-analysis*. Academic Press.
- [54] Hidrotehnika – Hidroenergetski i hidrograđevinski objekti a.d. (n.d.). *Brana Đerdap*. Preuzeto 18. juna 2025. sa <https://hidrotehnika.rs/brane/srbija/derdap/>
- [55] Huang, H.; Zhu, J.; Wu, Z.; Chen, J.; Tian, J. (2025) System Reliability Analysis of Slope Stability of Earth Rock Dams Based on Finite Element Strength Reduction Method. *Applied Sciences*, 15(9), 4672. <https://doi.org/10.3390/app15094672>
- [56] Institut za vodoprivredu „Jaroslav Černi“. (2013). *Brana „Prvonek“ – Projekat izvedenog objekta (PIO), Knjiga 4: Pregradna konstrukcija i injekciona zavesa – inženjerski podaci*. Beograd.
- [57] Institut za vodoprivredu „Jaroslav Černi“. (2013). *Brana „Prvonek“ – Projekat upravljanja i održavanja (PUO), Knjiga 2: Tehničko osmatranje*. Beograd.

- [58] Institut za vodoprivredu „Jaroslav Černi“. (2013). *Brana „Prvonek“ – Projekat izvedenog objekta (PIO), Knjiga 5: Pregradna konstrukcija i injekciona zavesa – crteži*. Beograd.
- [59] Institut za vodoprivredu „Jaroslav Černi“. (2016). *Sistem za upravljanje bezbednošću brana JP EPS – HE Đerdap 1. Knjiga 15: Izveštaj o teorijskim osnovama, algoritmima i numeričkim solverima MKE modela termičkih, filtracionih i naponsko-deformacionih procesa*. JP "Elektroprivreda Srbije", Ogranak HE Đerdap.
- [60] Institut za vodoprivredu „Jaroslav Černi“. (2024). *Elaborat o ponašanju i stanju brane „Prvonek“ za period 2013–2023*. Beograd.
- [61] Institut za vodoprivredu „Jaroslav Černi“. (2024). *Studija o pravnim, ekonomskim, tehničkim i bezbednosnim aspektima upravljanja visokim branama u Srbiji* (Knjiga 4). Beograd.
- [62] International Commission on Large Dams. (2010). *Bulletin 155: Guidelines for dam safety*. ICOLD.
- [63] International Commission on Large Dams. (2017). *Dam safety management: Operational phase of the dam life cycle*. ICOLD.
- [64] International Commission on Large Dams. (2019). *Dam failures statistical analysis*. ICOLD.
- [65] International Commission on Large Dams. (2019). *World register of dams: General synthesis*. ICOLD.
- [66] International Commission on Large Dams. (2021). Risk analysis in dam safety: The past, the present and the future. In C. Athanasiu et al. (Eds.), *Proceedings of the 14th ICOLD Benchmark Workshop on Numerical Analysis of Dams*.
- [67] International Organization for Standardization. (2015). *ISO 2394:2015 – General principles on reliability for structures*.
- [68] Iooss, B., & Lemaître, P. (2015). A review on global sensitivity analysis methods. In C. Meloni & G. Dellino (Eds.), *Uncertainty management in simulation-optimization of complex systems: Algorithms and applications* (pp. 101–122). Springer.
- [69] Ji, J., & Low, B. K. (2012). Stratified response surfaces for system probabilistic evaluation of slopes. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 138(12), 1398–1406. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)GT.1943-5606.0000075](https://doi.org/10.1061/(ASCE)GT.1943-5606.0000075)
- [70] Johnson, R. A., & Wichern, D. W. (2019). *Applied multivariate statistical analysis* (7th ed.). Pearson.
- [71] Joint Committee on Structural Safety. (2001). *Probabilistic model code*. JCSS.
- [72] Ke, G., Meng, Q., Finley, T., et al. (2017). LightGBM: A highly efficient gradient boosting decision tree. In *Advances in neural information processing systems* (Vol. 30, pp. 3149–3157).
- [73] Kelly, R., & Huang, J. (2015). Bayesian updating for one-dimensional consolidation measurements. *Canadian Geotechnical Journal*, 52(9), 1318–1330. <https://doi.org/10.1139/cgj-2014-0524>
- [74] Kish, L. (1965). *Survey sampling*. Wiley.
- [75] Kullback, S., & Leibler, R. A. (1951). On information and sufficiency. *Annals of Mathematical Statistics*, 22(1), 79–86. <https://doi.org/10.1214/aoms/1177729694>

- [76] Li, Y., Li, K., Wen, L., Li, B., & Li, Y. (2019). A safety standard for slopes of ultra-high earth and rock-fill dams in China based on reliability analysis. *International Journal of Civil Engineering*, 17, 1829–1844. <https://doi.org/10.1007/s40999-019-00409-8>
- [77] Li, Z., Wang, Y., Cao, Z., & Chu, X. (2013). Risk de-aggregation and system reliability analysis of slope stability using representative slip surfaces. *Computers and Geotechnics*, 53, 95–105. <https://doi.org/10.1016/j.compgeo.2013.06.001>
- [78] Liao, K., Wu, Y., Miao, F., Zhang, L., & Beer, M. (2023). Efficient system reliability analysis for layered soil slopes with multiple failure modes using sequential compounding method. *Journal of Risk and Uncertainty in Engineering Systems, Part A: Civil Engineering*, 9(3), 0420315. <https://doi.org/10.1061/AJRUA6.0001262>
- [79] Liu, J. S. (2008). *Monte Carlo Strategies in Scientific Computing*. Springer.
- [80] Liu, Z. Q., Nadim, F., Eidsvig, U. K., & Lacasse, S. (2017). Reassessment of dam safety using Bayesian network. In *Geo-Risk 2017* (pp. 156–165). <https://doi.org/10.1061/9780784480724.016>
- [81] Maksimović, M. (2008). *Механика тла*. AGM Knjiga, Beograd.
- [82] McKay, M. D., Beckman, R. J., & Conover, W. J. (1979). A comparison of three methods for selecting values of input variables in the analysis of output from a computer code. *Technometrics*, 21(2), 239–245. <https://doi.org/10.1080/00401706.1979.10489755>
- [83] Melchers, R. E. (1999). *Structural reliability analysis and prediction* (2nd ed.). John Wiley & Sons.
- [84] Moyeux, A., Carvajal, C., Bressollette, P., Payras, L., Breul, P., & Bacconnet, C. (2018). Probabilistic stability analysis of an earth dam using stochastic finite element method based on field data. *Computers and Geotechnics*, 101, 34–47. <https://doi.org/10.1016/j.compgeo.2018.04.017>
- [85] Murphy, K.P. (2012). *Machine Learning: A Probabilistic Perspective*. MIT Press.
- [86] Nelsen, R. B. (2006). *An introduction to copulas* (2nd ed.). Springer.
- [87] Paszke, A., Gross, S., Massa, F., et al. (2019). PyTorch: An imperative style, high-performance deep learning library. In *Advances in neural information processing systems* (Vol. 32, pp. 8026–8037).
- [88] Pearl, J. (1988). *Probabilistic Reasoning in Intelligent Systems: Networks of Plausible Inference*. Morgan Kaufmann.
- [89] Peck, R. B. (1969). Advantages and limitations of the observational method in applied soil mechanics. *Géotechnique*, 19(2), 171–187. <https://doi.org/10.1680/geot.1969.19.2.171>
- [90] Peck, R. B. (2001). The observational method can be simple. *Proceedings of the Institution of Civil Engineers – Geotechnical Engineering*, 149(2), 71–74. <https://doi.org/10.1680/geng.2001.149.2.71>
- [91] Pedregosa, F., Varoquaux, G., Gramfort, A., et al. (2011). Scikit-learn: Machine learning in Python. *Journal of Machine Learning Research*, 12, 2825–2830.
- [92] Powell, M. J. D. (1987). *Radial basis functions for multivariable interpolation: A review*. University of Cambridge.
- [93] Rasmussen, C. E., & Ghahramani, Z. (2003). Bayesian Monte Carlo. In *Advances in neural information processing systems* (Vol. 15, pp. 489–496).
- [94] Rocscience Inc. (2025). *RS2* (Version 11.026) and *RSDData* (Version 1.008) [Computer software]. <https://www.rocscience.com>



- [95] Roscoe, K. H., & Burland, J. B. (1972). On the generalized stress-strain behaviour of ‘wet’ clay. In J. Heyman & F. A. Leckie (Eds.), *Engineering plasticity* (pp. 535–609). Cambridge University Press.
- [96] Sacks, J., Welch, W. J., Mitchell, T. J., & Wynn, H. P. (1989). Design and analysis of computer experiments. *Statistical Science*, 4(4), 409–423.  
<https://doi.org/10.1214/ss/1177012413>
- [97] Sagi, O., & Rokach, L. (2018). Ensemble learning: A survey. *Wiley Interdisciplinary Reviews: Data Mining and Knowledge Discovery*, 8(4), e1249.  
<https://doi.org/10.1002/widm.1249>
- [98] Saltelli, A., Ratto, M., Andres, T., Campolongo, F., Cariboni, J., Gatelli, D., Tarantola, S., & Lehmann, W. (2008). *Global sensitivity analysis: The primer*. John Wiley & Sons.
- [99] Schmitz, B., Vandenboer, K., Verhoest, N. E. C., & Degrè, A. (2023). Global sensitivity analysis of a dam breaching model: To which extent is parameter sensitivity case-dependent? *Water Resources Research*, 59(6), e2022WR033894.  
<https://doi.org/10.1029/2022WR033894>
- [100] Schofield, A. N., & Wroth, C. P. (1968). *Critical state soil mechanics*. McGraw-Hill.
- [101] Scott, D. W. (2015). *Multivariate density estimation: Theory, practice, and visualization*. Wiley.
- [102] Simpson, T. W., Peplinski, J. D., Koch, P. N., & Allen, J. K. (2001). Metamodels for computer-based engineering design: A survey and recommendations. *Engineering with Computers*, 17(2), 129–150. <https://doi.org/10.1007/PL00007198>
- [103] Sobol, I. M. (1967). On the distribution of points in a cube and the approximate evaluation of integrals. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 7(4), 86–112.
- [104] Sobol, I. M. (2001). Global sensitivity indices for nonlinear mathematical models and their Monte Carlo estimates. *Mathematics and Computers in Simulation*, 55(1–3), 271–280.  
[https://doi.org/10.1016/S0378-4754\(00\)00270-6](https://doi.org/10.1016/S0378-4754(00)00270-6)
- [105] Sudret, B. (2008). Global sensitivity analysis using polynomial chaos expansions. *Reliability Engineering & System Safety*, 93(7), 964–979.  
<https://doi.org/10.1016/j.ress.2007.04.002>
- [106] Tang, X., Chen, A., & He, J. (2022). A modelling approach based on Bayesian networks for dam risk analysis: Integration of machine learning algorithm and domain knowledge. *International Journal of Disaster Risk Reduction*, 71, 102818.  
<https://doi.org/10.1016/j.ijdrr.2022.102818>
- [107] Tang, X., Chen, A., & He, J. (2023). Optimized variable selection of Bayesian network for dam risk analysis: A case study of earth dams in the United States. *Journal of Hydrology*, 617, 129091. <https://doi.org/10.1016/j.jhydrol.2023.129091>
- [108] Timoshenko, S. P., & Goodier, J. N. (1970). *Theory of elasticity* (3rd ed.). McGraw-Hill.
- [109] U.S. Army Corps of Engineers. (2003). *Engineering and design – Slope stability* (EM 1110-2-1902).
- [110] U.S. Bureau of Reclamation. (1987). *Design of small dams* (3rd ed.). U.S. Bureau of Reclamation.
- [111] U.S. Bureau of Reclamation. (2011). *Best practices in dam and levee safety risk analysis: Chapter 9 – Embankment dams*. Bureau of Reclamation.

- [112] U.S. Bureau of Reclamation. (2012). *Design standards no. 13 – Embankment dams*. U.S. Bureau of Reclamation.
- [113] Wang, G., & Ma, Z. (2016). Application of probabilistic method to stability analysis of gravity dam foundation over multiple sliding planes. *Mathematical Problems in Engineering*, 2016, 4264627. <https://doi.org/10.1155/2016/4264627>
- [114] Wang, L., Wu, C., Gu, X., Liu, H., Mei, G., & Zhang, Y. (2020). Probabilistic stability analysis of earth dam slope under transient seepage using multivariate adaptive regression splines. *Bulletin of Engineering Geology and the Environment*, 80, 2763–2775. <https://doi.org/10.1007/s10064-020-01730-0>
- [115] Wolpert, D. H. (1992). Stacked generalization. *Neural Networks*, 5(2), 241–259. [https://doi.org/10.1016/S0893-6080\(05\)80023-1](https://doi.org/10.1016/S0893-6080(05)80023-1)
- [116] Wu, Z.-Y., Shi, Q., Guo, Q., & Chen, J.-K. (2017). CST-based first order second moment method for probabilistic slope stability analysis. *Computers and Geotechnics*, 85, 51–58. <https://doi.org/10.1016/j.compgeo.2017.02.014>
- [117] Xu, Y., Zhang, L. M., & Jia, J. S. (2011). Diagnosis of embankment dam distresses using Bayesian networks. Part II: Diagnosis of a specific distressed dam. *Canadian Geotechnical Journal*, 48(8), 1113–1126. <https://doi.org/10.1139/t11-070>
- [118] Yi, P., Liu, J., & Xu, C. (2015). Reliability analysis of high rockfill dam stability. *Mathematical Problems in Engineering*, 2015, 512648. <https://doi.org/10.1155/2015/512648>
- [119] Zhang, J., Huang, H. W., & Phoon, K. K. (2013). Application of the kriging-based response surface method to the system reliability of soil slopes. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 139(4), 651–655. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)GT.1943-5606.0000801](https://doi.org/10.1061/(ASCE)GT.1943-5606.0000801)
- [120] Zhang, Y., Tang, W.-H., & Zhang, L. N. (2010). Efficient probabilistic back-analysis of slope stability model parameters. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 136(1), 99–109. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)GT.1943-5606.0000187](https://doi.org/10.1061/(ASCE)GT.1943-5606.0000187)
- [121] Zienkiewicz, O. C., Taylor, R. L., & Zhu, J. Z. (2013). *The finite element method: Its basis and fundamentals* (7th ed.). Butterworth-Heinemann.
- [122] Živković, M., Kojić, M., Slavković, R., Grujović, N., Rakić, D., & Dunić, V. (2019). *PAK-S: Program for FE structural analysis of solids and structures* [Computer software]. University of Kragujevac, Faculty of Mechanical Engineering.

## АНЕКС 1 – ТЕОРИЈСКЕ ОСНОВЕ МОДЕЛИРАЊА ФИЗИЧКИХ ПРОЦЕСА

### А.1.1 Филтрациони процеси

Подземна вода у порозној средини креће се кроз сложен систем пора и то само кроз активни део међусобно спојених пора. Кретање подземне воде је практично немогуће разматрати као струјање кроз систем међусобно повезаних шупљина, па се за постављање основних једначина уводи модел континуума.

Основну једначину, која дефинише закон струјања подземне воде (у ламинарном режиму течења), поставио је Дарси (Henry Darcy) 1856. године [23]. Дарсијев закон се може изразити следећом једначином

$$\mathbf{q} = -\mathbf{k}\mathbf{i}$$

где је  $\mathbf{i}$  градијент потенцијала  $\varphi$

$$\mathbf{i} = \nabla \varphi$$

Потенцијал је дефинисан као

$$\varphi = \frac{p}{\gamma} + h$$

где је  $p$  порни притисак течности,  $\gamma$  специфична тежина течности, а  $h$  висина мерног места у вертикалном правцу, мерена у односу на изабрану референтну раван (најчешће је референтна раван ниво мора).

Матрица пермеабилности  $\mathbf{k}$  за ортотропни материјал има облик

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} k_x & 0 & 0 \\ 0 & k_y & 0 \\ 0 & 0 & k_z \end{bmatrix}$$

где су  $k_x$ ,  $k_y$  и  $k_z$  коефицијенти филтрације у  $x$ ,  $y$ ,  $z$  правцу. Оператор  $\nabla$  је

$$\nabla^T = \left[ \frac{\partial}{\partial x} \quad \frac{\partial}{\partial y} \quad \frac{\partial}{\partial z} \right]$$

На основу једначине континуитета  $\nabla^T \mathbf{q} = 0$  и Дарсијевог закона, изводи се хидродинамичка једначина за нестационарно струјање, која има следећи облик

$$\nabla^T (\mathbf{k} \nabla \varphi) + Q = S \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

где је  $Q$  запремински флуks (извор или понор, као количина течности по јединици запремине порозне средине);  $S$  је ефективна порозност слоја подељена са дебљином слоја - за слободно струјање, а специфична издашност (акумулативност) - за ограничено (потопљено) струјање. Уколико је струјање стационарно десна страна једначине једнака је нули.

Посебно се напомиње да су коефицијенти филтрације  $k_i(p)$  и специфична акумулативност  $S(p)$  нелинеарне функције порног притиска  $p$ . Ове зависности се одређују емпиријским и експерименталним методама.

Уколико нису познате вредности коефицијента филтрације  $k_i(p)$  и специфичне акумулативности  $S(p)$  у незасићеној средини (изнад слободне површине где је  $p < 0$ ), препорука је да се користе коефицијенти чије су вредности 1000 пута мање од вредности коефицијената за  $p \geq 0$ .

Гранични услови који се срећу у решавању проблема струјања кроз порозну средину, описаног горњим једначинама могу бити:

а) задат потенцијал

$$\varphi = \bar{\phi}(t) \quad \text{на } \Gamma_1$$

б) задат површински проток (флукс)

$$q_n = \mathbf{n} \cdot \mathbf{q} = \bar{q}(t) \quad \text{на } \Gamma_2$$

На слободној површини и површини са цурењем важе следећи услови:

$$p = 0, \quad \varphi = z(t), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 \quad \text{на } \Gamma_3$$

где су  $\Gamma_1, \Gamma_2$ , и  $\Gamma_3$  делови површине континуума,  $\mathbf{n}$  је нормала на граничну површину, а  $t$  време.

На основу Дарсијевог закона, можемо написати једначину која мора бити задовољена за гранични услов б)

$$q_n = k_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} n_x + k_y \frac{\partial \varphi}{\partial y} n_y + k_z \frac{\partial \varphi}{\partial z} n_z \quad \text{на } \Gamma_2$$

За изведене диференцијалне једначине не постоји у општем случају аналитички облик решења. У инжењерској пракси се често користе нумеричке методе (метод централних разлика, метод коначних елемената) за решавање наведених једначина.

### А.1.2 Напонско-деформацијски процеси

Напонско-деформацијски процеси се анализирају применом еластичног и еласто-пластичног модела понашања материјала са концептом критичног стања. Анализом напонско-деформацијских процеса одређује се поље померања, повратних и неповратних деформација, напона и других релевантних величина уведених као интерне променљиве, а за дефинисане контурне и почетне услове и, у општем случају, у функцији времена.

Први корак је одређивање почетног напонског поља у стенском масиву (које егзистира у природи пре изградње бране). Изградња бране и формирање акумулације, са напонско-деформацијског аспекта, еквивалентна је доношењу основног оптерећења, односно, притиска воде на брану и филтрационих сила услед струјања подземне воде (уз сопствену тежину), на основу чега се мења почетна напонска слика која постоји у стенском масиву. Анализом се добија поље напона и деформација које одговара експлоатационим условима.

Основна величина од које се полази у механици непрекидних средина је поље померања  $\mathbf{u}$ . У свакој материјалној тачки тела, на основу померања могуће је одредити тензор укупне деформације  $\boldsymbol{\varepsilon}$ .

У статичким условима, у свакој материјалној тачки мора бити задовољен следећи услов равнотеже:

$$\nabla^T \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{F}^V = 0$$

где је  $\sigma$  тензор напона, а  $\mathbf{F}^V$  вектор запреминских сила.

Гранични услови могу бити:

а) задата померања

$$u = \bar{u} \quad \text{на } S^u$$

б) задате површинске силе

$$\mathbf{n} \cdot \sigma = \mathbf{F}^s \quad \text{на } S^\sigma$$

Коришћењем услова равнотеже и граничних услова изводи се принцип виртуалног рада, који се заснива на једнакости виртуалног рада унутрашњих и спољашњих сила. Виртуални рад унутрашњих сила представља рад напона на виртуалним деформацијама, док виртуални рад спољашњих сила представља рад запреминских и површинских сила. Ова релација представља основну једначину равнотеже у механици деформабилног тела.

$$\int_V \sigma \delta \varepsilon dV = \int_V \mathbf{F}^v \delta u dV + \int_{S^\sigma} \mathbf{F}^s \delta u dS$$

Осим наведених једначина равнотеже, неопходно је дефинисати и конститутивну релацију, односно изразе који доводе у везу напон и деформацију (и време, када је реч о материјалима осетљивим на брзину промене стања напона и деформација). Конститутивне релације у општем случају могу имати веома сложен облик. У једној широкој класи инжењерских ситуација механичко понашање стена и сродних средина може се реалистично описати коришћењем еласто-пластичног модела материјала.

Применом дефиниције теорије пластичности, до пластичних деформација у материјалу ће доћи у случају када се напонска тачка нађе на површи течења. Уколико се напонска тачка налази унутар ове површи, у текућој конфигурацији постоји само прираштај еластичних деформација. У случају еласто-пластичних деформација, прираштаја укупне деформације може бити представљен као збир еластичног и пластичног прираштаја деформације:

$$de = de^E + de^P$$

где је  $de^E$  прираштај еластичног дела деформације, док је  $de^P$  прираштај пластичног дела деформације. Вектор прираштаја пластичне деформације има правац спољашње нормале на површ пластичног потенцијала. За случај када су површи течења и пластичног потенцијала једнаке ( $f = g$ ), односно у случају асоцијативног услова течења, прираштај пластичне деформације је управан и на површ течења, док је у случају неасоцијативног услова течења прираштај пластичне деформације управан само на површ пластичног потенцијала.

У инкременталној теорији пластичности у сваком тренутку важи:

$$f \leq 0, \quad d\lambda \geq 0 \quad \text{и} \quad f \cdot d\lambda = 0$$

За случај када је напонска тачка у области еластичности, односно када нема пластичних деформација, важи да је:

$$f < 0 \quad \text{и} \quad d\lambda = 0$$

У случају када се напонска тачка нађе на површи течења, односно када постоји пластично течење, важи да је:

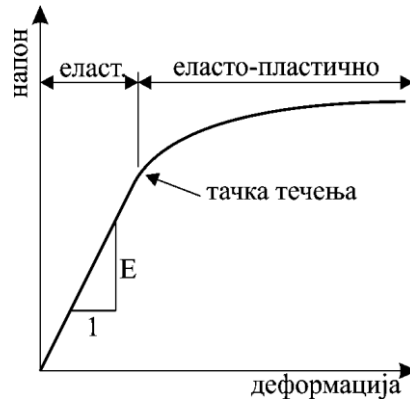
$$d\lambda > 0$$

У случају када се напонска тачка нађе на површи течења, важе следеће једнакости:

$$f = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial f^T}{\partial \boldsymbol{\sigma}} d\boldsymbol{\sigma} + \frac{\partial f^T}{\partial \kappa} d\kappa = 0$$

што представља Прагеров услов конзистентности на основу кога може бити израчунат прираштај пластичне деформације.

Зависност између напона и деформација у случају еласто-пластичних деформација у материјалу је приказана на слици испод. Јасно је да је напон директно пропорционалан деформацији (линеарно понашање) све до тачке течења, након чега се јављају и пластичне деформације, па релација између напона и деформација постаје нелинеарна.



Слика А1.1 Еласто-пластично понашања материјала [59]

Како појаву напона у материјалу изазива само еластични део деформације, у случају коришћења прираштаја напона и деформације, овај израз гласи:

$$d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}^E de^E$$

где  $\mathbf{C}^E$  представља еластичну конститутивну матрицу. Одатле следи:

$$d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}^E (de - de^P)$$

За случај модела без ојачања,  $\partial f / \partial \boldsymbol{\sigma}$  у општем случају је:

$$\frac{\partial f^T}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \left[ \frac{\partial f}{\partial \sigma_x} \quad \frac{\partial f}{\partial \sigma_y} \quad \frac{\partial f}{\partial \sigma_z} \quad \frac{\partial f}{\partial \sigma_{xy}} \quad \frac{\partial f}{\partial \sigma_{yz}} \quad \frac{\partial f}{\partial \sigma_{zx}} \right]$$

Прираштај напона  $d\boldsymbol{\sigma}$  може бити представљен у векторском облику као:

$$d\boldsymbol{\sigma}^T = [d\sigma_x \quad d\sigma_y \quad d\sigma_z \quad d\sigma_{xy} \quad d\sigma_{yz} \quad d\sigma_{zx}]$$

Коришћењем услова течења:

$$de^P = d\lambda \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$$

Једначина за  $\partial f / \partial \boldsymbol{\sigma}$  постаје:

$$df = \frac{\partial f^T}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \left( \mathbf{C}^E de - d\lambda \mathbf{C}^E \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right) + d\lambda \frac{\partial f^T}{\partial \kappa} \frac{\partial \kappa}{\partial de^P} \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = 0$$

где последњи члан у једначини представља модул ојачања или пластични модул:

$$H = - \frac{\partial f^T}{\partial \kappa} \frac{\partial \kappa}{\partial de^P} \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$$

па једначина може бити написана у облику:

$$df = \frac{\partial f^T}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \left( \mathbf{C}^E d\boldsymbol{\epsilon} - d\lambda \mathbf{C}^E \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right) - d\lambda H = 0$$

одакле се може израчунати скалар  $d\lambda$  као

$$d\lambda = \frac{\frac{\partial f^T}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \mathbf{C}^E d\boldsymbol{\epsilon}}{H + \frac{\partial f^T}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \mathbf{C}^E \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}}}$$

Коначно, прираштај напона може бити израчунат као

$$d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}^E d\boldsymbol{\epsilon} - \frac{\mathbf{C}^E \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \frac{\partial f^T}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \mathbf{C}^E}{H + \frac{\partial f^T}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \mathbf{C}^E \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}}} d\boldsymbol{\epsilon}$$

што може бити записано и краће у облику

$$d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}^{EP} d\boldsymbol{\epsilon}$$

Упоређивањем једначина следи да је

$$\mathbf{C}^{EP} = \mathbf{C}^E - \frac{\mathbf{C}^E \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \frac{\partial f^T}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \mathbf{C}^E}{H + \frac{\partial f^T}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \mathbf{C}^E \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}}}$$

што представља еласто-пластичну конститутивну матрицу или тангентну матрицу [6].

Код неких материјалних модела област еластичних деформација је ограничена са више од једне површи. У таквим случајевима, проблем може представљати повратак напонске тачке на површ течења, у случају када се она нађе у области пресека. Када се напонска тачка нађе у области где су истовремено активне две површи течења, прираштај пластичне деформације може према бити израчунат у складу са:

$$d\boldsymbol{\epsilon}^P = d\lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + d\lambda_2 \frac{\partial g_2}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$$

где су градијентима  $\partial g_1 / \partial \boldsymbol{\sigma}$  и  $\partial g_2 / \partial \boldsymbol{\sigma}$  дефинисани правци нормала на површи пластичног потенцијала  $g_1$  и  $g_2$ . Следи да је уместо једног пластичног параметра  $d\lambda$  потребно израчунати два параметра  $d\lambda_1$  и  $d\lambda_2$ . Ови параметри могу бити израчунати на сличан начин као и у случају једне површи течења, с тим што је неопходно да буду истовремено задовољена два услова, односно две функције течења из услова:

$$f_1(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\kappa}) = 0 \quad \text{и} \quad f_2(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\kappa}) = 0$$

па прираштај напона у том случају може бити израчунат коришћењем израза:

$$d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}^E d\boldsymbol{\epsilon} - d\lambda_1 \mathbf{C}^E \frac{\partial g_1}{\partial \boldsymbol{\sigma}} - d\lambda_2 \mathbf{C}^E \frac{\partial g_2}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$$

У случају када се напонска тачка нађе у области затежућих напона тако да није могуће одредити нормалу на површ течења (такозвани Апекс проблем), проблем се решава враћањем напонске тачке у врх површи течења (апекс), уз коришћење услова:

$$\sigma_{ii} = \frac{T}{3} \quad \text{и} \quad \sigma_{ij} = 0$$

где величина  $T$  представља максимални напон затезања у материјалу [6].

За одређивање равнотежне конфигурације у нелинеарној анализи најчешће се користи метода еластичног предиктора-пластичног коректора или метода повратног мапирања (*eng. Return Mapping Algorithm*). При коришћењу ове методе, први корак је одређивање такозваног пробног решења. Полази се од претпоставке да у текућем кораку постоје само еластичне деформације, па се применом Хуковог закона израчунава пробни напон  ${}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma}^E$  као:

$${}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma}^E = \mathbf{C}^E {}^{t+\Delta t}\mathbf{e}'' = \mathbf{C}^E ({}^{t+\Delta t}\mathbf{e} - {}^t\mathbf{e}^P)$$

где је  $\mathbf{C}^E$  еластична конститутивна матрица,  ${}^{t+\Delta t}\mathbf{e}''$  тензор еластичне деформације на крају временског корака (под претпоставком да у току прираштаја  $\Delta t$  није дошло до појаве пластичних деформација),  ${}^{t+\Delta t}\mathbf{e}$  тензор укупне деформације у тренутку  $t + \Delta t$ , док је  ${}^t\mathbf{e}^P$  тензор пластичне деформације у претходном кораку (тренутку  $t$ ). Након тога се, коришћењем пробних напона, израчунава вредност функције течења:

$${}^{t+\Delta t}f^E = {}^{t+\Delta t}f({}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma}^E, \kappa^E)$$

Уколико је, применом пробних напона, задовољено:

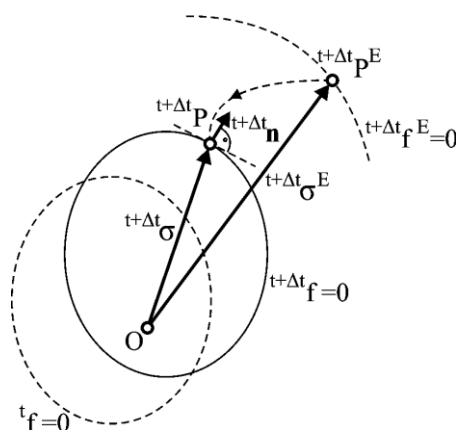
$${}^{t+\Delta t}f^E \leq 0$$

у текућем кораку постоје само еластичне деформације, односно није дошло до појаве пластичног течења и напон  ${}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma}^E$  се сматра тачним, након чега се прелази у следећи корак интеграције напона. Уколико је вредност функције течења:

$${}^{t+\Delta t}f^E > 0$$

у текућем кораку, поред еластичних, постоје и пластичне деформације, односно дошло је до појаве пластичног течења, па је неопходно кориговати пробни напон у складу са изразом:

$${}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma} = {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma}^E - \mathbf{C}^E d\mathbf{e}^P$$



**Слика А1.2** Шематски приказ методе еластичног предиктора-пластичног коректора (Return mapping) [59]

Шематски приказ методе еластичног предиктора-пластичног коректора је приказан на претходној слици. Дакле, потребно је кориговати решење које одговара напонској тачки  ${}^{t+\Delta t}P^E$  и наћи ново решење које одговара тачки  ${}^{t+\Delta t}P$ , тако да буде задовољен услов на крају корака  ${}^{t+\Delta t}f = 0$ . За израчунавање прираштаја пластичне деформације користи се услов течења.



### А.1.3 Конститутивни модели изабрани за примере у овом раду

За описивање механичког понашања материјала у рачунским примерима у овом раду коришћени су следећи материјални модели:

- Материјални модел хиперболичног типа проф. Максимовића [81] (за некохерентна тла)
- Модификовани Сам-Клау материјални модел (за глину)
- Мор-Кулонов материјални модел (за кохерентна и некохерентна тла)
- Генерализовани Ноек-Броун-ов материјални модел (за стену)

Сви наведени материјални модели коришћени су у централном нумеричком примеру у овом раду (поглавље 6 – брана Првонек). У нумеричком примеру приказаном у поглављу 5.1 коришћен је Мор-Кулонов материјални модел.

#### Материјални модел хиперболичног типа (М. Максимовић)

Полазећи од става да кохезије за ефективне напоне нема, смичућа чврстоћа тла изражена преко ефективних напона се може описати критеријумом Моровог типа у облику:

$$\tau_f = \sigma_n \tan(\varphi)$$

У горњем изразу  $\varphi$  није константа, већ зависи од ефективног нормалног напона  $\sigma_n$ . Укупан угао смичуће отпности се може описати збиром константе  $\varphi_B$  и променљиве величине  $\delta\varphi$ , при чему важи хиперболична зависност:

$$\delta\varphi = \Delta\varphi / (1 + \frac{\sigma_n}{P_N})$$

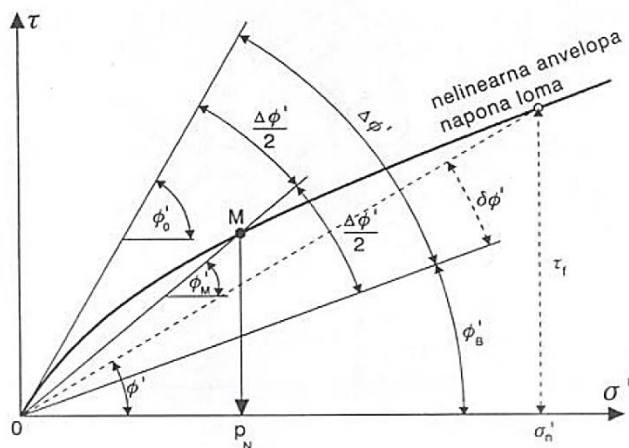
Смичућа чврстоћа је, према Максимовићевом [81] моделу:

$$\tau_f = \sigma_n \tan\left(\varphi_B + \frac{\Delta\varphi}{1 + \frac{\sigma_n}{P_N}}\right)$$

где су:

- $\varphi_B$  – базни угао трења
- $\Delta\varphi$  – максимална угаона разлика  $\varphi_0 - \varphi_B$
- $\varphi_0$  – угао при  $\sigma_n = 0$
- $P_N$  – максимални напон средњег секантног угла

Геометријско значење параметара је илустровано на следећој слици.



Слика А1.3 Нелинеарна анvelopа напона лoма и параметри (слика преузета из [57])



$$\frac{dp_0}{p_0} = -\frac{3(1+e)}{k_s} de_m^p$$

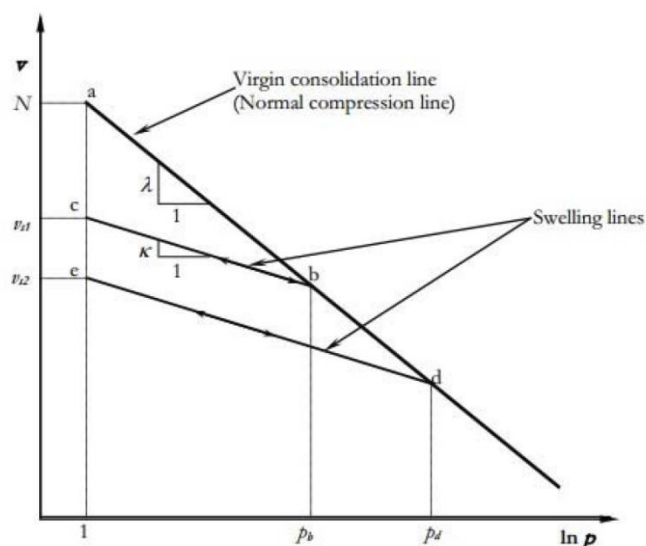
где су  $de_m^p$  прираштај пластичне деформације,  $k_s$  материјална константа, а  $e$  порозност. Порозност на крају корака  $t + \Delta t$  изражавамо преко запреминске деформације као:

$${}^{t+\Delta t}e = (1 + {}^0e) e^{t+\Delta t} e_{vr} - 1$$

где је  ${}^0e$  почетна порозност.

Параметри материјала неопходни за описивање понашања тла коришћењем модификованог Cam-Clay модела су:

- $\lambda$  – нагиб линије нормалне компресије
- $\kappa$  – нагиб линије бубрења (оптерећење-растерећење)
- $M$  – нагиб линије критичног стања
- ${}^0e$  – почетна порозност
- $p_0$  – притисак преконсолидације



Слика А1.5 Понашање при изотропној компресији (слика преузета из [57])

#### Примена SSR методе

Површ лома Cam-Clay модела  $f$  је дефинисана следећом једначином:

$$f = q^2 - M^2 \sigma_m (p_0 - \sigma_m)$$

где је  $M$  материјална константа која представља нагиб линије критичног стања. Овај параметар може бити израчунат коришћењем угла унутрашњег трења  $\varphi$  применом следеће једначине:

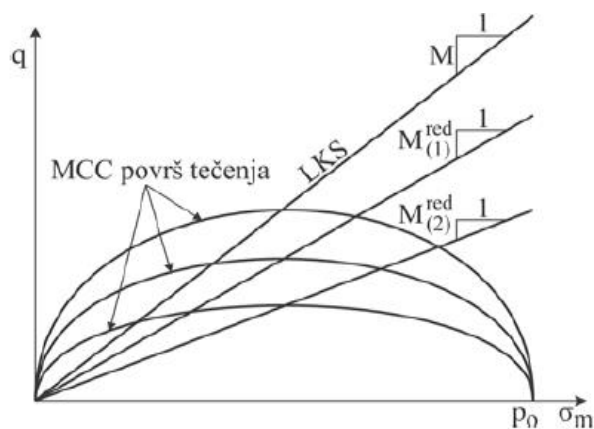
$$M = \frac{6 \sin \varphi}{3 - \sin \varphi}$$

Коришћењем горњег израза може се израчунати гранична вредност девијатора напона  $q_f$  за одговарајућу вредност средњег нормалног напона  $\sigma_m$  и одговарајући притисак преконсолидације  $p_0$ :

$$q_f = M \sqrt{\sigma_m (p_0 - \sigma_m)}$$

Степен сигурности у материјалу  $S_f$  може бити изражен односом граничне вредности  $q_f$  и текуће вредности  $q$  коришћењем израза:

$$S_f = \frac{q_f}{q}$$



Слика А1.6 Редукована смичућа чврстоћа Cam-Clay modela (слика преузета из [57])

По аналогији са претходним моделима, редукована смичућа чврстоћа материјала може бити израчуната као:

$$q_f^{red} = \frac{q_f}{F}$$

односно:

$$q_f^{red} = M^{red} \sqrt{\sigma_m(p_0 - \sigma_m)}$$

одакле следи да се редуковање смичуће чврстоће врши редуковањем параметра материјала  $M$  на следећи начин:

$$M^{red} = \frac{M}{F}$$

Дакле, редуковање смичуће чврстоће материјала коришћењем модификованог Cam-Clay модела представља редуковање материјалне константе  $M$ , односно, промену нагиба линије критичног стања.

### Генерализовани Нок-Браун-ов материјални модел

Овај материјални модел се примењује за испуцалу стенску масу. Површ лома генерализованог Нок-Браун модела је описана следећом једначином:

$$f = \frac{I_1}{3} m_b \sigma_c^{\left(\frac{1}{a}-1\right)} - s \sigma_c^{\frac{1}{a}} + 2^{\frac{1}{a}} (\sqrt{J_{2D}} \cos \theta)^{\frac{1}{a}} + m_b \sqrt{J_{2D}} \sigma_c^{\left(\frac{1}{a}-1\right)} \left( \cos \theta - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \theta \right)$$

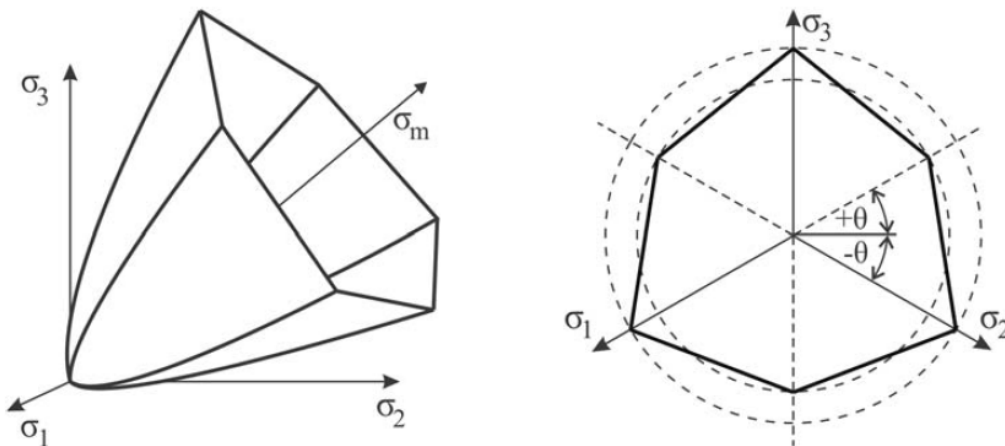
док је површ пластичног потенцијала дата са:

$$g = \frac{I_1}{3} m_{bdil} \sigma_c^{\left(\frac{1}{a}-1\right)} - s \sigma_c^{\frac{1}{a}} + 2^{\frac{1}{a}} (\sqrt{J_{2D}} \cos \theta)^{\frac{1}{a}} + m_{bdil} \sqrt{J_{2D}} \sigma_c^{\left(\frac{1}{a}-1\right)} \left( \cos \theta - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \theta \right)$$

Лодев угао, који фигурише у претходним једначинама, израчунава се изразом:

$$\theta = \frac{1}{3} \arcsin \left( -\frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J_{3D}}{J_{2D}^{\frac{3}{2}}} \right)$$

Величине  $I_1$  и  $J_{2D}$  представљају прву инваријанту напона и другу инваријанту девијатора напона, док су  $m_b$ ,  $\sigma_c$ ,  $s$  и  $a$  материјалне константе модела. Уколико је  $m_{bdil} = m_b$  услов течења постаје асоцијативни.



Слика А1.7 Површ течења Генерализованог Ноек-Вроун-овог модела (слика преузета из [57])

У систему главних напона овај услов се дефинише на следећи начин:

$$\sigma_1 = \sigma_3 + \sigma_{ci} \left( m_b \frac{\sigma_3}{\sigma_{ci}} + s \right)^a$$

где су  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$  максимални и минимални ефективни главни напони при лому,  $m_b$  Ноек-Вроун-ова константа за стенску масу,  $s$  и  $a$  константе које зависе од карактеристика стенске масе, а  $\sigma_{ci}$  једнооксијална чврстоћа на притисак за узорак интактне стенске масе.

Да би материјални модел могао да се примењује потребне су три величине као улазни параметри за прорачун на основу којих се изводе остале материјалне константе:

- $\sigma_{ci}$  – једнооксијална чврстоћа на притисак за узорак интактне стенске масе
- $m_i$  – Ноек-Вроун-ова константа за интактну стенску масу
- $GSI$  (енг. *Geological Strength Index*) индекс за стенску масу

### **Mohr-Coulomb-ов материјални модел**

Мор-Кулонов материјални модел (енг. Mohr-Coulomb) представља један од најчешће коришћених модела за симулацију механичког понашања грануларних материјала. Овај модел дефинише директну зависност смичућег напона на површи течења  $\tau$  од нормалног напона  $\sigma$ . На основу ове законитости, до пластичног течења у материјалу ће доћи када смичући напон достигне вредност изражену једначином:

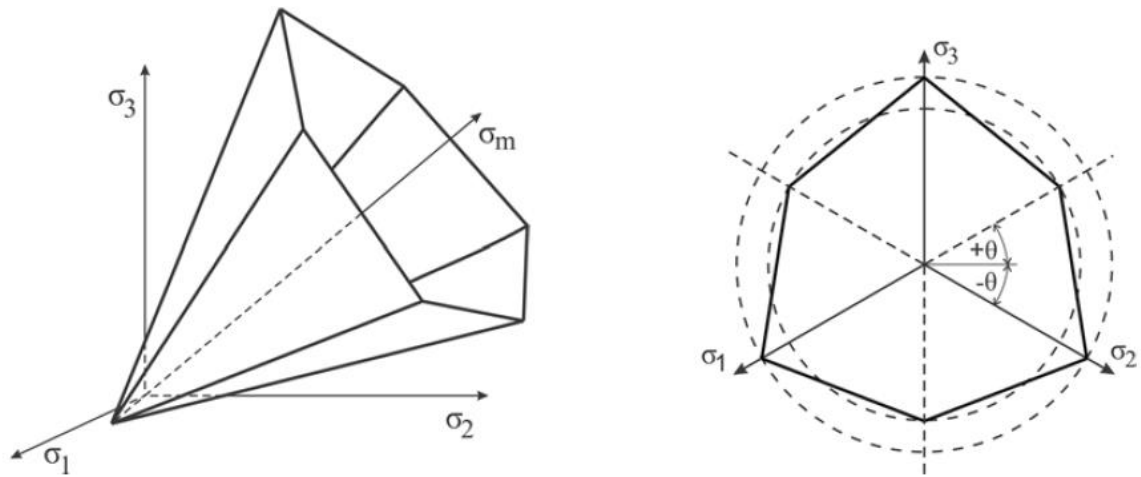
$$\tau = c + \sigma \tan \varphi$$

За дефинисање овог услова неопходна су три параметра: кохезија материјала  $c$ , угао унутрашњег трења  $\varphi$  и угао дилатанце  $\psi$ .

Максимални напон затезања у материјалу  $\sigma_t$  је дефинисан изразом:

$$\sigma_t = \frac{2c \cos \varphi}{1 + \sin \varphi}$$

Површ течења овог модела има облик неправилне шестостране пирамиде чија се оса поклапа са хидростатичком осом у простору главних напона и приказана је на следећој слици.



**Слика А1.8** Површ течења Mohr-Coulmb-овог модела (слика преузета из [57])

Једначина површи течења овог материјалног модела изражена коришћењем инваријанти напона има облик:

$$f = \frac{I_1}{3} \sin \varphi + \sqrt{J_{2D}} \left( \cos \theta - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \theta \sin \varphi \right) - c \cos \varphi$$

док се једначина површи пластичног потенцијала у општем случају разликује од површи течења (неасоцијативни услов течења) и дефинисана је једначином:

$$g = \frac{I_1}{3} \sin \psi + \sqrt{J_{2D}} \left( \cos \theta - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \theta \sin \psi \right)$$

Величине  $I_1$  и  $J_{2D}$  представљају прву инваријанту напона и другу инваријанту девијатора напона, док величина  $\theta$  представља Лодеов угао.

## АНЕКС 2 – ПРЕГЛЕД ОСНОВНИХ ПОЈМОВА ТЕОРИЈЕ ВЕРОВАТНОЋЕ

**Вероватноћа** је централни појам у математичкој статистици и теорији вероватноће, који омогућава квантификацију неизвесности у различитим ситуацијама. Постоје два различита приступа у дефинисању појма вероватноће и како она треба да се тумачи: фреквенционистичко (или класично) тумачење и Бајезијанско тумачење.

Фреквенционистичко тумачење вероватноће базира се на идеји дугорочне релативне учесталости. Када се посматрани случајни догађај (*experiment*) велики број пута понавља у истим условима, вероватноћа неког исхода  $A$  дефинише се као [35]:

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k}{n}$$

где је:

- $n$  укупан број могућих догађаја у посматраном случајном процесу (број експеримената)
- $k$  број пута у којима се исход  $A$  догодио.

Како  $n$  расте, однос  $k/n$  се стабилизује око тачне вредности вероватноће  $P(A)$ , што математички гарантује закон великих бројева. Са фреквенционистичке тачке гледишта, вероватноћа је својство природе, односно самог (експерименталног) процеса. Она карактерише дугорочно понашање посматраног процеса. У пракси, велики број статистичких метода се ослања на фреквенционистичко виђење.

Бајесијански приступ истиче идеју да вероватноћа представља меру уверења (енг. *belief*) или степен субјективне сигурности у то да ће се неки догађај остварити. Ово гледиште је засновано на индуктивној логици и укључује формално правило за ажурирање уверења у присуству нових доказа, тзв. Бајесову теорему, која гласи [35]:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) P(A)}{P(B)}$$

где је:

- $P(A|B)$  вероватноћа догађаја  $A$  након што се десио догађај  $B$  (нови доказ) – енг. *Posterior*
- $P(A)$  априори вероватноћа догађаја  $A$  која одражава почетно уверење пре него што се десио догађај  $B$  – енг. *Prior*
- $P(B|A)$  вероватноћа догађаја  $B$  под претпоставком да се догађај  $A$  десио
- $P(B)$  вероватноћа догађаја  $B$  независно од било ког другог догађаја

Основна разлика у односу на фреквенционизам је у томе што бајесијански приступ дозвољава (и чак подстиче) укључивање субјективних, стручних или претходних знања у анализу. Временом, са акумулацијом нових података, априори вероватноћа еволуира у постериорну, што чини суштину Бајезијанског приступа.

У пракси се данас често користи синтеза оба приступа. Бајесијански модели често укључују информативне приоре засноване на претходним фреквенционистичким анализама. Методологија која је предложена у овом раду за интеграцију података осматрања насуте бране у пробабилитичку анализу сигурности инспирисана је бајесијанским тумачењем појма вероватноће у коме подаци осматрања представљају нове информације у прорачуну вероватноће лома, док се почетно уверење заснива на резултатима фреквенционистичке базе

Монте-Карло анализе чији су улазни параметри случајне променљиве величине које описују филтрационо и напонско-деформацијско понашање система.

У оквиру теорије вероватноће и математичке статистике, кључне концепте који омогућавају прецизно моделирање случајних појава чине појмови случајне променљиве, као и функције густине вероватноће (PDF) и функције расподеле вероватноће (CDF) које су уско повезане са случајним променљивим.

**Случајна променљива** је математичка функција која сваком случајном исходу (*random outcome*) у простору свих могућих исхода (*sample space*) посматраног догађаја (*experiment*) додељује један реалан број. На тај начин случајна променљива омогућава једноставније квантификовање и анализу случајних појава. Случајне променљиве најчешће се обележавају великим словом (нпр.  $X$ ). Случајне променљиве могу бити континуалне или дискретне. Уколико нека случајна променљива  $X$  има континуалну расподелу то значи да она може преузимати било коју вредност из неког непрекидног опсега реалних бројева, за разлику од дискретних расподела код којих је случајна променљива ограничена на коначан (пребројив) број вредности [26].

За описивање распоређености вероватноће у скупу могућих вредности континуалне случајне променљиве користи се **функција густине вероватноће** (*Probability Density Function – PDF*). Математички записано, за случајну променљиву  $X$ , она представља функцију [26]

$$f_X(x) : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty),$$

која задовољава услов

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1$$

Тиме функција густине вероватноће испуњава два основна захтева:

- Не-негативност –  $f_X(x) > 0$  за свако реално  $x$
- Нормализација – укупна површина испод криве  $f_X(x)$  једнака је 1, што представља укупну вероватноћу.

Захваљујући овим условима, вероватноћа да се случајна променљива  $X$  нађе у неком интервалу  $[a, b]$  може се израчунати према следећем изразу:

$$P(a \leq x \leq b) = \int_a^b f_X(x) dx$$

Интуитивно гледано, функција густине вероватноће представља поље потенцијала вредности случајне променљиве. Што је вредност  $f_X(x)$  већа, већа је и вероватноћа да ће се  $X$  јавити око тачке  $x$ .

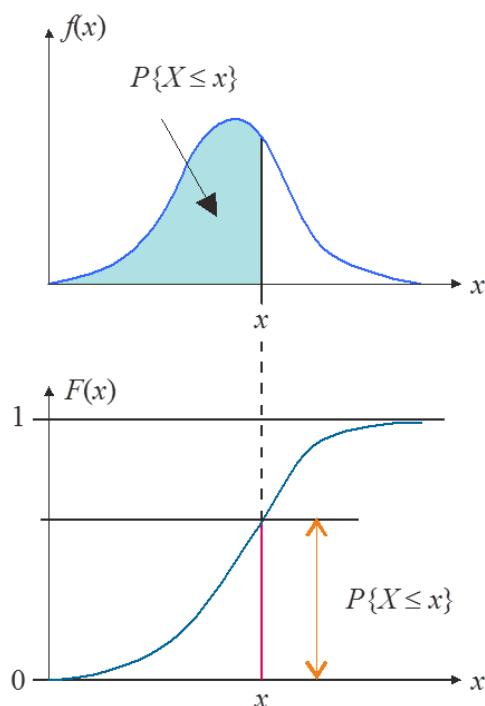
**Функција расподеле вероватноће** (*Cumulative Distribution Function – CDF*), означава се са  $F_X(x)$  и дефинише се за сваку случајну променљиву  $X$  (било дискретну или континуалну) као [26]:

$$F_X(x) = P(X \leq x)$$

Ова функција означава вероватноћу да случајна променљива  $X$  поприми вредност мању или једнаку од неке величине  $x$  из скупа могућих реалних вредности. Функција  $F_X(x)$  увек узима вредности између 0 и 1 и има неоппадајући карактер (*monotonically non-decreasing*).

На следећој слици илустровани су концепти функција густине и расподеле вероватноће.





Слика А2.1 Функције вероватноће случајне променљиве  $X$  (слика преузета из [25])

У наставку су описани појмови помоћу којих се прецизније карактеришу положај и облик функција густине вероватноће.

**Средња вредност (очекивана вредност)** је један од основних и најзначајнијих статистичких параметара, јер служи као мера централне тенденције случајне променљиве. Нека је  $X$  континуална случајна променљива. Средња вредност дефинише се као [26]:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx$$

Интуитивно, средња вредност представља просечну вредност која се очекује ако се случајни експеримент понови велики број пута. Она није нужно и највероватнији исход (модус) случајне променљиве.

**Модус** (*eng. mode*) је најчешће дефинисан као вредност случајне променљиве која има највећу вероватноћу (у дискретном случају) или највећу густину (у континуалном случају). Другим речима, то је вредност око које се дистрибуција највише концентрише, односно максимум функције густине вероватноће (PDF) [26].

**Медијана** представља меру за централну тенденцију која се дефинише као вредност испод које се налази половина вероватноће (или половина података, у емпиријској пракси), а изнад које се налази друга половина. За разлику од средње вредности, медијана је мање осетљива на екстремне вредности и асиметрију у расподела [26]. За медијану важи  $F_X(m) = 0.5$ .

Средња вредност описује просек. У многим симетричним дистрибуцијама (попут нормалне), модус је једнак медијани и једнак средњој вредности. Међутим, код асиметричних дистрибуција, оне се могу знатно разликовати (нпр. лог-нормална или експоненцијална). На пример, код лог-нормалне дистрибуције, модус је мањи од медијане, а медијана мања од средње вредности.

Централни моменти представљају мере које описују различите аспекте расподеле случајне променљиве у смислу облика расподеле око њене средње вредности. Други централни момент назива се **варијанса** расподеле и она описује колико су могуће вредности случајне променљиве разудане у односу на средњу вредност. Математички дефинисано, варијанса

(обележава се са  $Var[X]$  или  $V[X]$ ) је очекивана (просечна) вредност квадратног одступања од средње вредности [26]:

$$Var[X] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2]$$

Мала вредност варијансе значи да је скуп могућих вредности случајне променљиве близу средње вредности, док велика вредност варијансе значи да значајан део скупа могућих вредности значајно одступа од средње вредности. Варијанса представља веома важан појам у процени ризика, јер функције које имају већу варијансу носе са собом већи ризик.

Још погоднија мера разумењености од варијансе представља **стандардна девијација** променљиве која се дефинише као квадратни корен варијансе [26]. Разлог због ког се у пракси често преферира стандардна девијација у односу на варијансу је то што има исту димензију као и случајна променљива.

У многим познатим расподелама, нарочито нормалној (Gaussian), устаљено је да се средња вредност обележава са  $\mu$ , варијанса са  $\sigma^2$  а стандардна девијација са  $\sigma$ . Ова нотација је типична за инжењерске проблеме и, иако није математички ригорозна, усвојена је у овом раду.

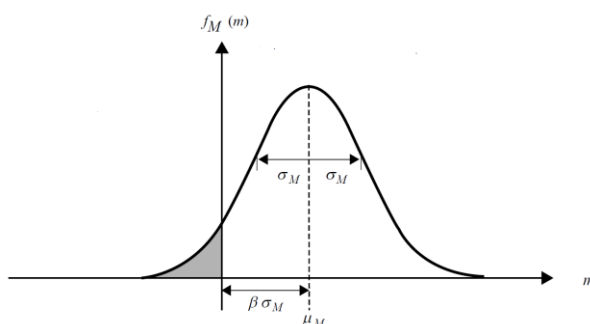
Често није лако само на основу стандардне девијације закључити да ли је варијабилност случајне променљиве велика или мала. На пример, стандардна девијација  $\sigma = 1$  може указати на значајну варијабилност случајне променљиве ако је средња вредност истог реда величине, али и на занемарљиву варијабилност (готово детерминистичку ситуацију) уколико је средња вредност реда величине сто или више пута већа [25]. Зато се у пракси користи још један показатељ варијабилности који се назива **кофицијент варијације**. Коефицијент варијације (енг. *Coefficient of Variation*, ознака COV) представља бездимензиону меру распршености (варијације) случајне променљиве  $X$ , која се дефинише као однос стандардне девијације према апсолутној вредности средње вредности. Формално [26]:

$$COV[X] = \frac{\sigma_x}{|\mu_x|}$$

Треба напоменути да уколико је средња вредност  $\mu_x$  једнака нули или се налази близу нуле, коефицијент варијације или није дефинисан или може попримити изузетно велике вредности, па постаје неинформативан. Због тога се у инжењерској пракси чешће користи реципрочна вредност коефицијента варијације који се назива **индекс поузданости**<sup>7</sup> и обележава са  $\beta$ :

$$\beta = \frac{\mu_x}{\sigma_x}$$

Индекс поузданости сугерише колико стандардних девијација је средња вредност расподеле удаљена од кординатног почетка.



Слика А2.2 Илустрација значења коефицијента поузданости (слика преузета из [25])

<sup>7</sup> Индекс поузданости технички не спада у основне појмове теорије вероватноће, већ теорије поузданости. Он указује на то колико стандардних девијација је средња вредност (највероватније стање) функције одговора система удаљено од граничног стања – видети поглавље 3.2.1.

За потребе квантитативне анализе варијабилности система који обухвата случајне променљиве, поред поменутих показатеља користи се (уколико је то потребно) и **коэффициент корелације**, који изражава степен зависности (увезаности) између променљивих. Моделирање зависности променљивих може се урадити на више начина применом различитих метода за корелацију параметара као што су: Пирсонов коэффициент корелације (описује линеарну зависност између променљивих), Спирманов ранг корелациони коэффициент (мери монотонску зависност), Кендалов тау-корелациони коэффициент (такође мери монотонску зависност), Факторска анализа (идентификује скривене факторе који утичу на корелације променљивих), Копула приступ (напредни метод за моделирање зависности који може укључити нелинеарне и високо димензионалне зависности) и многи други.

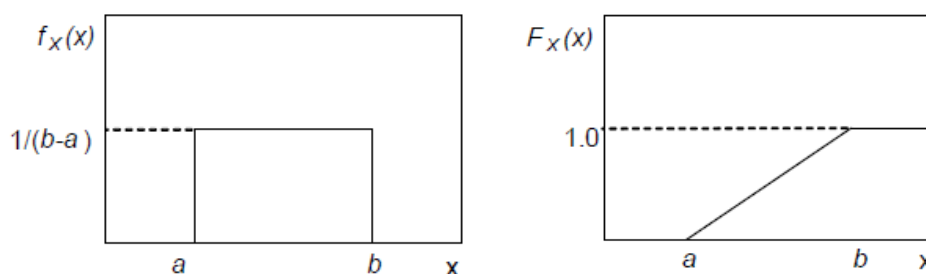
Постоји велики број различитих функција расподеле вероватноће (униформна, троугаона, експоненцијална, бета, гама, експоненцијална, Бернулијева, Рејлејева, Веибулова итд.), а најпознатије од свих су оне из фамилије нормалних расподела (нормална и лог-нормална), које се најчешће користе у инжењерској пракси за описивање случајних променљивих као што су материјалне карактеристике тла [25]. У наставку су описане функције расподеле које су разматране у овом раду: униформна, нормална и лог-нормална [8].

**Униформна расподела** (енг. *Uniform Distribution*) је једна од најједноставнијих и интуитивно најјаснијих расподела вероватноће: она описује променљиве где су све вредности у одређеном опсегу подједнако вероватне. Униформна функција расподеле дефинише се као:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 0, & x < a \text{ и } x > b \end{cases}$$

Униформна расподела има следећу примену:

- Када се не располаже детаљнијим информацијама, често се претпоставља да је расподела униформна на интервалу  $[a, b]$ .
- Код насумичног узорковања најчешће се генеришу псеудо-случајни бројеви из униформне расподеле са опсегом  $[0,1]$  која представља основу за многе симулационе технике.



Слика А2.3 Униформна функција расподеле вероватноће: (лево) PDF, (десно) CDF (слика преузета из [25])

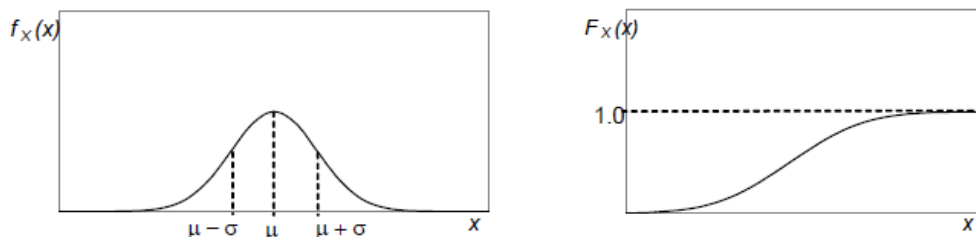
**Гаусова (нормална) расподела** (енг. *Gaussian* или *Normal Distribution*) једна је од најзначајнијих расподела у теорији вероватноће и статистици. Широко је примењивана у многим областима – од природних и техничких наука до друштвених, због своје математичке једноставности и изразите практичне релевантности. Карактерише је симетрија и математичка једноставност, јер су потребна само два параметра (средња вредност и стандардна девијација) да би била у потпуности дефинисана [25]:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu_x)^2}{2\sigma_x^2}}, \quad -\infty < x < \infty$$

Назива се и „звонаста расподела“ због карактеристичне глатке криве у облику звона са максимумом у средњој вредности  $\mu$  и „реповима“ који се приближавају оси  $x$ , али теоретски досежу бесконачност. У нормалној дистрибуцији, проценат могућих вредности променљиве који се налазе унутар одређеног броја стандардних девијација од средње вредности је приближно једнак:

- 68,27% у опсегу  $[\mu - 1\sigma, \mu + 1\sigma]$
- 95,45% у опсегу  $[\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]$
- 99,73% у опсегу  $[\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]$

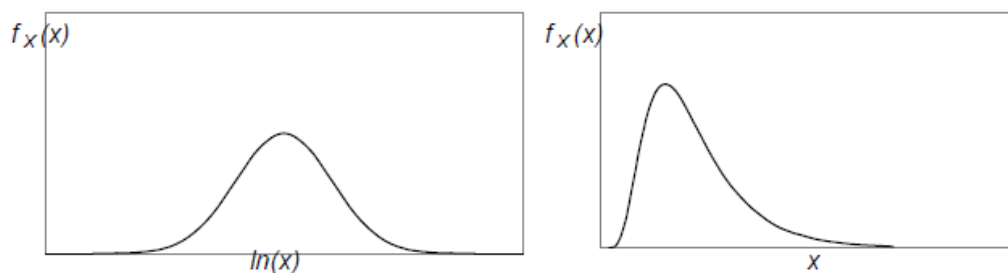
Вредности променљиве са удаљеношћу од средње вредности већом од три стандардне девијације су веома ретке и често се сматрају аномалијама.



**Слика А2.4** Нормална функција расподеле вероватноће: (лево) PDF, (десно) CDF  
(слика преузета из [25])

Уколико су вредности логаритама случајне променљиве нормално распоређене, онда су вредности саме случајне променљиве распоређене сагласно функцији **лог-нормалне расподеле**. Уколико нека променљива значајно варира и потенцијално покрива више редова величине (као на пример коефицијент филтрације за одређено тло), она обично прати лог-нормалну расподелу. Ову расподелу карактерише својство да не обухвата негативне вредности променљиве. Математички се дефинише на следећи начин:

$$f_X(x) = \frac{1}{x\sigma_{\log(x)}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\log(x) - \mu_{\log(x)})^2}{2\sigma_{\log(x)}^2}}, \quad x > 0$$



**Слика А2.5** Лог-нормална функција расподеле вероватноће:  
(лево) PDF променљиве  $\log(X)$ , (десно) PDF променљиве  $X$ ,  
(слика преузета из [25])

## АНЕКС 3 – PYTHON ПРОГРАМИ

У овом Анексу приказани су компјутерски кодови написани у програмском језику Python који су коришћени у студији случаја (поглавље 6).

### Програм 1. Узорковање коефицијената филтрације за пробабилистичку анализу (поглавље 6.2.3)

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.stats import norm
import pandas as pd

# material names and their log(k) distribution parameters
materials      = ['Kamen L-1', 'Kamen L-2', 'Kamen P-4',
                  'Glina', 'Filter f1', 'Filter f2',
                  'Veštački teren', 'Stena']
mean_values    = [-2.00, -2.00, -2.50, -10.00, -5.00, -3.00, -4.00, -7.00]
std_dev_values = [ 2.00,  1.90,  1.50,  0.7,  1.0,  1.0,  1.0,  0.5]

# x-axis range for PDF plots
x = np.linspace(-15, 5, 1000)

def smooth_taper(x, mean, std, cutoff=-1, taper=0.5):
    # apply smooth taper to PDF tail beyond cutoff
    pdf = norm.pdf(x, mean, std)
    factor = np.clip((cutoff - x) / taper, 0, 1)
    return np.where(x < cutoff, pdf, factor * pdf)

def sample_tapered(mean, std, n=10000, cutoff=-1, taper=0.5):
    # generate samples with smooth taper near cutoff
    s = np.random.normal(mean, std, n)
    for i, v in enumerate(s):
        if v > cutoff:
            excess = v - cutoff
            t = np.random.uniform(0.85, 1.0)
            s[i] = cutoff - t * excess
    return s

# plot original normal distributions
plt.figure(figsize=(8, 5))
for m, mu, sd in zip(materials, mean_values, std_dev_values):
    plt.plot(x, norm.pdf(x, mu, sd), label=m)
plt.axvline(-1, linestyle='--') # cutoff line at log(k) = -1
plt.xlabel('log(k)')
plt.ylabel('PDF')
plt.legend(fontsize=6)
plt.tight_layout()
plt.show()

# separate materials needing tapering
adj, mu_a, sd_a = [], [], []
unch, mu_u, sd_u = [], [], []
for m, mu, sd in zip(materials, mean_values, std_dev_values):
    if mu + 3*sd > -1:
        adj.append(m); mu_a.append(mu); sd_a.append(sd)
    else:
        unch.append(m); mu_u.append(mu); sd_u.append(sd)

# plot adjusted and unchanged distributions
plt.figure(figsize=(8, 5))
for m, mu, sd in zip(unch, mu_u, sd_u):
    plt.plot(x, norm.pdf(x, mu, sd), label=m)
```

```

for m, mu, sd in zip(adj, mu_a, sd_a):
    plt.plot(x, smooth_taper(x, mu, sd), label=m)
plt.axvline(-1, linestyle='--')
plt.xlabel('log(k)')
plt.ylabel('PDF')
plt.legend(fontsize=6)
plt.tight_layout()
plt.show()

# sample from each distribution and convert to k
data = {}
for m, mu, sd in zip(materials, mean_values, std_dev_values):
    if mu + 3*sd > -1:
        data[m] = sample_tapered(mu, sd)
    else:
        data[m] = np.random.normal(mu, sd, 10000)

df = pd.DataFrame(data)
df_k = df.apply(lambda col: 10**col)
df_out = pd.concat([df.add_prefix('logk_'),
                    df_k.add_prefix('k_')], axis=1)

# save results to Excel (replace with your desired path)
output_file = 'path/to/output.xlsx'
df_out.to_excel(output_file, index=False)
print(f'Results saved to {output_file}')

```

## Програм 2. Фитовање параметара чврстоће према резултатима тестова смицања (поглавље 6.2.3)

```

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.optimize import curve_fit, differential_evolution
from scipy.stats import norm

# Maksimović strength function with fixed P_N
def maks_fixed(sigma, phi_B, delta_phi):
    P_N = 450 # constant (kPa)
    phi = phi_B + delta_phi / (1 + sigma / P_N)
    return sigma * np.tan(np.radians(phi))

# Insert your shear-test data here ( $\sigma$  and  $\tau$  in kPa)
materials = {
    "Kamen L-1": {
        "sigma_fit": np.array([...]), # e.g. [100, 200, ...]
        "tau_fit": np.array([...]), # e.g. [80, 150, ...]
    },
    # add more materials as needed..
}

# bounds for curve_fit and differential_evolution
bounds_cf = ([1, 1], [55, 55])
bounds_de = [(1, 55), (1, 55)]

# objective to minimize max-gap + mean-gap + bias
def gap_obj(params, sigma, tau, direction="upper",
            wmax=1.0, wmean=0.5, bias=0.1):
    phi_B, dphi = params
    tau_b = maks_fixed(sigma, phi_B, dphi)
    if direction == "upper":
        res = tau_b - tau
    else:
        res = tau - tau_b
    max_gap = -np.min(res[res < 0]) if np.any(res < 0) else 0
    mean_gap = np.mean(res[res > 0]) if np.any(res > 0) else 0
    return wmax * max_gap + wmean * mean_gap + bias * mean_gap

results = {}

```

```

for mat, data in materials.items():
    s, t = data["sigma_fit"], data["tau_fit"]

    # best-fit
    p0 = [25, 35]
    params, _ = curve_fit(maks_fixed, s, t, p0=p0, bounds=bounds_cf)

    # upper & lower boundary fits
    up = differential_evolution(gap_obj, bounds_de,
                               args=(s, t, "upper"),
                               maxiter=1e4, popsize=15, tol=1e-6).x
    lo = differential_evolution(gap_obj, bounds_de,
                               args=(s, t, "lower"),
                               maxiter=1e4, popsize=15, tol=1e-6).x

    # generate smooth curves
    sigma_vals = np.linspace(0, s.max()*1.1, 1000)
    tau_fit = maks_fixed(sigma_vals, *params)
    tau_up = maks_fixed(sigma_vals, *up)
    tau_lo = maks_fixed(sigma_vals, *lo)

    results[mat] = (params, up, lo, sigma_vals, tau_fit, tau_up, tau_lo)

    # plot measured data and fitted boundaries
    plt.figure(figsize=(6,4))
    plt.scatter(s, t, alpha=0.7)
    plt.plot(sigma_vals, tau_fit, c='r')
    plt.plot(sigma_vals, tau_up, c='g', linestyle='--')
    plt.plot(sigma_vals, tau_lo, c='purple', linestyle='--')
    plt.xlabel('σ (kPa)')
    plt.ylabel('τ (kPa)')
    plt.title(mat)
    plt.legend(['fit', 'upper', 'lower'], fontsize=6)
    plt.grid(True)
    plt.tight_layout()
    plt.show()

```

### Програм 3. LHS узорковање 2000 података за тренинг мета модела и узорковање 200 података за валидацију модела (поглавље 6.4.1)

```

import numpy as np
from pyDOE import lhs
from scipy.spatial import distance
import pandas as pd
import random
import matplotlib.pyplot as plt
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D # noqa: F401

# Step 1: define parameter ranges (low, high)
parameter_ranges = {
    "logk_kamen_l1": (-8.0, -1.0),
    "logk_kamen_l2": (-7.7, -1.0),
    "logk_kamen_p4": (-7.0, -1.0),
    "logk_glina": (-12.1, -7.9),
    "logk_filter_f1": (-8.0, -2.0),
    "logk_filter_f2": (-6.0, -1.0),
    "logk_terrain": (-7.0, -1.0),
    "logk_stena_LO": (-8.5, -5.5),
    "logk_stena_DO": (-8.5, -5.5),
    "logk_zavesa_LO": (-10.5, -5.5),
    "logk_zavesa_DO": (-10.5, -5.5),
    "phiB_kamen_l1": (16.46, 30.02),
    "phiB_kamen_l2": (20.07, 26.07),
    "phiB_kamen_p4": (20.19, 25.53),
    "deltaPhi_kamen_l1": (17.13, 54.63),
    "deltaPhi_kamen_l2": (7.91, 46.85),
    "deltaPhi_kamen_p4": (0.00, 38.84),

```

```

    "M_glina":      (0.3, 0.7),
    "lambda_glina": (0.04, 0.1),
    "kappa_glina": (0.007, 0.009),
    "p0_glina":    (100.0, 600.0),
}

# Step 2: generate 2,000 LHS training samples
n_params = len(parameter_ranges)
n_train = 2000
lhs_raw = lhs(n_params, samples=n_train)
samples = np.zeros_like(lhs_raw)

# scale samples into each parameter's range
keys = list(parameter_ranges.keys())
for i, key in enumerate(keys):
    low, high = parameter_ranges[key]
    samples[:, i] = lhs_raw[:, i] * (high - low) + low

# enforce zavesa ≤ stena for LO and DO zones
for zone in ("LO", "DO"):
    idx_st = keys.index(f"logk_stena_{zone}")
    idx_zv = keys.index(f"logk_zavesa_{zone}")
    mult = np.random.uniform(-2, 0, size=n_train)
    samples[:, idx_zv] = samples[:, idx_st] + mult

train_df = pd.DataFrame(samples, columns=keys)

# Step 3: generate 200 validation samples via max-min distance
n_val = 200
candidates = np.random.rand(5000, n_params)
cand_scaled = np.zeros_like(candidates)
for i, key in enumerate(keys):
    low, high = parameter_ranges[key]
    cand_scaled[:, i] = candidates[:, i] * (high - low) + low
for zone in ("LO", "DO"):
    idx_st = keys.index(f"logk_stena_{zone}")
    idx_zv = keys.index(f"logk_zavesa_{zone}")
    mult = np.random.uniform(-2, 0, size=5000)
    cand_scaled[:, idx_zv] = cand_scaled[:, idx_st] + mult

# choose farthest-from-training points
dists = distance.cdist(cand_scaled, samples).min(axis=1)
idx_sorted = np.argsort(dists)
val_df = pd.DataFrame(cand_scaled[idx_sorted[-n_val:]], columns=keys)

# Step 4: save to Excel (replace with your path)
for df, sheet in [(train_df, "Training"), (val_df, "Validation")]:
    df_k = 10 ** df.filter(like="logk_")
    df_out = pd.concat([df, df_k.add_prefix("k_")], axis=1)
    df_out.to_excel(f"path/to/{sheet}_samples.xlsx", sheet_name=sheet, index=False)

# (Optional) Step 5: quick 3D scatter check
fig = plt.figure(figsize=(6,6))
ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')
ax.scatter(train_df["phiB_kamen_l1"], train_df["logk_glina"],
           train_df["deltaPhi_kamen_p4"], alpha=0.5, label="Train")
ax.scatter(val_df["phiB_kamen_l1"], val_df["logk_glina"],
           val_df["deltaPhi_kamen_p4"], alpha=0.5, label="Val")
ax.set_xlabel("phiB_kamen_l1"); ax.set_ylabel("logk_glina");
ax.set_zlabel("deltaPhi_kamen_p4")
ax.legend(fontsize=6); plt.tight_layout(); plt.show()

```

#### Програм 4. Тренинг мета модела методом машинског учења XGBoost (поглавље 6.4.1)

```

import numpy as np
import pandas as pd
import matplotlib.pyplot as plt
import random

```



```

from xgboost import XGBRegressor
from sklearn.multioutput import MultiOutputRegressor
from sklearn.preprocessing import MinMaxScaler
from sklearn.metrics import r2_score
import joblib

# 1. Load data (21 inputs, 55 outputs)
file_path = "path/to/your/data.xlsx" # replace with actual file
X_train_df = pd.read_excel(file_path, sheet_name='Trening parametri')
X_valid_df = pd.read_excel(file_path, sheet_name='Validacija parametri')
Y_train = pd.read_excel(file_path, sheet_name='Rezultati Trening').values
Y_valid = pd.read_excel(file_path, sheet_name='Rezultati Validacija').values

# 2. Log10-transform permeability columns
all_cols = X_train_df.columns.tolist()
k_cols = [c for c in all_cols if c.startswith('k_')]
epsilon = 1e-12
for df in (X_train_df, X_valid_df):
    for c in k_cols:
        df[c] = np.log10(df[c].clip(lower=epsilon) + epsilon)

# 3. Scale inputs
scaler_X = MinMaxScaler()
X_train = scaler_X.fit_transform(X_train_df)
X_valid = scaler_X.transform(X_valid_df)

# 4. Train multi-output XGBoost
params = {
    'n_estimators': 800, 'max_depth': 6, 'learning_rate': 0.02,
    'subsample': 0.8, 'colsample_bytree': 1.0,
    'reg_alpha': 0.1, 'reg_lambda': 2,
    'random_state': 42, 'eval_metric': 'rmse'
}
base = XGBRegressor(**params)
model = MultiOutputRegressor(base, n_jobs=-1)
model.fit(X_train, Y_train)

# 5. Quick validation
Y_pred = model.predict(X_valid)
print("R2 overall:", r2_score(Y_valid.flatten(), Y_pred.flatten()))
print("R2 FS only:", r2_score(Y_valid[:,0], Y_pred[:,0]))

# 6. Save artifacts
joblib.dump(model, "meta_model.pkl")
joblib.dump(scaler_X, "scaler_X.pkl")
joblib.dump(all_cols, "column_list.pkl")
joblib.dump(k_cols, "permeability_cols.pkl")

```

### Програм 5. Валидација мета модела кроз поређење са резултатима МКЕ анализе (поглавље 6.4.2)

```

import numpy as np
import pandas as pd
import joblib
import matplotlib.pyplot as plt
import seaborn as sns
from pathlib import Path

# load artifacts
MODEL_PKL = "meta_model.pkl"
SCALER_PKL = "scaler_X.pkl"
COLS_PKL = "column_list.pkl"
DATA_XLS = "path/to/data.xlsx"

model = joblib.load(MODEL_PKL)
scaler = joblib.load(SCALER_PKL)
columns = joblib.load(COLS_PKL)

```

```

# read FEM outputs
df_tr = pd.read_excel(DATA_XLS, sheet_name="Rezultati Trening")
df_val = pd.read_excel(DATA_XLS, sheet_name="Rezultati Validacija")
df_fem = pd.concat([df_tr, df_val], ignore_index=True)
output_names = df_fem.columns.tolist()

# generate random inputs within previous parameter bounds
PARAM_RANGES = {
    "k_Kamen_L1": (-8.0, -1.0), "k_Kamen_L2": (-7.7, -1.0),
    "k_Kamen_P4": (-7.0, -1.0), "k_Glina": (-12.1, -7.9),
    "k_Filter_f1": (-8.0, -2.0), "k_Filter_f2": (-6.0, -1.0),
    "k_Veš_teren": (-7.0, -1.0),
    "k_Stena_LO": (-8.5, -5.5), "k_Stena_DO": (-8.5, -5.5),
    "k_Zavesa_LO": (-10.5, -5.5), "k_Zavesa_DO": (-10.5, -5.5),
    "phiB_L1": (16.46, 30.02), "phiB_L2": (20.07, 26.07),
    "phiB_P4": (20.19, 25.53),
    "dPhi_L1": (17.13, 54.63), "dPhi_L2": (7.91, 46.85),
    "dPhi_P4": (0.00, 38.84),
    "M_glina": (0.3, 0.7), "lambda_glina": (0.04, 0.1),
    "kappa_glina": (0.007, 0.009), "p0_glina": (100.0, 600.0),
}

def sample_inputs(n):
    df = pd.DataFrame([
        {k: np.random.uniform(lo, hi) for k, (lo, hi) in PARAM_RANGES.items()}
        for _ in range(n)
    ])
    for zone in ("LO", "DO"):
        st = f"k_Stena_{zone}"; za = f"k_Zavesa_{zone}"
        df[za] = np.minimum(df[za], df[st])
    return df

df_rand = sample_inputs(2000)
X_meta = df_rand[columns].values
Y_meta = model.predict(scaler.transform(X_meta))

# plot style
sns.set_style("whitegrid")
plt.rcParams.update({
    "font.size":12, "axes.titlesize":12,
    "legend.fontsize":8
})
meta_col = "steelblue"; fem_col = "#2b9c38"
alpha = 0.35; bins = 30

# helper for KDE/hist plots
def plot_kde(idxs, cols, fname, use_hist=False):
    fig, axes = plt.subplots(rows, cols, figsize=(4*cols, 3*rows))
    axes = axes.flatten()
    for i, j in enumerate(idxs):
        ax = axes[i]
        name = output_names[j]
        vals_fem = df_fem[name].dropna().values
        vals_meta = Y_meta[:, j]
        if use_hist:
            ax.hist(vals_fem, bins=bins, density=True,
                    color=fem_col, alpha=alpha, edgecolor="white")
            sns.kdeplot(vals_fem, color=fem_col, ax=ax, linewidth=1.5)
        if use_hist:
            ax.hist(vals_meta, bins=bins, density=True,
                    color=meta_col, alpha=alpha, edgecolor="white")
            sns.kdeplot(vals_meta, color=meta_col, ax=ax, linewidth=1.5)
        ax.set_title(name, fontsize=10)
        ax.set_ylabel("Density", fontsize=10)
        ax.tick_params(labelsize=8)
        ax.legend(["FEM", "Meta"], loc="upper right")
    for k in range(len(idxs), len(axes)):
        fig.delaxes(axes[k])
    fig.tight_layout()
    Path(fname).parent.mkdir(exist_ok=True)

```

```

fig.savefig(fname, dpi=120, bbox_inches="tight")
plt.close(fig)

# three KDE-only figures
plot_kde(range( 0, 20), 5, 4, "A_part1_kde.png")
plot_kde(range(20, 40), 5, 4, "A_part2_kde.png")
plot_kde(range(40, 55), 4, 4, "A_part3_kde.png")

# three hist+KDE figures
plot_kde(range( 0, 20), 5, 4, "B_part1_hist_kde.png", use_hist=True)
plot_kde(range(20, 40), 5, 4, "B_part2_hist_kde.png", use_hist=True)
plot_kde(range(40, 55), 4, 4, "B_part3_hist_kde.png", use_hist=True)

```

## Програм 6. Соболјева анализа осетљивости (поглавље 6.5)

```

import numpy as np
import pandas as pd
import joblib
from SALib.sample.sobol import sample as sobol_sample
from SALib.analyze import sobol
from sklearn.preprocessing import MinMaxScaler

# 1. Load surrogate model, scaler and input column names
model      = joblib.load("meta_model.pkl")
scaler_X   = joblib.load("scaler_X.pkl")
all_cols   = joblib.load("column_list.pkl") # 21 input names

# 2. Read output names (55 outputs) from Excel
file_path  = "path/to/data.xlsx"
sheet      = "Rezultati Trening"
output_names = pd.read_excel(file_path, sheet_name=sheet, nrows=0).columns.tolist()
assert len(output_names) == 55, "Expected 55 outputs"

# 3. Define parameter bounds and re-parameterization
# ensure 21 variables: 4 for Stena-Zavesa + 17 others
stena_LO, zavesa_LO = (-8.5, -10.5), None # LO bounds
stena_DO, zavesa_DO = (-8.5, -10.5), None # DO bounds
others = {
    "k_Kamen_L1": (-8.0, -1.0), "k_Kamen_L2": (-7.7, -1.0),
    "k_Kamen_P4": (-7.0, -1.0), "k_Glina": (-12.1, -7.9),
    # ... include all remaining 13 parameter bounds here ...
}

names = ["stena_LO", "frac_LO", "stena_DO", "frac_DO"] + list(others)
bounds = [
    [max(stena_LO[0], zavesa_LO[0]), stena_LO[0]], [0.0, 1.0],
    [max(stena_DO[0], zavesa_DO[0]), stena_DO[0]], [0.0, 1.0],
] + [list(b) for b in others.values()]

D = 21
problem = {"num_vars": D, "names": names, "bounds": bounds}

# 4. Generate Sobol-Saltelli sample with base size N=256
N = 256
param_values = sobol_sample(problem, N, calc_second_order=True)
assert param_values.shape[0] == (2*D + 2)*N # =11264

# 5. Map re-parameterized sample back to original 21 inputs
def to_original(row):
    sLO, fLO, sDO, fDO = row[:4]
    zLO = zavesa_LO[0] + fLO*(sLO - zavesa_LO[0])
    zDO = zavesa_DO[0] + fDO*(sDO - zavesa_DO[0])
    vals = [sLO, zLO, sDO, zDO] + list(row[4:])
    return np.array([vals[names.index(c)] for c in all_cols])

X = np.vstack([to_original(r) for r in param_values])

# 6. Scale inputs and predict all 55 outputs

```

```

X_scaled = scaler_X.transform(X)
Y_pred = model.predict(X_scaled)
assert Y_pred.shape == (param_values.shape[0], 55)

# 7. Compute Sobol indices for each output and save results
results = {"param_names": names, "output_names": output_names}

for i, out in enumerate(output_names):
    Si = sobol.analyze(problem, Y_pred[:, i], calc_second_order=True)
    # replace nan/inf with 0
    for key in ("S1", "ST", "S1_conf", "ST_conf"):
        Si[key] = [0.0 if not np.isfinite(v) else v for v in Si[key]]
    Si["S2"] = np.nan_to_num(Si["S2"])
    results[out] = Si

joblib.dump(results, "sobol_results.pkl")
print(f"Sobol analysis done: D={D}, N={N}, total runs={(2*D+2)*N}")

```

## Програм 7. Базна пробабилистичка анализа (поглавље 6.6)

```

import numpy as np
import pandas as pd
import seaborn as sns
import matplotlib.pyplot as plt
import joblib
import pickle

sns.set_style("whitegrid")

# load artifacts
sobol_data = joblib.load("sobol_results.pkl")
output_names = sobol_data["output_names"]
model = joblib.load("meta_model.pkl")
scaler = joblib.load("scaler_X.pkl")
inputs = joblib.load("column_list.pkl")

# sample settings
N = 10_000_000 # total simulations
chunk_sz = 20_000

# parameter bounds
logk_bounds = {
    "k_Stena_LO": (-8.5, -5.5), "k_Zavesa_LO": (-10.5, -5.5),
    "k_Stena_DO": (-8.5, -5.5), "k_Zavesa_DO": (-10.5, -5.5),
    "k_Kamen_L1": (-8.0, -1.0), "k_Kamen_L2": (-7.7, -1.0),
    "k_Kamen_P4": (-7.0, -1.0), "k_Glina": (-12.1, -7.9),
    "k_Filter_f1": (-8.0, -2.0), "k_Filter_f2": (-6.0, -1.0),
    "k_Veš_teren": (-7.0, -1.0)
}

real_bounds = {
    "φB_Kamen_L1": (23.24, 2.26), "φB_Kamen_L2": (23.07, 1.00),
    "φB_Kamen_P4": (22.86, 0.89),
    "Δφ_Kamen_L1": (35.88, 6.25), "Δφ_Kamen_L2": (27.38, 6.49),
    "Δφ_Kamen_P4": (19.40, 6.48),
    "M_Glina": (0.3, 0.7), "λ_Glina": (0.04, 0.1),
    "κ_Glina": (0.007, 0.009), "p0_Glina": (100.0, 600.0)
}

bounds = {**logk_bounds, **real_bounds}

def in_range(row):
    return all(bounds[c][0] <= row[c] <= bounds[c][1] for c in inputs)

def tapered_normal(mu, sd, n, cutoff=-1.0):
    arr = np.random.normal(mu, sd, n)
    mask = arr > cutoff
    if mask.any():
        excess = arr[mask] - cutoff
        arr[mask] = cutoff - np.random.uniform(0.85, 1.0, size=excess.shape)*excess

```

```

    return arr

def gen_chunk(n):
    df = pd.DataFrame(index=range(n), columns=bounds.keys(), dtype=float)
    # log(k) sampling
    for c, (lo, hi) in logk_bounds.items():
        df[c] = np.random.normal((lo+hi)/2, (hi-lo)/4, n)
    # taper tails
    for c, (lo, hi) in logk_bounds.items():
        df[c] = tapered_normal(*((lo+hi)/2, (hi-lo)/4, n))
    # real-scale
    for c, (mu, sd) in real_bounds.items():
        if "φB" in c or "Δφ" in c:
            df[c] = np.random.normal(mu, sd, n)
        else:
            df[c] = np.random.uniform(mu, sd, n)
    return df

# collect N in-range samples
collected = []
count = 0
while count < N:
    chunk = gen_chunk(chunk_sz)
    mask = chunk.apply(in_range, axis=1)
    kept = chunk[mask]
    collected.append(kept)
    count += len(kept)
    print(f"Got {count}/{N}")
df_all = pd.concat(collected, ignore_index=True).iloc[:N]

# predict outputs
X = scaler.transform(df_all[inputs])
Y = model.predict(X)

# plot distributions in three parts
sns.set_style("whitegrid")
plt.rcParams.update({'font.size':12})
parts = [(0,20), (20,40), (40,55)]
for idx, (s,e) in enumerate(parts,1):
    fig, axes = plt.subplots(5,4,figsize=(16,15))
    axes = axes.flatten()
    for i,out in enumerate(range(s,e)):
        ax = axes[i]
        sns.kdeplot(Y[:,out], ax=ax, color='steelblue', linewidth=1.5, fill=False)
        ax.set_title(output_names[out], fontsize=8)
        ax.tick_params(labelsize=6)
    for j in range(e-s, len(axes)):
        fig.delaxes(axes[j])
    fig.tight_layout()
    fig.savefig(f"baseline_part{idx}.png", dpi=120)
    plt.close(fig)

# save results
with open("baseline_results.pkl", "wb") as f:
    pickle.dump({"output_names": output_names, "Y": Y}, f)

```

## Програм 8. Поређење резултата 3 различите базне анализе (поглавље 6.6)

```

import numpy as np
import pandas as pd
import seaborn as sns
import matplotlib.pyplot as plt
import joblib
import pickle
import sys

sns.set_style("whitegrid")

```

```

# load meta-model and artifacts
model = joblib.load("meta_model.pkl")
scaler = joblib.load("scaler_X.pkl")
columns = joblib.load("column_list.pkl")

# load unweighted results (Y_full shape = N x 55)
with open("unweighted_results.pkl", "rb") as f:
    res = pickle.load(f)
output_names = res["output_names"]
Y_full = res["Y_unweighted"]

# index of FS output
fs_idx = 0
FS_full = Y_full[:, fs_idx]

# parameter bounds/specs
k_ranges = {
    "k_Stena_LO": (-8.5, -5.5), "k_Zavesa_LO": (-10.5, -5.5),
    "k_Stena_DO": (-8.5, -5.5), "k_Zavesa_DO": (-10.5, -5.5),
    "k_Kamen_L1": (-8.0, -1.0), "k_Kamen_L2": (-7.7, -1.0),
    "k_Kamen_P4": (-7.0, -1.0), "k_Glina": (-12.1, -7.9),
    "k_Filter_f1": (-8.0, -2.0), "k_Filter_f2": (-6.0, -1.0),
    "k_Veš. teren": (-7.0, -1.0),
}
strength_specs = {
    "φB_Kamen_L1": (23.24, 2.26), "φB_Kamen_L2": (23.07, 1.00),
    "φB_Kamen_P4": (22.86, 0.89),
    "Δφ_Kamen_L1": (35.88, 6.25), "Δφ_Kamen_L2": (27.38, 6.49),
    "Δφ_Kamen_P4": (19.40, 6.48),
    "M_Glina": (0.3, 0.7), "λ_Glina": (0.04, 0.1),
    "κ_Glina": (0.007, 0.009), "p0_Glina": (100.0, 600.0),
}

# subcase samplers
def random_logk_subcase(n):
    df = pd.DataFrame(index=range(n), columns=columns, dtype=float)
    for c, (lo, hi) in k_ranges.items():
        df[c] = np.random.uniform(lo, hi, n)
    for c, (mean, _) in strength_specs.items():
        df[c] = mean
    return df

def random_strength_subcase(n):
    df = pd.DataFrame(index=range(n), columns=columns, dtype=float)
    for c, (lo, hi) in k_ranges.items():
        df[c] = 0.5 * (lo + hi)
    for c, (mean, sd) in strength_specs.items():
        df[c] = np.random.normal(mean, sd, n)
    return df

# generate FS arrays
N = FS_full.shape[0]
FS_only_k = model.predict(scaler.transform(
    random_logk_subcase(N)[columns].values
))[:, fs_idx]
FS_only_str = model.predict(scaler.transform(
    random_strength_subcase(N)[columns].values
))[:, fs_idx]

# plot comparison
plt.rcParams.update({
    "font.size": 12,
    "axes.titlesize": 14,
    "axes.labelsize": 12,
    "xtick.labelsize": 10,
    "ytick.labelsize": 10,
    "legend.fontsize": 10
})
colors = {
    "Full": "steelblue",
    "Only k": "gold",
}

```

```

    "Only strength": "mediumseagreen"
}
bins = 40

fig, ax = plt.subplots(figsize=(10, 6))
for label, arr in [("Full", FS_full),
                  ("Only k", FS_only_k),
                  ("Only strength", FS_only_str)]:
    ax.hist(arr, bins=bins, density=True,
            color=colors[label], alpha=0.6,
            edgecolor="white", label=label)
    sns.kdeplot(arr, ax=ax, color=colors[label], linewidth=2)

# mean lines and annotations
means = {"Full": FS_full.mean(),
        "Only k": FS_only_k.mean(),
        "Only strength": FS_only_str.mean()}
for arr in [FS_full, FS_only_k, FS_only_str]:
    ax.axvline(arr.mean(), color="black", linestyle="--", linewidth=1.5)

ymin, ymax = ax.get_ylim()
y_text = 0.05 * ymax
offsets = {"Full": -0.02, "Only k": 0.0, "Only strength": 0.02}
for label, mean in means.items():
    ax.text(mean + offsets[label], y_text,
            f"{mean:.2f}",
            ha="center", va="bottom",
            fontsize=10, fontweight="bold",
            color="white" if label!="Only k" else "black",
            bbox=dict(facecolor=colors[label],
                    edgecolor="black", pad=0.2, boxstyle="round"))

ax.set_xlabel("FS")
ax.set_ylabel("Probability Density")
ax.legend(loc="upper right")
fig.tight_layout()
fig.savefig("fs_subcase_comparison.png", dpi=120, bbox_inches="tight")
plt.close(fig)

# save FS arrays
with open("subcases_fs.pkl", "wb") as f:
    pickle.dump({
        "FS_full": FS_full,
        "FS_only_k": FS_only_k,
        "FS_only_strength": FS_only_str
    }, f)

```

## Програм 9. Креирање нормалних расподела података осматрања за пондерисану анализу (поглавље 6.7.2)

```

import pandas as pd
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import seaborn as sns
from scipy import stats
import pickle

sns.set_style("whitegrid")

# file paths (replace with actual paths)
instr_file = "path/to/Porne_celije.xlsx"
periods_file = "path/to/Flood_periods.xlsx"

# read flood periods and instrument data
periods = pd.read_excel(periods_file)
df = (
    pd.read_excel(instr_file, sheet_name="TAB PC")
    .rename(columns={"Datum": "Date"})

```

```
)
df["Date"] = pd.to_datetime(df["Date"], dayfirst=True, errors="coerce")

# filter measurements within flood periods
filtered = pd.DataFrame()
for _, r in periods.iterrows():
    mask = (df["Date"] >= r["Beginning"]) & (df["Date"] <= r["End"])
    filtered = pd.concat([filtered, df[mask]], ignore_index=True)

# clean and drop empty rows
filtered.replace([np.inf, -np.inf], np.nan, inplace=True)
filtered.dropna(subset=filtered.columns[3:], how="all", inplace=True)

cols = filtered.columns[3:]

# fit normal distribution parameters
normal_info = {}
for c in cols:
    data = filtered[c].dropna()
    if len(data) < 2:
        normal_info[c] = {"mean": None, "stdev": None}
    else:
        normal_info[c] = {"mean": data.mean(), "stdev": data.std()}

# save normal parameters
with open("instrument_normal_dist.pkl", "wb") as f:
    pickle.dump(normal_info, f)

# plot in chunks of 20 columns
chunk = 20
for i in range(0, len(cols), chunk):
    subset = cols[i : i + chunk]
    fig, axes = plt.subplots(5, 4, figsize=(16, 15))
    axes = axes.flatten()
    for j, c in enumerate(subset):
        ax = axes[j]
        data = filtered[c].dropna()
        ax.hist(data, bins=20, density=True,
                color="steelblue", edgecolor="black")
        info = normal_info[c]
        if info["mean"] is not None:
            xs = np.linspace(data.min(), data.max(), 200)
            ax.plot(xs,
                    stats.norm.pdf(xs, info["mean"], info["stdev"]),
                    color="red", linewidth=2)
        ax.set_title(c, fontsize=9)
    for k in range(len(subset), len(axes)):
        fig.delaxes(axes[k])
    fig.tight_layout()
    fig.savefig(f"instr_normal_part{(i//chunk)+1}.png",
                dpi=120, bbox_inches="tight")
    plt.close(fig)
```

## Програм 10. Пондерисана пробабилитичка анализа – комплетна (поглавље 6.8.1)

```
import os
import sys
import pickle
import numpy as np
import pandas as pd
import matplotlib.pyplot as plt
import seaborn as sns
from scipy import stats

sns.set_style("whitegrid")

# 1) output folder
output_dir = "path/to/output_folder"
```



```

os.makedirs(output_dir, exist_ok=True)

# 2) load unweighted results
with open("unweighted_results.pkl", "rb") as f:
    uw = pickle.load(f)
names = uw["output_names"]          # list of 55 names
Y_unw = uw["Y_unweighted"]          # shape (N,55)
N, _ = Y_unw.shape

# 3) load monitoring normals and usage flags
with open("instrument_normal_dist.pkl", "rb") as f:
    normal_info = pickle.load(f)
df_flags = pd.read_excel("path/to/monitoring_check.xlsx", sheet_name="Monitoring check")
usage = {c: str(df_flags[c].iloc[0]).lower().startswith("y") for c in df_flags.columns}
used = [n for n in normal_info if usage.get(n, False) and n in names]

# 4) compute weights (geometric mean of PDF ratios)
def pdf_ratio(x, mu, sd):
    if sd <= 0: return np.ones_like(x) * 1e-30
    return np.clip(stats.norm.pdf(x, mu, sd) / (1/(sd*np.sqrt(2*np.pi))), 1e-30, 1e30)

K = len(used)
partial = np.ones((N, K))
for j, instr in enumerate(used):
    idx, info = names.index(instr), normal_info[instr]
    partial[:, j] = pdf_ratio(Y_unw[:, idx], info["mean"], info["stdev"])
w = np.exp(np.log(partial).sum(axis=1) / K)

# 5) prepare subsample for FS
FS = Y_unw[:, 0]
sub_idx = np.random.choice(N, size=min(200000, N), replace=True, p=w/w.sum())
FS_w = FS[sub_idx]

# 6) compute Pf and  $\beta$ 
Pf_u = np.mean(FS < 1.0)
Pf_w = w[FS < 1.0].sum() / w.sum()
 $\beta_u$  = -stats.norm.ppf(Pf_u) if 0 < Pf_u < 1 else np.inf
 $\beta_w$  = -stats.norm.ppf(Pf_w) if 0 < Pf_w < 1 else np.inf

# 7) single-panel FS plot
plt.rcParams.update({'font.size':14})
fig, ax = plt.subplots(figsize=(10,6))
ax.hist(FS, bins=40, density=True, color='steelblue', alpha=0.6, label='Baseline')
ax.hist(FS_w, bins=40, density=True, color='#d37b79', alpha=0.6, label='Weighted')
sns.kdeplot(FS, ax=ax, color='steelblue', linewidth=2)
sns.kdeplot(FS_w, ax=ax, color='#d37b79', linewidth=2)
for m in (FS.mean(), FS_w.mean()):
    ax.axvline(m, color='black', linestyle='--', linewidth=2)
ax.text(0.02, 0.96, f"Pf_u={Pf_u:.2e}\n $\beta_u$ ={ $\beta_u$ :.2f}", transform=ax.transAxes,
        ha='left', va='top', fontsize=12, bbox=dict(facecolor='white',
edgecolor='steelblue'))
ax.text(0.02, 0.80, f"Pf_w={Pf_w:.2e}\n $\beta_w$ ={ $\beta_w$ :.2f}", transform=ax.transAxes,
        ha='left', va='top', fontsize=12, bbox=dict(facecolor='white',
edgecolor='#d37b79'))
ax.legend(loc='lower left')
ax.set_xlabel('FS'); ax.set_ylabel('Density')
fig.savefig(os.path.join(output_dir, "FS_weighted.png"), dpi=120, bbox_inches='tight')
plt.close(fig)

# 8) 54 subplots for outputs 1-54
sub_w = np.random.choice(N, size=min(50000, N), replace=True, p=w/w.sum())
Y_w_sub = Y_unw[sub_w]
for i, (start, end) in enumerate(((1,21), (21,41), (41,55)), 1):
    fig, axes = plt.subplots(5,4, figsize=(16,15))
    axes = axes.flatten()
    for j, idx in enumerate(range(start, end)):
        ax = axes[j]
        sns.kdeplot(Y_unw[:,idx], ax=ax, color='steelblue', lw=1.5, warn_singular=False)
        sns.kdeplot(Y_w_sub[:,idx], ax=ax, color='#d37b79', lw=1.5, linestyle='--',
warn_singular=False)
        name = names[idx]

```

```

        info = normal_info.get(name)
        if info:
            xs = np.linspace(info["mean"]-4*info["stdev"], info["mean"]+4*info["stdev"],
100)
            ax.plot(xs, stats.norm.pdf(xs, info["mean"], info["stdev"]), color='green',
lw=1.5)
            if name not in used:
                ax.set_facecolor('whitesmoke')
                ax.text(0.02,0.85,"NOT USED", transform=ax.transAxes, color='gray')
                ax.set_title(name, fontsize=8); ax.tick_params(labelsize=6)
            for k in range(end-start, len(axes)):
                fig.delaxes(axes[k])
            fig.tight_layout()
            fig.savefig(os.path.join(output_dir,          f"weighted_part{i}.png"),          dpi=120,
bbox_inches='tight')
            plt.close(fig)

```

### Програм 11. Пондерисана пробабилистичка анализа која укључује само варијабилност коефицијената филтрације (поглавље 6.8.2)

```

import os
import pickle
import numpy as np
import pandas as pd
import matplotlib.pyplot as plt
import seaborn as sns
import joblib
from scipy import stats

sns.set_style("whitegrid")

# output folder (replace with your path)
output_dir = "path/to/output_folder"
os.makedirs(output_dir, exist_ok=True)

# load unweighted results
with open("unweighted_results.pkl", "rb") as f:
    uw = pickle.load(f)
names = uw["output_names"]          # list of 55 outputs
Y_unw = uw["Y_unweighted"]          # shape (N, 55)
N = Y_unw.shape[0]

# load monitoring normals and usage flags
with open("instrument_normal_dist.pkl", "rb") as f:
    normal_info = pickle.load(f)
df_flags = pd.read_excel("monitoring_check.xlsx", sheet_name="Monitoring check")
usage = {c: str(df_flags[c].iloc[0]).lower().startswith("y") for c in df_flags.columns}
used = [n for n in normal_info if usage.get(n) and n in names]

# log(k) parameter ranges
k_ranges = {
    "k_Stena_LO": (-8.5, -5.5), "k_Zavesa_LO": (-10.5, -5.5),
    "k_Stena_DO": (-8.5, -5.5), "k_Zavesa_DO": (-10.5, -5.5),
    "k_Kamen_L1": (-8.0, -1.0), "k_Kamen_L2": (-7.7, -1.0),
    "k_Kamen_P4": (-7.0, -1.0), "k_Glina": (-12.1, -7.9),
    "k_Filter_f1": (-8.0, -2.0), "k_Filter_f2": (-6.0, -1.0),
    "k_Veš. teren": (-7.0, -1.0)
}

# strength means
strength_means = {
    "φB_Kamen_L1": 23.24, "φB_Kamen_L2": 23.07, "φB_Kamen_P4": 22.86,
    "Δφ_Kamen_L1": 35.88, "Δφ_Kamen_L2": 27.38, "Δφ_Kamen_P4": 19.40,
    "M_Glina": 0.50, "λ_Glina": 0.07,
    "κ_Glina": 0.008, "ρ0_Glina": 350.0
}

# sample inputs

```

```

df_in = pd.DataFrame({c: np.random.uniform(lo, hi, N)
                      for c, (lo, hi) in k_ranges.items()})
for c, v in strength_means.items():
    df_in[c] = v

# predict outputs
model = joblib.load("meta_model.pkl")
scaler = joblib.load("scaler_X.pkl")
X = scaler.transform(df_in[names[:len(df_in.columns)]]).values
Y = model.predict(X)
FS = Y[:, 0]

# compute weights
def pdf_ratio(x, mu, sd):
    if sd <= 0:
        return np.ones_like(x) * 1e-30
    pdf_max = 1 / (sd * np.sqrt(2 * np.pi))
    return np.clip(stats.norm.pdf(x, mu, sd) / pdf_max, 1e-30, 1e30)

K = len(used)
partial = np.ones((N, K))
for j, nm in enumerate(used):
    idx = names.index(nm)
    mu, sd = normal_info[nm]["mean"], normal_info[nm]["stdev"]
    partial[:, j] = pdf_ratio(Y[:, idx], mu, sd)
w = np.exp(np.log(partial).sum(axis=1) / K) if K else np.ones(N)

# subsample weighted FS for plotting
idx_sub = np.random.choice(N, size=min(200000, N), replace=True, p=w / w.sum())
FS_w = FS[idx_sub]

# plot FS
plt.figure(figsize=(10, 6))
plt.hist(FS, bins=40, density=True, alpha=0.6, color="steelblue", label="Baseline")
plt.hist(FS_w, bins=40, density=True, alpha=0.6, color="#d37b79", label="Weighted")
sns.kdeplot(FS, color="steelblue", linewidth=2)
sns.kdeplot(FS_w, color="#d37b79", linewidth=2)
plt.xlabel("FS")
plt.ylabel("Probability Density")
plt.legend(loc="lower left")
plt.tight_layout()
plt.savefig(os.path.join(output_dir, "FS_onlyk_weighted.png"), dpi=120)
plt.close()

```

## Програм 12. Дијаграми конвергенције (поглавље 6.9)

```

import os
import pickle
import joblib
import numpy as np
import pandas as pd
import matplotlib.pyplot as plt
from matplotlib.lines import Line2D
from matplotlib.ticker import LogFormatterMathtext
from scipy import stats

# 1) CONFIGURATION
num_log_points = 100
min_exp = 1 # 10^1
max_exp = 7 # 10^7
output_dir = "path/to/output/ConvergencePlots"
os.makedirs(output_dir, exist_ok=True)

# 2) LOAD MODELS, DATA, MONITORING INFO
model = joblib.load("meta_model.pkl")
scaler = joblib.load("scaler_X.pkl")
columns = joblib.load("column_list.pkl")

```

```

with open("unweighted_results.pkl", "rb") as f:
    uw = pickle.load(f)
output_names = uw["output_names"]

with open("instrument_normal_dist.pkl", "rb") as f:
    normal_info = pickle.load(f)

df_flags = pd.read_excel("path/to/MonitoringCheck.xlsx", sheet_name="Monitoring check")
usage = {c: str(df_flags[c].iloc[0]).lower().startswith("y") for c in df_flags.columns}
used = [n for n in output_names if usage.get(n, False)]

# 3) INPUT GENERATOR: vary log(k), fix strengths
k_ranges = {
    "k_Stena_LO": (-8.5, -5.5), "k_Zavesa_LO": (-10.5, -5.5),
    "k_Stena_DO": (-8.5, -5.5), "k_Zavesa_DO": (-10.5, -5.5),
    "k_Kamen_L1": (-8.0, -1.0), "k_Kamen_L2": (-7.7, -1.0),
    "k_Kamen_P4": (-7.0, -1.0), "k_Glina": (-12.1, -7.9),
    "k_Filter_f1": (-8.0, -2.0), "k_Filter_f2": (-6.0, -1.0),
    "k_Veš_teren": (-7.0, -1.0)
}
strength_means = {
    "φB_Kamen_L1": 23.24, "φB_Kamen_L2": 23.07, "φB_Kamen_P4": 22.86,
    "Δφ_Kamen_L1": 35.88, "Δφ_Kamen_L2": 27.38, "Δφ_Kamen_P4": 19.40,
    "M_Glina": 0.5, "λ_Glina": 0.07, "κ_Glina": 0.008, "p0_Glina": 350.0
}
def gen_inputs(N):
    df = pd.DataFrame(index=range(N), columns=columns, dtype=float)
    for c, (lo, hi) in k_ranges.items():
        df[c] = np.random.uniform(lo, hi, N)
    for c, v in strength_means.items():
        df[c] = v
    return df

# 4) BUILD likelihood-ratio matrix
def pdf_ratio(x, mu, sd):
    if sd <= 0: return np.full_like(x, 1e-30)
    pdf_max = 1/(sd*np.sqrt(2*np.pi))
    return np.clip(stats.norm.pdf(x, mu, sd)/pdf_max, 1e-30, 1e30)

def build_partial(Y):
    N = Y.shape[0]
    K = len(used)
    M = np.ones((N, K))
    for j, nm in enumerate(used):
        idx = output_names.index(nm)
        M[:, j] = pdf_ratio(Y[:, idx], normal_info[nm]["mean"], normal_info[nm]["stdev"])
    return M

# 5) AGGREGATORS
aggs = {
    "M1_geom": lambda x: np.exp(np.mean(np.log(x), axis=1)) if x.shape[1] > 0 else
np.ones(x.shape[0]),
    "M2_harm": lambda x: np.where(np.sum(1/x, axis=1) > 0,
x.shape[1]/np.sum(1/x, axis=1), 1e-30),
    "M3_arith": lambda x: np.mean(x, axis=1) if x.shape[1] > 0 else np.ones(x.shape[0]),
    "M4_quad": lambda x: np.sqrt(np.mean(x**2, axis=1)) if x.shape[1] > 0 else
np.ones(x.shape[0]),
    "M5_sum": lambda x: np.sum(x, axis=1),
    "M6_sumNorm": lambda x: (lambda s: s/np.max(s) if np.max(s) > 0 else
np.ones_like(s))(np.sum(x, axis=1)),
    "M7_prod": lambda x: np.prod(x, axis=1) if x.shape[1] > 0 else np.ones(x.shape[0]),
    "M8_min": lambda x: np.min(x, axis=1) if x.shape[1] > 0 else np.ones(x.shape[0]),
    "M9_harm2": lambda x: (lambda inv2: np.where(inv2 > 0, x.shape[1]/inv2, 1e-
30))(np.sum(1/(x**2), axis=1))
}
agg_order = list(aggs.keys())

# 6) MONTE-CARLO over N_list
N_list = np.unique(np.logspace(min_exp, max_exp, num=num_log_points, dtype=int)).tolist()

```

```

res = {}
for k in agg_order:
    res[k] = {}
    for agg in agg_order:
        res[k][agg] = {}
        for N_ in N_list:
            X = gen_inputs(N_)
            Y = model.predict(scaler.transform(X.values))
            fs = Y[:,0]
            mu, sd = fs.mean(), fs.std(ddof=1)
            pf_unw = stats.norm.cdf((1-mu)/sd) if sd>0 else 0
            beta_unw = -stats.norm.ppf(pf_unw) if 0<pf_unw<1 else np.nan
            M = build_partial(Y)
            for agg in agg_order:
                w = aggs[agg](M)
                ess = (w.sum()*2)/(np.sum(w**2)+1e-12)
                idx = min(N_,20000)
                fs_w = np.random.choice(fs, size=idx, replace=True, p=w/w.sum())
                bins = np.histogram_bin_edges(np.concatenate([fs,fs_w]), bins=80)
                p,_ = np.histogram(fs, bins=bins, density=True)
                q,_ = np.histogram(fs_w, bins=bins, density=True)
                p+=1e-12; q+=1e-12
                kl = np.sum(q*np.log(q/p))*np.diff(bins).mean()
                mu_w, sd_w = fs_w.mean(), fs_w.std(ddof=1)
                pf_w = stats.norm.cdf((1-mu_w)/sd_w) if sd_w>0 else 0
                beta_w = -stats.norm.ppf(pf_w) if 0<pf_w<1 else np.nan
                r = res[agg]
                r["mean_unw"].append(mu); r["std_unw"].append(sd)
                r["mean_wtd"].append(mu_w); r["std_wtd"].append(sd_w)
                r["pf_unw"].append(pf_unw*100); r["pf_wtd"].append(pf_w*100)
                r["beta_unw"].append(beta_unw); r["beta_wtd"].append(beta_w)
                r["ess"].append(ess); r["kl"].append(kl)

# 7) PLOTTING helper
tab10 = plt.cm.tab10.colors
labels = [
    "Geometric Mean","Harmonic Mean","Arithmetic Mean","Quadratic Mean (RMS)",
    "Normalization by Sum","Weighted Sum","Product of Weights","Minimum Weight",
    "Inverse Variance Weight","","","Baseline"
]
colors = list(tab10[:9])+["none","none","black"]
ticks = [10**e for e in range(min_exp, max_exp+1)]
def legend_handles():
    return [
        Line2D([],[],color=col,linestyle='--' if lbl=="Baseline" else ('-' if lbl!="" else
        '' ),linewidth=2 if lbl=="Baseline" else 1.5)
        for lbl,col in zip(labels,colors)
    ]

# A) Mean & Std Dev
fig, (axm,axs)=plt.subplots(2,1,figsize=(10,12),sharex=True)
axm.plot(N_list, res["M1_geom"]["mean_unw"], '--k',lw=2)
axs.plot(N_list, res["M1_geom"]["std_unw"], '--k',lw=2)
for i,agg in enumerate(agg_order):
    axm.plot(N_list, res[agg]["mean_wtd"],color=tab10[i],lw=1.5)
    axs.plot(N_list, res[agg]["std_wtd"],color=tab10[i],lw=1.5)
for ax in (axm,axs):
    ax.set_xscale('log'); ax.set_xticks(ticks);
ax.xaxis.set_major_formatter(LogFormatterMathtext(10))
ax.grid(ls='--',alpha=0.4)
axm.set_ylabel("Mean(FS)"); axs.set_ylabel("Std Dev(FS)"); axs.set_xlabel("Sim count (log)")
fig.legend(handles=legend_handles(),labels=labels,loc='lower center',ncol=4,bbox_to_anchor=(0.5,-0.08))
plt.tight_layout(rect=[0,0,1,0.95])
fig.savefig(os.path.join(output_dir,"FS_mean_std_convergence.png"),dpi=150)
plt.close(fig)

# B) Pf[%] & β
fig2, (axp,axb)=plt.subplots(2,1,figsize=(10,12),sharex=True)
axp.plot(N_list, res["M1_geom"]["pf_unw"], '--k',lw=2)
axb.plot(N_list, res["M1_geom"]["beta_unw"], '--k',lw=2)

```

```
for i,agg in enumerate(agg_order):
    axp.plot(N_list, res[agg]["pf_wtd"],color=tab10[i],lw=1.5)
    axb.plot(N_list, res[agg]["beta_wtd"],color=tab10[i],lw=1.5)
for ax in (axp,axb):
    ax.set_xscale('log');
ax.xaxis.set_major_formatter(LogFormatterMathtext(10))
ax.grid(ls='--',alpha=0.4)
axp.set_yscale('log'); axp.set_ylabel("Pf [%]"); axb.set_ylabel("β"); axb.set_xlabel("Sim
count (log)")
fig2.legend(handles=legend_handles(),labels=labels,loc='lower
center',ncol=4,bbox_to_anchor=(0.5,-0.08))
plt.tight_layout(rect=[0,0,1,0.95])
fig2.savefig(os.path.join(output_dir,"Pf_beta_param_convergence.png"),dpi=150)
plt.close(fig2)

# C) ESS & KL
fig3,(axe1,axe2)=plt.subplots(2,1,figsize=(10,12),sharex=True)
axe1.plot(N_list, res["M1_geom"]["ess"],'--k',lw=2)
axe2.plot(N_list, res["M1_geom"]["kl"],'--k',lw=2)
for i,agg in enumerate(agg_order):
    axe1.plot(N_list, res[agg]["ess"],color=tab10[i],lw=1.5)
    axe2.plot(N_list, res[agg]["kl"],color=tab10[i],lw=1.5)
for ax in (axe1,axe2):
    ax.set_xscale('log');
ax.xaxis.set_major_formatter(LogFormatterMathtext(10))
ax.grid(ls='--',alpha=0.4)
axe1.set_yscale('log'); axe1.set_ylabel("ESS"); axe2.set_ylabel("KL [nats]");
axe2.set_xlabel("Sim count (log)")
fig3.legend(handles=legend_handles(),labels=labels,loc='lower
center',ncol=4,bbox_to_anchor=(0.5,-0.08))
plt.tight_layout(rect=[0,0,1,0.95])
fig3.savefig(os.path.join(output_dir,"ESS_KL_convergence.png"),dpi=150)
plt.close(fig3)
```

## БИОГРАФИЈА АУТОРА

Љубо Д. Дивац рођен је 27. априла 1990. године у Београду, где је завршио основну школу „Бранко Радичевић“ као носилац дипломе „Вук Караџић“, а потом и IX београдску гимназију „Михаило Петровић Алас“. Током школовања је постигао запажене резултате на такмичењима из математике и историје, укључујући учешћа на републичким нивоима. Завршио је основне (2009–2014) и мастер студије (2014–2015) на смеру за конструкције Грађевинског факултета Универзитета у Београду. Докторске академске студије на истом факултету уписао је школске 2015/16. године. Током докторских студија објавио је више стручних и научних радова, укључујући шест публикација на домаћим и међународним конференцијама, као и један рад категорије M21 у међународном часопису са SCI-листе (Applied Sciences, 2025).



Од јануара 2016. године запослен је у компанији Gruner Stucky Ltd, која је специјализована за пројектовање и пружање консултантских услуга у области хидротехничких система, са посебним фокусом на бране и хидроелектране. У свом досадашњем ангажману континуирано се бави анализом понашања и проценом сигурности геотехничких система, пре свега насутих и бетонских брана, али и других конструкција као што су тунели и потпорни зидови. Истраживачки рад у оквиру докторских студија уско је повезан са професионалном праксом и усмерен на област сигурности постојећих насутих брана у условима реалне експлоатације.

Паралелно са општим образовањем стекао је основно и средње музичко образовање, свирајући клавир у музичким школама „Станислав Бинички“ и „Коста Манојловић“. Од 2012. године студира клавир на Факултету музичке уметности у Београду, на одсеку за клавир, где је завршио основне (2016), мастер (2018) и специјалистичке студије (2020), а тренутно је студент докторских студија. Као пијаниста наступао је у реномираним концертним салама у Београду као што су велика сала Коларчеве задужбине, свечана сала Скупштине града Београда, сала Београдске филхармоније и галерија Српске академије наука и уметности. Освојио је бројне награде на домаћим и међународним такмичењима, међу којима се издвајају прве награде на међународним такмичењима у Шапцу, Сремској Митровици, Бону, Салцбургу и Загребу. Године 2019. наступио је као солиста у Гершвиновој „Рапсодији у Плавом“ са оркестром Млади Симфоничари, а 2020. године добио је награду „Невена Поповић“ за најзначајније уметничко остварење на Факултету музичке уметности.

Ожењен је, отац једног детета, и живи у Београду.

## Изјава о ауторству

Име и презиме аутора \_\_\_\_\_ Љубо Дивац \_\_\_\_\_

Број индекса \_\_\_\_\_ 913/15 \_\_\_\_\_

### Изјављујем

да је докторска дисертација под насловом

Прилог анализи критеријума и метода за оцену сигурности насутих брана уз интеграцију података осматрања

---

- резултат сопственог истраживачког рада;
- да дисертација у целини ни у деловима није била предложена за стицање друге дипломе према студијским програмима других високошколских установа;
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио/ла ауторска права и користио/ла интелектуалну својину других лица.

Потпис аутора

У Београду, 20.06.2025.



---



## Изјава о истоветности штампане и електронске верзије докторског рада

Име и презиме аутора Љубо Дивац

Број индекса 913/15

Студијски програм Грађевинарство

Наслов рада Прилог анализи критеријума и метода за оцену сигурности насутих брана уз интеграцију података осматрања

Ментор Доцент др Сања Јоцковић, дипл. грађ. инж.

Изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предао/ла ради похрањена у **Дигиталном репозиторијуму Универзитета у Београду**.

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског назива доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Београду.

**Потпис аутора**

У Београду, 20.06.2025.



## Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом:

Прилог анализи критеријума и метода за оцену сигурности насутих брана уз интеграцију података осматрања

---

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у Дигиталном репозиторијуму Универзитета у Београду и доступну у отвореном приступу могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство (CC BY)
2. Ауторство – некомерцијално (CC BY-NC)
3. Ауторство – некомерцијално – без прерада (CC BY-NC-ND)
4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима (CC BY-NC-SA)
5. Ауторство – без прерада (CC BY-ND)
6. Ауторство – делити под истим условима (CC BY-SA)

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци.

Кратак опис лиценци је саставни део ове изјаве).

**Потпис аутора**

У Београду, 20.06.2025.



1. **Ауторство.** Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце, чак и у комерцијалне сврхе. Ово је најслободнија од свих лиценци.
2. **Ауторство – некомерцијално.** Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела.
3. **Ауторство – некомерцијално – без прерада.** Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела. У односу на све остале лиценце, овом лиценцом се ограничава највећи обим права коришћења дела.
4. **Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима.** Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада.
5. **Ауторство – без прерада.** Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела.
6. **Ауторство – делити под истим условима.** Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада. Слична је софтверским лиценцама, односно лиценцама отвореног кода.