



Универзитет у Београду
Машински факултет



Чедомир Костић

**УНАПРЕЂЕЊЕ НУМЕРИЧКЕ МЕТОДЕ ЗА
ОДРЕЂИВАЊЕ АЕРОДИНАМИЧКИХ
КОЕФИЦИЈЕНАТА И ДЕРИВАТИВА
СТАБИЛНОСТИ ЛЕТЕЛИЦА**

докторска дисертација

Београд, 2025. година

University of Belgrade
Faculty of Mechanical Engineering

Čedomir Kostić

**ENHANCEMENTS TO NUMERICAL METHODS
FOR AIRCRAFT AERODYNAMIC COEFFICIENTS
AND STABILITY DERIVATIVES
DETERMINATION**

Doctoral Dissertation

Belgrade, 2025

Ментори:

др Александар Бенгин, редовни професор,
Универзитет у Београду-Машински факултет

др Мирко Динуловић, редовни професор,
Универзитет у Београду-Машински факултет

Чланови Комисије:

др Огњен Пековић, редовни професор
Универзитет у Београду-Машински факултет

др Јелена Сворцан, редовни професор
Универзитет у Београду-Машински факултет

др Оливера Костић, ванредни професор
Универзитет у Београду-Машински факултет

др Тони Иванов, ванредни професор
Универзитет у Београду-Машински факултет

Др Марија Самарџић, доцент
Универзитет одбране у Београду, Војна академија,
Виши научни сарадник, Војнотехнички институт

УНАПРЕЂЕЊЕ НУМЕРИЧКЕ МЕТОДЕ ЗА ОДРЕЂИВАЊЕ АЕРОДИНАМИЧКИХ КОЕФИЦИЈЕНАТА И ДЕРИВАТИВА СТАБИЛНОСТИ ЛЕТЕЛИЦА

Сажетак

Ова докторска дисертација бави се развојем и применом методологије нумеричког моделирања аеродинамичких феномена, са посебним нагласком на верификацију и валидацију симулација путем прорачунске динамике флуида (енгл.-Computational Fluid Dynamics-у даљем тексту CFD) у ваздухопловној индустрији. Полазећи од анализа доступних експерименталних и рачунарских ресурса у Републици Србији, истраживање обухвата компаративну анализу физичких испитивања у аеротунелима и савремених CFD метода, са циљем унапређења поузданости нумеричких симулација у условима ограничених експерименталних капацитета. Формулисан је математички модел заснован на систему Навије–Стоксових једначина, при чему је за моделовање турбулентних ефеката примењен приступ заснован на Рејнолдсовим усредњеним Навије–Стоксовим једначинама. Извршена је детаљна анализа нумеричких метода просторне и временске дискретизације применом одговарајућих метода коначних запремина. Посебна пажња посвећена је конструкцији и евалуацији прорачунских мрежа, укључујући адаптивне, клизне и динамичке мреже. Развијени су критеријуми за избор мрежне стратегије и оцењивање квалитета нумеричких мрежа, што је омогућило стварање стабилних и физички доследних прорачунских модела. У дисертацији су представљени поступци верификације CFD кода, укључујући студије сагласности решења са нумеричком мрежом, тестове стабилности и процену грешке дискретизације. Валидација симулација извршена је поређењем са референтним подацима добијеним у аеротунелу, на моделу AGARD-B, у подзвучном, трансоничном и надзвучном режиму струјања. Резултати указују на високу сагласност нумеричких и експерименталних података, чиме се потврђује ваљаност предложене методологије. Истраживање доприноси унапређењу поузданости CFD симулација у пројектовању и анализи ваздухопловних конструкција, посебно у условима ограничене могућности експерименталне валидације.

Кључне речи: аеродинамика, прорачунска аеродинамика, прорачунска динамика флуида (CFD), калибрациони аеротунелски модел, аеродинамички коефицијенти и деривативи стабилности, верификација нумеричких резултата, валидација нумеричких симулација, турбулентни модели, нумеричке мреже.

Научна област: Машинство

Ужа научна област: Ваздухопловство

УДК: 629.73:532.5:519.6(043.3)

ENHANCEMENTS TO NUMERICAL METHODS FOR AIRCRAFT AERODYNAMIC COEFFICIENTS AND STABILITY DERIVATIVES DETERMINATION

Abstract

This doctoral dissertation focuses on the development and application of a methodology for numerical modeling of aerodynamic phenomena, with particular emphasis on verification and validation of Computational Fluid Dynamics (CFD) simulations in the aerospace industry. Starting from an analysis of the available experimental and computational resources in the Republic of Serbia, the research includes a comparative study of wind tunnel testing and modern CFD approaches, aiming to improve the reliability of numerical simulations in environments with limited experimental capacity. A mathematical model based on the Navier–Stokes equations system was formulated, with an approach based on Reynolds-averaged Navier–Stokes equations applied to model turbulent effects. A detailed analysis of numerical methods for spatial and temporal discretization was performed using appropriate finite volume schemes. Special attention was given to the generation and evaluation of computational meshes, including adaptive, sliding, and dynamic grids. Criteria for mesh strategy selection and mesh quality assessment were developed, enabling the construction of stable and physically consistent computational models. Verification procedures of the CFD code included grid convergence studies, stability testing, and discretization error estimation. The validation of simulations was performed by comparison with reference experimental data from wind tunnel tests on the AGARD-B model, in subsonic, transonic, and supersonic flow regimes. The results demonstrate a high degree of agreement between numerical and experimental data, thereby confirming the validity of the proposed methodology. This research contributes to enhancing the reliability of CFD simulations in the design and analysis of aerospace structures, particularly under conditions where experimental validation is limited.

Keywords: Aerodynamics, Computational Aerodynamics, Computational Fluid Dynamics (CFD), Calibration Wind Tunnel Model, Aerodynamic Coefficients and Stability Derivatives, Verification of Numerical Results, Validation of Numerical Simulations, Turbulence Models, Numerical Grids.

Scientific area: Mechanical engineering

Specific scientific area: Aerospace

UDK: 629.73:532.5:519.6(043.3)

Садржај

Садржај.....	i
Листа слика.....	vii
Листа табела	xii
Преглед коришћених ознака	xiv
Предговор	xviii
1. Увод.....	1
1.1. Предмет истраживања	3
1.2. Научни циљеви истраживања.....	4
1.3. Полазне хипотезе	5
1.4. Научне методе истраживања	5
1.5. Очекивани научни допринос	7
1.6. Приказ докторске дисертације	8
2. Преглед досадашњих истраживања	11
2.1. Досадашња истраживања нумеричког решавања.....	11
2.2. Преглед досадашњих истраживања експерименталне аеродинамике.....	13
2.2.1. Статус аеротунелских испитивања	18
2.2.2. Кратак осврт на почетак ваздухопловства у Србији	22
2.3. Преглед у области CFD	23
2.4. Преглед досадашњих сопствених истраживања.....	27
3. Истраживачки ресурси	29
3.1. Истраживачки ресурси у оквиру експерименталне аеродинамике.....	29
3.2. Рачунарски ресурси за прорачунску динамику флуида.....	40
4. Математички модел струјања.....	41
4.1. Оријентација координатног система	41
4.2. Систем основних једначина струјања.....	42
4.2.1. Једначина одржања масе	42
4.2.2. Закон о промени количине кретања.....	43

4.2.3.	Претпоставке о напонима у флуиду	43
4.2.4.	Навије-Стоксове једначине (енгл. - Navier-Stokes - NSE)	44
4.2.5.	Ојлерове једначине	45
4.2.6.	Закон промене кинетичке енергије	46
4.2.7.	Закон одржања енергије	46
4.2.8.	Једначине стања гаса	47
4.2.9.	Сатерлендов модел вискозности	48
4.2.9.1.	Утицај вискозности	48
4.2.9.1.	Сатерлендов (Sutherland) модел вискозности	49
4.2.10.	Прантлов број	50
4.3.	Систем основних једначина струјања у форми векторског флукса	50
4.4.	Почетни и гранични услови	52
4.4.1.	Гранични услови на зиду	52
4.5.	Утицај тензора напона и напонски модели	54
4.5.1.	Рејнолдсов тензор напона (РТН)	54
4.5.2.	Утицај РТН на усредњене једначине кретања флуида	55
4.5.3.	Приступ моделовању РТН и затварања RANS	55
4.5.4.	Модел турбуленције	57
4.5.4.1.	Спаларт-Алмарас модел турбуленције	59
4.5.4.2.	k-ε модел турбуленције	61
4.5.4.3.	Модификације k-ε модел турбуленције	63
4.5.4.4.	k-ω модел турбуленције	64
4.5.4.5.	k-ω SST модел турбуленције	66
4.5.4.6.	Нулти-редни модели (Zero-Equation Models)	68
4.5.4.7.	Осврт на турбулентне моделе	68
5.	Нумерички прорачун струјања	71
5.1.	Временска и просторна дискретизација	71
5.1.1.	Временска дискретизација	71
5.1.1.1.	Експлицитне методе временске дискретизације	71
5.1.1.2.	Имплицитне методе временске дискретизације	73
5.1.1.3.	Хибридне методе временске дискретизације	73
5.1.1.4.	Упоредна анализа временски дискретизационих метода	74
5.1.2.	Просторна дискретизација	75

5.1.2.1.	Метод коначних разлика (FDM-Finite Difference Method)	76
5.1.2.2.	Метод коначних елемената (FEM - Finite Element Method)	76
5.1.2.3.	Спектралне методе	76
5.1.2.4.	Метод коначних запремина (FVM - Finite Volume Method).....	77
5.1.3.	Тачност решења просторне дискретизације	79
5.2.	Нумеричка дискретизација прорачунског домена.....	81
5.2.1.	Структурисане мреже	81
5.2.1.1.	Методе за генерисање структурисаних мрежа	83
5.2.1.2.	Основне карактеристике структурисаних мрежа	88
5.2.2.	Неструктурисане мреже	88
5.2.2.1.	Делонеова триангулација.....	88
5.2.2.2.	Вороној дијаграмска метода	89
5.2.2.3.	Метода напредујућег фронта.....	89
5.2.2.4.	Поређење метода генерисања неструктурисаних мрежа.....	90
5.2.3.	Адекватан одабир типа мреже.....	91
5.2.4.	Хибридне мреже	91
5.2.5.	Адаптивне мреже у CFD симулацијама	93
5.2.6.	Прилагођавање прорачунске мреже CFD моделу	93
5.2.6.1.	Паралелизација и мрежирање за HPC у CFD-у	94
5.2.7.	Креирање прорачунске мреже за нестационарно струјање	95
5.2.7.1.	Динамичке (померајуће) мреже.....	95
5.2.7.2.	Еластични модели (енгл.-Spring Analogy Method)	97
5.2.7.3.	Мреже са прегенерисаним зонама (енгл.-Overset или Chimera Meshes)	98
5.2.7.4.	Модел клизне мреже (енгл.-Sliding Mesh Model)	99
5.2.7.5.	Поновно генерисање мреже (енгл.-Remeshing)	100
5.2.7.6.	Одабир методе за формирање NM за случајеве нестационалног струјања	100
5.2.8.	Процена квалитета прорачунске мреже	101
5.2.8.1.	Ортогоналност прорачунске мреже	101
5.2.8.2.	Закривљеност ћелија мреже (енгл.-Mesh Cell Curvature)	103
5.2.8.3.	Правило средње тачке	104
5.2.8.4.	Размерни однос прорачунских елемената	105
5.2.8.5.	Довољна густина NM	105
5.2.8.6.	y+ критеријум за гранични слој	107

5.2.9.	Смернице за процену и контролу квалитета прорачунске мреже у CFD анализама	108
5.2.10.	Будућност аутоматског креирања мрежа	108
6.	Верификација и валидација CFD симулација	113
6.1.	Верификација у CFD анализи	113
6.1.1.	Независност решења од мреже (Grid Independence Study)	114
6.1.2.	Конвергенције решења.	114
6.1.2.1.	Провера локалне конзервације масе, импулса и енергије.	115
6.1.3.	Тестирање нумеричке стабилности и осетљивости.	115
6.1.3.1.	Промена временског корака у нестационарним симулацијама.	115
6.1.3.2.	Осетљивост на граничне услове.	116
6.1.3.3.	Осетљивост на NM и методе дискретизације.	116
6.1.3.4.	Верификација различитих турбулентних модела.	117
6.1.3.5.	Поређење са другим CFD кодовима или аналитичким решењима.	117
6.2.	Валидација у CFD анализи	117
6.2.1.	Одабир релевантних експерименталних података	118
6.2.2.	Прилагођавање CFD модела експерименталним условима.	119
6.2.3.	Метрике за процену CFD тачности.	119
6.2.3.1.	Апсолутна грешка.	119
6.2.3.2.	Релативна грешка.	119
6.2.3.3.	Корен средње квадратне грешке (RMSE)	119
6.2.3.4.	Максимална грешка.	120
6.2.3.5.	Коефицијент корелације – r	120
6.2.3.6.	Коефицијент детерминације - R^2	120
6.2.3.7.	Коефицијент несигурности валидације	121
6.2.4.	Поређење визуелизованог тока струјања	121
6.2.5.	Крос-валидација	122
6.2.6.	Критеријуми успешне валидације.	122
7.	Резултати истраживања	123
7.1.	Резултати истраживања нумеричког моделовања стационарног 3D калибрационог модела	123
7.1.1.	Калибрациони 3D модел	123
7.1.2.	Нумерички прорачун струјања	125

7.1.2.1.	Временска дискретизација струјања.....	125
7.1.2.2.	Просторна дискретизација струјања.....	127
7.1.2.3.	Нумеричка дискретизација струјања	129
7.1.2.4.	Верификација просторне дискретизације	133
7.1.2.5.	Верификација довољне густине и независност решења од NM	134
7.1.3.	Верификација конвергенције решења	136
7.1.4.	Верификација нумеричке стабилности и осетљивости.....	136
7.1.4.1.	Верификација временског корака у нестационарним симулацијама	136
7.1.4.2.	Верификација осетљивости на граничне услове.	136
7.1.4.3.	Верификација осетљивости на различите турбулентне методе.....	137
7.1.4.4.	Верификација поређењем са другим CFD кодовима / аналитичким решењима.	140
7.1.5.	Закључак верификације CFD симулације.	140
7.2.	Валидација резултата истраживања нумеричког моделовања стационарног 3D калибрационог модела.....	141
7.2.1.	Одабир релевантних експерименталних резултата.....	142
7.2.2.	Прилагођавање CFD модела експерименталним условима.....	142
7.2.2.1.	Геометријска усаглашеност.....	142
7.2.2.2.	Почетни и гранични услови струјања.....	143
7.2.3.	Приказ спровођења прорачуна и добијених резултата	147
7.2.3.1.	Иницијација прорачуна и конвергенција решења	147
7.2.3.2.	Метода прорачуна.....	150
7.2.3.3.	Резултати прорачуна	152
7.2.4.	Метрика валидности резултата прорачуна.....	156
7.2.4.1.	Апсолутна грешка.....	156
7.2.4.2.	Релативна грешка.....	158
7.2.4.3.	Корен средње квадратне грешке-RMSE	159
7.2.4.4.	Максимална грешка.....	160
7.2.4.5.	Коефицијент корелације-г.....	160
7.2.4.6.	Коефицијент детерминације-R2	160
7.2.4.7.	Коефицијент несигурности валидације	161
7.2.4.8.	Оцена валидности на основу метричких показатеља.....	161
7.2.5.	Визуелизација расподеле физичких величина стања флуида у NM.....	163
7.2.6.	Закључак о валидацији резултата CFD модела.....	174

7.3. Илустративни пример примене унапређене методе на случај 2D нестационарног струјања	175
8. Закључак истраживања	179
8.1. Анализа испуњености постављених циљева, хипотеза и научних доприноса рада..	179
8.2. Правци будућих научних истраживања	183
Литература	185
Биографија	201

Листа слика

Слика 1-1: Укључивање испитивања у аеротунелу у пројектовању, истраживању и развоју одређених авиона [1][2].....	1
Слика 2-1 Реплика једрилице Sir George Cayley Glider (Nigel Coates) у Јоркширском музеју [9]	12
Слика 2-2 Визуелизација струјања око балистичког пројектила у SIBREF.....	14
Слика 2-3 Радни део испитне станице DGA [24].....	15
Слика 2-4: Подзвучни аеротунел у пуној размери у истраживачком центру НАСА-е у Ленглију [25].....	15
Слика 2-5: Шематски приказ отвореног аеротунела.	16
Слика 2-6: Шематски приказ затвореног аеротунела.	17
Слика 2-7: Аеротунел у NASA-Ames истраживачком центру у Маунтин Вјуу, Пало Алто, Калифорнија, САД.	17
Слика 2-8 Аеротунел браће Рајт (Wright) из 1901. године [14].....	18
Слика 2-9: Удео аеротунелских испитивања у пројектовању, истраживању и развоју нових ваздухоплова [1], [2].	18
Слика 2-10: Тренд раста инсталиране снаге погонских група великих аеротунела [1], [2].	19
Слика 2-11: Могућност експерименталне базе ЦАГИ института упоређено са анвелопом лета Бурана [2].	19
Слика 2-12: Анвелопа аеротунела ЦАГИ института обзиром на Буранову путању у повратку [2].	20
Слика 2-13 Могућност експерименталне базе CUBRC у односу на путање Аполо и Шатла при повратку [1], [2].	20
Слика 2-14 Анвелопа САД аеротунела у односу на питање Шатла и пројеката SSTO [1], [2].	21
Слика 2-15: Могућност експерименталне базе светских аеротунела у трансониčnoј области струјања [1], [2].	22
Слика 2-16: Реплика авиона Сарић-1 који се чува у Музеју ваздухопловства у Сурчину.	22
Слика 3-1: Аеротунел „Мирослав Ненаовић“ Машинског факултета у Београду.	29
Слика 3-2: Отворени аеротунел Т-31, испитивање мотора авиона [103].	30
Слика 3-3: Испитивање авиона J-20 у Т-32, ВТИ.	30
Слика 3-4: Изглед водено-кавитационог тунела.....	30
Слика 3-5: Изглед аеротунела Т-34 у режиму рада, ВТИ.	30
Слика 3-6: Поставка калибрационог модела НВ-1 у хиперсонични аеротунел Т-34, ВТИ.....	30

Слика 3-7: T-35 изглед радног дела са стубном аеровагом и изгледом ињекторских млазница [105].....	31
Слика 3-8: T-35 модел AGARD-B у положају испитивања [105]	31
Слика 3-9: ВТИ-јев шестокомпонентни ИМО напона [105].....	32
Слика 3-10: ВТИ аеротунел T-35 [112].....	32
Слика 3-11: Упоредни дијаграм C_d у зависности од AoA мерења у аеротунелима ВТИ T-35 и T-38 и NAE [105].....	32
Слика 3-12: Упоредни дијаграм C_l у зависности од AoA мерења у аеротунелима ВТИ T-35 и T-38 и NAE [105].....	33
Слика 3-13: Упоредни дијаграм C_m у зависности од AoA мерења у аеротунелима ВТИ T-35 и T-38 и NAE [101].....	33
Слика 3-14: Функционална шема рада аеротунела T-38, ВТИ [3], [115].	34
Слика 3-15: Резервоари високог притиска T-38.....	34
Слика 3-16: Модуларни млазник T-38[116].	34
Слика 3-17: Изглед предајника притиска – тип Trafag ECX 8845 [119].....	35
Слика 3-18: Дијаграм тока и обраде измерених величина у.....	35
Слика 3-19: Визуелизација струјања граничног слоја уљним филмом при $M=0,9$ [106].	37
Слика 3-20: Визуелизација струјања граничног слоја уљним филмом при $M=0,2$ [106]	37
Слика 3-21: Визуелизација струјања у граничном слоју употребом памучних кончића, модел авиона Ласта при $V=100m/s$ [106].	37
Слика 3-22: Визуелизација модела НА флуоро-сцентним кончоћима у T-32 [106].....	37
Слика 3-23: Визуелизација бојом у воденом тунелу ВТИ [106].	38
Слика 3-24: Визуелизација вртложног трага наношењем $TiCl_4$ [106].....	38
Слика 3-25: Визуелизација шлиреном конуса при $M=1,56$ [107].....	38
Слика 3-26: Визуелизација шлиреном конуса при $M=1,02$ [107].....	38
Слика 3-27: Визуелизација шлиреном-холографска интерференца око сфере при $M=1,02$ [107].	39
Слика 3-28: Визуелизација шлиреном-холографска интерференца око сфере при $M=1,1$ [107].	39
Слика 3-29: Опсег струјања у T-35 и T-38 са калибрационим моделима.....	39
Слика 4-1: Неинерцијални и инерцијални координатни систем.	41
Слика 4-2: Оријентације коефицијената аеродинамичких сила и момената, AoA и вектора брзине опструјавања.	42
Слика 4-3: Хијерархија различитих нивоа моделовања NSE.	58
Слика 4-4: Радарски дијаграм поређења RANS турбулентних модела.	69
Слика 5-1: Шематски приказ просторне дискретизације методом коначних запремина.	77
Слика 5-2: Поређење метода просторне дискретизације.	78
Слика 5-3: Физички (а) и нумерички(б и ц) домен [163], [163].....	82

Слика 5-4: Трансформација трапезног у правоугаони домен [160].	83
Слика 5-5: Ортогонална мрежа око аеропрофила са апроксимацијом границе степеништа [133], [166].	84
Слика 5-6: Ортогонална метода са урођеном конфигурацијом [167].	85
Слика 5-7: Криволинијска „Н“ мрежа око аеропрофила.	85
Слика 5-8: Криволинијска „С“ мрежа око аеропрофила.	86
Слика 5-9: Криволинијска „О“ мрежа око аеропрофила.	86
Слика 5-10: Упоредна анализа 3D прорачунских елемената.	87
Слика 5-11: Шематски приказ полигона Вороној за тачку Р и алгоритам траингулације за увођење нове тачке [160].	89
Слика 5-12: Упоредна анализа применљивости структуралне и неструктуралне мреже.	91
Слика 5-13: Уметнички приказ хибридне NM у CFD симулацијама.	92
Слика 5-14: Расподела брзина у прорачунским чворовима.	96
Слика 5-15: Динамика еластичне промене мрежа током симулације.	97
Слика 5-16: Примери интерполације прорачинске мреже у зависности од реда интерполације [180].	98
Слика 5-17: Пример неортогоналности [165].	102
Слика 5-18: Пример лоше и идеалне апроксимације мреже на основу параметра средње тачке [165].	104
Слика 5-19: Пример лоше и идеалне апроксимације мреже на основу параметра средње тачке [165].	105
Слика 5-20: Дијаграм тока креирања прорачунске мреже у CFD анализи.	109
Слика 7-1: Облик и димензије AGARD-B калибрационог модела [3], [204], [205].	124
Слика 7-2: Графички приказ прорачунског димена Mesh-2 [3].	128
Слика 7-3: Прорачунска мрежа око AGARD-B модела приказана на уздужном пресеку у вертикалној и хоризонталној равни симетрије.	129
Слика 7-4: Изглед мреже на уздужном вертикалном пресеку у зони носа AGARD-B модела.	130
Слика 7-5: Изглед мреже на попречном пресеку у зони крила AGARD-B модела.	131
Слика 7-6: Изглед попречног распрострањања прорачунске мреже око AGARD-B модела.	132
Слика 7-7: Дистрибуција апсолутног притиска на површини модела и параметарским	137
Слика 7-8: Упоредни дијаграми C_l са променом AoA употребом SST k- ω и SA турбулентним моделима при $M=0,6$.	138
Слика 7-9: Упоредни дијаграми C_d са променом AoA употребом SST k- ω и SA турбулентним моделима при $M=0,6$.	138
Слика 7-10: Упоредни дијаграми C_l са променом AoA употребом SST k- ω и SA турбулентним моделима при $M=0,85$.	138
Слика 7-11: Упоредни дијаграми C_d са променом AoA употребом SST k- ω и SA турбулентним моделима при $M=0,85$.	139

Слика 7-12: Упоредни дијаграми C_l са променом AoA употребом SST k- ω и SA турбулентним моделима при $M=1.6$	139
Слика 7-13: Упоредни дијаграми C_d са променом AoA употребом SST k- ω и SA турбулентним моделима при $M=1.6$	139
Слика 7-14: Изглед моделованог AGARD-B модела у SolidWorks.....	143
Слика 7-15: Конвергенција решења у првих 200 итерација прорачуна за режим струјања $M=0,6$ при $AoA=0^\circ$ [3]	148
Слика 7-16: Конвергенција решења у првих 200 итерација прорачуна за режим струјања $M=0,6$ при $AoA=0^\circ$ [3].	149
Слика 7-17: Конвергенција решења у првих 200 итерација прорачуна за режим струјања $M=0,6$ при $AoA=0^\circ$	149
Слика 7-18: График промене коефицијента аеродинамичког узгона C_l са променом AoA при $M=0,6$	153
Слика 7-19: График промене коефицијента аеродинамичког отпора C_d са променом AoA при $M=0,6$	153
Слика 7-20: График промене коефицијента аеродинамичког момента C_m са променом AoA при $M=0,6$	153
Слика 7-21: График промене коефицијента аеродинамичког узгона C_l са променом AoA при $M=0,85$	154
Слика 7-22: График промене коефицијента аеродинамичког отпора C_d са променом AoA при $M=0,85$	154
Слика 7-23: График промене коефицијента аеродинамичког момента C_m са променом AoA при $M=0,85$	154
Слика 7-24: График промене коефицијента аеродинамичког узгона C_l са променом AoA при $M=1,6$	155
Слика 7-25: График промене коефицијента аеродинамичког отпора C_d са променом AoA при $M=1,6$	155
Слика 7-26: График промене коефицијента аеродинамичког момента C_m са променом AoA при $M=1,6$	155
Слика 7-27: Нагиб криве узгона услед Маховог броја.	156
Слика 7-28: График зависности апсолутне грешке у функцији AoA при $M=0,6$	157
Слика 7-29: График зависности апсолутне грешке у функцији AoA при $M=0,85$	157
Слика 7-30: График зависности апсолутне грешке у функцији AoA при $M=1,6$	157
Слика 7-31: Релативна грешка CFD у односу на експериментале	158
Слика 7-32: Релативна грешка CFD у односу на експериментале	158
Слика 7-33: Релативна грешка CFD у односу на експериментале	159
Слика 7-34: Расподела статичког притиска дуж AGARD-B (rocket) и вертикалне равни симетрије (symmetry) за случај подзвучног струјања при $AoA=6^\circ$ [3].	163
Слика 7-35: Расподела апсолутног притиска дуж AGARD-B и вертикалне равни симетрије за случај подзвучног струјања при $AoA=8^\circ$	164

Слика 7-36: Расподела статичног притиска у вертикалној равни симетрије за случај подзвучног струјања при $AoA=2^\circ$	164
Слика 7-37: Расподела статичног и динамичког притиска са горње стране AGARD-B модела при $M=0,85$ и $AoA=2^\circ$ [3].....	165
Слика 7-38: Расподела динамичког и статичног притиска у вертикалној равни симетрије за случај подзвучног струјања при $AoA=2^\circ$ [3].	166
Слика 7-39: Расподела динамичког притиска у вертикалној равни око крила у зонама $0,1 D$ и $0,25 D$ од трупа при $AoA=4^\circ$	166
Слика 7-40: Расподела апсолутног притиска у вертикалној равни око крила у зони $0,1D$ од трупа.	167
Слика 7-41: Расподела притиска на површини модела при трансоничном струјању при $AoA=0^\circ$	167
Слика 7-42: Расподела укупне брзине на површини AGARD и параметарским површинама при $M=0,6$ и $AoA=4^\circ$	168
Слика 7-43: Расподела компоненте v_y брзине на површини AGARD-B и параметарским површинама при $M=0,6$ и $AoA=4^\circ$	168
Слика 7-44: Расподела брзина v_z и v_y на површини AGARD-B и на вертикалној равни при $M=0,85$ и $AoA=2^\circ$	170
Слика 7-45: Расподела укупне брзине и компоненти v_x и v_z у вертикалној равни на удаљености $0,2D$ од трупа при $M=0,6$ и $AoA=2^\circ$	171
Слика 7-46: Расподела компоненте брзине v_y у вертикалној површини на удаљености $0,2D$ од трупа при $M=0,85$ и $AoA=2^\circ$	172
Слика 7-47: Визуелизација струјница око AGARD-B модела.....	173
Слика 7-48: Дистрибуција фреквенције турбулентне вртложне структуре	173
Слика 7-49: Дијаграм промене C_l и C_d са прирастом AoA за аеропрофил NACA0012.	175
Слика 7-50: Дијаграм промене динамичког C_l прирастом AoA за аеропрофил NACA0012.	176
Слика 7-51: Дијаграм промене динамичког C_d прирастом AoA за аеропрофил NACA0012.	176
Слика 7-52: Расподела укупне брзине око аеропрофила за различите вредности AoA	177

Листа табела

Табела 3-1: Граничне вредности карактеристичних величина за T-38 [118].....	34
Табела 3-2: Основни параметри мерења у T-38,[120].	35
Табела 3-3: Врсте визуелизација и њихова примена, [106], [107].....	36
Табела 4-1: Карактеристике и примена основних метода вртљивости.	56
Табела 4-2: Прорачун трајања прорачуна.....	57
Табела 4-3:Препоручене вредности коефицијента C_v за SA модел турбуленције[138]	59
Табела 4-4:Препоручене вредности коефицијената C_{b1} , C_{w1} , σ_t за SA модел турбуленције [140], [141].....	60
Табела 4-5:Вредности корекционих коефицијената k- ϵ модела трбуленције [129].	62
Табела 4-6: Вредности корекционих коефицијената RNG k- ϵ модела турбуленције [144].....	63
Табела 4-7: Вредности корекционих коефицијената RNG k- ω модела трбуленције [143].....	66
Табела 4-8: Вредности корекционих коефицијената SST k- ω модела турбуленције [91], [94]	67
Табела 4-9: Упоредни преглед RANS модела.	69
Табела 5-1: Анализа метода временске дискретизације.....	74
Табела 5-2: Поређење метода генерисања неструктурисаних мрежа [129], [160], [165], [166], [170], [172], [173].....	90
Табела 5-3: Поређење метода и типова прорачунских мрежа.....	92
Табела 5-4: Преглед метода за формирање нестационарних прорачунских мрежа.....	101
Табела 5-5: Параметарске вредности степена искошености ћелија мреже [183].	104
Табела 5-6: Препоручене вредности y^+ критеријума за гранични слој према [37].....	107
Табела 5-7: Смернице за процену и контролу квалитета прорачунске мреже у CFD анализама.	108
Табела 7-1: Вредности референтних димензија AGARD-B модела [3], [121].	124
Табела 7-2:Упоредна анализа CFD софтвера.	125
Табела 7-3: Метрика прорачунске мреже за AGARD-B.	133
Табела 7-4: Вредности параметарских величина коришћених за анализу сензитивности NM [3].	135
Табела 7-5: Показатељи конвергенције прорачунских мрежа.....	135
Табела 7-6: Резултати аеротунелских испитивања при $M=0,6$	144
Табела 7-7: Резултати аеротунелских испитивања при $M=0,85$	144
Табела 7-8: Резултати аеротунелских испитивања при $M=1,6$	145
Табела 7-9: Препорука одабира методе прорачуна у зависности од режима струјања.	147

Табела 7-10: Услови слободног струјања и резултати CFD прорачуна [3].....	152
Табела 7-11: Апсолутна грешка при $M=0,6$	157
Табела 7-12: Апсолутна грешка при $M=0,85$	157
Табела 7-13: Апсолутна грешка при $M=1,6$	157
Табела 7-14: Вредности корена средње квадратне грешке CFD прорачуна.	159
Табела 7-15: Вредности коефицијента корелације CFD кода.....	160
Табела 7-16: Вредности коефицијента детерминације CFD кода.	161
Табела 7-17: Вредности коефицијента несигурности валидације CFD кода.	161

Преглед коришћених ознака

$\vec{F}_c$	Конвентивни флукс
$\vec{F}_v$	Вискозни флукс
$\bar{Q}_{CFD}$	Аритметичка вредности решења добијених CFD симулацијом
$\bar{Q}_{ref}$	Аритметичка референтна експериментална или аналитичка вредност
$\bar{v}_l$	Просечну вредност брзине флуидног делића [m/s]
$\dot{v}_l$	Флукуациона компонента брзне флуидног делића [m/s]
$\vec{\sigma}_n$	Вектор напона
$\vec{j}$	Вектор изворног услова
$\frac{D}{Dt}$	Материјални извод
D_{ij}^d	Девијацијски део тензора брзинских деформација.
$\vec{F}, \vec{G}$ и $\vec{H}$	Вектори флукса
$\dot{Q}$	Укупна размењена количина топлоте [J]
$\vec{U}$	Вектор решења
$\dot{W}$	Сума снага свих сила [W]
$\vec{n}$	Јединични вектор, орт
$\vec{u}$	Вектор брзине флуида
$\vec{v}$	Вектор брзине флуидног делића [m/s]
δ_{ij}	Кронекеров делта симбол
ε_{abc}	Апсолутна грешка [-]
ε_e	Релативна грешка [%]
ε_{max}	Максимална грешка [-]
$\tilde{v}$	Турбулентна кинетичка енергија (количина енергије коју флуид поседује током свих својих турбулентних струјања);
σ_k	Емпиријски коефицијент k-ε модел турбуленције [-]
σ_ω	Коефицијент дифузије специфичне стопе дисипације [-]
∂	Парцијални извод
Δ	Оператор прираштаја
∇	Оператор градијента
2D	Дводимензионално (енгл. Two-Dimensional)
3D	Тродимензионално (енгл. Three-Dimensional)
A	Референтна аеродинамичка површина [m ²]
AGARD-B	Саветодавна група за истраживање и развој у области ваздухопловства (енгл. - Advisory Group for Aerospace Research and Development)
AI	Вештачке интелигенције (енгл. – Artificial Intelligence)
AMR	Адаптивне мреже (енгл. – Adaptive Mesh Refinement)
AoA	Нападни угао (енгл. -Angles of Attack)
AOK	Асимптотски опсег конвергенције
AR	Размерни однос (енгл. - Aspect Ratio)
BFM	Основни аеротунелски калибрациони модел са крилима (енгл. - Basic Finer Model)
CAD	Рачунарски подржано пројектовање (енгл. -Computer-Aided Design)

C_{b1}	Коефицијент градијента турбулентне кинетичке енергије [-]
C_d	коефицијент аеродинамичке силе отпора [-]
$CD_{k\omega}$	параметар k- ω SST модел турбуленције [-]
CFD	Прорачунска динамика флуида
CFL	Курантов број [-]
C_l	Коефицијент аеродинамичке силе узгона [-]
C_m	Коефицијент аеродинамичког момента пропињања [-]
c_p	Специфична топлота при константном притиску [J/kgK]
CPU	Централна процесорска јединица (енгл.-Central Processing Unit)
C_v	Градијент брзине флуида [-]
c_v	Специфична топлота при константној запремини [J/kgK]
C_{w1}	Коефицијент разлагања турбуленције [-]
$C_{\varepsilon 1}$, $C_{\varepsilon 2}$ и σ_ε	Емпиријски коефицијенти k- ε модел турбуленције [-]
C_μ	Константа модела k- ε модел трбуленције
D	Пречник калибрационог модела [m]
DES	Метода одвојене симулације вртлога (енгл.-Detached Eddy Simulation,
D_f	Дифузиони ток на посматраној површини
DGA	Генерална управа за наоружање (фра.-Direction Générale de l'Armement)
DNS	Директне нумеричке симулације (engl.- Direct Numerical Simulation
E	Укупна енергија система [J]
e	Енергија по јединици масе [J/kg]
EVM	Модел вртложне вискозности (енгл.-Eddy Viscosity Models)
F_l	Функције мешања напона
FDM	Метод коначних разлика (енгл.-Finite Difference Method)
F_f	Конвенктивни ток на посматраној површини
FPC	Метод потпуног потенцијалног струјања (енгл. Full Potentilal code)
F_S	Фактор сигурности индекса конвергенцијемрежа
GCI	Индекс конвергенције мреже (енгл.- Grid Convergence Index).
h	Енталпија [J]
HPC	Високо перформабилни рачунар (енгл.-High-Performance Computing)
IMEX	Експлицитно-имплицитне хибридне методе (енгл.-Implicit-Explicit Methods,)
J	Детерминанта Јакобијана
k	Турбулентна кинетичка енергија[J/kg]
L	Аеродинамичка сила узгона [N]
LES	Симулација великих вртлога (енгл.- Large Eddy Simulation
L_{ref}	Референтна дужина [m]
M	Махов број [-]
m	Маса [m]
M	Махов број
MAE	Средња апсолутна грешка (енгл.- Mean Absolute Error)
MBFM	Модификовани аеротунелски калибрациони модел са крилцима (енгл.- Modify Basic Finer Model)
NASA	Национална администрација за аеронаутику и свемир (енгл.-National Aeronautics and Space Administration)
NACA	Национални саветодавни комитет за аеронаутику (енгл.-National Advisory Committee for Aeronautics)
NM	Прорачунске мреже (енгл.- Numerical Mash)
NSE	Навије-Стоксове једначине (енгл.- Navier-Stokes equations)
ONERA	Национална канцеларија за студије и истраживања ваздухопловства, франц.-Office National d'Études et de Recherches Aérospatiales

p	Притисак [Pa]
p_0	Зауставни притисак (stagnation pressure) [Pa]
PIV	Велосиметрија слике честица (енгл.-Particle Image Velocimetry)
P_k	Генерисана турбулентна кинетичка енергија [J]
q	Динамички притисак [Pa]
Q_{CFD}	Вредности решења добијених CFD симулацијом
Q_{ref}	Референтна експериментална или аналитичка вредност
R	Универзална гасна константа [J/(mol K)]
r	Коефицијент корелације [-]
R^2	Коефицијент детерминације [-]
RANS	Навије–СтоксовЕ једначина добијен применом Рејнолдсовог усредњавања (енгл-Reynolds-Averaged Navier–Stokes)
Re	Рејнолдсов број [-]
R_f	Резидуална функција
R_{ij}	Рејнолдсов тензор напона
RK4	Четворостепени Рунге-Кута метод
RK-BE	Рунге-Кута-Ојлеров кораком уназад метод (енгл.- Runge-Kutta backward Euler)
RMSE	Корен средње квадратне грешке (енгл.-Root Mean Square Error) [-]
RNG	Фактор РНГ k - ϵ модела турбуленције
RSM	Рејнолдсови стрес модели, (енгл. Reinolds Stres Models, у даљем тексту).
S	Површина опструјаваног тела [m ²]
s	Ентропија [J/K]
SA	Спаларт-Армаласов турбулентни модел (енгл.- Spalart-Allmaras)
SDM	Стандардни динамички модел (енгл.-Standard dynamic model)
S_{ij}	Смичући деформацијски тензор брзине
S_p	Изворни члан
SST	Смицајни прелазни модел вискозитета (енгл.-Shear Stress Transitional)
SSTO	Летелица која је у могућности да независно и виšekратно изврше мисију лета у орбити (енгл.: Single Stage To Orbit)
t	Време [s]
T	Температура [K]
T_0	Зауставна температура [K]
U	Брзина слободног тока [m/s]
u, v, w	Компоненте брзине флуидног делића у координатним правцима [m/s]
U_{val}	Коефицијент несигурности валидације
V	Контролна запремина
VW_1	Корективне емпиријски коефицијенти корекције у yavisnosti od vrste gasa
VW_2	Корективне емпиријски коефицијенти корекције у yavisnosti od yaremine gasa
w_w	Функција тежине
y^+	Критеријум граничног слоја [-]
δ_{ij}	Кroneкорова делта (јединични тензор),
ϵ	Стопа дисипације
θ	Угао закривљености прорачунских елемената NM [°]
θ	Угао напада или осцилације [°]
κ	Коефицијент адијабате [-]
κ_r	Карманова константа [-]
μ	Кинематска вискозност [m ² /s]

ν_{num}	Ефективна нумеричка вискозност
ν_t	Турбулентна вискозност
ρ	Густина флуида [kg/m^3]
ρ_0	Густина непоремећене струје флуида [kg/m^3]
σ_t	Коефицијент дифузије турбуленције [-]
τ	Тензор напона [Pa]
Φ	Потенцијал поља / физичка величина
ϕ	Очекивана скаларна величина, универзална
Ω	Укупна запремина домена [m^3]
ω	Специфична дисипација
ВТИ	Војно технички институт
ИМО	Испитно мерна опрема
Π_i	ознака универзалног параметра
РНГ	Ренормализациона група
ЦАГИ	Централни аерохидродинамички институт (рус.- Центральный аэрогидродинамический институт)

Предговор

Истраживање представљено у овој докторској дисертацији резултат је вишегодишњег ангажовања у области нумеричке аеродинамике и тежње да се савремене методе рачунарског моделирања примене у циљу добијања поузданих и прецизних резултата у анализи понашања летелица у различитим режимима лета. Подстицај за овакво истраживање проистекао је из актуелних изазова у ваздухопловној индустрији, у којој све већа комплексност пројектовања и ограничене могућности експерименталних испитивања условљавају интензивнију примену CFD метода као алтернативе класичним приступима.

Намера овог рада била је да се унапреди постојећа нумеричка методологија за одређивање аеродинамичких коефицијената и дериватива стабилности летелица, кроз систематски развој, верификацију и валидацију CFD модела, у складу са препорукама релевантних стручних заједница. Посебан нагласак стављен је на примену у условима ограничених експерименталних ресурса, што је нарочито значајно у контексту развоја домаћих капацитета за пројектовање и анализу ваздухоплова.

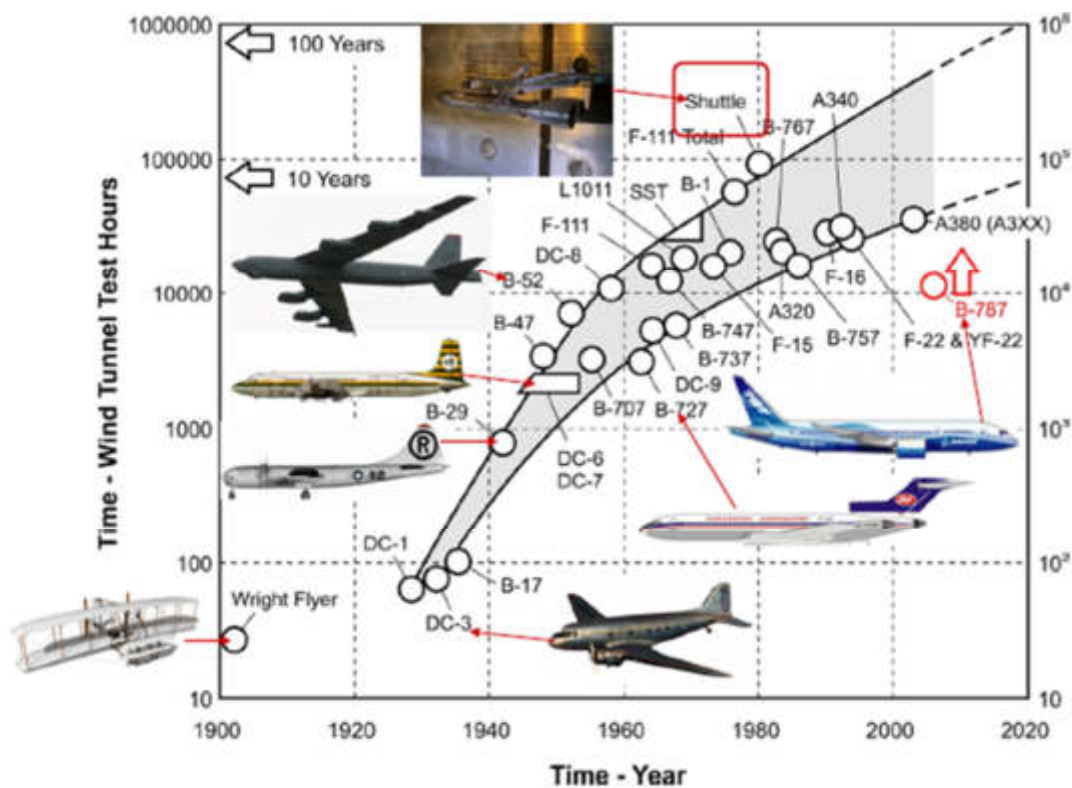
Остварени резултати, потврђени на моделу AGARD-B у подзвучном, трансоничном и суперсоничном режиму, показали су да је могуће постићи висок ниво поузданости симулација уз пажљиво конструисан прорачунски модел, адекватну дискретизацију и стручно одабраним турбулентним моделом. Важан допринос овог рада огледа се у развоју побољшане методологије дизајнирања облика и димензија прорачунских домена, која омогућава примену на различите положаје модела и услове опструјавања без потребе за редизајнирањем. Истовремено, унапређена је методологија израде прорачунске мреже која омогућава примену у прорачунима нестационарних опструјавања без потребе за редизајнирањем. Рад такође даје препоруке за правилну и ефикасну употребу већ развијених турбулентних модела, као и стратегију иницијалног прорачуна којом се обезбеђује стабилан тренд конвергенције нумеричких решења. Радом је побољшана методологија верификације нумеричких алата кроз конкретизацију у условима испитивања у аеродинамици, уз ослањање на доступне експерименталне податке. Овакав приступ доприноси могућој унификацији верификационих процедура у овој области. Поред тога, побољшана је и методологија валидације нумеричких модела кроз прецизирање критеријума валидности прихватљивих за класичне летелице, што је демонстрирано на репрезентативном примеру AGARD-B моделу, у подзвучном, трансоничном и надзвучном режиму.

Резултати рада указују на то да је могуће постићи висок ниво поузданости и применљивости CFD симулација, уз пажљиво дефинисане услове моделирања и валидности. На овај начин, рад доприноси развоју националних капацитета за CFD анализу и поставља основу за даљи развој у правцу аутоматизације, мултифизичког проширења и примене у оквиру процеса дигиталног инжењеринга.

Изражавам захвалност свим колегама, сарадницима и институцијама које су пружиле подршку у реализацији овог истраживања, а посебно менторима чија је стручна помоћ и саветодавна улога била од пресудног значаја за квалитет и доследност рада.

1. Увод

За успешно пројектовање летелице потребно је знати тачне аеродинамичке карактеристике целине авиона, као и његових појединачних компоненти. Присутни су теоријски и експериментални приступи проналажењу одговарајуће вредности аеродинамичких коефицијената и дериватива стабилности. Поред испитивања у лету аеротунел је уобичајен тип експерименталне методе за добијање аеродинамичких карактеристика авиона. Број сати испитивања у аеротунелима на одређеним авионима у фази развоја приказани кроз историју кроз историју развоја ваздухопловства приказани су дијаграмом на Сл.1-1, [1].



Слика 1-1: Укључивање испитивања у аеротунелу у пројектовању, истраживању и развоју одређених авиона [1][2].

Може се приметити да је просечно испитивање у аеротунелу 1930-их било близу 100 сати по летелици. Експоненцијални развој ваздухопловства је пратио интензивно и свеобухватније испитивање. Како се употреба авиона временом развијала тако се јављала и потреба за авионе сложеније конструкције, што је проузроковало и повећање аеродинамичких испитивања. Током 1980-их се стигло на скоро 105 сати испитивања у аеротунелима, док се у савременим испитивањима током пројектовања свемирског шатла дошло до времена експерименталних испитивања еквивалентног 10 година.

Експериментални приступ одређивању аеродинамичких карактеристика летелице у аеротунелу је повезан са великим потешкоћама. Од потребе за високопрецизном израдом модела летелица па до сложености обезбеђења услова високог квалитета протока ваздуха око тестираних модела. Од почетка експерименталних истраживања аеротунела водила се борба

са односом димензија и брзине модела авиона. Максимални остварени Рејнолдсов број (енгл.- Osborne Reynolds, (1842–1912), Re-Рејнолдсов број) у свим постојећим европским и америчким аеротунелима у зависности од Маховог броја (енгл.- Ernst Mach, (1838-1916), М-Махов број) је представљен у [1], [3]. Приметно је да је за режиме полетање, слетање и крстарење Рејнолдсов број транспортних авиона далеко изван свих могућности аеротунела и поред NASA-ине структуре за криогено тестирање у истраживачком центру Ленгли (NTF) у САД, и европског криогеног трансоничног аеротунела (ETV).

Битно је напоменути да је испитивање летелице или њеног модела у лету неизоставни корак у потврђивању прорачуном предвиђених аеродинамичких и карактеристика летелице у лету. И поред значајног напредовања и непрекидног развоја осталих метода испитивања аеродинамичких особина ваздухоплова овај облик испитивања је и даље остао усамљен приликом потврђивања летних карактеристика летелица сложених маневара, као што је описано у [4].

С друге стране, нумеричке методе предвиђања аеродинамичких карактеристика авиона диктиране су развојем и доступношћу рачунарске технике. Иако су у великој мери коришћени 1980-их, развој суперкомпјутера током 1990-их направио је велики корак напред у развоју и примени нумеричких метода за одређивање аеродинамичких особина авиона

Прорачунска динамика флуида (енг. Computational Fluid Dynamics – у даљем тексту CFD) представља грану теоријске аеродинамике која примењује нумеричке методе и алгоритме за решавање и анализу проблема који обухватају струјање флуида. У условима ограниченог времена доступног за испитивања у аеротунелу, од посебног је значаја располагање верификованим рачунским кодовима, који омогућавају поуздана предвиђања аеродинамичких карактеристика модела. Примена CFD-а често је подстакнута ограничењима експерименталних метода мерења, економским факторима и сложености геометрије анализираних модела. Из тих разлога, постоји изражена потреба за верификацијом, валидацијом и калибрацијом CFD симулација, како би се обезбедила њихова тачност и поузданост.

Постоји велики број поједностављених CFD модела са сврхом да обезбеди брзу, ефикасану и поуздану прелиминарну аеродинамичку анализу. Тако су Костић и др. [3] почетне прорачуне вршили помоћу 3D метода са вртложним решеткама у невискозном флуиду. Дијаграми калибрације за ефективност и циркулацију контролних површина су изведени из података испитивања у аеротунелу постојећег авиона и интерполирани за нове лаке летелице. Такав невискозни прорачунски модел инхерентно занемарује утицај граничног слоја и ефеката отцепљења, тако да криве узгона и аеродинамичких момената могу бити добијене само у њиховим линеарним доменима, а отпори се могу израчунати преко поларе индукованог отпора.

Оцокољић и др. [4] упоређују резултате експерименталних истраживања модела са нумерички одређеним аеродинамичким коефицијентима модела тренажног авиона. CFD код који се користи у овој студији је базиран на методи коначних запремина, заснован на линеарној Андерсоновој методи реконструкције-еволуције. У поглављу 2, „Преглед досадашњих истраживања”, приказани су хронолошки. Упечатљиви су радови који се односе на предмет овог истраживања.

Овде се намеће потреба за научно-истраживачким радом који ће на основу бројних досадашњих нумеричких и експерименталних истраживања дати оптимални метод CFD прорачуна, који се са аспекта расположивости рачунарских ресурса може користити у ширем домену.

1.1. Предмет истраживања

Предмет овог научног истраживања је побољшање нумеричког одређивања параметара струјног поља око аеродинамичке конфигурације летелица, у циљу одређивања аеродинамичких коефицијената и дериватива стабилности аеродинамичких коефицијената летелица.

Потпуно одређење аеродинамичког оптерећења, које делује на летелицу, условљено је познавањем вредности параметара струјног поља и аеродинамичких коефицијената. Решење претпостављеног модела кретања летелице представља математички модел аеродинамичких сила и момената, уз познато дејство гравитационе и Кориолисове силе, у стандардним или захтеваним атмосферским условима. Решење модела кретања треба да употпуни слику кретања и стабилности током кретања, оријентацију и угловни положај летелице током свих фаза лета. С обзиром да се аеродинамичка конфигурација летелице примењује приликом пројектовања ваздухоплова, како са посадом, тако и беспилотних, потребно је што прецизније познавање динамичких карактеристика летелице.

Конструктивни параметри летелице проистичу из маневарских и практичних захтева, а у директној су спрези са аеродинамичким оптерећењем летелице. Користан терет и захтеване маневарске карактеристике (брзина, долет, висина и сл.) утичу на одабир погона и диктирају геометријске и енергетске карактеристике летелице. Геометријска и енергетска својства летелице почетни су услови моделовања динамике лета.

На кретање летелице поред деловања погонске групе, и незнатне промене масе битно утичу аеродинамичке карактеристике. Проблематика кретања своди се на дефинисање стабилности ваздухоплова и услова под којима се стабилност остварује. Посебан значај треба дати на предвиђању вредности дериватива динамичке стабилности. Наиме, почетни услови кретања, варирају почев од брзина, момената инерције па до параметара атмосфере.

Нумерички прорачуни, развијани на бази класичних аеродинамичких теорија анализа малих поремећаја приликом описивања струјања око тела свде се на дводимензионалне математичке моделе летелица, са малим вредностима нападних углова (енгл.-Angle of Attack-у даљем тексту AoA). На овај начин могуће је извести примену закона линеарне аеродинамике при прорачуну аеродинамичких коефицијената и њихових дериватива. Класични модели посматрају струјно поље око летелице према концепту потенцијалног поља, чиме се врши апроксимација физичке слике струјања. Овакво моделовање даје потребне полазне вредности аеродинамичких карактеристика летелица, које изискују опширнија експериментална испитивања, како у аеротунелима у фази пројектовања, тако и испитивања у лету при завршној фази пројектовања летелице.

Савремене летелице се крећу при екстремним вредностима AoA, угла клизања или брзине ротације у ковиту. У таквим случајевима аеродинамички деривативи стабилности нису више константе већ функције једне или више променљивих. Ваздухоплови су изложени нестационарним струјним појавама које имају значајне утицаје на карактеристике кретања. Поменуто појаве се јављају при лету на великим нападним угловима и проузрокују отцепљење струје ваздуха или засенчење делова летелице вртложним трагом. Током лета могу се створити услови за несиметрично струјање. Нестационарна струјна поља су нелинеарна и сложена, а карактеристике стабилности су сложене функције нападног угла са значајним аеродинамичким спрезањем између уздужних и попречних степени слободе.

Напредовањем рачунарске технике стекао се предуслов за развој напреднијих нумеричких метода математичких моделовања летелица. Одређивање аеродинамичких дериватива стабилности CFD за летелице високих маневарских могућности је сложено и не даје увек

поуздане резултате. Дакле, постоји потреба за верификацијом добијених резултата прорачуна експерименталним методама.

Мерење аеродинамичких дериватива стабилности у Војно техничком институту (у даљем тексту ВТИ), има традицију дужу од 40 година. Изградњом аеротунела Т-35 и Т-38 и развојем електронске технологије, употребом савремених материјала пројектована је и израђена одговарајућа испитно-мерна опрема за испитивање аеродинамичких дериватива стабилности за такве типове аеротунела. Створена је могућност да се ова област експерименталне аеродинамике подигне на технолошки ниво које поседују развијене земље света. У претходном периоду развијена је метода мерења, написан и верификован софтвер за обраду резултата мерења. Пројектовани су и израђени калибрациони модели: AGARD-B (енгл.- Advisory Group for Aerospace Research and Development), стандардни динамички модел (енгл.- Standard dynamic model, у даљем тексту SDM), основни модел са стабилизаторима (енгл.- Basic Finner Model, у даљем тексту BFM) и модификовани основни модел са стабилизаторима (енгл.- Modified Basic Finner Model, у даљем тексту MBFM), као и многобројни калибрациони модели балистичких зрна. Извршена су, такође, одговарајућа мерења. Квалитативном и квантитативном анализом расположивих резултата мерења, може се доћи до закључка да постоји коначан домен симулације аеродинамичких појава, са аспекта Маховог и Рејнолдсовог броја и кретања посматраног модела.

Са друге стране, нумерички алати имају шири домен симулације. Стога се намеће потреба за успостављање синхронизације нумеричког и експерименталног начина испитивања и анализе добијених резултата.

Очекивана неслагања добијених резултата анализирана су са аспекта математичких и нумеричких модела турбуленције, вискозности и апроксимације почетних и граничних услова. Поређењем добијеног нивоа подударности са резултатима водећих светских истраживачких CFD установа дати су критеријуми за верификацију и валидност нумеричког прорачуна.

Тематика ове дисертације припада области аеродинамичких истраживања опструјаваног тела, која се у свом највећем делу ослања на примењену механику флуида, аеродинамику, механику, термодинамику, математику и метеорологију.

1.2. Научни циљеви истраживања

Из описаног предмета истраживања, проистичу следећи циљеви истраживања:

- Дефинисање математичког модела струјања флуида око летелице као крутог тела;
- Дефинисање адекватне нумеричке методе прорачуна применом рачунара сходно расположивим хардверским и софтверским капацитетима током истраживања;
- Дефинисање захтеваних вредности параметара прорачунске мреже око летелица у дводимензионалном и тродимензионалном струјном пољу и њено генерисање;
- Израда комплетног алгоритма и употреба одговарајућих софтвера за решавање математичког модела опструјавања модела аеродинамичких конфигурација за сва три режима струјања (подзвучни, окозвучни и надзвучни режим);
- Дефинисање параметара сличности између услова слободног струјања нумеричког и експерименталног модела;
- Унапређење нумеричких метода одређивања аеродинамичких коефицијената и дериватива стабилности које се користе у пројектовању и развоју летелица;

- Прецизирање критеријума валидности нумерички добијених вредности аеродинамичких коефицијената и дериватива стабилности апсолутно круте летелице у односу на експериментално добијене резултате.

1.3. Полазне хипотезе

У овом научном истраживању пошло се од **опште хипотезе**:

- Математички модел аеродинамичке слике опструјаваног чврстог тела могуће је нумерички апроксимирати у домену јединственог и физички исправног решења које је ограничено унутрашњом границом (коју представља дводимензионално и тродимензионално чврсто тело - летелица) и спољашњом границом (која се уводи синтетички).

Посебне хипотезе које су произашле из опште су:

- Физички параметри летелице (облик и димензије) су временски непроменљиве и директно утичу на аеродинамичку слику летелице;
- Ваздух је стишљиви, вискозни радни флуид који на површини летелице има услов тангентности релативне брзине флуидног делића, односно нормална компонента релативне брзине флуидног делића је једнака нули;
- Спољна граница разматраног домена је условљена тако да таласи поремећаја не напуштају домен, већ се рефлектују у нумерички домен са условом удаљеног поља које одговара тоталном притиску стандардне атмосфере;

Појединачне хипотезе које се користе у дисертацији су:

- Аеродинамичке коефицијенте летелице, добијене нумеричком методом изабраног модела равански симетричне летелице, могуће је анализирати и описати на основу резултата испитивања параметара струјног поља и слике струјног поља;
- Анализу стабилности кретања летелице могуће је извршити анализом добијених вредности аеродинамичких коефицијената и дериватива стабилности;
- Аеродинамичке коефицијенте за посматрану летелицу могуће је одредити у аеротунелском испитивању употребом мерних елемената. Ови мерни елементи се налазе на уређајима који омогућавају осцилаторно кретање модела летелице.

1.4. Научне методе истраживања

Коришћене методе научно-истраживачког рада су диктиране циљем и карактером подручја истраживања и могу се груписати у научне методе, нумеричке методе и експерименталне методе:

Научне методе које ће бити примењене у истраживању могу се груписати у следеће:

- *Метода посматрања*, која омогућава да се из реалног система прикупи довољан број података који се користе као улазни подаци за истраживања на моделима ради доношења закључака о систему којег модел репрезентује;
- *Метода дескрипција*, приликом описивања појава и читавања параметара, стања и резултата истраживања;

- *Моделовање*, поступак стварања физичког модела (модел опструјавања летелице у аеротунелу), односно математичког модела описане појаве (опструјавања летелице) способног да замени предмет и појаву која се истражује;
- *Методе апстракције и конкретизације* у фази математичког моделовања кретања летелице у процесу анализе кретања, у којој се од низа чинилаца, остављајући по страни њихове специфичне елементе, издвајају заједнички елементи у циљу извођења зачључка;
- *Компаративни метод и метод вишекритеријумске анализе* ће бити коришћен у сврху упоређивања података добијених на основу различитих поступака и приступа са циљем оцене и поређење података добијених математичким моделовањем и експериментом;
- *Анализа и синтеза* у проучавању опструјавања модела летелице, као и у математичком описивању кретања модела летелице при анализи опструјавања и динамичког понашања модела;
- *Метода суперпозиције* за дефинисање свеукупне слике аеродинамичких сила и момената које делују на посматрани модел, а у циљу синтезе експерименталних и симулационих резултата испитивања.

У процесу прорачуна, а на основу теорија аеродинамичког струјања (класа основних дводимензионалних струјања, класа дводимензионалних теорија примењених на тродимензионалне облике, класа основних тродимензионалних струјања и класа непотенцијалних, вискозних тродимензионалних струјања) употребљене су:

- *Полуемпиријске методе*, развијене на основу линеаризованих теорија дводимензионалних струјања, засноване на теоријским изразима и вредностима добијеним применом метода карактеристика коригованих у складу са вредностима резултата експерименталних аеродинамичких истраживања током досадашњих истраживања.

Нумеричке методе, које су коришћене у докторској дисертацији, развијене су на основу теорија дводимензионалних струјања примењених на тродимензионалне облике и тродимензионална струјања, прилагођене могућностима расположиве рачунарске технологије, а представљају методе прорачуна применом рачунара, у нумеричкој механици флуида познате као CFD. Засноване су на математичким теоријама на основу којих је могуће решавати основне парцијалне диференцијалне једначине нумеричким изразима, које описују посматрано струјно поље. Кориштиће се следеће нумеричке методе:

- Временски зависна метода коначних елемената је посебна метода коначних елемената за прорачун подзвучно-надзвучног опструјавања крутог тела, која је временски зависна метода. Коришћена је приликом моделовања динамичке симулације летелица;
- Метода нумеричког интегрисања диференцијалних једначина, базирана на Кошијевој теореми, теореми Рунге-Кута и Ојлера користила се приликом синтезе и суперпозиције;
- Метода коначних запремина, која представља нумеричку методу решавања система парцијалних диференцијалних једначина где су прорачунске мреже генерисане у тродимензионалном простору. Метода је примењена уз програмски пакет прорачунске динамике флуида, у оквиру програма за креирање прорачунских мрежа. Ови програмски алати користе методу за решавање проблема динамике флуида на бази закона одржања. Коришћени су комерцијални програмски алати нумеричке

динамике флуида ANSYS FLUENT са адекватним нумеричким алатима за генерисање прорачунских мрежа струјног поља.

Све експерименталне методе које су коришћене везане су за аеротунелска мерења, односно за мерења величина које су неопходне за одређивање аеродинамичких коефицијената и дериватива стабилности. Аеротунелска мерења укључују примену експерименталних метода потребних за:

- мерења примарних параметара струјања у радном делу аеротунела;
- мерење аеродинамичких сила и момената шестокомпонентном аеровагом;
- мерења тензометријским појединачним давачима;
- мерења помоћу уређаја који обезбеђују хармонијско осцилаторно кретање модела у радном делу аеротунела.

Ово научно истраживање истовремено користи савремена достигнућа нумеричких метода прорачуна примењених на физички модел летелице употребом савремених нумеричких софтвера и резултате експерименталних испитивања аеродинамичких калибрационих модела.

1.5. Очекивани научни допринос

Очекивани научни допринос предложене теме дисертације обухвата следеће:

- Успостављање побољшане и нове методологије нумеричког прорачуна аеродинамичких коефицијената и дериватива стабилности апсолутно круте летелице са фиксним командама, која се огледа у побољшању методологије дизајнирања облика и димензија прорачунских домена, која ће омогућити примену на различите положаје модела и услове опструјавања без потребе за редизајнирањем, као и унапређењем методологије израде ефикасније прорачунске мреже која даје могућност примене за прорачуне нестационарних опструјавања без потребе поновне израде мреже - ремешинга, уз препоруке за правилну и ефикасну употребу већ развијених модела турбуленције, развојем стратегије иницијалног прорачуна који ће допринети стабилном тренду конвергенције нумеричких резултата.
- Развијање и побољшање методологије верификације нумеричких алата конкретизацијом на услове испитивања у аеродинамици на основу доступних експерименталних резултата, чиме се може очекивати унификација на овом пољу, као и побољшање методологије валидације прецизирањем критеријума валидности који су прихватљиви у аеродинамици класичних летелица, кроз имплементацију развијене методологије прорачуна на репрезентативном примеру.

Научна оправданост овог истраживања лежи у чињеници да усавршавање постојећих нумеричких методологија за одређивање аеродинамичких карактеристика летелица, посебно њених динамичких карактеристика, представља корак напред у пројектовању и развоју савременијих летелица. Истраживачки рад представља теоретску основу и даје нову практичну процедуру за одређивање и верификацију добијених аеродинамичких коефицијената и њихових дериватива стабилности у процесу пројектовања различитих типова класичних концепција летелица, као и основу за даља истраживања у области нестационарне аеродинамике.

Друштвена оправданост овог истраживања се огледа у томе да се тренутно поједине аеродинамичке појаве проучавају првенствено експериментално у аеротунелима или

испитивањима у лету. Конкретизацијом и проширењем домена примене нумеричког прорачуна могу се избећи бројна експериментална испитивања летелице и накнадне итерације у пројектовању, што у ваздухопловству представља губитак времена и материјалних средстава.

1.6. Приказ докторске дисертације

Докторска дисертација структурно је организована у осам тематски повезаних поглавља.

У првом поглављу представљена су уводна разматрања у којима су јасно дефинисани предмет и циљеви истраживања, полазне хипотезе, примењене научне методе, као и очекивани научни доприноси.

Друго поглавље посвећено је прегледу досадашњих резултата у области експерименталне аеродинамике и нумеричког моделирања аеродинамичких феномена. Детаљно је анализиран актуелни статус аеротунелских испитивања у свету и у Републици Србији, с акцентом на домете испитивања у оквиру одговарајућих интервала Маховог и Рејнолдсовог броја, те описом предности и ограничења овог типа истраживања. Разматран је и развојни пут нумеричког приступа, са освртом на еволуцију CFD метода и њихову интеграцију у савремене инжењерске праксе. У оквиру овог поглавља представљени су и резултати ауторових претходних истраживања, публиковани у релевантним научним часописима и зборницима радова.

Треће поглавље обухвата опис расположивих експерименталних и рачунарских ресурса. Посебна пажња посвећена је истраживачким капацитетима Ваздухопловно-техничког института (у даљем тексту ВТИ), са посебним освртом на могућности и карактеристике аеротунела Т-35 и Т-38. Описане су испитно-мерне инсталације, системи за дигитализацију података, као и потенцијали расположиве рачунарске инфраструктуре, што је омогућило одређивање применљивих CFD метода у оквиру истраживања.

У четвртом поглављу изведена је формализација математичког модела струјања, полазећи од система Навије–Стоксових једначина. Разматрани су модели идеалног и вискозног флуида, укључујући Сатерлендов модел вискозности. Представљени су гранични и почетни услови, модели тензора напона, посебно Рејнолдсов тензор, као и Рејнолдсове усредњене Навије–Стоксове једначине (енгл.-Reynolds-Averaged Navier-Stokes, у даљем тексту RANS) приступ моделовању турбуленције. Детаљно су анализирани најчешће примењивани модели турбуленције, уз препоруке за њихову примену у зависности од геометрије и режима струјања.

Пето поглавље обухвата нумеричку дискретизацију математичког модела. У делу временске дискретизације анализирани су експлицитне, имплицитне и хибридне шеме, уз упоредну анализу и препоруке. Просторна дискретизација је обрађена кроз анализу метода коначних разлика, коначних елемената, спектралних метода и метода коначних запремина. Представљене су технике креирања структурисаних и неструктурисаних мрежа, укључујући хибридне и адаптивне мреже, као и специфичности динамичких и еластичних мрежа у моделовању нестационарних струјања. Посебно је истакнута примена клизних мрежа и поновног генерисања мреже. Дато је упутство за избор мрежне стратегије, као и критеријуми за оцену квалитета мреже, укључујући алгоритамски дијаграм тока процеса креирања прорачунског домена.

Шесто поглавље бави се концептима верификације и валидације CFD симулација. Представљене су релевантне методе засноване на искуствима водећих светских институција и препорукама ваздухопловне индустрије, као и анализа примене ових метода у

аеродинамичким испитивањима. Верификација обухвата процену осетљивости решења на мрежу, проверу конвергенције и очувања физичких величина, као и тестове стабилности. Валидација је извршена на основу поређења са релевантним експерименталним подацима, при чему су примењене статистичке и корелационе методе за процену сагласности резултата.

У седмом поглављу приказана је примена развијене CFD методологије на модел AGARD-B у сва три режима струјања. Сprovedена је верификација избором одговарајућих параметара мреже и моделских претпоставки, а затим је спроведена валидација резултата CFD симулација на основу упоређивања са подацима добијеним у аеротунелским испитивањима. Представљена је и стратегија иницијализације прорачуна у циљу постизања стабилне конвергенције, као и анализа расподеле физичких величина у домену тока.

Осмо поглавље садржи коначне закључке истраживања. Извршена је анализа степена остварености постављених циљева, потврда ваљаности радних хипотеза и евалуација применљивости развијене методологије. На основу добијених резултата, дефинисани су смернице и предлози за будућа истраживања у области нумеричког моделирања аеродинамичких феномена.

2. Преглед досадашњих истраживања

2.1. Досадашња истраживања нумеричког решавања

Човекова загледаност у висине и заокупљеност летењем је стара колико и сећање. У покушају да објасни ову појаву човек у свом праскозорју летењу придодaje божанску ноту, а најмоћније птице добијају симболику узвишености. У раним цивилизацијама свака је имала своје хероје који су на овај или онај начин овладали овом вештином, а несумњиво најпознатији је мит о Икару и Дедалу.

Још Аристотел (384–322.године п.н.е.) у свом делу Физика даје своје виђење ваздуха као једног од основних градивних елемената, а кретање баченог копља објашњава отпором ваздуха које резултира гурањем истог кроз ваздух. Поменимо само нацрте Леонарда да Винчија током XV века као и његове списе сакупљене и објављене под називом Codex Leicester у којима се сам осврће на Аристотелову теорију и супротставља јој се сматрајући да ваздух има супротну улогу односно да се супротставља кретању тела и да је та сила сразмерна брзини кретања.

Ипак човечанство је морало сачекати XVII век и Њутнову теорију силе отпора ваздуха коју је представио у свом делу „Принципи математике“ (лат.-Principia Mathematica, 1687. године) и допунио у свом дугом издању [5].

У кратком осврту на почетке аеродинамике овде морамо поменути Бернулијеве принципе хидродинамике у којима поставља фундаментални однос између густине (врсте флуида), притиска и брзине кретања истог [6]. На основу овог приступа проистекло је и прво објашњење теорије стварања силе узгона, као разлике статичких притисака супротно орјентисаних површи истог тела настале опструјавањем истог флуида различитим брзинама.

Крајем XVIII века Џорџ Кејли (George Cayley 1773-1857), тачније 1799. године, износи концепт летелице са фиксираним крилом и први препознаје кључне четири силе које фигуришу у механици лета: тежину, узгон, отпор и потисак. Као пионир ваздухопловства наглашава значај асиметричног аеропрофила [7]. Такође, сматра се првим који је објавио у инжењерској форми концепт летелице-једрилице са људском посадом, Слика 2-1.

Том приликом је нагласио да до првог континуираног лета неће доћи све док се не развије погон са повољним односом масе и вучне силе. Проблематиком погонске силе се бавио истовремено и Шарл Ренар (Charles Renard 1847–1905) који је 1889. године прорачуном предвидео потребну силу потиска за лет летелице са чврстим крилима, а конструкцијама аеростата, првог дирижабла, дао несумњиви допринос у развоју ваздухопловства [8].

Физичар Хелмхолц (Hermann von Helmholtz 1821-1894) упоређивао је физиономију птица и дотадашњих сазнања из области аеродинамике и дао закључак да човек не може управљати летелицом на сопствени погон. Стога смо са становишта инжењерске историје ваздухопловства чекали на први лет браће Рајт (Wright) до децембра 1903. године.

За период XVIII и XIX века везане су теорије Д'Аламбера (Jean le Rond d'Alembert) [9] чији се концепт данас користи у механици за анализу система сила а посебан значај је дао у истраживању утицаја облика тела на отпор при кретању кроз флуид, што је основа за рачунање сила отпора у аеродинамици; затим Густава Кирхофа (Gustav Kirchhoff) [10] и Лорда Рејлија

(Lord Rayleigh) [11] који су наставили са развојем теорије силе отпора флуида, које су допринеле анализи протока флуида и расподели притисака и ваздушној струји.



Слика 2-1 Реплика једрилице Sir George Cayley Glider (Nigel Coates) у Јоркширском музеју [12]

Навие (Claude-Louis Navier) и Стокс (George Gabriel Stokes) су два важна имена у области аеродинамике и механике флуида [13], [14]. Навие је познат по развоју Навие-Стоксових једначина, које описују кретање течности и гасова, полазна тачка у аналитичке аеродинамике. Објаснио је како флуиди реагују на спољашње силе, што је било посебно значајно за проучавање протока ваздуха око тела. Док је Стокс формулисао законе о отпору у течностима и познат је по објашњењу силе отпора флуида који делује на сферне објекте у ламинарним токовима.

Како су се развијале теорије струјања расла је и потреба за верификацијом истих. Тако су се у циљу симулације кретања тела кроз ваздух, односно ваздуха око тела, изводили бројни посматрања слободног пада тела специфичних облика са високих објеката. У том низу је и сам Густав Ајфел (Alexandre Gustave Eiffel 1832-1923) користио свој торањ за испитивање аеродинамичког отпора равне плоче [15]. Од првих тестирања 1903. године до изградње Ајфеловог аеротунела протекло је само шест година.

Први аеротунел саграђен је ипак у Великој Британији 1871. године од стране британског инжењера и конструктора Франка Венхама (Frank H. Wenham). Он је био један од првих научника који је систематски проучавао аеродинамику и поставио основне принципе који су касније довели до развоја савремених летелица. Аеротунели су од тада постали кључни алат у авијацији и аеронаутици, омогућавајући инжењерима да тестирају облик и перформансе различитих летелица у контролисаним условима.

У време пионирског залета ваздухопловства развијена је и теорија циркулације струјања флуида. Независно једни од других развијају је Николај Жуковски [16], Мартин Кута (Martin Kutta [17], као и Џон Монтгомери (John J. Montgomery) [18] и Фредерих Ланчестер (Frederick W. Lanchester) [19].

Први лет браће Рајт довео је у контакт научну и економско-друштвену оправданост аеронаутике, што је резултовало наглим развојем аеронаутике. Аероплани су били резултат инжењерског прорачуна и као такви су захтевали детаљна истраживања у циљу проширења могућности примене истих.

Аналитичка аеродинамика је довела до разумевања природе феномена летења. Решавање сложених диференцијалних једначина аналитичким путем у циљу инжењерског прорачуна представљао је дуг и неизвесан пут. Нумеричко решавање је морало сачекати развитак рачунарске технике. Стога је логичан нагли развој експерименталне аеродинамике, како у виду изградње бројних аеротунела тако и испитивањем ваздухоплова у лету.

2.2. Преглед досадашњих истраживања експерименталне аеродинамике

Експериментална аеродинамика се развила у правцу испитивања летелице или њеног модела или пак дела летелице која се креће у односу на флуид и у правцу испитивања модела летелице која се налази у стању релативног мировања у односу на Земљу а да се при томе флуид доводи у кретање око истог.

Да ли ће се применити неки од поменутих приступа првенствено зависи од фазе пројектовања у којем се летелица налази, доступних ресурса за истраживање, као и од техно-економске оправданости спровођења експеримената. Не улазећи у овај тип анализе треба напоменути у поглављу неке основне приступе, могућности и потешкоће спровођења оваквих истраживања.

Бруно Ч. (Bruno Chanetz) [20], даје преглед експерименталне аеродинамике концентришући се на испитивање летелица у аеротунелима, али такође даје основне могућности испитивања летелице или њеног дела у току лета.

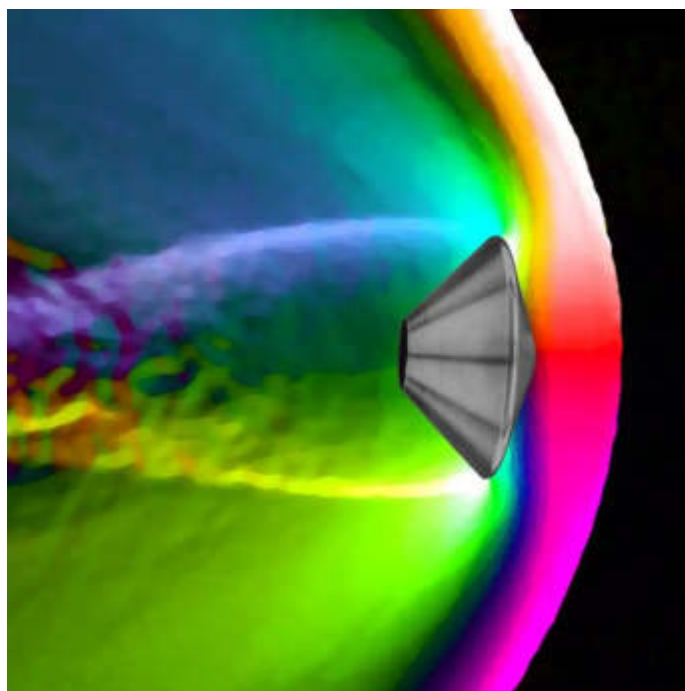
Предност испитивања у лету се првенствено огледа у могућности непосредног и недвосмисленог увида у аеродинамичке карактеристике летелице или посматраног дела летелице. При томе се могу користити разне методе испитивања приказане од стране самог аутора [4], али и Албисера (Albisser) [21] где су наведене примене нове методе спектралне анализе у циљу визуелизације струјања на специфичним деловима летелице. У домаћем ваздухопловству, а у саставу Министарства одбране од 1933. године под разним организационим називима ради Центар за летна испитивања Техничког опитног центра Војске Србије. Могућности и технике испитивања је објединио Милошевић [22]. Генерално ова врста испитивања примењује се на већ усвојен аеродинамички концепт летелице или у случају потребе за променом облика и структуре летелице из било ког разлога.

Иако најстарија метода испитивања и даље је присутна метода испитивања летелице или њеног модела избацавањем из механизма сличном катапулту. Пример оваквог испитивања се итекако примењује у објекту В20 француске националне канцеларије за студије и истраживања ваздухопловства (франц.-Office National d'Études et de Recherches Aéropatiales, у даљем тексту - ONERA) [23]. Оваква техника користи високо квалитетну оптичку опрему у циљу визуелизације струјања у слободном лету и при утицају тла, као и 3D радара за праћење објекта у лету у циљу испитивања аеродинамичке стабилности. Посебну могућност представља симулација лета у сложеним метеоролошким условима. Ограничење ових испитивања је радна запремина која онемогућава испитивања при већим брзинама.

Са намером да се испитују летелице или њихови модели при већим брзинама примењују се технике испитивања у реалном лету где се модели причвршћују на платформу у лету или се исте вуку. Проблематика оваквог испитивања је интерференција са летећом платформом.

Аеробалистичка испитивања се примењују код испитивања аеродинамичких карактеристика пројектила који се крећу већим брзинама. Пример таквог испитивања се спроводи у SIBREF

(енгл.-Soft In-Bore REcovery Facility) у оквиру Француско-Немачког истраживачког центра у Сент Луису (Saint-Louis, ISL)¹.



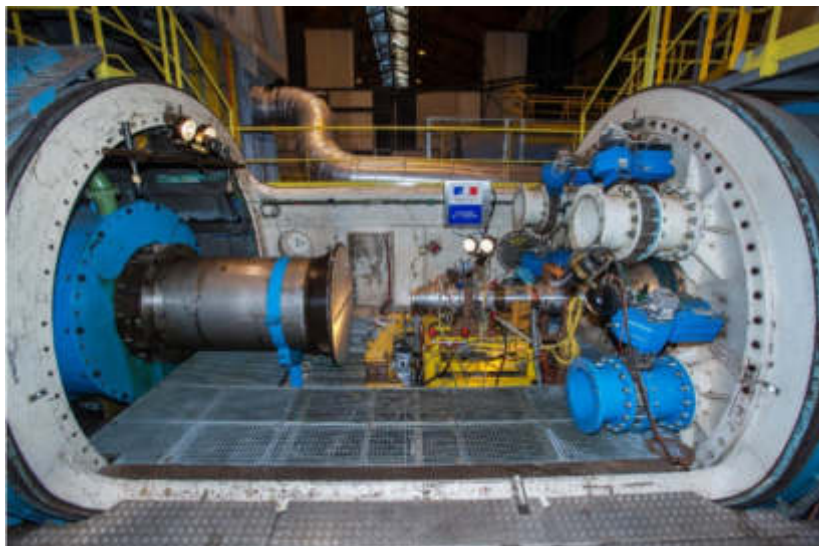
Слика 2-2 Визуелизација струјања око балистичког пројектила у SIBREF

Системом 3D радара за праћење објекта, детектора и спектралног анализатора издувних гасова на излазним устима цеви топа, спектралних анализатора и ултрабрзих камера могућа је визуелизација опструјавања око пројектила са шест степени слободе кретања, на Сл.2-2. приказан је сегмент визуелизације током једног таквог испитивања. Посебна предност испитивања аеробалистичких пројектила је могућност испитивања модела који се крећу са почетним убрзањем преко 200 g.

За потребе испитивање утицаја промене надморске висине на аеродинамичке карактеристике летелица или њихових делова користе се постројења која имају способност симулирања услова атмосфере у њеним вишим слојевима. Посебан значај оваквих испитивања има испитивање у зонама нападних ивица и површина, као и у уводницима ваздуха и првим степенима компресора ваздухопловних мотора, затим провера ефикасности пито инсталације као и свих делова чија функционалност може бити доведена у питање са променом услова проузрокованим променом надморске висине. Као пример узмемо постројење у Р. Француској DGA (енгл.-France Defence Procurement Agency) где се од 1946. године испитују делови летелица, специјална опрема као и ваздухопловни мотори [24].

На овај начин се могу симулирати услови који владају у атмосфери до висина у стратосфери, чиме се на безбедан начин могу забележити сви параметри рада мотора али и других авионских компоненти, као и симулација стварања леда на карактеристичним ивицама и површинама летелица при уобичајеним брзинама струјања.

¹ Слика преузета са сајта <https://www.isl.eu/research/>



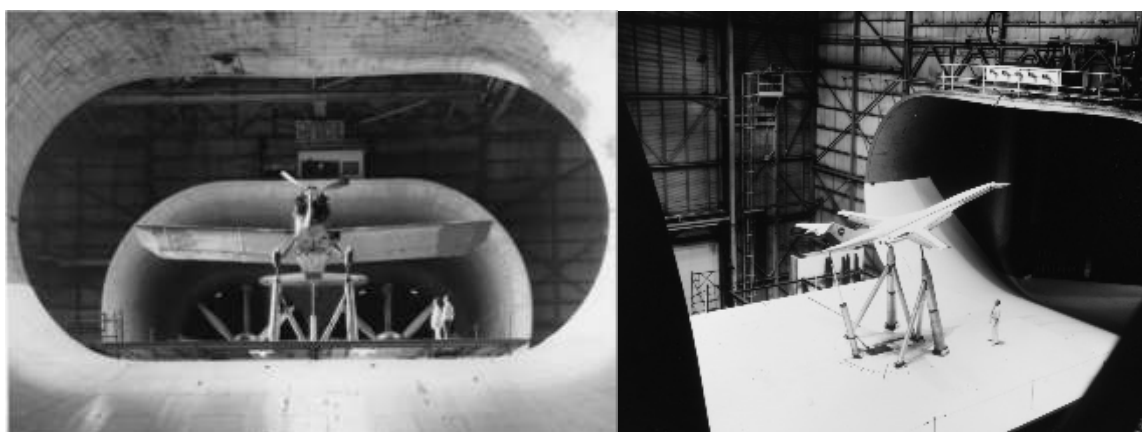
Слика 2-3 Радни део испитне станице DGA [25].

Императив експерименталног истраживања јесте апсолутна контрола услова струјања, могућност мерења и записивање релевантних физичких величина, као и могућност контролисаног кретања модела. Као универзална метода експерименталног испитивања се намеће испитивање аеродинамичких модела у аеротунелима.

При испитивању у аеротунелима могуће је прилагодити услове струјања по питању врсте, па се према типу струјања могу извести симулације ламинарног или турбулентног струјања, затим регулисати брзину струјања по питању интензитета и континуитета, притиска, температуре и влажности ваздуха.

Аеротунели се класификују у зависности од брзине струјања ваздуха, тако да различити типови аеротунела омогућавају тестирање у различитим аеродинамичким режимима. Према брзини струјања развијени су аеротунели са ниским, средњим и високим брзинама, односно на подзвучне, надзвучне и хиперсоничне аеротунеле. Док се према континуалности струјања деле на отворене и затворене аеротунеле.

Подзвучни аеротунели обезбеђују струјање у опсегу ниских брзина ваздуха (испод брзине звука) и најчешће се користе за тестирање авиона, аутомобила и других објеката који се крећу при релативно ниским брзинама. Један од најстаријих подзвучних аеротунела, који се користи за тестирање аеродинамичких модела и прототипова је NASA подзвучни аеротунел у Ленглију (енгл.-Subsonic Wind Tunnel Full Scale at NASA Langley Research Center), приказан на Сл.2-4.



Слика 2-4: Подзвучни аеротунел у пуној размери у истраживачком центру НАСА-е у Ленглију [26].

У првом подзвучном аеротунелу у којем се испитују ваздухоплови у природној величини испитивања се врше још од 1931. године. У почетку су се испитивале летелице, односно модели до распона крила од 12,6 m и брзина опструјавања до 196 km/h. Током педесетих година прошлога века извршене су модификације које су омогућиле испитивање летелица на већим подзвучним брзинама, а куриозитет представља чињеница да је имао значајну улогу током развоја свемирског програма Аполо, као и приликом развоја познатих борбених летелица међу којима је и Ф-16.

Трансонични аеротунели обезбеђују испитивање при брзинама опструјавања које се крећу до 1,2 М, а приликом конструкције истих се водило захтевом да у распону брзина од 0,8 М до 1,2 М обезбеђују квалитетну стабилност струјања у довољно великој радној запремини радног простора за испитивање како у статичком тако и у динамичком режиму.

Суперсонични аеротунели специјализовани за надзвучне брзине до 5 М намењени за испитивање ваздухоплова, пројектила и ракета који се крећу у овом опсегу брзина.

Конфигурације аеротунела су многобројне. Ипак отворени и затворени повратни тунели су најчешћи, а разликују се по свом облику и начину циркулације ваздуха.

Отворени аеротунели имају отворене крајеве са обе стране испитног дела и прикупљају ваздух из околине у којој се тунел налази, Сл. 2-5.

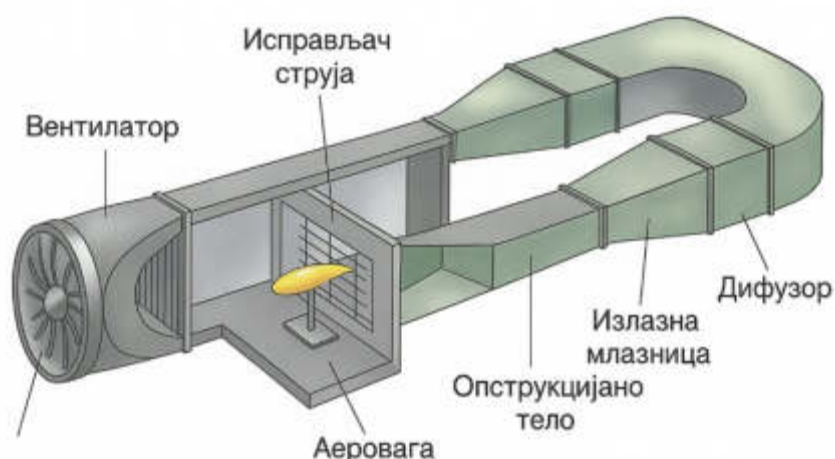


Слика 2-5: Шематски приказ отвореног аеротунела.

Отворени аеротунел са отвореном испитном секцијом познат је и као „Ајфелов тунел“, назван по Густаву Ајфелу који је користио свој париски аеротунел да проучава својства подизања на аеропрофилу.

Отворени тунел са затвореним испитним делом познат је и као „НПЛ тунел“, назван по националној физичкој лабораторији где су први пут коришћени.

Затворени аеротунели користе самостални круг рецикулације ваздуха унутар тунела, пролазећи кроз део за испитивање Сл.2-6. Скретне лопатице помажу у стварању складнијих промена у смеру протока ваздуха кроз тунел.



Слика 2-6: Шематски приказ затвореног аеротунела.

Затворени аеротунели су такође познати као „Прандтлови тунели“ по Лудвигу Прандтлу који је развио прве теорије о надзвучним ударним таласима. Пролазе и „тунелима Гетинген“, названим по немачкој истраживачкој лабораторији у којој су први пут коришћени.

Највећи аеротунел на свету налази се у NASA истраживачком центру у Маунтин Вјуу, Пало Алто, Калифорнија, САД (енгл.-NASA Ames Research Center in Mountain View, Palo Alto, California, USA.). Радни део је димензија 36 m x 24 m и покреће га група од шест огромних вентилатора од 17.000 KW (22.500 KS) са лопатицама величине 12 m у пречнику. Вентилатори, који су високи као 7 људи, производе струјање до максималне брзине од око 185 km/h, што омогућава истраживачима да тестирају аеродинамичке квалитете авиона у пуној мери, снимак из ваздуха приказан је на Сл.2-7. Буџет пројекта 1979. године био је 85 милиона УСД, што је еквивалентно око 350 милиона УСД данас.



Слика 2-7: Аеротунел у NASA-Ames истраживачком центру у Маунтин Вјуу, Пало Алто, Калифорнија, САД.

2.2.1. Статус аеротунелских испитивања

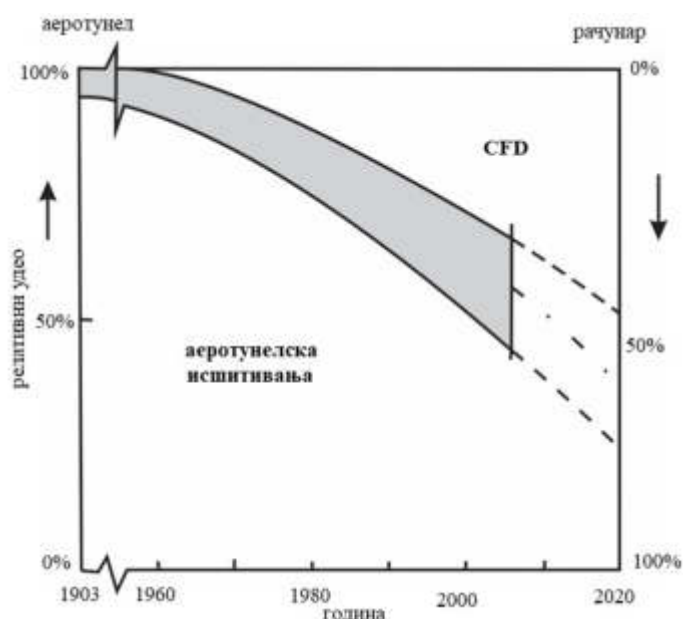
Аеротунелска испитивања су претходила првом лету браће Рајт, тако да су од почетка заузела своју улогу у дизајнирању ваздухоплова.



Слика 2-8 Аеротунел браће Рајт (Wright) из 1901. године [15].

Развојем ваздухопловства расте и потреба за потврђивањем аеродинамичких карактеристика летелица. Узрочно-последичним односом потребе за испитивањем и сазнања спровођењем самих испитивања доводи до пораста сазнања која проузрокују сложенији дизајн што поново води ка потреби за сложенијим аеротунелским испитивањима. Понављање циклуса резултује рапидним повећањем обима аеротунелских испитивања нових авиона у њиховом развоју, Сл.1-1, подсећајући обликом на растући вртлог.

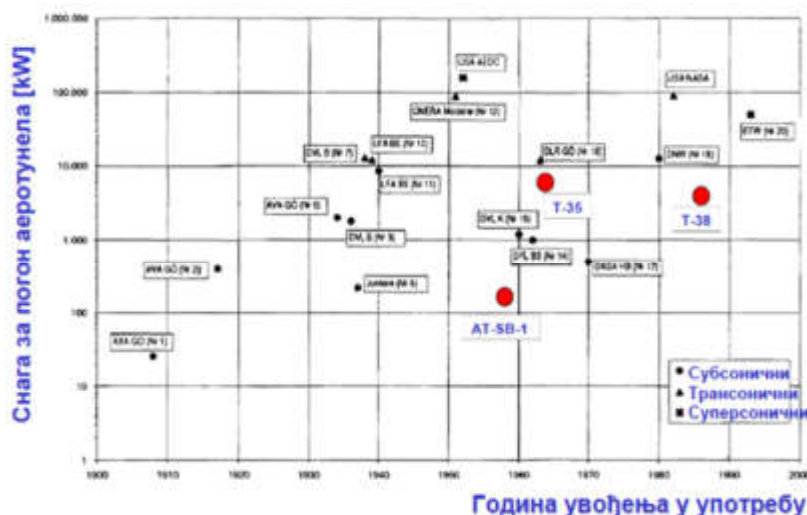
Са друге стране развој рачунара почев од шездесетих година прошлог века довео је до сразмерног пада удела аеротунелских испитивања у пројектовању, истраживању и развоју нових ваздухоплова у односу на употребу CFD.



Слика 2-9: Удео аеротунелских испитивања у пројектовању, истраживању и развоју нових ваздухоплова [1], [2].

У прилог говори и чињеница да је током развоја авиона високих перформасни у категорији великих подзвучних путничких авиона типа Боинг 787 (Boeing 787 Dreamliner)² утрошено око 800.000 радних компјутерских часова супер рачунара CRAY, на супрот 15.000 радних часова аеротунелских испитивања, што чини 1,85% удела укупних испитивања.

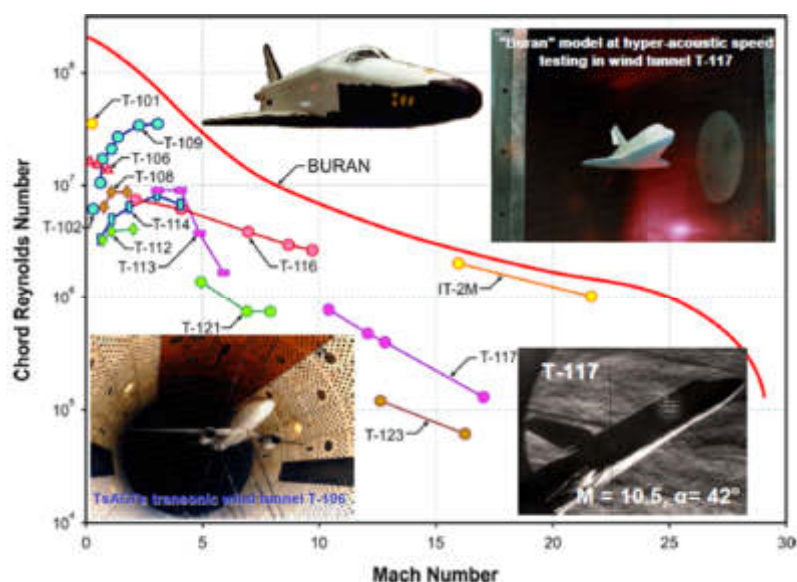
Како се проширивала анвелопа летелица јављала се потреба за градњом аеротунела све веће инсталисане снаге, са циљем да се прошири анвелопа могућности аеротунелских истраживања.



Слика 2-10: Тренд раста инсталиране снаге погонских група великих аеротунела [1], [2].

У циљу испитивања свемирске летелице Буран у оквиру руског централно аерохидродинамичког института (рус.- Центральный аэрогидродинамический институт, у даљем тексту - ЦАГИ) на располагању је било преко шездесет аерохидродинамичких тунела.

Међутим, како се на слици 2-11 може видети анвелопа лета ове летелице како у слободној тако и у конфигурацији полетања премашује збирну могућност свих испитиних станица.



Слика 2-11: Могућност експерименталне базе ЦАГИ института упоредо са анвелопом лета Бурана [2].

² Source: <http://newairplane.com/default.html>



Слика 2-12: Анвелопа аеротунела ЦАГИ института обзиром на Буранову путању у повратку [2].

Коришћењем модела у различитим размерама израде модела, од 1:30 до 1:120, са пет различитих модела делимично је покривена површина анвелопе лета Бурана у конфигурацији летелице у повратку са лета, Сл.2-12. У истом циљу се морало приступити изради истог броја модела у конфигурацији лансирања.

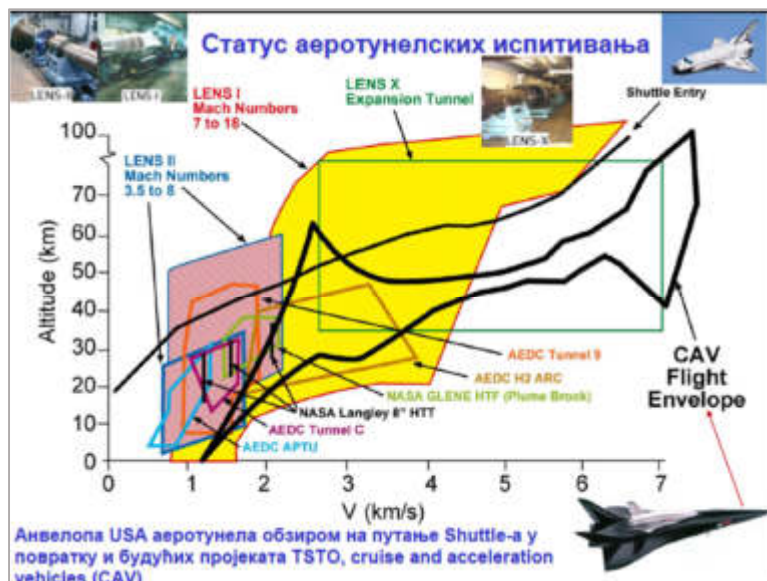
Са друге стране океана у циљу испитивања летелица свемирског програма изграђен је низ аеротунела у оквиру Истраживачког центра Калспан универзитета у Буфалу, САД (енгл.- Calspan University at Buffalo Research Center – CUBRC). Упоређујући могућности експерименталне базе три значајна аеротунела LENS I, II, X (eng.-Large Energy National Shock Tunnel) са дијаграмом висина/брзина путања свемирских летелица Аполо (Apollo) и Шатла (Shuttle) при повратку у атмосферу, Сл.2-13, може се извући закључак да база аеротунелских истраживања покрива значајан део путања ових карактеристичних летелица.



Слика 2-13 Могућност експерименталне базе CUBRC у односу на путање Аполо и Шатла при повратку [1], [2].

Рекло би се да су тиме потребе аеротунелских испитивања заокружене, међутим развојем супербрзих летелица у последњих десет година и развојем пројеката летелица које су у

могућности да независно и вишекратно изврше мисију лета у орбити (енгл.: Single Stage To Orbit – у даљем тексту - SSTO), као што је приказано на Сл.2-13, расположива истраживачка база за аеротунелска истраживања ових летелица више није била довољна.



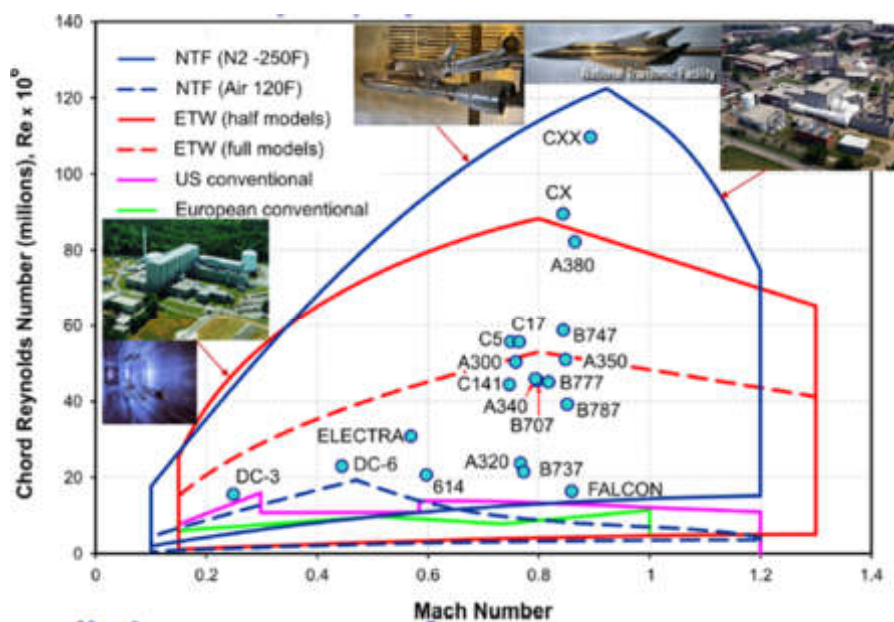
Слика 2-14 Анвелопа САД аеротунела у односу на питање Шатла и пројекта SSTO [1], [2].

Да све не би било препуштено случају у оквиру истог института у току 2008. године, а на бази LENS X, у рад је пуштен најновији и уједно највећи познати експанзиони тунел на свету са унутрашњим пречником радног дела од 0,61m (24 inch) и укупном дужином која премашује 73 m (240 стопа), назван LENS XX. Овим је унапређена могућност тестирања удвостручујући надзвучне или хиперсоничне услове лета. На овај начин је омогућено испитивање SSTO летелица у свим режимима лета, од полетања до лета који одговара повратном лету у гушће слојеве атмосфере [27].

Експанзиони тунели са могућношћу генерисања широког распона струјања при великим брзинама са ниским утицајима хемијских нехомогености и поред високе енталпије. Ограниченост ефективног времена испитивања као и појава сметњи учесталости струјања насталим као последица великих амплитуда притиска у односу на услове струјања пре и након кратког испитивања остаје као практично ограничење оваквог начина испитивања.

Већи радни пречник испитног простора омогућава смањење утицаја сметњи појаве таласног струјања смањујући фреквенцију потенцијалне осцилације ваздуха, такође и смањени утицај вискозних ефекта. Са ефективним временом тестирања које износи 4 ms, брзинама струјања преко 13 km/s и брзинама удара до 15 km/s чије варирање у поновним испитивањима не излази из опсега од $\pm 1,5\%$, при вредностима Маховог броја већим и од тридесет и Рејнолдсовим бројем који прелази вредност од 10^7 по метру.

Могућност аеротунелских испитивања у области трансоничних брзина приказана је на Сл. 2-14. Може се приметити да су аеротунели грађени са циљем подршке пројектима развоја летелица чија су били претходница. Тако се 1995. године почело са радом у највећем европском криогеном трансоничним аеротунелу, чија је изградња премашила цену од пола милијарде долара. Уочава се да се анвелопа истог поклапа са условима трансоничног лета великог европског авиона A380 (AIRBUS A380). Перформансе аеротунела су, такође, секундарно искоришћене за испитивања и других ваздухоплова.



Слика 2-15: Могућност експерименталне базе светских аеротунела у трансоничној области струјања [1], [2].

Може се закључити да је упркос тренду препуштања примата у почетним и развојним фазама дизајна летелица прорачунској аеродинамици остаје потреба за потврђивањем тако добијених резултата путем аеротунелских испитивања. Такође, изградњом нових постројења и улагањем огромних материјалних средстава у њихово усавршавање говори у прилог томе. Можемо рећи да на основу перформанси новоизграђених аеротунела се може и предвидети тренд развоја аерокосмонаутике. Аеротунелска истраживања, тако, подржавају нове пионирске подухвате у ваздухопловству.

2.2.2. Кратак осврт на почетак ваздухопловства у Србији

Јован Сарић остаје упамћен као први Србин који је сам конструисао, направио и полетео својим авионом Сарић-1, Сл.2-16, давне 1910.године, а о историји ваздухопловства у Србији пише [28], као и многи други.



Слика 2-16: Реплика авиона Сарић-1 који се чува у Музеју ваздухопловства у Сурчину.

Када се говори о аеротунелском испитивању, данас у нашој земљи поред највећег школског аеротунела „Мирослав Ненадовић“ (оригиналног назива АТ-SB-1) у оквиру Машинског факултета у Београду најсофистициранији аеротунели се налазе у ВТИ у Београду.

Лабораторија је основана 1952. године и њене основне делатности су аеротунелска испитивања, пројектовање и израда модела, аеротунелске опреме и инструментације.

Основни задатак аеродинамичке лабораторије је експериментална подршка истраживањима и развоју у фази пројектовања авиона, ракета и пројектила. Лабораторија има пет аеротунела и радионицу за пројектовање и израду модела. Аеротунели су опремљени модерном опремом, која омогућава различита аеротунелска испитивања и мерења статичких и динамичких карактеристика модела.

У оквиру ове лабораторије испитују се модели ваздухопловних и неваздухопловних објеката. Типична испитивања се односе на мерење: сила и момената, расподеле притисака, дериватива стабилности, минималног отпора; испитивање струјног поља и визуелизације струјања класичним методама као и методом брзинске слике честица (енгл.-Particle Image Velocimetry, у даљем тексту PIV) [29].

2.3. Преглед у области CFD

Огранак механике флуида који користећи метод нумеричке анализе решава и предвиђа задатке произашле из флуидних струјања представља CFD. На основу математички приказаних метода за решавање сложених једначина струјања флуида помоћу рачунара, као помагала намењених за извршавање израчунавања на брз и ефикасан начин, симулирају се услови струјања, као и интеракцију истих са апсолутно чврстим или еластичним телима, која ограничавају простор струјања или се пак налазе унутар контролисане запремине (3D) или површине (2D).

Развој CFD био је условљен развојем рачунарске технике, међутим основа решавања готово свих проблема у механици флуида лежи у Навије-Стоксовим једначинама (eng. Navier-Stokes equations, у даљем тексту NSE) [30]. Клод-Луј Навије (фран. Claude-Louis Navier) и Џорџ Габриел Стокс (енг. -George Gabriel Stokes) су у првој половини XIX века објединили законитости кретања континуалног флуида у систем сложених диференцијалних једначина који дефинишу кретање многих једнофазних кретања флуида, како гасова тако и течности, али не истовремено и једних и других [31]. Додатно погледати поглавље 4.

Сложеност ових једначина се може апроксимирати претпоставком да је ваздух у појединим случајевима струјања невискозан, па се уклањањем делова једначине које се односе на вискозна својства флуида добијају Ојлерове једначине (Swiss - Leonhard Euler (1707–1783)) [32]. Ако претпоставимо да у струјању нема вртложности и уклањањем припадајућих дериватива добија се систем потпуних потенцијалних једначина. Усредсређујући се на брзине малих поремећаја NSE можемо преформулисати у линеарне потенцијалне једначине и као такве су употребљиве у подзвучним и надзвучним струјањима, али не са правом у трансоничном и хиперсоничном струјању [33].

У почетном замаху ваздухопловства почела се практична примена нумеричког решавања проблема у аеродинамици са мање сложеним линеарним потенцијалним једначинама. Тако је 1930. године [34], [35] конформним трансформацијама развијен 2D метод за описивање струјања око аеропрофила.

У том периоду развијане су и нумеричке методе метеоролошке механике флуида. Тако је Ричардсон (енг. - Lewis Fry Richardson) методом коначних разлика поставио методу за прорачун физичког стања атмосфере [36]. Иако је прогноза дала прилично погрешне

резултате, чак и у предзнаку градијента промене основних параметара атмосфере, метода није била погрешна, већ је последица техничке несавршености прорачуна (Ричардсон је ручно вршио прорачуне). Применом савремених рачунара метода даје тачна предвиђања за релативно мирне услове атмосфере [37].

Развој успешних метода је, ипак, био условљен развојем рачунарске технике, тако је међу првим таквим радовима употребом рачунара за моделовање протока флуида објављен од стране Националне лабораторији Лос Алмос, САД [38]. Францис Харлов (енг. Francis H. Harlow (1928–2016)) је предводио групу Т-3 која се до касних 1960-их бавила симулацијом прелазних 2D струјања флуида као што су: метода честица у ћелији [39], метода флуида у ћелији [33], метода функције вртложног тока [40] и метода маркера и ћелије [41]. У раду ове групе се издвојио и Фром (енг. – Fromm J. E.) који је дефинисао методу функције вртложног тока који је применљив на 2D струјање нестишљивог флуида, као пример првих временски зависних моделовања NSE за нестишљиве флуиде [42]. Непосредно затим и Францис и Велш долазе до истих сазнања [43].

Чекало се ипак две године, до 1967. године, на објављивање првог рада који третира тродимензионални модел струјања. Џон Хес (енгл. - John Hess) и Смит (енгл.- Apollo Milton Olin Smith (1911-1997)) први уводе панелну методу (енгл.- The Panel Method) којом површину опструјаваног тела дискретизују панелима [44]. Метода није примењивана на узгонске површине опструјаваног тела већ само на осносиметрична тела, труп авиона или труп брода. Први рад који је панелним методама (Код-A230) заокружио и сложене облике опструјаваних тела, летелица са крилима и репним површинама, објавили су Пол Руберт (енгл.- Paul Rubert) и Гари Сарис (енгл. - Gary Saaris) наредне 1968. године [45].

У наредном периоду ова метода је интензивно коришћена при чему је развијана у корак са развојем расположивог рачунарског ресурса. Водеће ваздухопловне компаније запада независно развијају своје методе током развоја сопствених главних пројеката, тако Боинг развија Boeing PANAIR (A502) [46], Локид-Мартин развија Lockheed-Quadpan [47], Доналд-Даглас развија Douglas-HESS [48], код MACAERO обелодањује McDonnell Aircraft [49], затим и NASA-PMARC[50].

Поред развоја нумеричких метода у периоду 1980-их се и даље развијају и аналитичке методе прорачуна. Тако се издвајају радови Каца (енгл.- Katz Joseph) и Маскјуа (енгл. - Maskew Brian) који развијају кодове за случајеве подзвучног временски променљивог струјања под називима USAERO [51] а претходно и VSAERO[52], [53] који се ослања на панелне методе прорачуна користећи сингуларитете нижег реда за сваки појединачни панел. На овај начин се смањује сложеност прорачуна чиме су се усагласиле могућности рачунарске технике тог доба са захтевима кода. Иако се са данашње дистанце гледишта чини да су кодови од почетне идеје панелне методе прилично упрошћени исти су широко коришћени приликом почетних фаза дизајна бројних велико-трупних летелица, подморница, аутомобила, па чак и хеликоптера.

Поред горе наведених примера бројни су такође деривативи истих или кодови настали комбинацијом тада познатих са уношењем емпиријских корективних коефицијената, какав је на пример код CMARC [54].

У циљу истраживања утицаја вискозног ефекта у граничном слоју посебно у зони аеропрофила бројни су примери 2D кодова. Почев од раних 1980-их Еплер (Richard Eppler) је развио PROFILE код [55], као и XFOIL код (Mark Drela) [56]. Оба представљају 2D панелне кодове који комбинују посебне конформалне [57] панеле у граничном слоју. Овим одступањем од до тада широко коришћених правилних геометријских облика допринело бољем праћењу облика закривљених површи. Као резултат се добило веће подударане резултата са експериментално добијеним.

Следећи ступањ представљају методе потпуног потенцијалног струјања (енгл. Full Potential code – у даљем тексту FPC). Прелазно решење представља метода малих поремећаја развијаних за трансонична струјања, какав је и тродимензиони WIBCO код [58] коришћен у оквиру корпорације Груман (енгл.- Grumman Aircraft).

Зачетник идеје методе FPC везује се за рад Мурмана и Кола (енгл.- Earl Murman, Julian Cole) [59] чији рад настављају Бауер, Гарабедиан и Корн (енгл.- Frances Bauer, Paul Garabedian, David Korn) који развијају FPC за 2D трансонична струјања [60], а даље исти код развијао и Мелник (енгл.- Bob Melnik) [61] уврстивши и утицај вискозности, што употпуњује могућности овог кода. Потпуни развој FPC за случај 3D струјања у свом раду објављују Џејмсон и Дејвид (енгл.- Antony Jameson, David Caughey) означивши код као FLO22 [62]. Након овог рада следи низ развијених кодова који се надовезују на исти. Боингов центар заокружује FPC приступ нумеричком решавању проблема опструјавања аеродинамичких тела својим кодом A633 [63].

На реду је било сучељавање са Ојлеровим једначинама, које су требале да обезбеде ширу примену моделирања струјања и прихватљивија решења у области трансонике. Методу развија Џејмсон (енгл.- Jameson, A.) и уобличује је у код FLO57 [64] којим нумерички решава Ојлеров систем једначина методом коначних запремина коришћењем шеме временског корака Рунге-Куте [65]. Овај приступ је затим искоришћен у Локидовом коду TEAM [66] односно програмском пакету MGAERO [67]. Последњи се издваја једноставношћу правоугаоне мреже где се акценат ставља на сам приступ решавању Ојлерових једначина. Овај недостатак је анулиран конструкцијом структурне мреже која прати контуре опструјаваног тела. Пример таквих решења представљају следећи кодови: NASA CART3D [68], Lockheed SPLITFLOW [69], NASCART-GT [70]. Џејмсон (енгл.- Antony Jameson) по први пут уводи неструктурисане тетраедарске мреже за случај 3D струјања, код AIRPLANE [71].

У оквиру мање сложених 2D структура издвајају се бројни радови у периоду од 1980.-их, где треба издвојити неколико успешних као што су ISES Euler program [72] и MSES [73].

На послетку, током 1990.-их појавом озбиљнијих рачунарских јединица створио се потребан предуслов за нумеричко моделирање струјања стишљивог вискозног струјања. Почетно се приступа решавању NSE у спектру 2D струјања. Репрезентативни пример представља Насин ARC2D код [74]. На основу бројних и успешно развијених кодова за случај NSE 3D струјања може се стећи утисак да је горе поменути ARC2D послужио као пионирско решење. Зато треба истаћи следећа сложена решења 3D моделирања NASA: ARC3D [75], CFL3D [76] и наравно најпознатији OVERFLOW [77] код који има могућност решавања стишљивог 3D струјања временско зависних Рејнолдсових усредњених NSE користећи вишеструко сложене структуриране мреже [78].

Ваздухоплови, а нарочито са људском посадом, као производ инжењерства због саме природе своје употребе и вечитог баланса масе, чврстине и перформанси од почетка су изискивали детаљна и свеобухватна испитивања чак много пре почетка саме производње. Аеротунелска и испитивања модела и летелица у лету у самом зачетку ваздухопловства су биле логично и до тада једино у потпуности развијене методе. Из потребе за смањењем потребних материјалних ресурса поготово у почетним фазама дизајна, нумеричке методе су коначно добиле свој чврст и сврсисходан ослонац. Из горе наведеног се може закључити да је временом и развојем рачунарске технике са огромним напором прескочена почетна баријера употребе CFD упоредо са конвенционалним начинима моделирања и истраживањима.

Огроман је број развијених метода рачунарског моделирања и анализе од којих је настао и велики број комерцијалних рачунарских програма, видети одељке 3.2. и 7.1.2. Овде се треба осврнути на досадашњи рад у нашој непосредној близини. Петровић и Ступар [79] приказују могућности свођења инжењерске праксе математички моделоване у облику линеарних и

нелинеарних парцијалних диференцијалних једначина презентованих по сложености растући, почев од линеарне једначине првог реда, па преко Бургерове нелинеарне једначине таласне једначине, једначине топлотне проводности, Лапласове једначине, Трикомијеве једначине, па све до NS. Дајући аналитичка решења објашњавају методу коначних разлика са карактеристичним примерима из праксе. Петровић [80] у свом раду и кроз предавања обрађује панелне методе и кроз практичне примере основних аеродинамичких облика одабиром адекватних сингуларитета моделује струјања у основним режимима. Демонстрира лакоћу примене панелних метода на опструјавања флуида око једноставнијих облика наглашавајући погодност при анализи у случајевима ограниченог рачунарског ресурса ограничавајући се на струјања у непосредној близини опсервираног тела. Посебан акценат даје на могућност употребе панелне методе на интерференцију опструјавања ваздуха око више тела истовремено [81]. Такође, указује и на ограниченост ове методе при описивању нестационарних струјања, симулације унутрашњег струјања у сложеним геометријским облицима, као и употребу у идеалним условима струјања. Треба се осврнути и на радове који се баве конкретним моделовањем управљивих ракета [82] као и употребом панелних метода у моделовању опструјавања ваздуха главног ротора хеликоптера [83], [84].

Костић и Стефановић [85], развијају хибридни модел за прелиминарни аеродинамички прорачун, прорачун статичке стабилности и перформанси авиона, конкретизујући га за лаки авион за почетну обуку пилота (НЛА-Нови Лаки Авион). У циљу корекције резултата нумеричког прорачуна користе калибрационе дијаграме за ефикасност и циркулацију контролних површина добијене из података аеротунелских испитивања постојеће летелице сличне категорије, при чему је вршена интерполација податка у односу на сличност облика и димензија. Приликом моделовања није узет у обзир утицај вискозности тако да је инхерентно занемарен утицај граничног слоја, као и моделовање отцепљења струјања. Самим тим, добијени дијаграми коефицијената узгона и момента су валидни само у линеарном делу дијаграма.

Оцокољић и сарадници [86] развијају нумерички модел опструјавања вођене ракете базиран на комерцијалном програмском пакету FLUENT ANSYS. У раду дају своју препоруку облика и димензија прорачунског домена, облика прорачунске мреже, као и модела турбуленције. Упоређујући резултате са експериментално одређеним у аеротунелу Т-35 разлика истих не прелази нигде више од 7,1%, а изражена је за веће нападне углове опструјавања. CFD модел је имао ограничене могућности динамичког испитивања првенствено због неусаглашене информатичке подршке и динамичког модела који подразумева непрекидно усаглашавање прорачунске мреже (енгл.- remeshing) за сваку промену нападног угла струјања.

Јан Ксиаохуи (енгл.- Yan Xiaohui) [87] представљају CFD модел у којем уводе мешовити метод покретне мреже и фиксне мреже. Предложени модел комбинује најбоље особине метода граничне мреже и фиксне мреже. Овакав приступ омогућава боље искоришћење капацитета централне процесорске јединице (енгл.-Central Processing Unit, у даљем тексту CPU) али се јавља проблем маскирања опструјаваних објеката који се налазе низструјно у сложенијим облицима моделовања.

Са аспекта употребе савремене прорачунске аеродинамике Јанг Ма (енгл. Yang Ma) и сарадници [88] користе комерцијални CFD код и приказују начин анализе уздужне и бочне аеродинамичке стабилности. Док се Пазиреш (енгл.- Paziresh A) и сарадници [89] усредсређују посебно на моделовање струјног поља у зони низструјно од опструјаваног тела и утицај начина моделовања на интерференцију са телима у излазном трагу. При томе се може извући закључак да је одабир турбулентног модела подједнако важан као и структура и распоред прорачунске мреже.

У циљу стварања јединственог прорачунског окружења Шао (енгл.-Xiao QU) и др. [90] представљају могућности широко распрострањеног рачунарског пакета ANSYS CFX примером слободног опструјавања ваздуха око каскадно распоређених ветрогенератора. Уочава се блага предност коришћења овог софтверског пакета у односу на сродни ANSYS FLUENT посебно у области моделовања опструјавања ротирајућих објеката нарочито стабилност прорачуна, погледати одељак 3.2.

Истраживање аеродинамичких карактеристика калибрационог модела AGARD-B развијајући кôд за стационарно вискозно компресибилно струјање спровели су Видановић и сарадници [91]. Дајући добру основу за даља истраживања предлажу коришћење неструктуралне мреже пројектоване непосредно од софтверског пакета ANSYS као и параболични изглед прорачунског модела димензија 15 дужина испред и 20 дужина иза посматраног опструјаваног тела. Конструкцију граничног слоја представљају призматичне јединице са константним градијентом раста од 1,2. Ментеров SST $k-\omega$ [92], [93], [94], [95], [96] модел турбулентног утицаја се показао као веома успешан за посматрани случај. Резултати симулације имају одлична поклапања, са грешком која се креће у опсегу од 3% до 5% у односу на експериментално добијене резултате.

2.4. Преглед досадашњих сопствених истраживања

У оквиру дипломског рада на тему „Надзвучно струјање око осносиметричног тела“ [97] обрађене су специфичности надзвучних струјања, посматрајући ваздух као идеални гас. Користећи се методом малих поремећаја моделован је низ осносиметричних тела дискретизацијом вртложних извора и дублета. Развијен је и примењен јединствен кôд написан у програмском језику Fortran 77 [98]. Модификацијом потпрограма дискретизације вршено је усаглашавање геометрије тела одабиром одговарајућих сингуларитета. Посебан акценат је дат на утицај међусобне удаљености, односно, броја сингуларитета на дивергенцију прорачуна и време трајања прорачуна као индикатора ефикасности кода. Добијени резултати основних аеродинамичких коефицијента упоређених са тада доступним резултатима научних радова дала су резултате које се могу прихватити у смислу одређивања реда величине.

Истраживањем у домену летних испитивања на основу испитивања извршених у тадашњем ваздухопловном опитном центру Министарства одбране на авионима Г-4 супер галеб и Ласта дат је приказ метода испитивања [4], [99]. Дат је акценат на утицај великих нападаних углова на аеродинамичке карактеристике ваздухоплова са концептуалним препорукама за предикцију места настанка критичних мехурова отцепљења, као и одлагања прераног настанка отцепљења струјања са акцентом на избегавање појаве наглог губитка узгона. Објашњене су и демонстриране телеметријске и аквизиционе методе мерења и преноса података релевантних за све фазе лета авиона. У циљу потенцијалног развитка математичког модела понашања авиона у ковиту посебно су приказани аеродинамички и инерциони аспекти који утичу на ову појаву. Потреба за математичким моделовањем кретања ваздухоплова при нестационарним фазама лета је један од произашлих закључака овог истраживања. Истраживањем законитости понашања авиона у току ковита а на бази расположиве експерименталне базе која је доступна у нашој земљи, а и у ширем региону, непосредовање вертикалног аеротунела није могуће извршити симулацију овог облика кретања авиона. Стога је потреба за развијањем CFD модела динамичког кретања и утицаја аеродинамичких сила ваздухоплова више него оправдана.

Истраживање у области моделовања турбуленције резултовала је радом који се осврнуо на широко коришћени Спаларт-Алмарасов турбулентни модел (енгл.- Spalart-Allmaras, у даљем тексту SA) модел турбуленције [100]. Полазећи од основних једначина модела користећи се резултатима добијеним низом радова који се баве калибрацијом овог приступа математичког

описа турбуленције дати су примери везани за опструјавања осносиметричних тела. Основни закључак овог истраживања је да SA за случајеве стационарног струјања даје врло добре резултате. Симулације струјања при релативно малим AoA у зони вртложног трага, где је поремећај струјања доминантно изражен даје готово идентичну слику реалном. Резултати рада су детаљније приказани у одељку 4.5.

Специфичност аеродинамике и динамике лета аеростата [101] обрађена је са циљем да се истраже утицаји специфичних геометријских облика у струјањима малих брзина. Описан је механизам настанка аеродинамичких сила при кретању оваквих летелица, физичка својства опструјавања задржавајући се на струјања при малим нападним угловима. Посебно је обрађен утицај инерционих и вртложних оптерећења и њихов утицај на аеродинамичке карактеристике аеростата. Како је аеродинамички отпор значајно изражен скренута је пажња на значај примене Д'Аламберовог парадокса [9], [102], [103] који у случају устаљеног праволинијског кретања умногоме смањује силу отпора. Такође, представљен је значај правилног одабира облика и изгледа репних стабилизирајућих и управљачких површина које знатно утичу на нелинеарност аеродинамичких оптерећења са променом AoA. Аналитички су описане аеродинамичке силе настале летом нових конструкција аеростата са њиховим вредностима дериватива, као и услови лета при којима су изражене њихове линеарности и нелинеарност.

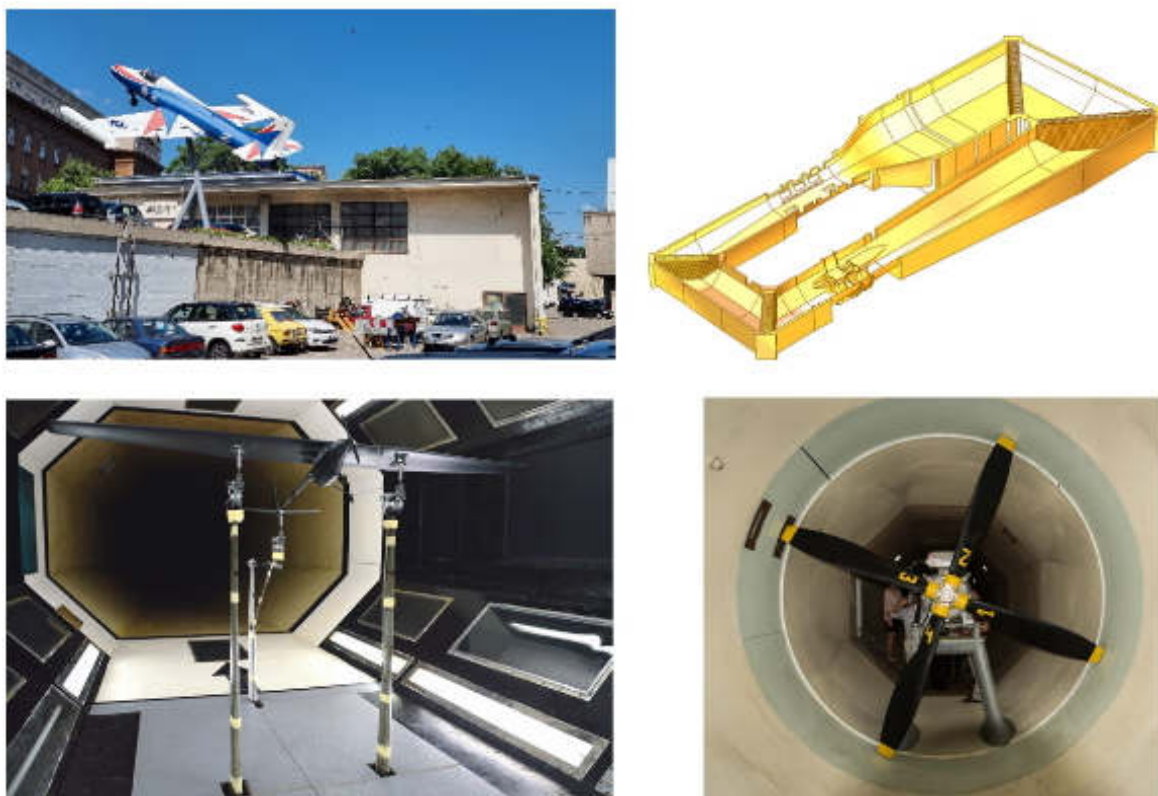
Истраживања аеродинамике при опструјавању високим нападним угловима сажета су у раду [99] који на основу доступних аналитичких и CFD прорачуна као и експерименталних аеротунелских испитивања, приказује линеарну и нелинеарну зависност аеродинамичких бездимензионих коефицијената аеропрофила и крила коначног размаха. У зависности од облика аеропрофила, облика и димензија крила категорисано условима струјања према M и Re , објашњено је физичко тумачење промене аеродинамичког узгона и отпора, описан механизам отцепљења струјања и понашање струјања при критичним условима на основу чега је извршена и категоризација аеропрофила. Крила су сврстана према сличности понашања при лету у околини критичног AoA и дате препоруке за могућа практична конструктивна решења и једноставне конструктивне аеродинамичке додатке који на једноставан начин спречавају сепаратне појаве као што су: изражена бочна струјања, неповољан положај стварања иницијалног и секундарног мехура отцепљења, као и утицај облика терминезона крила и положаја мотора и других подвесних средстава.

Коначно, у раду [3] аутор и сарадници обједињују идеје истраживања која су и основ ове дисертације, доносећи јединствени CFD метод за израчунавање основних аеродинамичких карактеристика ваздухоплова без употребе емпиријских корективних коефицијената. Прорачун је извршен за случајеве струјања реалног ваздуха при специфичним Маховим бројевима од $M=0,6$; $M=0,85$ и $M=1,6$ и вредностима $Re \approx 7,7 \cdot 10^6$. За референтни експериментални модел усвојен је AGARD-B, а резултати испитивања преузети од ВТИ у Београду. О самом истраживању, резултатима и закључцима биће детаљније речи у наредним поглављима.

3. Истраживачки ресурси

3.1. Истраживачки ресурси у оквиру експерименталне аеродинамике

Међу првим изграђеним, још давне 1957. године, а тренутно и највећи школски аеротунел у овом делу света је подзвучни аеротунел АТ-СБ-1 „Мирослав Ненадовић”. Ипак, у оквиру истраживања везана за овај докторат, није био коришћен, с обзиром на доступност података са испитивања која су извршена у аеротунелима Војно-техничког института.. факултета.



Слика 3-1: Аеротунел „Мирослав Ненаовић“ Машинског факултета у Београду.

Присутна је дугогодишња успешна сарадња са Војно-техничким институтом у Београду и доступним резултатима досадашњих истраживања која се спроводе у овој установи од самог оснивања 1946. године, под називом Ваздухопловно-технички институт, па све до данас.

Зачетак и развој аеротунелског испитивања у оквиру ове установе се може представити набрајањем аеротунела према хронолошком реду [104]:

- Т-31 је био саграђен као аеротунел неповратног струјања, а главни пројектант је био Слободан Зотовић, дипл. инг. Слика 3-1 приказује фотографију испитивања мотора. Ово постројење није више у функцији;
- Т-32 је аеротунел повратног ваздушног струјања. Пројектован од стране Сисојев др Всеволода дипл. инж., је субсонични аеротунел, димензија попречног пресека радног дела $1,2 \text{ m} \times 1,8 \text{ m}$;



Слика 3-2: Отворени аеротунел Т-31, испитивање мотора авиона [105].

- Т-33 је водено-кавитациони тунел, а као главни пројектант наводи се Слободан Зотовић дипл. инж. Димензија попречног пресека радног дела је $0,5 \text{ m} \times 0,35 \text{ m}$;



Слика 3-3: Испитивање авиона J-20 у Т-32, ВТИ.

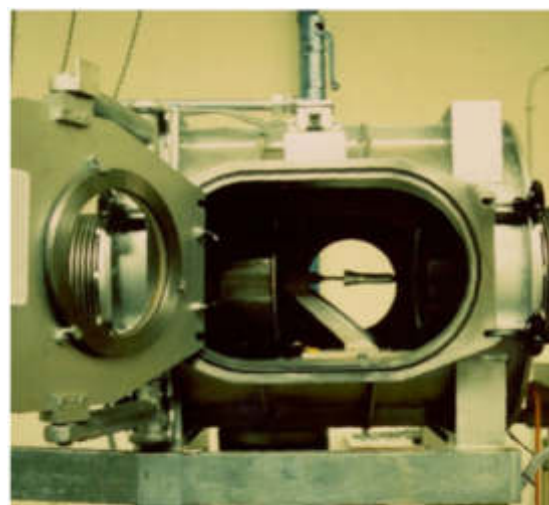


Слика 3-4: Изглед водено-кавитационог тунела Т-33, ВТИ.

- Т-34 - главни пројектант Александар Ивковић, дипл. инж је саградио мали хиперсонични аеротунел, који тренутно није у употреби;



Слика 3-5: Изглед аеротунела Т-34 у режиму рада, ВТИ.



Слика 3-6: Поставка калибрационог модела НВ-1 у хиперсонични аеротунел Т-34, ВТИ.

- Т-36 је главни пројектант дипл. инж. Слободан Зотовић осмислио као трисонични аеротунел правоугаоног попречног пресека радног дела, димензија $0,25\text{m} \times 0,25\text{m}$.
- Т-35 представља значајан аеротунел повратног ваздушнoг струјања. Главни пројектант др Всеволод Сисојев, дипл. инж. је пројектовао аеротунел осмоугаоног попречног пресека радног дела димензија $3,2\text{ m} \times 4,4\text{ m}$. Распон брзина струјања ваздуха од $M \in (0,1, 0,52)$ се остварује вентилатором адаптивног АоА кога покреће погонска група од четири асинхрона мотора који заједно имају највећу снагу од 7,2 MW. У режиму рада мотора који омогућава непрекидан рад могуће је остварити тотални притисак од 120 КРа, са испитним моделима граничне величине се остварује вредност Re до 12 М/м при чему је статички притисак једнак атмосферском у току испитивања. Мерења се изводе екстерном подном шестокомпонентном аеровагом, при чему је могуће променити угао модела око х-осе и у-осе, Сл.3-7, или ослонцем на задњу, репну, базу модела која је покретна у све три осе са могућношћу мерења при континуалном померању модела, Сл-3.8 [106].



Слика 3-7: Т-35 изглед радног дела са стубном аеровагом и изгледом ињекторских млазница [106].



Слика 3-8: Т-35 модел AGARD-B у положају испитивања [106]

Методологија вршења експеримента је детаљно описана у бројним радовима [86], [106], [107], [108]. Овде је приказана основна методологија рада. Испитно мерна опрема (у даљем тексту ИМО) је модуларног типа и чине је опрема за мерење притиска, произвођача Druck [109], мерног распона до 165 КРа, која ради по принципу Бурденове цеви [110] упарена са Пито-инсталацијом [111] намењен за мерење статичног и тоталног притиска, као и мерење базног притиска, док се разлика притисака у циљу добијања динамичког мери и претвара у дигитални сигнал додатним уређајем типа Druck PDCR42 опсега од 7 КРа; ИМО за мерење температуре су изведени стандардним RTD (енгл.-Resistance Temperature Detector) [112]. Вредности аеродинамичких сила се мере унутрашњом шестокомпонентном вагом, Сл.3-9 [106]. ИМО за мерење угаоног помераја имплементиран је за постоља носача аеротунелског модела.



Слика 3-9: ВТИ-јев шестокомпонентни ИМО напона [106].

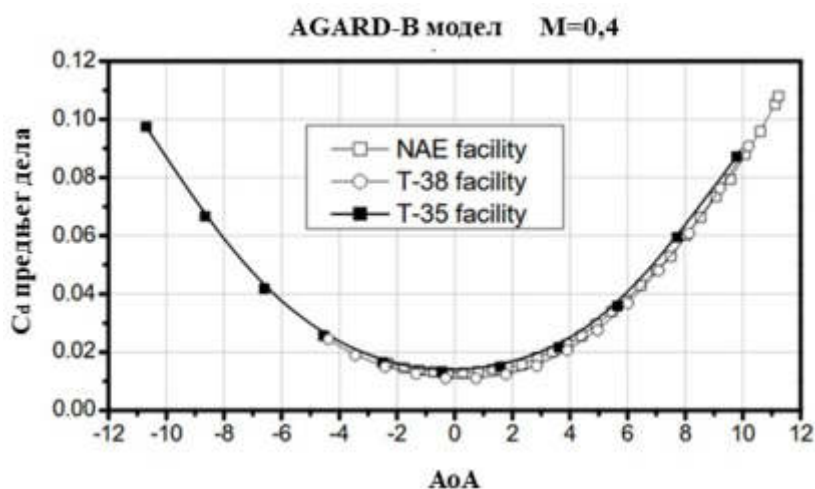


Слика 3-10: ВТИ аеротунел Т-35 [113].

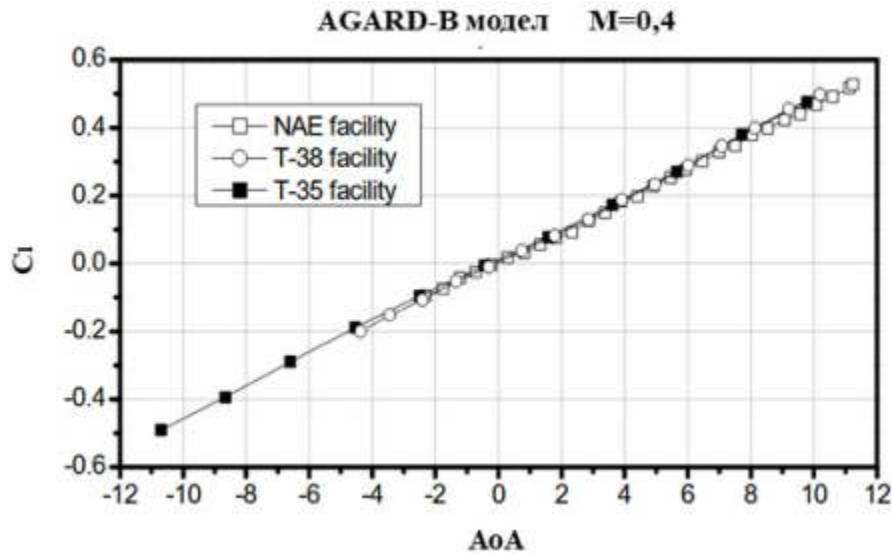
Прикупљање и обрада података се врши поузданим шездесетчетворо-каналним системом Neff 620/600 [114] и рачунаром типа VAX 8250 [115], а у скорије време савременим сервером. Чување података се врши на серверу Института.

Калибрација аеротунелског мерења у овом постројењу применом модела AGARD-B је спроведена (о чему сведочи извештај Оцокољића и сарадника [106]) упоредном анализом података Канадског националног аеротунела (енгл.- National Aeronautical Establishment, NAE) односно данас познат као Институт за аерокосмичка истраживања (енгл.- Institute for Aerospace Research, IAR). Испитивање је извршено у условима струјања при $M=0,4$ при чему је вредност Рејнолдсовог броја варирала у зависности од затечених спољних метеоролошких утицаја у распону од $Re \in (2,19, 2,26)$.

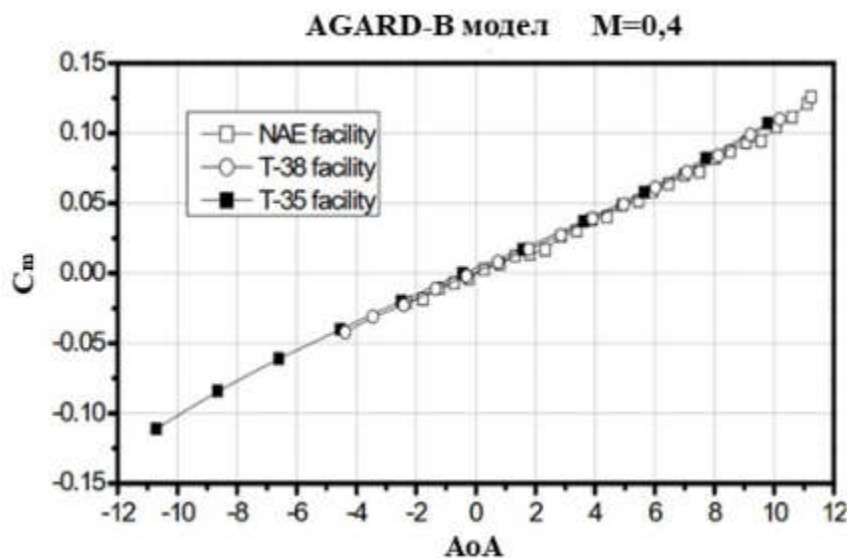
Упоредне вредности су приказане дијаграмима на Сл.3-11 и Сл.3-12. Резултати добијени у три различита аеротунела имају веома добра поклапања у готово свим условима струјања и при свим AoA . Идентичан градијент промене кривих аеродинамичких коефицијената, такође, потврђује квалитет струјања оба ВТИ аеротунела, потврђује правилну усклађеност ИМО са аквизиционим системом и групом за обраду података. Незнатна одступања података се могу оправдати благом разликом у вредностима Re при којима су експерименти извођени.



Слика 3-11: Упоредни дијаграм C_d у зависности од AoA мерења у аеротунелима ВТИ Т-35 и Т-38 и NAE [106].



Слика 3-12: Упоредни дијаграм C_l у зависности од AoA мерења у аеротунелима ВТИ Т-35 и Т-38 и NAE [106].



Слика 3-13: Упоредни дијаграм C_m у зависности од AoA мерења у аеротунелима ВТИ Т-35 и Т-38 и NAE [101].

- Т-38 је познат и као трисонични аеротунел. Пројектован током 1980.-их у сарадњи са специјализованим фирмама из Канаде и Сједињених Америчких Држава (Dilworth Secord Meagher and Associates Limited company) у златној ери ваздухопловства на овим просторима, а са циљем стварања могућности да се самостално пројектује и развије нови надзвучни авион, као и суперсоничне ракете и балистички пројектили.

Функционално посматрајући Т-38 представља аеротунел прекидног дејства са надпритиском. На слици 3-13 представљена је функционална шема рада.

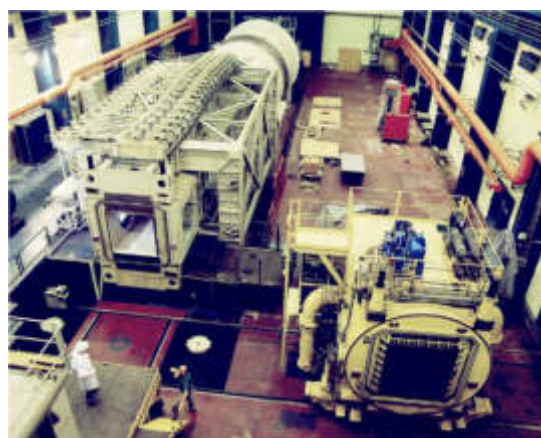


Слика 3-14: Функционална шема рада аеротунела Т-38, ВТИ [3], [116].

Радни флуид је складиштен у резерварима високог притиска, Сл.3-14. Резервоари се допуњавају преко сушача компресором кога покрећу електромотори укупне снаге 4MW.



Слика 3-15: Резервоари високог притиска Т-38.



Слика 3-16: Модуларни млазник Т-38[117].

Након решетки за термалну стабилизацију ваздух се кроз софистицирани регулациони вентил брзог дејства проводи кроз припремну секцију (енгл.-settling chamber) са циљем да се струјање устали и утицај турбуленције смањи на минимум [116]. Млазник је модуларне конструкције са флексибилном контуром и покретљивим бочним флаповима обезбеђује контролу Маховог броја у сва три режима струјања, док испитни простор квадратног облика импозантних димензија 1,5 m x 1,5 m зидова, такође, модуларног типа. Предвиђена је употреба непорозних зидова за случајеве подзвучног и надзвучног струјања и секцију са порозним зидовима за испитивања у трансоничним брзинама [118].

Захтеване параметре струјања обезбеђује управљачко регулациони систем. Граничне вредности карактеристичних величина за аеротунел приказани су табеларно, Таб.3-1.

Табела 3-1: Граничне вредности карактеристичних величина за Т-38 [118].

M	ΔM_{min}	ΔP_{min}	Re/m	P0
0,2 - 4	$\pm 0,5\%$	$\pm 0,3\%$	101·106	180KPa-1400KPa

VTI-40A шестокомпонентна аеровага се користи за мерење аеродинамичких сила и момената. За мерење температура се користе већ поменути RTD, као и ИМО за мерење притиска фирме Druck модел PDCR42.

Прикупљање, селекција и обрада података се врши 64-каналним аквизиционим системом америчког конгломерата Teledyne Technologies, контролисано путем персоналног рачунара. Дигитализовани канали у 16-битном запису чије је читавање пуне скале у опсегу од $\pm 0.05\%$ FS могу обрађивати податке фреквенцијом од 10 Hz, са нископропусношћу IV реда по

принципу Бутервортовог филтера [119] са одговарајућим појачавачем сигнала. Сви подаци се у дигитализованом облику чувају на серверу института [3]. Алгоритам мерења, прикупљања и обраде података приказан је на Сл.3-17.



Слика 3-17: Изглед предајника притиска – тип Trafag ECX 8845 [120].

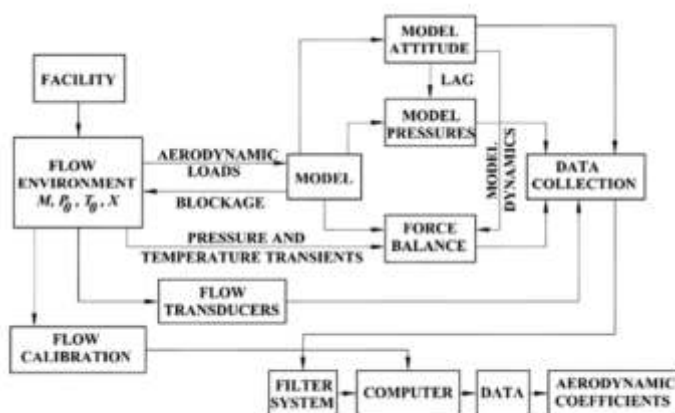


Fig. 1 Wind-tunnel data flowchart [9].

Слика 3-18: Дијаграм тока и обраде измерених величина у Т-38, [117].

У оквиру објављених радова аутора из састава ВТИ, Исаковић, Дамљановић, Самарџић, Оцокољић [86], [117], [121], [122], [123], [124], [125], [126], детаљно је описан и објашњен систем мерења и начини калибрације аеротунелске испитне станице. Основне карактеристике и могућности овог експерименталног ресурса су дати у табелама Таб.3-2.

Табела 3-2: Основни параметри мерења у Т-38,[121].

Величина	Јединица	Мин. ИМО опсег мерења	Величина	Станд. девијација [%FS]
C_l		0,0014	R_z	0,022
C_m		0,00025	M_m	0,020
$C_d + C_{db}$		0,00037	R_x	0,029
C_y		0,001	R_y	0,034
C_{pb}		0,00033	M	
M		0,00035		
P_0	KPa	0,084		
P_{st}	KPa	0,094		
q	KPa	0,029		
T_0	K	0,24		
AoA	о (степен)	0,02		
ϕ_i	о (степен)	0,02		

Визуелизација струјања представља, такође, веома битан показатељ свеобухватне слике струјног поља. Као техника постоји готово колико и сама идеја изучавања динамике флуида. Задатак ове технике је да визуелизује струјање радног флуида око летелице, односно око модела када је реч о аеротунелским испитивањима. Затим да се на основу исте открије или докаже нова или унапређена аеродинамичка теорија, односно карактеристике летелице/модела, а независно од било каквих израчунавања. Са развојем нових техника и употребом напредних нумеричких метода развиле су се и напредне технике визуелизације које имају могућност и квалитативне и квантитативне анализе струјања.

Визуелизација струјања се може, начелно, поделити на визуелизацију струјања у непосредној близини опструјаваних површина и на визуелизацију од подручја граничних површи.

Визуелизација површинског тока се техникама увођења у ток струјања у непосредну близину флуида или аеросола који се у струјно поље уводе у виду праменова, флуоресцентних боја, уља или специјалне мешавине глине. Основни задатак је детектовање својства струјања у граничном слоју, односно на задате услове струјања и динамику модела битно је декларисати положај ламинарног, прелазног и турбулентног струјања, зачетак вртлога или стварања мехурова отцепљења струјања.

Визуелизација слободног струјног поља укључује употребу димног трага, сапунице испуњене неутралним гасом, распршене капљице уља (напр. маслиново уље). Битно је нагласити да је неопходно спровести обе врсте визуелизације, јер се једино на такав начин може добити целокупна слика струјања [107].

Табела 3-3: Врсте визуелизација и њихова примена, [107], [108].

Методe	Врсте	Област примене
Оптичке методе		
Шлирен (Schlieren)	Паралелна/фокусирана Црно-бела / у боји	M>1
Сенка (Shadow method)		M>1
Интерферометрија (Interferometry)	Класична Холографска Electronic speckle	M>1 и M<1
Анеометрија (Anemometry)	Холографска Ласер-доплер	M<1
Electronic speckle interferometry and shearography		M>1 и M<1
Неоптичке методе		
Трасирање пигментним честицама	Графитни прах, Флуоросцентна боја Титанијум диоксид Течни кристали	Гранични слој M<1
Трасирање површинским кончићима	Најлонске нити Флуоросцентне нити	M<1
Димним трагом		M<1
Испитивања у водено- кавитационим тунелима	Алуминијумским пудером Сапунчастим балончићима Млеком Стиропором	M<1
Специјалне методе		
Рефрактометрија		M>1 и M<1
Метода додавањем енергије		M>1
Ласерски слој		M>1 и M<1

Визуелизација осим техника уношења горе наведених непрозирних материја подразумева и документовање уочених појава. Тако је употреба високо-фреквентних камера, употреба специјалних извора светлости, обично бочно постављених, засенчивање и сличне помоћне технике употпуњују квалитет забележене појаве.

Режим струјања, такође, одређује која ће се техника употребити у којој фази експеримента. Тако се за нестишљива струјања могу широко применити горе поменуте методе, док се за

компресибилно струјање обично користе методе: шпирена [127], сенке и интерферометрије [128].

Према Ристићу [107], [108] визуелизације струјања можемо сврстати на оптичке, неоптичке и специјалне методе визуелизације. Ове поделе са применом за специфична струјања представљени су табеларно, Таб.3-3.

Неке примере метода визуелизације струјања граничног слоја који су спроведени у ВТИ су приказани на следећим сликама.



Слика 3-19: Визуелизација струјања граничног слоја уљним филмом при $M=0,9$ [107].

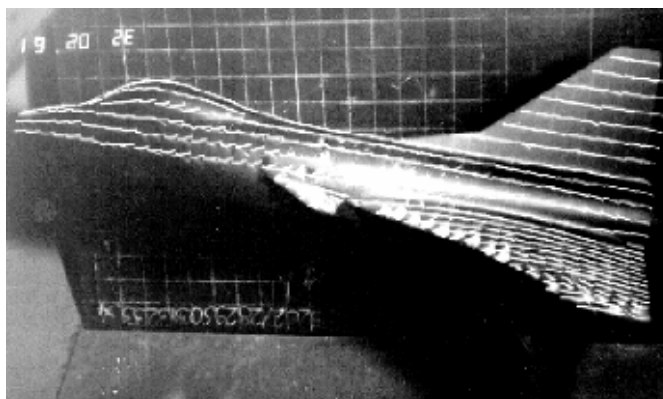


Слика 3-20: Визуелизација струјања граничног слоја уљним филмом при $M=0,2$ [107]

Приметно је да се на Сл.3-18 и Сл.3-19 јасно види кретање флуида у граничном слоју, интерференца управљачких површина на опструјавање на остатку летеће бомбе, али и јасна линија преласка из ламинарног у турбулентно кретање приликом струјања око сфере.



Слика 3-21: Визуелизација струјања у граничном слоју употребом памучних кончића, модел авиона Ласта при $V=100\text{m/s}$ [107].



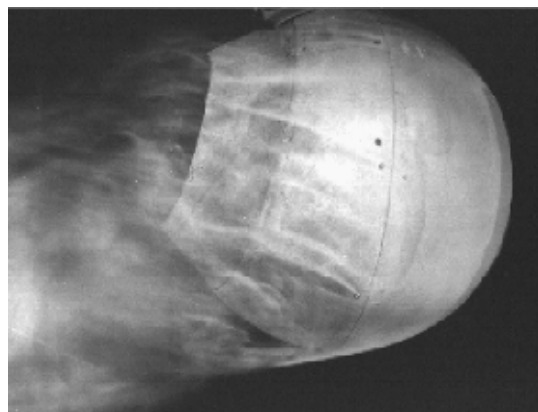
Слика 3-22: Визуелизација модела НА флуоресцентним кончићима у Т-32 [107].

Испитивање граничног слоја употребом памучних и флуоресцентних кончића примењених на развојним моделима ВТИ приказани су на Сл.3-21 и 3-22.

Струјање у граничном слоју не мора да пружи идентичну слику кретања флуида у осталој контролној запремини при испитивању. Визуелизација струјања ван граничног слоја која се изводи у подзвучном струјању у оквиру ВТИ је приказана на Сл.3-22 и Сл.3-23.



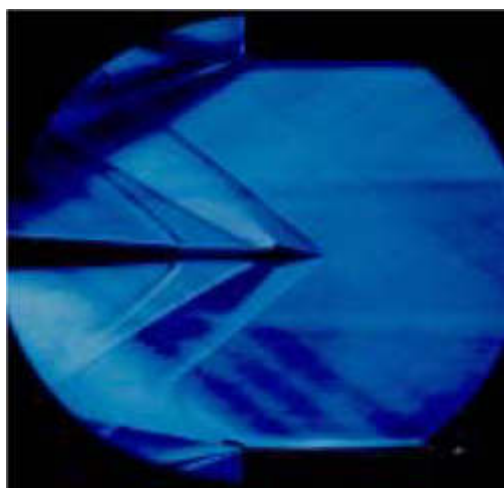
Слика 3-23: Визуелизација бојом у воденом тунелу ВТИ [107].



Слика 3-24: Визуелизација вртложног трага наношењем $TiCl_4$ [107].

Својство холестеричних течних кристала је да се осветљавањем белом светлошћу под углом добија рефлексија у некој боји видљивог спектра. Примећено је да се под истим условима струјања радног флуида у коме долази и до течења овог кристала, а са променом температуре кристала мења и спектар рефлексоване светлости што за последицу има промену боје. Ово својство се користи за утврђивање распореда температура у слојевима струјања флуида.

Приликом посматрања компресибилних струјања, односно струјањима при надзвучним брзинама употреба боје, аеросола, уља, конфета стиропора и сличних метода је неупотребљива. Утицај јаких промена притиска у карактеристичним пољима неутралише расподелу горе набројаних честица. Зато је за визуелизацију надзвучних струјања у оквиру ВТИ лабораторије за експерименталну аеродинамику широко примењена шпирен метода испитивања.



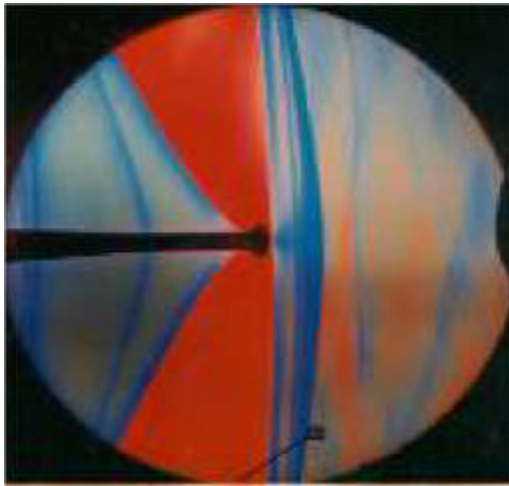
Слика 3-25: Визуелизација шпиреном конуса при $M=1,56$ [108].



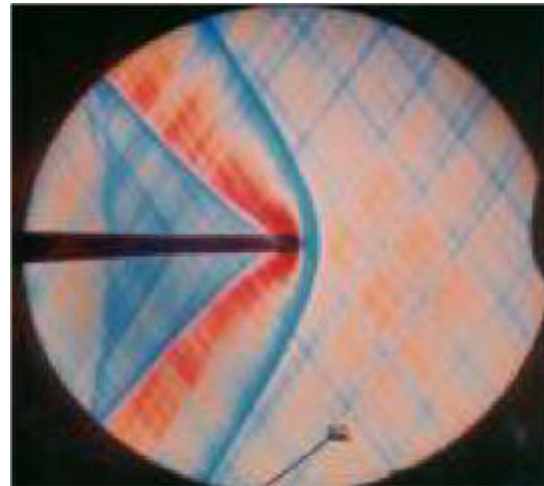
Слика 3-26: Визуелизација шпиреном конуса при $M=1,02$ [108].

Својство флуида да са променом густине мења и своја прозирна својства, односно коефицијент рефлексије искоришћен је да се употребом контролисаног извора светлости постављених бочно од испитиваног модела, употребом огледала и софистицираних камера бележе управо места на којима се јављају нагле промене притисака што узрокује, такође, нагле промене густине. Примери оваквих испитивања су приказани на Сл. 3.24, Сл.3.25, Сл.3.26.

Шлирен холографском методом је могуће снимати динамичку промену у струјању, односно увид у нестационарне појаве током опструјавања тела, што јој даје предност у односу на шлирен методу.

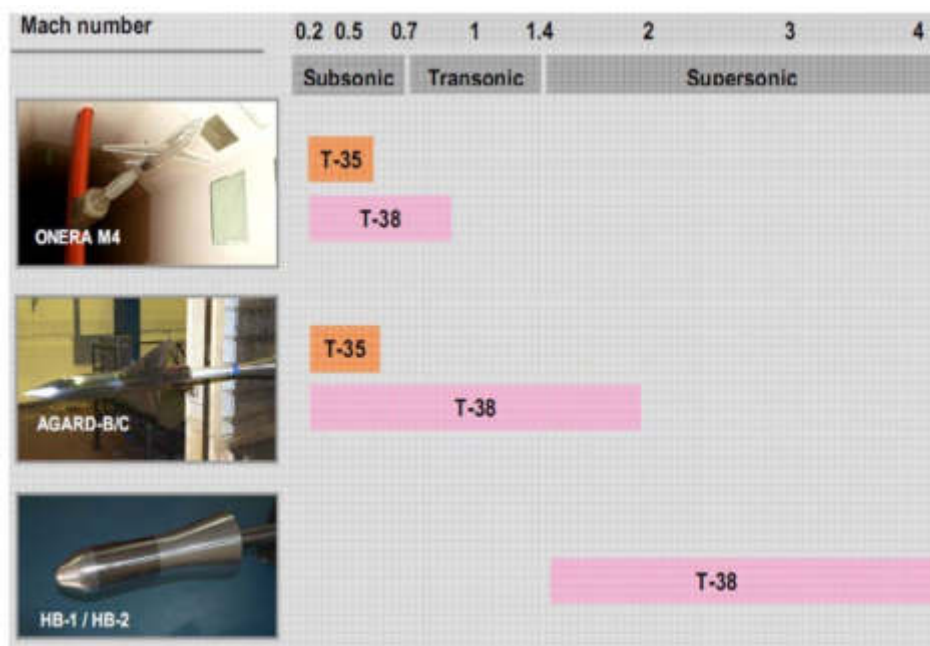


Слика 3-27: Визуелизација шлиреном-холографска интерференца око сфере при $M=1,02$ [108].



Слика 3-28: Визуелизација шлиреном-холографска интерференца око сфере при $M=1,1$ [108].

ВТИ периодично врши калибрацију својих аеротунелских експерименталних ресурса. У том смислу поседује низ модела који су стандардизовани од стране других утицајнијих аеротунелских лабораторија.



Слика 3-29: Опсег струјања у T-35 и T-38 са калибрационим моделима [106].

Тако су вама заступљени калибрациони модели ONERA M4, AGARD-B/C и HB-1/2 (енгл.-Hypervelocity ballistic model). У том смислу на Сл.3-28 је приказан дијаграм употребе калибрационих модела у аеротунелима T-35 и T-38.

3.2. Рачунарски ресурси за прорачунску динамику флуида

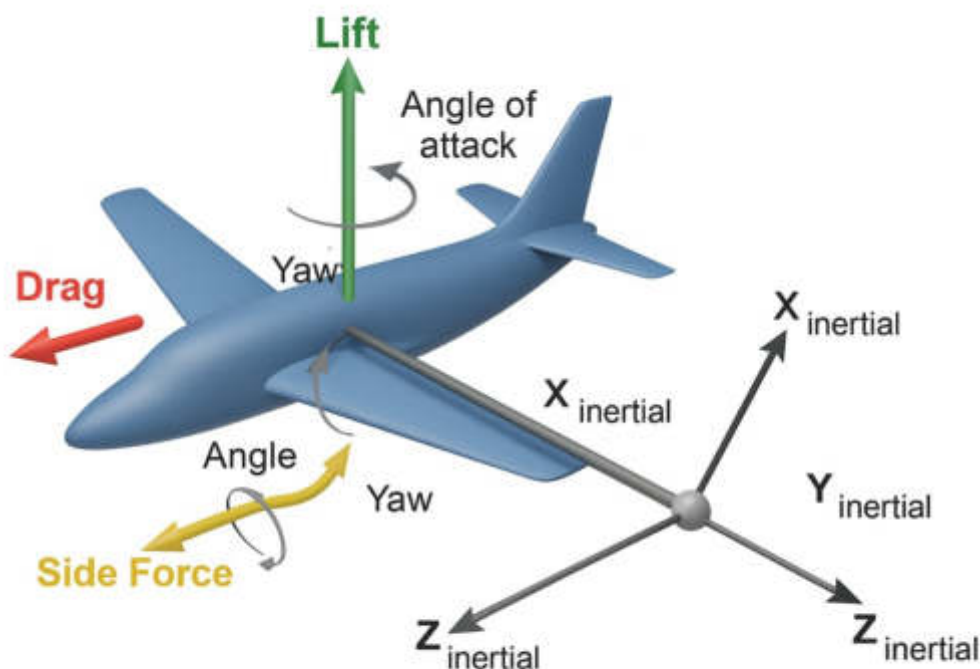
Рачунарски ресурси који су коришћени за практичну реализацију истраживања у области CFD били су обезбеђени кроз паралелно рачунарско окружење, успостављено на Dell радној станици опремљеној са 24-језгарним процесорима Intel(R) Xeon E5-2630 радног такта 2,3 GHz. Сваки физички процесор подржавао је технологију хипертрединга, омогућавајући оперативном систему приступ двоструком броју логичких језгара. Тиме је створено 48 логичких језгара, односно омогућено вршење 48 процеса истовремено. Припрема и реализација нумеричких прорачуна су спроведени у ваздухопловној лабораторији Машинског факултета Универзитета у Београду.

4. Математички модел струјања

Одредити и математички описати модел који се примењује за конкретан случај струјања је почетни корак у циљу нумеричког решавања проблема механике флуида. Овде се полази од става да није неопходно дефинисати опште прихваћене основне појмове механике флуида. Изнети су основна начела кретања флуида и представљен математички модел струјања ваздуха, као радног флуида [129], [130].

4.1. Оријентација координатног система

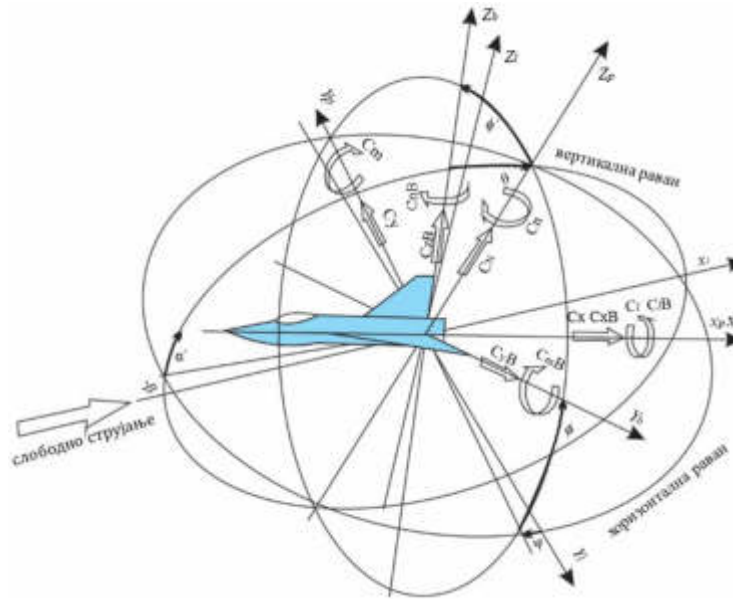
Примењен је конвенционални општеприхваћени ваздухопловни Декартов координатни систем летелица, приказан на Сл.4-1.



Слика 4-1: Неинерцијални и инерцијални координатни систем.

Претпостављено је да током изучавања случајева стационарног струјања положај координатног почетка инерционог и неинерционог система поклапа у заједничкој тачки. Ова се претпоставка може применити, такође, код моделовања нестационарних случајева чија се нестационарност огледа у ротационом кретању око главних оса координатних система.

Аналогно претходно изнетим, оријентације коефицијената аеродинамичких сила и момената, АоА, вектора брзина струјања радног флуида су приказане на Сл.4-2.



Слика 4-2: Оријентације коефицијената аеродинамичких сила и момената, AoA и вектора брзине опструјавања.

4.2. Систем основних једначина струјања

Систем основних једначина струјања флуида представља обједињене и математички записане основне законе физике, закон одржања масе, Њутнови закони механике, закони термодинамике. Другим речима, сматрамо да је ваздух непрекидни континуум и да се молекулска структура и кретања занемарују. Понашање флуида описујемо макроскопским својствима, односно густини, притиском, температуром и брзином, а записујемо их у формату њихових временских и просторних извода.

4.2.1. Једначина одржања масе

Основно начело закона одржања материје, масе, исказујемо да је промена масе у посматраном систему једнака промени масе која је извршена у масеној размени посматране контролне запремине, односно математички записано у једначини (4.1) [129].

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} (\rho \delta x \delta y \delta z) = \frac{\Delta \rho}{\Delta t} (\delta x \delta y \delta z) \quad (4.1)$$

Посматрајући примену масе кроз контролну запремину чији је просторни дериватив $\delta x \delta y \delta z$ можемо написати у облику:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \quad (4.2)$$

Односно у препознатљивом облику:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{V}) = 0 \quad (4.3)$$

Једначина (4.3) представља нестационарну тродимезионалну једначину закона одржања масе, односно једначину закона одржања континуитета за стишљив флуид.

За случај нестишљивог флуида једначина (4.3) се може писати као:

$$\operatorname{div} \vec{v} = \nabla v = 0 \quad (4.4)$$

4.2.2. Закон о промени количине кретања

Примена другог Њутновог закона при посматрању струјања ваздуха као вискозног флуида исказујемо кроз закон о промени количине кретања. Посматрајући флуидом испуњену контролну запремину V , ограничену површином A и сваки припадајући флуидни делић који се креће локалном брзином $\vec{v}$ и масе m , можемо написати законитост промене количине кретања у облику:

$$\vec{K} = \int_V \vec{v} dm = \int_V \rho \vec{v} dV \quad (4.5)$$

На основу (4.5) можемо формулисати закон о промени количине кретања – промена количине кретања материјалног система представља збир свих сила које делују на посматрани систем.

Силе које делују на флуид можемо груписати у:

- површинске силе: вискозне, гравитационе и силе притиска;
- масене силе: центрифугална, Кориолисова и електромагнетна сила.

Полазећи од чињенице да на део контролне површине dA са локалним ортом $\vec{n}$ делује напон $\vec{\sigma}_n$ чијим интеграљењем се добија површинска сила. Узимајући у обзир и да се укупни напон флуида састоји од напона притиска и тангенцијалног напона могу се извести опште локалне једначине кретања флуида у следећем облику [129]:

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \rho \vec{F} - \nabla p + \operatorname{div} \vec{\tau} \quad (4.6)$$

Односно, може се рећи да су инерцијалне силе једнаке збиру масених сила, сила притиска и тангенцијалних сила. Овакав облик једначине кретања флуида су добиле име по Навијеу (Navier) још од 1822.године, али и Кошијеве (Cauchy) једначине.

4.2.3. Претпоставке о напонима у флуиду

У циљу потпуног дефинисања стања напона у флуиду узима се у обзир Стоксова претпоставка написана једначином (4.7):

$$\tau_{ij} = 2\eta D_{ij}^d \quad (4.7)$$

Која формулише да су тангенционални напони у флуиду линеарано пропорционални девијаторском делу брзине (4.8), а коефицијент пропорционалности је двострука вредност кефицијента динамичке вискозности флуида. При чему је:

$$D_{ij}^d = \frac{1}{2} \left(\frac{dv_i}{dx_j} + \frac{dv_j}{dx_i} \right) - \frac{1}{3} \frac{dv_k}{dx_k} \delta_{ij} \quad (4.8)$$

4.2.4. Навије-Стоксове једначине (енгл. - Navier-Stokes - NSE)

Довођењем у директну корелацију једначина (4.6), претпоставке о напонима (4.7) и формулацијом да је укупан тензор напона написан у облику:

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\eta D_{ij}^d \quad (4.9)$$

Добија се систем једначина кретања флуида, познате као Навије-Стоксове, и могу се написати у векторском облику (4.10).

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right) = \rho \vec{F} - \nabla p + \eta \nabla^2 \vec{v} + \frac{\eta}{3} \nabla (\nabla \cdot \vec{v}) \quad (4.10)$$

Физички гледано, инерцијалне силе (локалне и конвективне) су једнаке збиру масених сила, сила притиска и вискозних сила.

Ако сматрамо да је струјање изотермско, може се сматрати да η има константну вредност у читавом посматраном струјном пољу. Посматрајући ваздух као нестишљив флуид, можемо писати да је:

$$\text{div} \cdot \vec{v} = \nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (4.11)$$

Тако да се (4.10) за случај нестишљивог флуида може писати у векторском облику као:

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right) = \rho \vec{F} - \nabla p + \eta \nabla^2 \vec{v} \quad (4.12)$$

У развијеном облику, једначине кретања нестишљивог флуида се могу написати као:

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) &= \rho F_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \eta \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) \\ \rho \left(\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) &= \rho F_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \eta \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right) \\ \rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) &= \rho F_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \eta \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \quad (4.13)$$

Вредност притиска и вектор брзине представљају четири непознате величине у овом систему једначина. Аналогно решавање парцијалних, спрегнутих једначина другог реда отежава припадајући нелинеарни део $(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}$.

Математички тачно решење је могуће добити искључиво применом на струјања некомпесибилних флуида кроз једноставне геометрије. Посебну потешкоћу представља опструјавање сложених геометријских тела у неограниченом математичком домену.

4.2.5. Ојлерове једначине

Хронолошки гледано Ојлерове једначине представљају старији физичко-математички облик, како их је Ојлер извео 1757. године. За случај струјања идеалног флуида сматрамо да се може занемарити утицај вискозног напона, односно да је $\tau_{ij} = 0$, па се из (4.12) добија систем Ојлерових једначина:

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = \rho \vec{F} - \nabla p \quad (4.14)$$

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{v^2}{2} \right) - \vec{v} \times \text{rot} \vec{v} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \nabla p$$

На аналоган начин се могу написати и у развијеном облику као:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) &= F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \left(\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) &= F_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \\ \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) &= F_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned} \quad (4.15)$$

Физички тумачећи једначине (4.14), односно (4.15) можемо рећи да су силе инерције једнаке збиру запреминске силе и силе притиска. У математичком смислу и Ојлерове једначине представљају спрегнуте, нелинеарне диференцијалне једначине другог реда.

Ако претпоставимо да је флуид нестишљив, $\frac{1}{\rho} \nabla p = \nabla \frac{p}{\rho}$, као и да вртлог дефинишемо као:

$$2\vec{\omega} = \nabla \times \vec{v} \quad (4.16)$$

једначине (4.15) можемо написати у облику:

$$\frac{D\vec{\omega}}{Dt} = (\vec{\omega} \cdot \nabla) \vec{v} + \nu \nabla^2 \vec{\omega} \quad (4.17)$$

Једначина (4.17) представља једначину вртложности, где лева страна једначине представља локалну и конвективну промену вртложности, прва компонента десне стране једначине представља утицај градијента брзине на вртложност, а други десни сабирак говори о утицају вискозне дифузије на стварање вртложности [129], [131].

4.2.6. Закон промене кинетичке енергије

Када NSE, једначине количине кретања, скаларно помножимо вектором брзине струјања добијамо једначину промене кинетичке енергије флуида, односно:

$$\rho \frac{D}{Dt} \left(\frac{v^2}{2} \right) = \rho \vec{F} \cdot \vec{v} - \vec{v} \cdot \nabla p + \vec{v} \cdot (\nabla \cdot \vec{v}) \quad (4.18)$$

Лева страна једначине представља промену кинетичке енергије у јединици времена, док су са десне стране једначине: прва компонента је снага запреминске силе, друга је снага силе притиска и последња је снага вискозних сила. Тако да можемо формулисати закон о промени кинетичке енергије струјања флуида да је у току времена једнака суми снага свих сила у јединици запремине.

4.2.7. Закон одржања енергије

Закон одржања енергије је универзалан када је у питању класична физика, односно кажемо да је промена енергије материјалног система у току времена једнака збиру снага свих сила и размењене количине топлоте. Односно, да се енергија система у току времена не може изгубити већ само прећи у други свој облик [129]. Тако да је математички записано:

$$\frac{DE}{Dt} = \dot{W} + \dot{Q} \quad (4.19)$$

У којој је Е-укупна енергија система, $\dot{W}$ – сума снага свих сила и $\dot{Q}$ – укупна размењена количина топлоте.

Закон одржања енергије у локалном облику примењен у механици флуида се формулише основном једначином (4.20):

$$\rho \frac{D}{Dt} \left(e + \frac{v^2}{2} \right) = \rho \vec{F} \cdot \vec{v} - \nabla \cdot (p \nabla p) + \nabla \cdot (\vec{v} \cdot \vec{\tau}) - \nabla \cdot \vec{q} \quad (4.20)$$

Тумачење једначине (4.20) сводимо на то да је промена укупне енергије у јединици времена једнака збиру снаге запреминске силе, снаге силе притиска, снага вискозних сила и укупне размењене количине топлоте у јединици запремине. У једначини (4.19) је представља унутрашња енергија по јединици запремине.

Из једначина (4.18) и (4.20) се изводи законитост промене унутрашње енергије записана у облику једначине (4.21):

$$\rho \frac{De}{Dt} = -p \nabla \cdot \vec{v} + \Phi_D - \nabla \cdot \vec{q} \quad (4.21)$$

Полазећи од дефиниције за енталпију написане кроз једначину (4.22):

$$h = c_p T = e + \frac{p}{\rho} = c_v T + \frac{p}{\rho} \quad (4.22)$$

При чему је c_p , c_v специфична топлота при константном притиску, односно запремини, респективно.

Када дефинисану енталпију једначином (4.22) и позивајући се на једначине одржања масе (4.2) долазимо до једначине која дефинише промену енталпије у општем облику (4.23).

$$\rho \frac{Dh}{Dt} = \rho \frac{D(c_p T)}{Dt} = \frac{D\rho}{Dt} + \Phi_D - \nabla \vec{q} \quad (4.23)$$

Закон промене енталпије се може додатно поједноставити ако се усвоји да је струјање флуида такво да можемо сматрати вредности c_p , c_v константним.

$$\begin{aligned} ds &= \frac{\delta q}{T} \\ \delta q &= de + pd \frac{1}{e} \end{aligned} \quad (4.24)$$

Полазећи од дефиниције за ентропију и Гибсове (енгл.-Gibbs) релације приказаних у (4.24), као и једначине одржања материје (4.2) и једначине за промену унутрашње енергије (4.21) добија се једначина за биланс ентропије при струјању флуида [129]:

$$\rho T \frac{Ds}{Dt} = \Phi_D - \nabla \vec{q} \quad (4.25)$$

Тумачећи једначину (4.25) можемо рећи да је промена ентропије система у јединици времена једнака збиру снага вискозних сила (енергетске дисипације) и размењене количине топлоте. Другим речима, при струјању флуида дисипацијом вискозних сила, снага прелази у топлоту што за последицу има позитиван прираштај ентропије, $ds > 0$. Тиме се декларише да је струјање флуида неповратан процес. Са друге стране, ентропија флуидног делића у зависности од повећања или смањења температуре може имати позитиван или негативан градијент.

4.2.8. Једначине стања гаса

Постоји велики број једначина стања гаса. Овде је представљена Ван дер Валсова (дански-Johannes Diderik van der Waals, (1873)) интерпретација стања гаса [132] која за гасове узима у обзир аспекте запремине молекула гаса и привлачење између њих и написана је у облику једначине (4.26).

$$\left(p + n^2 \frac{VW_1}{V} \right) (V - nVW_2) = nRT \quad (4.26)$$

При чему у једначини поред притиска, температуре, броја молова гаса (n), универзалне гасне константе (R) фигуришу и емпиријски коефицијенти корекције VW_1 и VW_2 .

Први корективни фактор зависи од природе гаса и температуре, док други фактор представља коволумен, односно запремину гаса испод које се исти не може сабити због постојања реалних запремина молекула. Овим је узета у обзир запремина молекула и утицај међумолекуларних сила.

Применом дефиниције идеалног гаса једначина (4.26) се предефинише у познату једначину стања идеалног гаса (4.27).

$$pV = nRT \quad (4.27)$$

Тиме што је узела у обзир запремину молекула и привлачне силе, Ван дер Валсова теорија је пружила боље разумевање понашања реалних гасова, нарочито при високим притисцима и ниским температурама, где одступања од идеалног гаса постају значајна. Кључни допринос је био у томе што је Ван дер Валсова једначина стања омогућила описивање кондензације гасова, што идеална теорија није могла да објасни.

Првенствено, ова једначина није потпуно прецизна за све врсте гасова, нарочито за оне који су подвргнути екстремним условима. Такође, она претпоставља да су молекули сасвим сферични и да имају једнаке међусобне интеракције, што није увек тачно. Међутим, за многе гасове у умереним условима, једначина даје веома добар приближан резултат.

4.2.9. Сатерлендов модел вискозности

4.2.9.1. Утицај вискозности

Вискозност, као мера унутрашњег трења у флуиду (ваздуху) које настаје услед релативног кретања слојева флуида, последица је међумолекулских сила и преноса количине кретања између суседних слојева флуида.

У контексту аеродинамике има кључну улогу у формирању граничног слоја, раздвајању тока, аеродинамичком отпору и губицима енергије. Вискозни ефекти доводе до појаве отпора трења (енгл.-skin friction drag) и формирања турбулентних структура у току. Динамичка вискозност η [Pa·s], која изражава силу трења између слојева флуида, и кинематичка вискозност μ [m²/s], која представља однос динамичке вискозности и густине флуида, фигуришу као појмови у анализи кретања флуида. Вискозност чини разлику између реалних и идеалних флуида. У идеалном флуиду (без вискозности) не постоје трење и дисипација енергије, док у реалним флуидима вискозност значајно утиче на развој аеродинамичких сила и струјања.

Посматрајући NSE као нелинеарни систем парцијалних диференцијалних једначина тежимо да у њиховој анализи одговоримо на питања постојања, јединствености и глаткоће решења, што је и један од нерешених проблема у математичкој хидродинамици, тзв. „Миленијумски проблем“.

Посматрајући једначину (4.9) уочавамо на левој страни једначине $(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v}$ нелинеарни конвективни члан, а на десној страни $\eta \nabla^2 \vec{v}$ дифузиони (уједно вискозни) члан једначине. Вискозни члан једначине је линеаран и можемо рећи да умирујуће делује на решење једначине, док му се супроставља утицај инерцијалних сила.

Улога вискозности на вишезначност (енгл.-Non-Uniqueness) решења NSE се може декларисати према следећем:

- *За вискозне флуиде ($\mu > 0$)* – Улазак вискозности у модел уводи дисипативни (дифузиони) члан, који утиче на стабилизацију решења. За ниске Рејнолдсове бројеве ($Re \ll 1$), вискозност доминира и обезбеђује јединствено и глатко решење. Инерционе силе су занемарљиве па је утицај нелинеарности занемарљив. NSE можемо свести на Стоксова струјања (Stokes flow).
- *За средње Рејнолдсове бројеве, $Re \sim (1-1000)$* , конвективни и вискозни термини су упоредиви, а вискозност и даље има способност да делује стабилизирајуће. Међутим, струјања постају осетљива на утицај граничних и почетних стања тако да се у струјању могу очекивати постојања више могућих стабилних и нестабилних решења, тзв. **бифуркација**. Очит пример је ефекат Карманових вртлога.

- *За велике Рејнолдсове бројеве ($Re \gg 1$)* – Доминација инерцијалних сила доводи до нелинеарних ефеката, што може изазвати више могућих решења (вишезначност). У овом случају су за очекивати **турбулентни режими**, односно осетљивост на иницијалне и граничне услове, где мала промена услова може довести до сасвим другачијег понашања флуида. Нелинеарност једначина доводи до појава каскадног вртлога и хаотично понашање тока. Утицај вискозности остаје значајан, али се већи утицај изражава унутар граничног слоја и у процесу дисипације турбулентне енергије што доводи до смиривања тока струјања. На тај начин се енергија преноси и расипа у виду топлоте.
 - *Раздвајање тока* – постојање више могућих стања зависно од граничних услова (нпр. ток око тела при високим Re може имати различите режиме раздвајања).
- *За идеалне (невискозне) флуиде ($\mu = 0$)* – NSE се свде на облик Ојлерових једначина. Математички гледано и даље је присутан утицај инерцијалних сила које изазивају нелинеарност. Једначине делују упрошћено и лакше је доћи до решења. Међутим реалност добијеног решења је упитна управо због недостатка вискозног ефекта. Ово доводи до снажне појаве вишезначности, због нереалног описа дисипације турбулентног струјања можемо очекивати реверзибилност тока због недостатка механизма који га усмерава ка једном и физички прихватљивом решењу. Такође, јавља се проблем описивања граничног слоја, где се без присутности вискозности исти не може реално описати.

4.2.9.1. Сатерлендов (Sutherland) модел вискозности

Сатерлендов (Sutherland) модел вискозности [133] је један од најпознатијих математичких модела који се користе за опис вискозности флуида као функције температуре. Овај модел је посебно користан у прорачунима где се флуидно понашање треба анализирати при променљивим температурама, као што је често случај у компјутерској динамици флуида. Према овом моделу, зависност кинематичке вискозности $\mu(T)$ од температуре T је дата функцијом:

$$\mu(T) = \mu_{ref} \left(\frac{T_{ref}}{T} \right)^{3/2} \cdot \left(\frac{T_{ref} + S_\mu}{T + S_\mu} \right) \quad (4.28)$$

При чему су:

- $\mu(T)$ - кинематичка вискозност флуида при задатој температури;
- μ_{ref} - референтна кинематичка вискозност флуида при референтној температури;
- T – задата температура флуида при струјању;
- T_{ref} - референтна температура (обично се узима да је 273K или 300K);
- S_μ - Сатерлендов параметар осетљивости кинематичке вискозности флуида са променом температуре који зависи од врсте флуида који се посматра. За ваздух овај параметар је 110K [133].

Овај модел вискозности је прикладан за моделовање струјања у гасовима при великом температурном опсегу. Експоненцијална зависност од температуре одржава молекулску

динамику ваздуха. Иако постоје и други модели вискозности, Сатерлендов модел се показао прикладним за аеродинамичке моделе струјања због своје једноставности.

4.2.10. Прантлов број

Прантлов број (Pr) [8] је бездимензиони број који омогућава разумевање односа између вискозности флуида и његове способности да преноси топлоту.

$$Pr = \frac{\eta/\rho}{\kappa/(c_p/\rho)} = \frac{c_p \eta}{\kappa} \quad (4.29)$$

Прантлов број је дефинисан једначином (4.28), при чему је κ коефицијент адијабате, односно Прантлова константа. Физички гледано овим параметром се дефинише баланс између преноса топлоте и импулса у флуиду. Када је Прантлов број низак, дифузија топлоте је бржа од дифузије импулса, што значи да се топлота преноси брже него што се флуид креће. Са друге стране, ако је Прантлов број висок, пренос топлоте ће бити спорији у односу на пренос импулса.

Примењено за ваздух у нормалним условима је $Pr=0,7$. Ова вредност указује на то да је пренос импулса (вискозност) бржи од преноса топлоте (дифузија топлоте) у ваздуху. Овај баланс је кључан за различите аспекте аеродинамичких истраживања, као што су загревање површина авиона, крила или других тела у току кретања кроз ваздух.

У CFD анализама, Прантлов број игра важну улогу у одређивању подела флуидних зона, где су у неким областима флуидне струје већ промениле своје карактеристике у односу на температуру (због бржег преноса топлоте), док су у другим областима доминантнији механизми који се односе на вискозност (као што је трење). Ова дистинкција је важна за тачне симулације термичког понашања објеката у аеродинамици.

На пример, у анализи аеродинамике авиона, Прантлов број је важан за предвиђање температура које настају услед трења ваздуха о површину крила или других компоненти. У зонама са високом брзином ваздуха, као што су предњи делови крила, Прантлов број ће бити користан за процену начина на који се топлота преноси унутар флуида, што је од кључне важности за одређивање термичких напона који могу довести до оштећења материјала.

Тиме се утиче на оптимизацију аеродинамичких и термичких перформанси система. Такође, Прантлов број помаже у разматрању утицаја термичког грејања на стабилност флуида око аеродинамичких облика. Овде CFD симулације користе Прантлов број за моделовање температурних профила и предвиђање тачака са потенцијалним термичким напоном или чак кључним температурама које би могле довести до контрола аеродинамичког учинка.

4.3. Систем основних једначина струјања у форми векторског флукса

У поглављу 4.2 представљен је систем једначина којима се могу описати посебни модалитети струјања ваздуха. Као непознате величине струјања неопходно је доћи до решења за: вектор брзине у струјном пољу (посматрано у правоуглом координатном 3D систему – три компоненте); густина (ρ), притисак (p), температура (T), енергија по јединици масе (e), динамичка вискозност флуида (η) и коефицијент адијабате (κ). Простим збрајањем закључујемо да је неопходно израчунати девет непознатих величина.

Истовремено смо приказали девет једначина, односно једначину одржања масе (4.3), једначине кретања флуида (4.13), једначина одржања енергије (4.20), једначина промене унутрашње енергије (4.21), једначина стања гаса (4.26), Сатерлендов модел вискозности (4.28) и једначина која дефинише Прантлов број (4.29).

Оваквим системом једначина је тешко управљати у облику датом у претходном поглављу. Зато се могу приказати у форми колона векторског флукса (4.30) [3], [131], [134].

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{F}}{\partial x} + \frac{\partial \vec{G}}{\partial y} + \frac{\partial \vec{H}}{\partial z} = \vec{J} \quad (4.30)$$

Једначином (4.28) смо заокружили целокупан систем једначина представљен у поглављу 4.2, при томе величине $\vec{U}, \vec{F}, \vec{G}, \vec{H}$ и $\vec{J}$ представљају векторе колона чији су индентитети представљени једначинама (4.31) до (4.35):

$$\vec{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ \rho E \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

$$\vec{J} = \begin{bmatrix} 0 \\ \rho f_x \\ \rho f_y \\ \rho f_z \\ \rho(uf_x + vf_y + wf_z) + \rho \dot{p} \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

$$\vec{F} = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho x^2 + p - \tau_{xx} \\ \rho uv - \tau_{xy} \\ \rho uw - \tau_{xz} \\ \rho Eu + pu - \kappa \frac{\partial T}{\partial x} - u\tau_{xx} - v\tau_{xy} - w\tau_{xz} \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

$$\vec{G} = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv - \tau_{yx} \\ \rho v^2 + p - \tau_{yy} \\ \rho vw - \tau_{yz} \\ \rho Ew + pv - \kappa \frac{\partial T}{\partial y} - u\tau_{yx} - v\tau_{yy} - w\tau_{yz} \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

$$\vec{H} = \begin{bmatrix} \rho w \\ \rho uw - \tau_{zx} \\ \rho v^2 + p - \tau_{zy} \\ \rho vw - \tau_{zz} \\ \rho Ew + pw - \kappa \frac{\partial T}{\partial z} - u\tau_{zx} - v\tau_{zy} - w\tau_{zz} \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

У једначини (4.30) вектор $\vec{U}$ се назива вектор решења, док вектори $\vec{F}$, $\vec{G}$ и $\vec{H}$ представљају векторе флукаса. Коначно вектор $\vec{J}$ чини изворни услов који се често у интерпретацијама основних једначина струјања и изоставља јер за случајеве изучавања у конвенционалној аеродинамици његова вредност је једнака нули. Ако претпоставимо да је утицај гравитације на понашање струјања занемарљиво и да се посматрана контролна запремина флуида не налази у неком другом физичком пољу које може имати утицај на ток струјања [131], [134].

Усредсредимо се на проширени векторски запис у систему једначина од (4.31) до (4.33). Уочава се да први елементи система $\vec{U}, \vec{F}, \vec{G}, \vec{H}$ и $\vec{J}$, уврштени у (4.30) представљају једначину одржања масе, други елементи $\vec{U}, \vec{F}, \vec{G}, \vec{H}$ и $\vec{J}$, уврштени у (4.30) чине једначину количине кретања у x правцу, трећи елементи $\vec{U}, \vec{F}, \vec{G}, \vec{H}$ и $\vec{J}$, уврштени у (4.30) чине једначину количине кретања у y правцу, четврти представљају једначину количине кретања у z правцу, док последњи елементи по истом принципу представљају једначину промене енергије [3], [131].

Важно је напоменути да је овај сложени систем нестационарних диференцијалних једначина другог реда, у зависности од услова струјања и конкретне примене, у одређеним случајевима подложен поједностављењу. Међутим, због своје специфичности, осим у случајевима једнодимензионог праволинијског струјања идеалног гаса — када се може свести на стационарну диференцијалну једначину првог реда — за овај систем није могуће добити тачно аналитичко решење..

Битно је нагласити да систем NSE важи за било које ламинарно или турбулентно струјање било ког флуида, дефинисано његовом конститутивном једначином која повезује смичуће напоне са другим варијаблама протока.

4.4. Почетни и гранични услови

Надовезујући се на претходна поглавља да је могуће описати струјање флуида системом једначина (4.28). Изнето је, такође, да је систем у потпуности математички затворен. Овако записане уопштене једначине се не могу применити на конкретно струјање без увођења почетних и граничних услова, што је гледано и математички оправдана констатација.

Наиме сваки флуид струји у неком ограниченом простору. Те границе могу бити спољне, унутрашње; апсолутно чврсте или аероеластичне; непропустљиве или пропустљиве; непокретне или покретне. У односу на карактер граница Црнојевић [129] и Чантрак [135] врше класификацију граничних вредности на граничне услове на зиду, улазне и излазне граничне услове, и на унутрашње граничне услове.

4.4.1. Гранични услови на зиду

Зид као површина границе може мировати или се кретати неком брзином $\vec{v}_w$ у односу на инерцијални координатни систем, тако да долази до суперпозиције са брзином струјања флуида. Флуид може струјати преко зида са и без клизања.

Ако је зид чврст и непорозан и ако се флуид креће без клизања по зиду онда можемо рећи да су вектори брзина флуида и зида исти, односно да се тангенцијалне и нормалне компонента вектора брзине поклапају:

$$v_n = \vec{v} \cdot \vec{n} = \vec{v}_w \cdot \vec{n} \quad , \quad v_t = \vec{v} \cdot \vec{t} = \vec{v}_w \cdot \vec{t} \quad (4.36)$$

Случај клизања флуида по покретном зиду за разређене гасове нећемо разматрати, обзиром да се овде ограничавамо за ваздух у доњим деловима атмосфере.

Узевши у обзир да је зид чврст и непорозан што значи да кроз исти нема протока онда можемо рећи да је:

$$d\dot{m} = \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dA \Rightarrow v_n = \vec{v} \cdot \vec{n} = 0 \quad (4.37)$$

За случај струјања вискозног флуида преко непокретног зида када не постоји клизање добијамо основни гранични услов на зиду приказан једначином (4.38).

$$\vec{v} = 0 \Rightarrow v_i(x, y, z, t) = 0 \quad (4.38)$$

При чему је $i=x, y, z$.

Ако истражујемо контролну запремину где предвиђамо струјање са и/или улазом и/или излазом онда је неопходно дефинисати и *почетне услове улаза*, односно *излаза*.

Начелно се задају параметри који имају константну вредност или су вредности параметара у некој функцији у зависности од јединствене величине, обично времена када је реч о нестационарним струјањима. Исти је случај и са излазним граничним условима. Уопштено можемо писати да је:

$$\Pi_i = \Pi(x_i, y_i, z_i, t) \quad (4.39)$$

Где је Π_i ознака универзалног параметра где је $i=(v, p, T, \dots)$ у овом случају и/или улазног и/или излазног.

Термин *унутрашњи гранични услов* односи се на познавање неког струјног параметра у било којој тачки/површи/запремини прорачунског домена. Може се увести измерена вредност параметра приликом симулације физичког струјања са аквизиционим мерењем, или је то најчешће услов симетричности струјања па се на оси или површи струјања користи додатни услов вредности параметра. Пример може бити вредност зауставног притиска или екстремна вредност Π_i .

У случају временски зависног струјања неопходно је дефинисати почетне услове струјања, односно унети $\Pi_i(x, y, z, 0)$. Обично су то услови при стационарном струјању флуида али и вредности када $t \rightarrow \infty$.

Са аспекта термодинамичких процеса струјања почетни и гранични услови се морају дефинисати како би се правилно описао почетак и сам ток струјања. С тим у вези је неопходно дефинисати почетне и граничне вредности температуре [129]:

$$T_w = T(x_w, y_w, z_w, t) \quad (4.40)$$

Овај тип граничних услова се назива *Дирихлеов (Diriclet) услов граничности*. Ако претпоставимо да је зид апсолутно изолован, односно да је изотерман, имамо да је $T_w = \text{const}$.

Следећи гранични услов представља законитост промене топлотног флукса на зиду, односно *фон Нјуманов (von Neuman) услов граничности*, једначина (4.41).

$$q_w = -\kappa \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_w \quad (4.41)$$

За случај адијабатског зида вредност q_w је једнака нули.

4.5. Утицај тензора напона и напонски модели

Полазећи од тога да NSE описују кретање вискозног флуида један од кључних чланова једначина је тензор вискозног напона. Напишимо једначину (4.8) у развијеном облику:

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \mu \sigma_{ij} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \quad (4.42)$$

У једначини напона (4.42) индекси i, j указују на компоненте правца деловања тензора унутар флуида. Тако први индекс означава правац у коме делује компонента напрезања, а други индекс означава нормалу на површину на којој та компонента делује.

Карактеристично је нормално напрезање у смеру x на површину ортогоналној на x -оси (ознаке τ_{11}) и директно је повезано са вискозним ефектима у том смеру, као и тангенцијално (смичуће) напрезање у смеру x на површини ортогоналној на y -осу (ознаке τ_{12}).

Узмемо ли у обзир да је широко распрострањени и овде прихваћени Сатерлендов модел вискозности дефинисан (4.28) у функцији промене температуре, може се извести директно пропорционална зависност промене утицаја напона са променом температуре током струјања. Како је промена температуре током струјања у којима нема додатног неаеродинамичког извора топлоте директно пропорционална са преласком кинетичке енергије струјања у топлоту у оба смера, тако се промена утицаја тензора напона може очекивати са повећањем брзине струјања, такође у оба смера.

4.5.1. Рејнолдсов тензор напона (РТН)

Компонента брзине v_i се може разложити на просечну вредност $\bar{v}_i$ и флукуациону компоненту $\tilde{v}_i$, једначина (4.43).

$$v_i = \bar{v}_i + \tilde{v}_i \quad (4.43)$$

Примењујући ову рекомпензацију брзине у NSE и њиховог усредњавања добија се додатни члан који описује утицај турбулентних флукуација, једначина (4.44).

$$R_{ij} = \overline{\tilde{v}_i \tilde{v}_j} \quad (4.44)$$

Рајнолдсов тензор напона (у даљем тексту РТН), у ознаци R_{ij} , изражава корелације између флукуације брзине у различитим правцима деловања. Физички тумачећи РТН представља ефекте транспорта изазване инерцијалним силама у флуиду који је турбулентан, односно описује како турбулентни вртлози утичу на укупно поље напрезања и на који начин и којим интензитетом се енергија преноси између различитих скала турбуленције.

За изузетан случај да је турбуленција изотропна (једнака у свим правцима) РТН добија облик дефинисан једначином (4.45).

$$R_{ij} = \frac{2}{3} k \delta_{ij} \quad , \quad k = \frac{1}{2} \overline{\tilde{v}_i \tilde{v}_i} \quad (4.45)$$

У једначини (4.45) са k је означена турбулентна кинетичка енергија. Овде треба нагласити да је у реалним условима поготово при утицају препреке, зида, турбуленција показује знаке анизотропности, што значи да различите компоненте R_{ij} могу имати значајно различите вредности.

4.5.2. Утицај РТН на усредњене једначине кретања флуида

Како се решавање NSE директним израчунавањем у разумним временским оквирима може очекивати тек развојем квантних рачунара, примењује се метода усредњавања истих. Метода RANS заснива се на временском усредњавању NSE, на начин да се турбулентне флукуације раздвајају од просечних вредности поља брзине и притиска.

У контексту RANS методологије свака величина струјног поља се раздваја према моделу као у једначини (4.43). Заменом ових израза у NSE и узимањем временског просека добијају се усредњене једначине. При усредњавању NSE и увођењем РТН добија се облик једначина кретања као у једначини (4.46).

$$\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} + \bar{v}_j \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial \bar{p}_i}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \bar{v}_i}{\partial x_j^2} - \frac{\partial R_{ij}}{\partial x_j} \quad (4.46)$$

У једначини (4.46) последњи члан десне стране једначине представља дивергенцију РТН. Дивергенција РТН директно описује ефекте турбулентног преноса количине кретања.

На овај начин смо у могућности да сведемо широк спектар турбулентних напона на усредњену величину и на тај начин избегнемо потребу за великим интезитетом прорачуна који произилази из основног система NSE. Међутим, истовремено се у систем NSE уводе додатне непознате величине. Произашло из потребе употпуњавања додатних непознатих величина, односно 6 нових непознатих компоненти тензора напона (симетричан 9-компонентни тензор, али са 6 непознатих) примењују се различити модели.

4.5.3. Приступ моделовању РТН и затварања RANS

Постоје различити приступи моделовању РТН, овде приказујемо најшире коришћене:

- *Једначинску хипотезу мешања*, познате и као Бусинескове апроксимације (Boussinesq) [136], идејно припада моделу вртложне вискозности (енгл.-Eddy Viscosity Models, у даљем тексту EVM), где се уводи претпоставка да је турбулентни тензор сразмеран градијенту просечне брзине, тако да РТН приказан једначином (4.47).

$$R_{ij} = -2\nu_t S_{ij} + \frac{2}{3} k \delta_{ij} \quad (4.47)$$

- *Рејнолдсови стрес модели*, (енгл. Reynolds Stres Models, у даљем тексту RSM). Ови модели решавају транспортне једначине за сваки елемент R_{ij} појединачно. Овим се добија већа реалнија слика у анизотропним срујањима, међутим изискује веће рачунарске ресурсе.
- *Алгебарски модели* (енгл.-Zero-equation models) користе експлицитне апроксимације за турбулентну вискозност, као што је Baldwin-Lomax модел [137], који овде нећемо детаљније износити.
- *Једначински модели* (One-equation models): Модели који решавају једну додатну транспортну једначину, попут Spalart-Allmaras модела.
- *Две једначине* (Two-equation models): Најчешће коришћени RANS модели који решавају две додатне једначине, обично за кинетичку енергију турбуленције (k) и дисипацију (ϵ) или специфичну дисипацију (ω), као што су $k-\epsilon$ и $k-\omega$ модели.

- *Рејнолдсови напонски модели* (Reynolds Stress Models – RSM): Најсофистициранији RANS модели који решавају шест додатних транспортних једначина за компоненте турбулентног напрезања.
- *Хибридни модели*, који комбинују методе усредњавања и директног симулирања турбулентних структура како бу се постигла оптимална тачност и рачунарска ефикасност, користећи RANS у зонама струјања где са утицајем зида или препреке, док се симулација великих вртлога (енгл.- Large Eddy Simulation, у даљем тексту LES) користи у слободном току. Типичан представник јесте метода одвојене симулације вртлога (енгл.-Detached Eddy Simulation, у даљем тексту DES)
- *Вртложно-гранични модели* се заснивају на моделовању граничних услова и турбуленције у близини зида и граница, где се користе посебне функције за приближавање ефекта вртложности. Ови модели су погодни за моделовање аеродинамичких појава са одвојеним струјањем [131].

Неке од карактеристика основних метода приказане су у наредним табелама, Таб.4.1. Треба нагласити да је примена директне нумеричке симулације (engl.- Direct Numerical Simulation, у даљем тексту DNS) са графичком оценом $\pm$ наглашава изразиту потребу за употребом супер-рачунара.

Табела 4-1: Карактеристике и примена основних метода вртложности.

Метод	Предности	Недостаци	Примена	M<0	0,8<M<1,2	M>1	M>>1	Слободна струја	Близина зида
DNS	Најтачнији приступ без апроксимација.	Екстремно захтеван рачунарски ресурс.	Фундаментална истраживања	+	+	$\pm$	$\pm$	+	$\pm$
LES	Боља тачност од RANS, погодна за велике турбулентне структуре.	Велика рачунарска сложеност, нарочито при већим Re.	Сложена струјања, аероакустика, млазнице, турбулентно сагоревање, метеорологија.	+	+	+	$\pm$	+	$\pm$
RANS	Ниска рачунска сложеност.	Не даје детаљну слику турбулентних структура.	Инжењерске примене, Брза анализа.	+	+	+	+	$\pm$	$\pm$
RANS/LES	Комбинација предности RANS/LES.	Комплексност имплементације и осетљивост на прорачунску мрежу.	Велики број инжењерских примена.	+	+	+	+	+	+
Вртложни гранични	Прецизан за струјања са одвајањем.	Непрактичан за сложене геометрије.	Аеродинамика тела са одвојеним струјањем.	+	+	+	+	-	-

Намеће се закључак да одлука о употреби одређене методе зависи како од физичке проблематике која се треба моделирати, али и од расположивих рачунарских капацитета. У то име у овом делу даћемо упоредну анализу најчешће у литератури помињаних приступа турбулентног моделовања, односно DNS, LES и RANS метода.

Анализирајмо потребе рачунарских показатеља за замишљени аеротунелски модел авиона при вредности $Re=10M$ што је типично за субсонична и трансонична испитивања. Димензија модела: распон крила 1m, Дужина трупа 1,5m, Карактеристична дужина 0,5m и брзина струјања 50m/s. Циљ симулације је упоредити време решавања аеродинамичких величина употребом DNS, LES и RANS методама. Резултати анализе су приказани у Таб.4.2.

На основу приказаних резултата јасно се закључује колико су рачунарски захтевне анализиране методе прорачуна. Употреба супер-рачунара омогућава оправданост коришћења директне методе прорачуна. Зато се и намеће препорука да је оправданост коришћења повезана за фундаментална истраживања у циљу проширивања домена научног сазнања. Употреба LES метода се препоручује за испитивања сложених структуралних струјања.

Такође, намеће се и препорука да се у зависности од расположивих ресурса користи за завршна, потврдна испитивања, непосредно пре потврдних испитивања у аеротунелима. Коначно, RANS метода CFD анализе је широко распрострањена управо због могућности испитивања уз коришћење конвенционалних индустријских рачунарских ресурса.

Табела 4-2: Прорачун трајања прорачуна.

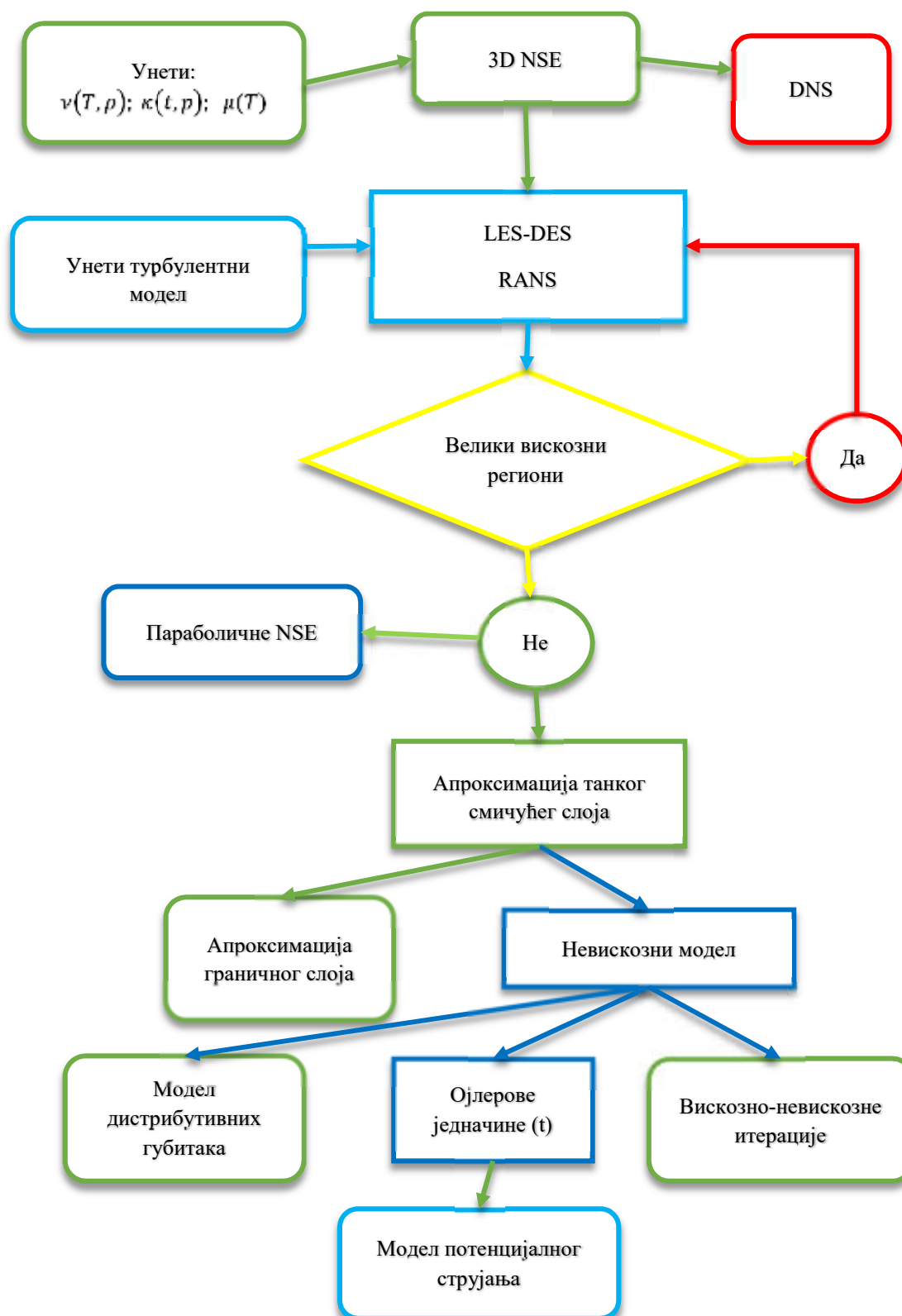
		DNS Δt		LES Δt		RANS Δt	
Бр. ћелија		$1012 \cdot 10^{12}$		$\approx 10^{10}$		$\approx 10^7$	
Тип рачунара		корак	Σ	корак	Σ	корак	Σ
PC – стандардни							
Процесор	16 језгара (3.5GHz)	10s	≈ 30 год.	1	3 сата	0,1	2 мин.
RAM	64GB						
Упаривање	1 CPU/GPU						
Брзина обр.	1x						
Супер рачунар							
Процесор	10^4 језгара (2.5GHz)						
RAM	1TB	10^{-2} s	12 дана	10^{-3}	10s	10^{-4} s	10^{-2} s
Упаривање	кластер						
CPU/GPU							
Брзина обр.	1000x						

На основу до сада изнетог на Сл.4.3 приказан је дијаграм тока решавања NSE једначина.

На основу доступности рачунарских ресурса и категоризације посматраног струјања праћењем логике дијаграма тока може се адекватно извршити одабир оптималне методе испитивања.

4.5.4. Модели турбуленције

Турбуленција је комплексни и хаотични облик флуидног протока који укључује низ скала флуидних кретања, од великих до малих, које су међусобно повезане. Турбуленција, као сложен физички проблем знатно утиче на коначну слику струјања. Временским усредњавањем NSE једначина са идејом да се брзина флуида прати у једначинама и кроз анализу на просечну компоненту и флукутирајућу компоненту, једначина (4.38). Два основна приступа моделовања Рејнолдсовог напонског тензора јесу вртложно-вискозни модели који представљају аналогију са класичном вискозношћу и уводе турбулентну вискозност, једначина (4.34); и Рејнолдсови напонски модели код којих се, уместо увођења турбулентне вискозности, решава комплетан систем транспортних једначина за све компоненте Рејнолдсовог напонског тензора, што како смо видели повећава прецизност уз цену захтевног рачунарског ресурса.



Слика 4-3: Хијерархија различитих нивоа моделовања NSE.

4.5.4.1. Спаларт-Алмарас модел турбуленције

Спаларт-Алмарас (енгл.-Spalart-Allmaras у даљем тексту SA) модел [100], [138], [139], [140] је једноставан и ефикасан једнопараметарски турбулентни модел развијен примарно за аеродинамичке симулације. SA модел користи једну транспортну једначину која описује развој турбулентне кинетичке енергије ($\tilde{\nu}$) у контексту турбулентног протока. Ова једначина је повезана са турбулентном вискозношћу (ν_t), која представља ефекат турбуленције на флуид.

Математички SA модел је адициона диференцијална једначина која описује промену турбулентне вискозности у функцији времена и простора, у општем запису је представљена општом једначином (4.48).

$$\frac{D\tilde{\nu}}{Dt} = P_t + D_t + D_\nu \quad (4.48)$$

Где су: $\tilde{\nu}$ – турбулентна кинетичка енергија (количина енергије коју флуид поседује током свих својих турбулентних струјања); ν_t – турбулентна вискозност (параметар који описује турбулентне ефекте у флуиду); P_t – продукција турбуленције; D_t – дисипација турбуленције; и D_ν – дифузиони члан.

У развијеној форми једначина (4.48) се пише у следећем облику:

$$\frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \tilde{\nu} = \nabla \cdot (\nu_t \nabla \tilde{\nu}) + \frac{C_\nu}{\tilde{\nu}} \cdot (\nabla \vec{v}) \quad (4.49)$$

Где први члан представља зависност промене турбулентне кинетичке енергије у функцији времена у свакој тачки математичког домена прорачуна; други члан једначине је адвентивни члан који описује пренос турбулентне кинетичке енергије који се дешава због померања флуида; трећи члан представља дифузију турбулентне кинетичке енергије унутар флуида, при чему већи турбулентни ефекти имају и већу вредност параметра турбулентне вискозности; последњи члан одређује зависност турбулентне енергије од локалних промена у флуидном протоку, при чему фигурише градијент брзине флуида коефицијент C_ν као калибрациони модел који SA модел прилагођава специфичностима струјања, а представља емпиријску вредност добијену на основу компаративних експерименталних и нумеричких испитивања. Карактеристичне вредности овог коефицијента су приказане у Таб.4.3 [139].

Табела 4-3:Препоручене вредности коефицијента C_ν за SA модел турбуленције[139]

Тип примене	C_ν	Re	Услови примене
Стандардна примена (стабилни ниски Re бројеви)	0,1	$10^3 - 10^5$	(мала брзина, ниски турбулентни ефекти)
Струјање око авиона (потискивање, високи Re)	0,09	$10^5 - 10^7$	(висока брзина, турбулентни ефекти важни)
Струјање кроз индустријске цевоводе (високи Re бројеви)	0,09	$10^5 - 10^7$	(високотурбулентни токови, цевоводи)
Струјање око тела са малим заокретима (порозни, високи Re бројеви)	0,085	$10^5 - 10^6$	(порозна тела, умерени турбулентни ефекти)
Струјање у комплексним каналима	0,08	$10^3 - 10^6$	(сложена струјања, разни региони протока)
Високофреквентни проток (магнетно-реолошки флуиди)	0,12	$10^3 - 10^6$	(високофреквентни, сложени услови струјања)

Поред стандардне форме SA модела присутна је и Модификована SA метода [140] која проширује десну страну стандардне једначине у циљу прецизнијег моделирања турбуленције у сложеним условима струјања. Модификована форма SA модела је приказана једначином (4.50).

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} + \tilde{v} \cdot \nabla \tilde{v} = \nabla \cdot (\nu_t \nabla \tilde{v}) + (C_{b1} \cdot (\nabla \tilde{v}))^2 - C_{w1} \cdot \sigma_t \cdot \tilde{v} \cdot \nabla \tilde{v} \quad (4.50)$$

Једначина (4.50) је нелинеарна парцијална диференцијална једначина првог реда у фнкцији времена, при чему су:

С_{b1}-коэффициент градијента брзине, ближе дефинише допринос турбулентној кинетичкој енергији која се развија са градијентом брзине флуида, на овај начин је могуће извршити корекцију интензитета турбуленције у подручјима посматраног струјања где се очекују веће промене у брзини струјања;

С_{w1}-коэффициент разлагања турбуленције, наине у зонама струјања где се флуид налази у стању високе турбуленције овим чланом се моделује дисипација турбулентне кинетичке енергије;

σ_t- коэффициент дифузије турбуленције регулише величину дифузије турбулентне кинетичке енергије, и игра важну улогу у моделовању распрострања турбуленције кроз ток струјања.

Модификовањем SA методе моделовања турбуленције извршене су битне корекције и приближавања реалном стању тока струјања, посебно у случајевима великих градијената брзине, поготово у случајевима струјања са препрекама и/или каналима, флексибилност у подешавању параметара се експериментално одређују, односно могуће је кроз низ итерација приближити код реалнијем понашању у мери очекивања при оваквом начину решавања RANS.

Препоручене вредности ових корекционих фактора у зависности од услова примене су приказане у Таб.4.4. [141], [142].

Табела 4-4:Препоручене вредности коефицијената C_{b1}, C_{w1}, σ_t за SA модел турбуленције [141], [142].

Тип примене	C _{b1}	C _{w1}	σ _t	Re	Услови примене
Стандардна примена (стабилни ниски Re бројеви)	0,135	0,55	0,7	10 ³ –10 ⁵	(мала брзина, ниски турбулентни ефекти)
Струјање око авиона (потискавање, високи Re)	0,135	0,55	0,7	10 ⁵ –10 ⁷	(висока брзина, турбулентни ефекти важни)
Струјање кроз индустријске цевоводе (високи Re бројеви)	0,135	0,5	0,7	10 ⁵ –10 ⁷	(високотурбулентни токови, цевоводи)
Струјање око тела са малим заокретима (порозни, високи Re бројеви)	0,1	0,55	0,6	10 ⁵ –10 ⁶	(порозна тела, умерени турбулентни ефекти)
Срујање у комплексним каналима	0,125	0,55	0,65	10 ³ –10 ⁶	(сложена струјања, разни региони протока)
Високофреквентни проток (магнетно-реолошки флуиди)	0,135	0,6	0,7	10 ³ –10 ⁶	(високофреквентни, сложени услови струјања)

SA модел турбуленције представља поуздан избор за многе инжењерске апликације где је потребно балансирати између тачности и ефикасности симулација. Његова једноставна структура омогућава брзе прорачуне, али са одређеним ограничењима у симулацији комплексних турбулентних феномена. Одликује се ниском рачунарском зависношћу, стабилност и брзу конвергенцију у инжењерским апликацијама, као и прихватљиво понашање у симулацијама граничних слојева. Ограниченост се огледа у просечној могућности предикције комплексних турбулентних структура, недовољној могућности симулације у струјањима јаких сепарационих токова и јаких струјних градијената [98].

4.5.4.2. k - ϵ модел турбуленције

Кренимо од претпоставке да постоји аналогија између дејства вискозних напона и Рејнолдсових напона на средњи проток. Оба напона се појављују на десној страни једначине количине кретања, а у Њутновом закону вискозности узима се да су вискозни напони пропорционални брзини деформације флуидних елемената [128]. Овом претпоставком нам се отвара могућност да турбулентне напоне представимо у виду две једначине.

Иако модел произилази из низа претходника у раду Лундера и Шарма [143] је заокружена идеја k - ϵ модела турбуленције. Полазећи од Бусинескове (Boussinesq) хипотезе, која претпоставља да се турбулентни напони (Reynolds-ови напони) могу повезати са средњим градијентом брзине на сличан начин као што је то случај у Њутновој хипотези за молекулску вискозност, полазећи од (4.40) долазимо до једначине (4.51).

$$-\overline{v_i v_j} = \nu_t \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} k \delta_{ij} \quad (4.51)$$

Где су:

- k -турбулентна кинетичка енергија
- δ_{ij} – Кронеков делта симбол (за $i=j$ има вредност 1, у супротном је једнак 0).

Ова претпоставка омогућава да се затворе RANS једначине коришћењем једначина за турбулентну кинетичку енергију k и стопу дисипације ϵ , чиме се избегава решавање сложених корелационих термина вишег реда.

Додатне претпоставке:

- *Турбуленција је изотропна*, односно да је $\mathbf{v}_t$ скаларна величина, прецизније речено да има приближно исте карактеристике у свим правцима;
- *Линеарност моделирања турбулентних напрезања*, другим речима Бусинесковом апроксимацијом подразумева се да је однос Рејнолдсових напона и градијента средње брзине линеарна, што представља велику апроксимацију нарочито у случајевима снажне анизотропије турбуленције;
- *Локална равнотежа генерисања и дисипације турбулентне енергије*. Претпоставља се да се у многим струјањима која се срећу у инжењерској примени стопа стварања турбулентне енергије приближно једнака стопи њене дисипације (ϵ). Другим речима, енергија која се преноси са великих вртложних структура (енергетска инерција) на крају се разлаже због вискозних ефеката унутар флуида. Ова претпоставка се узима са резервом, јер не важи у регионима са наглим променама градијента брзине (нпр. токови са јаким закривљењем или у близини одвајања струје).

Полазећи од Бусинескове хипотезе исказане једначином (4.46), понављамо да се турбулентни напони могу израдити у терминима средњег градијента брзине, аналогно Њутновом закону вискозности. Овим се проблем турбулентних напрезања своди на одређивање турбулентне кинематичке вискозности, за коју је потребно дефинисати прикладан модел [144].

Турбулентна вискозност се изражава у функцији кинетичке енергије k и стопе дисипације ϵ , чији је однос дефинисан једначином (4.52).

$$\nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\epsilon} \quad (4.52)$$

У једначини се појављује константа модела, у ознаци C_μ , чија је вредност одређена емпиријски и приказана је са осталим вредностима у Таб.4.5. До овог израза се долази димензионом анализом која је детаљно приказана од стране Верстега и Малаласекере [130], а овде укратко можемо рећи да се полази од димензионе анализе кинетичке енергије, енергетске дисипације која је у зависности од вискозности, од карактеристичне брзине, дужине и емпиријске калибрације за реалне гасове.

Последица ове претпоставке, да бисмо у потпуности описали v_t , морамо увести транспортне једначине које дефинишу k и ε .

Полазећи од тога да се турбулентна кинетичка енергија добија из односа генерисања турбулентне енергије и њене дисипације, транспортна једначина се пише у развијеном облику као у једначини (4.53).

$$\frac{\partial k}{\partial t} + v_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = -\overline{v_i v_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \varepsilon + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] \quad (4.53)$$

У једначини се појављује емпиријски коефицијент σ_k , док први елемент десне стране једначине представља генерисану турбулентну енергију.

На овај начин је моделован настанак и транспорт турбулентне енергије у струји флуида. Међутим да би слика била употпуњена неопходно је описати и губитак енергије ε . Полазећи од претпоставке да је једини губитак енергије настао услед деловања вискозних ефеката, онда се транспорт стопе дисипације дефинише једначином (4.54) у општем облику.

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + v_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = -\overline{v_i v_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] \quad (4.54)$$

Овом једначином се стопа дисипације мења у простору и времену, повезујући је са генерисањем турбулентне енергије. У истој једначини се појављују емпиријски калибрациони коефицијенти $C_{\varepsilon 1}$, $C_{\varepsilon 2}$ и σ_ε , чије су вредности приказане у Таб.4.5.

Табела 4-5: Вредности корекционих коефицијената k-ε модела трбуленције [130].

Коефицијент	Вредност
C_μ	0,09
$C_{\varepsilon 1}$	1,44
$C_{\varepsilon 2}$	1,92
σ_k	1,00
σ_ε	1,30

Сумарно можемо да закључимо да се комплетан k-ε модел турбуленције састоји од:

- Бусинескове апроксимације за турбулентна напрезања;
- Дефиниције турбулентне вискозности ν_t ;
- Једначине за транспорт кинетичке енергије (4.53);
- Једначине за транспорт стопе дисипације (4.54) и
- Емпиријских коефицијената, Таб.4.5.

Овакве претпоставке доводе до суштинских ограничења овог начина моделовања турбулентних утицаја:

- Недовољна прецизност моделовања струјања у непосредној близини зидова. Наиме, због претпоставке изотропне турбуленције, модел не приказује реалну слику у близини зидова што захтева употребу додатних функција (енгл.-Wall functions) или употребу другог модела (на пример $k-\omega$);
- Недовољна прецизност за јаке градијенте притиска. У струјањима са снажном променом притиска реална турбулентност се очекује да буде високо анизотропна, са чим се овај модел неће довољно прецизно суочити;
- Закривљеност струјних линија. Бусинескова хипотеза може довести до лоших предвиђања у случају јако закривљених струјних линија (нпр. код циркулације и вртлога).

4.5.4.3. Модификације $k-\epsilon$ модел турбуленције

Недостатци основног $k-\epsilon$ модел турбуленције временом су модификовани. Тако су Јакхот и Орзак [143] полазећи од основне идеје да се уведе ренормализациона група (у даљем тексту РНГ) за извођење модификованих коефицијената модела, као и увођење допунских чланова у циљу побољшања модела. Добијена метода назива се РНГ $k-\epsilon$ модел турбуленције.

Модификација једначине (4.54) се састоји увођењем фактора RNG, дефинисаног једначином (4.50).

$$RNG = \frac{k}{\nu \epsilon} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_{ij}}{\partial x_i} \quad (4.55)$$

Тако да се добија једначина РНГ $k-\epsilon$ модел турбуленције, приказана једначином (4.56).

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + v_j \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} = -\overline{v_i v_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} C_{\epsilon 1} \frac{\epsilon}{k} - C_{\epsilon 2} \frac{\epsilon^2}{k} \left(1 - \frac{C_\eta RNG}{1 + \beta RNG} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} \right] \quad (4.56)$$

При томе је извршена и промена вредности корекционих коефицијената према Таб.4-6.

Табела 4-6: Вредности корекционих коефицијената РНГ $k-\epsilon$ модела турбуленције [145]

Коефицијент	Вредност
C_μ	0,09
$C_{\epsilon 1}$	1,42
$C_{\epsilon 2}$	1,68
σ_k	0,719
σ_ϵ	0,719

Овим моделом се успело побољшати предвиђање у закривљеним струјањима, побољшање резултата за турбулентне струје већих деформација и делимично успешно моделовање раздвајања струјања. Није се успело у потпуности и прецизно моделовати струјање у близини препрека и зидова.

Физички остварив $k-\epsilon$ модел турбуленције је развијен 1995. године, Шин и сарадници [146] уводе модификацију да коефицијент C_μ није константна вредност већ је у функцији коефицијената A_0 и A_s односно од Рејнолдсовог броја и параметара струјања, према једначини (4.52).

$$C_\mu = \frac{1}{A_0 + A_s k / \varepsilon} \quad (4.57)$$

Овим се унапређује предикција раздвајања струјања, тачније описују танки струјни слојеви. Недостатак методе се састоји у недовољно прецизном одређивању корекционих фактора.

На крају развијен је *k-ε модел турбуленције са двослојним приступом*. Идеја је да се у развијеном току користи основни k-ε модел турбуленције али да се у близини зида прелази на једначине засноване на турбулентној вискозности.

У непосредној близини зида и препреке се користи модел дисипације помоћу:

$$\varepsilon = \frac{k^{3/2}}{l} \quad (4.58)$$

У једначини (4.58) ознака l представља дужину мешања, која се добија емпиријски или се рачуна као:

$$l = \kappa_r \cdot y \quad (4.59)$$

Где је $\kappa_r=0,41$ Карманова константа, а y је удаљеност од зида.

На овај начин је могуће користити грубљу мрежу у граничним слојевима што утиче на потребу рачунарских ресурса и побољшава предвиђање струјања у вискозним граничним слојевима у зони зида.

Недостатак и даље представља компликована емпиријска корекција за различите врсте струјања.

4.5.4.4. *k-ω модел турбуленције*

Прва форма k-ω модела турбуленције је уведена још 1942. године од стране Колмогорова [145], [146] у контексту изотропне турбуленције. Међутим, примена у CFD анализи постала је значајна тек након рада Wilcox-а [142],[147],[148] (1988. године), који је предложио једначине транспорта за турбулентну кинетичку енергију k и специфичну дисипацију ω .

Идеја се заснива на коришћењу специфичне стопе дисипације турбулентне енергије ω уместо дисипације ε , као што је то описано у претходном моделу. При томе турбулентна кинетичка енергија дефинише ниво турбуленције, а специфична стопа дисипације ближе одређује карактеристичну величину дужине турбуленције.

Овај модел полази од претпоставки:

- Да постоји локална равнотежа генерисања и дисипације турбулентне енергије, што подразумева да је у стационарним турбулентним струјањима, у већем делу домена, количина енергије која се генерише због промене (градијента) брзине уравнотежена са количином енергије која се дисипира због утицаја вискозности, што се пише као:

$$P_k \approx \varepsilon \quad (4.60)$$

$$\nu_t S_{ij} S_{ij} = \beta^* k \omega$$

Где је P_k генерисана турбулентна кинетичка енергија у зависности од смичуће-деформацијског тензора брзине S_{ij} . Једначина (4.61), физички представља локалну стопу деформације флуида усљед смичуће-напонских ефеката. Десни део једначине представља дисипацију у функцији специфичне дисипације.

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (4.61)$$

Из (4.61) се види да представља симетричан тензор другог реда па је у случају великог градијента брзине, на пример у близини зида или јаких вртлога, овај градијент има високе вредности што доводи до јаке продукције турбулентне енергије P_k . Ова претпоставка се не може у потпуности прихватити у деловима струјања са наглим градијентима брзине струјања као што су зоне раздвајања струјања.

- Турбулентно струјање је изентропно, што доводи до последичне претпоставке да турбулентни вртлози имају исте статистичке особине у свим координантним правцима. Иначе, ова претпоставка је уобичајена у већини RANS модела и може се прихватити у хомогеним регионима струјања (нема доминантног правца смичућих напрезања) и од зида и препрека удаљене слојеве струјања. Недостатак ове претпоставке што недовољно тачно интерпретира анизотропна струјања.
- Турбуленција је хомогена у довољно великим просторним размерама. Претпоставља се да су турбулентна својства просторно инваријантна у посматраном математичком домену. Статистички гледано, просечне вредности турбулентних параметара се не мењају у зависности од положаја унутар самог турбулентног региона. Опет се наглашава да и ова претпоставка важи у изолованим турбулентним токовима, као што су слободни млазеви, изоловани вртложни слојеви и поједини случајеви турбулентног мешања. Ограничења се опет свде на реалну нехомогеност турбуленције у близини препрека и зидова, као и у компресибилним струјањима и јако израженим турбулентним зонама.

Основни k - ω модел турбуленције полази од горе наведених претпоставки и дефиниције турбулентне вискозности, једначина (4.62).

$$\nu_t = \frac{k}{\omega} \quad (4.62)$$

Из једначине (4.62) се намеће да велике вредности k и/или мале вредности ω доводе до јаке турбуленције вискозности, што се показало као кључно у моделовању граничних слојева.

Овај модел се заснива на две нестационарне диференцијалне једначине другог реда за транспорт турбулентне кинетичке енергије (4.63) и специфичне стопе дисипације (4.63).

$$\frac{\partial k}{\partial t} + v_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = P_k - \beta^* k \omega + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\nu + \nu_t \sigma_k) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] \quad (4.63)$$

Где је део једначине објашњен релацијама у (4.61), док последњи десни члан чини дифузију. Корекциони емпиријски добијени коефицијенти једначине су приказани табеларно, Таб.4-7.

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + v_j \frac{\partial \omega}{\partial x_j} = \frac{\gamma}{\nu_t} P_k - \beta \omega^2 + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\nu + \nu_t \sigma_\omega) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] \quad (4.64)$$

Где су:

- $\frac{\gamma}{\nu_t} P_k$ - изворни члан који се заснива на продукцији турбулентне кинетичке енергије;

- $(-\beta\omega^2)$ – члан једначине који моделује дисипацију у функцији специфичне стопе дисипације;
- $\frac{\partial k}{\partial t}, \frac{\partial \omega}{\partial t}$ – нестационарни делови једначина којима се моделују привремене/повремене промене у струјању флуида;
- P_k – генерисана турбулентна енергија у функцији градијената брзине, видети (4.56);
- $\beta^*k\omega, \beta\omega^2$ – дисипација турбулентне енергије;
- $\frac{\partial}{\partial x_j} \left[(v + v_t \sigma_k) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right]$ – дифузија турбулентне кинетичке енергије;
- $\frac{\partial}{\partial x_j} \left[(v + v_t \sigma_\omega) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right]$ – дифузија специфичне стопе дисипације.

Ако посматрамо математички облик овог система нелинераних диференцијалних једначина другог реда уочавамо конвективне, дифузионе и изворне чланове. Нелинеарност потиче од генеришућег члана P_k , дисипативни делови одређују брзину расипања турбулентне енергије, а баланс између продукционог и дисипације дефинише поље турбулентности.

У близини зида или вртлога вредност ω тежи великим вредностима, што изазива мале вредности v_t , што физички резултира пригушењу турбуленције, што је и предност ове методе моделовања RANS. Вредности корекционих параметара су приказане у Таб.4.7 [142].

Табела 4-7: Вредности корекционих коефицијената РНГ k - ω модела трбуленције [144]

Коефицијент	Вредност
β^*	0,09
β	0.075
γ	1,68
σ_k	2,00
σ_ω	2,00

k - ω модел турбуленције је заснован на неколико важних претпоставки које омогућавају његову примену у широком спектру инжењерских проблема. Међутим, неке од тих претпоставки, попут изотропне турбуленције и хомогености, нису увек задовољене у реалним аеродинамичким и хидродинамичким проблемима. Зато су уследили побољшани модели, попут SST k - ω модела турбуленције, које ублажавају ограничења основног модела.

4.5.4.5. k - ω SST модел турбуленције

Основни k - ω модела турбуленције, показало се, има прекомерну осетљивост на вредност специфичне турбулентне дисипације у делу слободног струјања, односно далеко од утицаја зида. Ово ограничење проистиче од природе функције специфичне стопе дисипације као односа турбулентне дисипације и кинетичке енергије, једначина (4.65).

$$\omega = \frac{\varepsilon}{\beta^* k} \quad (4.65)$$

Вредност ω има доминантну вредност у систему једначина, ако узмемо у обзир вредности корекционог фактора, Таб.4-7, види се да са променом односа турбулентне дисипације и кинетичке енергије резултује јаким прираштајем сецифичне турбулентне дисипације. Другим речима, модел генерише прекомерну турбулентност у зонама где је ток ламинаран или слабо турбулентан, где би напротив турбулентност требала да буде занемарљива.

Са друге стране, имамо супротно понашање k - ε модела турбуленције где је ограничење испољено у непосредној близини зида, јер је по природи робуснији и мање осетљив на граничне вредности.

Идеја превазилажења овог проблема се сама намеће. Наиме, искористити предности и анулирати недостатке претходно изнетог модела турбуленције. Ово се постиже употребом функције мешања напона (енгл.- Shear Stress Transport) F_l која омогућава да модел природно прелази између две формулације у зависности од положаја у току. Методу су развили Ментер и сарадници (1993/94.) [95] и назвали је k - ω SST модел турбуленције. Овај модел је заснован на следећем принципу:

- k - ω модел у зони близу зида - добра резолуција граничног слоја и
- k - ε модел у слободном струјању – боље предвиђање удаљених зона.

Математички модел k - ω SST се састоји од једначине за транспорт турбулентне кинетичке енергије k , једначина (4.57), и модификоване специфичне стопе дисипације ω у SST моделу, једначина (4.66).

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + v_j \frac{\partial \omega}{\partial x_j} = \frac{\gamma}{v_t} P_k - \beta \omega^2 + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(v + v_t \sigma_\omega) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] \quad (4.66)$$

Где су:

- P_k - изворни члан који се заснива на продукцији турбулентне кинетичке енергије;
- $\gamma = \frac{\beta}{\beta^*}$ - коефицијент који контролише производњу ω ;
- β^*, β - коефицијенти дисипације турбулентне енергије;
- σ_ω - коефицијент који контролише дифузију ω .

У SST моделу се користе два различита коефицијента за дифузију ω , у зависности од зоне тока, тако се $\sigma_{\omega 1}$ користи у зони струјања близу зида а $\sigma_{\omega 2}$ за реоне слободног струјања. Коначно вредност коефицијента добија се мешањем ових вредности, једначина (4.61) [92], [94], [95], [96].

$$\sigma_\omega = F_1 \sigma_{\omega 1} + (1 - F_1) \sigma_{\omega 2} \quad (4.67)$$

Вредности емпиријски добијених корективних фактора је приказан табеларно, Таб.4-8 [92].

Табела 4-8: Вредности корекционих коефицијената SST k - ω модела турбуленције [92], [95]

Коефицијент	Вредност за k - ω	Вредност за k - ε	Комбинована вредност у SST
β_1	0,5	-	$\sigma_\omega = F_1 \cdot 0,5 + (1 - F_1) \cdot 0,856$
β_2	-	0,856	
$\sigma_{\omega 1}$	0,075	-	$\beta = F_1 \beta_1 + (1 - F_1) \beta_2$
$\sigma_{\omega 2}$	-	0,0828	

Функција мешања F_l у овом моделу дефинисана је тако да омогући глатки прелаз између k - ω у близини зида и k - ε модела у реону слободне струје. Функција мешања математички је представљена једначином (4.68).

$$F_1 = \tanh(\Phi_1) \quad (4.68)$$

При чему је:

$$\Phi_1 = \min \left[\max \left(\frac{\sqrt{k}}{\beta^* \omega y}, \frac{500\nu}{y^2 \omega} \right), \frac{4\sigma_{\omega 2} k}{CD_{k\omega} y^2} \right] \quad (4.69)$$

Параметар $CD_{k\omega}$ је дефинисан изразом (4.65).

$$CD_{k\omega} = \max \left(2\sigma_{\omega 2} \frac{1}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j}, 10^{-20} \right) \quad (4.70)$$

Нормална удаљеност од најближе чврсте површине је означен са y док су остали коефицијенти раније дефинисани.

У близини зида или препреке вредност функције мешања тежи јединици, $F_1 \rightarrow 1$, док је у слободном струјању тежи нули, $F_1 \rightarrow 0$. На тај начин се обезбеђује гладак прелаз са једне на другу функцију, без прекида, а све у функцији удаљености од координата зида.

4.5.4.6. Нулти-редни модели (Zero-Equation Models)

Поред широко распрострањених модела турбуленције који су представљени у овом поглављу постоје и тзв. нулти-редни модели турбуленције који не користе додатне диференцијалне једначине за турбуленцију, већ одређују турбулентну вискозност на основу локалних параметара протока. Идеја је проистекла из нужде да се превазиђе утицај рачунарског ресурса у времену када је информатичка ера била у повоју.

Тако су Болдвин и Ломакс (енг.- Baldwin-Lomax) пошавши од идеје да емпиријски модели не користе додатне функције за опис турбулентне вискозности унутар граничног слоја и претпоставке да се турбуленција генерише само унутар граничног слоја развили модел који смањује захтеване рачунарске ресурсе [151]. Ограничења овог модела у смислу непоузданог предвиђања одвојених токова и јак ослонац на чисто емпиријским вредностима. Са друге стране и рапидан развој рачунарске технике довело је последице да се овај и њему слични методи веома ретко користе.

4.5.4.7. Осврт на турбулентне моделе

У овом одељку је представљен основни свеобухватни систем једначина који описује струјања флуида, базирајући се на случајеве које срећемо у аеродинамици. Такође, приказани су основни принципи решавања ових једначина приказаних алгоритамским дијаграмом, Сл.4.4.

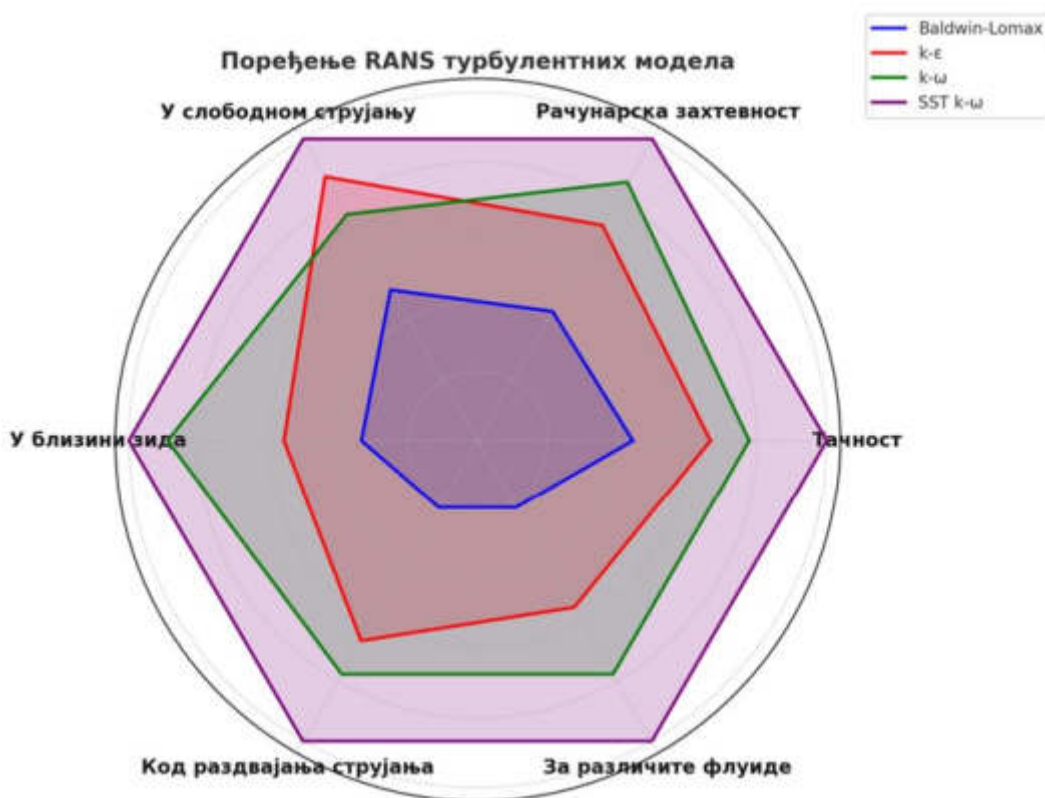
Изнете су предности и мане решавања система методама DNS, LES-DES и RANS. До времена када ће квантни рачунари бити широко доступни у овом и сличним истраживањима опредељен је пут моделовања применом временски усредњених NSE једначина са применом Рејнолдсовог напонског модела, односно решавање према RANS.

То је разлог због чега су и посебно обрађени најпопуларније методе моделовања турбуленције. Такође су изнете предности и недостаци истих. Овде су сажето приказани табеларно, Таб.4-9, у циљу прегледности.

Табела 4-9: Упоредни преглед RANS модела.

Модел	Једначине	Предности	Недостаци	Примена
Baldwin-Lomax	Нулта-редни	Брз, погодан за аеродинамику	Не предвиђа одвајање тока	Гранични слој
Spalart-Allmaras	Једначински	Добар за аеропродиле	Лош у комплексним токовима	Авионска индустрија
k-ε	Двоједначински	Добар за слободни ток	Лош у зони граничне површи	Примена у индустрији
k-ω	Двоједначински	Добар за гранични слој	Осетљив на услове околине	Аеродинамика
SST k-ω	Двоједначински	Тачан у зони зида, стабилан	Захтева више ресурса	Ваздухопловство
RSM	Вишедимензионални	Најпрецизнији за турбуленцију	Веома рачунарски захтеван	Завојни токови, компресори

У циљу лакшег одабира на Сл.4-4 су радарским дијаграмом упоређени RANS турбулентни модели.



Слика 4-4: Радарски дијаграм поређења RANS турбулентних модела.

Јасно се види на Сл.4.4 да SST k-ω модел турбуленције има најширу примену моделирања и тачност израчунавања. Цена примене овог модела је нешто већа захтеваност рачунарских ресурса. На основу овог дијаграма и области примена приказаних у Таб.4-9 недвосмислено је одлучено да се у оквиру ових истраживања за потребе моделовања турбулентног струјања користи SST k-ω модел.

5. Нумерички прорачун струјања

Одредити и математички описати модел који се примењује за конкретан случај струјања је почетни корак у циљу нумеричког решавања проблема механике флуида. Овде се полази од става да није неопходно дефинисати опште прихваћене основне појмове механике флуида. Изнета су основна начела кретања флуида и представљен математички модел струјања ваздуха, као радног флуида [129], [130].

5.1. Временска и просторна дискретизација

Као што је подвучено, CFD захтева решавање система парцијалних диференцијалних једначина, што захтева дискретизацију у времену и простору. Ове технике омогућавају нумеричко решавање непрекидних једначина користећи коначан број тачака у мрежи.

5.1.1. Временска дискретизација

Временска дискретизација у решавању RANS једначина представља процес апроксимације временских дериватива у дискретним временским корацима. Овај процес је кључан у случају нестационарних (unsteady) симулација, док се у стационарним (steady) случајевима временска компонента често елиминише (постављањем временских деривата на нулу).

Општи облик RANS једначина у несигурном облику укључује временску деривацију облика:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{F}_c - \vec{F}_v) = S_p \quad (5.1)$$

Где је Φ вектор очуваних величина (густина, импулс, енергија, турбулентне величине), $\vec{F}_c$ је конвентивни флуks, $\vec{F}_v$ вискозни флуks и S_p је изворни члан.

Неминовно је да временска деривација $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$ мора бити дискретизована ради примене нумеричких метода. Разликујемо експлицитне и имплицитне методе временске дискретизације.

5.1.1.1. Експлицитне методе временске дискретизације

Експлицитне методе израчунавају ново решење у неком тренутку t^{n+1} искључиво на основу претходно израчунатих/задатих вредности у тренутку t^n .

Најједноставнија експлицитна временска апроксимација је напредна Ојлерова експлицитна метода [152], која се дефинише изразом у једначини (5.2).

$$\frac{\Phi^{n+1} - \Phi^n}{\Delta t} = -\nabla \cdot (\vec{F}_c - \vec{F}_v) + S_p \quad (5.2)$$

Ојлерова метода се одликује лаком применом нарочито за експлицитне RANS моделе док је са друге стране ограничена стабилношћу.

Експлицитне методе су рачунски једноставније, али често захтевају мали временски корак због ограничења стабилности, попут Курантовог критеријума. Напредне експлицитне методе покушавају да ублаже ова ограничења уз очување нумеричке тачности и стабилности. У напредније експлицитне методе спадају метода Рунге-Кута (енгл.- Runge-Kutta) и Адамс-Башфорта (енгл.- Adams-Bashforth) [152].

Методе Рунге-Кута представљају проширење класичних експлицитних метода коришћењем више интермедијарних корака за постизање веће тачности и стабилности. Често коришћене варијанте у CFD-у укључују:

- Класични четворостепени Рунге-Кута метод (у даљем тексту RK4):

$$\begin{aligned}
 k_1 &= f(y_n, t_n) \\
 k_2 &= f\left(y_n + \frac{\Delta t}{2} k_1, t_n + \frac{\Delta t}{2}\right) \\
 k_3 &= f\left(y_n + \frac{\Delta t}{2} k_2, t_n + \frac{\Delta t}{2}\right) \\
 k_4 &= f(y_n + \Delta t k_3, t_n + \Delta t) \\
 y_{n+1} &= y_n + \frac{\Delta t}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)
 \end{aligned} \tag{5.3}$$

Овај метод има добру тачност (четвртог реда), али је релативно захтеван јер изискује четири евалуације функције у сваком временском кораку.

- Метода смањења укупне варијације Рунге-Кута TVD (енгл.-Total Variation Diminishing).

Појам смањења укупне варијације значи да нумеричка метода не ствара нове осцилације у решењу, математички има запис у једначини (5.4) [152].

$$TV(y^n) = \sum_i |y_{i+1}^n - y_i^n| \tag{5.4}$$

Укупна варијација решења $TV(y)$ не расте, што значи да спречава нежељене осцилације које се могу јавити приликом нумеричке дисперзије.

Ове методе су посебно корисне у CFD-у јер спречавају појаву нумеричких осцилација, нарочито у хиперболичким проблемима (као што су аеродинамички ударни таласи).

Адамс-Башфортова (енгл.- Adams-Bashforth) метода користи више претходних временских корака за предвиђање следећих стања, што умногоме повећава тачност без драстичног повећања потребе за рачунарским ресурсима. Ова метода је математички дефинисана изразом у једначини (5.5).

$$y_{n+1} = y_n + \Delta t \sum_{i=0}^m b_i f(t_{n-i}, y_{n-i}) \tag{5.5}$$

При чему су b_i коефицијенти у зависности од реда методе.

Експлицитно-имплицитне хибридне методе (енгл.-Implicit-Explicit Methods, у даљем тексту IMEX) или модификоване методе које су замишљене да апроксимирају метод предиктор-коректор. Заправо оне комбинују експлицитне и имплицитне кораке како би побољшале стабилност и тачност. Како би се превазишла ограничења експлицитних метода, често се користе IMEX шеме где се неки делови једначина решавају експлицитно (адвекција), док се други решавају имплицитно (дифузија). Ове методе омогућавају веће временске кораке без нарушавања стабилности.

5.1.1.2. Имплицитне методе временске дискретизације

Имплицитне методе користе вредности непознатих величина у тренутку t^{n+1} да би решиле систем једначина:

$$\frac{\Phi^{n+1} - \Phi^n}{\Delta t} = -\nabla(\vec{F}_c - \vec{F}_v) + S(\Phi^{n+1}) \quad (5.6)$$

Ова једначина се решава итеративно, обично помоћу Њутнових метода. Овде су изнете неке од широко примењиваних имплицитних метода:

- Ојлерова метода корак у назад [153] која је дефинисана једначином (5.7).

$$\frac{\Phi^{n+1} - \Phi^n}{\Delta t} = -\nabla(\vec{F}_c - \vec{F}_v) + S(\Phi^{n+1}) \quad (5.7)$$

- Крак-Николсонова метода је дефинисана изразом у једначини (5.8).

$$\frac{\Phi^{n+1} - \Phi^n}{\Delta t} = -\frac{1}{2} \left[\nabla(\vec{F}_c - \vec{F}_v)^{n+1} + \nabla(\vec{F}_c - \vec{F}_v)^n \right] + S \quad (5.8)$$

Ова метода је специфична јер комбинује особине експлицитних и имплицитних метода. Карактерише је већа прецизност али на рачун стабилности решења.

5.1.1.3. Хибридне методе временске дискретизације

Хибридне методе временске дискретизације представљају комбинацију експлицитних и имплицитних техника, са циљем да се постигне оптималан баланс између рачунске ефикасности, стабилности и тачности у CFD симулацијама. Ове методе су посебно корисне у RANS, LES и DNS моделима турбуленције, где је важно очувати нумеричку стабилност без губитка физичке верности решења. Хибридне методе комбинују следеће приступе [154]:

- Експлицитна дискретизација у регионима где је решење глатко и где временски корак није превише рестриктиван.
- Имплицитна дискретизација у регионима са јаким градијентима (нпр. зидни слојеви, ударни таласи, раздвајања струјања), како би се ублажиле рестрикције временског корака услед стабилности.
- Адаптивни приступ, где се локално одлучује која метода је погоднија у зависности од особина тока детаљно описана од стране Содерлинда (Söderlind Gustaf) [155].

Основна идеја је да се имплицитна метода примени тамо где је потребна већа стабилност (близу зида, код великих градијената), а експлицитна тамо где је пожељна већа тачност и мањи рачунски захтеви (у слободном току).

Неки од широко применљивих хибридних метода су:

- Хибридни Рунге-Кута Ојлеров кораком уназад метод (енгл.- Runge-Kutta backward Euler, у даљем тексту RK-BE) [156] који комбинује експлицитни корак у већини домена са имплицитним кораком у зонама јаког градијента. Формулише се изразом (5.9).

$$y^{n+1} = \theta y^{imp} + (1 - \theta) y^{exp} \quad (5.9)$$

Имплементација имплицитног и експлицитног решења се контролише калибрационим праметром θ .

- Имплицитно-експлицитна (IMEX) метода [157] се користи у сложеним CFD симулацијама компресибилних токова, посебно код реактивних токова и течности велике вискозности. Овом методом се једначине разлажу на два дела која чине чланови који захтевају експлицитну обраду (нелинеарни конвективни чланови) и чланови који се третирају имплицитно (дифузивни, вискозни чланови).
- Динамички хибридни методи адаптивно бирају временску дискретизацију у зависности од:
 - Локалног Курантовог броја (CFL),
 - Градијената брзине и притиска,
 - Турбулентних параметара (k , ω , ϵ).

5.1.1.4. Упоредна анализа временски дискретизационих метода

Одлике приказаних модела временске дискретизације су приказане табеларно, Таб.5-1.

Табела 5-1: Анализа метода временске дискретизације

Метода	Тип	Стабилност	Тачност	CFL услов	Примена	Предности	Недостаци
Експлицитни Ојлеров	Експл.	Ограничена (CFL-услов)	1.ред	CFL<1	Брзи прорачуни	Једноставна примена	Захтева мали временски корак
Имплицитни Ојлеров	Импл.	Висока	1.ред	CFL>>1	Вискозна струјања	Стабилан, Већи кораци	Нумеричка дифузија
Рунге-Кута (RK2,RK3,RK4)	Експл.	Зависност мреже	Вишег реда	CFL≈1	CFD	Прецизност	Ограничена стабилност
ТВД Рунге-Кута	Експл.	Побољшана за ударне таласе	Вишег реда	CFL ≈ 1,5 - 2	Компресиб. струјања, ударни таласи	Смањује дисперзију	Захтевност рачунарских ресурса
IMEX Импл.-Експл.	Хибр.	Висока	Вишег реда	CFL>>1 (импл.) CFL<1 (експл.)	LES реактивни токови	Комбинује стабилност и тачност	Комплексна имплементација
РК-БЕ	Хибр.	Висока	Вишег реда	CFL>>1 (импл.) CFL<1 (експл.)	Турбулентна струјања	Комбинује стабилност и тачност	Висока захтевност рачунарских ресурса
Хибридне адаптивне	Хибр.	Висока	Варијабилна	Динам. подесив CFL	LES и DNS	Аутом. адапт. временски корак	Комплексна имплементација

На основу изнетих карактеристика можемо се изнети сажето тумачење погодности метода за примену у спрези са RANS тако да је:

- Имплицитни Ојлеров метод је стабилан и погодан за RANS али га карактерише низак ред тачности и може прорачун увести нумеричку дифузију;
- Рунге-Кута методе вишег реда (RK3, RK4) су тачније, али су експлицитне, што значи да захтевају мање временске кораке због CFL ограничења;
- TVD Рунге-Кута је добар за високе градијенте промене карактеристичних величина стања флуида и ударне таласе, али је мање ефикасан за RANS јер је, ипак, дизајниран за решавање компресибилних ефеката у LES и DNS симулацијама;
- IMEX (Имплицитно-експлицитна шема) комбинује стабилност имплицитних метода и тачност експлицитних метода, али је сложенија за имплементацију;
- Хибридни RK-BE (Runge-Kutta backward Euler) представља добро избалансирану методу и омогућава стабилност и тачност, али је захтевна по питању рачунских ресурса.

Закључак о избору методе временске дискретизације за RANS моделовање у CFD, а водећи рачуна на природу моделовања, које је усмерено на добијање просечних вредности токова и решавање стабилних аеродинамичких поља, избор методе временске дискретизације зависи од неколико кључних фактора:

- Стабилност методе, обзиром да RANS симулације могу користити веће временске кораке;
- Рачунска ефикасност, обзиром да су RANS модели мање захтевни од LES и DNS, али је и даље пожељно оптимизовати брзину рачунања;
- Тачност у предвиђању граничних слојева и компресибилних ефеката нарочито ако се у модел укључују надзвучни и трансонични ефекти;
- CFL услов има кључну улогу у одређивању стабилности нумеричке методе и ефикасности симулације, при чему експлицитне методе захтевају стриктно ограничење, док је са друге стране за имплицитне и хибридне методе погодно да CFL број има веће вредности, али уз повећану рачунску сложеност.

На крају се изводи закључак да су имплицитне методе (нпр. Ојлеров кораком уназад или IMEX) су најпогодније за RANS, јер омогућавају веће временске кораке уз очување стабилности решења.

Ако се тежи већој тачности, хибридне методе (IMEX или RK-BE) могу бити добар компромис између стабилности и прецизности.

За AGARD-B модел, који је коришћен као калибрациони модел у овом истраживању, где је испитивање вршено и у областима надзвучног струјања где компресибилност јаче изражена, методе које добро предвиђају компресибилне ефекте су важне, тако да би IMEX или хибридни RK-BE били оптимални избори за RANS моделовање у CFD анализи.

5.1.2. Просторна дискретизација

Просторна дискретизација је процес претварања континуалног домена у скуп дискретних тачака, чиме се омогућава нумеричко решавање у свакој од тих тачака. Присутне су следеће методе просторне дискретизације:

- Метод коначних разлика (FDM);
- Метод коначних елемената (FEM) ;

- Спектралне методе;
- Метод коначних запремина (FVM).

Већ се намећу кључни изазови у дискретизацијама, а то су:

- ✓ Баланс између прецизности и стабилности;
- ✓ Нумеричка дисипација и дифузија;
- ✓ Прилагођавање сложеним геометријама.

Када је реч о просторној дискретизацији у RANS моделовању струјних токова главни циљ треба да остане задржавање очувања масе, импулса и енергије а да при томе нумеричка дифузија и дисперзија буду минималне.

5.1.2.1. Метод коначних разлика (FDM-Finite Difference Method)

Метод коначних разлика (енгл.-Finite Difference Method, у даљем тексту FDM) се заснива на принципу апроксимације дериватива у NSE једначинама користећи се коначним разликама, пример дискретизације првог реда за просторну деривацију је:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x} \quad (5.10)$$

Ова апроксимација је првог реда тачности, док би централна разлика другог реда била:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x} \quad (5.11)$$

Одликује се једноставном имплементацијом и великом брзином израчунавања, док се са друге стране тешко примењује на сложене геометрије и има слабу флексибилност на адаптивне мреже [132].

5.1.2.2. Метод коначних елемената (FEM - Finite Element Method)

Метод коначних елемената (енгл.-Finite Element Method, у даљем тексту FEM) се заснива на принципу поделе домена на елементе (троуглове, квадрилатерале) са апроксимацијом функција. Пример је Галерикинова апроксимација, детаљно обрађена од стране Гелфгата (Gelfgat) [158], илустрована једначином (5.3).

$$\int_V (R_f \cdot w_w) dV = 0 \quad (5.12)$$

Где је R_f резидуална функција, а w_w функција тежине. Ова метода је ређе коришћена у CFD анализи иако се одликује високом тачношћу, флексибилношћу за сложене геометрије струјања, али га са друге стране одликује велика рачунарска сложеност. Обзиром да се ређе користи у прорачунској динамици флуида овде неће бити дато шире образложење. Треба, ипак, напоменути да постоје неки кодови попут COMSOL Multiphysics који га користе за флуидне симулације [159].

5.1.2.3. Спектралне методе

Спектралне методе су развијене према принципу дискретизација путем Фуријеових или Чебишевљевиx полинома.

Према Зангу и Стриту (Zang, Streett) [160] одликују се високом прецизношћу, нарочито за једноставне геометрије али ипак показују афинитет ка једноставнијим, глатким граничним условима, па су непогодне за сложене геометријске случајеве струјања. Обзиром да су спектралне методе су заступљеније за DNS и LES симулације и ређе се користе у RANS овде неће бити додатних објашњења.

5.1.2.4. Метод коначних запремина (FVM - Finite Volume Method)

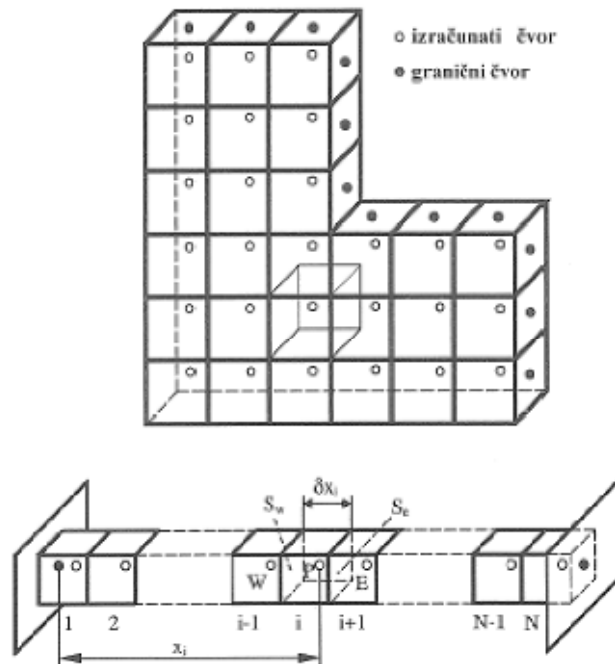
Метод FVM се заснива на принципу примене закона очувања контролне запремине и примене интегралног приступа уместо деривативног. Формулација за очување флукса преко површина контролне запремине је дефинисана једначином (5.13).

$$\int_V \frac{\partial \rho \phi}{\partial t} dV + \oint_S (\rho \phi \mathbf{u}) dS = \oint_S (\Gamma \nabla \phi) dS + \int_V S_\phi dV \quad (5.13)$$

Где је ϕ скаларна величина (у овом случају брзина, температура, турбулентна кинетичка енергија), Γ коефицијент дифузије а S_ϕ изворни члан.

Промена очуване величине $\Delta \phi$ на коју се надовезују извори и понори у неком временском интервалу Δt представља збир идентичних величина који се интерференцирају са суседним елементима. Једначина у конзервативном облику чини систем једначина за посматрану дискретизовану контролну запремину (прорачунски домен модела) и модел опструјаваног тела (који чини сложену затворену граничну површину) јесте уопштена формулација FVM [161].

Могућност избора произвољног облика и величине прорачунског домена и елемента, које деле исти на коначан број, даје неопходну слободу прилагођавања посматраном случају струјања, Сл.5.1. Вредност очуване вредности ϕ се преноси на суседну ћелију путем заједничке површине што искључује вештачко стварање или нестварање очуване величине.



Слика 5-1: Шематски приказ просторне дискретизације методом коначних запремина.

Овде је извршена дискретизација прорачунског домена према принципу датом у једначини (5.14).

$$\delta x_i = \frac{l}{N} \quad , \quad (i = 1, 2, 3, \dots N) \quad (5.14)$$

Разликујемо два приступа примене FVM. Први тип се дизајнира тако да се вредности ϕ рачунају у чворовима ћелија, док се другим приступом израчунавају у изабраној тачки унутар сваког прорачунског елемента. У овом последњем случају вредност ϕ , односно њене промене, се не појављује експлицитно већ се узима средња вредност унутар ћелије.

Наиме, за решавање система неопходно је апроксимација површинских и запреминских интеграла, једначина (5.15).

$$\int_S \phi dS = \sum_k \int_{S_k} \phi dS \quad (5.15)$$

Израчунавање површинског интеграла подразумева решавање функције ϕ у целој површини. Овај резултат се преноси у чворовима центара ћелија увођењем апроксимација да се интеграл изражава идентичностима састављеним од променљивих на једног или више локација k , а вредност на страницама елемената се апроксимира вредностима у чворовима-центрима истих.

Графикон, Сл.5-2, приказује поређене метода просторне дискретизације према тачности, конзервативности, применљивости на сложене геометрије и примене у RANS.



Слика 5-2: Поређење метода просторне дискретизације.

На основу изнетог се може извести закључак да је за RANS симулације, FVM доминантан метод због својих очуваних својстава и применљивости на сложене геометрије. FDM је погодан за основна истраживања и индустријску примену. Такође су FEM и спектралне методе ретке у RANS-у.

5.1.3. Тачност решења просторне дискретизације

Просторна дискретизација представља кључну компоненту нумеричке симулације флуида, одређујући како ће континуално поље бити представљено у дискретном облику. Њен утицај на стабилност, тачност и конвергенцију решења је од пресудног значаја, нарочито у контексту симулација заснованих на RANS, LES и DNS моделима турбуленције.

Тачност решења зависи од реда апроксимације. Наиме, методе вишег реда (нпр. спектралне методе) могу постићи већу тачност са мањим бројем чворова, док методе нижег реда (нпр. FVM првог реда) захтевају гушћу мрежу.

Грешке просторне дискретизације се могу поделити на:

- Грешке усредсређене на ред апроксимације – Методе вишег реда апроксимације нуде већу тачност у односу на методе нижег реда, али захтевају више рачунарских ресурса.
- Нумеричку дисперзију и дифузију – Недовољно решавање градијената може довести до вештачке дифузије, пригушујући турбулентне структуре, док превисока резолуција без адекватне стабилизације може изазвати нумеричку дисперзију, што резултира осцилацијама у решењу.

Када просторна дискретизација није довољне финоће долази до вештачке *нумеричке дифузије* која пригушује турбулентне структуре. Упрошћена форма једначине са утицајем вештачке нумеричке дифузије и чини аналогију реалним ефектима који настају због недовољно fine просторне дискретизације у нумеричким решењима једначина струјања пишемо у облику:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \nu_{num} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (5.16)$$

При чему је ν_{num} ефективна нумеричка вискозност, практично коефицијент који не постоји у физичком моделу, већ настаје као последица грубе мреже или ниског реда прецизности нумеричке шеме.

Нумеричка дисперзија (oscillatory error) настаје у случајевима када просторна дискретизација не може коректно да симулира таласне структуре флуида. Ова грешка доводи до лажних осцилација у решењу, које представљамо у облику:

$$\tilde{u}(x, t) = u(x, t) + \epsilon \sin(kx) \quad (5.17)$$

У једначини (5.17) k представља број таласа које мрежа може решити. Ако је просторна резолуција недовољна, велики таласи се вештачки рефлектују у решењу. Ово је критично у аероакустичним анализама, где дисперзија доводи до погрешног предвиђања звучних таласа.

Контрола грешке кроз адаптацију мреже. Коришћење адаптивне мреже (енгл.—Adaptive Mesh Refinement, у даљем тексту AMR) омогућава локално усађивање чворова у зонама јаким градијената (нпр. у ударним таласима, турбулентним регијама), чиме се побољшава тачност без непотребног повећања трошкова рачунања.

Утицај на турбулентне моделе се испољава тако да код RANS модела можемо рећи да захтевају релативно грубу мрежу, али је кључно коректно решавање граничног слоја (y^+ параметар, видети поглавље 5).

Код LES модела карактеристична је потребна за високом резолуцијом у зонама високе турбулентности јер се велики вртлози експлицитно решавају. Док се DNS модели одликују

потпуном резолуцијом свих турбулентних структура (Колмогоровљеве скале), што захтева екстремно фину мрежу и велики рачунарски ресурс[162].

Утицај на број итерација и конвергенцију утиче тако да густа мрежа повећава број једначина које треба решити, што продужава време симулације и захтева више радне меморије. Са друге стране превише груба мрежа може довести до неких нереалних резултата због недостатка просторне резолуције. Такође, недовољна резолуција захтева већи број итерација за конвергенцију, повећавајући укупно време симулације.

Стабилност нумеричког решења је изразито важна у примени нумеричког решавања. У CFD је општеприхваћен Курант-Фридрихс-Леви (CFL-Courant-Friedrichs-Lewy) критеријум [163] који представља основни услов стабилности експлицитних нумеричких шема за хиперболичке једначине:

$$CFL = \frac{u\Delta t}{\Delta x} \quad (5.18)$$

Где су Δx и Δt временски и дужински кораци. За експлицитне методе, CFL мора бити мањи од 1 како би решење остало стабилно. У имплицитним методама овај услов није ограничење, али превелики CFL број може узроковати лошу конвергенцију.

CFL услов за експлицитне симулације $CFL < 1$ је неопходан услов стабилности. У противном можемо очекивати дивергенцију прорачуна. Са друге стране за имплицитне шеме CFL може имати веће вредности али са претерано велики коефицијент може довести до дивергенције резултата.

Фина мрежа подразумева да Δx тежи малој вредности, а као последица тежње задовољавања услова $CFL < 1$ јесте пропорционално смањење и Δt , односно смањује се и временски корак. Скупна последица је повећавање броја итерација до конвергенције.

Груба мрежа подразумева повећање Δx што би аналогно претходној логици доводи по повећања временског корака, односно убрзава се прорачун, али на рачун прецизности.

Варијабилне величине ћелија, које се обично срећу код неструктурисане мреже, отежавају контролу CFL броја, тако да је изразита потреба контроле овог параметра, нарочито у зонама граничних услова.

На овом месту ћемо упоредити структурисане и неструктурисане мреже, иако ће о њима бити детаљније реч у следећем поглављу. Наиме, структурисане мреже дају бољу стабилност, нарочито у зони граничног слоја, јер једначине имају конзистентну апроксимацију у свим правцима. Насупрот њима, неструктурисане мреже могу довести до локалних нестабилности услед варијације ћелија, нарочито ако се користе нискоредне шеме.

Поменимо и *хибридне мреже* (енгл.-Hybrid RANS-LES) модели DES захтевају прелазак са RANS на LES у зони раздвајања струјања. Ако ова зона није адекватно дискретизована, може доћи до лажног пригушивања или лажне амплификације турбуленције.

Утицај граничних услова на просторну дискретизацију и стабилност полази од чињенице да гранични услови морају бити компатибилни са дискретизацијом, иначе могу довести до нестабилности. Ту се сусрећемо са утицајима улазних и излазних граничних услова на начин да ако излазни услови нису адекватно постављени, таласи могу да се врате у домен, изазивајући нестабилности, ова појава је позната као *проблем рефлектованих прорачунског таласа*.

Услов граничних функција у близини зида (енгл.-Wall function) код RANS модела захтевају грубу мрежу у близини зида, што може утицати на предвиђање граничног слоја.

Гранични услов неклизанња (енгл.-No-slip condition) у моделима LES/DNS са друге стране изискује изузетно фину мрежу да би се ухватио турбулентни подслој. LES методе захтевају специјалну просторну резолуцију у зонама турбуленције. DNS је најосетљивији и диктира просторну резолуцију Колмогоровљевог скалом.

Оптималан избор методе дискретизације и структуре мреже је критичан за CFD симулације. Баланс између тачности и рачунарске ефикасности зависи од физике проблема, доступних ресурса и захтеваног квалитета резултата.

Просторна дискретизација није само питање тачности већ и критичан фактор стабилности CFD решења. Грешке дискретизације (дисперзија, дифузија), избор мреже и третман граничних услова значајно утичу на стабилност, а тиме и на конвергенцију.

Оптималан избор просторне дискретизације балансира тачност и стабилност, чиме се значајно побољшава ефикасност CFD симулација.

5.2. Нумеричка дискретизација прорачунског домена

Нумеричка дискретизација прорачунског домена подразумева креирање димензије и облика прорачунског домена, одређивање погодног дискретизационог временског модела, постављање почетних и граничних услова и дизајнирање прорачунске мреже.

О дискретизационим временским моделима као и почетним и граничним условима који се користе у CFD анализи је већ речено у претходним поглављима, а конкретизација истих је објашњена у одељку 7.1.2.

Облик и димензија прорачунског домена у великоме зависе од геометријских карактеристика тела/модела које се испитује, као и услова и динамике испитивања. Ова тема је обрађена у оквиру одељка 7.1.

Метода коначних запремина је дефинитивни избор просторне дискретизације за CFD прорачуне који су спровођени у току израде ове студије. Генерисање прорачунске мреже (енгл.- Numerical Mesh, у даљем тексту NM) се у почетку примене прорачунске динамике флуида се вршило мануелно. Тек је развојем софтвера омогућена примена CFD у случајевима струјања са великим скалама у аерокосмонаутици, индустрији а нарочито у метеорологији.

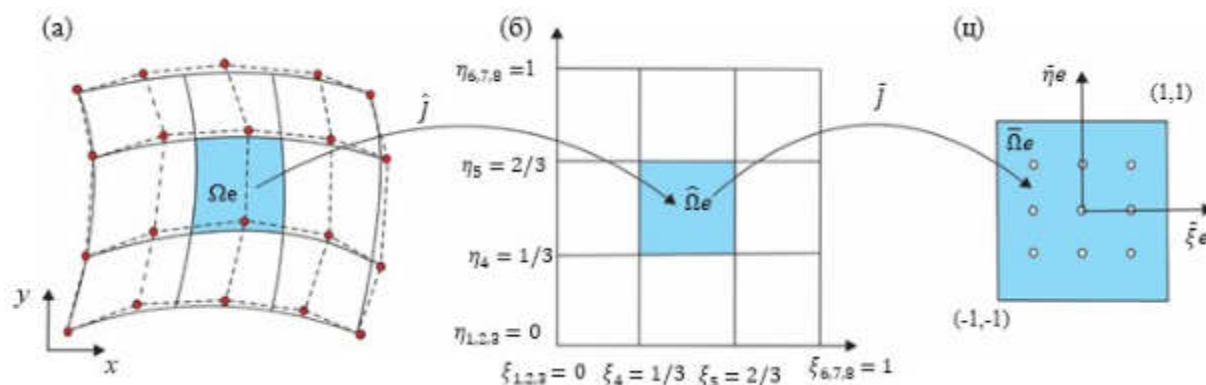
На основу приступа генерисању NM разликујемо структурисане и неструктурисане NM. Применом структурисаних мрежа прорачунски елементи чине линије мреже које су орјентисане правилно у два или три правца у зависности да ли се ради о 2D или 3D моделу. Овакве координатне трансформације чине правилне геометријске облике, обично правоугаонике или троуглове када је реч о 2D и квадар или тетраедар када је реч о 3D моделовању. Са друге стране неструктурисане NM немају овако задате правилности са циљем да се сложена структура струјања адекватно покрије. Софтвер за генерисање мреже при томе пратећи задате контуре прорачунског домена на далеко сложенији начин приступа генерисању NM коју чине неправилни геометријски облици.

5.2.1. Структурисане мреже

Структурисане мреже представљају један од најчешће коришћених метода просторне дискретизације у прорачунској механици флуида. Њихова примена се заснива на правилном распореду чворова у облику решетке, што омогућава ефикасну примену нумеричких метода заснованих на FVM, FDM или FEM. У овом раду детаљно се анализирају карактеристике ових мрежа, њихове предности и ограничења, као и утицај на коначну тачност CFD симулација.

Структурисане мреже су дефинисане тако да чворови и елементи прате логичку топологију (i, j, k индексирање), што омогућава лакше решавање нумеричких једначина. Засноване су на пресликавањима којима се нумерички домен дефинише тако да површина испитиване летелице припада делу границе нумеричког домена. На овај начин се лако примењују гранични услови [161].

Посматрајући распоред мреже тачака у физичком домену, Сл. 5-3,



Слика 5-3: Физички (а) и нумерички(б и ц) домен [164], [163].

Моделовање почиње посматрањем физичког простора (x,y) и трансформише се у NM записана за случај 2D модела парцијалном диференцијалном једначином (5.19).

$$\frac{\partial v}{\partial x} + c \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (5.19)$$

Узмимо да једначина (5.20) чини математичку трансформацију физичких у нумеричке координате.

$$\begin{aligned} \xi &= \xi(x, y) \\ \eta &= \eta(x, y) \end{aligned} \quad (5.20)$$

Тако да се трансформација може написати у потребном диференцијалном запису, једначина (5.21).

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{\partial v}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = 0 \end{aligned} \quad (5.21)$$

Из претходних једначина може се извести полазна парцијална диференцијална једначина (5.22) [161].

$$(\xi_x + c \xi_y) \frac{\partial v}{\partial x} + (\eta_x + c \eta_y) \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (5.22)$$

Пресликавање мора бити једнозначно чиме се избегава пресецање линија истих фамилија. Овде се наглашава да у секторима физичког домена где су промене геометрије драматичне очекивано је да су градијенти физичких величина веома велики. Да би се избегле девијације неопходно је NM распоредити гушће, односно тачке мреже морају заузети мања растојања. Императив је да се избегну велике искошености, односно да NM буде гладак, а да линије суседних прорачунских елемената буду што ближе ортогоналности [165].

Једначина пресликавања скаларне величине ϕ у конзервативној форми се може записати као:

$$\frac{\partial \rho \phi}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \phi \vec{v}) = \nabla \cdot (\Gamma \nabla \phi) + S_p \quad (5.23)$$

При томе је у једначини (5.23) [134], [166] Γ коефицијент дифузије а S_p изворни члан.

Применом FVM на структурирану мрежу, добијамо дискретизовану једначину у облику:

$$V_P \frac{d\phi_P}{dt} + \sum_f (F_f \phi_f - D_f (\nabla \phi)_f) = S_P V_P \quad (5.24)$$

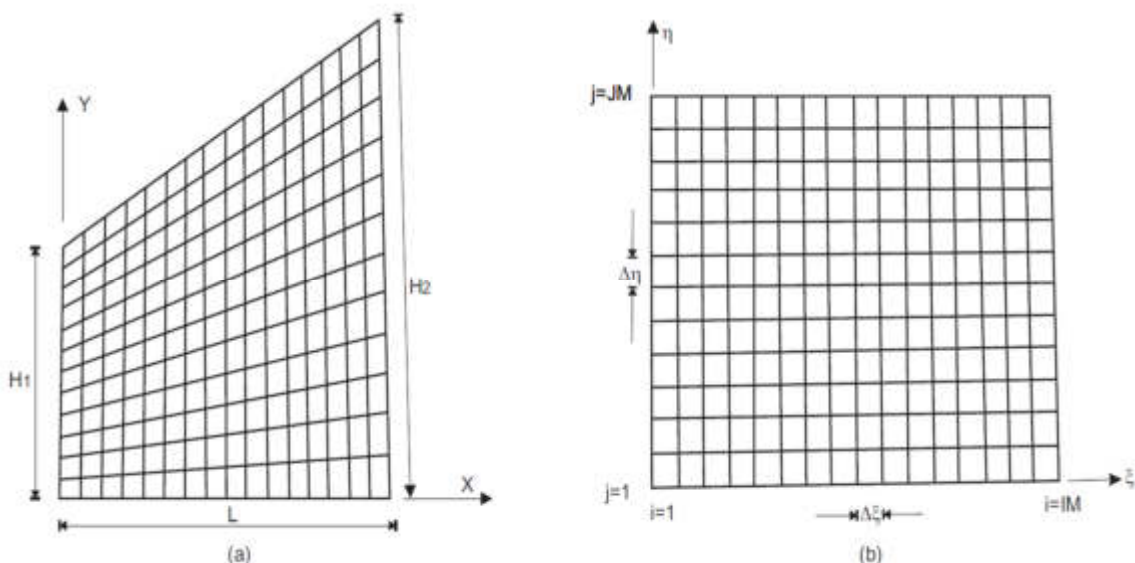
У једначини (5.25) [134], [166] је означено са V_P запремина контролне ћелије, F_f је конвенктивни ток на посматраној површини, D_f је дифузиони ток, а S_P је изворни члан за посматрану ћелију.

5.2.1.1. Методе за генерисање структурираних мрежа

Процес генерисања структурираних мрежа обухвата различите приступе који омогућавају прилагођавање мреже сложеним геометријама. Основне методе су:

- Аналитичке методе: Користе једноставне математичке функције за генерисање мрежа, погодне за једноставне домене.
- Алгебарске методе: Дефинишу чворове на основу интерполације или трансформације координата, често примењене у случајевима са благим кривинама. Представљају најједноставније методе за генерисање мрежа, функција трансформације представља позната алгебарска функција. Често коришћен метод трансфинитна трансформација при чему се мапирање врши унутар домена на основу граничних кривих или површина, без потребе за решавањем једначина. Уместо да се решавају диференцијалне једначине за унутрашње чворове (као код елиптичког генерисања мреже), у трансфинитном приступу се користе интерполације дуж граничних линија и површина.

На Сл.5-4 је приказан пример интерполације на примеру пресликавања трапезног физичког (а) у правоугаони нумерички (б) домен.



Слика 5-4: Трансформација трапезног у правоугаони домен [161].

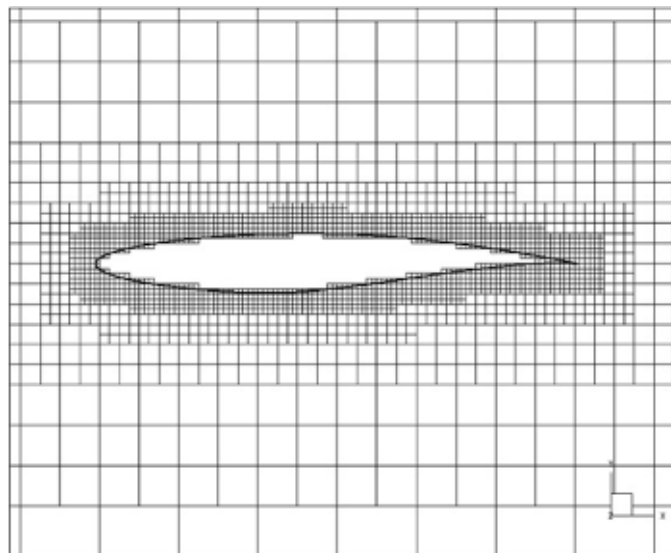
Други приступ представљају методе трансформација техником генерисања површина физичког домена у зависно променљиве у независно променљиве координате нумеричког домена, при чему се пресликавање своди на неки од следећих облика парцијалних диференцијалних једначина:

- Елиптичке методе: Решавају систем елиптичких диференцијалних једначина како би генерисале глатке и ортогоналне мреже, посебно корисне за сложене геометрије.
- Хиперболичке методе: Користе хиперболичке једначине како би се осигурало добро рашчлањивање мреже у зони граничног слоја.
- Параболичке методе: Комбинују особине алгебарских и хиперболичких метода, често се примењују у аеродинамичким анализама.

Генерално, варијације генерисање мреже су многобројне. За почетак структуралне мреже могу бити са уједначеним и неуједначеним величинама и облицима ћелија. Уједначене ћелије поједностављују процес пресликавања и самог израчунавања, али су сучељене са проблемом испуњења основног услова пресликавања а то је да сваки просторни део физичког домена мора бити апроксимиран нумеричким. Да би се овај услов испунио код овог приступа морају се величине ћелија прилагодити површини посматраног тела. Ово је могуће извести код простих геометријских облика, али нешто сложеније површине изискују драматично смањење димензија ћелија што за последицу има велики пораст броја прорачунских елемената. Баланс између броја ћелија и једноставности геометрије истих у циљу смањења потребног CPU времена увек мора бити присутан.

Са друге стране неуједначене величине и облик мреже омогућавају згушњавање мреже у зонама где се очекује нагла промена геометрије односно велики градијент промене величина. Овде су приказане неке од често коришћених техника креирања прорачунских мрежа.

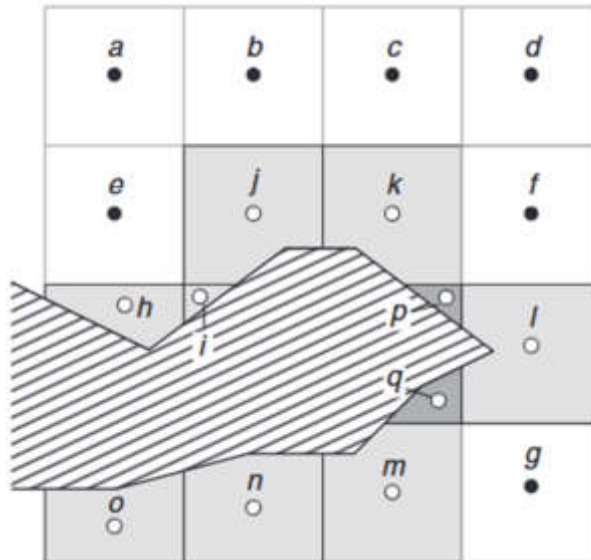
Степеничasti облик, код којег су ћелије ван NM уклоњене замењујући на тај начин чврсте граничне површи обликом степеница, Сл.5-5.



Слика 5-5: Ортогонална мрежа око аеропрофила са апроксимацијом границе степеништа [134], [167].

Недостатак оваквог моделовања је очигледан, иако је испуњен први услов пресликавања настаје грешка јер нумерички део прорачунског домена не прати контуре физичког, већ задире у исти.

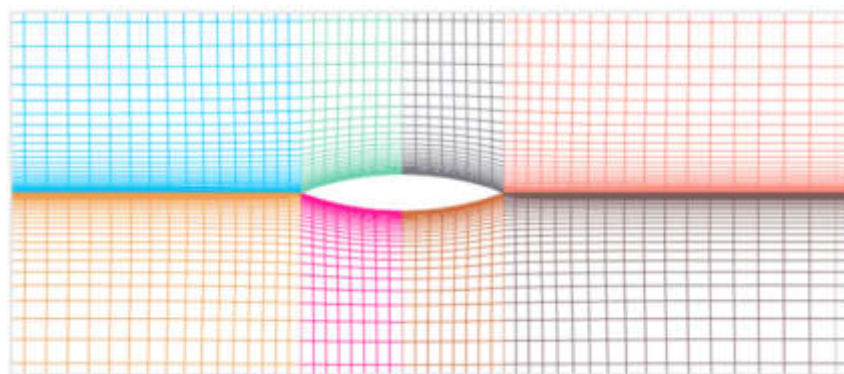
Да би се овај проблем правозишао примењује се ортогонална метода са уроњеном границом, као што је приказано Сл.5-6. При томе је искоришћена техника одсецања ћелија како би се добила што боља подударност са физичким доменом. Ћелије гравирани белим остају непромењене, док сиво гравирани ћелије мењају свој облик, а тамно гравирани ћелија се дели на две ћелије. Недостатак овакве ћелије је очигледан и састоји се у појави новог проблема а то је рачунање вредности у сложеним геометријским формама.



Слика 5-6: Ортогонална метода са уроњеном конфигурацијом [168].

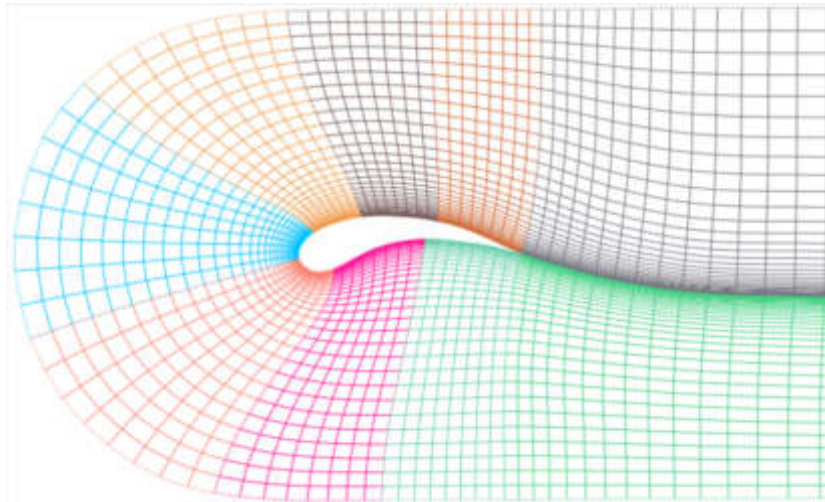
Дијаметрално супротан приступ је да се крене са генерисањем NM од површине граничних зидова употребом познатих геометријских фигура. У зависности од линија мреже разликују се и различите конфигурације мрежа, а назване су на основу слова на која највише личе. Тако разликујемо „Н“, „О“, „С“ мреже и све могуће хибридне модификације између њих.

Комбинацијом хоризонталних и вертикалних линија, које у овом случају бивају криве а не линеарне функције, формира се „Н“ мрежа око опструјаваног тела, као што је приказано на Сл.5-7.



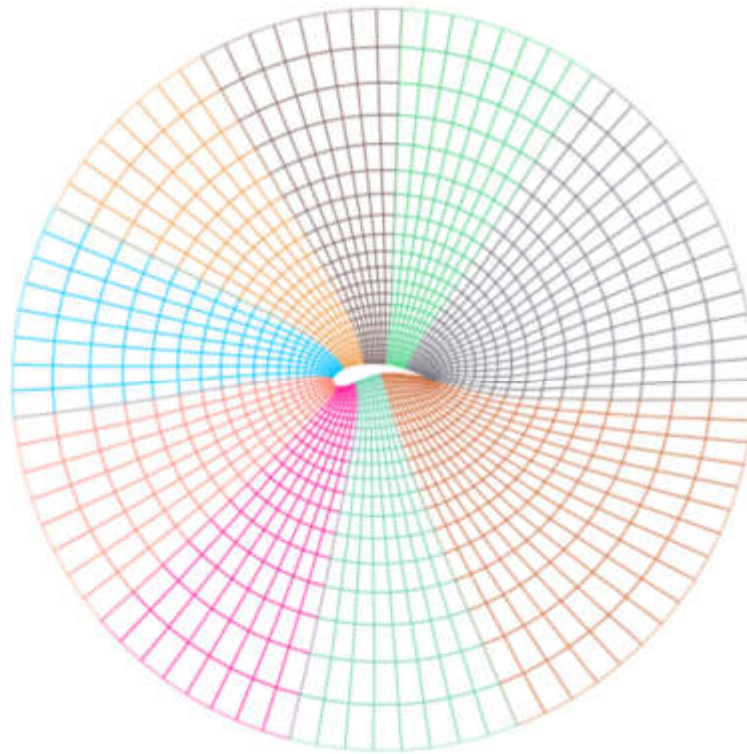
Слика 5-7: Криволинијска „Н“ мрежа око аеропрофила.

„С“ мрежа се карактерише формирањем криволинијске мреже која окружује тело на начин да се у зонама очекиваног високог градијента промена криви а затим смирено наставља дуж прорачунског домена стварајући при томе облик мреже који подсећа на слово „С“, Сл.5-8.



Слика 5-8: Криволинијска „С“ мрежа око аеропрофила.

Ако се претходна метода примени са обе или свих страна опструјаваног тела добијамо заправо мрежу која изгледом подсећа на „С“ и „О“ слова односно спојено добијамо изглед „О“ мреже, где је пример приказан на Сл.5-9.



Слика 5-9: Криволинијска „О“ мрежа око аеропрофила.

Коначно, било која комбинација типова горе поменутих мрежа је могућа и примењује се у зависности од потребе.

У 3D CFD анализама најчешће се користе три типа елемената: тетраедарски, полиедарски и хексаедарски. Свака од ових врста мрежа има специфичне предности и ограничења у зависности од сложености геометрије, захтева нумеричке стабилности и доступних рачунских ресурса.

Тетраедарске мреже чине четворо страни полигони са 4 темена и 6 ивица. Слично троугластим ћелијама у 2D моделима тетраедри се лако прилагођавају сложеним геометријским облицима прорачунског домена. Због своје флексибилности у моделовању олакшано је моделовање

софтверског генерисања за сложене геометријске облике. Са друге стране одликују је већа нумеричка дифузија и лошија конвергенција у вискозним граничним слојевима [166].

Полиедарске мреже се састоје од више од четири стране по прорачунском елементу. Сложенији облик ћелије омогућава већу запреминску покривеност па се употребом оваквог типа мреже смањује број ћелија. Обзиром да повећани број страница смањује потенцијалну закривљеност унутар прорачунског елемента ову методу одликује боља нумеричка стабилност. Недостатак моделовања NM оваквим врстама ћелија се огледа у комплекснијим алгоритмима генерисања мреже. Сложени геометријски облици изискују и сложеније прорачуне што резултује повећаном потребом за RAM меморијом рачунара [169].

Хексаедарска мрежа се састоји од правилних шестостраних елемената са дванаест ивица и осам темена. Ортогонална природа хексаедарске мреже омогућава тачније апроксимације нумеричких метода, па је и очекивана најбоља тачност и стабилност у применама CFD моделовања. Обзиром да два тетраедра запремински чине један хексаедар предност смањеног броја елемената за постизање истог нивоа тачности је очигледна. Недостатак овог метода је комплексније генерисање приликом моделовања са граничним површима под оштрим ивицама.

На дијаграму, Сл.5-10 је приказана упоредна анализа тетраедарске, полиедарске и хексаедарске структуре NM.



Слика 5-10: Упоредна анализа 3D прорачунских елемената.

Хексаедарски елементи су кључни за CFD симулације због својих предности у тачности, стабилности и меморијској ефикасности. Иако је њихово генерисање сложеније, у случајевима где је критична предикција граничног слоја и турбуленције, они представљају оптимални избор.

5.2.1.2. Основне карактеристике структурираних мрежа

Основне карактеристике структурираних мрежа су:

- Правилан распоред чворова: Чворови су распоређени у правилну решетку, што омогућава једноставно индексирање и примену метода са ниском рачунарском сложености.
- Типови елемената: У 2D домену, елементи су углавном квадрилатерарни, док су у 3D домену хексахедарски елементи доминантни.
- Висока прецизност у граничним слојевима: Због правилног распореда чворова, могуће је користити густу дискретизацију у зонама граничног слоја, што је критично за предвиђање турбулентних ефеката.
- Ефикасност меморијске организације се огледа у мањој захтеваности за RAM меморијом, што омогућава симулације са великим бројем чворова.
- Нумеричка тачност се одликује мањим нумеричким дифузијама у поређењу са неструктурираним мрежама.
- Једноставније примене граничних услова: Лако дефинисање Дирихлеових и фон Нојманових граничних услова.

Са друге стране, због тешкоће у генерисању за сложене геометрије код објеката неправилног облика, структуриране мреже захтевају комплексну трансформацију координата или примену блок-структурираних техника. Велики број чворова за фино решавање локалних феномена доводи до згушњавања мреже у критичним зонама и може довести до значајног повећања броја елемената.

5.2.2. Неструктурисане мреже

Основни недостатак структурираних прорачунских мрежа, дуготрајно и мукотрпно генерисање прорачунске мреже, које код сложених геометријских облика одузима највише времена у спровођењу CFD анализе исправљен је разовејем различитих математичких модела генерисања мрежа и применом истих путем рачунарских кодова који су имплементирани у специјализоване софтвере.

Неструктурисане мреже немају јасну тополошку правилност, што им омогућава да се прилагоде сложеним геометријама. При томе се обично примењују уобичајени облици основних прорачунских модела већ приказаних у претходном поглављу.

Најчешће примењиване методе за генерисање неструктурираних мрежа су:

- Делонеова (Delaunay) триангулација;
- Вороној (Voronoi) дијаграмска метода;
- Метода напредујућег фронта (Advancing Front Method – AFM)

5.2.2.1. Делонеова триангулација

Метода заснована на максимизацији најмањег угла троуглова/тетраедара ради побољшања квалитета мреже. Овај алгоритам за генерисање мреже је специфичан по томе да ниједна тачка не лежи унутар круга описаног око било ког троугла (или тетраедра у 3D случају). Овај метод

резултује оптималним распоредом чворова и избегава превише издужење елемената, што побољшава стабилност нумеричког решења.

Формална дефиниција каже да за скуп тачака $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ је такав скуп троуглова T где ни један p_i не лежи унутар круга описаног око било ког троугла у T [170], [171].

Делонеову методу можемо декларисати да генерише квалитетне тетраедарске мреже и да је погодна у раду са адаптивним згушњавањем мреже, али не може да обезбеди ортогоналност у граничним слојевима а нарочито у областима са наглим прелазима са једне на другу површину.

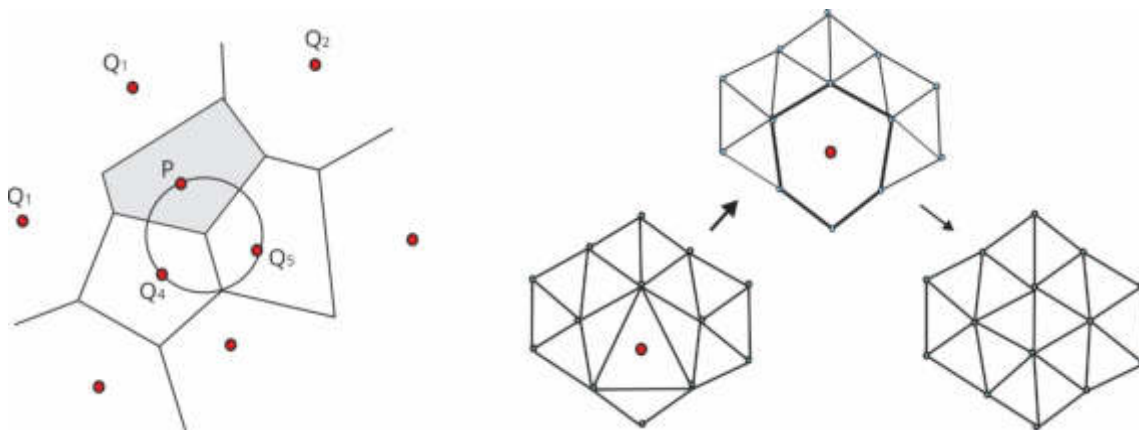
5.2.2.2. Вороној дијаграмска метода

Користи се за полиедарске мреже и обезбеђује оптималну расподелу чворова. Метод користи раздаљине између тачака за конструисање полигона/полиедара око сваке тачке, стварајући оптималне полиедарске мреже.

Вороној дијаграмска метода каже да за скуп тачака P се формира дијаграм који чине скуп полигона дефинисан једначином (5.25) [161], [172], [173].

$$V(p_i) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, p_i) \leq d(x, p_j) \quad \forall p_i \neq p_j\} \quad (5.25)$$

Где је $d(x, y)$ Еуклидово растојање.



Слика 5-11: Шематски приказ полигона Вороној за тачку P и алгоритам траингулације за увођење нове тачке [161].

Полигон Вороној за посматрану тачку P и алгоритам триангулације за увођење нове тачке је шематски приказан на Сл.5-11. Формирање прорачунске мреже почиње са почетном мрежом од свега неколико полигона у облику троугла, који настају спајањем насумичних чворова на контури општујаваног тела са свим прорачунским чворовима на спољашњој граници домена. Потом се уведе једна за другом тачка и врши поновна триангулација. Коначна мрежа се формира уклањањем троуглова из унутрашњости тела.

За Вороној дијаграмску методу је карактеристично да генерише мреже са полиедарним елементима чија се примена оправдава бољом попуњеношћу простора, добрим очувањем масе и енергије у CFD моделирању. Ова метода је посебно корисна у LES симулацијама где се тражи што боља конзервативност протока.

5.2.2.3. Метода напредујућег фронта

Метода напредујућег фронта преставља процес постепеног додавања нових елемената на граничној површини. Почевши од дефинисаних граничних елемената и додавањем нових елемената напредујуће ка унутрашњости. Ово омогућава контролисану генерацију мреже са високом локалном тачношћу.

Ова метода се дефинише тиме да Ако је F скуп граничних елемената, процес напредује додавањем нових чворова p_i тако да су сви суседни елементи доброг квалитета и не нарушавају већ постојећу структуру мреже [161], [167].

5.2.2.4. Поређење метода генерисања неструктурисаних мрежа

Поређењем основних карактеристика приказаних алгоритама генерисања неструктурисаних прорачинских мрежа је приказана табеларно, Таб.5-2.

Табела 5-2: Поређење метода генерисања неструктурисаних мрежа [130], [161], [166], [167], [171], [173], [174]

Критеријум	Делонеова триангулација	Вороној дијаграмска метода	Метода напредујућег фронта
Квалитет елемената	Средњи – побољшава квалитет троуглова, али не увек идеалан у граничним зонама	Висок – полиедрални елементи дају бољу апроксимацију облика	Висок – даје најбоље контролисане елементе у критичним зонама
Стабилност CFD решења	Средња – зависно од густине чворова	Висока – боље очување физичких својстава	Висока – глатка транзиција у густини мреже
Конзервативност масе/енергије	Средња	Висока – природно конзервативна својства полиедара	Висока – боља адаптација на турбулентне граничне слојеве
Генерисање мреже за комплексне геометрије	Висока – добро попуњава произвољне облике	Висока – полиедри боље покривају неравне домене	Средња – потребна додатна контрола у тесним просторима
Ортогоналност мреже	Ниска – елементи могу бити издужени	Висока – основна особина	Средња – зависи од иницијалне граничне конфигурације
Контрола величине елемената	Средња – могућност локалног згушњавања, али не увек оптимално	Висока – адаптивно додаје елементе на критичним местима	Висока – полиедрални елементи омогућавају прецизну апроксимацију
Просторна ефикасност	Висока – троуглови/тетраедри се лако меморишу и процесирају	Средња – полиедрални елементи користе више меморије по јединици волумена	Средња – потребно више меморије за квалитетније мреже
Брзина генерисања мреже	Висока – алгоритамски оптимизовано	Ниска – потребна интензивна рачунања за Вороној делење	Средња – зависи од сложености граничних услова
Адаптивност у CFD симулацијама	Средња – могуће побољшање додатним алгоритмима	Висока – полиедри омогућавају флексибилност у моделовању протока	Висока – лако се прилагођава турбулентним и сложеним зонама
Примена у индустрији	Често коришћено због једноставности алгоритма	Често коришћено у аеродинамици, биомедицини	Релативно новије решење, али са растућом применом у сложеним симулацијама

На основу изнетог се може закључити да је метода напредујућег фронта најпогоднија за примену моделовања нумеричке мреже намењене за RANS решења. Наиме, AFM обезбеђује глатку транзицију густине мреже и добро дефинисане елементе у критичним зонама (што је важно за граничне слојеве у RANS моделима), висока стабилност CFD решења значи бољу конвергенцију у итеративним решавањима, AFM даје бољу апроксимацију у турбулентним граничним слојевима, омогућава прецизно рашчлањивање мреже у зонама са високим градијентима, што побољшава решавање турбулентних модела и на крају иако није најбоља у погледу меморијске уштеде, омогућава оптималну расподелу елемената тамо где је потребно.

Са друге стране Делонеова триангулација је брза и робусна, али може давати мање прецизне резултате у турбулентним зонама, а Вороној дијаграмска метода нуди најбољу апроксимацију градијената, али је мање ефикасна у погледу меморије и сложености алгоритма, што може бити непотребно за RANS.

5.2.3. Адекватан одабир типа мреже

Приликом CFD моделовања неопходно је на основу критеријума прилагодљивости мреже, прецизности у граничним зонама-слојевима струјања, тачности решења, меморијске ефикасности, лакоће примене и стабилности алгоритма одабрати врсту и облик NM. На основу изнетог у овом поглављу примећује се да структурисане и неструктурисане прорачунске мреже имају низ предности и мана. Графиконом на Сл.5-12 приказане су особине ове две врсте мрежа на основу претходних критеријума.



Слика 5-12: Упоредна анализа применљивости структуралне и неструктуралне мреже.

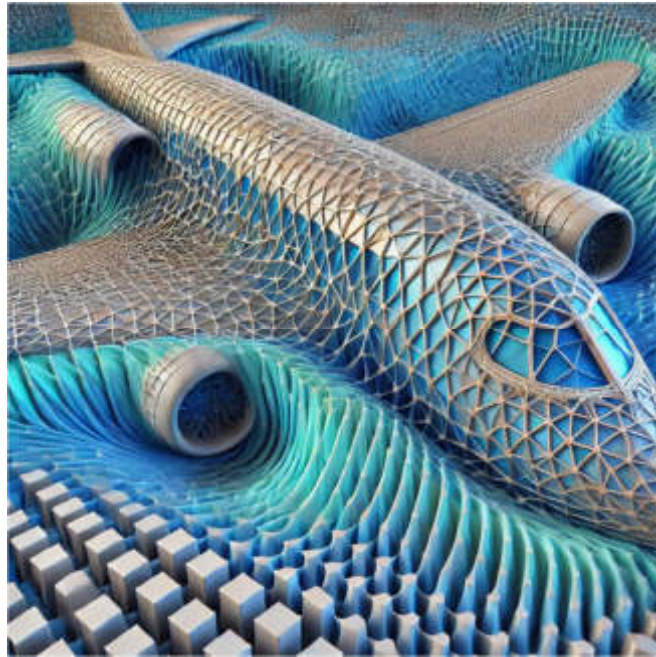
Лако је да се закључи да је прилагодљивост сложеним геометријским структурама струјања и једноставност генерисања, односно могућност употребе математичких модалитета структурисања са применом адекватног софтвера, основне предности које опредељују широку употребу неструктурисаних NM. Према осталим критеријумима структурисане мреже имају предност у генерисању.

5.2.4. Хибридне мреже

Неизоставна је примена хибридне методе генерисања NM која у зонама наглих промена геометрије и у зонама високих градијената величина користи структурисане прорачунске мреже док се у преосталом току струјања користе погодности неструктурисане мреже када је императив испитивање понашања у зонама граничног слоја.

Може се применити и обрнута логика у случајевима сложених геометријских облика, као што је приказано на Сл.5-13.

Приказана је комбинација структуралних хексаедарских елемената у граничном слоју и неструктурисаних тетраедарских или полиедарских елемената у остатку домена. Овај приступ омогућава бољу тачност у зонама са великим градијентима и изразито већу флексибилност у сложеним геометријама.



Слика 5-13: Уметнички приказ хибридне NM у CFD симулацијама³.

Хибридне мреже комбинују најбоље особине различитих типова мрежа, тако да се за боље решавање граничног слоја користе хексаедарски елементи у близини зидова побољшавају тачност моделирања вискозних ефеката; у циљу флексибилност у сложеним геометријама практикује се употреба неструктурисаних елемената који омогућавају лакше генерисање мреже око комплексних површина; док се у циљу смањења броја непотребних чворова користе полиедарски и тетраедарски елементи у мање осетљивим зонама ради оптимизације меморијске потрошње.

Иако је у овом раду првенствено примењена метода коначних запремина у циљу комплетирања слике примени различитих типова мрежа у односу на нумеричке методе решавања поређење је сажето приказано у Таб.5-3.

Табела 5-3: Поређење метода и типова прорачунских мрежа.

Метод	Структурисане мреже	Неструктурисане мреже	Хибидне мреже
FVM	Висока тачност и стабилност	Спорија конвергенција и већа нумеричка дифузија	Оптимални баланс
FEM	Ограничена флексибилност	Добро подноси неправилне мреже	Добар избор
Спектралне методе	Најбоља тачност и стабилност	Веома лоше због нумеричких заостатака	Умерени компромис
LBM	Најбољи избор, висока тачност	Потенцијални проблем са стабилношћу	Прилагодљивост.

Анализирањем се може закључити да: FVM најбоље резултате постиже са структурисаним и хибридни мрежама; FEM се добро понаша у складу са свим типовима мрежа, али је најфлексибилнији са неструктурисаним и хибридни мрежама; Спектралне методе захтевају структурисане мреже за најбоље резултате; LBM се најбоље понаша са структурисаним мрежама, али може користити хибридне уз одређене модификације. Избор мреже мора бити прилагођен специфичностима нумеричког метода како би се обезбедила оптимална тачност и стабилност решења.

³ Слика 5.13 је генерисана од стране DELLE вештачке интелигенције на основу ауторове дескрипције.

5.2.5. Адаптивне мреже у CFD симулацијама

Адаптивне мреже представљају динамички приступ генерисању и модификацији мреже током CFD симулације. Главна предност овог метода је могућност локалног згушњавања или редуковања чворова у зависности од карактеристика тока, чиме се постиже бољи баланс између тачности и рачунске ефикасности [174].

Доктрина употребе АМ се заснива на следећа три корака:

- Корак аутоматске рефинације којим се врши динамичко згушњавање мреже у областима високих градијената величина и у зонама специфичног граничног слоја;
- Корак редукције чворова у стабилним зонама који подразумева смањење броја елемената у регионима где нема великих промена у протоку ради оптимизације рачунске сложености;
- Корак усаглашавања са RANS, LES и DNS моделима што подразумева побољшање резолуције турбулентних структура без значајног повећања броја елемената.

Хијерархијски приступ формирања АМ подразумева поделу иницијалних елемената на мање елементе тако што се претходна CFD симулација идентификује области високих градијената, затим се додају нови чворови у тим областима, док се у зонама са малим градијентима чворови уклањају. Новоформирана мрежа користи се за наредне итерације у симулацији.

Приступ формирања АМ засноване на грешци користи локалне нумеричке грешке као критеријум за адаптацију. Одређивањем разлика између финог и грубог решења врши се корекција мреже према грешци у дискретизацији. Адаптација на основу грешке у локалним променама физичких величина. При томе се усредсређује на грешку градијента брзине, притиска или температуре као показатеља потребе за рефинисањем.

Динамичка адаптација мреже подразумева премештање чворова постојеће мреже без промене броја елемената, среће се у литератури под називом р-адаптација. Користи се у случајевима где је неопходно побољшати квалитет мреже у специфичним регионима.

Често коришћена метода је х-адаптација мреже која се заснива на локалним згушњавању или редукцији елемената. Ова техника се користи како би се повећала густина чворова у областима где су присутне нагле промене физичких величина. У граничном слоју се очекује експоненцијални повећање броја чворова нормално на зид како би се постигао услов $y^+ < 1$ за RANS симулације. У зонама ударних таласа висока резолуција мреже омогућава побољшање квалитета прорачуна на местима наглих промена притиска, као и у зонама интеракције вртлога где се омогућава фино рашчлањивање у областима турбулентног мешања.

5.2.6. Прилагођавање прорачунске мреже CFD моделу

Прилагођавање прорачунске мреже је кључни корак у CFD симулацијама јер утиче на тачност резултата, стабилност прорачуна и време потребно за рачунање. Оптимизација мреже укључује неколико стратегија:

- Редукција броја елемената уз очување тачности (енгл.-Mesh Coarsening);
- Динамичка побољшање резолуције мреже (динамичка рефинација);
- Баланс између броја елемената и времена прорачуна.

О појединачним корацима је већ у претходном делу било речи, сем о балансирању броја елемената и времена прорачуна. Тако да за ову стратегију првенствено морамо подвући да

превелики број елемената може довести до огромне рачунске сложености, док премала мрежа може довести до нетачних резултата. Оптимизација мреже захтева баланс између резолуције и рачунског трошка. Стратегија балансирања се састоји од корака локалног згушњавања, употребе хибридне мреже, паралелно рачунање и адаптивно пре-сабијање мреже, односно иницијално згушњавање NM у зонама предвиђене турбуленције. Оптимална стратегија зависи од сложености протока, методе дискретизације и расположивих рачунских ресурса.

5.2.6.1. *Паралелизација и мрежирање за HPC у CFD-у*

Са све сложенијим CFD симулацијама и повећаним захтевима за резолуцијом, употреба високо перформанбилних рачунара (енгл.-High-Performance Computing –у даљем тексту HPC) постаје кључна за брзо и ефикасно решавање проблема. Један од главних изазова у CFD-у је прилагођавање прорачунске мреже за паралелну обраду, што се постиже поделом домена и оптимизацијом комуникације између процесора.

CFD мреже морају бити пројектоване тако да подржавају паралелно рачунање без губитка тачности или ефикасности кроз следеће фазе:

- Поделу мреже на више процесора (енгл.-domain decomposition), где сваки процесор обрађује део мреже следећим принципима:
 - Геометријска подела – простор се дели на мање под-домене (нпр. ортогонална или хексаедарска подела);
 - Графичка подела– сваки чвор мреже третира се као граф, а алгоритми (нпр. METIS, ParMETIS) унапређују поделу [175];
 - Динамичка подела– омогућава измену поделе домена током прорачуна.
- Смањење комуникације између процесора (енгл.-load balancing);
- Прилагођавање меморијског приступа и кеширања података, која се спроводи кроз следеће технике:
 - Блоковска обрада података где се CFD прорачун се дели на мање блокове података који се учитавају у кеш и обрађују пре учитавања нових. Ова техника је ефикасна за структурисане мреже, где се подаци могу организовати у континуалне блокове меморије;
 - Прилагођена структура података - технике низа структура (енгл.- Array-of-Structs) у структуру низова (енгл.- Struct-of-Arrays). Ова трансформација омогућава боље кеширање јер процесор може унапред учитати више података у једном меморијском приступу;
 - Пребацивање меморијских операција са RAM-а у кеш меморију. CFD кодови могу бити оптимизовани тако да процесор увек обрађује чворове који се налазе у његовој локалној меморији, док се избегавају некомпатибилне меморијске архитектуре које доводе до тога да процесори узимају податке из „удаљених“ меморија, што узрокује у збиру велика кашњења;
 - Коришћење векторизације података које омогућавају паралелну обраду више чворова истовремено.

Као посебна фаза примењују се адаптивне технике за динамичку расподелу рачунског оптерећења.

До усаглашавања рачунарског ресурса са потребама прорачуна неопходно је извршити потребан број итерација.

5.2.7. Креирање прорачунске мреже за нестационарно струјање

Креирање прорачунске мреже за нестационарно струјање, где је извор нестационарности кретање опструјаваног тела и/или нестационарно струјање са променом вектора брзине слободног струјања, захтева примену специјализованих техника како би се омогућило праћење деформације геометрије и адекватна резолуција протока. У зависности од природе нестационарности, постоје три основна приступа формирању мреже:

- Динамичке (померајуће) мреже (енгл.-Moving Mesh Methods);
- Мреже са прегенерисаним зонама (енгл.-Overset или Chimera Meshes);
- Поновно генерисање мреже (енгл.-Re-Meshing).

5.2.7.1. Динамичке (померајуће) мреже

Динамичке мреже користе се у CFD симулацијама када се геометрија домена мења током времена, као што је случај са кретањем опструјаваног тела, деформацијама или интеракцијом са флуидом. Ове методе омогућавају ажурирање мреже без потребе за њеним поновним генерисањем, што значајно штеди рачунарске ресурсе у поређењу са честим поновним генерисањем мреже.

Основна идеја динамичке мреже је да се чворови крећу у простору тако да прате геометрију без нарушавања квалитета мреже. Овај метод се користи у случајевима: кретања крутих тела (нпр. осцилујући аеропрофил, клапне на крилу, ротација пропелера); деформације тела (нпр. аероеластичност, експанзија или сабијање структуре) и интеракције флуида и чврстог тела (енгл.-Fluid-Structure Interaction) [176].

Математичко тумачење динамичке мреже се моделује системом диференцијалних једначина за померање чворова (5.6).

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \quad (5.26)$$

Где је $\mathbf{x}$ позиција чворова у прорачунском домену.

Према Козићу [161] интегрални облик једначина одржања као последица кретања и промене геометријских параметара мреже за универзалну величину ϕ је дат једначином (5.27).

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \phi dV + \int_{\partial V} \rho \phi (\vec{v} - \vec{v}_g) \cdot d\vec{A} = \int_V S_p dV + \int_{\partial V} \Gamma \nabla \phi \cdot d\vec{A} \quad (5.27)$$

Где је $\vec{v}_g$ вектор брзине промене покретне нумеричке мреже. А промена запремине се изражава једначином (5.28). При чему је последњи члан једначине промена запремине NM током времена.

$$V^{n+1} = V^n + \frac{dV}{dt} \Delta t \quad (5.28)$$

Да би се пренебрегле грешке услед померања и промене структуре NM, поред обавезног одржања количине кретања, материје и енергије, мора бити задовољен *геометријски закон одржања*. Односно, да је промена запремине било ког елемента NM праћена кретањем

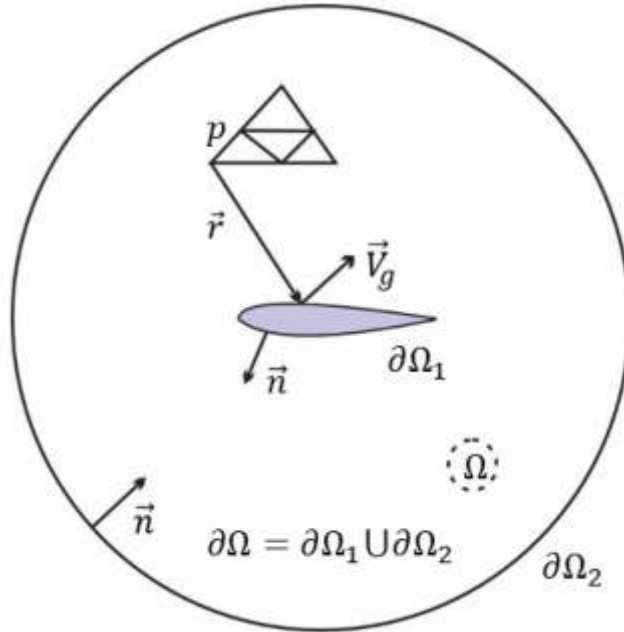
припадајућих страница, што је изражено једначином (5.29) [161], што даје суму промена сваког прорачунског елемента за укупан број n истих.

$$\frac{dV}{dt} = \int_{\partial V} \vec{v}_g \cdot d\vec{A} = \dots = \sum_i^n \vec{v}_{g,i} \cdot dA_i \quad (5.29)$$

Ажурирање NM подразумева решавање једначине (5.26). Померање унутрашњих чворова мреже се дефинише Лапласовом једначином (5.30). При чему је ς корекциони коефицијент који контролише расподелу чворова.

$$\nabla \cdot (\varsigma \nabla x) = 0 \quad (5.30)$$

Чворови NM су на граничним површима стационарни, а на осталом делу NM зависе од претпостављене нестационарности система, Сл.5.13. Ово се не може рећи за аероеластична опструјавана тела. У овом систему потребно је решити извод разматране компоенте брзине нормалне на површ зида/границе домена. Овај услов се преноси и на тачност самог CFD прорачуна јер се грешка прорачуна смањује уколико се елементи ближе границама нумеричког домена мање деформишу. То се може постићи увођењем непосредне зависности кретања свих чворова у тој зони са моделом кретања NM зида домена, што је омогућено слагањем унапред задатих брзина кретања сваког елемента.



Слика 5-14: Расподела брзина у прорачунским чворовима контуре опструјаваног аеронееластичног тела [161].

На основу изнетог и преузимајући ознаке са Сл.5.14 можемо дефинисати кретање у правцу x -осе у произвољној тачки P унутар домена Ω ограниченог Ω_1 -унутрашњом и Ω_2 -спољашном границом једначином (5.31).

$$v_g(P) = \frac{1}{2\pi} \left[\int_{\partial\Omega_2} \ln r \frac{\partial v_g}{\partial n} ds - \int_{\partial\Omega_1} v_g \frac{\partial}{\partial n} \ln r ds \right] \quad (5.31)$$

Једначина (5.31) се нумерички решава уз претпоставку да је непозната функција константна унутар свог сегмента односи странице на спољњој граници. Тиме се систем своди на проблем записан у матричном облику једначином (5.32).

$$\begin{aligned} Ax &= b \\ x &= A^{-1}b \end{aligned} \quad (5.32)$$

Елементи матрице и детаљан начин решавања дати су у [130], [161], [177], [178].

Основна предности ове методе јесте једноставност имплементације и показује добре резултате код случајева са малим деформацијама мреже, док код већих деформација може довести до инверзије елемената што резултује драстичном појавом грешке приликом CFD.

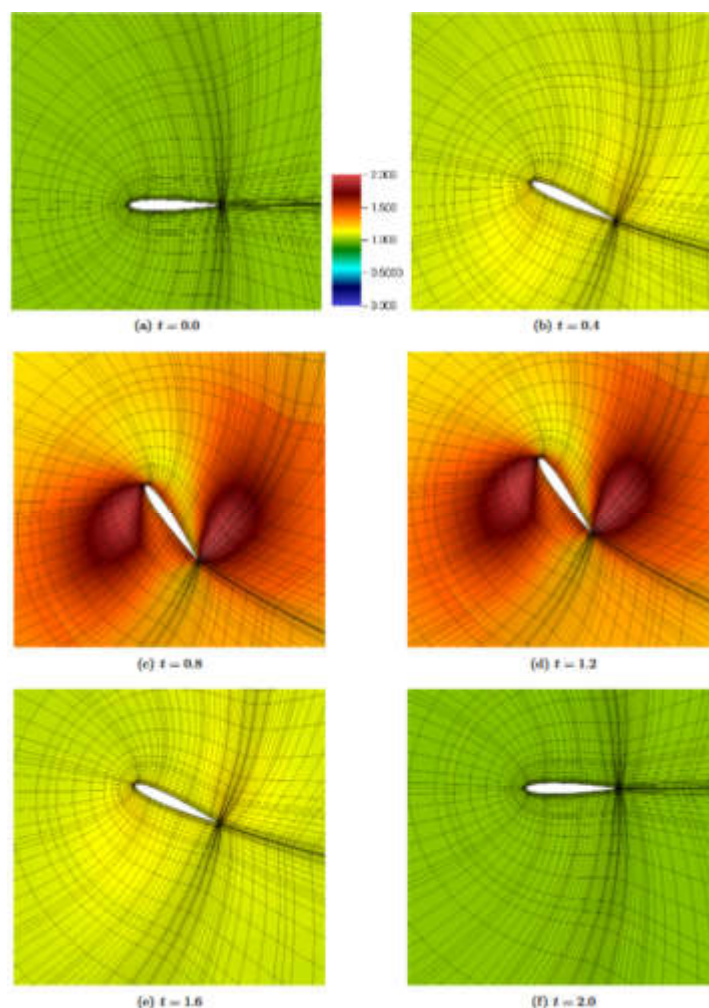
5.2.7.2. Еластични модели (енгл.-*Spring Analogy Method*)

Прорачунска мрежа се може моделовати као еластична при чему се прорачунски елементи дефинишу према законима еластичне механике, једначина (5.33) представља систем Ламеових једначина за еластичност.

$$\mu \nabla^2 v + (\lambda + \mu) \nabla(\nabla \cdot v) = 0 \quad (5.33)$$

При чему су λ и μ Ламеови параметри који дефинишу еластичне особине хипотетичког материјала мреже. Решавањем овог система, чворови се премештају тако да одрже равномерност мреже.

Пример оваквог моделовања мреже приказан је на Сл.5-15 [179] где је приказан ток динамичке промене мреже 2D моделовања опструјавања аеропрофила.



Слика 5-15: Динамика еластичне промене мреже током симулације пропињања аеропрофила [179].

Полазећи од почетног стања мреже Сл.5-15а гранични чворови се налазе на дефинисаним почетним позицијама применом деформисања NM линеарно еластичном методом на делу Сл.5-15.б гранични чворови мреже се премештају пратећи прописано кретање објекта. Унутрашњи чворови се померају тако да задовоље услове еластичности, односно NM остаје конзистентна без преклапања и дегенерације елемената. Када се CFD моделовањем жели описати опструјавање аеропрофила са осцилаторним кретањем мрежа прати кретање граничне површине, а на сликама се примећује да ова метода осигурава да се елементи равномерно распореде без колапса. За случајеве велике деформације неопходно је применити друге технике моделовања мреже.

5.2.7.3. Мреже са прегенерисаним зонама (енгл.-Overset или Chimera Meshes)

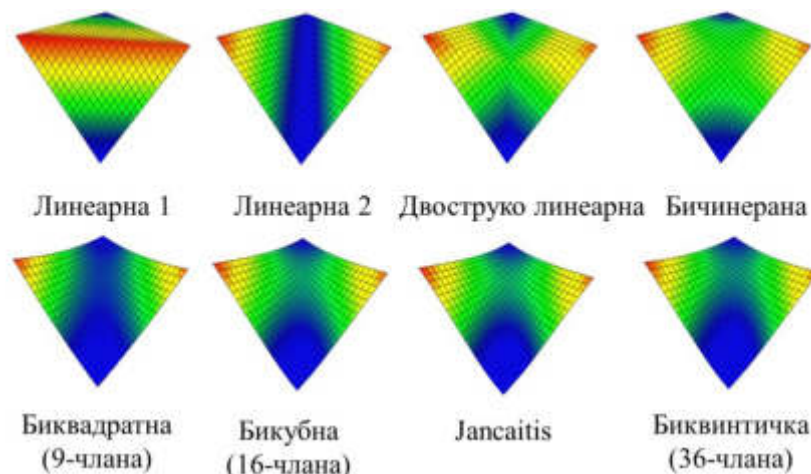
Мреже са прегенерисаним зонама, познате као Overset Meshes или Chimera Meshes, представљају напредну технику у CFD симулацијама која омогућава употребу више независних, преклапајућих мрежа у оквиру истог рачунског домена. Ова метода је посебно корисна када се моделира кретање тела или сложене геометрије које захтевају локално фино мережање, без потребе за глобалним поновним генерисањем мреже [180].

Уместо једне униформне мреже, ова техника користи више засебних мрежа које се преклапају. Једна мрежа је најчешће стационарна и дефинише позадински флуидни домен, док се друге мреже налазе око покретних тела и крећу се независно. За пренос информација између ових мрежа користе се интерполативни алгоритми, тако да када генеришемо две или више преклапајућих мрежа $\Omega_1, \Omega_2 \dots \Omega_i$, променљиве попут брзине, притиска и густине морају бити правилно пренете из једне мреже у другу.

$$\phi_{interpolacia}(x) = \sum_{i=1}^N \omega_i \phi_i \quad (5.34)$$

Једначина (5.34) представља интерполацину функцију величине ϕ интерполационим тензорским фактором ω_i . Најчешће коришћени интерполационе методе у CFD су:

- Линеарна интерполација [181];
- Лагранжова полиномска интерполација [182];
- Сплајн интерполација [183];
- Кригинг интерполација [182].



Слика 5-16: Примери интерполације прорачинске мреже у зависности од реда интерполације [181].

Мреже са прегенерисаним зонама представљају моћну технику за симулацију покретних NM. Њихова флексибилност омогућава прецизно моделирање сложених кретања без потребе за компликованим поновним генерисањем мреже. Ипак, цена овог приступа је повећана рачунска сложеност и неопходност тачне интерполације података.

5.2.7.4. Модел клизне мреже (енгл.-*Sliding Mesh Model*)

Модел клизне мреже је техника која се користи за симулацију релативног кретања између различитих делова прорачунске мреже. Овај модел се најчешће примењује код ротирајућих компоненти, попут пропелера, турбина, мешача и компресора, где је неопходно тачно моделовање нестационарних ефеката и интеракција између ротирајућих и стационарних делова.

Основни концепт ове технике је да се CFD домен дели на две или више зона, где једна зона припада ротирајућем делу а друга је стационарна. Уместо да се мрежа динамички деформише, као код динамичких мрежа, овде цела зона ротира као чврст склоп кога чине ротирајуће тело и припадајућа мрежа која га окружује.

У зони додиривања стационарне и нестационарне мреже налази се клизајући интерфејс⁴ где се подаци о протоку (брзина, притисак, турбулентне величине) интерполирају између зона.

У моделу клизних мрежа ротација једног дела мреже у односу на други постиже се решавањем трансформисаних Навије-Стоксових једначина у ротирајућем референтном систему. Ако је угаона брзина ротације ω , а радијални вектор од осе ротације до тачке $\mathbf{P}$ у флуиду Γ_P , тада је брзина ротације дефинисана једначином (5.35)

$$\mathbf{v}_r = \omega \times \mathbf{r}_P \quad (5.35)$$

Ротација мреже се одвија унутар цилиндричног под-домена, а интерфејс између ротирајуће и стационарне зоне захтева интерполацију података, дефинисану једначином (5.36)

$$\vec{v}_{rel} = \vec{v} - \vec{v}_r \quad (5.36)$$

Где је $\mathbf{v}_r$ брзина ротације мреже. Користећи ротирајући референтни систем, потребно је модификовати Навије-Стоксове једначине уводећи Кориолисову и центрифугалну силу тако да добијемо:

$$\frac{\partial \vec{v}_{rel}}{\partial t} + (\vec{v}_{rel} \cdot \nabla) \vec{v}_{rel} + 2\vec{\omega} \times \vec{v}_{rel} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_P) = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \vec{v}_{rel} \quad (5.37)$$

При чему трећи члан једначине представља Кориолисове силе а четврти члан центрифугалне силе, ν је кинематичка вискозност.

На граници између ротирајуће и стационарне зоне, подаци се преносе користећи линеарну интерполацију или сложеније методе Лагранжа или Кринга.

При трансферу података, брзине на интерфејсу морају бити конзистентне, што значи да се брзина честица у стационарној зони мора трансформисати у ротирајући референтни систем.

Ова техника се одликује прецизним моделовањем временски зависног струјања. За разлику од од претходно изнетих метода ова узима у обзир нестационарне ефекте, што га чини погодним за аеродинамичке анализе и симулације са флукуацијама притиска и оптерећења. Овај метод може да моделира велике брзине ротације без нумеричких грешака везаних за граничне услове

⁴ Interface- је тачка или површина на којој се срећу две ствари различите природе

и при томе нема потребе за поновним генерисањем мреже, што му даје огромну предност у односу на динамичке моделе.

Ограничења употребе ове технике представљају могуће интерполационе грешке на клизећем интерфејсу ако је мрежа неадекватно постављена. Пошто модел прати стварну динамику ротације, корак времена мора бити довољно мали да ухвати промене у положају мреже. Незаобилазно је нагласити да је цена експлицитне нестационарности већа потрошња рачунарских ресурса у односу на стационарне моделе.

5.2.7.5. Поновно генерисање мреже (енгл.-*Remeshing*)

Поновно генерисање или прилагођавање прорачунске мреже током симулације је процес који се примењује како би се одржао квалитет и тачност прорачунске мреже. Ово је посебно важно у случајевима када се јављају велике деформације домена, као што су кретање опструјаваног тела, флуидно-структурне интеракције, ерозија или нагомилавање материјала и/или моделовање кретања слободне површине.

Поновно генерисање мреже (у даљем тексту *ремешинг*) може бити локално, код којег се мења само део мреже који губи квалитет, без промене осталих региона. Процес се састоји од додавања нових чворова у зонама великих градијената промена, затим брисања непотребних чворова у зонама малих градијената и преуређивање елемената, на пример трансформација тетраедара у хексаедре. Локални ремешинг одржава иницијалну топологију мреже, али може довести до непожељне анизотропије мреже.

Ипак, бржи је и ефикаснији облик од глобалног ремешинга, који регенерише мрежу у читавом NM на основу граница и објеката чиме осигурава висок квалитет мреже, избегава проблем акумулирања грешака али је веома захтеван у рачунском смислу.

Симбиоза локалног и глобалног ремешинга јесте динамичко генерисање мреже које користи критеријуме као што су угао међу неумеричким елементима, детерминанту Јакобијеве матрице и метрике изобличења. Овим се добија баланс између тачности и рачунске ефикасности.

Мрежа се третира као еластично тело и деформација мреже се рачуна према (5.33). При томе се користе алгоритми засновани на Делонијевој триангулацији што спречава изобличење NM.

Позиција чворова се при томе се мења без промене топологије мреже (5.38)

$$x_i = \frac{1}{N} \sum_{j \in N_i} x_j \quad (5.38)$$

При чему су индексом i означене нове позиције чворова а са j позиције суседних чворова.

Ремешинг је кључна техника за прецизне CFD симулације у случајевима где је неопходно очувати квалитет мреже током временске еволуције система. Избор одговарајуће методе зависи од конкретног проблема – да ли је неопходно локално или глобално регенерисање мреже, као и да ли је потребан динамички приступ.

5.2.7.6. Одабир методе за формирање NM за случајеве нестационалног струјања

Методе за формирање прорачунске мреже у разматране у овом поглављу са различитим приступима генеришу NM које су временски променљиве и синхронизоване са моделованим нестационарностима струјања флуида. У циљу правилнијег и експедитивнијег одабира исте/истих табеларно, Таб.5-4, су приказане основне особине метода са предностима и недостацима.

Табела 5-4: Преглед метода за формирање нестационарних прорачунских мрежа.

Метода	Опис	Математичка основа	Предности	Недостаци	Примена
Динамичке мреже	Мрежа се мења у реалном времену са кретањем тела	Линеарна еластична анализа; Лапласово уједначење	Висока тачност без интерполације	Неповољна за струјања са великим деформацијама	Флуидно-структурна интеракција (лопатице компресора)
Мреже са регенерисаним зонама (Overset)	Више преклапајућих мрежа.	Интерполација (Линеарна, Лагранжова, Кригинг)	Омогућава велике покрете тела	Интерполациони губици, повећан рачунски трошак	Моделовање нестационарног лета авиона.
Клизајуће мреже	Ротационе мреже које клизе дуж интерфејса.	Нумеричка интерполација на клизним интерфејсима	Погодна за периодично кретање	Проблеми са не-континуитетом на интерфејсу	Обртно кретање око основних оса летелице
Регенерисање мреже	Поновно генерисање мреже у току симулације	Делаунејева триангулација, адаптивно рафинисање	Одржава квалитет мреже	Висок рачунски трошак	Струјања са великим деформацијама, ударни таласи, аероеластичност
Адаптивно рефинисање мреже	Локално згушћавање мреже у зонама интересовања	Грешка заснована на хесијану	Оптимална прецизност са мање елемената	Неопходан ефикасан управљачки алгоритам	Турбулентна струјања, ударни таласи

Може се закључити да одабир методе треба заснивати на основу врсте извора нестационарности. Тако за мале помераје тела и деформабилне геометрије предлог одабира су динамичке мреже (енгл.-Moving Mesh Methods) као оптимални избор због очувања тачности без интерполације; За велика кретања тела унутар домена мреже са регенерисаним зонама (енгл.-Overset) омогућавају прецизно праћење тела, али по цену сложености интерполације; За ротациона тела (нпр. симулације ротационог кретања око оса летелице, елисе, турбине) клизајуће мреже су ефикасан метод са ограничењима на интерфејсима између зона; За проблеме са великим деформацијама мреже оптимално је користити методу регенерисања мреже којом се спречава губитак квалитета мреже; За локалну оптимизацију тачности без непотребног повећања броја чворова предлог је адаптивно рафинисање.

5.2.8. Процена квалитета прорачунске мреже

Просторна дискретизација као корак у решавању NSE једначина у многоне утиче на квалитет CFD симулације и тачност резултата. Било да се ради о структурисаним, неструктурисаним, хибридни или динамичким прорачунским мрежама мора се обратити пажња како геометријске карактеристике мреже могу утицати на крајни исход решења. Тако се из могућих грешака при спровођењу CFD могу извући општи геометријски показатељи прорачунске мреже из којих следеју препоручене вредности чијим задовољавањем током дизајна NM се стиче потребан предуслов за добујање прихватљивог решења.

5.2.8.1. Ортогоналност прорачунске мреже

Полазећи од дефиниције метода и израза за просторне деривативе у методама коначних запремина, коначних елемената или коначних разлика може се закључити да је идеалан прорачунски облик ћелија чије су странице што ближе квадратним формама. Наиме, грешке проистекле из пројекције нормала и тангенцијалних компоненти се на тај начин свде на

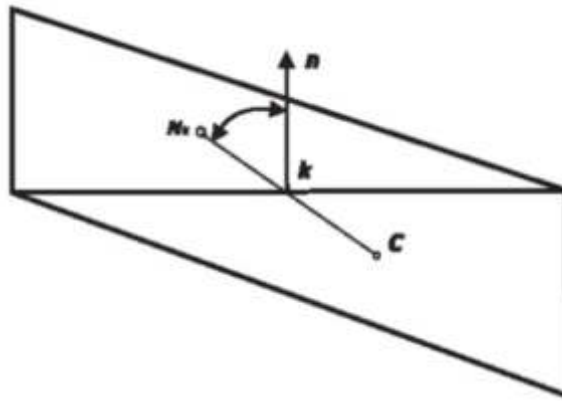
минимум. Просторни градијент изразимо помоћу Гаусове теореме о дивергенцији и прикажимо у облику једначине (5.39).

$$\int_V \nabla v dV = \oint_S v \vec{n} dS \quad (5.39)$$

На ортогоналној мрежи, нормални вектор $\vec{n}$ тачно показује у правцу израчунавања протока, док на неортогоналној мрежи треба увести корекцију за тангенцијалне компоненте, што доводи до додатне грешке. Градијент се тада у методи коначних запремина апроксимира једначином (5.40).

$$\nabla v \cong \frac{v_B - v_A}{d} \quad (5.40)$$

Где је d растојање између два централна чвора N_k и C , Сл.5-17.



Слика 5-17: Пример неортогоналности [166].

Ако је мрежа није ортогонална мора се увести корекција због угла θ који заклапају вектори $\vec{d}$ и нормала $\vec{n}$, тако да једначина (5.38) добија корективни фактор O у функцији косинуса угла θ , једначина (5.41).

$$\nabla v \cong \frac{v_B - v_A}{d} + O(\cos \theta) \quad (5.41)$$

Овде можемо закључити да са порастом угла θ грешка постаје значајна. У случају ортогоналне мреже, нормални вектори површина у методу коначних запремина тачно су поравнати са правцима апроксимације градијената, што доводи до тачнијих нумеричких прорачуна. Насупрот томе, код неортогоналних мрежа израчунавање градијената захтева увођење додатних корекционих чланова, што доводи до већих грешака и успорава конвергенцију решења. Са порастом неортогоналности расте и број итерација потребан за постизање конвергенције, што је повезано са појавом тзв. нумеричке дифузије.

Квантитативна мера ортогоналности се процењује управо дефинисаним углом θ , једначина (5.42). Идеалан случај је при $\theta=0$.

$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{\vec{n} \cdot \vec{d}}{|\vec{n}| |\vec{d}|} \right) \cong 0 \quad (5.42)$$

За лошу ортогоналност се сматра ако је:

$$\theta > 20^\circ - 30^\circ \quad (5.43)$$

Током дизајнирања мреже ортогоналност се може побољшати на следеће начине:

- Геометријском поделом мреже, односно, користити структурисане мреже, користи технику креирања мреже која прати контуре препрека (енгл.-body-fitted);
- Вршити уравнивање (пеглање-глаголање) мреже већ поменутим методама Лапласа или неком од еластичних метода рендеровања;
- Аутоматско прилагођавање распореда чворова како би се минимизовала неортогоналност;
- Коришћење „multi-block“ стратегије, формирањем домена од више структурисаних под-домена којима се може уз примену прикладних полиедарских облика приближити препорученим вредностима геометрије мреже.

5.2.8.2. Закривљеност ћелија мреже (енгл.-Mesh Cell Curvature)

Одступање облика ћелије од идеалне геометрије се дефинише као Закривљеност ћелија мреже (енгл.- Mesh Cell Curvature), што може утицати на тачност и стабилност CFD симулација. Закривљеност је посебно битна у структурисаним и неструктурисаним мрежама које користе криволинијске елементе, као што су високо-редни коначни елементи у спектралним методама или закривљени елементи у CFD анализама спроведеним методама коначних запремина.

Закривљеност ћелија се може квантификовати различитим метричким критеријумима:

- Геометријска закривљеност (енгл.-Curvature Deviation)- Ако је мрежа дефинисана у криволинијском координатном систему, степен закривљености ћелије може се изразити преко средње једначина (5.44) и Гаусове закривљености површи ћелије дефинисане једначином (5.45).

$$H = \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2) \quad (5.44)$$

$$K = \kappa_1 \cdot \kappa_2 \quad (5.45)$$

При чему су κ_1 и κ_2 главне кривине у две ортогоналне координатне осе.

- Деформација елемента кроз Јакобијан - детерминанту трансформације координата из референтног у физички простор може се користити за мерење закривљености ћелије:

$$J = \det\left(\frac{\partial X}{\partial \xi}\right) \quad (5.46)$$

Где је J позитиван и константан за праволинијске елементе, али варира за закривљене елементе. Мерење његове минималне и максималне вредности даје информацију о степену деформације.

- Искошеност (енгл.-Skewness) дефинисана као степен деформације ћелија у односу на идеалан облик. Широко коришћене су две дефиниције за израчунавање искошености и имају своју примену у односу на тип NM:
 - Геометријска искошеност (енгл.-Geometric Skewness), дефинисана једначином (5.47), при чему је θ_{max} највећи угао у ћелији а θ_{ideal} угао у идеалној ћелији, за који се у зависности од облика ћелије узимају адекватне вредности правилне геометријске фигуре (нпр. 90° за квадрат или 60° за троугао).

$$Skewness = \frac{\theta_{max} - \theta_{ideal}}{\theta_{max}} \quad (5.47)$$

- Искошеност базирана на разлици волумена (енгл.-Equilateral Volume Skewness) се често користи за 3D мреже. Она се дефинише једначином (5.48) при чему је V_{ideal} запремина идеалне ћелије а V_{actual} запремина разматране ћелије.

$$Skewness = \frac{V_{ideal} - V_{actual}}{V_{ideal}} \quad (5.48)$$

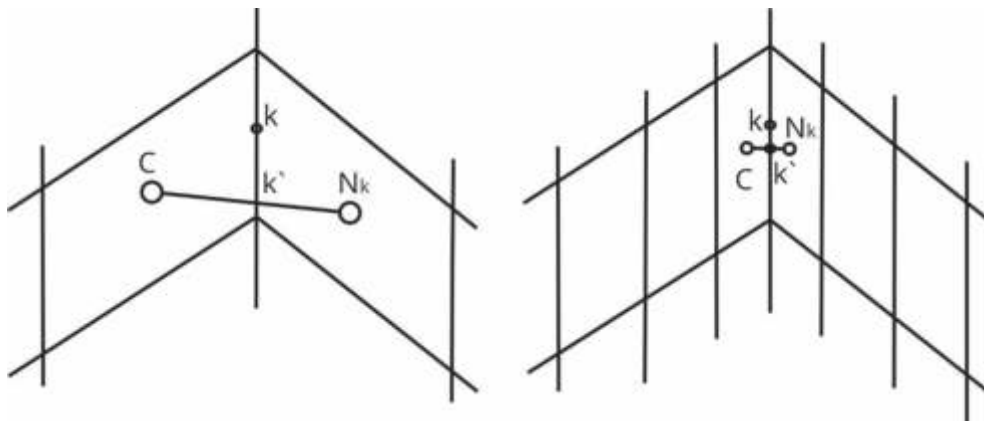
Употребом обе дефиниције се добијају вредности које се крећу у вредности од 0 до 1 при чему је квалитет мреже лошији ако ћелије теже вредности 1. Препоручене вредности за проверу квалитета мреже су приказане табеларно у Таб.5-5.

Табела 5-5: Параметарске вредности степена искошености ћелија мреже [184].

Вредност искошености (енгл.Skewness)	Тумачење вредности
0	Савршено обликована ћелија
0 - 0,25	Врло добар квалитет
0,25 – 0,5	Добар квалитет
0,5 - 0,75	Прихватљив квалитет
>0,75	Лоша мрежа (могуће нестабилности)
<0,85	Гранични слој (RANS)
>0,9	Сигурна нестабилност симулације
1	Дегенерисана

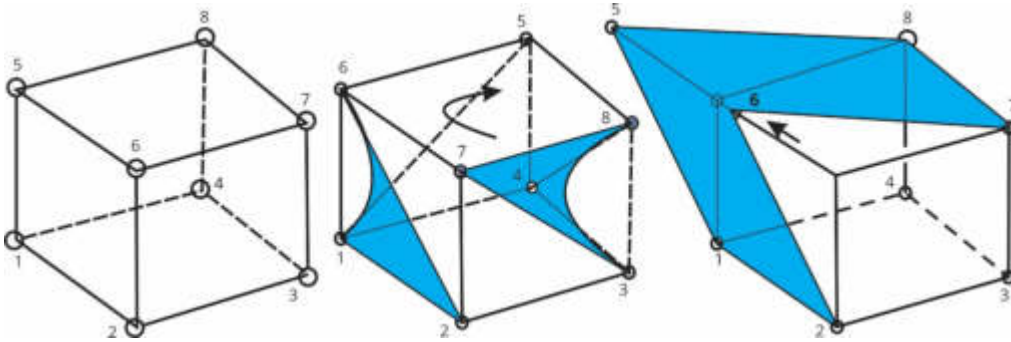
5.2.8.3. Правило средње тачке

Према Ферзигеру и Перићу [166] квалитет мреже се може проценити на основу правила средње тачке, односно да линија која спаја центре суседних прорачунских елемената треба да прође кроз центар заједничке странице, Сл.5-18.



Слика 5-18: Пример лоше и идеалне апроксимације мреже на основу параметра средње тачке [166].

Ово параметар се објашњава тиме да у случају када се тачка пресека k' и средња тачка странице k не поклапају вредност у тачки k' нема тачност другог реда и да је неопходно примењивати корективне факторе. Ови корекциони фактори се у комерцијалним софтверима аутоматски примењују са градијентом одступања од идеалног.



Слика 5-19: Пример лоше и идеалне апроксимације мреже на основу параметра средње тачке [166].

Појаве закривљености у просторним прорачунским елементима су приказане на Сл.5.19. Фигура у средини представља закривљеност ћелије као последица утицаја граничне површи неправилног геометријског облика. Овакав пример неправилности је последица уметнуте ћелије између граничних површи, док фигура десно приказује издуженост ћелије као последица неадекватног попуњавања прорачунског домена дефинисаним обликом ћелије. Оба случаја могуће је кориговати уситњавањем прорачунске мреже у првом случају, односно применом адекватног облика ћелије у другом случају у зонама очекивања неправилности.

5.2.8.4. Размерни однос прорачунских елемената

Однос дужих и краћих димензија ћелије у NM се назива размерни однос (енгл.- Aspect Ratio – у даљем тексту AR) (5.49).

$$AR = \frac{L_{max}}{L_{min}} \quad (5.49)$$

Утицај односа површина на CFD симулације се огледа у томе да за велике вредности ($AR \gg 1$) долази до појаве неправилног преноса граничних услова у матрицама векторског записа. Ова појава проузрокује спору конвергенцију или нумеричке нестабилности. У турбулентним зонама се неправилно преносе вредности енергетских величина (нп. градијент притиска). Препорука је да у зони граничног слоја AR буде висок у нормалном правцу (танке ћелије), али низак у осталим правцима.

Код неких комерцијалних софтвера, попут ANSYS Fluent, користи се аутоматска корекција за велике размерне односе у методи коначних запремина. Наводе се у разним литературама различите препоручене вредности овог параметра. Током овог истраживања придржавало се начела да оптимални однос површина варира од зоне у слободном струјању $AR \approx 1-5$, док је у зони унутар граничног слоја $AR \approx 20-200$ (зависно од y^+ критеријума).

Важно је напоменути да оптималан размерни однос зависи од конкретног проблема, те је препоручљиво спровести студију осетљивости мреже како би се обезбедила тачност и стабилност CFD симулације.

5.2.8.5. Довољна густина NM

Довољна густина мреже зависи од природе протока, CFD методе и жељене тачности резултата. Опште смернице су да се за ламиарна струјања мања густина мреже може бити довољна јер су градијенти брзине и притиска мањи, док је за турбулентни ток потребна је висока густина мреже, посебно у зони граничног слоја.

У зонама граничног слоја препоручено је најмање 10-20 ћелија по дебљини слоја за RANS, а за LES 30-50 слојева. У зонама експанзионих таласа и ударних таласа препоручује се 20-30 ћелија по дебљини ових зона.

Да би се усвојио правилан дизајн мреже по питању довољности густине мреже, неопходно је извршити тестирање конвергенције мреже (енгл.- Grid Convergence Study) чиме се омогућава процена тачности решења у односу на густину мреже. Две широко примењиване методе за ову процену су:

- **Индекс конвергенције мреже (енгл.- Grid Convergence Index- у даљем тексту GCI).** Стандардизована метрика која процењује грешку дискретизације у нумеричким симулацијама. Обезбеђује униформан приступ извештавању о конвергенцији мреже и омогућава поређење различитих студија. Креирају се најмање три мреже различите густине, обично означене као груба, средња и фина мрежа. Однос рафинације мреже, r , дефинише се као однос корака мреже између две узастопне мреже [185]:

$$r = \frac{h_{gruba}}{h_{srednja}} \quad (5.50)$$

Симулације се изводе на свакој мрежи како би се добиле вредности одређене величине од интереса, као што је коефицијент отпора или брзина. Процена реда тачности p_r се врши уношењем резултата у једначину (5.51).

$$p_r = \frac{\ln \left(\frac{f_3 - f_2}{f_2 - f_1} \right)}{\ln r} \quad (5.51)$$

При чему су f_1 , f_2 и f_3 вредности величине од интереса на финој, средњој и грубој мрежи, респективно.

Израчунавање GCI између две мреже израчунава се према једначини (5.52).

$$GCI_{fina-srednja} = \frac{F_s \cdot |e|}{r^{p_r} - 1} \quad (5.52)$$

Где је e релативна разлика између решења разматраних мрежа, а F_s је фактор сигурности, чија је уобичајена вредности $F_s=1,25$ за случај када се разматрају три мреже.

Коначно, да би се осигурало да се решења налазе у асимптотском опсегу конвергенције (у даљем тексту-АОК), проверава се однос, једначина (5.53).

$$AOK = \frac{GCI_{srednja-gruba}}{r^{p_r} \cdot GCI_{fina-srednja}} \approx 1 \quad (5.53)$$

Ако је овај однос близу 1, претпоставља се да је решење у асимптотском опсегу.

- **Ричардсонова екстраполација** је техника која побољшава тачност нумеричких апроксимација проценом вредности величине од интереса при нултом кораку мреже [186].

Претпоставља се да се решење f може изразити једначином (5.54), где је $f_{h=0}$ тражена вредност у континууму, h корак мреже, а p ред тачности шеме.

$$f = f_{h=0} + a_1 h^p + O(h^{p+1}) \quad (5.54)$$

Ако су доступна решења на две мреже са корацима h_1 и h_2 , континуална вредност се процењује према једначини (5.55), где је $r=h_1/h_2$ однос рафинације, а f_1 и f_2 су решења на финој и грубој мрежи, респективно.

$$f_{h=0} = \frac{r^P f_1 - f_2}{r^P - 1} \quad (5.55)$$

Важно је напоменути да је Ричардсонова екстраполација најефикаснија када су решења у асимптотском опсегу конвергенције и када је познат ред тачности p .

Тестирање конвергенције мреже коришћењем GCI и Ричардсонове екстраполације је од суштинског значаја за процену тачности и поузданости нумеричких симулација. Ове методе омогућавају систематску процену грешке дискретизације и осигуравају да су резултати независни.

5.2.8.6. y^+ критеријум за гранични слој

Критеријум за гранични слој у CFD-у, са ознаком y^+ , је бездимензиона величина која се користи за процену величине прве ћелије у прорачунској мрежи у односу на вискозни подсистем граничног слоја. Овај параметар одређује да ли је мрежа довољно фина за тачно моделирање граничног слоја, односно да предвиди постојање турбулентних ефеката.

Бездимензиони критеријум граничног слоја се дефинише једначином (5.56), при чему је y удаљеност прве ћелије од зида, u_τ брзина трења, ν кинематичка вискозност, τ_w зидни напон трења и ρ густина флуида.

$$y^+ = \frac{yu_\tau}{\nu} \quad (5.56)$$

$$u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}$$

Препоручене вредности y^+ критеријума за гранични слој према [184] су дате у Таб.5-6.

Табела 5-6: Препоручене вредности y^+ критеријума за гранични слој према [37]

Турбулентни модел	Препоручени y^+ опсег	Опис примене
Стандартни $k-\epsilon$ (Wall Functions)	$0 < y^+ < 300$	Груба мрежа, користи се у инжењерским применама где није потребно тачно моделирање граничног слоја.
SST $k-\omega$ (Решавање граничног слоја)	$y^+ < 1$	Детаљно моделирање граничног слоја, захтева густу мрежу у близини зида.
Spalart-Allmaras	$y^+ < 5$	Једначине за гранични слој су решене без Wall Functions.
LES	$y^+ \approx 1$	Прва ћелија мора бити у вискозном подслоју, захтева веома фину мрежу.
DNS	$y^+ \approx 1$ и више од 100 слојева у BL	Најпрецизнији модел, директно решава све турбулентне скале без моделирања.

Вредност y^+ одређује избор турбулентног модела и густину мреже. За CFD симулације које се користе у инжењерској пракси се често користе вредности бездимензионог критеријума за гранични слој са функцијом утицаја зида ($y^+ > 30$), док се за прецизније симулације (SST

$k-\omega k-\omega$, LES) захтевају $y^+ < 1$ и густу мрежу у граничном слоју. DNS је најзахтевнији и практично неизводљив за инжењерске примене због огромног броја ћелија.

5.2.9. Смернице за процену и контролу квалитета прорачунске мреже у CFD анализама

Коначно, на основу изнетог у оквиру овог поглавља дате су сажете смернице са параметрима за процену мреже са препорученим вредностима приказане у Таб.5-7.

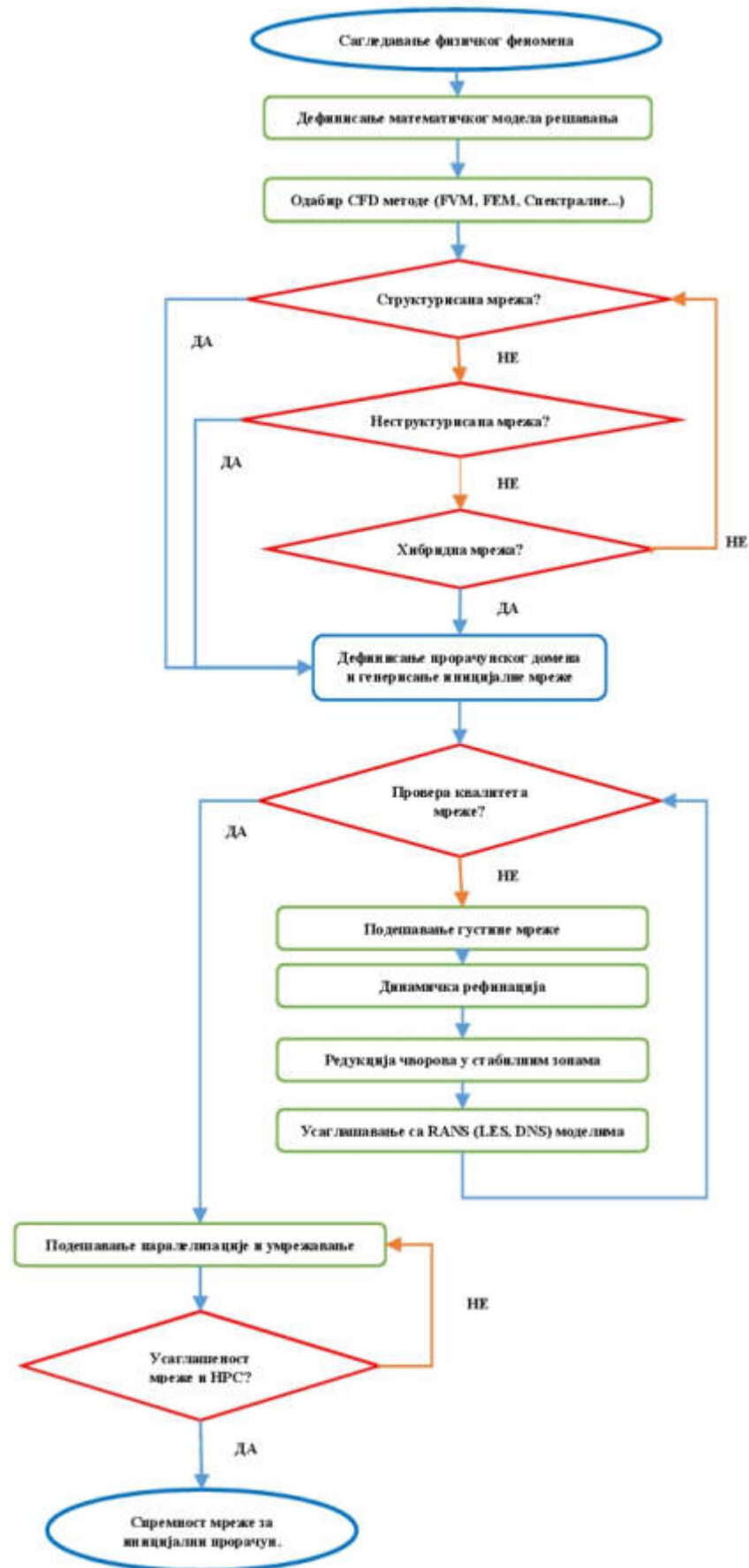
Табела 5-7: Смернице за процену и контролу квалитета прорачунске мреже у CFD анализама.

Параметар квалитета	Препоручене вредности	Значај и примена
AR (Aspect Ratio)	Гранични слој: 20–200 (зависно од y^+) Слободно струјање: 1–5	Однос дужине и ширине ћелије. Високе вредности могу довести до нумеричких грешака и нестабилности. Важан фактор за стабилност решача.
Искошеност (Skewness)	< 0,25: Одличан квалитет 0,25 – 0,5: Прихватљиво > 0,85: Лоша мрежа	Висока искривљеност може довести до грешака у градијентним прорачунима.
Ортогоналност	> 0,85: Одлично 0,7 – 0,85: Добро < 0,7: Потенцијални проблеми	Добра ортогоналност смањује пројекционе грешке код разликовних метода.
y^+ критеријум	Wall Functions: 30–300 SST $k-\omega k-\omega$: <1 LES: ≈ 1 DNS: ≈ 1 са 100+ слојева у BL	Критичан параметар за моделирање граничног слоја. Вредност зависи од изабраног турбулентног модела.
Густина мреже	Гранични слој: 10-20 слојева (RANS), 30-50 слојева (LES) Ударни таласи: 20-30 ћелија по дебљини шока Вртложна струјања: Довољно фина резолуција за LES/DNS	Довољан број ћелија у критичним регионима омогућава тачније решење.
GCI (Grid Convergence Study)	GCI метода (најмање 3 мреже различите густине) и Richardson екстраполација	Осигурава да решење није зависно од мреже и да је грешка у границама прихватљивости.
Закривљеност ћелија	<0,3	Контрола прецизности у областима са јаким закривљењем (нпр. профили крила, ротори).

5.2.10. Будућност аутоматског креирања мрежа

Креирање прорачунске мреже је сажето приказано дијаграмом тока процеса, Сл.5-20.

Намеће се закључак да је процес креирања NM сложен и да је при томе неопходно у неколико наврата вршити оптимизацију, верификацију и валидацију. Са развојем високоперформансних рачунара НРС и применом вештачке интелигенције (енгл.– Artificial Intelligence, у даљем тексту-АИ) у рачунарским симулацијама, долази до значајних помака у области аутоматског генерисања и оптимизације прорачунских мрежа у CFD-у. Ово не само да убрзава процес припреме мреже већ и побољшава квалитет решења уз мању рачунарску сложеност.



Слика 5-20: Дијаграм тока креирања прорачунске мреже у CFD анализи.

Традиционално, генерисање CFD мрежа захтева велики број подешавања и експерименталног подешавања параметара од стране стручњака. Са применом машинског учења (ML – Machine Learning) и дубоких неуронских мрежа (DNN – Deep Neural Networks), могуће је:

- Аутоматски препознати геометријске карактеристике и прилагодити стратегију мрежирања (структурисане, неструктурисане, хибридне мреже);
- Применити оптималне технике рафинације мреже у областима високих градијената;
- Учењем на претходним симулацијама, AI може предвидети поставке мрежа за нове проблеме, смањујући грешке и број пробних симулација.

Google DeepMind је већ развио AI системе за аутоматско решавање парцијалних диференцијалних једначина, што може бити примењено и на адаптивно CFD мрежирање [187].

Са растом сложености симулација, ефикасно коришћење HPC ресурса постаје критично. AI може значајно побољшати:

- Динамичку адаптацију мреже током симулације у реалном времену;
- Алокацију процесорских ресурса у паралелним CFD симулацијама како би се минимизовала латенција и убрзала конвергенција решења;
- Компресију и редукцију мрежа са повећањем тачности резултата.

Пример за то су HPC AI алати као што су TensorFlow HPC и DeepSpeed⁵ који се могу прилагодити за CFD примену, где AI модел предвиђа који сегменти мреже требају већу резолуцију у датом тренутку [188].

Класичне AMR методе користе фиксне критеријуме за одлуку када ће се мрежа побољшавати или користити. AI може омогућити:

- Унапређену адаптацију мреже на основу претходних CFD симулација;
- Предвиђање зона турбуленције и унапред припрему локалног згушњавања мреже;
- Редукцију непотребног рафинисања, што смањује трошкове симулације.

Пример су AI алати у аутомобилској индустрији који се већ користе за оптимизацију CFD мрежа у аеродинамици ваздухоплова и спортских возила [189], [190].

У случају динамичких мрежа AI може:

- Унапред предвидети деформације мреже како би се избегло губљење квалитета елемената;
- Оптимално премештање чворова у случају великих геометријских промена,
- Решавање тополошких промена без ручне интервенције.

Пример су AI алати у аутомобилској индустрији који се већ користе за оптимизацију CFD мрежа у аеродинамици ваздухоплова и спортских возила [191].

⁵ www.deepspeed.ai

На основу ове кратке анализе се може закључити да са растућом сложеностју CFD симулација и све већим захтевима за тачност и ефикасност, мрежирање путем вештачке интелигенције (енгл.-AI-driven meshing) постаје неизбежан корак у будућности CFD-а. Смањује време потребно за припрему мреже и смањује људску интервенцију, затим максимално искоришћава НРС ресурсе за брже и тачније симулације и омогућава интелигентну адаптацију мреже на основу стварних потреба симулације.

Са тренутним развојем AI-а и НРС технологије, у будућности можемо очекивати потпуно аутономне CFD симулације, где ће AI креирати, оптимизовати и прилагођавати прорачунске мреже без потребе за ручним подешавањем, Курц (Kurz) са сарадницима [192].

6. Верификација и валидација CFD симулација

Кораци процеса моделовања реалног физичког струјања путем CFD су приказани кроз претходна поглавља. Међутим, поставља се питање, да ли је креирани поступак и изабрана решења правилан и да ли се решења таквог модела могу прихватити као релевантна и у ком нивоу разматрања. Наиме, ниво прихватљивости решења на нивоу инжењерске праксе не мора бити прихватљив на нивоу научне праксе, јер је могуће да не пружа довољан број информација које су релевантне у сагледавању законитости специфичног струјања које се разматра са научног становишта.

Широко су распрострањени и лако доступни многобројни примери CFD симулација који приказују резултате прорачуна, али је ретко присутан свеобухватан процес који доказује и показује ниво тачности.

Кроз ране радове 1990-тих се уводе појмови верификације и валидације CFD симулација, а AIAA (American Institute of Aeronautics and Astronautics) почиње да развија препоруке за CFD анализу. Наиме, под верификацијом се сматра провера тачности нумеричког решења (независност од мреже, резидуали, конзервација масе, енергије и импулса), док се под валидацијом подразумева поређење добијених CFD резултата са експерименталним или референтним подацима.

Крајем 1998. године AIAA издаје "Guide for the Verification and Validation of Computational Fluid Dynamics Simulations" [193], који дефинише процедуре за верификацију нумеричких метода (дискретизација, конвергенција, мрежа) и критеријуме за валидацију CFD модела на основу експерименталних података. Америчко друштво машинских инжењера (ASME) објављује стандард V&V 20-2002 под називом: "Standard for Verification and Validation in Computational Fluid Dynamics and Heat Transfer" [194], што постаје први широко прихваћен оквир за верификацију и валидацију у CFD симулацијама. Током 2020-тих додатно се разрађују критеријуми, укључујући употребу унетости грешке (енгл.-uncertainty quantification, UQ) [195], [196], [197].

Прегледом поменутих референци ипак се даје слобода ауторима да, у зависности од природе конкретног физичког проблема и аналитичке и нумеричке могућности CFD симулације, прилагоде алгоритам верификације и валидације. У овом истраживању се полази од претпоставке да се разматра случај широко распрострањеног физичког облика струјања чија се интерпретација кроз CFD моделовање примењује првенствено у инжењерске сврхе, као и у научне сврхе у зависности од расположивог рачунарског ресурса. Алгоритам тока је разрађен у складу са практичним делом истраживања и приказан у овом поглављу.

6.1. Верификација у CFD анализи

Верификација у CFD-у има за циљ осигурати да је нумеричко решење прецизно и да није под утицајем грешака које произилазе из мреже, нумеричке дискретизације или конвергенције.

Методе верификације који се у пракси користе, на основу [198], су:

- *Аналитичка верификација*: Ова метода користи аналитичка решења познатих проблема или једноставних тест примера како би се проверила тачност софтвера за симулацију.
- *Верификација кодирања*: Ова метода обухвата проверу имплементације софтвера за симулацију како би се осигурало да је исправно написан и извршава се у складу са спецификацијама.
- *Верификација модела*: Ова метода се користи за проверу тачности математичких модела који се користе у симулацији. То може укључивати упоређивање израчунатих резултата модела са познатим експерименталним подацима или референтним моделима.

Верификација CFD прорачуна подразумева проверу да ли су нумеричке методе и алгоритми правилно имплементирани и да ли решење задовољава очекиване критеријуме тачности и стабилности. Овај процес укључује неколико критичних корака, који осигуравају да резултати нису артефакти нумеричких грешака, већ верно представљају математички модел који се решава [198], [199], [200].

6.1.1. Независност решења од мреже (Grid Independence Study)

Први критичан корак који осигурава прихватљивост решења представља провера независности решења од прорачунске мреже и он се одгледа у следећем:

- Спровођење прорачуна на најмање три различите густине мреже. Најмање три различите мреже (груба, средња и фина) користе се за поређење решења. Ако се резултат значајно мења при преласку са грубе на средњу мрежу, а затим се стабилизује на финој, може се закључити да је фина мрежа довољна за добијање тачног решења.
- Коришћење GCI (Grid Convergence Index) за квантитативну процену грешке се користи за процену грешке повезане са дискретизацијом мреже. Он се израчунава на основу две узастопне резолуције мреже и омогућава процену степена зближавања решења.
- Праћење да ли се резултати уједначавају при све финијој мрежи. Ако промена решења између две најфиније мреже постане занемарљива, може се закључити да је решење независно од мреже и да даља рафинација неће значајно утицати на резултат.

6.1.2. Конвергенције решења.

Конвергенција решења је критичан аспект CFD прорачуна јер осигурава да се нумерички алгоритам стабилно приближава коначном решењу.

Праћење резидуала. У општем случају, критеријум конвергенције заснива се на смањењу резидуала (грешке-одступања у нумеричком решавању једначина). У RANS симулацијама, резидуали уравнотежења масе, импулса и енергије треба да падну испод 10^{-6} , док LES и DNS захтевају још ниже вредности [201].

Контрола глобалних интегралних вредности (нпр. аеродинамичке силе, укупни проток масе). Конвергенција се такође прати преко стабилности интегралних вредности, као што су аеродинамички коефицијенти, укупни проток масе кроз домен и стабилност температурног или брзинског профила у времену.

6.1.2.1. Провера локалне конзервације масе, импулса и енергије.

CFD методе морају задовољити основне принципе физике. Ако у решењу постоје значајне неравнотеже у очувању масе, импулса или енергије, то указује на нумеричке грешке или на недовољно конвергирану симулацију.

Критеријум провере масе се рачуна на основу израза (6.1), где је одступање треба да буде мање од 0,1% за конвергирану симулацију.

$$\varepsilon_m = \frac{\sum_{inlet} \dot{m} - \sum_{outlet} \dot{m}}{\sum_{inlet} \dot{m}} \cdot 100\% \quad (6.1)$$

За случај компресибилног струјања на исти начин се додатно проверавају варијације густине унутар NM.

Критеријум провере импулса се у стационарним струјањима проверава векторским збиром свих инерцијалних сила, тако да је једначина (6.2) услов стационарности.

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i = 0 \quad (6.2)$$

Док се очување импулса проверава анализом укупне силе која делује на флуид унутар домена. Ако је решење тачно, укупна сума свих сила (притисак, вискозност, телесне силе) мора бити у равнотежи са променама у импулсу.

Ако је CFD модел стационарни, резултујућа сила у свим правцима мора бити близу нуле.

У нестационарним анализама импулс флуида треба да прати физички очекиван тренд без наглих осцилација.

Критеријум промене енергије аналогно (6.1) израчунава се као:

$$\varepsilon_e = \frac{Q_{inlet} - Q_{outlet}}{Q_{inlet}} \cdot 100\% \quad (6.3)$$

Где је Q укупни топлотни флуks кроз граничне услове, укључујући конвекцију, проводност и зрачење. За случај стационарног струјања, одступање треба да буде мање од 1%.

6.1.3. Тестирање нумеричке стабилности и осетљивости.

Тестирање нумеричке стабилности и осетљивости је критичан корак у верификацији CFD симулација. Циљ овог процеса је да се процени колико је решење осетљиво на промене у временском кораку, методама граничних услова и коришћеним NM. Ако решење показује нестабилности или велику осетљивост на мале промене у овим параметрима, то може указивати на потенцијалне грешке у подешавању симулације, недовољно квалитетну мрежу или проблеме са конвергенцијом.

6.1.3.1. Промена временског корака у нестационарним симулацијама.

У нестационарним CFD симулацијама, избор временског корака је од кључног значаја за тачност и стабилност решења. Ако је временски корак превелик, решење може постати нестабилно, док премали корак може довести до непотребног расипања рачунарског ресурса.

Критеријум за временски корак представља Курантов број (CFL–Courant–Friedrichs–Lewy), о чему је већ било речи у поглављу 5.1.3.

Промена временског корака и праћење стабилности се врши одабиром различитих вредности Δt које се уклапају у препоруку Курантовог броја и при томе извршити проверу варирања резултата. Обратити пажњу на појаву осцилација у решењу које могу указивати на нестабилност.

Уколико промена временског корака доводи до драстично различитих резултата, можда је потребно побољшање мреже или одабир стабилније NM.

6.1.3.2. Осетљивост на граничне услове.

Гранични услови значајно утичу на CFD решење, посебно у ситуацијама где домен није довољно велик да омогући природан развој струјања. Важно је тестирати стабилност и физичку оправданост решења при различитим поставкама граничних услова.

Током процене осетљивости кода на граничне услове користе се три следеће методе:

- *Промена позиције излазног граничног услова.* Наиме, уколико померање излазне граничне површи (линије у 2D) утиче на решење у унутрашњем домену присутни су рефлексии нумерички таласи који изазивају нереалне ефекте и негативно утичу на решење. Приликом дизајнирања облика и димензија прорачунског домена да би се избегао овај ефекат често се примењује твз. бесконачна излазна површ, односно излазна гранична површ се помера претерано иза опструјаваног тела. Овим се обезбеђује од негативног повратног нумеричког таласа, али се истовремено знатно умањује ефикасност NM. Зато је неопходно извршити неколико итерација удаљености излазне површи и тако доћи до оптималне позиције исте. Могуће је такође избећи ову појаву коришћењем тзв. сунђер зоне што се постиже постављањем излазног граничног услова који зависи од притиска (Fluent-pressure outlet condition);
- *Провера различитих типова граничних услова.* На пример применом Дирихлеовог у фон Нојманов услов (константна брзина уместо константног притиска) и обрнуто. У литератури се наводи и провера периодичних граничних услова, ако је то применљиво за конкретан случај CFD;
- *Праћење градијента у близини граница.* Наиме, нагле промене градијената у близини граничних услова могу указивати на нереалан утицај границе на ток струјања. Ова неправилност указује на неправилност у прорачунској мрежи, а најчешће на неправилност модела опструјаваног тела, грешку насталу незатворене површи или необрисане површи која се сусреће моделовањем сложених геометријских структура.

6.1.3.3. Осетљивост на NM и методе дискретизације.

CFD кодови користе различите нумеричке мреже за апроксимацију просторних и временских дериватива. Избор истих утиче на тачност, стабилност и брзину конвергенције. Осетљивост NM на методе дискретизације се може испитати на следеће начине:

- *Поређењем резултата експлицитних и имплицитних метода.* Уколико експлицитна шема показује осцилације, али имплицитна не, могуће је да је решење ближе граници стабилности. Рекодирање модела је препоручљиво, а у случајевима нестационарних струјања је обавезно. Међутим, да би се избегла и реверификација могуће је применити адаптивни временски корак којим се може обезбедити контрола стабилности прорачуна.

- *Испитивање различитих метода на конвективне чланове.* Тако се у RANS моделима може испитати осетљивост NM применом различитих апроксимација (на пример првог и другог реда). Уколико дође до трајне дисипације решења или чак до појаве индиферентне стабилности мора се прибећи ремешингу јер NM нема довољну густину за конвективно доминантне токове;
- *Праћење нумеричке дисипације и дифузије.* Нумеричка дифузија је вештачко пригушивање оштрих граница решења због недовољне резолуције мреже или дискретизационе методе. Нумеричка дисперзија доводи до лажних осцилација (wiggling) у решењу, нарочито код метода високог реда тачности.

Наиме, висок ниво нумеричке дисипације, сплајновањем или другом методом кориговања решења и међурешења, долази до брисања малих структура CFD симулација. Код RANS модела је то неминовна појава, али се код LES/DNS симулацијама тиме губи оштрина слике добијеног резултата. Другим речима, узалудно се троше рачунарски ресурси на нумерички-коригован резултат. Слично је у са дифузијом решења.

6.1.3.4. Верификација различитих турбулентних модела.

Приликом верификације CFD симулација, потребно је тестирати различите турбулентне моделе како би се проверило да ли дају очекиване резултате. Затим, променом вредности турбулентне вискозности анализирати како се одражава на природу решења.

6.1.3.5. Поређење са другим CFD кодовима или аналитичким решењима.

Коначно, један од најпоузданијих начина за тестирање стабилности и осетљивости је поређење са:

- Аналитичким решењима (ако постоје и применљиво је на једноставнијим конфигурацијама);
- Експерименталним подацима (ова анализа залази и у валидацију решења) и
- Другим CFD кодовима.

Примена различитих софтверских пакета за решавање истог проблема може помоћи у откривању потенцијалних проблема у специфичним алгоритмима једног кода.

Верификација CFD прорачуна је кључан корак у осигуравању да добијени резултати нису артефакти нумеричких метода, већ тачан приказ физичког модела. Она укључује тестирање независности решења од мреже, анализу конвергенције и стабилности, као и осетљивост на нумеричке параметре. Спровођењем ових корака могу се осигурати да су резултати поуздани и применљиви у инжењерској пракси.

6.2. Валидација у CFD анализи

Валидација је процес поређења CFD резултата са експерименталним или високо тачним референтним подацима како би се проценила тачност физичког модела и нумеричке методе. Постављају се при томе кључна питања: Како одабрати одговарајуће експерименталне податке за валидацију; који су квалитативни и квантитативни критеријуми за процену тачности CFD резултата; како проценти грешку нумеричког решења у односу ка компајративни експериментални резултат; коју метрику применити приликом оцене слагања резултата?

Одговором на горе постављена питања долазимо до методологије валидације CFD симулације која се састоји из следећих корака.

6.2.1. Одабир релевантних експерименталних података

За успешну валидацију, CFD резултати морају бити упоређени са поузданим и прецизним експерименталним подацима. Експериментални податак релевантан за валидацију CFD симулације је скуп измерених вредности физичких параметара тока који су добијени под добро документованим, контролисаним и поновљивим условима, тако да омогућавају директно и недвосмислено поређење са CFD резултатима [13].

Кључне карактеристике релевантног експерименталног податка су:

- *Висока тачност и ниска неизвесност мерења* подразумева да су подаци добијени коришћењем калибрационих инструмената са познатом прецизношћу, а да процене експерименталних грешака и неизвесности буду доступне [194];
- *Прецизна дефиниција граничних и почетних услова.* У претходним поглављима је већ наглашено да CFD симулације захтевају тачне граничне услове у циљу добијања физички прихватљивог решења. Овде је предуслов да нумеричка и експериментална решења буду упоредива да се услови струјања у потпуности поклапају. Утицај зидова аеротунела, турбулентних услова морају бити измерени и документовани [202].
- Услови струјања моделовани CFD кодом и изведени у експерименту морају бити исти. Ова сличност се процењује *параметрима сличности*:
 - *Re*- Рејнолдсовим бројем;
 - *M*- Маховим бројем;
 - *Pr*- Прантловим бројем;
 - *No*- Нортоновим бројем.

Оведе је важно напоменути да је поновљивост експеримента по свим параметрима сличности апсолутно немогућа, било извођењем експеримента у аеротунелима било мерењем у реалном лету. Обезбеђење идентичног Маховог броја је императив и то је могуће испоштовати, док подударност осталих параметра сличности зависи од спољних утицаја и не треба очекивати апсолутну подударност.

Такође, подаци добијени у сличним условима подразумева да геометрија калибрационог модела експерименталног и нумеричког модела мора бити идентична.

Ако се упоређују нестационарна струјања при чему је нестационарност изазвана кретањем калибрационог модела режими кретања у нумеричком и експерименту морају бити идентични.

- *Репрезентативност измерених величина.* Измерене величине (брзина, притисак, температуре, силе, моменти) морају бити оне које директно утичу на циљну анализу, тако да за аеродинамичку валидацију, најважнији су коефицијенти аеродинамичког узгона (C_l), отпора (C_d) и момента (C_m) [193].
- *Репродуцибилност* (поновљивост) резултата. Податке мора бити могуће поново добити у независним експериментима под истим условима [193].

Уколико се испоштују претходно набројани услови можемо да тврдимо да су експериментално добијени резултати релевантни за валидацију CFD симулација.

6.2.2. Прилагођавање CFD модела експерименталним условима

Услови релевантности експериментално добијених резултата важе и за услов прилагођавања CFD модела експерименталним условима. Сажето, CFD је потребно да реплицира:

- Граничне услове (брзина, температура, турбуленција, зидне услове);
- Параметре сличности (Re, M, Pr, No);
- Геометрију – CFD модел мора бити што ближи експерименталном подешавању;
- Мрежење – треба осигурати да је просторна резолуција довољна за репродукцију доминантних физичких ефеката.

6.2.3. Метрике за процену CFD тачности

Процена тачности за поређење CFD и експеримента укључују израчунавање апсолутне грешке, средње апсолутне грешке (MAE), корен средње квадратне грешке (Root Mean Square Error-RMSE), корелациони коефицијент и фактор поверљивости (E) према [194].

6.2.3.1. Апсолутна грешка

Апсолутна грешка се израчунава применом једначине (6.4) за израчунавање.

$$\varepsilon_{abc} = |Q_{CFD} - Q_{ref}| \quad (6.4)$$

При чему су Q_{CFD} и Q_{ref} вредности решења добијених CFD симулацијом и референтна експериментална или аналитичка вредност, респективно. У анализама се може додатно израчунати и средња апсолутна грешка (енгл.- Mean Absolute Error, у даљем тексту – MAE)

6.2.3.2. Релативна грешка

Релативна грешка изражава грешку у односу на величину измерене вредности, према (6.5). У случају малих вредности апсолутне грешке ова метрика боље одражава реалну грешку.

$$\varepsilon_e = \frac{|Q_{CFD} - Q_{ref}|}{|Q_{ref}|} \cdot 100\% \quad (6.5)$$

6.2.3.3. Корен средње квадратне грешке (RMSE)

Корен средње квадратне грешке (енгл.-Root Mean Square Error- у даљем тексту и означи - RMSE) представља „енергију“ грешке кроз цео домен. Дефинисана је једначином (6.6).

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (Q_{CFD,i} - Q_{ref,i})^2} \quad (6.6)$$

Ова метрика је веома осетљива ако грешке у неким регионима NM знатно одскачу.

Параметри прихватљивости решења се крећу од $RMSE \leq 0,01$ где можемо констатовати да је тачност одлична, односно $RMSE \leq 0,03$ да је тачност прихватљива за ниво научних истраживања, док је за вредности $RMSE \geq 0,05$ грешка је неприхватљива и неопходно је извршити анализу грешкепрорачуна [193], [194].

6.2.3.4. Максимална грешка

Највећа појединачна грешка у симулацији, максимална грешка, дефинисана је једначином (6.7).

$$\varepsilon_{max} = \max |Q_{CFD,i} - Q_{ref,i}| \quad (6.7)$$

Користи се као индикатор најлошије предвиђене тачке — веома корисна у критичним зонама као што су ударни таласи, гранични слојеви или турбулентни режими.

6.2.3.5. Коефицијент корелације – r

Коефицијент корелације (енгл.-Correlation Coefficient) представља меру линеарне повезаности између два скупа података – у овом случају између CFD резултата и експерименталних података. Израчунава се једначином (6.8)

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n (Q_{CFD,i} - \bar{Q}_{CFD})(Q_{ref,i} - \bar{Q}_{ref})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (Q_{CFD,i} - \bar{Q}_{CFD})^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n (Q_{ref,i} - \bar{Q}_{ref})^2}} \quad (6.8)$$

Где су $\bar{Q}_{CFD}$ и $\bar{Q}_{ref}$ аритметичке средине свих CFD и експерименталних (референтних) вредности, ресепективно.

Уколико је израчунати коефицијент корелације $r=1$ тада је реч о савршеној позитивној линеарној корелацији, односно нумерички резултат савршено прати релевантни, а што је ближи нули то је валидност резултата мања. Коефицијент корелације може у неким случајевима бити и негативан, па чак и $r=-1$ када се ради о савршеној негативној линеарној корелацији, односно да се понашају супротно.

Треба напоменути да велика вредност r указује на добру сагласност у тренду између CFD и експерименталних података, али не обавезно и у апсолутним вредностима. Зато се ова метрика често користи уз друге метричке показатеље.

6.2.3.6. Коефицијент детерминације - R^2

Коефицијент детерминације R^2 (енгл.- Coefficient of Determination) ближе одређује колико CFD резултати прате тренд експерименталних података. Вредност $R^2=1$ представља савршено поклапање у расподели, једначина (6.9).

$$R^2 = 1 - \frac{\sum (Q_{CFD,i} - Q_{ref,i})^2}{\sum (Q_{CFD,i} - \bar{Q}_{ref,i})^2} \quad (6.9)$$

$$\bar{Q}_{ref,i} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Q_{ref,i}$$

Често се користи за поређење поља брзине, притиска, температуре.

Коефицијент корелације и коефицијент детерминације су повезани, али мере различите аспекте односа између два скупа података – у овом случају, између CFD резултата и експерименталних података. Наиме, коефицијент корелације казује о јачини и смеру линеарне зависности два скупа података, нумеричких и релевантних. Ако је коефицијент корелације приближан 1 то значи да CFD тачно прати тренд експеримента, али не значи нужно да је количински тачан. Са друге стране, коефицијент детерминације казује колико варијација у

експерименталним подацима објашњава CFD модел, односно уколико је вредност R^2 блиска вредности 1 то индицира да је CFD модел у могућности да репродукује референтни у количинској тачности, односно даје нам процену укупне прецизности.

6.2.3.7. Коефицијент несигурности валидације

Коефицијент несигурности валидације комбинује CFD неслагање и експерименталну неизвесност и представља меру поузданости CFD симулације у односу на експерименталне податке.

$$U_{val} = \sqrt{U_{ref}^2 + \varepsilon_{CFD}^2} \quad (6.10)$$

Где је U_{ref} експериментална несигурност, односно прецизност и тачност мерења у експерименту; а ε_{CFD} представља дисипацију нумеричког и експерименталног решења. Критеријуми валидности постављају границу инжењерске примене, односно добру прихватљивост, ако је израчуната вредност $U_{val} \leq 5\%$; за напредне инжењерске анализе, врло добру прихватљивост гранична вредност је $U_{val} \leq 2\%$; док је граница високе тачности, односно одлична прихватљивост ако је $U_{val} \leq 1\%$ [194], [201].

6.2.4. Поређење визуелизованог тока струјања

Употребом комерцијалних софтвера за имплементацију CFD кода, у оквиру постпроцесних алата, могуће је извршити визуелизацију струјног тока моделоване физичке појаве. У поглављу 3 у оквиру експерименталних ресурса приказане су технике и могућности визуелизације струјног тока. Поређењем овако добијених резултата могуће је извршити процену валидности нумерички добијених резултата.

У оквиру софтверског пакета ANSYS Fluent који је коришћен као репрезентативни комерцијални пакет у оквиру овог истраживања могуће је извршити визуелизацију струјања путем: линија тока (енгл.-streamlines), векторских линија (енгл.-vector plots), контурних мапа (енгл.-contour maps) и изо-површина (енгл.-iso-surfaces).

Међутим, методологија упоређивања се не сме препустити случају, стога се морају испоштовати основна начела кроз следеће кораке:

- *Усаглашавање услова струјања.* Услови струјања у нумеричком и експерименталном случају морају бити компатибилни. Погледати одељак 7.2.
- *Избор равни визуелизације.* Равни или површине у CFD моделу (енгл.-symmetry plane) морају одговарати камерама или ласерским равнима у експерименту.
- *Поређење образаца струјања.* Анализа линија тока, позиција одвајања струјања, појава вртлога, позиције и углови ударних таласа и сл.
- *Квалитативно поређење* подразумева оцену на основу поређења зона ламинарног и турбулентног струјања, положај и дисипацију вртлога, поређење вектора брзина (уколико је доступна експериментална метода PIV).

Значај ове анализе се огледа у томе да су подаци отцепљења струјања, вртложна структура и сличне појаве тешко мерљиве, али визуелизација омогућава да се утврди да ли CFD симулација репродукује реалну физику [203].

Ипак мора се напоменути да експериментални резултати добијени у аеротунелума подлежу корективним калибрационим коефицијентима као последица интерференце струјања и

разматраног аеродинамичког модела са инфраструктуром аеротунела, аеровагама и сл. Забележена визуелизација струјања није обухваћена корективним калибрационим утицајима, тако да она представља визуелизацију струјања која је забележена током извођења експеримента и да се донекле разликује од реалног струјања.

6.2.5. Крос-валидација

Крос-валидација (енгл.- cross-validation) је статистичка техника која се најчешће користи у области машинског учења и анализи података, а може наћи примену и при CFD валидацији. Користи се у смислу процене тачности модела, откривање недостатака модела или избора између различитих модела или хиперпараметара.

Основна идеја развоја крос-валидације је да се подаци обрађују више пута и у више итерација врши провера модела. Најчешћи облик је K-Fold крос-валидација, где се скуп података дели на K једнаких делова (fold-ова). Модел се третира K пута, сваки пут на K-1 делова, а тестира на преосталом делу. Сви се резултати тестирања се просечно саберу и добија се поузданија метрика тачности и спречава се „претренирање“ (број итерација се сваким кораком смањује) и на крају даје реалистичну процену тачности модела на новим, непознатим опструјаваним моделима [202], [204].

Сложеност оваког процеса валидације је очигледан, али основу примене треба тражити у машинском учењу и примени вештачке интелигенције развијањем AI модела који предвиђају резултате CFD симулација (редуковани модели, сурогат модели) тако да крос-валидација проверава могућност модела да генерализује и податке који нису били у тренинг скупу. Увезан са могућносћу AI адаптивног мрежирања омогућава активни избор оптималне мреже на основу претходних симулација. Број симулација повећава оперативну базу података у облику „научених лекција“ што повећава вероватноћу ваљаности сваког следећег предвиђања.

6.2.6. Критеријуми успешне валидације

Валидација представља кључни корак у процени поузданости CFD симулација, јер омогућава директно поређење нумеричких резултата са експерименталним, односно физички измереним подацима. Њен основни циљ је да одговори на питање: „Да ли модел довољно верно репродукује стварност у оквиру своје предвиђене намене?“ Критеријуми успешне валидације не ограничавају се искључиво на квантитативно поклапање података, већ укључују:

- Доследно физичко понашање модела;
- Очување локалне и глобалне конзервације основних величина (маса, импулс, енергија);
- Добру корелацију облика, понашања и трендова струјних појава са експерименталним опажањима,
- Квантитативне метрике као што су MAE, RMSE, корелациони коефицијент и коефицијенти несигурности.

Посебну пажњу захтева анализа несигурности у експерименту и симулацији, као и разумевање граничних услова и ограничења коришћених модела. Тек у светлу ових ограничења може се дати објективна процена тачности CFD резултата.

Употребом добро дефинисаних валидационих протокола, као и савремених алата за анализу несигурности и статистику, CFD добија статус не само теоријског алата, већ и поузданог инжењерског средства за доношење одлука. У том смислу, валидација није једнократан чин, већ континуирани процес унапређења модела, података и разумевања физике струјања.

7. Резултати истраживања

На основу теоретских разматрања и закључака који су изнесени у претходним поглављима развијен је нумерички модел који се уз минимална прилагођавања може применити у стационарним и нестационарним условима струјања где је узрок нестационарности кретање модела око сопствене у-осе, односно пропињање и понирање, као и временски зависно променљив вектор слободног струјања флуида.

Због ограниченог рачунарског ресурса нумерички модел за нестационарна струјања развијен је у 2D, држећи се идентичног приступа развијању модела као у стационарном CFD моделу који је развијен у 3D.

7.1. Резултати истраживања нумеричког моделовања стационарног 3D калибрационог модела

Изучавањем досадашњих истраживања из области CFD моделовања аеродинамичког опструјавања тела, који су приказани у поглављу 2, постављен је задатак да се развије нумерички модел који ће бити у могућности да што приближније опише у физичком и математичком смислу реално струјање око аеродинамичког модела а да се при томе избеае емпиријски корективни калибрациони коефицијенти. Такође, да CFD код буде применљив у свим режимима струјања без потребе за додатним редизајнирањем нумеричког домена.

Са друге стране на основу теоретског разматрања о методологији и техникама верификације и валидације нумеричког модела развијен је алгоритам овог процеса и примењен на конкретном примеру.

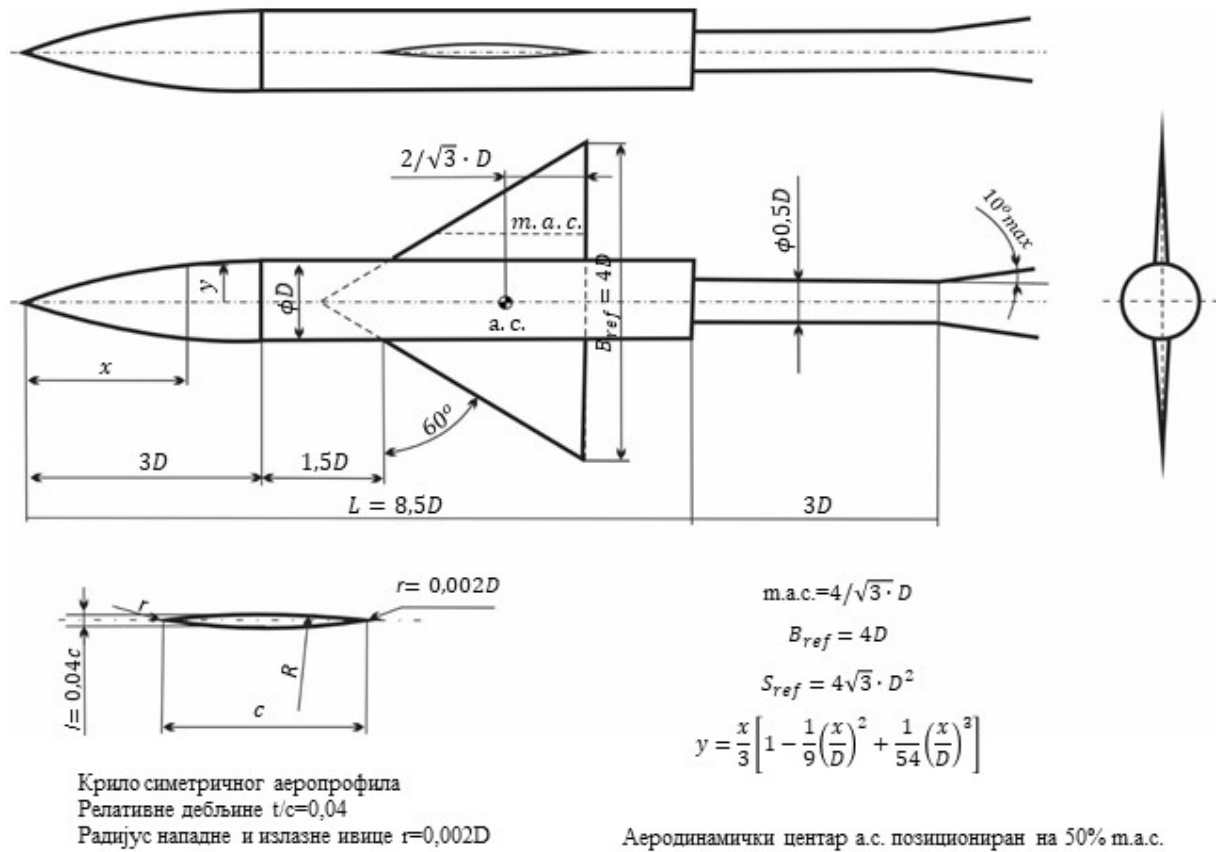
7.1.1. Калибрациони 3D модел

Стандардни аеротунелски калибрациони модел AGARD-B (Advisory Group for Aerospace Research and Development) је широко коришћен како у свету тако и у ВТИ Жарково, а резултату експерименталних истраживања су објављивани у више наврата [117], [118], [122] а додатни описи услова струјања и резултата су у потпуности и безусловно доступна током овог истраживања.

Конкретан AGARD-B модел који је коришћен током аеротунелских калибрационих испитивања у аеротунелу Т-38 Војно-техничког института је произведен од стране компаније Боинг (енгл.- Boeing Company, USA). Облик и димензије калибрационог модела приказани су на Сл.7-1.

Димензије су дате параметарски у зависности од референтног пречника $D=115,798\text{ mm}$. Референтни пречник је изабран у зависности од димензија радне запремине аеротунела Т-38.

Димензионе карактеристике су приказане у Таб.7-1.



Слика 7-1: Облик и димензије AGARD-B калибрационог модела [3], [205], [206].

Табела 7-1: Вредности референтних димензија AGARD-B модела [3], [122].

Назив димензије	Ознака	Вредност	Јединица мере
Референтни пречник модела	D	0,115798	[m]
Дужина AGARD-B модела	$L=8,5D$	0,9843	[m]
Размах крила	$b_{ref}=4D$	0,4632	[m]
Референтна аеродинамичка површина	A	0,0929	[m ²]
Релативна дебљина аеропрофила	t/c	0,04	
Радијус нападне и излазне ивице	$r=0,002D$	0,000232	[m]
Дужина главне аеродинамичке тетиве	$m.a.c.$	0,267424	[m]

Стандардни AGARD-B модел је генеричке конфигурације ваздухоплова са оживално-цилиндричним трупом са делта крилима. Контура носне секције је дата једначином (7.1) [3].

$$y = \frac{x}{3} \left[1 - \frac{1}{9} \left(\frac{x}{D} \right)^2 + \frac{1}{54} \left(\frac{x}{D} \right)^3 \right] \quad (7.1)$$

Моменти аеродинамичких сила се израчунавају у односу на референтну тачку која се налази у равни симетрије модела на растојању од 50% главне аеродинамичке тетиве, односно на уздужној удаљености од $1,155D$ мерећи од излазне ивице крила ка носу модела. Референтна дужина за аеродинамички момент пропињања C_m је дужина главне аеродинамичке тетиве. Референтна дужина за израчунавање Рејнолдсовог броја L_{ref} је, такође, дужина главне аеродинамичке тетиве. Референтна аеродинамичка површина одговара површини теоретског делта крила. Основне и референтне димензије приказане су у Таб.7.1.

7.1.2. Нумерички прорачун струјања

На основу теоретског разматрања обрађеног у поглављу 5 овог рада сагледавањем геометријских карактеристика расположивих калибрационих модела и услова струјања флуида извршено је моделовање нумеричког прорачуна струјања. Резултат моделовања је јединствен метод CFD прорачуна који је настао као компромис препорука и расположивих рачунарских ресурса.

Моделовање и сам прорачун је извршен у комерцијалном софтверском пакету специјализоване намене ANSYS Fluent, верзије 19.2. Наиме, могућност разматрања струјања у различитим режимима струјања: ламинарно и турбулентно, некомп्रेसибилно и компресибилно, подзвучно до хиперсоничног; затим мултифазно, хемиреактивно, могућност флуидно-структурне интеракције, моделовање топлотних прелаза и многе друге; примена различитих фамилија турбулентних модела струјања: RANS, LES, DES и друге; потпун имплементација напредних нумеричких мрежа и могућност метричног прорачуна у циљу верификације и валидације прорачуна; и на крају компатибилност са осталим ANSYS алатима као и програмима за 2D и 3D дизајнирање, попут AutoCAD, SolidWorks CAD и сличних; дала је предност у односу на остале широко распрострањене програмске пакете. Упоредна анализа са OpenFOAM [207], STAR-CCM+ [208] и COMSOL Multiphysics [209] је приказана табеларно у Таб.7-1.

Табела 7-2: Упоредна анализа CFD софтвера.

Критеријум	ANSYS Fluent	OpenFOAM	STAR-CCM+	COMSOL Multiphysics
Лиценца	Комерцијална	Open-source (GPL)	Комерцијална	Комерцијална
Интерфејс	GUI + CLI (journal/TUI)	CLI, без пуног GUI	Напредни GUI + CLI	GUI, интегрисан моделар
Тип мрежа	Structured/Unstructured	Structured/Unstructured	Structured/Unstructured	Structured/Unstructured
Mesh генератор	Уграђен (Ansys Meshing)	Вански алати (snappyHexMesh)	Уграђен	Уграђен
Подршка за RANS/LES/DNS	потпуна подршка	потпуна подршка	потпуна подршка	Ограничена подршка
Паралелизација (HPC)	MPI, добра скалабилност	MPI, веома добра	MPI, изврсна	Ограничена
Програмска проширења	UDF (C)	Потпуна контрола C++ кодом	Java макрои	Математичко моделовање
Визуелизација	Ansys CFD-Post, ParaView	ParaView	Уграђен Post-processor	Уграђен Post-processor
Крива учења ⁶	Средња	Стрма (захтева програмирање)	Средња	Лака за једноставне проблеме
Техничка подршка	Професионална	Заједница	Професионална	Професионална

7.1.2.1. Временска дискретизација струјања

Водећи се теоретском анализом изнетим у поглављу 5.1.1. и препорукама приказаним сажето у Таб.5.1 а на основу ограничења рачунарског ресурса неминовно је да се CFD код у овом истраживању може заснивати на решавању RANS система једначина, а да се за временску дискретизацију решавања усвоји комбинована метода дискретизације.

⁶ www.cfd-online.com

Апроксимација временских дериватива за случајеве моделовања струјања код којих се очекује појава турбуленције, отцепљење струјања и ударних таласа, као и случај струјања са нестабилностима изазваним осцилаторним кретањем модела. Како су током истраживања били ретки случајеви уравнотеженог струјања, код кога се решавање NS своди на решавање просторне дискретизације, у току истраживања коришћене су методе временске дискретизације првог и другог реда, како имплицитне тако и експлицитне методе.

Имплицитне временске дискретизационе шеме првог (енгл.- First-Order Implicit-FOI) реда као робусне и првенствено стабилне коришћене су у почетном периоду израчунавања. Наиме, непосредно након иницијализације решавања, о чему ће бити реч у наставку, вршено је прелиминарно израчунавање са нижим редаом дискретизације како би се ток израчунавања увео у жељени ниво конвергенције, а затим се прилазило израчунавању вишег реда.

Временске дискретизационе шеме другог реда (енгл.- Second-Order Implicit) су коришћене у наставку прорачуна у циљу обезбеђења веће прецизности решења. У оквиру коришћеног комерцијалног пакета уврштена посебна метода названа ограничена имплицитна метода временске дискретизације другог реда⁷ (енгл.- Bounded Second-Order Implicit-BSOI). На основу препоруке Khaware и сарадника [210] примена овог метода обезбеђује бољу тачност при већим струјним нестабилностима. Заправо, променом масених коефицијената у стандардној Second-Order Implicit методи са циљем да вредности у конкретном временском кораку остану у физички прихватљивим оквирима. Интерполација се ограничава тако да, на пример, кинетичка енергија турбуленције у прорачуну не може да узме негативну вредност. Ово делује стабилишуће током прорачуна и одражава се на стабилну конвергенцију решења. Међутим, цена примене овог метода је могућност добијања ретуширане слике струјања.

Један од циљева овог истраживања је развијање јединственог метода CFD прорачуна који се може применити на што шири распон врста струјања са циљем добијања што реалнијег модела струјања. Применом овакве интерполације се дефинитивно избегава замршен утицај наглих градијената струјања и неправилности у дизајнирању просторног прорачунског домена, али се у исто време ограничава могућност добијања реалистичне слике опструјавања аеродинамичких тела, а нарочито сложене геометрије. Из тог разлога је примена BSOI првенствено имала улогу верификације FOI прорачунског домена за случајеве стационарног струјања како би се упоредио утицај овакве интерполације на стандардни облик и утврдила евентуална разлика у решењима. Појава разлике у решењима говори о несавршености самог CFD кода, а нарочито финоће прорачунске мреже.

Током истраживања и моделовања нестационарних случајева струјања са осцилаторним кретањем аеродинамичког модела у стабилном струјању флуида, као и у случајевима компресибилног струјања коришћен је имплицитни метод двоструког временског интегрисања (енгл.-Dual Time Stepping) метод који уместо да временско зависни физички проблем решава директно уводи лажно (енгл.-pseudo time) у оквиру сваког физичког временског корака. Овим се омогућава стабилно и тачно решавање и за случајеве CFD са високим Курантовим бројем [211], [212].

Цена примене овог метода временске дискретизације за нестационарна струјања захтева додатне итерације јер се врши у две фазе. У првој фази која одговара реалном физичком времену врши се дискретизација према изабраној основној методи дискретизације, а затим се у другој фази користи итеративни процес да се конвергира решење унутар сваког физичког корака. У сваком физичком кораку, решење се итеративно побољшава у лажном времену док се не достигне конвергенција за тај корак. о омогућава бољу контролу резидуала и брже

⁷ Уврштена од верзије ANSYS Fluent 19

смањење грешке. Неминовно је да се применом овог поступка додатно оптерећује рачунарски ресурс, што је и основни проблем при нестационарним прорачунима.

Експлицитне методе временске дискретизације у току овог истраживања нису коришћене како би се, на основу препорука изнетих у Таб.5-1, избегле потенцијалне нестабилности током прорачуна, као и захтев за мањим временским корацима прорачуна.

7.1.2.2. Просторна дискретизација струјања

Просторна дискретизација прорачунског домена је фокусирана на дизајнирању облика и величине истог а на основу облика и димензија опструјаваног аеродинамичког модела и услова струјања. Основна идеја је да се формира јединствен просторни нумерички домен који може бити применљив за широк спектар услова струјања, као и за стационарно и нестационарно струјање.

Полазећи од задатака прво је усредсређено на дизајнирање облика и димензија NM. Посматрајући облик потенцијалног аеродинамичког модела потребно је уочити геометријску симетричност у циљу упрошћавања димензија NM. Лако је уочити да је конкретан калибрациони модел симетричан у односу на основну x - z раван, тако да је сврсисходно применити облик прорачунског домена са истим особинама.

Уместо класичног паралелопипеда изабран је параболични проширени домен, који према препорукама [130], [166], [212], [212] за облик NM боље прати ширење таласа у надзвучном струјању, смањује укупан број прорачунских елемената у деловима где није потребна висока резолуција и омогућује равномернију дистрибуцију мреже концентришући се на регионе где се очекује појава ударних таласа или експанзија струјања.

Домен прати основне контуре AGARD-B модела, па је обзиром на положај крила на бочним странама модела, у x -у равни, у истој равни параболични облик проширен на довољну удаљеност од крајњих бочних ивица.

Параболични облик домена, такође, омогућава промену нападног угла опструјавања модела једноставном изменом правца вектора струјања у оквиру постављања почетних услова струјања. Овим се избегава поновно мрежирање NM што би прилично продужило време припреме за прорачун за сваки жељени AoA. Наиме, овакав облик крајњих граница NM онемогућава појаву рефлексије поремећаја струјања чиме се смањује ризик интерференције повратних поремећаја на слику опструјавања око посматраног модела.

Оваквим одабиром облика прорачунског домена омогућена је и симулација нестационарности струјања изазвана нестационарном променом вредности стања струјања на улазној површини прорачунског домена, било да се ради о уобичајеној промени вектора брзине, било да се ради о временски зависној промени температуре, притиска или густине флуида, или чак комбинованом променом услова струјања.

Важно је напоменути да је усвојен раван облик излазне површине прорачунског домена јер је на тај начин омогућена боља и ефикаснија примена стандардних граничних услова као што су: Pressure outlet, Outflow, Mass flow outlet. Ови услови су дефинисани у равни па су на овај начин нумерички стабилнији ако је излазна површина равна. У противном, ако је излазна површина закривљена може се очекивати неортогоналности нормала и вектора брзине и лошег прорачуна дифузије или конвекције у ћелијама при самом крају NM, што доводи до потенцијалне грешке у прорачуну.

Код надзвучних и нестационарних струјања, ако је излазна површина закривљена, може довести до рефлексије ударних таласа или вртложних структура које се враћају назад у домен. Стога је равна излазна површина предвидивија у смеру таласа и омогућава боље дисипативне

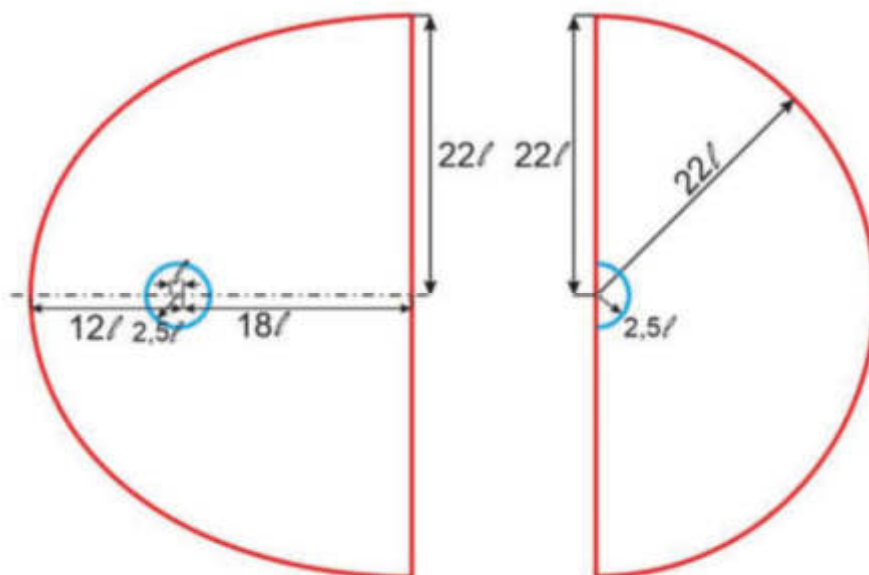
моделе на самом излазу (дисипативни нумерички модели умирују високе фреквенције у решењу, пригушују осцилације које могу настати услед грешке у апроксимацији, нарочито је важно у случајевима нестационарног струјања. Ако је излазна површина равна површина нормале прорачунских елемената су усмерене у правцу струјања што омогућава правилно израчунавање флукса и примену пригушујућих граничних услова).

Равна излазна површина олакшава генерисање мреже на самом излазу из прорачунског домена, чиме се избегавају високе вредности искошености прорачунске мреже која отежава правилну примену излазних услова у CFD коду.

На крају кориснички софтвери наведени у Таб.7.1 имају предефинисане шаблоне за равне излазне површине. Тако да иако је цео домен проширен у параболичном облику да смањи утицај граница, излазна површина се оставља равна ради нумеричке стабилности, једноставности дефинисања граничних услова, боље мреже и мањег одбијања таласа.

Димензије прорачунског домена треба да омогуће да улазни део NM буде довољно дуг да се обезбеди потпуни развој надлазећег струјања пре него што дође у интеракцију са осптрујаваним телом, па је на основу [212] то од $d_1=10$ до 12 дужина опструјаваног модела (L); задња страна NM довољно иза од посматраног модела да би се у потпуности формирала и на крају дисипирала вртложна структура и да би се омогућио правилан развој пост-тока нарочито код надзвучних струјања, $d_2=15$ до $25L$; бочне границе морају бити довољно далеко да не утичу на струјање око тела, тако да је препоручена вредност у зависности од Маховог броја и типа струјања од $d_3=15$ до 25 дужина опструјаваног модела.

Током истраживања дизајнирано је пет модела прорачунског домена са три различите димензије. Полазећи од препоручених вредности и референтних CFD кодова [91] формиран је параболичан прорачунски домен димензија $d_1=15L$, $d_2=22L$ и $d_3=25L$ назван Mesh-1. Обзиром да димензије овог прорачунског домена одговарају приближно максимално препорученим вредностима у циљу смањења прорачунског домена са задржавањем квалитета мреже конструисани су прорачунски домени Mesh-2 димензија $d_1=12L$, $d_2=18L$ и $d_3=22L$ (приказана на Сл.7.2) и Mesh-3 димензија $d_1=10L$, $d_2=16L$ и $d_3=18L$.



Слика 7-2: Графички приказ прорачунског димена Mesh-2 [3].

На основу теоретске анализе изнете у поглављу 5.1.2 и графикона поређења метода просторне дискретизације приказаног на Сл.5-2 закључено је да је за RANS симулације, FVM доминантан

метод због својих очуваних својстава и применљивости на сложене геометрије. FDM је погодан за основна истраживања и индустријску примену.

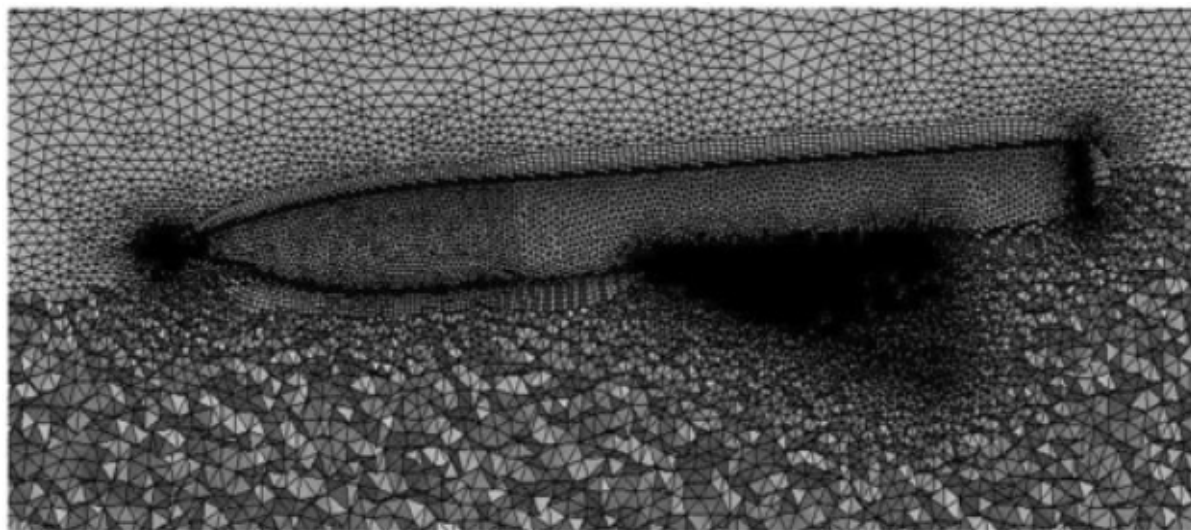
7.1.2.3. Нумеричка дискретизација струјања

У поглављу 5.2. изнете су теоријске анализе нумеричке дискретизације струјања где су изнете основне карактеристике структурисаних и неструктурисаних прорачунских мрежа. Упоредном анализом илустрованом дијаграмом на Сл.5-12 закључено је да је прилагодљивост сложеним геометријским структурама струјања и једноставност генерисања, односно могућност употребе математичких модалитета структурисања са применом адекватног софтвера, основне су предности које опредељују широку употребу неструктурисаних NM. Док према осталим критеријумима приказаним аналитичким дијаграмом структурисане мреже имају предност у генерисању.

Обзиром да наизглед једноставна структура модела AGARD-B крије већи број неправилних површина као и наглих геометријских прелаза, затим релативно велики прорачунски простор преовладала је могућност ангажовања специјализованог софтвера ANSYS ICEM CFD за генерисање неструктурисане мреже и на основу анализе поређење метода и типова прорачунских мрежа представљене у Таб.5-3 за изабрану методу FVM најприкладније је конструисати хибридну мрежу са адаптивном доктрином рефинације.

Доктрина формирања мреже се огледа у почетном грубом софтверски препуштеном формирању прорачунске мреже а затим се у циљу постизања оптималне равнотеже између прецизности, стабилности и ефикасности прорачуна прорачунски домен редизајнира употребом различитих врста прорачунских елемената прилагођене густине и зоне утицаја.

Прорачунски домен је подељен на неколико унутрашњих запреминских зона које су дефинисане на основу геометријских и утицајних зона струјања, Сл.7-3.



Слика 7-3: Прорачунска мрежа око AGARD-B модела приказана на уздужном пресеку у вертикалној и хоризонталној равни симетрије.

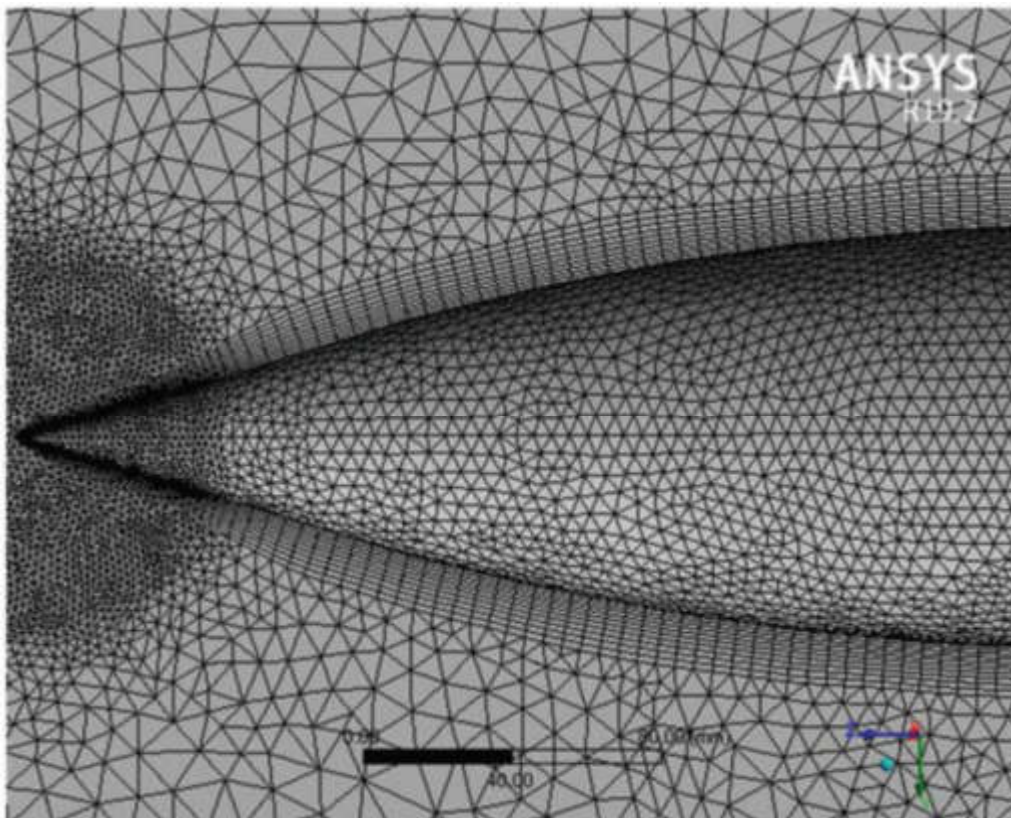
Прва утицајна зона формирана је у непосредној близини опструјаваног модела, са циљем обезбеђивања тачног прорачуна граничног слоја струјања. Њу чини десет призматичних слојева облика квадра чија је величина у непосредном додиру са моделом опструјаваног тела омогућује вредност бездимензионог коефицијента $y^+ \approx 1^+$ а у сваком следећем слоју попречна димензија се увећава са стопом раста од 1,1 до 1,2 у зависности од очекиване зоне утицаја. Зона граничног слоја на нападним и излазним ивицама крила, затим на носном и базном делу

модела је са коефицијентом експанзије од 1,1, а у осталом делу где је 1,2, као што се види на Сл.7-3.

Примена призматичних ћелија оправдана је њиховом великом издуженошћу у правцу нормалном на површину опструјаваног тела, чиме се геометријски прати правац и смер највећег градијента брзине. Оваква оријентација мреже омогућава ефикасније дискретизовање граничног слоја и доводи до смањења укупног броја прорачунских ћелија у тангенцијалном правцу, што позитивно утиче на рачунску економичност модела. Употреба десет призматичних слојева обезбеђује континуиран прелаз без наглих промена у геометрији ћелија, што смањује вероватноћу нумеричких грешака, као и појаву нестабилности и лоше конвергенције решења. [3], [95], [166], [184].

На основу теоретског разматрања и анализе која је сажето представљена дијаграмом на Сл.5.10 остатак прорачунског домена конструисан је прорачунским ћелијама хексаедарског облика због својих предности у тачности, стабилности и меморијској ефикасности. Иако је њихово генерисање сложеније, у случајевима где је критична предикција граничног слоја и турбуленције, они представљају оптимални избор за 3D прорачунске мреже.

У зонама појачаног утицаја снажног градијента насталог наглим геометријским прелазима на самом нападном радијусу носа модела, затим нападним и излазним ивицама крила, као и изразитом прелазу (од 90°) са цилиндричног дела на базни део. У овим зонама је извршено дириговано уситњавање мреже формирањем унутрашњих прорачунских запремина. Тако је на носном делу изабрана сферна утицајна зона пречника који одговара приближно $\frac{3}{4}$ калибра модела. До ове вредности се дошло адаптивном итерацијом од 4 вредности потенцијалног пречника са кораком од $\frac{1}{4}$ калибра почевши од вредности $\frac{1}{2}$. Више вредности сем повећања броја прорачунских ћелија нису битно утицале на повећање тачности. При томе су итерације вршене у условима $M=0,6$ и $M=1,4$ и $AoA=2^\circ$. Изглед измењене прорачунске мреже у уздужном пресеку по вертикалној равни симетрије је приказан на Сл.7-4.



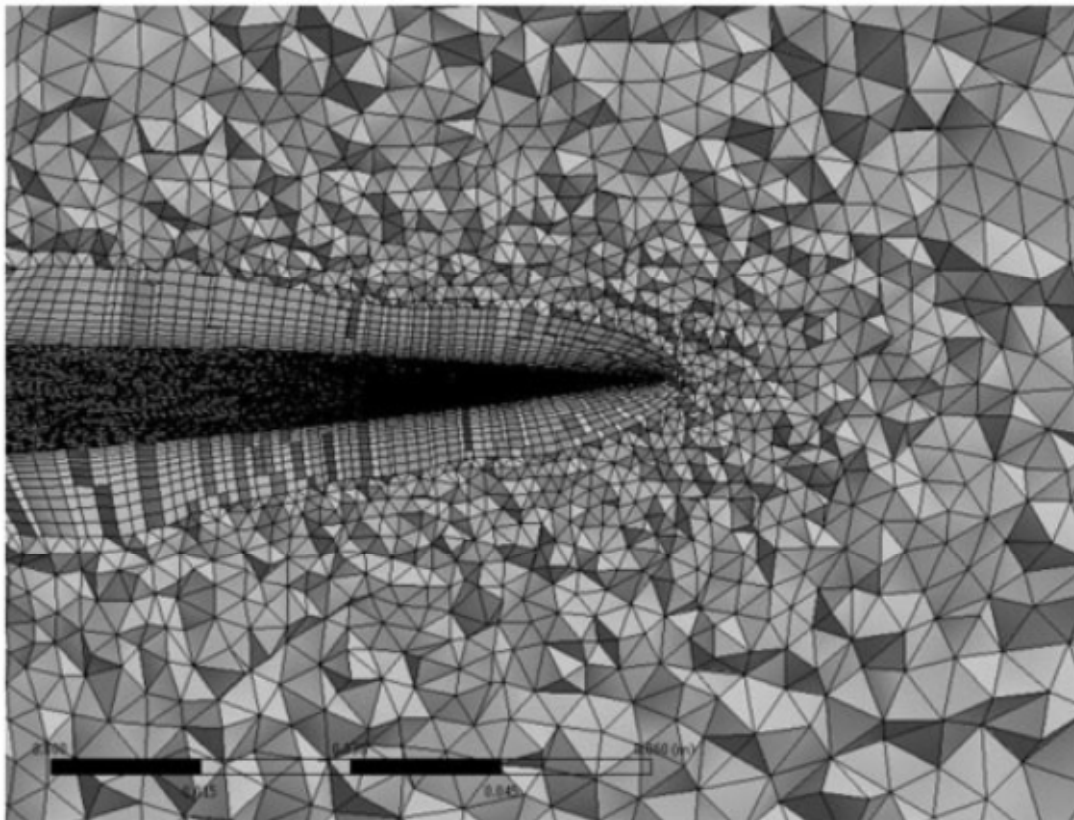
Слика 7-4: Изглед мреже на уздужном вертикалном пресеку у зони носа AGARD-B модела.

Слика 7-4 приказује повећану концентрацију прорачунских елемената у зони очекиваних наглих промена вредности величина стања флуида. Очекивано сужење граничног слоја прати геометрија прорачунских елемената [167].

У зони нападне и излазне ивице је унет додатан линијски утицајни слој при чему је почетна величина ћелија фиксирана за величину десетог призматичног граничног слоја. Стопа раста ћелија је ограничена на вредност од 1,1. Овим је добијен постепени и равномерни прелаз из региона слободног струјања у регион непосредног утицаја геометрије модела.

На Сл.7-5 се јасно види да је постепени раст ћелија призматичног слоја тако пројектован да је у равномерном расту достигао величину ћелија неструктурисаног прорачунског домена чиме је избегнут нагли прелаз између прорачунских региона.

Очекивана зона вртложног струјања, на крајевима крила, испуњена је прорачунским елементима адекватно малих димензија у тетраедарском облику. Овим се уједначава финоћа прорачунских елемената у свим правцима очекиваних вектора брзина, односно струјница, чиме се смањује опасност од неадекватно постављених прорачунских површина са градијентом простирања величине стања. Исто важи и за појаву турбуленција у зонама горњаке и доњаке крила за веће износе АоА.



Слика 7-5: Изглед мреже на попречном пресеку у зони крила AGARD-B модела.

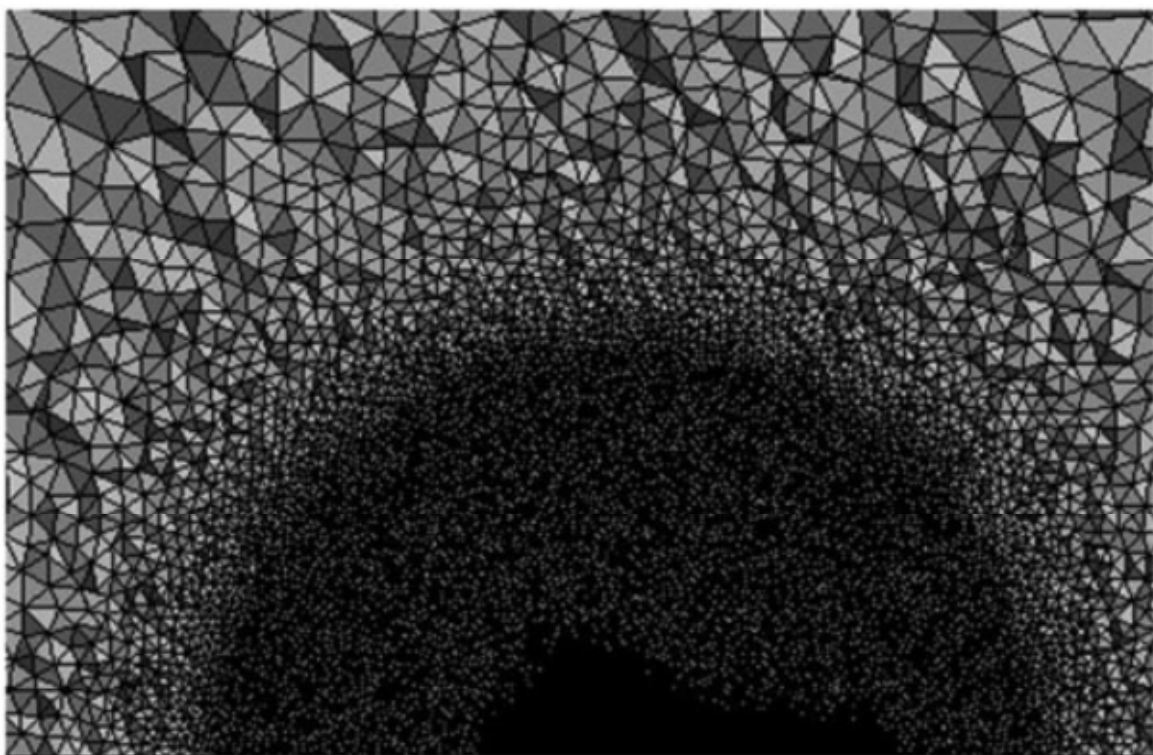
Регион базног дела AGARD-B модела је апроксимиран цилиндричним обликом утицајне запремине чији је пречник 1,1D усвојен на основу препорука [212], [213]. Величине ћелија су по истом принципу усклађене са величином последњег призматичног слоја.

У циљу правилне и адекватне рефинације мреже формирана је сферична утицајна запремина чији се центар налази у тачки која одговара положају центра масе, односно координатног почетка усвојене правоугаоне координатне мреже, у скаладу са Сл.4-3., пречника пет дужина калибрационог модела. Изабрана је фина неструктурисана тетраедарска мрежа.

Положај и облик ове утицајне запремине је приказан на Сл.7-2, док је изглед попречног распрострањања мреже приказан на Сл.7-6.

Између ове унутрашње утицајне запремине, коју уједно чине све до сада описане утицајне зоне и сам опструјавани модел, и осататка прорачунског домена формирана је клизна контактна површина. Основни концепт ове технике је да се CFD домен дели на две или више зона, где једна зона припада ротирајућем делу а друга је стационарна. Уместо да се мрежа динамички деформише, као код динамичких мрежа, овде цела зона ротира као чврст склоп кога чине ротирајуће тело и припадајућа мрежа која га окружује. Како се мрежа не мења током ротације, избегава се деградација квалитета ћелија која је честа код ремешинга. Пренос информација преко клизајуће површине боље чува оштрину протока него **чест** ремешинг.

У зони контакта између стационарне и нестационарне прорачунске мреже налази се клизајући интерфејс, који омогућава међусобну размену података о протоку, као што су брзина, притисак и турбулентне величине. Пренос информација између ових зона врши се поступком интерполације физичких величина, при чему се обезбеђује континуитет решења у целокупном прорачунском домену (Сл. 7-6). Детаљан опис методологије интерполације дат је у одељку 5.2.



Слика 7-6: Изглед попречног распрострањања прорачунске мреже око AGARD-V модела.

Веома је битно ускладити облик и величине ћелија у клизајућем слоју. Обзиром да је слој крива површ, у овом случају површина сфере пречника пет дужина калибрационог модела, неопходно је задати величину ћелија додирних површина да у збиру не одступају од аналитичког облика површине сфере, а у исто време да обезбеди правилан трансфер протока масе, импулса и енергије. Клизајући интерфејс на кривим површинама је веома тешко дизајнирати у структурисаним мрежама [166], [214]. Комерцијални програмски пакети поседују модуле намењене за конструисање оваквих интерфејса, као што је то случај са ANSYS Design Modeler/ICEM CFD. Извршен је одабир адекватног облика ћелија тетраедралних са високом уједначеношћу облика [212]. Величине ћелија су сличних димензија, при чему су површине у интерфејсу идентичне, на тај начин је избегнута геометријска грешка интерполације (енгл.- interpolation mismatch). Према [184], [215], [216]

однос површина на површини интерфејса између стационарног и ротирајућег дела не сме да прелази 20% разлике. Применом модула за меширање клизног интерфејса обезбеђено је да готово нема разлике у облику и димензијама свих додирних површина прорачунских ћелија док је сличност запремина компаративних ћелија 99,5%. Закошеност мрежних елемената у зони од 5 слојева са обе стране интерфејса је 0,098 за ћелије стационарне зоне и 0,0978 за ћелије ротирајуће зоне. Удаљавајући се од површине интерференце реструктурисање прорачунске мреже је подешено од fine ка групном градирању, са степеном раста од 1,05, која је обезбеђена коришћењем опције углађене транзиције (енгл.- smooth transition). Оваквим приступом дизајнирања прорачунске мреже смањена је грешка интерполације и осигуран стабилан рад *sliding mesh* модула у сваком временском кораку током потенцијалног нестационарног испитивања струјања.

Тунелски калибрациони модел AGARD-B у оквиру експерименталних испитивања у ВТИ, али и у свету, није испитиван у нестационарним условима струјања, за то су намењени други динамички модели, као што је стандардни динамички калибрациони модел (енгл.-Standard Dinamic Model-SDM) [217]. Расположиви рачунарски ресурси овог истраживања нису могли у потпуности да задовоље потребе динамичког истраживања 3D модела. Ипак, примењен је дизајн клизних контактних површина у циљу верификације и валидације за стационарна струјања.

7.1.2.4. Верификација просторне дискретизације

Водећи се теоретским разматрањима изнетим у поглављу 5.2.4 и смерницама за проверу и контролу квалитета NM у CFD анализама изнетим у поглављу 5.2.5 а сажето приказаним у Таб.5.7 извршено је геометријско прилагођавање мреже препорученим вредностима параметара квалитета прорачунске мреже.

Верификација просторне дискретизације је извршена на основу методологије приказане у поглављу 6.1 и извештаја добијених применом модула метрике мреже у оквиру ANSYS ICEM CFD (Mesh Metrix). Вредности су приказане табеларно у Таб.7-3.

Табела 7-3: Метрика прорачунске мреже за AGARD-B.

Метричка метода	Мин. вредност	Макс. вредност	Просечна вредност	Стандардна девијација	Препоручене вредности	Препорука станд. дев.
Aspect Ratio	1,1575	27,4453	2,0507	1,01186	≤ 5 (пожељно), до 10 (локално дозвољено) 20-200 (у граничном слоју)	SD ≤ 2
Jacobian Ratio (Corner nodes)	0,0064	1	0,9934	0,035	≤ 5 (пожељно), макс. 10	SD ≤ 1.5
Warping Factor	0,0	0,3145	0,0085	0,0177	≤ 0.3 (за квадове и трике)	SD ≤ 0.1
Parallel Deviation	0,0	14,1501	3,0712	4,0384	≤ 10° (пожељно)	SD ≤ 5°
Maximum Corner Angle	60,03°	163,49	92,11	13,82	45°–135° (пожељно), 15°–165° (допуштено)	SD ≤ 15°
Skewness	0,0328	0,854	0,2108	0,0912	≤ 0.25 (одлично), до 0.5 (добро), > 0.85 (лоше)	SD ≤ 0.1
Orthogonal Quality	0,0835	0,9984	0,78817	0,0908	≥ 0.7 (одлично), ≥ 0.3 (прихватљ.) < 0.1 (лоше)	SD ≤ 0.1

На основу метричких показатеља се може запазити да је:

- Размерни однос ћелија у распону од 1,1575 до 27,4453, што одговара вредностима локалних ћелија у граничном слоју врха носног дела модела. Просечна вредност је 2,05 док је стандардна девијација 1,012 што одговара пољу препоручених вредности.
- Закривљеност ћелија на основу односа Јакобијана, подељак 5.2.4.2, усредсређеног на углове ћелија чије екстремне вредности не прелазе 1, а стандардна девијација износи 0,035 што одговара готово идеалним вредностима.
- Фактор закривљења (енгл.-Warping Factor) има просечну вредност од 0,0085 и стандардну девијацију која износи 17% од максимално препоручене. Искакање максималне вредности овог фактора од 0,3145 је лоцирана у зони оштрог конусног носног дела модела.
- Паралелна девијација има просечну вредност приближно 3° и стандардну девијацију која је испод максимално препоручене. Максимална вредност прелази препоручену вредност и везана је за гранични слој у носном делу модела.
- Највећа вредност угла ћелије има екстремне вредности које се уклапају у препоручене, док је просечна вредност од приближно 90° што је идеална препоручена вредност.
- Вредност закривљености ћелија, као најшире коришћена метода, има екстремне вредности од 0,0328 до 0,0854 што одговара прихватљивим вредностима, док је просечна вредност од 0,2108 и стандардна девијација од 0,0912 готово идеална за овакву врсту NM.
- Ортогоналност мреже указује на екстремне вредности ћелија које у локалном нивоу превазилазе препоручене вредности, али су просечне вредности и стандардне девијације у препорученом опсегу.

На основу изнетог се закључује да су екстремне вредности геометријских показатеља квалитета прорачунских ћелија у опсегу прихватљивих вредности а да су просечне вредности и стандардне девијације у готово идеалном опсегу за овакву врсту сложене NM. Екстремне вредности ћелија су појединачне и лоциране у зони врха конуса носног дела модела а њихов укупан број не превазилази 0,07% укупног броја ћелија нумеричког домена. CFD код задовољава метричке критеријуме верификације, стога се потврђује верификација просторне дискретизације.

7.1.2.5. Верификација довољне густине и независност решења од NM

Сензитивност мреже је процењена кроз верификацију дозвољене густине прорачунске мреже на основу индекса конвергенције мреже (GCI), која је приказана у одељку 5.2.4.5.

У циљу прилагођавања погодности NM конкретном CFD моделу конструисане у прорачунске мреже Mesh-1, Mesh-2a, Mesh-2b, Mesh-2c и Mesh-3 са облицима и димензијама описаним у поглављу 7.1.2.2. Број прорачунских елемената је у функцији облика, димензија мрежа и финоће NM у прорачунским утицајним зонама.

Извршена је анализа довољности густине мреже са израчунатим вредностима аеродинамичког коефицијента узгона као жељене вредности f_i за случај струјања при $AoA=6^\circ$ и $M=0,6$. Индекс конвергенције мреже је рачунат за три најфиније и за три најгрубље мреже. Вредности параметарских величина коришћених за анализу сензитивности прорачунског домена приказане су у Таб.7-4 [3].

Табела 7-4: Вредности параметарских величина коришћених за анализу сензитивности NM [3].

Мазив NM	Број слојева у гранич. слоју	y+ при турбулентној зони		Закривљеност ћелија		Број ћелија	Дивергенција резултата		Прос. време израчунавања по итерацији [s]
		min.	max.	просечно	max.		ΔC_1 [%]	ΔC_m [%]	
Mesh-1	10	1,6	7,5	0,145	0,792	11.240.464	1,31	1,32	47,45
Mesh-2a	10	1,6	7,5	0,179	0,833	9.871.544	1,61	1,68	35,27
Mesh-2b	10	1,6	7,5	0,192	0,852	8.067.561	1,74	1,82	27,73
Mesh-2c	20	1,4	5,6	0,185	0,828	12.784.565	1,05	1,12	42,56
Mesh-3	10	1,7	8,2	0,322	0,885	6.877.556	1,91	1,98	23,78

Почетни, међу резултати и коначан индекс конвергенције за мреже је приказан табеларно у Таб.7-5.

Табела 7-5: Показатељи конвергенције прорачунских мрежа.

Назив упоредних мрежа	Однос рефин. r	Међузбир $\frac{f_3 - f_2}{f_2 - f_1}$	Процена реда тач. Pr	Фактор сигурн. FS	(фина-средња)		(груба-средња)		АОК
					Релат. разлика e	GCI	Релат. разлика e	GCI	
M2a-M1-M2c	0,878215	1,1538461	-1,10193	1,25	0,26	2,1125	0,3	2,4375	1,00
M2b-M2a-M1	0,817254	0,4333333	4,143841	1,25	0,3	-0,661	0,13	-0,286	1,00
M3-M2b-Ma	0,852495	1,3076923	-1,68098	1,25	0,13	0,5281	0,17	0,6906	1,00

Током дизајнирања NM развијене су првенствено три мреже Mesh-1, Mesh-2a и Mesh-3 на основу прелиминарних анализа дошло се до закључка да према облику и димензијама Mesh-2a представља компромис између броја прорачунских елемената, димензија и дивергенције резултата. У циљу приближења оптималној NM креиране су додатне мреже Mesh-2b и Mesh-2c. Дивергенција резултата се за представљене мреже креће од 1,05% до 1,91% за вредности C_1 односно од 1,12% до 1,98% за вредности C_m . Затим је извршена анализа сензитивности NM методом индекса конвергенције мреже за све случајеве прорачунских мрежа изузев крајњих највеће и најмање, јер нас метода на то ограничава. Резултати бројчаних параметара приказани у Таб.7.4 јасно показују да су све три унутрашње сложене мреже погодне за извршење CFD анализе, јер се у сва три случаја асимптотски коефицијент конвергенције (у даљем тексту - АОК) тангира идеалну вредност 1 у тачности друге децимале.

На основу критеријума независности решења од мреже, презентованим у поглављу 6.1.1 у претходно изнетог се извлачи закључак да се решења у свим мрежама очекивано понашају, односно да са повећањем финоће NM сразмерно опада дивергенција решења жељених величина; да за све презентоване NM асимптотски коефицијент конвергира вредности 1; и да се резултати уједначавају при повећању финоће мреже. Овим се потврђује верификација довољне густине NM и да даља рефинација мреже неће значајно утицати на жељену дисипацију решења.

Одабир мреже Mesh-2b за даљу CFD анализу у односу на остале две потврђене је извршен на основу параметра просечног времена за израчунавање једне итерације за задате услове струјања и расположиво CPU.

7.1.3. Верификација конвергенције решења

У пододељку 7.2.3.1 изнети су конкретни резултати испитивања, као и тренд конвергенције решења. На основу изнетог се може закључити да се нумерички алгоритам стабилно приближава коначном решењу. Резултати уравнотежења енергетски резидуала падају до вредности од 10^{-7} када се условно и завршавала свака итерација. Конвергенција решења до задатог степена дивергенције решења се кретао од 1200 до 1600 итерација по симулацији у зависности од режима струјања. Примери CFD симулација у режиму струјања од $M=0,85$ са АоА већим од 6° су захтевали већи број итерација у односу на остале режиме струјања.

Критеријум провере масе према једначини (6.1); критеријум провере импулса на основу једначине (6.2) као услов стационарности решења; као и критеријум промене енергије који се рачуна на основу једначине (6.3) се у оквиру комерцијалног програмског пакета FLUENT 19.2 израчунавају тако да је уобичајено захтевати да је резидуал масеног биланса и биланса момента испод 10^{-3} , а како је поменуто уобичајено је да је захтевана енергетска резидуалност испод 10^{-6} .

На основу препоручене граничне вредности за RANS симулације може се закључити да је CFD код верификован са аспекта конвергенције решења.

7.1.4. Верификација нумеричке стабилности и осетљивости.

Анализа нумеричке стабилности и осетљивости је извршена на основу метода приказаних у одељку 6.1.3.

7.1.4.1. Верификација временског корака у нестационарним симулацијама

На основу одељка 6.1.3.1 од избора временског корака зависи стабилност и ефикасност CPU. За конкретан случај струјања нестационарност се огледа у појавама локалних нестационарности струјања а испољавају се турбулентним кретањима. На основу 6.1.3.1 и 5.1.3 поглавља широко распрострањени критеријум за временски корак јесте Курантов број.

Вредност Курантовог броја варира од 5 до 200 за све услове струјања и при свим изнетим АоА, што одговара препорученим вредностима у одељку 5.1.3.

Овим се верификује временски корак за нестационарна струјања настала појавом турбуленције.

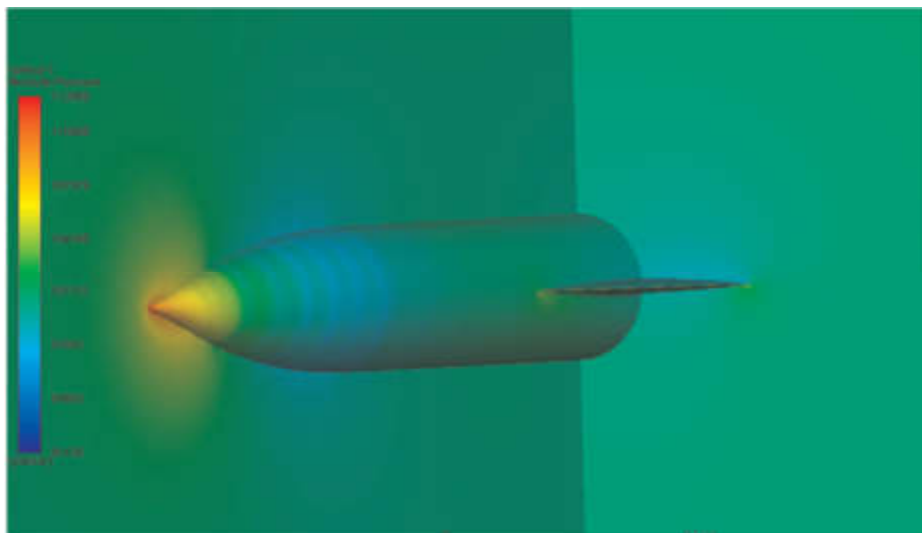
7.1.4.2. Верификација осетљивости на граничне услове.

У поглављу 6.1.3.2 презентовани су услови осетљивости CFD кода на граничне услове на основу: промене позиције излазног граничног услова, провере различитих типова граничних услова и праћења градијента у близини граница.

У пододељку 7.1.2.5 табеларно су приказане вредности дивергенције решења за различите пет различитих NM од којих разликујемо Mesh-1, Mesh-2a,b,c и Mesh-3 који се поред броја прорачунских елемената разликују и према удаљености излазног граничног услова у односу на положај опструјаваног модела. Тако је удаљеност $d_3=25L$, $d_3=22L$ и $d_3=18L$ респективно. На основу дивергенције резултата, Таб.7.3, који се за ΔC_1 креће од 1,3% преко 1,74% до 1,91% односно за ΔC_m креће од 1,32% преко 1,82% до 1,98% респективно. Конвергенција решења за изабрану мрежу приказана у 7.1.3 говори у прилог довољној удаљености излазног граничног услова.

У циљу додатног осигурања у овом CFD моделу коришћен је излазни гранични услов у зависности од притиска (Fluent-pressure outlet condition).

Праћење градијента брзине и притиска у близини граничних услова указује да не постоје нагле промене градијента карактеристичних вредности у близинама граница. На Сл.7-7 се види јасно да дистрибуција притиска дуж вертикалне симетричне граничне површи правилно прати расподелу притисака на површини трупа опструјаваног модела. Слика приказује да при задатим условима струјања од $M=6$ при $AoA=4^\circ$ зауставни притисак очекивано највеће вредности има у зони нападног конуса модела. Види се да је расподела нијанси боја идентична на површини опструјаваног тела и одговарајућој зони на граничној површини симетрије. Расподела притисака изнад и испод замишљене хоризонталне осе симетрије очекивано није симетрична. Асиметрија потиче од $AoA \geq 0$ и показује веће вредности за подручје са доње стране хоризонталне површи симетрије, што је очекивано.



Слика 7-7: Дистрибуција апсолутног притиска на површини модела и параметарским површинама при $M=0,6$ и $AoA=4^\circ$ [3].

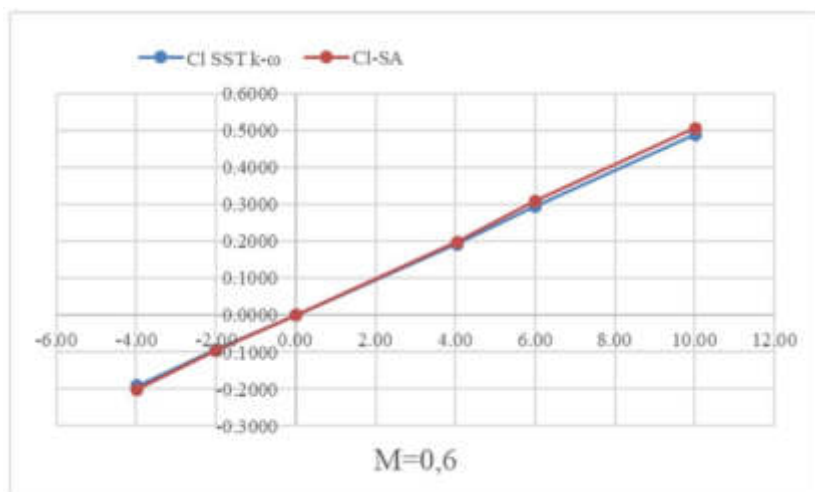
Са друге стране, попречна расподела апсолутног притиска представљена је у равни нормалној на x -осу, при чему је параметарска површина постављена тако да илуструје континуиране и равномерне прелазе у расподели притиска дуж доње и горње стране крила. Примећује се интензивни скок зауставног притиска који је присутан на нападној ивици у корену крила и на самом терминезону крила. Ова појава је резултат деловања очекиваних локалних турбулентних појава. На остатку уздужне вертикалне симетричне и попречне површи нема детектованих промена у вредностима апсолутног притиска што јасно говори о финоћи NM и глаткости решења у CFD симулацији.

На основу изнетог закључује се да су задовољени услови верификације осетљивости на NM и методе дискретизације.

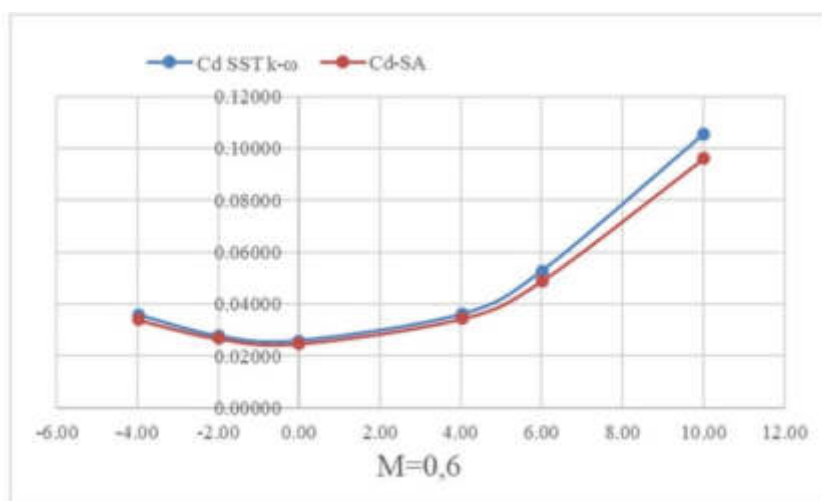
7.1.4.3. Верификација осетљивости на различите турбулентне методе.

У поглављу 4.5.4 представљени су широко коришћени модели турбуленције на основу чега је у одељку 4.5.4.7 извршена анализа погодности различитих турбулентних модела на специфичне услове струјања, сложеност геометрије NM и начину нумеричке и временске дискретизације NS. Анализа приказана табеларно, Таб.4.9 и дијаграмом на Сл.4.5 јасно даје предност SST $k-\omega$ модел турбуленције.

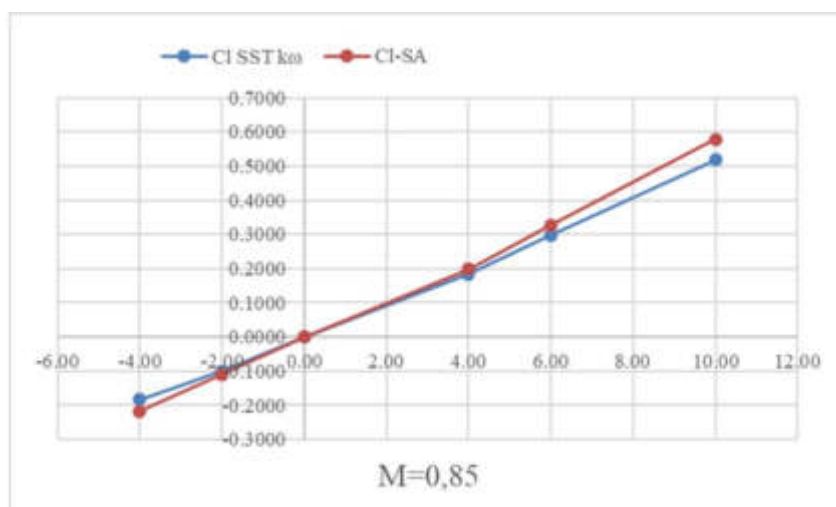
У циљу верификације осетљивости при употреби различитих турбулентних метода, а у складу са верификационим условом изнетим у пододељку 6.1.3.4 извршени су прорачуни за различите услове струјања коришћењем SA модела турбуленције и извршена анализа осетљивости CFD кода на промену турбулентног модела. Резултати су приказани у виду дијаграма промене коефицијената узгона и отпора у зависности од промене AoA на Сл.7-8 до Сл.7-13.



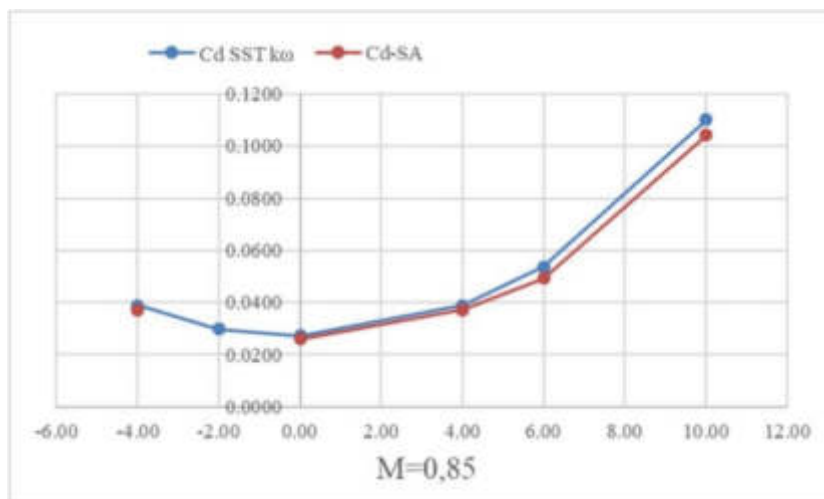
Слика 7-8: Упоредни дијаграми Cl са променом AoA употребом SST k- ω и SA турбулентним моделима при M=0,6.



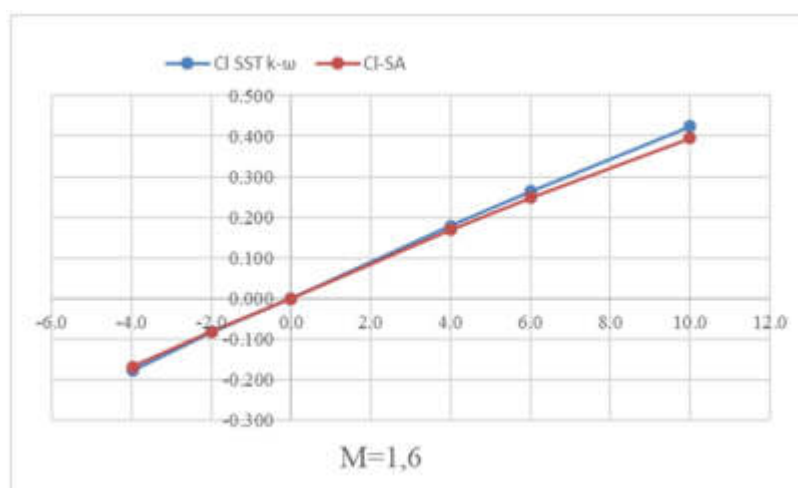
Слика 7-9: Упоредни дијаграми Cd са променом AoA употребом SST k- ω и SA турбулентним моделима при M=0,6.



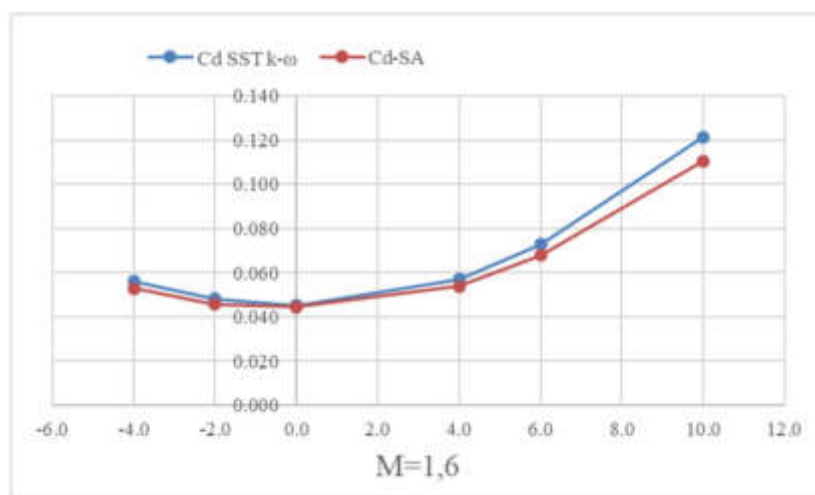
Слика 7-10: Упоредни дијаграми Cl са променом AoA употребом SST k- ω и SA турбулентним моделима при M=0,85.



Слика 7-11: Упоредни дијаграми Cd са променом AoA употребом SST k- ω и SA турбулентним моделима при M=0,85.



Слика 7-12: Упоредни дијаграми Cl са променом AoA употребом SST k- ω и SA турбулентним моделима при M=1.6.



Слика 7-13: Упоредни дијаграми Cd са променом AoA употребом SST k- ω и SA турбулентним моделима при M=1.6.

Одабир SA турбулентног модела као компаративног има основу у чињеници да је овај модел једноставнији модел са једном једначином оптимизован за спољашња аеродинамичка опструјавања насупрот SST k- ω сложеним моделом са две транспортне једначине. SA модел не поседује пригушне делове дисипације и ако је базични CFD код на граници стабилности овај модел то јасно може показати. Са друге стране не изискује додатно оптерећење CPU.

Приказани резултати јасно указују да не постоје тенденције нестабилности решења у свим режимима струјања.

За подзвучно струјање је индикативно да употребом SA модела добијени резултати коефицијента отпора у односу на SST k- ω имају мање вредности, веће одступање се такође примећује на већим нападним угловима. Одлика SA модела да мање агресивно моделује турбулентну вискозност може објаснити овакву тенденцију. У трансоничном опсегу струјања је ова слика још израженија јер се могућа локална струјна одвајања током прорачуна недовољно узимају у обзир.

Коефицијенти узгона у подзвучном и трансоничном струјању су нешто већи у поређењу са прорачуном употребом SST k- ω турбулентног модела. Разлика је израженија са повећањем AoA.

У региону надзвучних струјања резултати добијени употребом SA турбулентног модела и за коефицијент отпора и узгона дају нешто мање вредности у поређењу са SST k- ω . Ова разлика је израженија код предикције отпора. Оваква појава је очекивана обзиром да се не очекује адекватно израчунавање базног отпора и утицаја ударних таласа.

Време израчунавања употребом SA модела је знатно краће и може се користи за прелиминарна истраживања у свим областима струјања у оквиру овог CFD кода. Употреба SA модела изискује увођење додатних калибрационих коефицијената како би добијени резултати били приближнији експериментално добијеним [100], међутим, то није био задатак овог истраживања.

На основу изнетог у овом одељку се може закључити да стабилност решења развијеног метода CFD прорачуна не зависи од употребе турбулентне методе, а да је последица неслагања решења лежи у самој разлици оба употребљена турбулентна модела. Другим речима верификована је независност методе CFD прорачуна од употребе различитих турбулентних модела.

7.1.4.4. Верификација поређењем са другим CFD кодовима / аналитичким решењима.

Верификација стабилности и осетљивости CFD код поређењем са другима решењима добијеним експериментално или упоређивањем са другим CFD кодовима је представљена у поглављу 7.2 који се односи на валидацију резултата истраживања.

7.1.5. Закључак верификације CFD симулације.

Након приказаног нумеричког прорачуна струјања кроз временску и просторну дискретизацију струјања на основу методологије изнете у поглављу 6.1 извршена је верификација методе CFD прорачуна који је развијен у овом истраживању.

Верификација просторне дискретизације је илустрована метричким показатељима приказаним у поделу 7.1.2.4. на основу чега се закључује да су екстремне вредности геометријских показатеља квалитета прорачунских ћелија у опсегу прихватљивих вредности а да су просечне вредности и стандардне девијације у готово идеалном опсегу за овакве сложене NM, односно да су метрички захтеви испуњени.

Верификација адекватне густине и независности нумеричког решења од нумеричке мреже (НМ) приказана је у пододељку 7.1.2.5. На основу примењених критеријума независности решења од мреже, утврђено је да се решења у свим испитиваним мрежама понашају у складу са очекивањима. Са повећањем финоће НМ, дивергенција резултата релевантних величина се смањује, док се вредности асимптотски стабилизују. За све разматране мреже, коефицијенти конвергенције показују приближавање вредности 1, што указује на уједначавање резултата при даљој рефинацији. Ови налази потврђују да је постигнута довољна густина НМ и да даља згушњавања неће довести до значајне промене решења, чиме је успешно спроведена верификација независности од мреже.

Верификација конвергенције решења објашњена у одељцима 7.2 7. и 1.3 износи да се нумерички алгоритам стабилно приближава прихватљивом решењу препоручене граничне вредности за RANS симулације након чега је закључено да је метод CFD прорачуна верификован са аспекта конвергенције решења.

У одељку 7.1.4 приказана је примена методологије верификације нумеричке стабилности и осетљивости на основу одељка 6.1.3 а кроз поступке верификације временског корака у нестационарним симулацијама прихватљивим вредностима Курантовог броја и верификацијом осетљивости на граничне услове где је приказано да нема детектованих наглих и нефизичких промена величина стања флуида нити енергетских скокова чиме је закључено да су задовољени услови верификације осетљивости на NM и методе дискретизације.

У циљу верификације осетљивости при употреби различитих турбулентних метода, а у складу са верификационим условом изнетим у пододељку 6.1.3.4 извршени су прорачуни за различите услове струјања коришћењем SA модела турбуленције и извршена анализа осетљивости методе CFD прорачуна на промену турбулентног модела. Приказани резултати доводе до закључка да нема тенденција нестабилности решења у свим режимима струјања, а да се приметне разлике у решењима објашњавају разликом у самим моделима турбуленције. Овим се потврђује верификација независности методе CFD прорачуна од употребе различитих турбулентних модела.

Верификација поређењем резултата потврђује се у делу одељка 7.2 где су приказани упоредни резултати нумеричког и експерименталног истраживања.

На основу изнетог се износи закључак да су потврђени сви верификациони захтеви дефинисани верификационом методом из дела 6.1 чиме се потврђује потпуна верификација методе CFD прорачуна развијеног током истраживања и приказаног у овом раду.

7.2. Валидација резултата истраживања нумеричког моделовања стационарног 3D калибрационог модела

У првом одељку овог поглавља је презентован даљи ток креирања методе CFD прорачуна у смислу дефинисања почетних и граничних услова. Изнета је јединствена стратегија иницијације прорачуна, као и склоност кода ка конвергирању решења, резудантност решења и степен унапређења искоришћења расположивог CPU.

Затим су приказани резултати прорачуна у виду табеларних и графичких резултата, као и графички приказ расподеле притисака и брзина у карактеристичним зонама струјног тока.

Спроведена је метрика за процену методе CFD прорачуна у циљу валидације добијених резултата и у оквиру исте анализирани резултати визуелизације величина стања тока на основу којих је дат закључак о валидности резултата истраживања нумеричког моделовања стационарног 3D калибрационог модела.

7.2.1. Одабир релевантних експерименталних резултата.

Како је у одељку 6.2.1 наглашено експериментални податак релевантан за валидацију CFD кода је скуп измерених, документованих података добијених у строго контролисаним и поновљивим условима, тако да омогућавају директно и недвосмислено поређење са CFD резултатима.

Кључне карактеристике релевантних експерименталних резултата обухватају високу тачност и ниску мерну неизвесност, прецизну дефиницију граничних и почетних услова, јасно дефинисане параметре сличности, репрезентативност мерених величина и репродуцибилност резултата.

У циљу валидације овог развијеног нумеричког приступа решавању аеродинамичких карактеристика општујаваног тела преузети су резултати експерименталних истраживања и калибрационих тестирања аеротунела Т-38 у оквиру ВТИ за који је коришћен калибрациони аеротунелски модел AGARD-B који је претходно описан у одељку 7.1.1. У току овог истраживања у оквиру нашег најзначајнијег аеротунелског постројења нису вршена истраживања нити калибрациона испитивања чији би се резултати смели користити. Искоришћене су резултати калибрационих испитивања који су спроведени у претходном периоду, а исти су научно потврђени објављивањем у националним и међународно научно признатим часописима [117], [118], [121], [122], [218].

У претходно наведеним радовима наглашава се управо на високој тачности добијених резултата истраживања, а у оквиру одељка 3.1 приказани су табеларно основни параметри мерења у аеротунелу Т-38, Таб.3.2. Презентовани минимални опсежи мерења ИМО обезбеђују услов високе тачности, а измерене величине се директно могу применити у анализи валидности нумеричког испитивања.

Услови струјања аеротунелских испитивања се у оквиру ове лабораторије врше у складу са параметрима сличности Рејнолдсовог а првенствено Маховог броја.

Поновљивост резултата добијених експерименталним путем се потврђује извођењем периодичних калибрационих мерења након чега су се добијени резултати потврдили периодичним објављивањима у већ наведеним часописима. Исти су у овом раду презентовани у оквиру табеларних и графичких приказа нумеричких резултата.

На основу изнетог, неизвесно је да су резултати калибрационих испитивања који су коришћени у циљу валидације овог метода CFD прорачуна у складу са почетним захтевима спровођења процеса валидације, односно да су релевантни.

7.2.2. Прилагођавање CFD модела експерименталним условима

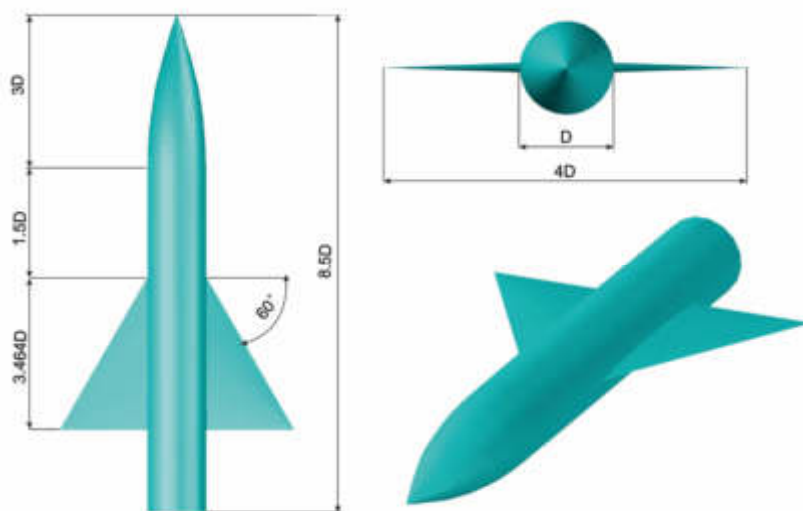
У циљу приближавања ка апсолутној усклађености између нумеричке симулације и експерименталних података, неопходно је CFD модел прилагодити специфичностима експерименталних услова. Овде су приказани кључни аспекти којим је обухваћено прилагођавање.

7.2.2.1. Геометријска усаглашеност

Моделовање геометрије опструјаваног тела, како је то већ напоменуто, извршено је на основу спецификација облика и димензија изнетим у одељку 3.1 моделовано у оквиру SolidWorks софтверског пакета, Сл. 7-14, а експортовањем као .IGES формат у мрежни генератор. Овај поступак је примењен иако је могуће дефинисати геометрију модела аналитички унутар кода

јер се конкретан калибрациони модел незнатно разликује у оживалном делу од оригиналних модела AGARD.

Један од циљева овог истраживања подразумева развијање методе CFD прорачуна у којој се нумерички описује слободно опструјавање око аеродинамичког модела, стога се нумерички модел разликује од аеротунелског по томе што не поседује носач на базном моделу. Наиме, у оквиру експерименталних испитивања укључене су разне технике и додатни емпиријски калибрациони коефицијенти којима се у зависности од услова експеримента елиминишу паразитски утицаји базног носача, интеракција модела са зидовима аеротунела, рефлексије ударних таласа, ефекти турбуленције у слободном току и други аеродинамички феномени који нису фокус мерења. Тако да се након корекције измерених вредности у оквиру техничких извештаја износе резултати мерења који су адекватни слободном струјању без паразитних утицаја.



Слика 7-14: Изглед моделованог AGARD-B модела у SolidWorks.

Остатак геометрије прорачунског домена је презентован у оквиру пододељка 7.1.2.2.

7.2.2.2. Почетни и гранични услови струјања

Почетним условима струјања подразумевају се услови струјања слободне струје. Усаглашавање ових услова нумеричког модела и експериментално добијених подразумева да се у оквиру постављања почетних услова CFD прорачуна у оквиру Fluent Solver модула унесу идентичне вредности параметара струјања које су важиле у току извођења експеримента, а оне обухватају Махов број, зауставни притисак, статички притисак, брзину струјања, зауставну температуру а усаглашавањем коефицијента вискозности и густине флуида са претходно задатим вредностима се тежило приближити Рејнолдсовом броју.

Проблематику ове, наизглед једноставне, процедуре представља чињеница да се услови струјања слободне струје у експерименталним условима могу тешко у потпуности подударати између било која испитивања. Чињеница је да се аеротунел Т-38 не може апсолутно изоловати од утицаја спољашње средине, који диктирају промене у почетним условима. Табеларно су представљени резултати аеротунелских испитивања са почетним условима струјања у табелама Таб.7-6 до Таб.7-8.

Табела 7-6: Резултати аеротунелских испитивања при $M=0,6$.

$V_{sr}=189,458 \frac{m}{s}$	$M_{sr}=0,593$	$MRe_{sr}=7,73$	$Posr=2,302bar$	$Pssr=1,814bar$	$Tosr=271,5 K$
AoA	M	MRe	Cl	Cm	Cd
-3.97	0.588	7,737	-0.189	-0.037	0.0372
-2.98	0.588	7,750	-0.141	-0.027	0.0321
-1.98	0.588	7,747	-0.090	-0.017	0.0286
-0.99	0.588	7,749	-0.045	-0.009	0.0266
-0.05	0.588	7,737	0.001	0.000	0.0259
1.00	0.588	7,717	0.050	0.011	0.0264
2.09	0.588	7,712	0.094	0.018	0.0283
2.98	0.589	7,720	0.141	0.027	0.0315
4.04	0.589	7,732	0.194	0.038	0.0369
5.00	0.589	7,741	0.246	0.049	0.0443
6.01	0.588	7,737	0.303	0.060	0.0539
7.02	0.588	7,737	0.356	0.070	0.0652
8.03	0.588	7,737	0.411	0.080	0.0787
8.99	0.588	7,726	0.465	0.092	0.0936
10.01	0.588	7,727	0.518	0.106	0.1104

Табела 7-7: Резултати аеротунелских испитивања при $M=0,85$.

$V_{sr}=262,126 \frac{m}{s}$	$M_{sr}=0,848$	$MRe_{sr}=9,55$	$Posr=2,302bar$	$Pssr=1,438$	$Tosr=271,7 K$
AoA	M	MRe	Cl	Cm	Cd
-4.85	0.830	9.535	-0.241	-0.041	0.0451
-3.77	0.830	9.526	-0.182	-0.030	0.0373
-2.58	0.832	9.551	-0.120	-0.019	0.0316
-1.40	0.834	9.567	-0.060	-0.010	0.0283
-0.24	0.835	9.563	-0.007	-0.001	0.0272
0.91	0.834	9.540	0.042	0.006	0.0275
2.10	0.835	9.546	0.105	0.017	0.0300
3.28	0.837	9.578	0.164	0.026	0.0347
4.49	0.836	9.572	0.228	0.038	0.0424
5.69	0.834	9.552	0.295	0.049	0.0531
6.91	0.845	9.559	0.369	0.060	0.0677
8.09	0.844	9.523	0.432	0.068	0.0839
9.31	0.842	9.527	0.500	0.079	0.1040
10.52	0.842	9.531	0.566	0.091	0.1267
11.76	0.842	9.518	0.640	0.106	0.1544
12.99	0.841	9.538	0.704	0.119	0.1827

Табела 7-8: Резултати аеротунелских испитивања при $M=1,6$.

$V_{sr}=427,337 \frac{m}{s}$	$M_{sr}=1,586$	$M_{resr}=9,97$	$P_{osr}=2,304bar$	$P_{ssr}=0,553$	$T_{osr}=271,5 K$
AoA	M	MRe	Cz	Cm	Cd
- 5.06	1,603	10.005	- 0.209	- 0.022	0.0646
- 3.98	1,602	9.988	- 0.161	- 0.016	0.0573
- 2.78	1,602	9.980	- 0.107	- 0.011	0.0516
- 1.61	1,602	9.976	- 0.058	- 0.006	0.0483
- 0.41	1,603	9.978	- 0.008	- 0.001	0.0467
0.76	1,602	9.973	0.038	0.004	0.0470
1.95	1,603	9.974	0.090	0.009	0.0494
3.15	1,602	9.982	0.146	0.014	0.0541
4.36	1,602	9.973	0.202	0.020	0.0613
5.56	1,602	9.973	0.253	0,025	0.0707
6.76	1,603	9.986	0.303	0.032	0.0827
7.98	1,602	9.979	0.354	0.040	0.0978
9.18	1,602	9.957	0.403	0.048	0.1141
10.39	1,602	9.950	0.450	0.056	0.1322
11.56	1,602	9.951	0.497	0.066	0.1517

Као што се види у табелама, различите вредности Маховог и Рејнолдсовог броја у оквиру истородних испитивања варирају за различите случајеве AoA. Усклађивање параметара струјања нумеричког решавања са експерименталним условима би представљао мукотрпан рад који заправо не би суштински унапредио процес валидације. Зато су током CFD моделовања коришћене средње вредности параметара из првих редова приказаних табела.

Додатну потешкоћу представља немогућност постављања аеротунелског калибрационог модела у идеално тачну позицију целобројне вредности степена. Уместо задавања правца вектора брзине слободног струјања у односу на x -осу координатног система везаног за положај опструјаваног модела усвојено је да се задају целобројне вредности AoA како би добијени резултати могли бити коришћени у широј научној и инжењерској заједници.

У циљу упоређивања експерименталних и прорачунских резултата вршена је кубна интерполација експерименталних резултата коришћењем математичког модела дефинисаног у [219], [220]. Кубна интерполација је извршена у софтверу Microsoft Excel при чему је коришћена дефинисана VBA (енгл.- Visual Basic for Applications) функција кубне сплајн интерполације [221].

Почетни услов слободног струјања је дефинисан улазном функцијом брзине (енгл.-Velocity Inlet) при чему су прецизирани вектори брзине слободног струјања, зауставна температура, турбулентни интензитет и релевантни параметри стања флуида за случајеве подзвучних струјања. Са друге стране, за случајеве надзвучног струјања коришћен је почетни услов притиска (енгл.- Pressure Inlet) при чему су дефинисане вредности зауставног притиска и температуре и релевантни параметри стишљивости флуида.

Као гранични услов излазне површине коришћен је за све случајеве струјања услов притиска (енгл.- Pressure Outlet) при чему се задаје вредност статичког притиска, односно референтни атмосферски. Остали параметри се софтверски самостално попуњавају уз апроксимације дефинисане једначином (7.2), где је n вектор нормалан на површ.

$$p = p_{outlet} \quad \wedge \quad \frac{\partial \vec{v}}{\partial n} = 0 \quad (7.2)$$

Гранични услов симетрије је коришћен у вертикалној равни симетрије, односно x - z равни јер је физика проблема симетрична управо на ову раван. Услов симетрије елиминира потребу за моделовањем целог домена, чиме је број прорачунских елемената преполовљен. На симетричној равни подразумева се да је нормална компонента брзине једнака нули и да је нормални градијент свих осталих величина такође једнак нули, што је у математичком запису приказано једначином (7.3).

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = 0 \quad \wedge \quad \frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad (7.3)$$

Гранични услов функције зида (енгл.- Wall function) дефинише непокретне површине условом лепљења (енгл.- no-slip condition), математички дефинисаном једначином (7.4)

$$\vec{v} = 0 \quad (7.4)$$

Другим речима коришћењем овог граничног услова омогућава се клизање низ површину без вискозног ефекта, нулти смицајни напон.

Обзиром да се током експерименталних калибрационих испитивања није посебно испитивао случај са бочном компонентом слободне струје, односно нису били доступни подаци такве врсте који би послужили валидацији нумеричког кода, током CFD симулације није вршен овакав прорачун. Међутим, за случај да бочна компонента брзине постоји неопходно је приступити нумеричком прорачуну са потпуним доменом или се у зависности од услова опструјавања могао применити гранични услов зида (Wall-slip) за упрошћене случајеве моделовања или гранични услов притиска далеког струјног поља (енгл.-Pressure far-field). Овај гранични услов моделује површину као бесконачну а заснива се на линеаризованим Римановим (Riemann) инваријантама и линеаризованих односа између физичких величина у подручју далеко од тела применљив је у сва три типа струјања [131], [166].

Математички модел овог граничног услова је дат једначинама (7.5) за услов улазне границе.

$$\begin{aligned} \vec{v} \cdot \vec{n} &< 0 \\ \vec{v}_{ulaz} &= \vec{v}_{\infty} \\ p_{ulaz} &= p_{\infty} \\ T_{ulaz} &= T_{\infty} \end{aligned} \quad (7.5)$$

Услов излазне границе дефинисан је једначином (7.6).

$$\begin{aligned} \vec{v} \cdot \vec{n} &> 0 \\ p_{izlaz} &= p_{\infty} \end{aligned} \quad (7.6)$$

Углови скретања вектора брзине слободне струје су дефинисани изразом (7.7).

$$\vec{v}_{\infty} = v_{\infty} \begin{bmatrix} \cos \alpha \cdot \cos \beta \\ \sin \beta \\ \sin \alpha \cdot \cos \beta \end{bmatrix} \quad (7.7)$$

Остале физичке величине (турбулентни параметри, енталпија, густина) интерполирају се из унутрашњости прорачунског домена. За комплетну примену овог граничног услова Потребно је предефинисати вредности притиска температуре, Маховог броја и углове скретања вектора слободне струје α и β .

Одабир граничног услова у овом случају би се вршио верификацијом и упоређивањем резултата са експерименталним и случајем нумеричког моделовања потпуном прорачунског домена.

У оквиру овог истраживања нису узете у обзир термички ефекти, односно аеродинамичко загревање опструјаване површине, с обзиром да је анализирано струјање третирано као термички неактивно (adiabatic wall assumption). У складу са тим, температура зида није задата као гранични услов, нити су примењени класични термички гранични услови — Дирихлеов (енгл.-Dirichlet), Нојманов (енгл.-Neumann) или Робинов (енгл.-Robin) услов, познати као први, други и трећи тип термичке анализе. Конкретно, уместо тога, примењена је адијабатска претпоставка (нулти гранични услов), што значи да је топлотни флуks кроз зидне површине постављен на нулу, што одговара Нојмановом услову са нултим градијентом температуре. Ова поједностављујућа претпоставка је у складу са фокусом истраживања на аеродинамичке, а не термичке ефекте, и оправдана је у условима краткотрајних и умерених брзина опструјавања без значајног утицаја компресибилности и високе температуре [130], [222].

Напоменимо да је коришћен и гранични услов интерфејса који је обрађен у пододељку 7.1.2.3. У овом контексту не утиче на прилагођавања експерименталних и нумеричких почетних и граничних услова.

7.2.3. Приказ спровођења прорачуна и добијених резултата

Усклађивањем облика и димензија прорачунског домена и NM, одабиром адекватног турбулентног модела и постављањем почетних и граничних услова створени су предуслови за спровођење самог поступка прорачуна и документовања добијених резултата. У овом одељку су приказана посебна стратегија иницијације прорачуна, метрика конвергенције решења и приказ добијених резултата.

Одабир методе прорачуна (енгл.- Solution Method) зависио је од врсте струјања и очекиваних промена градијената величина. Идеја истраживања је развити јединствен метод CFD прорачуна који се може без великих измена применити на различите случајеве опструјавања. Током истраживања вршени су прелиминарни прорачуни са различитим режимима а на основу препорука [211], [212], [220] и стеченог искуства табеларно је дата препорука за одабир адекватне методе прорачуна, Таб.7-9.

Табела 7-9: Препорука одабира методе прорачуна у зависности од режима струјања.

Режим струјања	Модул за решавање (Solver)	Спрега	Дискретизација
$M < 0,3$	На основи притиска (Pressure-Based)	Једноставна (SIMPLE)	2. реда
$M \in (0,8-12)$	На основи густине (Density-Based) Спрегнута на основи притиска (Pressure-based Coupled)	Спрегнута (Coupled)	2. реда / MUSCL
$M > 1,2$	На основи густине (Density-Based)	Спрегнута (Coupled)	MUSCL /2. реда

Где је MUSCL монотона центрирана шема закона очувања (енгл.-Monotonic Upstream-centered Schemes for Conservation Laws). Анализом прелиминарних прорачуна закључено је да се за режиме подзвучних у трансоничних струјања користити модул за решавање заснован на промени притиска спрегнут са променама брзине, док се за прорачуне надзвучних струјања метода решавања која се заснива на промени густине.

7.2.3.1. Иницијација прорачуна и конвергенција решења

Уобичајен поступак иницијације прорачуна се састоји од стационарног уношења почетних услова чиме се пре почетка прорачуна задају идентичне вредности величина стања флуида у

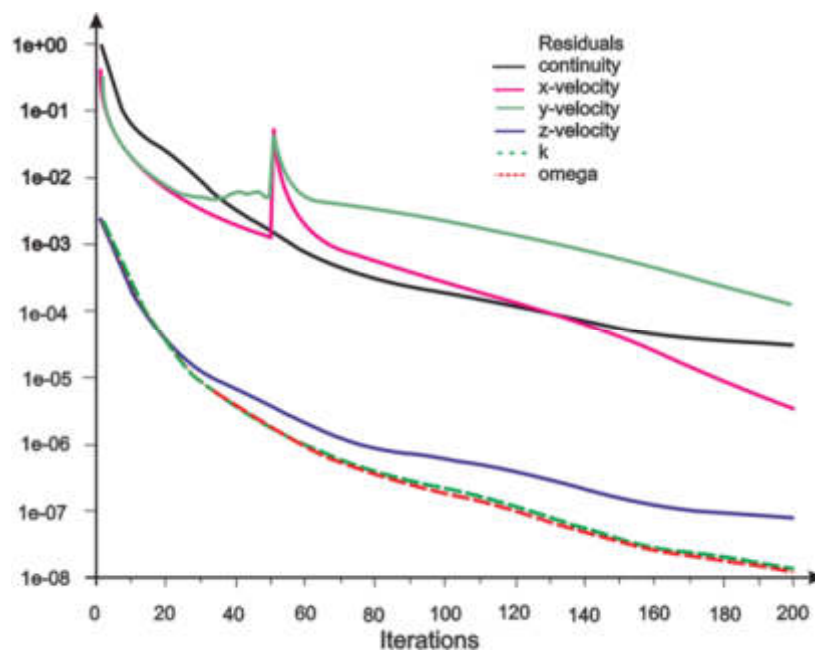
свим прорачунским елементима прорачунског домена, а затим се започне порачун са усвојеним методама прорачуна. Овакав поступак, иако се назива једноставним, заправо физички представља нестационарни почетак прорачуна. Наиме, оваквом техником иницијације се у стационарне услове слободног струјања изненада уноси физичка препрека у виду опструјаваног тела. Ако бисмо направили паралелу са летом модела као летелице, физички би то представљало појаву да је у мирној атмосфери летелица изненадно достигла брзину кретања која одговара брзини струјања ваздуха у нашој симулацији. Очекивано је да се јавља нагла нестационарност струјања која се временом смирује у стационарно струјање. Овакво физичко тумачење можемо очекивати и у CFD симулацији.

Последица оваквог „једноставног“ покретања прорачуна представља буран почетак и може довести до нестабилности прорачуна односно до прорачунског колапса у случају да се симулирају сложени струјни процеси. Такође, број итерација се повећава за око 10%.

Да би се избегла дивергенција решења и смањио број итерација развијена је метода постепене иницијације прорачуна. У првом кораку је искоришћен је модул хибридне иницијације у оквиру изабраног комерцијалног програма за прорачун, који подразумева спровођење десет итерација прорачуна са метематичким моделом који подразумева да је струјање ламинарно у свим сегментима NM као и да је ваздух идеалан гас са задатим почетним параметрима. Последица је да се за разлику од једноставне методе итерације формира реалистичнија слика струјања у прорачунском домену где се већ могу препознати зоне стагнације струјања и разлике у вредностима врзине и притиска у свакој ћелији.

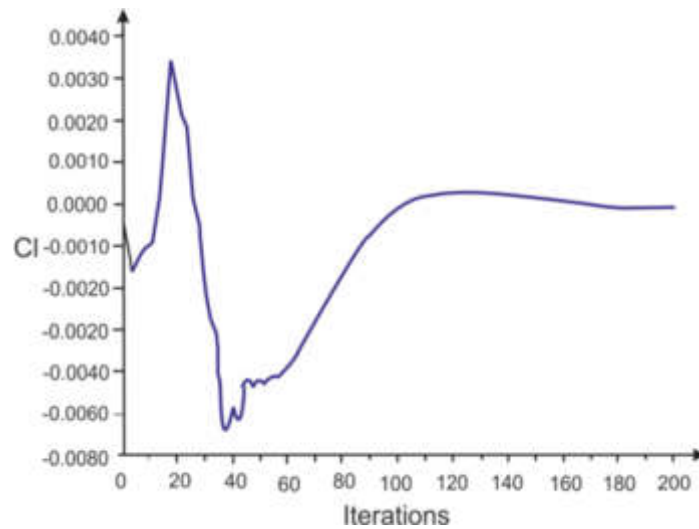
Други корак обухвата припремни прорачун у ком је број итерација ограничен на 40. У том кораку, дискретизациона шема за турбулентну кинетичку енергију и момент су сведени на први ред, док су релаксациони фактори за k и ω смањени на 0,2 ради постизања стабилности у иницијалној фази прорачуна. Овим прорачуном може се сматрати да је иницијални процес итерације завршен. Добијени резултати омогућавају предвиђање даљег тока прорачуна, нарочито у погледу брзине конвергенције решења и приближног реда величине очекиваних вредности.

На Сл.7-15 приказан је ток конвергенције за првих 200 итерација као и за решења брзине и фактора k и ω .

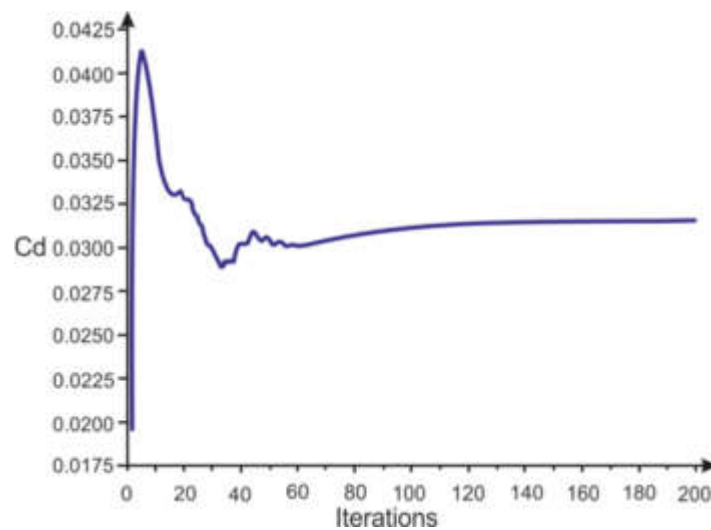


Слика 7-15: Конвергенција решења у првих 200 итерација прорачуна за режим струјања $M=0,6$ при $AoA=0^\circ$ [3]

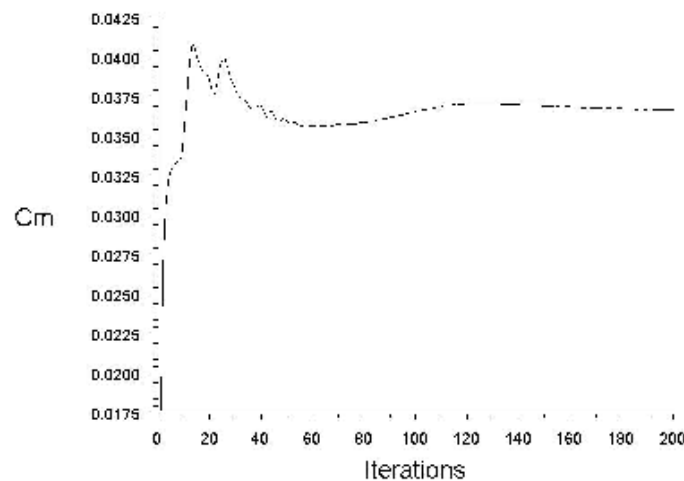
На графовима конвергенције решења коефицијента узгона и отпора, приказаним на Сл.7.16 и Сл.17 се може препознати сличан сценарио конвергентности.



Слика 7-16: Конвергенција решења у првих 200 итерација прорачуна за режим струјања $M=0,6$ при $AoA=0^\circ$ [3].



Слика 7.15: Конвергенција решења у првих 200 итерација прорачуна за режим струјања $M=0,6$ при $AoA=0^\circ$ [3].



Слика 7-17: Конвергенција решења у првих 200 итерација прорачуна за режим струјања $M=0,6$ при $AoA=0^\circ$.

Оваква стратегија иницијације прорачуна поред евидентне стабилности донела је смањење итерација у просеку за 70. Како је време сваке итерације у просеку између 20 и 30 секунди у зависности од режима струјања, а при томе се за сваки случај CFD симулације због обезбеђења услова поновљивости прорачун вршио најмање 2 пута за сваку другу вредност промене АоА у циљу обезбеђења услова поновљивости, уштеда укупног CPU је значајна.

7.2.3.2. Метода прорачуна

Након иницирања прорачуна метода прорачуна је постављена, како је већ поменуто, да се за режиме подзвучних у трансоничних струјања користити модул за решавање заснован на промени притиска спрегнут са променама брзине, док се за прорачуне надзвучних струјања метода решавања која се заснива на промени густине.

У подзвучним режимима струјања, метод прорачуна заснива се на сагрегацији између масе и импулса, што доводи до формулисања притиска као помоћне променљиве, у складу са једначинама (4.28)–(4.33). За режим повећане компресибилности, при броју Маха $M=0,85$, користи се имплицитно формулисан нумерички модел [166], [211], [212]:

$$A \begin{bmatrix} \delta v \\ \delta p \end{bmatrix} = b \quad (7.8)$$

При чему је А јака матрица коефицијената а δv и δp представљају прираштај брзине и притиска. Спрегнути метод имплицитно решава повезане прираштаје брзине и притиска у истом систему што доприноси стабилности конвергенције за високе градијенте промене ових величина. Наиме, спрегнути модул притиска и брзине уводи заједнички систем, једначина (7.9).

$$A_p \delta p + A_v \delta v = b \quad (7.9)$$

При чему су A_p и A_v матрице везане за градијенте притиска и брзине. Употреба овакве повезаности значајно смањује број итерација потребних за конвергенцију у односу на одвојено решавање.

У режимима надзвучног струјања примењен је модул заснован на решавању промене густине као примарне непознате величине, са директним решавањем масене конвергенције. Конструкција матричне једначине се може поставити према једначини (7.10).

$$\frac{\partial U}{\partial t} + R(U) = 0 \quad (7.10)$$

При чему је U вектор примарних променљивих, дефинисан једначиним (4.30), а R је резидуални вектор, разлика између конвективних и вискозних токова у једначинама (4.30) до (4.35). За имплицитну итерацију која се у овом случају примењује систем имплицитне итерације, једначина (7.11).

$$\left(I + \Delta t \frac{\partial R}{\partial U} \right) \delta U = -R(U) \quad (7.11)$$

Како се у имплицитном решавању не ажурирају променљиве само на основу познатих вредности из претходних израчунавања и почетних услова већ се предвиђају вредности како ће утицати на будући резидуал, $R(U)$, што осигурава стабилност решења као и ако користимо велике квази-временске кораке Δt па и када су присутне обалсти са високим компресибилним ефектима.

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{v + a} \quad (7.12)$$

Курантов услов (7.12) захтева веома мали квази-временски корак како би се обезбедила стабилност. Коришћењем имплицитне методе ограничење стабилности више није директно у зависности од Δt . Ово омогућује да се може очекивати значајно убрзање конвергенције CFD прорачуна.

$$\left(1 + \Delta t \frac{\partial R}{\partial U}\right) \delta U \approx \Delta t \frac{\partial R}{\partial U} \quad (7.13)$$

Другим речима систем (7.13) постаје значајно условљен према Јакобијановом резидуалу, $\partial R / \partial U$, односно да је систем стабилисан на основу самих физичких закона који се моделују, што представља императив у CFD моделовању.

Као што је истакнуто у одељку 5.1 примена метода дискретизације супротног усмеравања другог реда (енгл.- 2nd Order Upwind schemes), где се просторна апроксимација конвективног члана врши преко тејлорове експанзије другог реда повећава нумеричку тачност решења, смањује дифузију и омогућава прецизније израчунавање у зонама изразитих промена градијената величина, а посебно у граничним слојевима.

Релаксациони фактори у имплицитном решавању променљивих се ажурира према једначини (7.14), При чему је $r_f \in (0-1)$ релаксациони фактор.

$$\phi^{n+1} = \phi^n + r_f(\phi_{izracunato} - \phi^n) \quad (7.14)$$

Употребом мањег релаксационог фактора промене су мање, постепеније, тиме се обезбеђује стабилност конвергенције. Иницијалним смањењем фактора на 0,2 за притисак и моменат знатно је смањен ризик од осцилација, у наставку прорачуна задржан је нижи релаксациони фактор на 0,75 са истим циљем. Цена овакве стратегије је успорење конвергенције.

Употребом редукције турбулентне вискозности са вредности 1 на 0,85 је имало исту намену, чиме се допринело бољој контроли развоја турбулентног граничног слоја без великих осцилација у турбулентним зонама.

Закључно постављање оваквог метода прорачуна обезбеђује следеће бенефите:

- *Максимална стабилност решавања* за сва три брзинска режима (подзвучни, трансонични и суперсонични);
- *Смањен ризик од нумеричких осцилација* услед компресије или наглог скока у прорачуну;
- *Одржава високу тачност* просторне дискретизације;
- Проширује је за даље анализе осетљивости на мрежу или турбулентни модел;
- За веће АоА ($AoA > 8-10^\circ$) обезбеђује боље моделовање отцепљења струјања и додатну контролу турбулентног модела.

Цена повећане стабилности решења представља повећани број итерација по свакој CFD симулацији.

7.2.3.3. Резултати прорачуна

У току истраживања након успостављеног јединствене методе CFD прорачуна спроведен је прорачун за три режима струјања, ограничивши се на вредности $M=0,6$ у подзвучном, $M=0,85$ у трансоничном и $M=1,6$ у надзвучном домену.

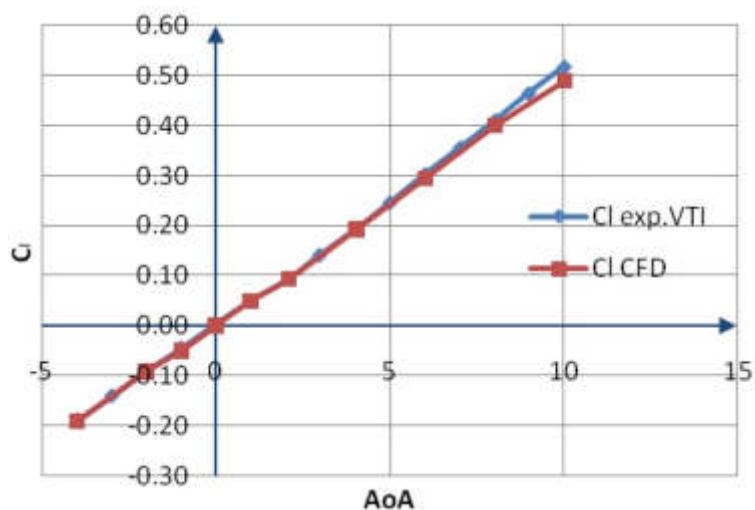
Услови струјања који одговарај слободној режиму струјања и резултати прорачуна су приказани табеларно у Таб.7-10 као вредности аеродинамичких коефицијената узгона, отпора и момента око аеродинамичког центра, чији је положај дефинисан на Сл.7-1, подудара се са почетком координатног система везаног за опструјавани модел и одговара положају референтне тачке при експерименту.

Табела 7-10: Услови слободног струјања и резултати CFD прорачуна [3].

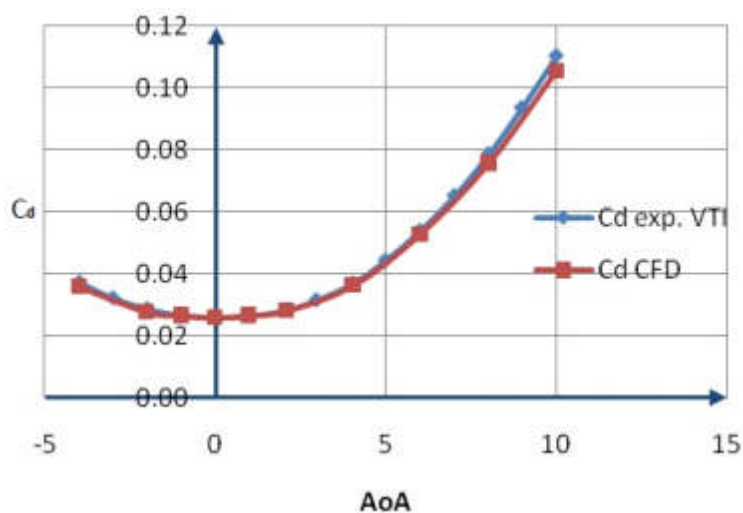
M	0,593	0,845	1,586						
P ₀ [bar]	2,302	2,302	2,304						
P _s [bar]	1,814	1,438	0,553						
Re($\times 10^6$)	7,73	9,55	9,97						
T ₀ [K]	271,5	271,5	271,5						
V [m/s]	189,46	262,13	427,34						
AoA	C _l	C _d	C _m	C _l	C _d	C _m	C _l	C _d	C _m
-4.0	-0,1869	0,0374	-0,03737	-0,1996	0,0388	-0,0328	-0,1834	0,0586	-
									0,01806
-3.0	-0,1401	0,0323	-0,0272	/	/	/	/	/	/
-2.0	-0,0896	0,0284	-0,0171	-0,1045	0,0298	-0,0161	-0,0897	0,0492	-
									0,00897
-1.0	-0,0449	0,0267	-0,0090	-0,0416	0,0274	0,0069	-0,0483	0,0474	-
									0,00501
0.0	0,0000	0,0259	0,0000	0,0000	0,0272	0,0000	0,0000	0,0468	0,0000
1.0	0,0501	0,0267	0,0110	0,0416	0,0274	0,0069	0,0483	0,0474	0,00501
2.0	0,0944	0,0284	0,0179	0,1045	0,0298	0,0161	0,0897	0,0492	0,00897
4.0	0,1962	0,0374	0,0376	0,1996	0,0388	0,0328	0,1834	0,0586	0,01806
6.0	0,3083	0,0549	0,0589	0,3079	0,0556	0,0508	0,2677	0,0739	0,02717
8.0	0,4218	0,0810	0,0779	0,4149	0,0813	0,0654	0,3468	0,0966	0,03915
10.0	0,5359	0,1146	0,1021	0,5174	0,1121	0,8240	0,4233	0,1227	0,05191
12.0	/	/	/	0,6215	0,1518	0,1032	0,4198	0,1532	0,06733

Услов компатибилности експерименталних и нумеричких решења, одељак 6.2.1, је првенствено задовољена условима слободног струјања у односу на Махов број, затим вредностима зауставног притиска и температуре, брзине струјања и Рејнолдсовог броја.

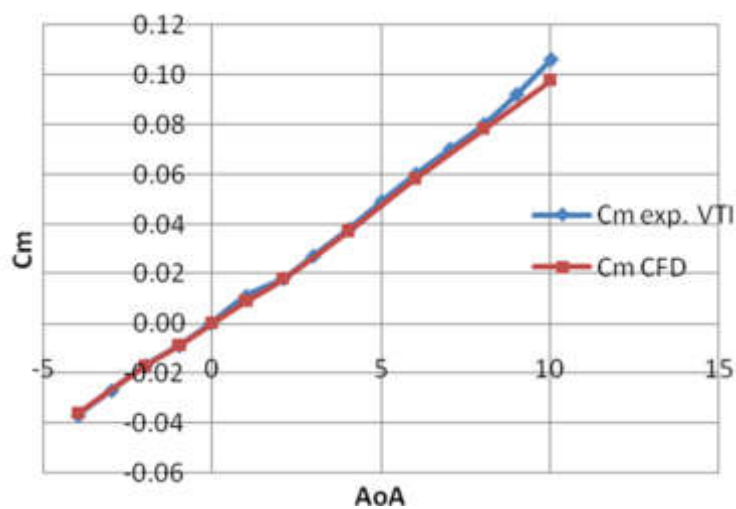
Зависност промене аеродинамичких коефицијената сила и момента за све режиме струјања је графички приказана на Сл.7-17 до Сл.7-25 [3].



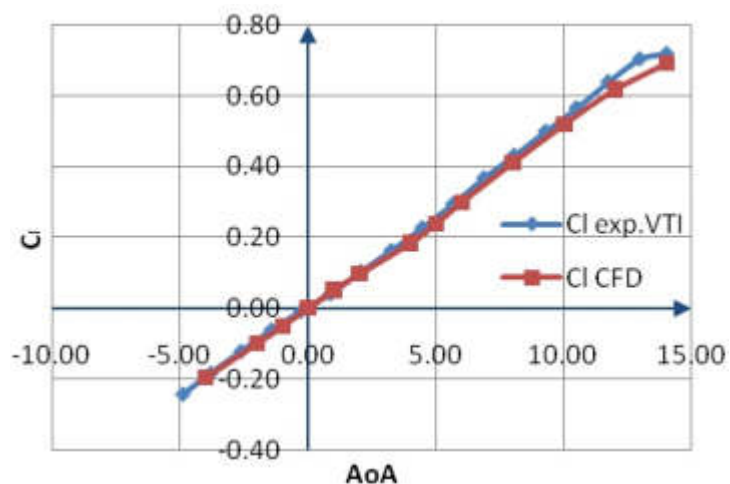
Слика 7-18: График промене коефицијента аеродинамичког узгона C_l са променом AoA при $M=0,6$.



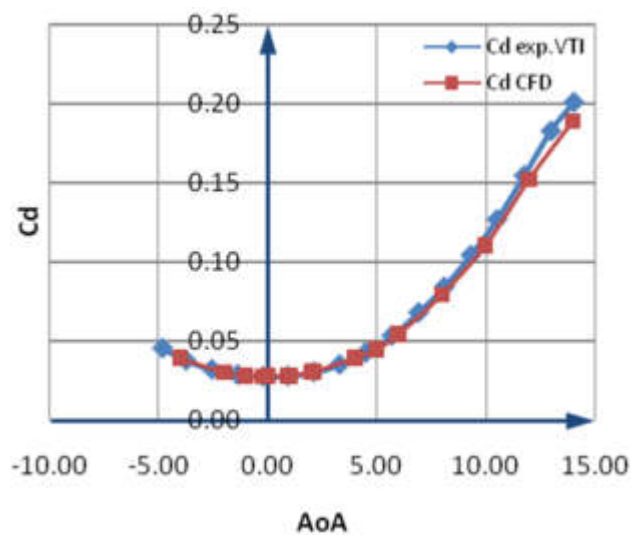
Слика 7-19: График промене коефицијента аеродинамичког отпора C_d са променом AoA при $M=0,6$.



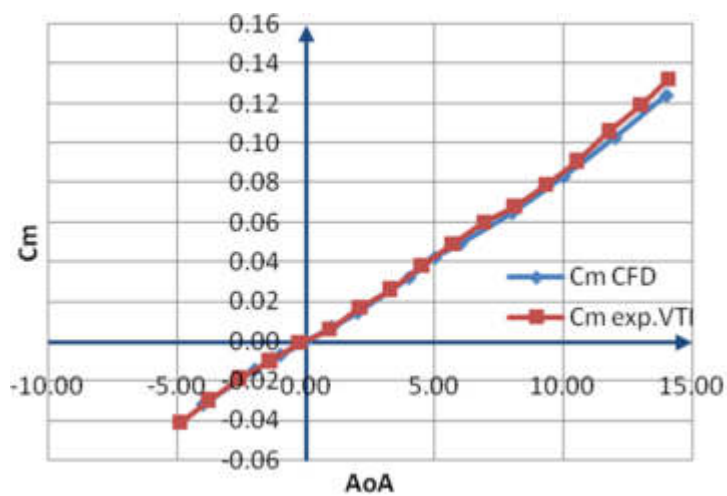
Слика 7-20: График промене коефицијента аеродинамичког момента C_m са променом AoA при $M=0,6$.



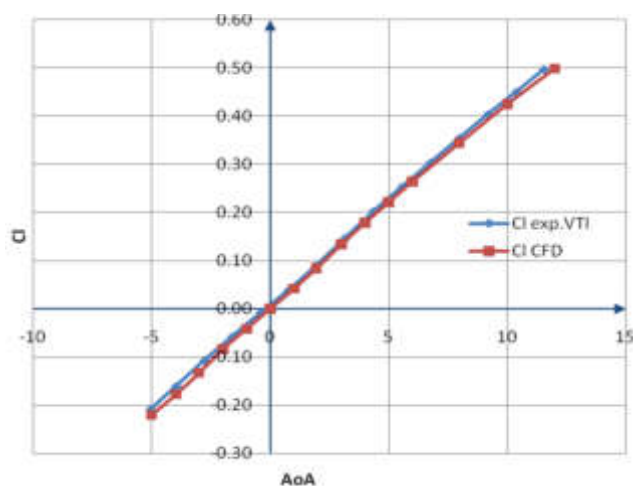
Слика 7-21: График промене коефицијента аеродинамичког узгона C_l са променом AoA при $M=0,85$.



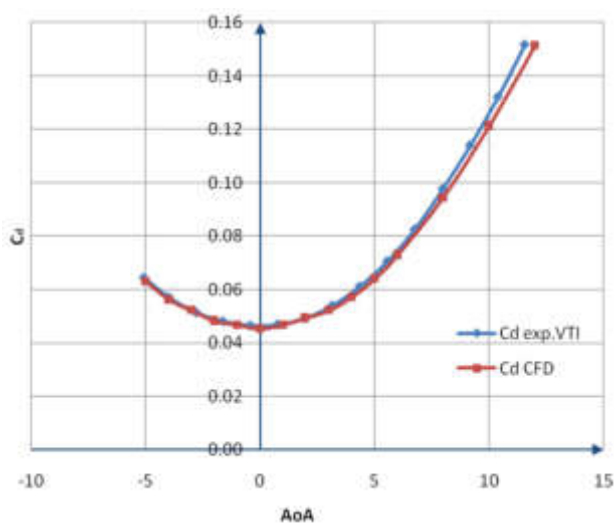
Слика 7-22: График промене коефицијента аеродинамичког отпора C_d са променом AoA при $M=0,85$.



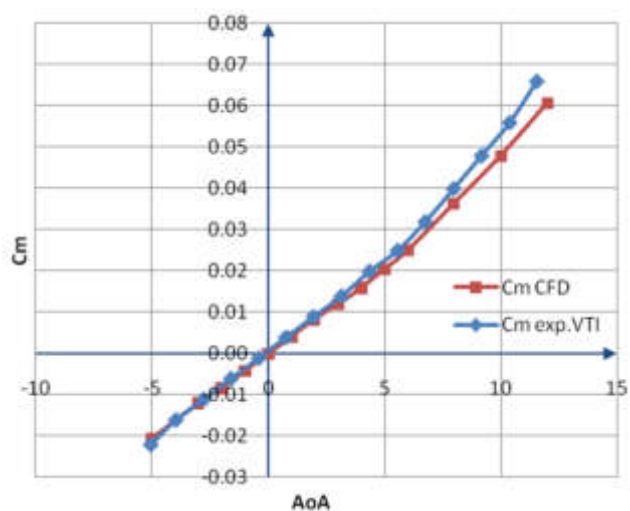
Слика 7-23: График промене коефицијента аеродинамичког момента C_m са променом AoA при $M=0,85$.



Слика 7-24: График промене коефицијента аеродинамичког узгона C_l са променом AoA при $M=1,6$.



Слика 7-25: График промене коефицијента аеродинамичког отпора C_d са променом AoA при $M=1,6$.

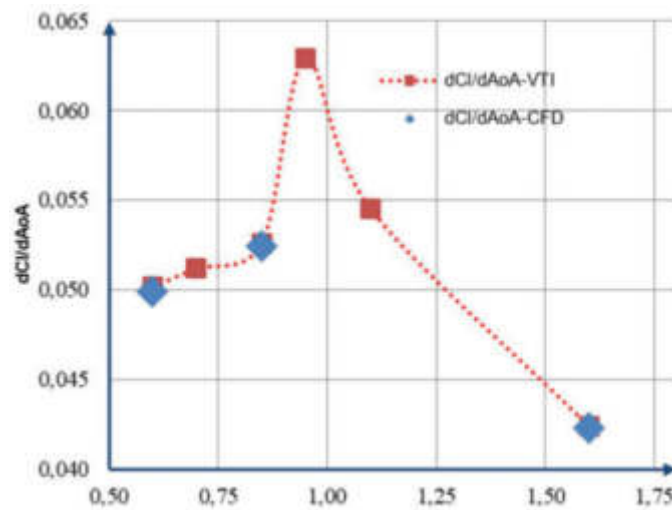


Слика 7-26: График промене коефицијента аеродинамичког момента C_m са променом AoA при $M=1,6$.

Графици су добијени применом кубне интерполације на измерене и/или израчунате резултате (погледати поделељак 7.2.2.2). На графицима су приказане вредности Махових бројева, заокружене на једну децималу.

Прелиминарна анализа указује на одсуство неправилних дисконтинуитета, што потврђује и физичку и нумеричку конзистентност тока у свим режимима струјања за све разматране АоА. Ови резултати пружају основу да се са високим степеном поузданости закључи да је примењени CFD метод валидан не само за анализиране случајеве, већ и за друге нападне углове унутар опсега разматраног прорачуна. Поред тога, интерполиране вредности у оквиру овог опсега могу се сматрати репрезентативним и довољно тачним за даљу анализу.

Случај прихватања екстраполираних вредности се морају узети са резервом и захтевају додатну аеродинамичку анализу, која није предмет овог истраживања.



Слика 7-27: Нагиб криве узгона услед Маховог броја.

На Сл.7-27 је представљен дијаграм зависности нагиба криве узгона са променом Маховог броја. Дијаграм потврђује готово идентичну зависност између нумерички и експериментално добијених вредности. На основу овог подударарања а сходно препоруци Андерсона [131] у поглављима 4. и 5. може се закључити да метод CFD прорачуна поседује адекватну NM, да је избор физичких модела, а посебно турбуленције, исправан; као и да су гранични услови правилно постављени.

7.2.4. Метрика валидности резултата прорачуна

Поређење нумеричких решења са експерименталним извршено је метриком за процену валидности на основу методологије приказане у одељку 6.2.3.

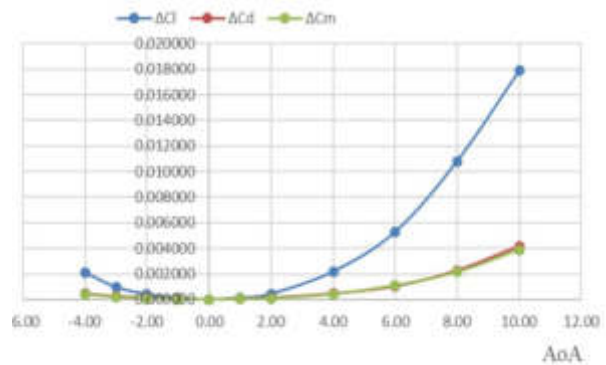
7.2.4.1. Апсолутна грешка

Апсолутна грешка⁸ сваког примера CFD симулације је израчуната на основу једначине (6.4) и табеларно приказана у Таб.7-11 до Таб.7-13.

⁸ Грешка - Деф.представља разлику између тачне и израчунате вредности. Како је експериментално мерење склоно грешци, такође, прикладнији је израз неслагање у компаративним верификацијама.

Табела 7-11: Апсолутна грешка при $M=0,6$.

AoA	ΔCl	ΔCd	ΔCm
-4.00	0.002117	0.000455	0.000393
-3.00	0.000959	0.000238	0.000180
-2.00	0.000405	0.000141	0.000083
-1.00	0.000103	0.000067	0.000023
0	0.000000	0.000006	0.000000
1.00	0.000120	0.000069	0.000029
2.00	0.000432	0.000142	0.000090
4.00	0.002173	0.000451	0.000403
6.00	0.005272	0.001024	0.001094
8.00	0.010809	0.002260	0.002151
10.00	0.017871	0.004159	0.003888
MAE	0.003660	0.000819	0.000758

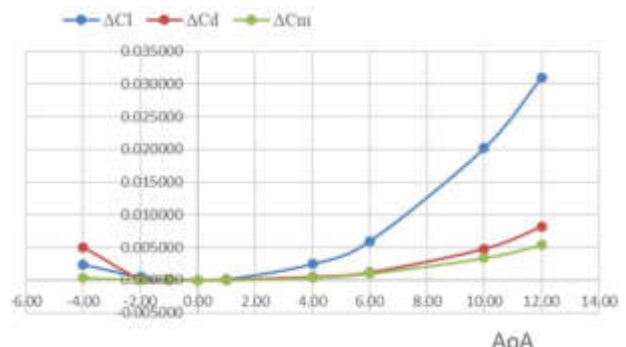


Слика 7-28: График зависимости абсолютной ошибки в функции AoA при $M=0,6$.

Апсолутна грешка равномерно расте са повећањем AoA, а њене максималне вредности одговарају прорачунима за највећим AoA. Просечна грешка је дата у последњем реду табеле.

Табела 7-12: Апсолутна грешка при $M=0,85$.

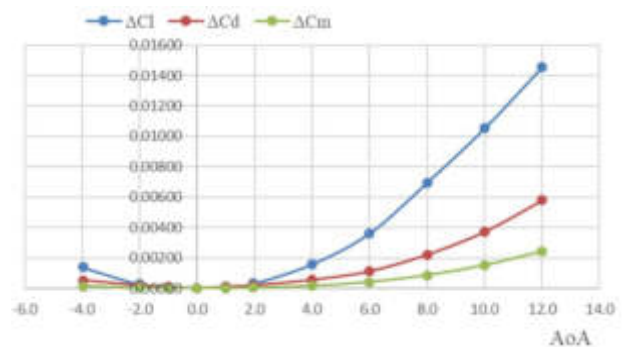
AoA	ΔCl	ΔCd	ΔCm
-4.00	0.002374	0.005056	0.000374
-2.00	0.000487	0.000160	0.000086
-1.00	0.000095	0.000075	0.000020
0.00	0.000000	0.000005	0.000000
1.00	0.000095	0.000075	0.000020
4.00	0.002466	0.000510	0.000383
6.00	0.005949	0.001176	0.001029
10.00	0.020209	0.004803	0.003393
12.00	0.030952	0.008137	0.005385
MAE	0.006959	0.002222	0.001188



Слика 7-29: График зависимости абсолютной ошибки в функции AoA при $M=0,85$.

Табела 7-13: Апсолутна грешка при $M=1,6$.

AoA	ΔCl	ΔCd	ΔCm
-4.0	0.00139	0.00053	0.00013
-2.0	0.00026	0.00019	0.00003
-1.0	0.00006	0.00009	0.00001
0.0	0.00000	0.00001	0.00000
1.0	0.00009	0.00009	0.00001
4.0	0.00160	0.00055	0.00015
6.0	0.00363	0.00111	0.00040
10.0	0.01154	0.00372	0.00152
12.0	0.01454	0.00580	0.00243
MAE	0.00369	0.00132	0.00050



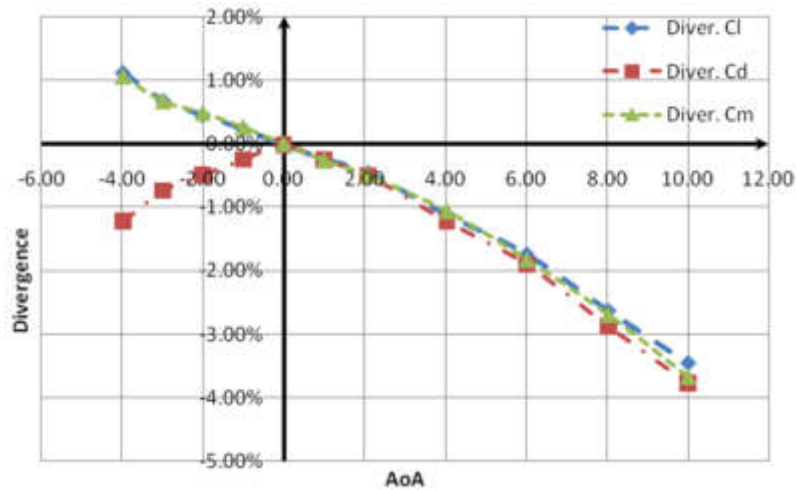
Слика 7-30: График зависимости абсолютной ошибки в функции AoA при $M=1,6$.

Приметно је да се вредност апсолутних грешака равномерно повећава са порастом AoA у свим режимима струјања, нема наглих промена као ни појаве промене предзнака у градијенту апсолутне грешке. Пораст грешке са повећањем нападног угла струјања је очекиван и резултат је примењеног концепта стационарног дизајна NM и начина симулације нападног угла закретањем вектора брзине слободне струје у циљу унификације прорачуна и ефикасности искоришћења CPU. Цена оваквог приступа је повећана грешка у областима AoA већих од 8° .

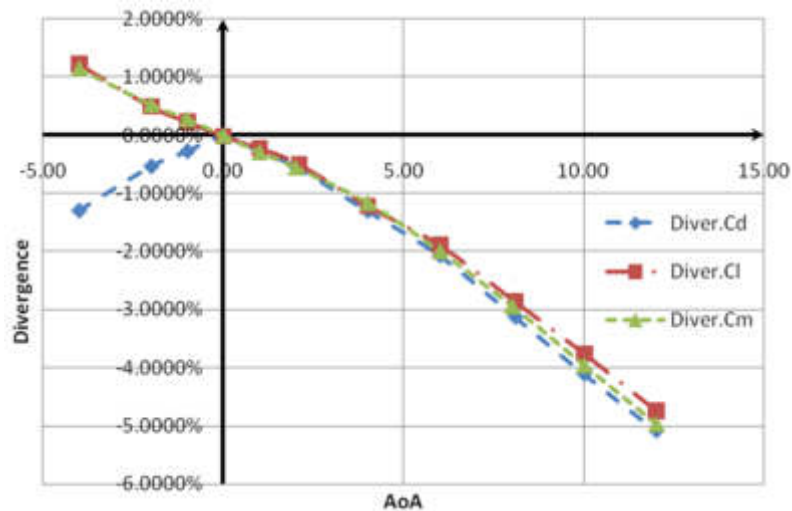
На основу изнетог може се очекивати да метод CFD прорачуна правилно предвиђа токове струјања, да нема дисконтинуитета и неправилних искакања резултата у свим режимима струјања, односно да прелиминарни показатељ валидације указује на врло добро предвиђање решења струјних токова.

7.2.4.2. Релативна грешка

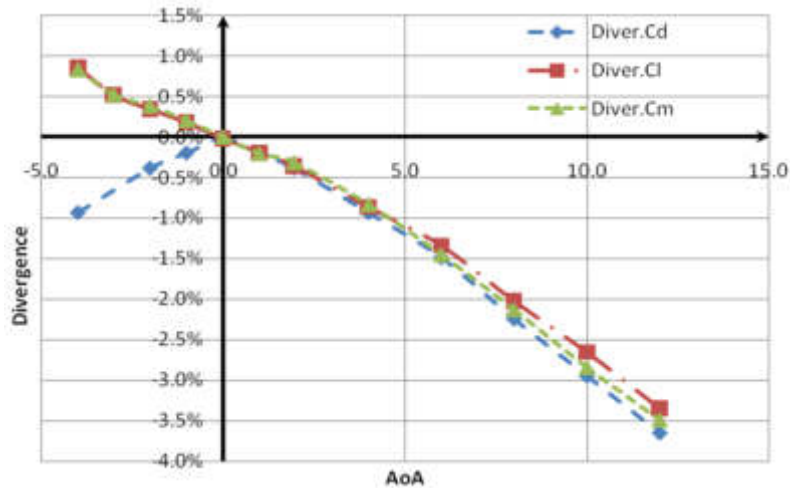
Релативна грешка сваког примера CFD симулације је израчуната на основу једначине (6.5) а приказана је у виду компаративних графика, Сл.7-30 до Сл.7-32.



Слика 7-31: Релативна грешка CFD у односу на експериментале резултате са променом AoA за $M=0,6$.



Слика 7-32: Релативна грешка CFD у односу на експериментале резултате са променом AoA за $M=0,85$.



Слика 7-33: Релативна грешка CFD у односу на експерименталне резултате са променом AoA за $M=1,6$.

Вредности релативне грешке за подзвучно и трансонично струјање и AoA до 8 степени, имају вредности испод 3%, док се за више нападне углове релативна грешка задржава испод 5%. У надзвучном режиму за све нападне углове до 12 степени релативна грешка је испод 3%.

Мала вредност релативне грешке при нижим нападним угловима струјања потврђује валидност методологије нумеричког прорачуна. Приметно је да је дивергенција C_d већа од дивергенције C_l поготово у трансоничној области струјања при којој је изражена појава локалних дисипација у струјању, нарочито при вишим AoA. Повећање релативне грешке за веће AoA је очекивано и последица је усвојеног концепта дизајна NM који се не мења у току испитивања.

Релативна грешка је на основу овог критеријума потврђује валидност методе CFD прорачуна у свим режимима струјања и AoA за које је симулација проређена.

7.2.4.3. Корен средње квадратне грешке-RMSE

Корен средње квадратне грешке је израчунат на основу методологије приказане у поделуци 6.2.3.3. Вредности ове метрике валидности су приказане у Таб.7-14.

Табела 7-14: Вредности корена средње квадратне грешке CFD прорачуна.

Режим струјања	$RMSE_{C_l}$	$RMSE_{C_d}$	$RMSE_{C_m}$
$M=0,6$	0,006567876	0,001476275	0,00043137
$M=0,85$	0,012533424	0,003116120	0,0367785
$M=1,6$	0,006831587	0,002222509	0,00910865

Вредности RMSE показују да је примена CFD методе за прорачун калибрационог модела AGARD-B дала одличне резултате при прорачуну аеродинамичких коефицијента за подзвучна и надзвучна струјања. У домену трансоничних струјања вредност преко граничног параметра прихватљивости за ниво научног истраживања од $RMSE \leq 0,03$ има прорачун коефицијента аеродинамичког момента у трансоничној области струјања, док је за прорачун за остале аеродинамичке вредности научно прихватљив.

Применом овог метричког поступка се може закључити да се у просеку највеће вредности RMSE односе на прорачун аеродинамичког отпора, док су вредности за коефицијент аеродинамичког узгона далеко испод граничне вредности па се могу третирали одличним примером CFD моделовања. Овај чињеница нам указује да су сви елементи нумеричког модела веома добро постављени изузев моделовања физичких појава које утичу на појаву

аеродинамичког отпора у трансоничном режиму струјања. Унапређењем дизајна прорачунске мреже у зонама очекиваних турбулентних и вртложних струјања може се очекивати побољшање моделовања овог сегмента прорачуна.

На основу изнетог се са сигурношћу може констатовати да је метод CFD прорачуна верификован јер показује веома добру усклађеност са експериментално добијеним резултатима при чему су вредности RMSE за C_l и C_d су у границама високе научне поузданости, док су мала одступања код C_m су очекивана и апсолутно су прихватљива за рад ове врсте.

7.2.4.4. Максимална грешка

Анализом вредности апсолутних грешака приказаних у пододељку 7.2.4.1 приметан је тренд пораста исте са повећањем AoA. Максималне апсолутне грешке одговарају израчунатим вредностима за вредности највећих AoA за које је вршена CFD симулација. Максималне вредности су истакнуте у последњим редовима у Таб.7.8 до Таб.7.10.

7.2.4.5. Коефицијент корелације- r

Коефицијент корелације дефинисан у пододељку 6.2.3.5 и израчунат према изразу (6.9) приказан је у Таб.7-15.

Табела 7-15: Вредности коефицијента корелације CFD симулације.

Режим струјања	Ознака	Вредност
M=0,6	r_{Cl}	0,992105526
	r_{Cd}	0,996753955
	r_{Cm}	0,999895992
M=0,85	r_{Cl}	0,999845026
	r_{Cd}	0,999830920
	r_{Cm}	0,999827205
M=1,6	r_{Cl}	0,975259164
	r_{Cd}	0,999877783
	r_{Cm}	0,999500702

Вредности овог показатеља валидности методе CFD прорачуна су у свим режимима струјања и за све израчунате аеродинамичке коефицијенте блиске +1. Коефицијенти корелације показују да одличну сагласност у тренду између нумеричких и релевантних експериментално добијених резултата.

7.2.4.6. Коефицијент детерминације- R^2

На основу дефинисаног коефицијента детерминације у пододељку 6.2.3.5 и израза (6.9) израчунате су вредности и приказане у Таб.7-16.

Вредности овог показатеља валидности су у свом режимима струјања и за све аеродинамичке коефицијенте веома блиске јединици па се може закључити да је да је CFD модел у изузетно високој сагласности са референтним и да је у могућности да репродукује стварно физичко понашање.

Табела 7-16: Вредности коефицијента детерминације CFD симулације.

Режим струјања	Ознака	Вредност
M=0,6	R^2_{Cl}	0,999145505
	R^2_{Cd}	0,998461129
	R^2_{Cm}	0,997941931
M=0,85	R^2_{Cl}	0,997788164
	R^2_{Cd}	0,994378401
	R^2_{Cm}	0,997558013
M=1,6	R^2_{Cl}	0,999157217
	R^2_{Cd}	0,998726593
	R^2_{Cm}	0,995839748

7.2.4.7. Коефицијент несигурности валидације

Применом формулације показатеља несигурности валидације у пододељку 6.2.3.6 израчунатих према изразу (6.10) приказане су вредности коефицијента несигурности валидације у Таб.7-17. При чему је дисипација нумеричког и експерименталног решења према [194], [201] поистовећен са RMSE, а за вредност експерименталне несигурности преузети подаци RMSE експерименталних истраживања у ВТИ [122].

Табела 7-17: Вредности коефицијента несигурности валидације CFD симулације.

Режим струјања	Ознака	Вредност
M=0,6	U_{Cl}	0,001506449
	U_{Cd}	0,007220595
	U_{Cm}	0,008089073
M=0,85	U_{Cl}	0,012887464
	U_{Cd}	0,013130528
	U_{Cm}	0,019177982
M=1,6	U_{Cl}	0,002282443
	U_{Cd}	0,008583157
	U_{Cm}	0,009271866

На основу критеријума валидације може се закључити да су показатељи критеријума несигурности валидације у режимима подзвучног и надзвучног струјања испод 1% што одговара одличним граничним резултатима, док је у режиму трансоничног струјања у границама испод 2% што одговара врло добрим валидационим показатељима.

Резултати валидације показују да је CFD модел способан да предвиди коефицијент узгона са коефицијентом несигурности који указује на висок ниво поузданости у домену малих и средњих AoA. Предвиђање коефицијента отпора показује нешто већу несигурност услед ниског номиналног нивоа отпора, док предвиђање момента задовољава напредне инжењерске и истраживачке анализе. Закључно и овај метрички показатељ говори у прилог врло добре оцене валидности приказане унапређене методе CFD прорачуна.

7.2.4.8. Оцена валидности на основу метричких показатеља

Валидација CFD модела представља незаобилазни корак у процесу обезбеђивања поузданости нумеричких симулација. Увођење различитих метрика за процену валидности CFD модела, поред апсолутне и релативне грешке, произилази из потребе да се добије свеобухватнија и поузданија слика о квалитету и веродостојности симулационих резултата у односу на експерименталне податке.

Апсолутна и релативна грешка саме по себи нису довољне да обухвате све аспекте одступања, посебно у случајевима сложених и различитих поља података. У том смислу, увођењем корена средње вредности квадратне грешке (RMSE) омогућено је глобално мерење тачности модела у односу на цео скуп података. Коефицијент корелације омогућава увид у степен линеарне зависности између нумеричких и експерименталних резултата, док коефицијент детерминације (R^2) указује на проценат варијансе података који модел успешно објашњава. Коначно, коефицијент несигурности валидације интегрише мере експерименталне и нумеричке сигурности у јединствену вредност.

Синергистичком применом наведених метричких индикатора омогућена је објективна и квантитативна процена валидности модела у односу на референтне податке, чиме се у великој мери елиминише утицај субјективне процене у процесу евалуације.

У оквиру спроведених истраживања, CFD модел базиран на RANS приступу, коришћењем SST $k-\omega$ турбулентног модела, примењен је на AGARD-B калибрациони модел у сва три режима струјања. Резултати CFD симулација су упоређени са расположивим експерименталним подацима из аеротунелских испитивања.

Изведени резултати показују да апсолутна грешка равномерно расте са повећањем нападног угла струјања, што је физички очекивано услед пораста нелинеарних ефеката у расподели притиска и генерисању аеродинамичких сила и момената. У исто време, релативне грешке су анализиране и показују врло повољан тренд, тако да за подзвучно и трансонично струјање и AoA до 8 степени, релативна грешка је испод 3%, док се за више нападне углове релативна грешка задржава испод 5%. У надзвучном режиму за све AoA до 12 степени, релативна грешка је испод 3%.

Анализа RMSE метрике показала је врло ниске вредности апсолутних грешака, Таб 7.11, чиме се потврђује валидност мерења глобалне тачности модела. Све добијене вредности налазе се унутар опште прихваћених граница прихватљивости за валидацију аеродинамичких CFD модела па се са сигурношћу може констатовати да је метода CFD прорачуна верификована јер показује веома добру усклађеност са експериментално добијеним резултатима при чему су вредности RMSE за C_l и C_d су у границама високе научне поузданости, док су мала одступања код C_m су очекивана и апсолутно су прихватљива за рад ове врсте. Корак унапред у будућем раду треба дати на моделовање физичких појава које утичу на појаву аеродинамичког отпора у трансоничном режиму струјања. Унапређењем дизајна прорачунске мреже у зонама очекиваних турбулентних и вртложних струјања може се очекивати побољшање моделовања овог сегмента прорачуна.

Посебно је значајно што израчунати коефицијенти детерминације између CFD резултата и експерименталних података у просеку износе око 0,998, што указује на изузетно високи степен корелације између симулираних и измерених података. Вредности R^2 блиске јединици су снажан доказ да CFD модел репродукује реалне физичке појаве са високим нивоом тачности.

Коефицијент несигурности валидације израчунат је за све три аеродинамичке величине у сва три режима струјања, Таб.7-14. Резултати валидације показују да је CFD модел способан да предвиди коефицијент узгона са коефицијентом несигурности који указује на висок ниво поузданости у домену малих и средњих AoA. Предвиђање коефицијента отпора показује нешто већу несигурност услед ниског номиналног нивоа отпора, док предвиђање момента задовољава напредне инжењерске и истраживачке анализе.

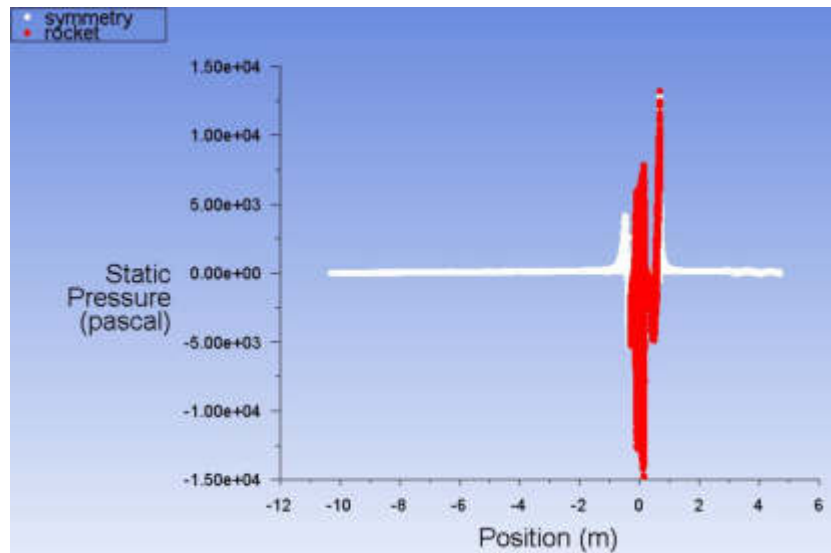
Приказани резултати недвосмислено потврђују да је CFD модел калибрисан и верификован у складу са стандардима добре праксе. Резултати сугеришу да је изабрани турбулентни модел и методологија решења базирана на решавању притиска спрегнута са брзином и применом методе дискретизације супротног усмеравања другог реда погодна за симулацију услова

струјања око тела као што је AGARD-B модел у подзвучном режиму. Такође, и да је примена методологије решавања базираног на решавању густине у надзвучном струјању правилна одлука.

На основу спроведене анализе може се закључити да је примењени CFD модел способан да са високим степеном тачности предвиди аеродинамичке перформансе AGARD-B модела у широком опсегу режима струјања и напада угла. Тако верификован и валидацијом потврђен модел представља поуздану основу за примену у даљим студијама и дизајнерским анализама. Спроведена валидација оснажује веродостојност CFD решења и пружа сигурну основу за његову даљу примену у анализама и предикцијама сложенијих аеродинамичких проблема.

7.2.5. Визуелизација расподеле физичких величина стања флуида у NM

У процесу валидације CFD модела извршено је визуелно поређење поља физичких величина упоређивањем расподела величина стања флуида у ненарушеној и нарушеној области струјања. Приређен је визуелни приказ расподеле притисака и брзина дуж опструјаваног тела и карактеристичним површима паралелним x - z и y - z равнима и приказан на следећим сликама. Постпроцесирање је спроведено унутар Fluent-овог интегрисаног окружења и уз употребу ANSYS CFD-Post алата.

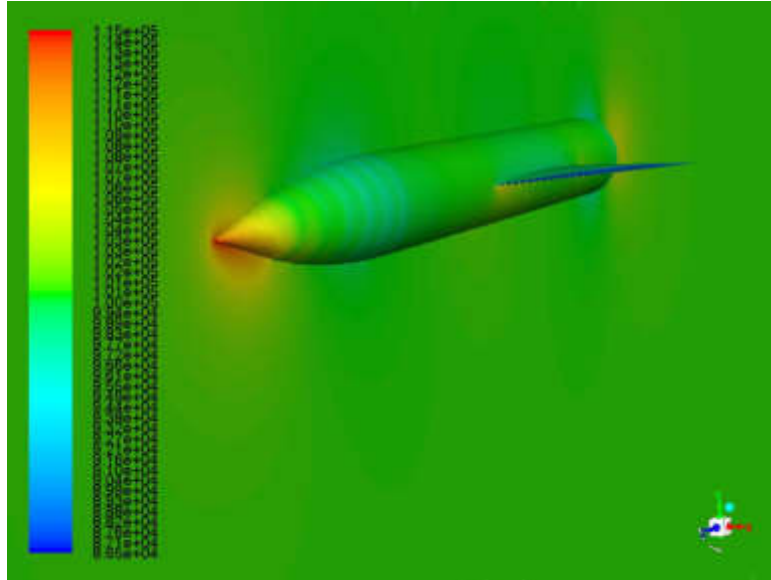


Слика 7-34: Расподела статичког притиска дуж AGARD-B (rocket) и вертикалне равни симетрије (symmetry) за случај подзвучног струјања при $\text{AoA}=6^\circ$ [3].

Расподела статичког притиска дуж калибрационог модела у вертикалној равни симетрије у распону од 12 дужина испред и 6 дужина иза опструјаваног модела је приказана на Сл.7-34. Јасно се види да вредност статичког притиска стагнира дуж слободне струје испред модела што потврђује стабилност нумеричке интерпретације слободног струјања. То у исто време потврђује и да је енергетска прерасподела слободног струјања правилна. Расподела статичког притиска у зони опструјавања AGARD-B (rocket) представља промене које су изражене драматичним променама у зони опструјаваног тела. У наставку струјања су приметне благе осцилације које одговарају променама притиска у вртложном трагу струјања.

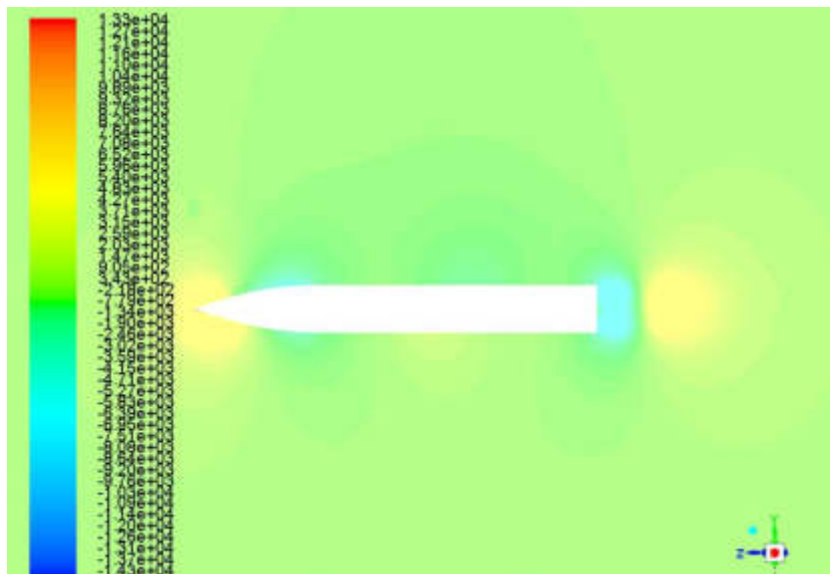
Визуелизација расподеле апсолутног притиска дуж површине опструјаваног модела и вертикалних површи симетрије при средњим AoA , Сл.7-7 и 7-35, показују очекивану расподелу стационарне зоне високог притиска на предњем делу модела која се одликује повећањем притиска са благом асиметријом у односу на гору и доњу страну као последица позитивног нападног угла опструјавања. Појас оживалног дела одликује благи пад притиска као последица декомпресије и означава потенцијалне зоне одвајања струјања при порасту AoA

и брзина симулације. Приметан је усклађен распоред притисака на вертикалним контролним површинама и одговарајућим реонима на површини модела, такође се примећује равномеран прелазак притисака уских зона граничног слоја на остатак прорачунског домена. Област струјања у пределу излазних ивица и базе опструјаваног тела приказује очекивану расподелу притисака и појаву вртложних зона непосредно на прелазима бочне и базне површи AGARD-B модела. Углађен прелазак из зоне слободног тока и након поремећеног тока зоне опструјавања модела ка излазној површи домена сведочи о правилном моделовању укупне енергетске равнотеже CFD модела.



Слика 7-35: Расподела апсолутног притиска дуж AGARD-B и вертикалне равни симетрије за случај подзвучног струјања при $AoA=8^\circ$.

Издвојена расподела статичког притиска у вертикалној равни симетрије, Сл.7-36, приказује дужну симетрију протока где се издвајају стационарна зона предњег дела коју карактерише пораст статичког притиска, затим зона смањења статичког притиска у оживалном делу силуете трупа којој одговара повећање динамичког притиска услед локалног убрзања струјања.



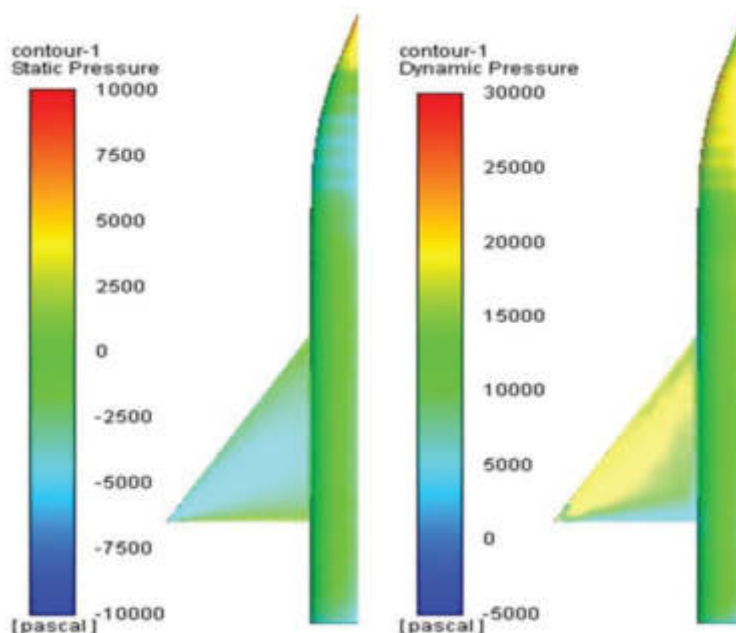
Слика 7-36: Расподела статичког притиска у вертикалној равни симетрије за случај подзвучног струјања при $AoA=2^\circ$.

Сферни облик стационарне зоне потврђује правилност увођења сферне зоне утицаја NM као у њену позицију са центром непосредно испред врха носа AGARD-B модела.

У зони базе модела, као што је очекивано, уочава се нагли пад статичког притиска, услед локалних појава вртложних струјања, што секундарно узрокује појаву базног отпора. На слици се јасно види да утицај нижег статичког притиска у овој зони не прелази дијаметар базе модела више од 30% што апсолутно оправдава правилан дизајн проширене утицајне зоне NM у овој регији који се простире на двоструки дијаметар трупа модела, односно 50% радијално од излазне ивице трупа.

Расподела статичког притиска у вертикалној површи у зони опструјавања крила AGARD-B модела дуж нападне ивице правилно описује реон стагнације. На излазној ивици се уочава зона пораста статичког притиска што прати физику формирања локалних дисипација. Облици и димензије описаних зона су усклађени са облицима и димензијама уведених утицајних зона NM описаних у одељку 7.1.2.

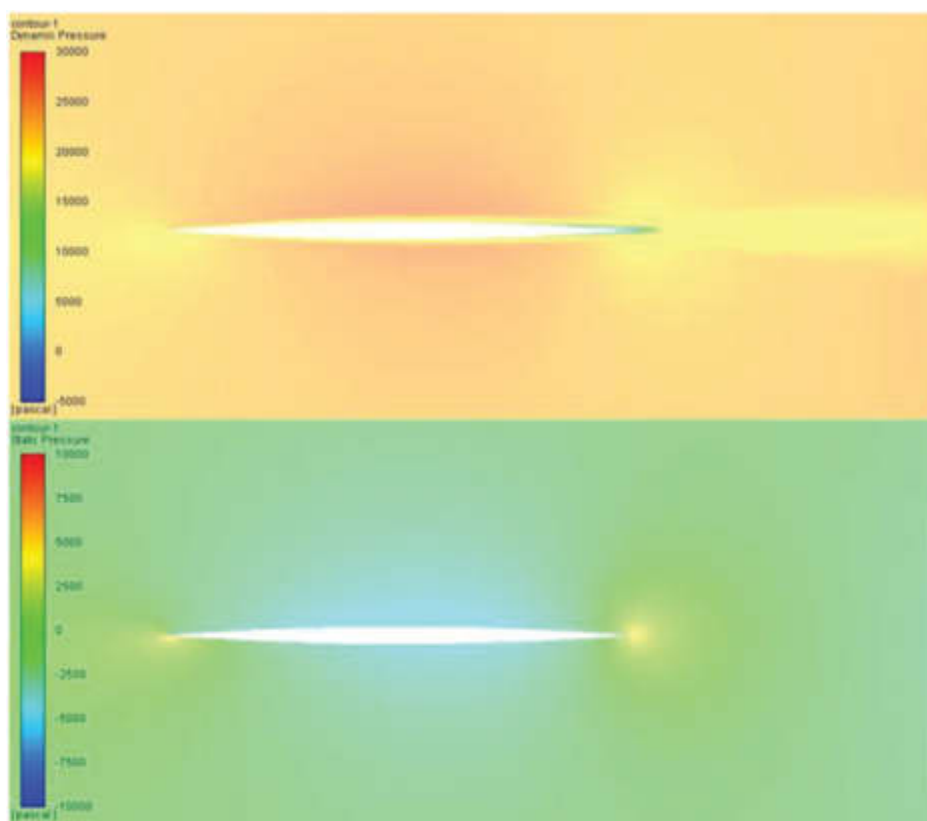
Дистрибуција статичког и динамичког притиска са горње стране опструјаваног модела у трансоничном струјању са малим нападним углом, Сл. 7-37, приказује правилну смену зона утицаја статичког и динамичког притиска. Тако зону стагнације прати повећање статичког и смањење вредности динамичког притиска у пределима носног дела модела и нападним ивицама. Такође, предео смањења динамичког притиска на излазним ивицама крила и трупа прати пораст статичког притиска. Обрнуто, зона струјног убрзања проузрокује повећање динамичког притиска коју апсолутно синхронизовано прати смањење статичког притиска. На тандем слици се јасно уочава зона значајне апсолутне разлике ових притисака у пределу носеће површине крила.



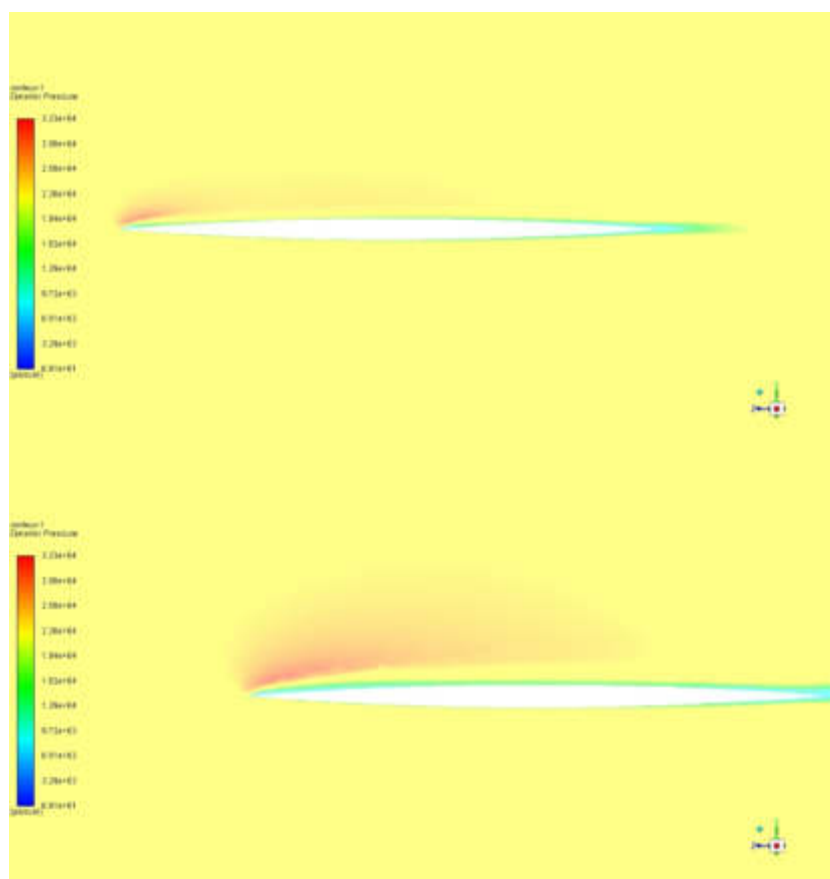
Слика 7-37: Расподела статичног и динамичког притиска са горње стране AGARD-B модела при $M=0,85$ и $AoA=2^\circ$ [3]

Сл.7-38 говори додатно у прилог правилној смени стационарног и динамичког притиска у зони опструјавања око крила модела.

Утицај проширеног граничног слоја који се уочава на горњаци крила при средњим AoA се уочава раздвојеном зоном повећања динамичког притиска и очекивано је израженија у зони удаљеној $0,25 D$ од корена крила. Непосредно уз горњаку крила и у пределу излазне ивице је приметно смањење динамичког притиска што указује на физичку појаву формираног граничног слоја и припреме зона мехурова отцепљења који одговарају положајима за ову врсту крила [99].

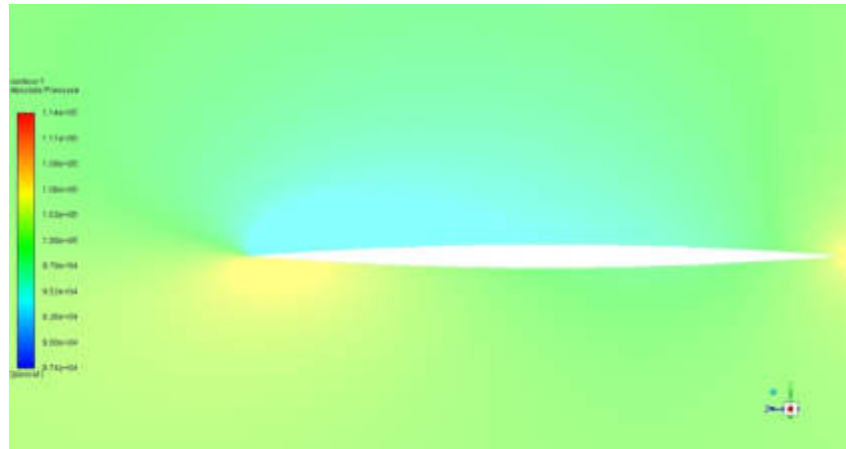


Слика 7-38: Расподела динамичког и статичног притиска у вертикалној равни симетрије за случај подзвучног струјања при $AoA=2^\circ$ [3].

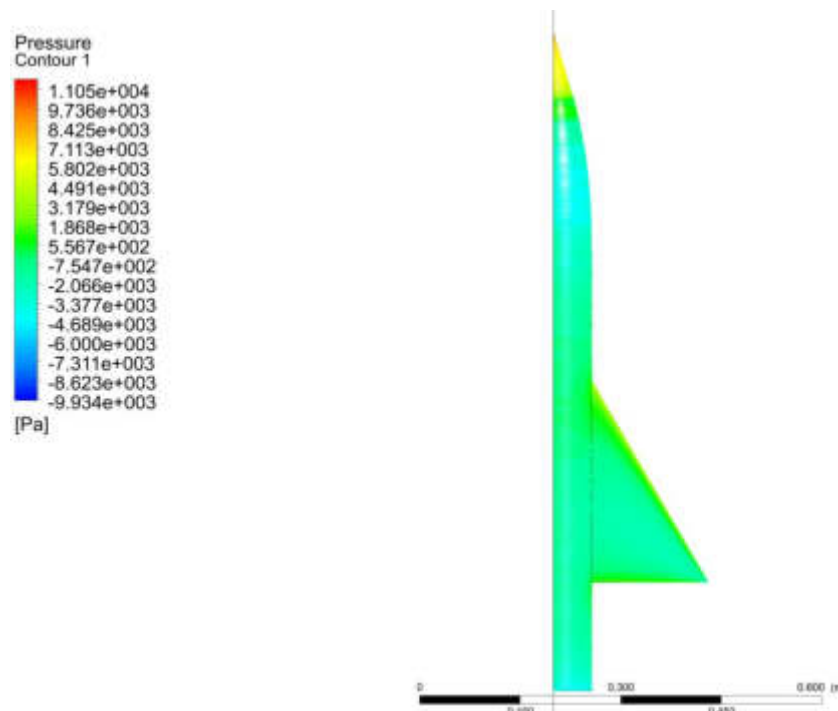


Слика 7-39: Расподела динамичког притиска у вертикалној равни око крила у зонама 0,1 D и 0,25 D од трупа при $AoA=4^\circ$.

Приказани детаљи расподеле притисака, Сл.7-40 и Сл.7-41, додатно илуструју валидност градијента расподеле притисака у реонима слободног струјања, дуж опструјаваног тела и у прелазним зонама.



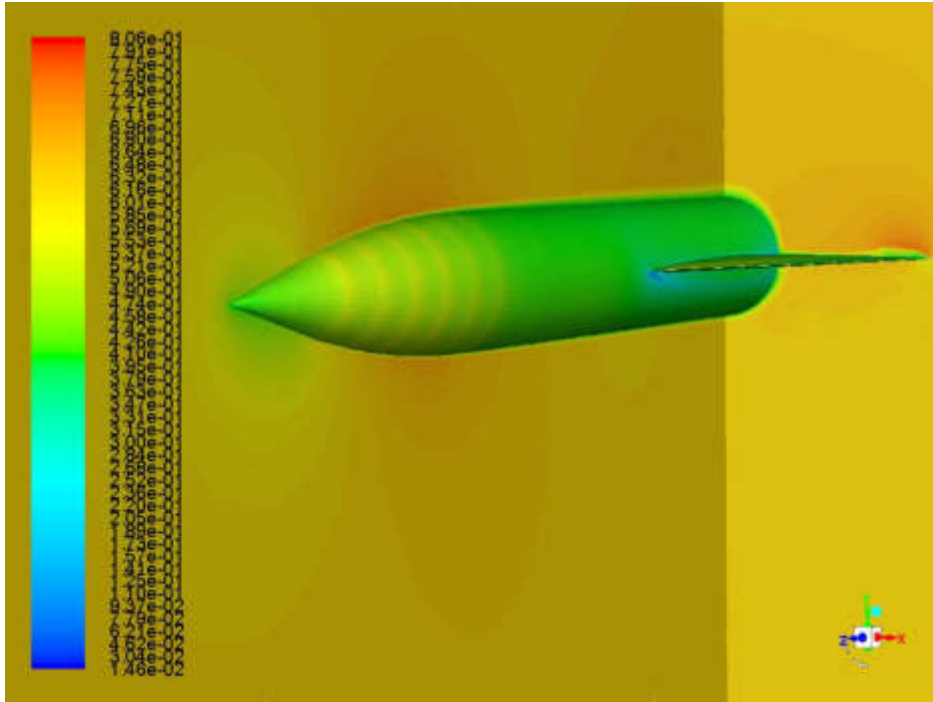
Слика 7-40: Расподела апсолутног притисака у вертикалној равни око крила у зони 0,1D од трупа.



Слика 7-41: Расподела притисака на површини модела при трансоничном струјању при $AoA=0^\circ$.

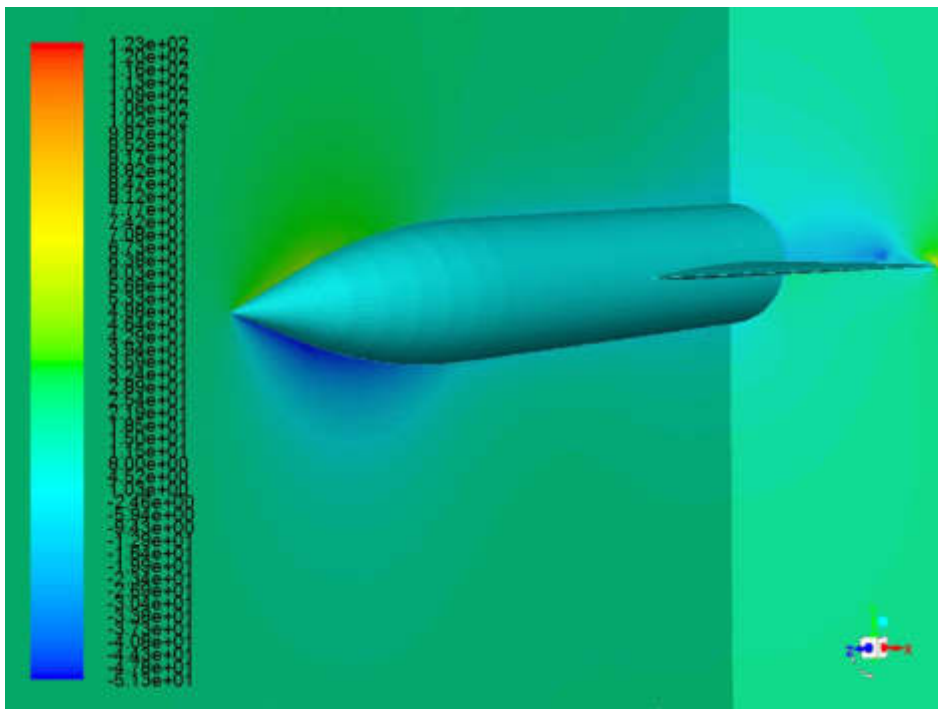
Расподела укупне брзине дуж контуре AGARD-B модела и вертикалних контролних површи, Сл.7-42, јасно одражава стагнационе зоне у зони носног дела као и убрзања у реону оживалног дела. Смирена расподела брзина низ труп одражава очекивано ламинарно кретање у овој области брзина за ниже AoA . Уочљива је зона граничног слоја у виду повишеног градијента брзине непосредно око површине опструјаваног тела чији се утицај шири од стагнационе зоне ка излазној ивици трупа, при томе се уочава блага асиметрија зоне као последица позитивног AoA .

Интерференца аеродинамичког утицаја крила и трупа не одражава неочекиване дисконтинуитете у струјном току. Оваква углађеност је доказ правилно дизајниране NM у овој зони утицаја.



Слика 7-42: Расподела укупне брзине на површини AGARD и параметарским површинама при $M=0,6$ и $AoA=4^\circ$.

У корену крила очекивано појављује се индикација драматичног смањења брзине струјног тока као резултат физичке појаве иницираног вртложног струјања. Положај благо опредељеног ка доњем делу трупа и крила директна је последица малог позитивног AoA . Међусобни утицај моделивања струјања изнад и испод крила се испољава променом интензитета брзине струјања у овим зонама, а на Сл.7-42 и Сл.7-43 уочљива се правилан положај истог.



Слика 7-43: Расподела компоненте v_y брзине на површини AGARD-B и параметарским површинама при $M=0,6$ и $AoA=4^\circ$.

Дистрибуција бочне компоненте брзине, Сл.7-43, се јавља у очекиваним зонама носног дела као последица асиметрије струјања услед позитивног АоА, затим појаву бочних индукованих компоненти брзине услед развоја граничног слоја и благих попречних вртлога, што је често у реалним CFD решењима чак и у номинално симетричном протоку.

Струјање у зони носа показују локални максимум бочне компоненте брзине што је у складу са убрзањем струје дуж закривљене површине носа. Присутност израженог негативног градијента (тамноплава зона) и позитивног (жута зона) у непосредној близини носа указује на први знак одвајања или индукованог вртложног система, што је очекивано на умереним АоА.

Попречна промена бочне брзине приказана на вертикалним параметарским равнима указује на релативно стабилан, симетричан и глатко распоређен пораст дуж модела. Ово је индикатор доброг слагања мреже и коректно дефинисаних граничних услова.

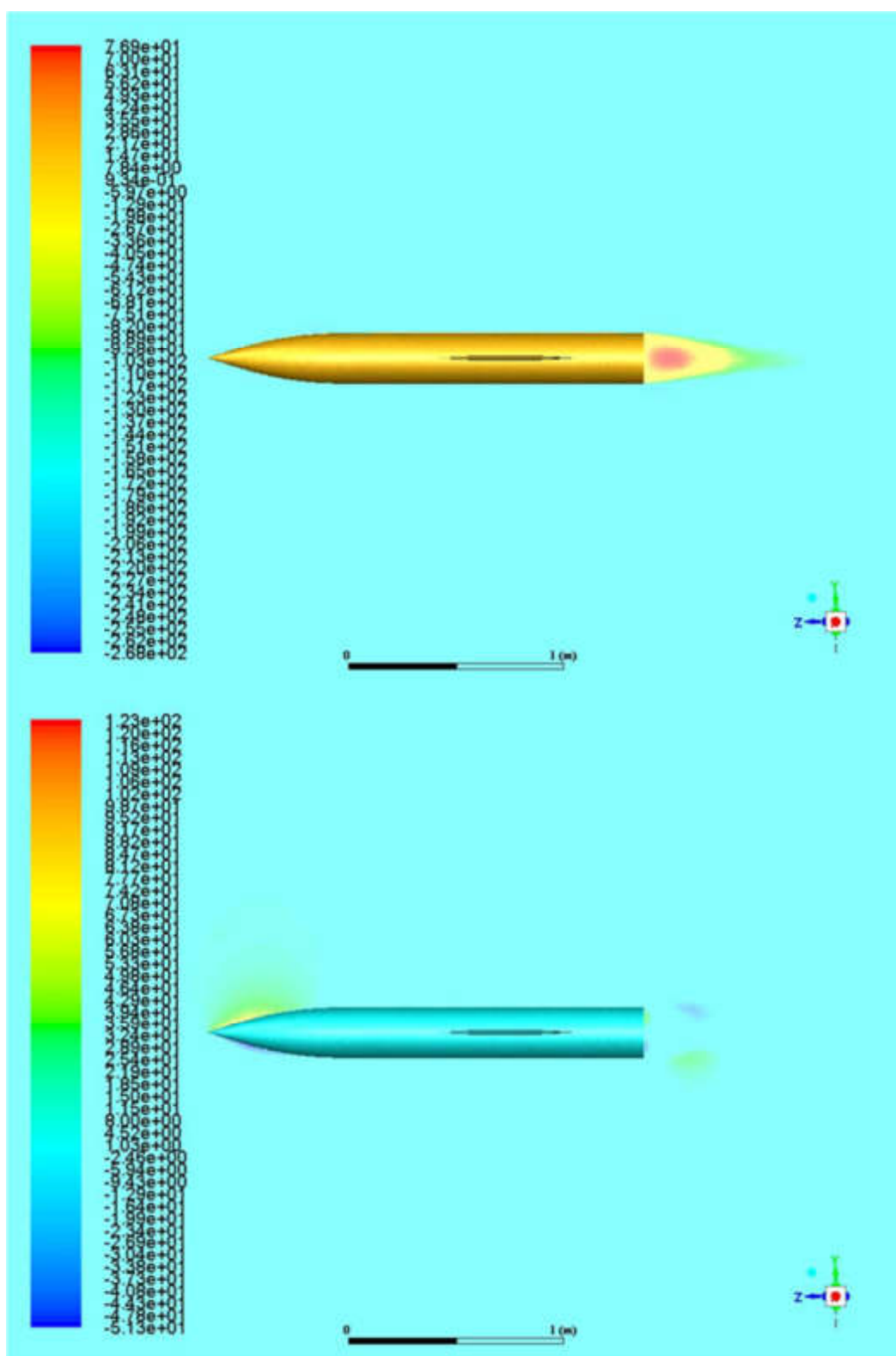
Интеракција са крилом такође доводи до појачаних вредности v_y , нарочито у задњој зони модела, где се очекује интеракција граничног слоја и вртложне структуре иза тела. Ово указује на правилну репрезентацију утицаја геометрије на бочне компоненте струјања.

Приказана расподела бочне компоненте брзине делује физички реалистично са добро дефинисаном расподелом градијената што потврђује конвергентност и стабилност симулације.

Горњи приказ на Сл.7-44 илуструје расподелу вертикалне v_z компоненте брзине. На основу приказа уочава се изразита асиметрија у пољу вертикалне брзине, што је директна последица АоА. У зони изнад модела доминирају позитивне вредности, што указује на усмерење струје нагоре, док су у доњој зони присутне негативне вредности значајног интензитета, што указује на вертикално одвајање и потенцијално формирање вртложне структуре.

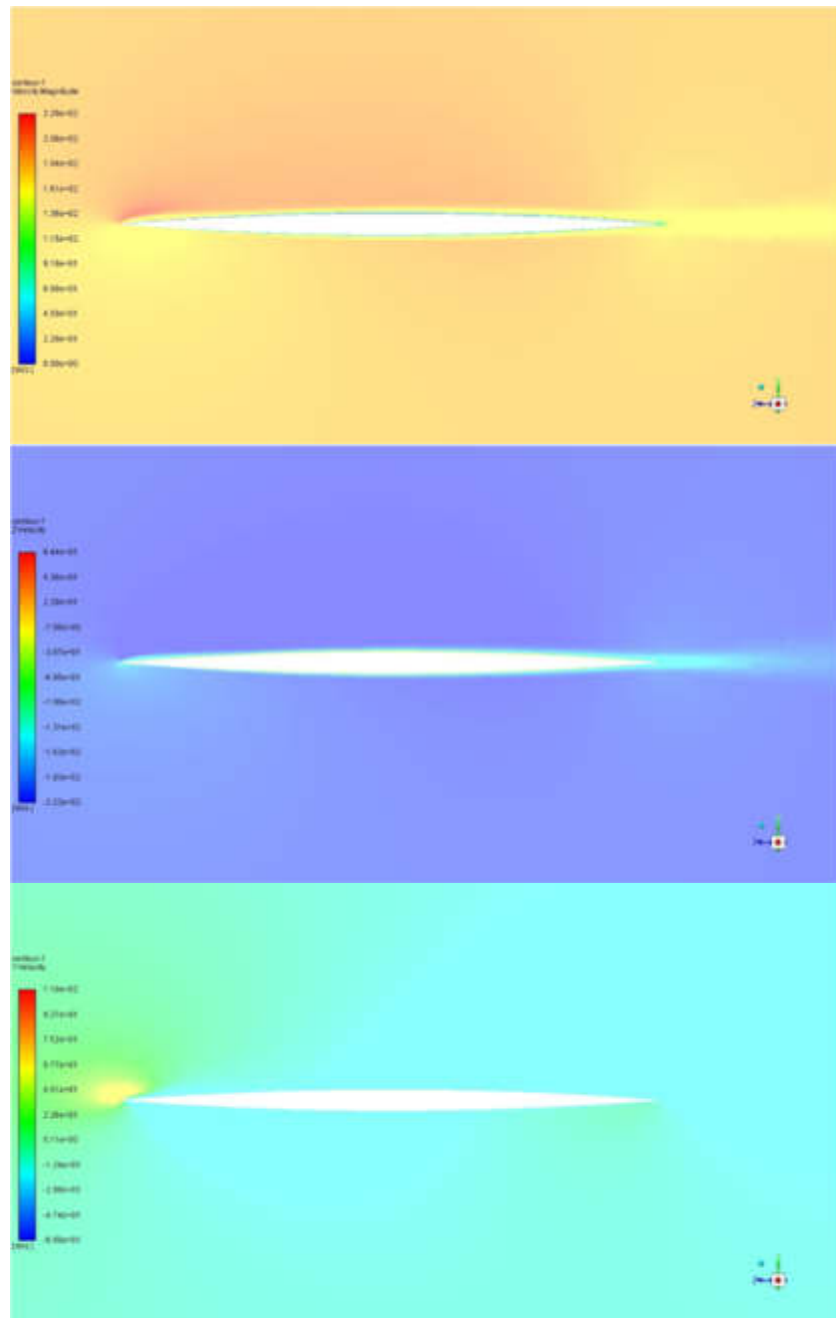
Доњи приказ на истој слици представља поље бочне v_y компоненте брзине, са симетричнијим распоном вредности (од -238 m/s до $+223$ m/s). Уочавају се слабо изражене, али присутне деформације поља у бочној равни, нарочито у зони иза тела. Ове појаве могу се тумачити као почетак развоја бочних вртложних структура, посебно у пољу вртложног трага, што је типично за тела оваквог облика.

Види се да и при умереним нападним АоА симулација показује слику изразитог поремећаја симетрије у пољу струјања. Ово понашање је у складу са очекиваним развојем циркулације око тела са позитивним АоА, тако да се може донети позитиван закључак о валидности визуализације струјања у овом режиму струјања.



Слика 7-44: Расподела брзина v_z и v_y на површини AGARD-V и на вертикалној равни при $M=0,85$ и $AoA=2^\circ$.

Укупна расподела брзине која је приказана на горњем делу Сл.7-45 указује на очекивано убрзање тока изнад горње површине крила, при чему се локална брзина у зони највећег подпритиска пење до $v \approx 230 \text{ m/s}$, што је у складу са Бернулијевим принципом. Са друге стране у пределу доњаке приметна је очекивана зона успорења тока.



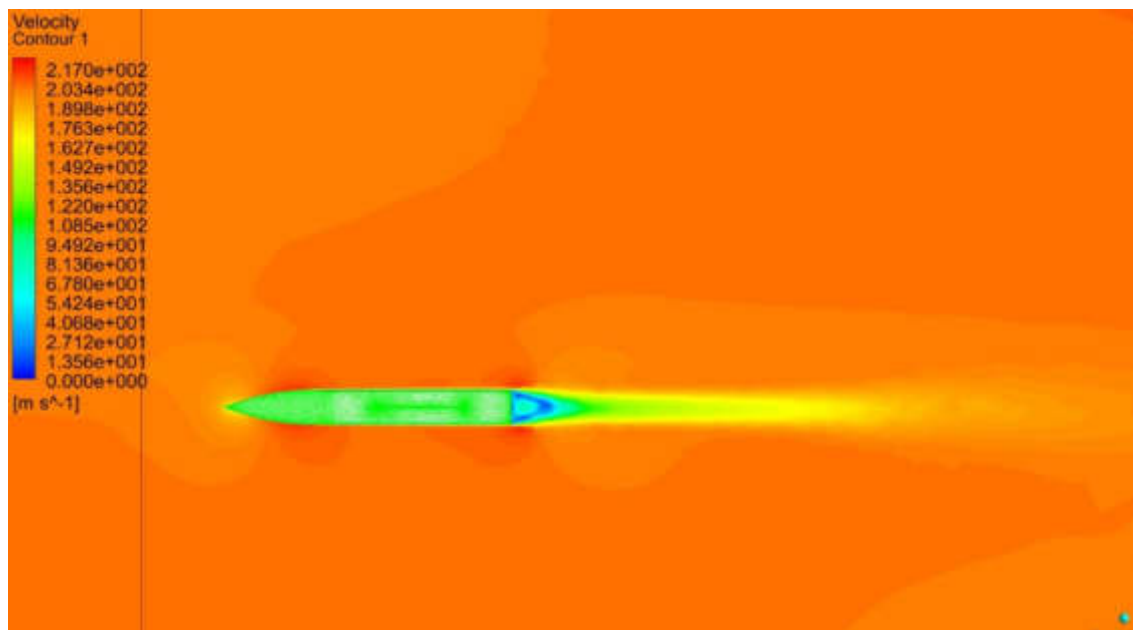
Слика 7-45: Расподела укупне брзине и компоненти v_x и v_z у вертикалној равни на удаљености $0,2D$ од трупа при $M=0,6$ и $AoA=2^\circ$.

Брзинску расподелу око крила у приказаној зони додатно употпуњују расподеле вертикалне и бочне компоненте брзине приказане на остатку слике. Тако, расподела вертикалне компоненте брзине указује на постојање индукованог поља брзина карактеристичног за овакво крило. Уочљива је негативна вредност компоненте v_z у струјном трагу као индикатор присуства вртлога. Са доње стране крила јављају се позитивне вредности у складу са континуитетом струјања и укупним струјањем око тела.

Расподела бочне компоненте брзине v_y открива присуство тродимензионалних ефеката и могуће почетке вртложних структура на крајевима крила. Присуство позитивне вредности испред носа крила и негативне вредности у зони иза профила указују на постојање бочног кретања флуида као последица геометрије, нападног угла и вртложне циркулације.

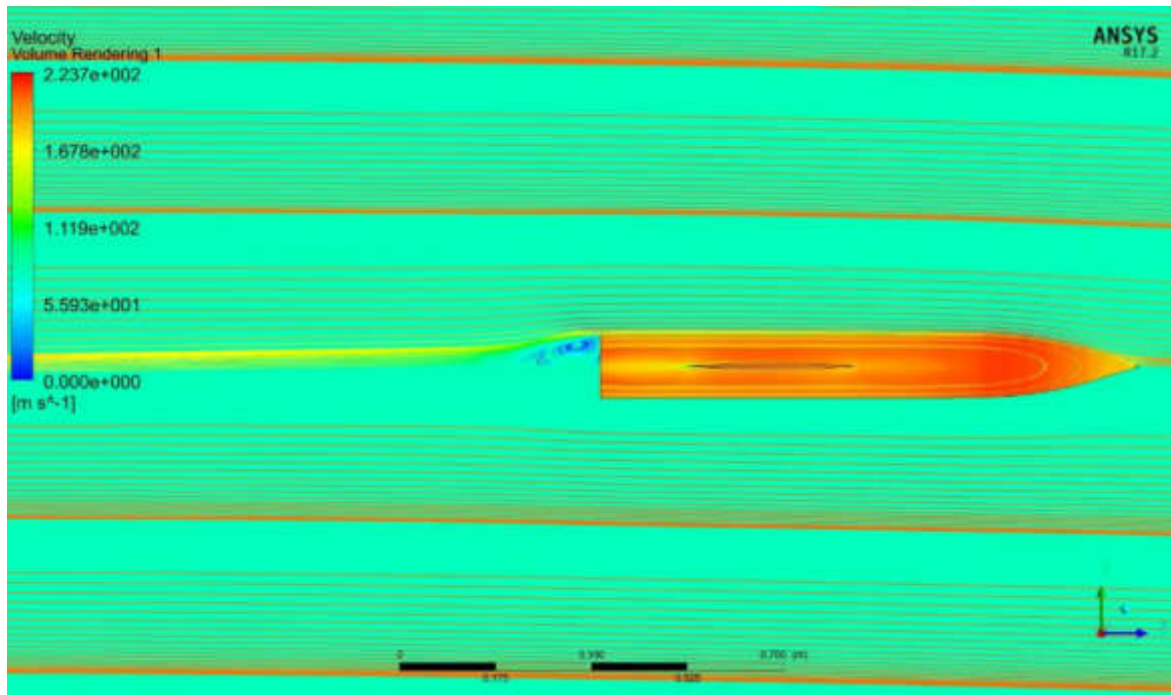
Сумирано, приказ расподеле брзина потврђује типичне аеродинамичке ефекте присутне око крила, укључујући убрзање струјања изнад профила, индуковано вертикално струјање, као и знаке тродимензионалности тока у виду бочних компоненти брзине. Расподела брзина у складу је са очекиваним понашањем за дате услове струјања и представља добру основу за даљу анализу сила и момента на телу.

Расподела брзине у вртложном трагу, непосредно иза репног дела и даље низводно у струјном току, Сл. 7-46, јасно издваја зоне са израженим градијентима брзине, као и доминантним конвекционим механизмима унутар вртложног језгра. Поље брзина показује карактеристичне циркулаторне обрасце струјања који се везују за репне вихоре, уз уочљиво постепено опадање амплитуде вртложних структура услед дисипативних ефеката са повећањем удаљености од тела.



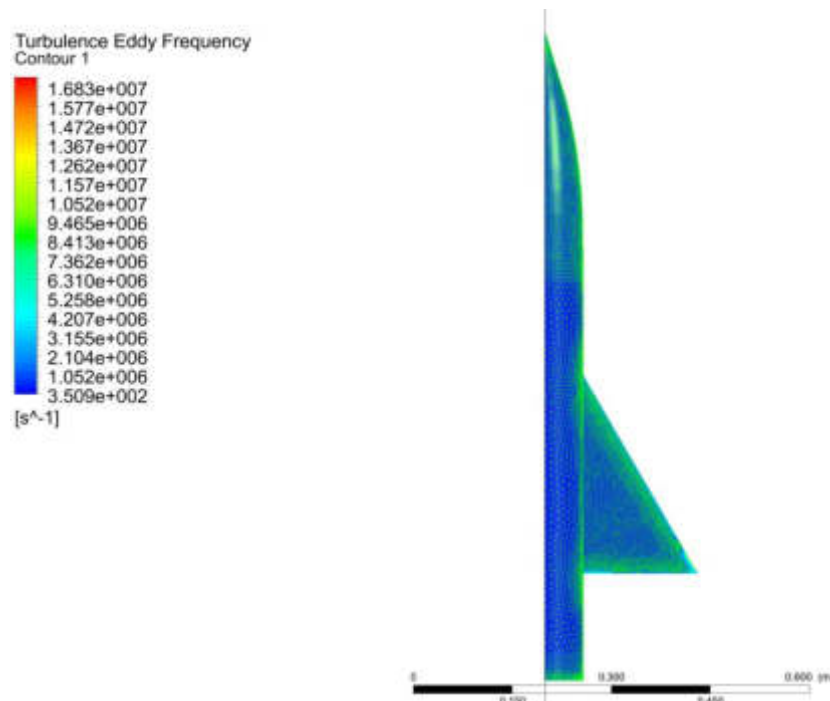
Слика 7-46: Расподела компоненте брзине v_y у вертикалној површини на удаљености 0,2D од трупа при $M=0,85$ и $AoA=2^\circ$.

Добијене визуелизације показују висок степен сагласности са познатим аеродинамичким понашањем за овај тип модела, чиме се додатно потврђују кредибилитет спроведене CFD анализе и прецизност примењеног SST $k-\omega$ турбулентног модела у симулацијама вртложних зона. У прилог ове тврдње је и приказ струјница струјног тока, Сл.7-47.



Слика 7-47: Визуелизација струјница око AGARD-B модела.

Дистрибуција фреквенције турбулентних вртлога ω [1/s], као параметра SST k- ω модела турбуленције, Сл.7-48, показује колико често вртлози настају и дисипирају се унутар флуида. Зоне нападне и излазне ивице, шира зона крајева крила, као и репни део калибрационог модела су очекивани рејони повећане расподеле. На трупу је повећана фреквенција у пределу носног и репног дела AGARD-B модела. Учесталост турбулентне вртложне структуре опада како се удаљава од критичних зона, што поново потврђује правилно предвиђање ове физичке појаве.



Слика 7-48: Дистрибуција фреквенције турбулентне вртложне структуре

На основу приказаног у овом одељку може се изнети закључак валидације на основу визуелизације расподеле физичких величина у NM.

У овом раду, примењена је визуелизација расподеле апсолутног, статичког и динамичког притиска, брзинског поља, као и фреквенције турбулентних вртлога у критичним зонама око AGARD-B модела – на површини тела, у уздужној $x-z$ и попречној $y-z$ равни, као и у зони вртложног трага иза модела.

У свим анализираним пресецима, добијени контурни прикази указују на одличну конзистентност са физички очекиваним појавама у надзвучном режиму: присуство и положај ударних таласа, стагнационих зона, убрзања и успоравања флуида, као и структурисана вртложна поља у зони иза модела. Уочено је да CFD модел успешно репродукује све кључне феномене карактеристичне за овај режим – укључујући развој танког граничног слоја, правилну позицију одвајања струјања, као и вишеструке ударне структуре у околини репног дела модела.

Посебно је значајно да је уочена расподела брзине и притиска у зонама изван непосредне близине тела, у зони вртложног трага, показала добру симетрију, стабилну топологију струјања и праволинијске трајекторије путања струјања, што указује на нумеричку стабилност решења и адекватну примену граничних услова.

Расподела фреквенције турбулентних вртлога (енгл.-Turbulence Eddy Frequency) дала је додатну сигурност у идентификацију зона високе турбулентности иза модела, као и потврду да турбулентни модел, у овом случају $k-\omega$ SST модел даје реалистичну предикцију енергетских садржаја у високофреквентним структурама.

Све наведене карактеристике потврђују да је CFD модел способан да са високом поузданошћу репродукује физичке појаве у надзвучном режиму, а резултати визуелизације могу се сматрати квалитативним доказом његове валидности. Ово представља важан корак у процесу верификације и валидације, и допуњује метричке показатеље засноване на квантитативним поређењима.

7.2.6. Закључак о валидацији резултата CFD модела

Процес валидације CFD симулације облика AGARD-B модела реализован је двоструким приступом: кроз метричку анализу тачности и кроз квалитативну процену визуелизације поља физичких величина.

У оквиру метричке валидације, добијени су веома ниски износи апсолутне грешке и релативне грешке у односу на експерименталне резултате у аеротунелским условима. Максимална релативна грешка у подзвучном и трансоничном режиму износила је мање од 3% за AoA до 8° , док је у вишим нападним угловима и надзвучном режиму остала испод 5%, чиме је испуњен услов за научну и инжењерску примену. За добијене аеродинамичке коефицијенте (C_l , C_d , C_m) коефицијент несигурности валидације се кретао у границама прихватљивости. Високе вредности коефицијента детерминације ($R^2 \approx 0,998$) и коефицијента корелације потврђују снажну линеарну повезаност између нумеричких и експерименталних резултата.

Са друге стране, валидација на основу визуелизације расподеле физичких величина дала је конзистентне и физички очекиване обрасце. Расподела притисака, брзина и турбулентних параметара у зонама око тела, као и у вртложном трагу, јасно је илустровала аеродинамичке феномене као што су: појаве одвајања струје, ударних таласа, и формирање симетричних излазних вртлога. Дистрибуција фреквенције турбулентне вртложне структуре указује на коректно моделовање турбулентних процеса у близини репног дела и њихову дисипацију у даљем току. У режимима високог Маховог броја визуелизације су очувале карактеристике које одговарају експериментално утврђеним шаблонима понашања у компресибилним струјањима.

Комбиновањем квантитативне и квалитативне валидације закључује се да примењени CFD модел, заснован на RANS приступу са SST $k-\omega$ турбулентним моделом, представља високо поуздану нумеричку основу за предикцију аеродинамичких поља у задатом опсегу Махових бројева и AoA, чиме се испуњавају критеријуми индустријске и научно-истраживачке применљивости.

7.3. Илустративни пример примене унапређене методе на случај 2D нестационарног струјања

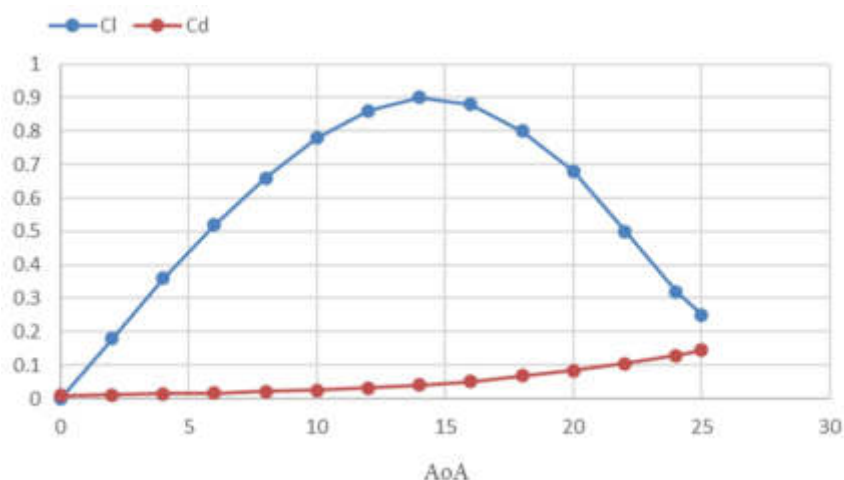
Презентована је унапређена нумеричка метода која је резултат овог истраживања. Дизајнирана је да подржи нумеричке симулације у свим режимима струјања за случајеве стационарних и нестационарних струјања без потребе за додатним редизајном.

Приказани су и анализирани резултати истраживања за 3D стационарна струјања. Током примене истог за случајеве нестационарних симулација установљено је да расположиви рачунарски ресурси нису у могућности да подрже тако сложене прорачуне. Како би се ипак заокружила слика и из овог домена рачунарске механике флуида, урађена је симулација нестационарног 2D опструјавања аеропрофила NACA0012 у подручју малих брзина.

По принципу сличности са изложеним тродимензионим CFD примером формиран је прорачунски домен са обликом и димензијама које одговарају односу главне тетиве аеропрофила и дужине AGARD-B модела. Такође, прорачунски просторни домен је подељен у две области. Око аеропрофила формирана је кружна прорачунска површина са адекватном прорачунском мрежом. Остатак NM до крајњих граничних линија је попуњен непомићном прорачунском мрежом. Том приликом је коришћена неструктурирана прорачунска мрежа са троугластим елементима. Ова два домена су повезана подударним кружницама на којима је дефинисан клизајући интерфејс, погледати пододељак 5.2.7.4.

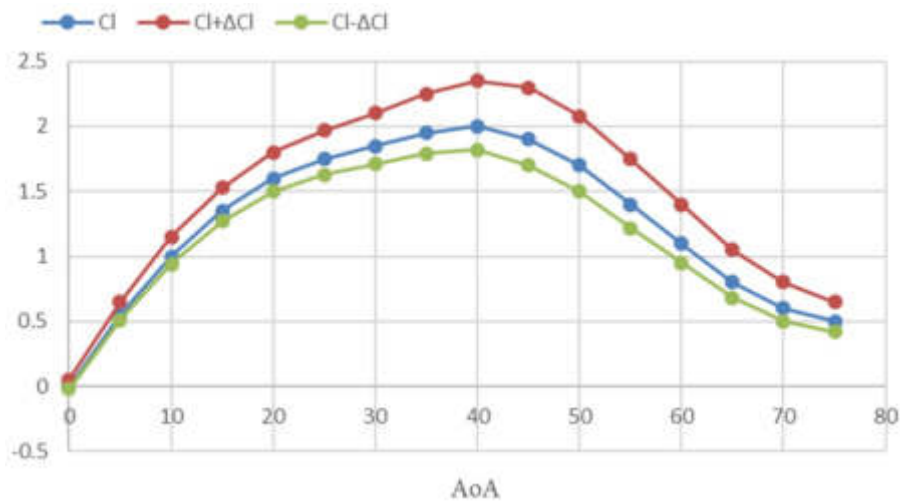
Доследност идентичности са 3D методом се огледа и у одабиру модела турбуленције. RANS прорачун је извршен на основу параметара ваздуха у стандардној атмосфери. Вектор слободне струје је управљен на главну аеродинамичку тетиву профила. Усвојена је брзина опструјавања од $v=100$ m/s, што одговара вредностима параметара сличности од $M\approx 0,3$ и $Re\approx 6,7\cdot 10^4$.

Прво је извршен прорачун за стационарне услове струјања. На Сл.7-49 су приказани дијаграми промене коефицијената аеродинамичких сила узгона и отпора за вредности AoA од 0° до 25° .

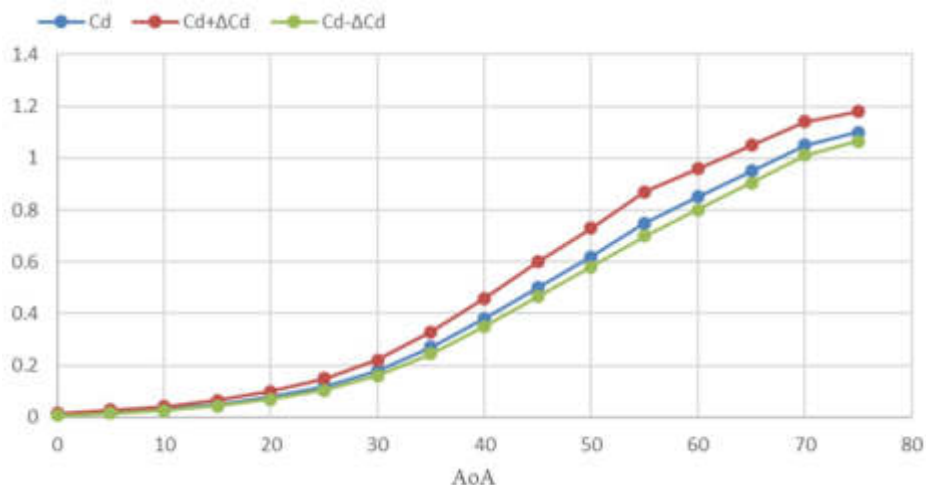


Слика 7-49: Дијаграм промене C_l и C_d са прирастом AoA за аеропрофил NACA0012.

Затим је извршена симулација пропињања аеропрофила од 0° до 75° константном угаоном брзином од $\omega=0,1 \text{ rad/s}$ око осе ротације смештене на половини главне тетиве аеропрофила. Сlike Сл.7-50 и Сл.7-51 приказују израчунате вредности динамичких коефицијената аеродинамичких сила.



Слика 7-50: Дијаграм промене динамичког Cl прирастом AoA за аеропрофил NACA0012.



Слика 7-51: Дијаграм промене динамичког Cd прирастом AoA за аеропрофил NACA0012.

Графички приказ динамичког коефицијента узгона у функцији прираста нападног угла показује пораст са јасно дефинисаним динамичким појачањем, при чему вредности Cl премашују оне које се очекују у стационарним условима. Ово понашање је најизраженије у опсегу AoA ($20^\circ, 40^\circ$) где је примећена значајна разлика између тренутне (средње) вредности и максималне амплитуде ($Cl+\Delta Cl$).

Ово повећање узгона је последица заостајања у развоју и одвајању граничног слоја услед убрзаног повећања AoA, при чему проток нема довољно времена да се прилагоди новој геометрији струјних линија. Као резултат тога, долази до формирања и привременог задржавања вртложне структуре на нападној ивици профила (енгл.- Leading-Edge Vortex, у даљем тексту LEV), који индукује додатни депресиони притисак на горњој површини профила и тиме доводи до пораста узгона изнад стационарне вредности. С друге стране, у току опадања нападног угла, али и у каснијој фази ротације, ове структуре се одвајају са закашњењем, што

доводи до постепеног смањења C_l , али са мањим негативним осцилацијама ($C_l - \Delta C_l$). Асиметрија између позитивних и негативних амплитуда резултат је аеродинамичке хистерезе и инерцијалног одговора флуида.

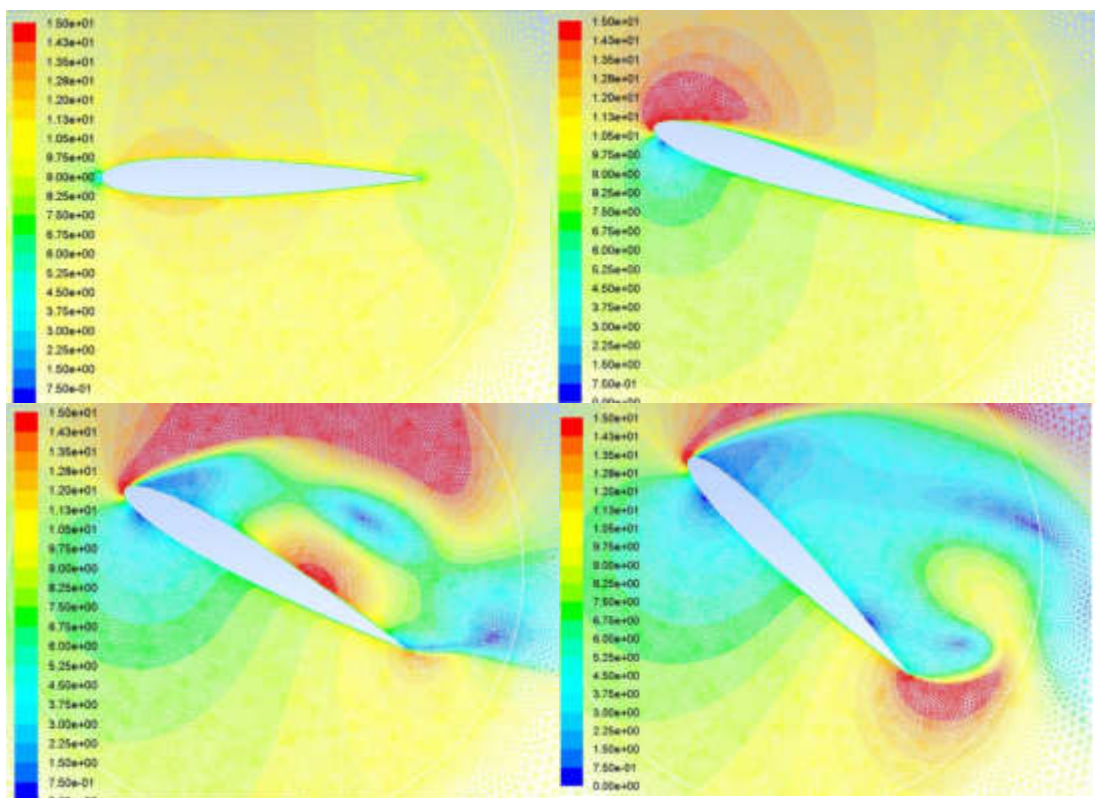
Осцилација коефицијента отпора током ротације приказана је крајњим вредностима амплитудна за задати AoA . Ове осцилације представљају директан резултат променљивих струјних услова у граничном слоју и нестабилности одвајања струјања. У односу на узгон, осцилације отпора су мање изражене, што је очекивано јер је сила отпора генерално мање осетљива на LEV ефекте и више зависи од турбулентног развоја и степена одвајања протока.

Асиметрија амплитуда је приметна и овде, тако да позитивна одступања ($+\Delta C_d$) су израженија од негативних ($-\Delta C_d$), што указује на инерцијално кашњење у смиривању турбулентног режима током повећања нападног угла. Пошто је отпор делимично последица вискозних и дифузионих ефеката, проток у фази убрзаног повећања AoA има тенденцију да генерише више вртложних структура и већи интегрални отпор у поређењу са фазом стабилизације или смањења угла. Ово се посебно уочава у за $AoA \in (20^\circ, 40^\circ)$, где се осцилације стабилизују, али остају значајне.

При већим нападним угловима све криве достижу засићење и нагиб се смањује, што је знак да је отпор доминантно одређен пројекцијом фронталне површине и даље ротација нема значајан утицај на њене вредности. Приметно је, такође, да коефицијент отпора остаје висок и стабилан, што је типично за профиле који се налазе у овом режиму струјања.

Укупно посматрано, дијаграми потврђују да динамичко понашање аеропрофила у условима променљивог нападног угла доводи до значајно модификованих аеродинамичких сила у односу на стационарни случај, при чему се најизраженији ефекти манифестују у зони слома узгона и непосредно након њега.

На Сл.7-52 је приказана расподела укупне брзине за типичне нападне углове.



Слика 7-52: Расподела укупне брзине око аеропрофила за различите вредности AoA .

На приказу се виде четири фазе ротације аеропрофила, са прогресивним повећањем AoA .

Горња лева слика ($AoA=0^\circ$) приказује ламинарно струјање са граничним слојем прилепљеним уз површине аеропрофила. Расподела укупне брзине са појачаним убрзањем дуж горње површине и смањењем иза доње ивице је очекивана.

На горњој десној слици ($AoA=20^\circ$) видљиво је интензивно убрзање у близини нападне ивице аеропрофила и почетак формирања вртлога на нападној ивици (LEV). Брзине почињу да опадају одмах иза средине горње површине што најављује почетак одвајања струјања.

Доња лева слика ($AoA=35^\circ$) приказује јасно формиране велике вртложне регионе ниских брзина изнад аеропрофила. Струјање је одвојено већ у предњем делу профила, док LEV показује снажан интензитет. Ово је типичан знак динамичког слома узгона који још није стабилизovan.

На доњој десној слици ($AoA=50^\circ$) видљиво је да су се вртлози развили у доминантан, комплексно структуриран ток, са великом зоном одвојеног струјања и интензивним падом укупне брзине иза профила. CFD модел приказује типично стање опструјавања након губитка узгона.

У све четири приказане слике уочљива је кружна линија која раздваја унутрашњу ротирајућу зону (која садржи аеропрофил) од спољашње стационарне зоне. Ова граница је у оквиру динамичке мреже у програму FLUENT дефинисана као интерфејс типа Sliding Mesh. Не примећују се дисторзије у расподели брзинског поља, нити несиметрични скокови, што указује на коректно дефинисану граничну површину. Уочљив је континуиран и правилан прелаз између прорачунских регија, што је резултат пажљиве конфигурације нумеричких ћелија — њихове димензије и облици су усклађени на линији интерфејса.

Поред просторне, обезбеђена је и временска усклађеност: временски корак прорачуна је прилагођен угаоној брзини ротације тако да се унутрашња ротирајућа мрежа (rotating mesh) за корак $\Delta t = 0,01$ s помери управо за ширину једне ћелије дуж кружне интерфејсне линије. Слика Сл.7-52 приказује расподелу NM у зони интерфејса. Оваквим избором параметара постиже се нумерички глатка измена информација кроз интерфејс, што за последицу има физички доследан ток кроз ротациону границу.

Симулација визуелно указује на висок степен реализма у развоју динамичког слома узгона и формирању вртлога на нападној ивици (LEV). Интерфејс ротирајуће зоне је исправно постављен, а одабрана методологија, која подразумева поделу домена на стационарни и ротирајући део, омогућава верну репрезентацију ротационог кретања опструјаваног тела.

Овим је потврђена оправданост примене оваквог приступа моделовању кретања тела током опструјавања. Ротирајући вид кретања је чест у многим инжењерским применама, попут кретања делова механизације крила, турбина, елиса, компресора, али и током маневрисања ваздухоплова, где је свака промена правца заправо ротација око једне или више оса.

Употребом модела са ротирајућом мрежом избегава се примена динамичких мрежа са ремеширањем, што значајно смањује нумеричко оптерећење и побољшава стабилност прорачуна. Додатно, уз могућност задавања промене правца вектора слободне струје кроз синусну функцију правца (нпр. увођењем временски зависне оријентације улазне брзине), отвара се могућност за симулацију сложених аеродинамичких појава, уз услов примене адекватног рачунарског ресурса.

На основу изнетог може се поуздано констатовати да је унапређена нумеричка метода, развијена током овог истраживања апсолутно применљива и на подручје нестационарног струјања изазваног кретањем опструјаваног тела.

8. Закључак истраживања

Докторска дисертација представља свеобухватно истраживање у области нумеричке аеродинамике, са посебним освртом на примену CFD метода за одређивање аеродинамичких коефицијената и дериватива стабилности апсолутно круте летелице у различитим режимима струјања. Рад је структуриран тако, да кроз јасно дефинисане циљеве, хипотезе и методологију прати ток научног истраживања, почев од теоријских основа, преко нумеричког моделирања и симулација, па све до верификације и валидације добијених резултата.

У оквиру рада развијена је и примењена методологија која обухвата све кораке потребне за поуздано CFD моделовање од дефинисања прорачунског домена и мреже, преко избора физичких и граничних услова, до интерпретације добијених резултата. Посебна пажња посвећена је поређењу нумеричких резултата са расположивим експерименталним подацима, чиме је омогућена процена тачности и поузданости модела.

У наставку овог поглавља, даје се анализа у којој су систематизовани резултати истраживања у односу на постављене циљеве, хипотезе и очекиване научне доприносе, чиме се заокружује научна целина и указује на значај постигнутих резултата.

8.1. Анализа испуњености постављених циљева, хипотеза и научних доприноса рада

У одељку 1.2 дефинисани су циљеви научноистраживачког рада у овој докторској дисертацији. Анализа испуњености задатих циљева изнета је према следећем:

- Дефинисање математичког модела струјања флуида око летелице као крутог тела успешно је реализовано и детаљно обрађено у Поглављу 4. Полазећи од закона одржања масе, импулса и енергије, уз примену једначине стања идеалног гаса, Стоксове хипотезе о напонима у флуиду и Сатерлендовога модела вискозности, формулисан је систем основних једначина струјања у аналитичком облику и облику векторског флукса. У одељку 4.4 приказани су одговарајући почетни и гранични услови потребни за затварање математичког модела. У одељку 4.5 анализирани су ефекти усредњавања у RANS приступу, укључујући утицај Рејнолдсовог тензора напона и приступе његовог моделовања, са препорукама избора у зависности од природе струјања и расположивих рачунарских ресурса. Представљени су најчешће примењивани модели турбуленције са фокусом на RANS моделе и извршено је њихово поређење. На крају је приказан општи дијаграм тока решавања дефинисаног математичког модела.
- Дефинисање нумеричке методе прорачуна применом рачунара, у складу са расположивим хардверским и софтверским капацитетима током истраживања, у потпуности је реализовано и представљено у Поглављу 5. Извршена је анализа нумеричких метода просторне и временске дискретизације система парцијалних диференцијалних једначина које описују струјање флуида. Обрађене су технике засноване на контролном запреминском методу, уз примену експлицитних и имплицитних метода различитог реда тачности. Утврђена је повезаност између избора методе и режима струјања (стационарно, нестационарно, подзвучно, трансонично,

надзвучно), као и геометријских карактеристика прорачунског домена. На основу спроведене анализе, дате су препоруке за избор одговарајућих метода у зависности од конкретне инжењерске примене и доступних рачунарских ресурса.

- Дефинисање параметара прорачунске мреже око летелице у дводимензионалном и тродимензионалном струјном пољу, као и методологије њеног генерисања, у потпуности је реализовано и приказано у одељку 5.2. У овом делу рада изложена је детаљна методологија пројектовања прорачунских мрежа у аеродинамичким прорачунима, прилагођена геометрији летелице и карактеристикама струјања. Приказани су принципи и поступци генерисања структурисаних, неструктурисаних и хибридних мрежа, као и критеријуми за избор одговарајућег типа мреже у односу на CFD модел и захтеване физичке услове симулације. Посебна пажња посвећена је процени квалитета мреже, укључујући геометријску ортогоналност, аспект односа страница ћелија, континуитет прелаза величине ћелија, као и утврђивању утицаја квалитета мреже на стабилност и тачност нумеричког решења. Дате су и смернице за контролу и верификацију мрежне независности, што доприноси укупној поузданости симулације. Овим је у потпуности остварен задати циљ у вези са прорачунском мрежом у оквиру истраживања.
- Израда комплетног алгорита и примена одговарајућег софтвера за решавање математичког модела опструјавања модела аеродинамичких конфигурација у сва три режима струјања у потпуности је реализована и документована у поглављима 5, 6 и 7. У оквиру истраживања развијен је и имплементиран целовит алгоритам нумеричког решавања заснован на РАНС (Reynolds-Averaged Navier–Stokes) моделу, уз коришћење савременог CFD софтверског пакета ANSYS Fluent који подржава сложене физичке услове струјања и примену на различите геометрије летелица. Извршен је избор и прилагођавање софтверских параметара у складу са расположивим хардверским капацитетима описаним у одељку 3.2, при чему је обезбеђена стабилна и ефикасна симулација у све три области Маховог броја: подзвучној ($M=0,6$), трансоничној ($M=0,85$) и надзвучној ($M=1,6$). Употребљени алати су усклађени са развијеним нумеричким прорачуном тако да су омогућена контрола параметара конвергенције, стабилности и тачности решења. За сваки режим струјања извршене су посебне симулације на репрезентативном аеротунелском калибрационом моделу AGARD-B, при чему су добијени резултати детаљно анализирани и упоређени са расположивим експерименталним подацима. Приложен је илустративни пример примене развијене унапређене методе на случај 2D нестационарног струјања.
- Дефинисање параметара сличности између услова слободног струјања у нумеричком и експерименталном моделу у потпуности је реализовано и детаљно приказано у одељку 7.2.2. Процес успостављања физичке сличности заснован је на принципима геометријске сличности, динамичке подударности и доследности граничних услова. Обезбеђено је поклапање иницијалних услова струјања у зони улаза и излаза из прорачунског одмена, кроз контролу улазне брзине, зауставне температуре и притиска, турбулентног интензитета и релевантних параметара стања флуида. За подзвучне и трансоничне режиме примењени су стандардни услови улазног и излазног профила, док је за надзвучни режим дефинисан почетни услов кроз зауставни притисак и температуру, уз прилагођавање параметара компресибилности флуида. Гранични услови су пажљиво одабрани у складу са физичком природом проблема и могућностима симетрије у прорачунском домену. Примењен је услов симетрије у вертикалној равни ради смањења рачунског оптерећења. За површине летелице примењен је услов непомичног зида са адијабатском претпоставком, односно без преноса топлоте кроз површину (нулти флукс), што одговара фон Нојмановом

граничном услову са нултим градијентом температуре. Овим је изостављен утицај аеродинамичког загревања, с обзиром да је фокус истраживања био на аеродинамичким, а не термичким ефектима. Интерфејс услови омогућили су примену релативно покретних парцијалних мрежа (клизних зона), што је омогућило избегавање ремешинга при нестационарним симулацијама. Успостављена доследност у избору свих граничних и почетних услова била је у функцији обезбеђивања подударности Маховог и Рејнолдсовог броја између CFD симулација и референтних аеротунелских експеримената, што је предуслов за веродостојну валидацију.

- Унапређење нумеричких метода одређивања аеродинамичких коефицијената и дериватива стабилности, које се користе у пројектовању и развоју летелица, у потпуности је реализовано и обрађено у поглављима 6 и 7. Истраживање је обухватило примену напредних RANS CFD техника у симулацијама непокретних и нагнутих конфигурација, уз анализу аеродинамичких сила и момената у различитим режимима струјања. Изведене су методе екстракције аеродинамичких коефицијената (C_l , C_d , C_m) као функција нападног угла, Маховог и Рејнолдсовог броја. Поређењем добијених резултата са експерименталним подацима за AGARD-B модел показана је висока сагласност, што потврђује веродостојност предложене методологије и њену применљивост у инжењерској пракси. Употребом одабраних CFD техника постигнута је боља резолуција у области граничног слоја и струјних одвајања, што је довело до прецизније процене аеродинамичких коефицијената у критичним режимима лета. На тај начин, овај циљ истраживања је у потпуности испуњен, а развијена методологија представља значајан допринос унапређењу поузданости аеродинамичке анализе у фази пројектовања летелица.
- Прецизирање критеријума валидности нумерички добијених вредности аеродинамичких коефицијената и дериватива стабилности апсолутно круте летелице у односу на експериментално добијене резултате, као и дефинисање критеријума верификације нумеричких прорачуна, у потпуности је реализовано и представљено у поглављима 6 и 7. У оквиру овог истраживања, извршена је детаљна верификација CFD решења кроз анализу сагласности решења са мрежом (GCI), анализу стабилности решења у односу на избор просторне и временске дискретизације, као и процену грешке настале нумеричким апроксимацијама. Поред тога, спроведена је валидација резултата поређењем добијених вредности аеродинамичких коефицијената и дериватива стабилности са доступним експерименталним подацима за AGARD-B модел у подзвучном, трансоничном и надзвучном режиму струјања. Утврђени су квантитативни критеријуми валидности који укључују дозвољена одступања у процентима, као и статистичке показатеље као што су RMS (Root Mean Square) грешка и максимално апсолутно одступање. Наведени критеријуми обезбеђују систематичан, транспарентан и проверљив оквир за процену тачности и поузданости CFD симулација, чиме је остварен значајан допринос у методологији верификације и валидације у ваздухопловној аеродинамици.

На основу изнете анализе појединачних циљева научноистраживањког рада приказаног у овој докторској дисертацији се може закључити да су сви постављени циљеви у потпуности реализовани.

У оквиру спроведеног научног истраживања, све постављене хипотезе дефинисане у одељку 1.3 су у потпуности испоштоване, аргументовано потврђене и доследно реализоване кроз теоријски модел, нумеричке прорачуне и верификацију добијених резултата.

Полазећи од опште хипотезе, истраживање је показало да је математички модел аеродинамичке слике опструјаваног чврстог тела могуће нумерички апроксимирати у домену

јединственог и физички доследног решења. Ово је потврђено конструкцијом и стабилношћу решења RANS једначина на одабраном CFD моделу, уз прецизно дефинисане граничне услове који укључују унутрашњу (геометрију летелице) и синтетичку спољашњу границу домена.

Посебне хипотезе су такође доследно примењене: геометријски модел летелице је третиран као апсолутно крут у времену, а параметри попут облика и димензија директно су утицали на појаву и еволуцију струјног поља. Претпоставка о стишљивом и вискозном флуиду је уважена у свим режимима струјања, укључујући услов тангентности флуида на површини тела. За надзвучне услове, правилно су дефинисане спољашње граничне површине тако да рефлексија поремећаја остане унутар нумеричког домена, чиме се обезбедило очување физичке доследности решења.

Што се тиче појединачних хипотеза, анализом CFD резултата потврђено је да је могуће на основу струјног поља и његових параметара поуздано одредити аеродинамичке коефицијенте и деривативе стабилности. Ови резултати су додатно верификовани и валидовани кроз поређење са експерименталним подацима добијеним на калибрационом аеротунелском моделу AGARD-B, у оквиру трансоничних, подзвучних и надзвучних режима. Овим је потврђена и могућност експерименталне детерминације истих коефицијената, чиме је заокружена логичка и методолошка целина рада.

Уз свеобухватну примену постављених критеријума верификације и валидности потврђена је како унутрашња тачност нумеричких решења, тако и њихова спољна веродостојност у односу на реалне услове.

Научни допринос овог истраживања остварен је кроз више конкретних резултата, у складу са претходно дефинисаним очекивањима, и може се систематизовати у следећим тачкама:

- Развој унапређене методологије нумеричког прорачуна аеродинамичких коефицијената и дериватива стабилности апсолутно круте летелице са фиксним командама, која обухвата:
 - Побољшани концепт прорачунског домена који омогућава примену на различите положаје летелице и услове струјања без потребе за редефинисањем граничних услова и геометрије домена;
 - Разрађену методологију генерисања структурисаних, неструктурисаних и хибридних мрежа, уз примену критеријума који омогућавају поуздану и стабилну симулацију и у нестационарним условима, без потребе за поновним редицајнирањем;
 - Препоруке за примену RANS модела турбуленције на основу компаративне анализе више модела турбуленције, при чему је дефинисан скуп критеријума за њихову примену у различитим режимима струјања;
 - Развој стратегије иницијализације прорачуна, чиме је омогућено побољшање стабилности и убрзање конвергенције нумеричког решења, што представља значајан корак у правцу повећања ефикасности CFD симулација.
- Развој и унапређење методологије верификације нумеричких алата и валидације резултата, која укључује:
 - Примарну верификацију путем анализе сагласности решења при различитим просторним дискретизацијама и оцене конзистентности граничних услова;

- Примена методолошки доследне и поновљиве процедуре за проверу стабилности и тачности алгоритма у различитим режимима струјања (подзвучно, трансسونично и надзвучно);
- Прецизирање критеријума валидности нумеричких резултата у односу на експерименталне податке, при чему су дефинисане дозвољене границе одступања аеродинамичких коефицијената у складу са стандардима аеротунелских испитивања;
- Имплементација развијене методологије на калибрационом моделу AGARD-B, што омогућава поређење резултата са добро документованим експерименталним подацима и тиме потврђује применљивост предложеног приступа у пракси;
- Отварање могућности за унапређење унификације процедура верификације и валидације у CFD анализи у области аеродинамике класичних летелица.

Овим научним доприносима, истраживање доприноси даљем развоју поузданих, ефикасних и валидираних CFD метода које се могу применити у пројектовању и анализи летелица различитих геометријских и аеродинамичких карактеристика.

8.2. Правци будућих научних истраживања

Полазећи од резултата досадашњих истраживања сублимираних у овој докторској дисертацији, као и праваца развоја у широј научној заједници која се бави ваздухопловством као ужом научном облашћу и прорачунском динамиком флуида могу се дефинисати следећи правци будућих научних истраживања:

- Први правац представља проширење научно-истраживачког рада на случајеве нестационарног струјања и деформабилне летелице. Наиме, у оквиру ове дисертације истраживање се заснива на моделу апсолутно круте летелице са фиксним командама, па би даља истраживања требало да обухвате примену развијене методологије на:
 - нестационарне режиме лета (маневри, флатер, одзив на поремећаје);
 - летелице са деформабилним (флексибилним) структурама, уз интеракцију струјања и конструкције (енгл.-Fluid-Structure Interaction).
- Други правац будућих истраживања је интеграција са мултидисциплинарним оптимизационим процедурама. Наиме, развијена CFD методологија може се у наредним истраживањима интегрисати у оквир мултидисциплинарне оптимизације у којој се аеродинамика повезује са конструкцијом, контролом и погонским групама.
- По питању истраживања у домену прорачунских мрежа може се дефинисати трећи правац истраживања као развој адаптивних и динамичких мрежа за реално време, односно унапређење NM које се аутоматски прилагођавају током симулације са применом у симулаторима лета.
- Четврти правац истраживања је условљен стицањем адекватног рачунарског истраживачког ресурса чиме би се стекао основи предуслов да се даљи научноистраживачки рад усмери на примену модела високе резолуције (LES, DES, DNS) у критичним зонама за анализу сложених зона струјања (нпр. зоне одвајања, турбулентни токови око команди), чиме би се побољшала прецизност нумеричких предвиђања.

- Пети правац даљих истраживања односи се на испитивање и развој примене метода вештачке интелигенције ради убрзања и унапређења нумеричких симулација струјања у области аеродинамике летелица. Истраживање би било усмерено на примену техника аутоматског учења, са посебним освртом на примену неуронских мрежа и замењујућих (сурогат) модела, у циљу предвиђања аеродинамичких коефицијената и дериватива стабилности на основу ограниченог броја симулација или расположивих експерименталних података. Оваквим приступом могуће је знатно смањити укупне рачунске трошкове и време потребно за спровођење сложених нумеричких прорачуна, нарочито у трансоничном и надзвучном режиму струјања. Конкретне области развоја обухватиле би: примену замењујућих модела за апроксимацију аеродинамичких коефицијената у функцији геометријских параметара и граничних услова струјања; коришћење дубинских неуронских мрежа за предвиђање поља притиска, турбуленције и аеродинамичких сила без потребе за покретањем рачунарског метода за нумеричко решавање; примену метода самонаграђујућег учења за оптимизацију облика летелице на основу задатих аеродинамичких критеријума; као и интеграцију система заснованих на вештачкој интелигенцији за моделирање у реалном времену, у оквиру симулатора лета и система управљања. Увођењем ове савремене методологије, која комбинује традиционалне методе израчунавања струјања са моделима заснованим на вештачкој интелигенцији, омогућава се значајно повећање ефикасности и проширење применљивости нумеричких аеродинамичких анализа у ваздухопловној индустрији, као и подршка развоју система за брзу верификацију нових нумеричких метода и поузданију валидацију добијених резултата.

Литература

- [1] B. Rasuo, 'Scaling between Wind Tunnels—Results Accuracy in Two-Dimensional Testing', *Trans. Jpn. Soc. Aeronaut. SPACE Sci.*, vol. 55, no. 2, pp. 109–115, 2012, doi: 10.2322/tjsass.55.109.
- [2] Rašuo, Boško, *Mehanika leta, Predavanja, eBook*. Mašinski fakultet Univerziteta u Beogradu, 2014.
- [3] Č. Kostić, A. Bengin, B. Rašuo, and D. Damljanović, 'Calibration of the CFD code based on testing of a standard AGARD-B model for determination of aerodynamic characteristics', *Proc. Inst. Mech. Eng. Part G J. Aerosp. Eng.*, vol. 235, no. 10, pp. 1129–1145, Aug. 2021, doi: 10.1177/0954410020966859.
- [4] Č. Lj. Kostić, B. P. Rašuo, and A. M. Janković, 'Flying spin qualities testing of airplane', *Tehnika*, vol. 70, no. 5, pp. 789–803, 2015, doi: 10.5937/tehnika1505789K.
- [5] I. NEWTON, *Newton, I. Philosophiae Naturalis Principia Mathematica, Book II. (1726)*. PUBLISHED BY DANIEL ADEE, 45 LIBERTY STREET.NY,USA, 1846.
- [6] G. K. Mikhailov, 'Daniel Bernoulli, Hydrodynamica (1738)', in *Landmark Writings in Western Mathematics 1640-1940*, Elsevier, 2005, pp. 131–142. doi: 10.1016/B978-044450871-3/50090-5.
- [7] J. Ackroyd, 'Sir George Cayley, the father of aeronautics Part 2. Cayley's aeroplanes', *Notes Rec. R. Soc. - NOTES REC ROY SOC*, vol. 56, pp. 333–348, Sep. 2002, doi: 10.1098/rsnr.2002.0186.
- [8] Charles Renard, *Expériences qu'il vient d'entreprendre pour l'étude des lois de la résistance de l'air*. Séances Société Française de Physique, 1889.
- [9] Por Jean Le Rond d' Alembert, *Essai D'Une Nouvelle Théorie De La Résistance Des Fluides*. Paris, 1752. [Online]. Available: https://books.google.com.br/books?id=Goc_AAAAcAAJ&printsec=frontcover&hl=pt-BR&source=gbs_ge_summary_r#v=onepage&q&f=false
- [10] G. Kirchhoff, *Zur Theorie freier Flüssigkeitsstrahlen*, vol. 70. Journal für die reine und angewandte Mathematik, 1869.
- [11] Lord Rayleigh, 'LIII. On the resistance of fluids', *Lond. Edinb. Dublin Philos. Mag. J. Sci.*, vol. 2, no. 13, pp. 430–441, Dec. 1876, doi: 10.1080/14786447608639132.
- [12] N. Coates, *A Replica of George Cayley Glider at the Yorkshire Air Museum*, (2009). [Online Video]. Available: [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:George_Cayley_Glider_\(Nigel_Coates\).jpg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:George_Cayley_Glider_(Nigel_Coates).jpg)
- [13] C. L. M. H. Navier, 'Mémoire sur les lois du Mouvement des Fluides', *Mém. L'Académie R. Sci. L'Institut Fr.*, pp. 389–440, 1823.

- [14] G. G. Stokes, 'On the Theories of the Internal Friction of Fluids in Motion and of the Equilibrium and Motion of Elastic Solids', *Trans Camb. Philos Soc*, vol. 8, pp. 287–319, 1845.
- [15] Dijana Damljanović, 'Gustave Eiffel and the Wind: A Pioneer in Experimental Aerodynamics', *Sci. Tech. Rev.*, vol. 62, pp. 3–13, 2012.
- [16] Perm State University and V. Yakovlev, 'Nikolai Egorovich Zhukovsky (1847–1921) (on the 175th anniversary of his birth and the 100th anniversary of his death)', *Вестник Пермского Университета Математика Механика Информатика*, no. 1(56), pp. 29–37, 2022, doi: 10.17072/1993-0550-2022-1-29-37.
- [17] J. C. Butcher and G. Wanner, 'Runge-Kutta methods: some historical notes', *Appl. Numer. Math.*, vol. 22, no. 1–3, pp. 113–151, Nov. 1996, doi: 10.1016/S0168-9274(96)00048-7.
- [18] Craig S. Harwood and Gary B. Fogel, *Quest for Flight: John J. Montgomery and the Dawn of Aviation in the West*. University of Oklahoma Press, 2012.
- [19] F. W. Lanchester, *Aerodynamics- constituting the first volume of a complete work on aerial flight*. A. Constable & co., ltd., 1907.
- [20] B. Chanetz, E. R. Gowree, J. Déleroy, P. Gilliéron, P. Gnemmi, and P. Perrier, *Experimental aerodynamics: an introductory guide*. in Springer Tracts in Mechanical Engineering. Cham: Springer, 2020.
- [21] M. Albisser, 'Identification of aerodynamic coefficients from free flight data'. l'Université de Lorraine, 2015.
- [22] V. Milošević, *Ispitivanje aviona u letu*. Beograd: NIC Vojska, 2002.
- [23] L. Dieterle, R. Stuff, H. Vollmers, and P. Coton, 'Wake Vortex Studies in the ONERA Catapult Facility and in the DNW Wind Tunnels', Jan. 1999.
- [24] E. Jérôme, F. Hervy, and S. Maguis, 'Icing test capabilities at DGA Aero-engine Testing', *Int. J. Eng. Syst. Model. Simul.*, vol. 8, p. 77, Jan. 2016, doi: 10.1504/IJESMS.2016.075562.
- [25] B. VILLENEUVE, Andrew Martin, Nenad Glodic, and Emmanuel François, 'Aeroengine transients in altitude test facility'. KTH Royal Institute of Technology, Stockholm, 2022.
- [26] H. A. Butowsky, 'National Register of Historic Places Inventory-Nomination: 30- by 60-Foot Tunnel / Full Scale Tunnel'. National Park Service, 1984.
- [27] A. Dufrene, M. MacLean, R. Parker, T. Wadhams, and M. Holden, 'Characterization of the New LENS Expansion Tunnel Facility', in *48th AIAA Aerospace Sciences Meeting Including the New Horizons Forum and Aerospace Exposition*, Orlando, Florida: American Institute of Aeronautics and Astronautics, Jan. 2010. doi: 10.2514/6.2010-1564.
- [28] Ч. Јанић and О. Петровић, *Кратка историја ваздухоплова у Србији*. Војна књижара. Beograd, 2011.
- [29] P. Petrović, M. Januzović, N. Petrović, G. Vorotović, and A. Bengin, 'Measurement, Exploitation and Method Finalization of PIV Systems', in *Novel Techniques in Maintenance, Repair, and Overhaul*, T. H. Karakoc, I. A. Kostić, A. Grbović, J. Svorcan, A. Dalkiran, A. H. Ercan, and O. M. Peković, Eds., in Sustainable Aviation. , Cham: Springer Nature Switzerland, 2024, pp. 233–238. doi: 10.1007/978-3-031-42041-2_29.

-
- [30] D. McLean, *Understanding aerodynamics: arguing from the real physics*, Reprinted with corrections. in Aerospace series. Chichester: Wiley, 2014.
- [31] E.-H. Hirschel and E. Krause, *100 volumes of 'Notes on Numerical Fluid Mechanics': 40 years of numerical fluid mechanics and aerodynamics in retrospect*. in Notes on numerical fluid mechanics and multidisciplinary design, no. v. 100. Berlin: Springer, 2009.
- [32] Euler, Leonhard, 'Principes généraux du mouvement des fluides (1757)', *Mém. Académie Sci. Berlin Euler Arch. - Works* 226, vol. 11, pp. 274–315, Sep. 2018.
- [33] R. A. Gentry, R. E. Martin, and B. J. Daly, 'An Eulerian differencing method for unsteady compressible flow problems', *J. Comput. Phys.*, vol. 1, no. 1, pp. 87–118, Aug. 1966, doi: 10.1016/0021-9991(66)90014-3.
- [34] L. M. Milne-Thomson, *Theoretical aerodynamics*, 4th ed., rev. Enl. New York: Dover Publications, 1973.
- [35] P. A. McMurtry, T. C. Gansauge, A. R. Kerstein, and S. K. Krueger, 'Linear eddy simulations of mixing in a homogeneous turbulent flow', *Phys. Fluids Fluid Dyn.*, vol. 5, no. 4, pp. 1023–1034, Apr. 1993, doi: 10.1063/1.858667.
- [36] L. F. Richardson, *Weather prediction by numerical process*, 2nd ed. in Cambridge mathematical library. Cambridge university press, 2006.
- [37] J. C. R. Hunt, 'LEWIS FRY RICHARDSON AND HIS CONTRIBUTIONS TO MATHEMATICS, METEOROLOGY, AND MODELS OF CONFLICT', *Annu. Rev. Fluid Mech.*, vol. 30, no. 1, pp. xiii–xxxvi, Jan. 1998, doi: 10.1146/annurev.fluid.30.1.0.
- [38] F. H. Harlow, 'Fluid dynamics in Group T-3 Los Alamos National Laboratory', *J. Comput. Phys.*, vol. 195, no. 2, pp. 414–433, Apr. 2004, doi: 10.1016/j.jcp.2003.09.031.
- [39] F. H. Harlow, M. Evans, and R. D. Richtmyer, *A Machine Calculation Method for Hydrodynamic Problems*. in LAMS (Los Alamos Scientific Laboratory). Los Alamos Scientific Laboratory of the University of California, 1955. [Online]. Available: hdl:2027/mdp.39015095283399
- [40] J. E. Fromm and F. H. Harlow, 'Numerical Solution of the Problem of Vortex Street Development', *Phys. Fluids*, vol. 6, no. 7, pp. 975–982, Jul. 1963, doi: 10.1063/1.1706854.
- [41] F. H. Harlow and J. E. Welch, 'Numerical Calculation of Time-Dependent Viscous Incompressible Flow of Fluid with Free Surface', *Phys. Fluids*, vol. 8, no. 12, pp. 2182–2189, Dec. 1965, doi: 10.1063/1.1761178.
- [42] J. E. Fromm, 'The Time Dependent Flow of an Incompressible Viscous Fluid', *Meth Comput Phys*, vol. 3, pp. 345–382, 1964.
- [43] F. H. Harlow, 'Numerical calculations of Time-dependent Viscous Incompressible Flow of Fluid with Free Surface', *Phys. Fluids*, vol. 8, no. 12, pp. 2182–2189, 1965.
- [44] J. L. Hess and A. M. O. Smith, 'Calculation of potential flow about arbitrary bodies', *Prog. Aerosp. Sci.*, vol. 8, pp. 1–138, 1967, doi: 10.1016/0376-0421(67)90003-6.
- [45] P. Rubbert and G. Saaris, 'Review and evaluation of a three-dimensional lifting potential flow computational method for arbitrary configurations', in *10th Aerospace Sciences Meeting*, San Diego, CA, U.S.A.: American Institute of Aeronautics and Astronautics, Jan. 1972. doi: 10.2514/6.1972-188.

-
- [46] R. Carmichael and L. Erickson, 'PAN AIR - A higher order panel method for predicting subsonic or supersonic linear potential flows about arbitrary configurations', in *14th Fluid and Plasma Dynamics Conference*, Palo Alto, CA, U.S.A.: American Institute of Aeronautics and Astronautics, Jun. 1981. doi: 10.2514/6.1981-1255.
- [47] H. Youngren, E. Bouchard, R. Coopersmith, and L. Miranda, 'Comparison of panel method formulations and its influence on the development of QUADPAN, an advanced low-order method', in *Applied Aerodynamics Conference*, Danvers, MA, U.S.A.: American Institute of Aeronautics and Astronautics, Jul. 1983. doi: 10.2514/6.1983-1827.
- [48] J. Hess and D. Friedman, 'Analysis of complex inlet configurations using a higher-order panel method', in *Applied Aerodynamics Conference*, Danvers, MA, U.S.A.: American Institute of Aeronautics and Astronautics, Jul. 1983. doi: 10.2514/6.1983-1828.
- [49] D. R. Bristow, 'Development of panel methods for subsonic analysis and design', 1980. [Online]. Available: <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:118307987>
- [50] D. Ashby, 'Potential Flow Theory and Operation Guide for the Panel Code PMARC', Jan. 2000.
- [51] J. Katz and B. Maskew, 'Unsteady low-speed aerodynamic model for complete aircraft configurations', *J. Aircr.*, vol. 25, no. 4, pp. 302–310, Apr. 1988, doi: 10.2514/3.45564.
- [52] B. Maskew, 'Prediction of Subsonic Aerodynamic Characteristics: A Case for Low-Order Panel Methods', *J. Aircr.*, vol. 19, no. 2, pp. 157–163, Feb. 1982, doi: 10.2514/3.57369.
- [53] B. Maskew, 'Program VSAERO theory document: A computer program for calculating nonlinear aerodynamic characteristics of arbitrary configurations'. NASA CR-4023, 1987.
- [54] D. Pinella and P. Garrison, 'Digital Wind Tunnel CMARC; Three-Dimensional Low-Order Panel Codes', *Aerologic*, 2009.
- [55] Eppler, R. and Somers, D. M., 'A computer program for the design and analysis of low-speed airfoils'. NASA-TM-80210.
- [56] M. Drela, 'XFOIL: An Analysis and Design System for Low Reynolds Number Airfoils', *Springer-Verl. Lect. Notes Eng.*, vol. 54, 1989.
- [57] D. E. Blair, *Inversion theory and conformal mapping*. in Student mathematical library, no. v. 9. Providence, RI: American Mathematical Society, 2000.
- [58] C. Boppe, 'Calculation of transonic wing flows by grid embedding', in *15th Aerospace Sciences Meeting*, Los Angeles, CA, U.S.A.: American Institute of Aeronautics and Astronautics, Jan. 1977. doi: 10.2514/6.1977-207.
- [59] E. M. Murman and J. D. Cole, 'Calculation of plane steady transonic flows', *AIAA J.*, vol. 9, no. 1, pp. 114–121, Jan. 1971, doi: 10.2514/3.6131.
- [60] F. Bauer, *A Theory of Supercritical Wing Sections, with Computer Programs and Examples: With Computer Programs and Examples*. in Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems Ser, no. v. 66. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin / Heidelberg, 1972.
- [61] Melnik, R. E. and Mead, H. R., 'GRUMFOIL: A computer code for the viscous transonic flow over airfoils'. NASA-CR-3806, 1985.

-
- [62] A. Jameson and D. Caughey, 'A finite volume method for transonic potential flow calculations', in *3rd Computational Fluid Dynamics Conference*, Albuquerque, NM, U.S.A.: American Institute of Aeronautics and Astronautics, Jun. 1977. doi: 10.2514/6.1977-635.
- [63] S. Samant *et al.*, 'TRANAIR - A computer code for transonic analyses of arbitrary configurations', in *25th AIAA Aerospace Sciences Meeting*, Reno, NV, U.S.A.: American Institute of Aeronautics and Astronautics, Mar. 1987. doi: 10.2514/6.1987-34.
- [64] A. Jameson, W. Schmidt, and E. Turkel, 'Numerical solution of the Euler equations by finite volume methods using Runge Kutta time stepping schemes', in *14th Fluid and Plasma Dynamics Conference*, Palo Alto, CA, U.S.A.: American Institute of Aeronautics and Astronautics, Jun. 1981. doi: 10.2514/6.1981-1259.
- [65] A. Suresh and H. T. Huynh, 'Accurate Monotonicity-Preserving Schemes with Runge-Kutta Time Stepping', *J. Comput. Phys.*, vol. 136, no. 1, pp. 83–99, Sep. 1997, doi: 10.1006/jcph.1997.5745.
- [66] P. Raj and J. E. Brennan, 'Improvements to an Euler aerodynamic method for transonic flow analysis', *J. Aircr.*, vol. 26, no. 1, pp. 13–20, Jan. 1989, doi: 10.2514/3.45717.
- [67] D. Tidd, D. Strash, B. Epstein, A. Luntz, A. Nachshon, and T. Rubin, 'Application of an efficient 3-D multigrid Euler method (MGAERO) to complete aircraft configurations', in *9th Applied Aerodynamics Conference*, Baltimore, MD, U.S.A.: American Institute of Aeronautics and Astronautics, Sep. 1991. doi: 10.2514/6.1991-3236.
- [68] J. Melton, M. Berger, M. Aftosmis, and M. Wong, '3D applications of a Cartesian grid Euler method', in *33rd Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, Reno, NV, U.S.A.: American Institute of Aeronautics and Astronautics, Jan. 1995. doi: 10.2514/6.1995-853.
- [69] S. Karman, L. Jr, 'SPLITFLOW - A 3D unstructured Cartesian/prismatic grid CFD code for complex geometries', in *33rd Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, Reno, NV, U.S.A.: American Institute of Aeronautics and Astronautics, Jan. 1995. doi: 10.2514/6.1995-343.
- [70] *42nd AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*. Reston, Virginia: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2004.
- [71] A. Jameson, T. Baker, and N. Weatherill, 'Calculation of Inviscid Transonic Flow over a Complete Aircraft', in *24th Aerospace Sciences Meeting*, Reno, NV, U.S.A.: American Institute of Aeronautics and Astronautics, Jan. 1986. doi: 10.2514/6.1986-103.
- [72] M. Giles, M. Drela, and W. Thompkins, Jr., 'Newton solution of direct and inverse transonic Euler equations', in *7th Computational Physics Conference*, Cincinnati, OH, U.S.A.: American Institute of Aeronautics and Astronautics, Jul. 1985. doi: 10.2514/6.1985-1530.
- [73] M. Drela, 'Newton solution of coupled viscous/inviscid multielement airfoil flows', in *21st Fluid Dynamics, Plasma Dynamics and Lasers Conference*, Seattle, WA, U.S.A.: American Institute of Aeronautics and Astronautics, Jun. 1990. doi: 10.2514/6.1990-1470.
- [74] T. Pulliam, 'ARC2D - EFFICIENT SOLUTION METHODS FOR THE NAVIER-STOKES EQUATIONS (CRAY VERSION)', Feb. 1994.
- [75] M. Frumkin and J. Yan, 'HPF implementation of ARC3D', in *Proceedings. Frontiers '99. Seventh Symposium on the Frontiers of Massively Parallel Computation*, Annapolis, MD, USA: IEEE, 1999, pp. 81–88. doi: 10.1109/FMPC.1999.750587.

- [76] Sherrie L. Krist, Robert T. Biedron, and Christopher L. Rumsey, *CFL3D User's Manual (Version 5.0)*. NASA / TM- 1998 -208444, 1998. [Online]. Available: <https://ntrs.nasa.gov/api/citations/19980218172/downloads/19980218172.pdf>
- [77] Thomas H. Pulliam, 'High Order Accurate Finite-Difference Methods: as seen in OVERFLOW', presented at the 20th AIAA Computational Fluid Dynamics Conference, Honolulu, Hawaii, USA: AIAA 2011-385, Jun. 2011.
- [78] R. H. Nichols, R. W. Tramel, and P. G. Buning, 'Solver and Turbulence Model Upgrades to OVERFLOW 2 for Unsteady and High-Speed Applications', presented at the 5th Applied Aerodynamics Conference, San Francisco, California, Jun. 2006.
- [79] Z. Petrović and S. Stupar, *Projektovanje računarom-metoda konačnih razlika*. Beograd: Mašinski fakultet, 1992.
- [80] Z. Petrovic, *The Panel Method*, Mašinski fakultet-Predavanja. 1996.
- [81] T. Ahmed Abdullah, 'Two-dimensional wind tunnel measurement corrections by the singularity method', *Teh. Vjesn.-Tech. Gaz.*, vol. 22, no. 3, pp. 557–565, Jun. 2015, doi: 10.17559/TV-20140214114718.
- [82] Hamad Al KAABI, Z. Petrovic, and G. Djukanovic, 'Numerical and Experimental Determination of Canard Controlled Missile Aerodynamic Coefficients in Subsonic Regime', *Teh. Vjesn. - Tech. Gaz.*, vol. 26, no. 3, Jun. 2019, doi: 10.17559/TV-20180724143418.
- [83] I. Ivanović, Z. Petrović, S. Stupar, T. E. Simos, G. Psihoyios, and Ch. Tsitouras, 'Helicopter Rotor Blade Shape Optimization Using NURBS for Airfoil Shape Parameterization', in *AIP Conference Proceedings*, Rethymno, Crete (Greece): AIP, 2009, pp. 131–134. doi: 10.1063/1.3241324.
- [84] Z. Petrovic, S. Stupar, I. Kostić, and A. Simonovic, 'Determination of a Light Helicopter Flight Performance at the Preliminary Design Stage', *Strojniski Vestn.*, vol. 56, Sep. 2010.
- [85] I. Kostic, Z. Stefanovic, and O. Kostic, 'Aerodynamic analysis of a light aircraft at different design stages', *FME Trans.*, vol. 42, no. 2, pp. 94–105, 2014, doi: 10.5937/fmet1402094K.
- [86] G. Ocokoljic, B. Rasuo, and A. Bengin, 'Aerodynamic shape optimization of guided missile based on wind tunnel testing and computational fluid dynamics simulation', *Therm. Sci.*, vol. 21, no. 3, pp. 1543–1554, 2017, doi: 10.2298/TSCI150515184O.
- [87] Yan Xiaohui, A. Mohammadian, and C. Rennie, 'Numerical modeling of flow and local scour around pipeline in steady currents using moving mesh with masked elements', *J Hydraul Eng*, vol. 146: 06020005, 2020.
- [88] Y. Ma, W. Zhou, Q. Han, and X. Wang, 'Aerodynamic Configuration of the HCW Based on the Lifting Body', *J. Aerosp. Eng.*, vol. 32, no. 2, p. 04019004, Mar. 2019, doi: 10.1061/(ASCE)AS.1943-5525.0000950.
- [89] A. Paziresh, A. H. Nikseresht, and H. Moradi, 'Wing-Body and Vertical Tail Interference Effects on Downwash Rate of the Horizontal Tail in Subsonic Flow', *J. Aerosp. Eng.*, vol. 30, no. 4, p. 04017001, Jul. 2017, doi: 10.1061/(ASCE)AS.1943-5525.0000704.
- [90] X. Qu, Y. Zhang, X. Lu, and J. Zhu, 'Unsteady experimental and numerical investigation of aerodynamic performance in ultra-high-lift LPT', *Chin. J. Aeronaut.*, vol. 33, no. 5, pp. 1421–1432, May 2020, doi: 10.1016/j.cja.2019.12.013.

-
- [91] N. Vidanovic, B. Rasuo, D. Damljanovic, D. Vukovic, and D. Curcic, 'Validation of the CFD code used for determination of aerodynamic characteristics of nonstandard AGARD-B calibration model', *Therm. Sci.*, vol. 18, no. 4, pp. 1223–1233, 2014, doi: 10.2298/TSCI130409104V.
 - [92] F. Menter, 'Zonal Two Equation k- ω Turbulence Models For Aerodynamic Flows', in *23rd Fluid Dynamics, Plasmadynamics, and Lasers Conference*, Orlando, FL, U.S.A.: American Institute of Aeronautics and Astronautics, Jul. 1993. doi: 10.2514/6.1993-2906.
 - [93] F. R. Menter, 'Performance of popular turbulence model for attached and separated adverse pressure gradient flows', *AIAA J.*, vol. 30, no. 8, pp. 2066–2072, Aug. 1992, doi: 10.2514/3.11180.
 - [94] F. R. Menter, 'Eddy Viscosity Transport Equations and Their Relation to the k- ϵ Model', *J. Fluids Eng.*, vol. 119, no. 4, pp. 876–884, Dec. 1997, doi: 10.1115/1.2819511.
 - [95] F. R. Menter, 'Two-equation eddy-viscosity turbulence models for engineering applications', *AIAA J.*, vol. 32, pp. 1598–1605, 1994.
 - [96] F. R. Menter, 'Improved two-equation k- ω turbulence models for aerodynamic flows'. NASA-TM-103975, 1992.
 - [97] C. Kostic, 'Nadzvučno strujanje oko osnosimetričnog tela-diplomski rad'. Mašinski fakultet, 2001.
 - [98] E. Loh, 'The Ideal HPC Programming Language: Maybe it's Fortran. Or maybe it just doesn't matter.', *Queue*, vol. 8, no. 6, pp. 30–38, Jun. 2010, doi: 10.1145/1810226.1820518.
 - [99] C. Kostic and B. Rasuo, 'Aerodynamic airfoil at critical angles of attack', *Vojnoteh. Glas.*, vol. 64, no. 3, pp. 784–811, 2016, doi: 10.5937/vojtehg64-8048.
 - [100] Č. Kostić, 'Review of the Spalart-Allmaras turbulence model and its modifications to three-dimensional supersonic configurations', *Sci. Tech. Rev.*, vol. 65, no. 1, pp. 43–49, 2015, doi: 10.5937/STR1501043K.
 - [101] A. M. Janković, B. P. Rašuo, and Č. Lj. Kostić, 'Aerodynamic characteristics and load of aerostats during flight', *Tehnika*, vol. 70, no. 6, pp. 967–974, 2015, doi: 10.5937/tehnika1506967J.
 - [102] 'Physics of Gas Flow at Very High Speeds', *Nature*, vol. 178, no. 4529, pp. 343–345, Aug. 1956, doi: 10.1038/178343a0.
 - [103] A. E. P. Veldman, 'Matched asymptotic expansions and the numerical treatment of viscous-inviscid interaction', *J. Eng. Math.*, vol. 39, no. 1/4, pp. 189–206, 2001, doi: 10.1023/A:1004846400131.
 - [104] 'Званична веб страница Министарства одбране'. 2024. [Online]. Available: <http://www.vti.mod.gov.rs/index.php?view=labs&id=4>
 - [105] Sava, 'Aerotunel', <http://vazduhoplovnetradicijesrbije.rs>, 2014, [Online]. Available: <http://vazduhoplovnetradicijesrbije.rs/index.php/clanak/r-un-l>
 - [106] G. Ocokoljić, D. Damljanović, B. Rašuo, and J. Isaković, 'Testing of a standard model in the VTI's large-subsonic wind-tunnel facility to establish users' confidence', *FME Trans.*, vol. 42, no. 3, pp. 212–218, 2014, doi: 10.5937/fmet1403212o.

- [107] Slavica Ristić, 'Flow Visualisation Techniques in Wind Tunnels Part I – Non optical Methods', *Sci. Tech. Rev.*, vol. LVII, no. 1, pp. 39–50, 2007.
- [108] Slavica Ristić, 'Flow visualization techniques in wind tunnels –optical methods (Part II)', *Sci. Tech. Rev.*, 2008, [Online]. Available: <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:9111070>
- [109] 'www.druck-temperatur.de'
- [110] H. Iizumi, H. Kajikawa, and T. Kobata, 'Effects on calibration values of quarts Bourdon-type pressure transducers caused by density of pressure medium', *J. Phys. Conf. Ser.*, vol. 1065, p. 162008, Aug. 2018, doi: 10.1088/1742-6596/1065/16/162008.
- [111] D. Węcel, T. Chmielniak, and J. Kotowicz, 'Experimental and numerical investigations of the averaging Pitot tube and analysis of installation effects on the flow coefficient', *Flow Meas. Instrum.*, vol. 19, no. 5, pp. 301–306, Oct. 2008, doi: 10.1016/j.flowmeasinst.2008.03.002.
- [112] D. P. Jones, Ed., *Biomedical sensors*, 1st ed. in Sensors technology series. New York: Momentum Press, 2010.
- [113] 'http://www.vti.mod.gov.rs/index.php?view=labs&id=4'.
- [114] 'http://www.neff.com/system620_600.html'.
- [115] 'https://bitsavers.trailing-edge.com/www.computer.museum.uq.edu.au/pdf/EK-KA820-TM-003%20KA820-KA825%20Processor%20Technical%20Manual.pdf'.
- [116] B. Ilić, M. Miloš, M. Milosavljević, and J. Isaković, 'Model-based stagnation pressure control in a supersonic wind tunnel', *FME Trans.*, vol. 44, no. 1, pp. 1–9, 2016, doi: 10.5937/fmet1601001I.
- [117] D. Damljanović, Đ. Vuković, G. Ocokoljić, B. Ilić, and B. Rašuo, 'Wind Tunnel Testing of ONERA-M, AGARD-B and HB-2 Standard Models at Off-Design Conditions', *Aerospace*, vol. 8, no. 10, 2021, doi: 10.3390/aerospace8100275.
- [118] Damljanovic Dijana and B. Rasuo, 'Testing of calibration models in order to certify the overall reliability of the trisonic blowdown wind tunnel of VTI', *FME Trans.*, vol. 38, no. 4, pp. 167–172, 2010.
- [119] S. Butterworth, 'On the Theory of Filter Amplifiers', *Exp. Wirel. Wirel. Eng.*, vol. 7, pp. 536–541.
- [120] www.sensors.nl, 'trafag-druktransmitter'. [Online]. Available: www.sensors.nl/en/product/trafag-druktransmitter-0-05-fs-nauwkeurigheid-esh-8845/?srsltid=AfmBOoqAj53t1Lus7qEgsdcFdvDfiq4OI9L4ZlqQH9uKGd5uTMSffleB
- [121] D. Damljanović, J. Isaković, and B. Rašuo, 'T-38 Wind-Tunnel Data Quality Assurance Based on Testing of a Standard Model', *J. Aircr.*, vol. 50, no. 4, pp. 1141–1149, Jul. 2013, doi: 10.2514/1.C032081.
- [122] D. Damljanović, A. Vitić, and Đ. Vuković, 'Testing of AGARD-B calibration model in the T-38 trisonic wind tunnel', *Sci. Tech. Rev.*, vol. 56, no. 2, pp. 52–62, 2006.
- [123] Z. Anastasijević, M. Samardžić, Marinkovski, D. Vrtlar, and M. Rodić, 'Determination of the T-38 Wind Tunnel Oscillatory Data of the Dynamic Calibration Missile Model', *Sci.-Tech. Rev.*, vol. 59, no. 2, pp. 24–29, 2009.

- [124] J. Isaković, N. Zrnic, and G. Janjikopani, 'Testing of AGARD B/C, ONERA and SDM Calibration Models in the T-38 1.5m x 1.5 Trisonic Wind Tunnel', presented at the ICAS 94-6.8.4, 1994, pp. 2889–2897.
- [125] M. Samardžić, G. Ocokoljic, B. Rasuo, and J. Isaković, 'Subsonic dynamic stability experiment on the anti tank missile model', *FME Trans.*, vol. 41, pp. 114–119, Jan. 2013.
- [126] Marija Samardžić, 'A Forced Oscillation System for Damping Derivative Measurement in the T-38 Trisonic Wind Tunnel', *Sci. Tech. Rev.*, vol. 68, no. 3, pp. 31–36, 2018.
- [127] L. M. Weinstein, 'Review and update of lens and grid schlieren and motion camera schlieren', *Eur. Phys. J. Spec. Top.*, vol. 182, no. 1, pp. 65–95, Apr. 2010, doi: 10.1140/epjst/e2010-01226-y.
- [128] K. Stetson and R. Powell, 'Hologram Interferometry', *J. Opt. Soc. Am.*, vol. 56, pp. 1161–1163, Sep. 1966, doi: 10.1364/JOSA.56.001161.
- [129] C. Crnojević, *Mehanika fluida*. in 3. Beograd: Mašinski fakultet.
- [130] H. K. Versteeg and W. Malalasekera, *An Introduction to Computational Fluid Dynamics - The Finite Volume Method*. Pearson Education Limited.
- [131] D. J. Anderson, *Computational Fluid Dynamics*. New York: McGraw-Hill Inc., 1995. [Online]. Available: <https://www.airloads.net/Downloads/Textbooks/Computational-Fluid-Dynamics-the-Basics-With-Applications-Anderson-J-D.pdf>
- [132] Dalgarno A., W. D. B. Davison, and I. Estermann, Eds., *The Calculation of Van Der Waals Interactions*. in Advances in atomic and molecular physics. New York: Academic Press, 1966.
- [133] W. Sutherland, 'The viscosity of gases and molecular force', *Philos. Mag.*, vol. 5, no. 36, pp. 507–531, 1893.
- [134] C. Hirsch, *Numerical computation of internal and external flows: fundamentals of computational fluid dynamics*, 2nd ed. Oxford Burlington, MA: Elsevier/Butterworth-Heinemann, 2007.
- [135] S. Čantrak, *Hidrodinamika*, vol. 5. Beograd: Mašinski fakultet, 2012.
- [136] J. V. Boussinesq, *Théorie de l'écoulement tourbillonnant et tumultueux des liquides dans les lits rectilignes a grande section*, vol. 1. Gauthier-Villars, Retrieved 10 October 2015, 1897. [Online]. Available: <https://archive.org/details/thbeoriedelbeco01bousrich/page/6/mode/2up>
- [137] W. P. Graebel, *Advanced fluid mechanics*. 2007.
- [138] P. Spalart and S. Allmaras, 'A one-equation turbulence model for aerodynamic flows', in *30th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, Reno, NV, U.S.A.: American Institute of Aeronautics and Astronautics, Jan. 1992. doi: 10.2514/6.1992-439.
- [139] P. R. Spalart and S. Allmaras, 'A one-equation turbulence model for aerodynamic flows', *AIAA J.*, vol. 32, no. 1, pp. 111–121, 1994.
- [140] P. R. Spalart and M. Shur, 'On the sensitization of turbulence models to rotation and curvature', *Aerosp. Sci. Technol.*, vol. 1, no. 5, pp. 297–302, Jul. 1997, doi: 10.1016/S1270-9638(97)90051-1.
- [141] T. Wray, 'Development of a One-Equation Eddy Viscosity Turbulence Model for Application to Complex Turbulent Flows', 2016, doi: 10.7936/K7251GKC.

- [142] M. L. Shur, M. K. Strelets, A. K. Travin, and P. R. Spalart, 'Turbulence Modeling in Rotating and Curved Channels: Assessing the Spalart-Shur Correction', *AIAA J.*, vol. 38, no. 5, pp. 784–792, May 2000, doi: 10.2514/2.1058.
- [143] B. Launder, 'Application of the energy-dissipation model of turbulence to the calculation of flow near a spinning disc', *Int. Commun. Heat Mass Transf.*, vol. 1, no. 2, pp. 131–137, Dec. 1974, doi: 10.1016/0735-1933(74)90024-4.
- [144] D. C. Wilcox, *Turbulence modeling for CFD*, 3. ed., 2. print. La Cañada, Calif.: DCW Industries, 2010.
- [145] V. Yakhot, S. Orszag, and W. Dannevik, 'Application of renormalization group methods to turbulence', *Prog. Astronaut. Aeronaut. Curr. Trends Turbul. Res.*, pp. 224–251, 1986.
- [146] T.-H. Shih, W. W. Liou, A. Shabbir, Z. Yang, and J. Zhu, 'A new k - ϵ eddy viscosity model for high reynolds number turbulent flows', *Comput. Fluids*, vol. 24, no. 3, pp. 227–238, Mar. 1995, doi: 10.1016/0045-7930(94)00032-T.
- [147] A. N. Kolmogorov, 'Equations of Turbulent Motion of an Incompressible Fluid.', 1942.
- [148] A. N. Kolmogorov, 'Mathematical models of turbulent motion of an incompressible viscous fluid', *Russ. Math. Surv.*, vol. 59, no. 1, pp. 3–9, Feb. 2004, doi: 10.1070/RM2004v059n01ABEH000697.
- [149] D. C. Wilcox, 'Multiscale model for turbulent flows', *AIAA J.*, vol. 26, no. 11, pp. 1311–1320, Nov. 1988, doi: 10.2514/3.10042.
- [150] D. C. Wilcox, 'Reassessment of the Scale Determining Equation for Advanced Turbulence Models', *AIAA J.*, vol. 26, no. 11, pp. 1299–1310, 1988.
- [151] B. Baldwin and H. Lomax, 'Thin-Layer Approximation and Algebraic Model for Separated Turbulent Flows', *AIAA Pap.*, vol. 78, no. 205, 1978.
- [152] J. C. Butcher, *Numerical Methods for Ordinary Differential Equations*, 1st ed. Wiley, 2008. doi: 10.1002/9780470753767.
- [153] E. Hairer and G. Wanner, *Solving Ordinary Differential Equations II*, vol. 14. in Springer Series in Computational Mathematics, vol. 14. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1991. doi: 10.1007/978-3-662-09947-6.
- [154] W. Hundsdorfer and J. Verwer, *Numerical Solution of Time-Dependent Advection-Diffusion-Reaction Equations*, vol. 33. in Springer Series in Computational Mathematics, vol. 33. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2003. doi: 10.1007/978-3-662-09017-6.
- [155] G. Söderlind, 'Automatic Control and Adaptive Time-Stepping', *Numer. Algorithms*, vol. 31, no. 1/4, pp. 281–310, 2002, doi: 10.1023/A:1021160023092.
- [156] C.-W. Shu, 'Total-Variation-Diminishing Time Discretizations', *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, vol. 9, no. 6, pp. 1073–1084, Nov. 1988, doi: 10.1137/0909073.
- [157] S. Conde, S. Gottlieb, Z. J. Grant, and J. N. Shadid, 'Implicit and Implicit–Explicit Strong Stability Preserving Runge–Kutta Methods with High Linear Order', *J. Sci. Comput.*, vol. 73, no. 2–3, pp. 667–690, Dec. 2017, doi: 10.1007/s10915-017-0560-2.

- [158] A. Gelfgat, ‘Global Galerkin Method for Stability Studies in Incompressible CFD and Other Possible Applications’, in *Computational Modelling of Bifurcations and Instabilities in Fluid Dynamics*, vol. 50, A. Gelfgat, Ed., in Computational Methods in Applied Sciences, vol. 50. , Cham: Springer International Publishing, 2019, pp. 353–398. doi: 10.1007/978-3-319-91494-7_10.
- [159] E. M. Sefene, ‘State-of-the-art of selective laser melting process: A comprehensive review’, *J. Manuf. Syst.*, vol. 63, pp. 250–274, Apr. 2022, doi: 10.1016/j.jmsy.2022.04.002.
- [160] T. Zang and C. Streett, ‘SPECTRAL METHODS FOR CFD’, *Inst. Comput. Appl. Sci. Eng. NASA Langley Res. Cent.*, 1989.
- [161] M. Kozić, *Primena numeričke dinamike fluida u aeronautici*. Beograd: Vojnotehnički Institut, 2013.
- [162] P. Beaumard, P. Bragança, C. Cuvier, K. Steiros, and J. C. Vassilicos, ‘Scale-by-scale non-equilibrium with Kolmogorov-like scalings in non-homogeneous stationary turbulence’, *J. Fluid Mech.*, vol. 984, p. A35, Apr. 2024, doi: 10.1017/jfm.2024.220.
- [163] R. Courant, K. Friedrichs, and H. Lewy, ‘Über die partiellen Differenzengleichungen der mathematischen Physik’, *Math. Ann.*, vol. 100, no. 1, pp. 32–74, Dec. 1928, doi: 10.1007/BF01448839.
- [164] J. Li, T. Yan, Q. Wang, J. Xu, and F. Wang, ‘Isogeometric analysis based investigation on material filling of coin cavities’, *AIP Adv.*, vol. 13, no. 3, p. 035311, Mar. 2023, doi: 10.1063/5.0139826.
- [165] J. F. Thompson, Z. U. A. Warsi, and C. W. Mastin, ‘Numerical grid generation: Foundations and applications’, 1985. [Online]. Available: <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:61070280>
- [166] J. H. Ferziger and M. Perić, *Computational Methods for Fluid Dynamics*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2002. doi: 10.1007/978-3-642-56026-2.
- [167] S. H. Lo, ‘A new mesh generation scheme for arbitrary planar domains’, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 21, no. 8, pp. 1403–1426, Aug. 1985, doi: 10.1002/nme.1620210805.
- [168] M. Aftosmis, M. Berger, and G. Adomavicius, ‘A parallel multilevel method for adaptively refined Cartesian grids with embedded boundaries’, in *38th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, Reno,NV,U.S.A.: American Institute of Aeronautics and Astronautics, Jan. 2000. doi: 10.2514/6.2000-808.
- [169] D. Gou, X. An, B. Zhao, and R. Yang, ‘CFD-DEM simulations of densification of tetrahedron particles under air impact’, *Powder Technol.*, vol. 361, pp. 220–225, Feb. 2020, doi: 10.1016/j.powtec.2019.08.085.
- [170] B. Delaunay, ‘Sur la sphère vide’, *Bull. Académie Sci. URSS*, vol. 6, pp. 793–800, 1934.
- [171] T. Jurczyk and B. Głut, ‘Metric 3D Surface Mesh Generation Using Delaunay Criteria’, in *Computational Science – ICCS 2006*, vol. 3992, V. N. Alexandrov, G. D. Van Albada, P. M. A. Sloot, and J. Dongarra, Eds., in Lecture Notes in Computer Science, vol. 3992. , Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2006, pp. 302–309. doi: 10.1007/11758525_40.
- [172] M. Senechal, A. Okabe, B. Boots, and K. Sugihara, ‘Spatial Tessellations: Concepts and Applications of Voronoi Diagrams’, *Coll. Math. J.*, vol. 26, no. 1, p. 79, Jan. 1995, doi: 10.2307/2687299.

- [173] Q. Du, V. Faber, and M. Gunzburger, ‘Centroidal Voronoi Tessellations: Applications and Algorithms’, *SIAM Rev.*, vol. 41, no. 4, pp. 637–676, Jan. 1999, doi: 10.1137/S0036144599352836.
- [174] D. J. Mavriplis, ‘UNSTRUCTURED GRID TECHNIQUES’, *Annu. Rev. Fluid Mech.*, vol. 29, no. 1, pp. 473–514, Jan. 1997, doi: 10.1146/annurev.fluid.29.1.473.
- [175] D. Padua *et al.*, ‘METIS and ParMETIS’, in *Encyclopedia of Parallel Computing*, D. Padua, Ed., Boston, MA: Springer US, 2011, pp. 1117–1124. doi: 10.1007/978-0-387-09766-4_500.
- [176] C. Farhat, P. Geuzaine, and C. Grandmont, ‘The Discrete Geometric Conservation Law and the Nonlinear Stability of ALE Schemes for the Solution of Flow Problems on Moving Grids’, *J. Comput. Phys.*, vol. 174, no. 2, pp. 669–694, Dec. 2001, doi: 10.1006/jcph.2001.6932.
- [177] O. Hassan, E. J. Probert, K. Morgan, and N. P. Weatherill, ‘Unsteady flow simulation using unstructured meshes’, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 189, no. 4, pp. 1247–1275, Sep. 2000, doi: 10.1016/S0045-7825(99)00376-X.
- [178] M. Kozić, ‘Generation of a numerical deformable mesh and its application in the unsteady two-dimensional flow analysis’, *Sci. Tech. Rev.*, vol. 52, no. 3, pp. 47–52, 2002.
- [179] Laslo T. Diosady and Scott M. Murman, ‘A linear-elasticity solver for higher-order space-time mesh deformation’, *Am. Inst. Aeronaut. Astronaut. Pap.*.
- [180] G. Chesshire and W. D. Henshaw, ‘Composite overlapping meshes for the solution of partial differential equations’, *J. Comput. Phys.*, vol. 90, no. 1, pp. 1–64, Sep. 1990, doi: 10.1016/0021-9991(90)90196-8.
- [181] D. Kidner, M. Dorey, and D. Smith, ‘What’s the point? Interpolation and extrapolation with a regular grid DEM’, presented at the IV International Conference on GeoComputation, Fredericksburg, VA, USA., 1999.
- [182] W. Erb, ‘Bivariate Lagrange interpolation at the node points of Lissajous curves - the degenerate case’, 2015, *arXiv*. doi: 10.48550/ARXIV.1503.00895.
- [183] H. M. Yilmaz, ‘The effect of interpolation methods in surface definition: an experimental study’, *Earth Surf. Process. Landf.*, vol. 32, no. 9, pp. 1346–1361, Aug. 2007, doi: 10.1002/esp.1473.
- [184] ‘ANSYS Inc., ANSYS Fluent User’s Guide, Release 2024R2, Canonsburg, PA, USA, 2024.’ [Online]. Available: <https://ansyshelp.ansys.com>
- [185] N. Baker, G. Kelly, and P. D. O’Sullivan, ‘A grid convergence index study of mesh style effect on the accuracy of the numerical results for an indoor airflow profile’, *Int. J. Vent.*, vol. 19, no. 4, pp. 300–314, Oct. 2020, doi: 10.1080/14733315.2019.1667558.
- [186] P. J. Roache, ‘A method for Uniform Reporting of Grid Refinement Studies’, *J. Fluids Eng.*, vol. 116, pp. 405–413, 1994.
- [187] Y. Wang *et al.*, ‘Artificial intelligence for partial differential equations in computational mechanics: A review’, Nov. 23, 2024, *arXiv*: arXiv:2410.19843. doi: 10.48550/arXiv.2410.19843.
- [188] X. Zhao, T. Xu, Z. Ye, and W. Liu, ‘A TensorFlow-based new high-performance computational framework for CFD’, *J. Hydrodyn.*, vol. 32, no. 4, pp. 735–746, Aug. 2020, doi: 10.1007/s42241-020-0050-0.

- [189] U. Pelissier, A. Parret-Fréaud, F. Bordeu, and Y. Mesri, ‘Graph Neural Networks for Mesh Generation and Adaptation in Structural and Fluid Mechanics’, *Mathematics*, vol. 12, no. 18, p. 2933, Sep. 2024, doi: 10.3390/math12182933.
- [190] R. Perera and V. Agrawal, ‘Multiscale graph neural networks with adaptive mesh refinement for accelerating mesh-based simulations’, 2024, *arXiv*. doi: 10.48550/ARXIV.2402.08863.
- [191] D. Kochkov, J. A. Smith, A. Alieva, Q. Wang, M. P. Brenner, and S. Hoyer, ‘Machine learning–accelerated computational fluid dynamics’, *Proc. Natl. Acad. Sci.*, vol. 118, no. 21, p. e2101784118, May 2021, doi: 10.1073/pnas.2101784118.
- [192] M. Kurz, P. Offenhäuser, D. Viola, O. Shcherbakov, M. Resch, and A. Beck, ‘Deep reinforcement learning for computational fluid dynamics on HPC systems’, *J. Comput. Sci.*, vol. 65, p. 101884, Nov. 2022, doi: 10.1016/j.jocs.2022.101884.
- [193] American Institute of Aeronautics and Astronautics, Ed., *Guide for the verification and validation of computational fluid dynamics simulations*. Reston, VA: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1998.
- [194] American Society of Mechanical Engineers, Ed., *Standard for verification and validation in computational fluid dynamics and heat transfer: an American national standard*, Reaffirmed 2016. in ASME V&V, no. 20–2009. New York, NY: The American Society of Mechanical Engineers, 2009.
- [195] D. Yeo, ‘A summary of industrial verification, validation, and uncertainty quantification procedures in computational fluid dynamics.’, National Institute of Standards and Technology, Gaithersburg, MD, NIST IR 8298, Mar. 2020. doi: 10.6028/NIST.IR.8298.
- [196] K. Maki and at.all, ‘Uncertainty Analysis in CFD Verification and Validation, Methodology and Procedures’, presented at the Internacional Towing Tank Conference, Switzerland: Specialist Committee on Combined CFD/EFD Methods of 30th ITTC, Mar. 2024, pp. 1–15.
- [197] D. Bestion and At.all, ‘Requirements for CFD-Grade Experiments for Nuclear Reactor Thermal Hydraulics’. OECD, 2022. [Online]. Available: www.oecd.org/about/publishing/corrigenda.htm
- [198] W. L. Oberkampf and T. G. Trucano, ‘Verification and Validation in Computational Fluid Dynamics’. Sandia National Laboratories, Albuquerque, California, USA, 2002.
- [199] P. J. Roache, ‘Perspective: A Method for Uniform Reporting of Grid Refinement Studies’, *J. Fluids Eng.*, vol. 116, no. 3, pp. 405–413, Sep. 1994, doi: 10.1115/1.2910291.
- [200] ‘Procedure for Estimation and Reporting of Uncertainty Due to Discretization in CFD Applications’, *J. Fluids Eng.*, vol. 130, no. 7, p. 078001, 2008, doi: 10.1115/1.2960953.
- [201] William L. Oberkampf and Timothy G. Trucano, ‘Verification and validation in computational fluid dynamics’, *Prog. Aerosp. Sci.*, vol. 38, pp. 209–272, 2002.
- [202] H. W. Coleman and W. G. Steele, *Experimentation, Validation, and Uncertainty Analysis for Engineers*, 1st ed. Wiley, 2009. doi: 10.1002/9780470485682.
- [203] P. J. Roache, *Verification and Validation in Computational Science and Engineering*. Hermosa publishers, 1998. [Online]. Available: <http://www.gbv.de/dms/goettingen/250414368.pdf>

- [204] Q. Qin and X. Zhang, ‘Controllable initiation characteristics of the oblique detonation wave in a combustor with a confined cone of a novel structure’, *Aerosp. Sci. Technol.*, vol. 107, p. 106267, Dec. 2020, doi: 10.1016/j.ast.2020.106267.
- [205] AGARD, ‘Specifications for AGARD Wind Tunnel Calibration Models’. AGARD Memorandum AG-4/ M3, 1955.
- [206] N. A. T. O. A. G. for A. Research and Development, *AGARD Wind Tunnel Calibration Models: (Supersedes AG4/M3)*. in AGARD Specification. NATO, 1958. [Online]. Available: <https://books.google.rs/books?id=2vu0ngEACAAJ>
- [207] H. Jasak, ‘OpenFOAM : Open source CFD in research and industry’, *Int. J. Nav. Archit. Ocean Eng.*, vol. 1, no. 2, pp. 89–94, Dec. 2009, doi: 10.3744/JNAOE.2009.1.2.089.
- [208] Siemens Industries Digital Software, ‘Simcenter STAR-CCM+User Guide’. Siemens, 2020. [Online]. Available: <https://www.sw.siemens.com/en-US/>
- [209] COMSOL AB, ‘COMSOL Multiphysics® v. 6.3.’ Stockholm, Sweden. [Online]. Available: www.comsol.com
- [210] A. Khaware, V. Gupta, K. Srikanth, and P. Sharkey, ‘Sensitivity Analysis of Non-linear Steep Waves using VOF Method’, presented at the 10th International Conference on Computational Fluid Dynamics (ICCFD10), Barcelona, Spain, Jul. 2018.
- [211] J. Blazek, *Computational Fluid Dynamics: Principles and Applications: Third Edition*. 2001.
- [212] *ANSYS Fluent Theory Guide*. ANSYS, Inc. November 2018 Southpointe 275 Technology Drive Canonsburg, PA 15317.
- [213] M. Lanfrit, ‘Best practice guidelines for handling Automotive External Aerodynamics with FLUENT, Version 1.2’. Fluent Deutschland GmbH, 2005.
- [214] T. D. Economou, F. Palacios, and J. J. Alonso, ‘An Unsteady Continuous Adjoint Approach for Aerodynamic Design on Dynamic Meshes’, in *15th AIAA/ISSMO Multidisciplinary Analysis and Optimization Conference*, Atlanta, GA: American Institute of Aeronautics and Astronautics, Jun. 2014. doi: 10.2514/6.2014-2300.
- [215] P. P. Sullivan and E. G. Patton, ‘The Effect of Mesh Resolution on Convective Boundary Layer Statistics and Structures Generated by Large-Eddy Simulation’, *J. Atmospheric Sci.*, vol. 68, no. 10, pp. 2395–2415, Oct. 2011, doi: 10.1175/JAS-D-10-05010.1.
- [216] H. S. Udaykumar, R. Mittal, P. Rampunggoon, and A. Khanna, ‘A Sharp Interface Cartesian Grid Method for Simulating Flows with Complex Moving Boundaries’, *J. Comput. Phys.*, vol. 174, no. 1, pp. 345–380, Nov. 2001, doi: 10.1006/jcph.2001.6916.
- [217] M. Samardžić, Z. Anastasijević, and Marinkovski, D, ‘MEASUREMENT OF THE CROSS-COUPLING DERIVATIVES DUE TO PITCHING IN THE HIGH REYNOLDS NUMBER BLOWDOWN WIND TUNNEL’, presented at the ICAS 2014, 2014.
- [218] D. Damjanović, J. Isaković, and B. Rašuo, ‘T-38 Wind-Tunnel Data Quality Assurance Based on Testing of a Standard Model’, *J. Aircr.*, vol. 50, no. 4, pp. 1141–1149, Jul. 2013, doi: 10.2514/1.C032081.
- [219] R. L. Burden and J. D. Faires, *Numerical analysis*, 9th ed. Boston, MA: Brooks/Cole, Cengage Learning, 2011.

- [220] S. C. Chapra and R. P. Canale, *Numerical methods for engineers*, 7. ed. New York, NY: McGraw-Hill Education, 2015.
- [221] *Excel for Microsoft 365, Microsoft Docs, 2024*. Microsoft Corporation,.
- [222] F. Incropera, D. DeWitt, T. Bergman, and A. Lavine, *Fundamentals of Heat and Mass Transfer*. 2007.

Биографија

Кандидат мр Чедомир Костић, дипл. инж. маш, је рођен 28.05.1977. године у Новом Саду. Основну школу је завршио у Севојну 1992. године а Ужичку гимназију 1996.године. Универзитет у Београду - Машински факултет и Војно техничку академију ВС уписао је 1996.године. Студије Машинског факултета у Београду, смер Ваздухопловство завршио је 21.09.2001. године, са просечном оценом 8,51. Дипломски рад под називом „Надзвучно струјање око осносиметричног тела“ одбранио је оценом 10. Студије Војнотехничке академије Војске Србије завршио је 29.09.2001.године, када је унапређен у чин ваздухопловно-техничког потпоручника. Постдипломске - магистарске студије је уписао 2001.године на Универзитету у Београду - Машинском факултету, смер Ваздухопловство, група Аеродинамика. Одбранио је магистарску тезу под називом „Испитивање карактеристика ковитавиона у лету“ јула 2010. године, чиме је стекао звање магистра техничких наука.

Запослен је у Војсци Србије од 29.09.2001. године до данас. У току каријере је провео 19 година на позицијама руководиоца и главног технолога одржавања ваздухоплова типа МиГ-29, МиГ-21, Г-4 Супергалеб, Ан-26, Утва75, Ласта, Газела, Ми-8 и Ми-117, као и многобројних пратећих ваздухопловно-техничких средстава за опслуживање и испитивање ваздухоплова. Од 2020.године се налази на позицији техничког директора Ваздухопловног завода „Мома Станојловић“ који се налази у оквиру организације Министарства одбране Републике Србије.

Од почетка професионалне каријере укључен је у наставни процес у оквиру војних организација у којима је радио, тако да је био носилац курсева додатног обучавања ваздухопловно-техничког састава и пилотског састава кроз техничке учионице за надзвучне авионе типа МиГ-29.

Од оснивања, односно од 2016.године, Средње стручне војне школе „1300 каплара“ у оквиру Војне академије Војске Србије носилац је предмета: Аеродинамика и механика лета, Конструкције ваздухоплова, Ваздухопловни мотори, Ваздухопловно ракетно наоружање и Технологија производње и одржавања летелица.

Кандидат се дужи низ година бави научноистраживачким радом у области ваздухопловства. Аутор је и коаутор више научних радова, бројних Програма продужетка ресурса ваздухоплова и ваздухопловног наоружања, Техничких промена на ваздухопловима домаће производње, а такође и коаутор Програма модернизације авиона МиГ-29СД/СМ.

Области интересовања: аеродинамика, нумеричка анализа механике флуида, експериментална аеродинамика, испитивање карактеристика ваздухоплова у лету, перформансе лета авиона и хеликоптера, погонске групе ваздухоплова, аероеластичност, технологија производње, и технологија и организација одржавања ваздухоплова.

Прилог 1.

Изјава о ауторству

Потписани-а Чедомир Костић

број индекса Д01/2021

Изјављујем

да је докторска дисертација под насловом

**Унапређење нумеричке методе за одређивање аеродинамичких коефицијената
и дериватива стабилности летелица**

- резултат сопственог истраживачког рада,
- да предложена дисертација у целини ни у деловима није била предложена за добијање било које дипломе према студијским програмима других високошколских установа,
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио/ла ауторска права и користио интелектуалну својину других лица.

Потпис докторанта

У Београду, _____

Прилог 2.

**Изјава о истоветности штампане и електронске верзије
докторског рада**

Име и презиме аутора Чедомир Костић

Број индекса Д01/21

Студијски програм докторске академске студије

Наслов рада Унапређење нумеричке методе за одређивање аеродинамичких
коефицијената и дериватива стабилности летелица

Ментори др Александар Бенгин, редовни проф., др Мирко Динуловић, редовни проф.

Потписани/а Чедомир Костић

Изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предао/ла за објављивање на порталу **Дигиталног репозиторијума Универзитета у Београду**.

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Београду.

Потпис докторанта

У Београду, _____

Прилог 3.

Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом:

**Унапређење нумеричке методе за одређивање аеродинамичких коефицијената
и дериватива стабилности летелица**

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство
2. Ауторство - некомерцијално
3. Ауторство – некомерцијално – без прераде
4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима
5. Ауторство – без прераде
6. Ауторство – делити под истим условима

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци, кратак опис лиценци дат је на полеђини листа).

Потпис докторанда

У Београду, _____

1. Ауторство - Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце, чак и у комерцијалне сврхе. Ово је најслободнија од свих лиценци.
2. Ауторство – некомерцијално. Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела.
3. Ауторство - некомерцијално – без прераде. Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела. У односу на све остале лиценце, овом лиценцом се ограничава највећи обим права коришћења дела.
4. Ауторство - некомерцијално – делити под истим условима. Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада.
5. Ауторство – без прераде. Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела.
6. Ауторство - делити под истим условима. Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада. Слична је софтверским лиценцама, односно лиценцама отвореног кода.