ЕДИЦИЈА
МОНОГРАФИЈЕ

Милана Дабић Боричић

АЛГЕБАРСКИ ЗАКОНИ У ПОЧЕТНОЈ НАСТАВИ МАТЕМАТИКЕ

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
ФАКУЛТЕТ ЗА ОБРАЗОВАЊЕ УЧИТЕЉА И ВАСПИТАЧА
UNIVERSITY OF BELGRADE
FACULTY OF EDUCATION

АЛГЕБАРСКИ ЗАКОНИ У ПОЧЕТНОЈ НАСТАВИ МАТЕМАТИКЕ

ЕДИЦИЈА
МОНОГРАФИЈЕ

књига 36.

Едиција је основана 2007. године са циљем да објављује докторске и магистарске тезе наставника и сарадника Учитељског факултета из Београда.

Књига *Алгебарски закони у почетној настави математике* садржи део одабраних и прерађених резултата докторске дисертације одбрањене 5. јула 2019. године на Учитељском факултету Универзитета у Београду, под менторством проф. др Мирка Дејића и пред комисијом у саставу: проф. др Александар Липковски (председник), проф. др Вељко Банђур, проф. др Јасмина Милинковић, проф. др Маријана Зељић и доц. др Оливера Ђокић.

Милана Дабић Боричић

АЛГЕБАРСКИ ЗАКОНИ У ПОЧЕТНОЈ НАСТАВИ МАТЕМАТИКЕ

UNIVERSITY OF BELGRADE
FACULTY OF EDUCATION

Београд, 2025.

Уредник
проф. др Јелена Панић Мараш

Рецензенти
проф. др Мирко Дејић, редовни професор, Универзитет у Београду, Факултет за образовање учитеља и васпитача

проф. др Маријана Зељић, редовни професор, Универзитет у Београду, Факултет за образовање учитеља и васпитача

проф. др Александра Михајловић, редовни професор, Универзитет у Крагујевцу, Факултет педагошких наука у Јагодини

Садржај

1. Увод

У овој монографији истражени су начини на које можемо представити идеје о алгебарским законима, еквивалентности израза и алгебарској симболици у почетној настави математике. Иако наслов упућује да је тема „алгебарска“ и да се њоме треба бавити у оквиру формалне наставе алгебре, различита истраживања су показала да се чекањем на формалну наставу алгебре за увођење ових идеја ствара „когнитивни јаз“ при преласку са аритметике на алгебру. Општи закључак јесте да алгебарске идеје треба да буду присутне у математичком образовању још у току формирања скупа природних бројева. Анализа научних радова аутора из Србије показује да наша математичка заједница заступа идеју о раном увођењу алгебарских идеја кроз наставу аритметике, па су и наставни пограми конципирани тако да алгебарске идеје прожимају наставу аритметике. Идеја о аритметици као основи за наставу алгебре утемељена је не само у наставним програмима Републике Србије, већ и у уџбеницима методике наставе математике, уџбеницима математике за разредну наставу, и широко је распрострањена у наставном процесу.

Разумевање алгебарских закона структуре скупа природних бројева и разумевање својстава операција чине основу за касније разумевање структуре скупа целих, рационалних и реалних бројева. У монографији се указује на проблеме при коришћењу алгебарске симболике и алгебарских идеја, уколико се неадекватно формирају концепти у оквиру скупа природних бројева. Стога се у представљеном емпиријском истраживању приступа испитивању разумевања закона структуре скупа природних бројева код ученика четвртог разреда, пре него што су уведени рационални и цели бројеви и формална алгебра. Разумевање структуре скупа природних бројева од стране ученика пратили смо кроз постигнућа ученика која се односе на примену алгебарских закона и својстава у различитим контекстима.

За потребу истраживања креирана су и представљена два модела којима се могу истаћи „пре-алгебарске" идеје као што су еквиваленте форме израза, употреба варијабли и квазиваријабли у записима и примена алгебарских закона. Модели су осмишљени у складу са виђењем да текстуални задаци могу бити оквир за стицање и примену знања. Као подршка ученицима у изграђивању значења алгебарских закона користили смо реторичке генерализације и схеме. Креирани модели се могу даље развијати и адаптирати на друге садржаје, а такође се могу фрагментисати и користити у дужем временском периоду.

Истраживање припада мултидисциплинарној области математичких и педагошких наука. Монографија је намењена свима који желе да се баве истраживањем и унапређивањем наставе математике. У њој је представљен преглед релевантне литературе на тему почетне алгебре, дат преглед истраживања која су већ спроведена и може послужити као подстицај за нова истраживања.

Овим путем изражавам своју захвалност проф. др Мирку Дејићу, проф. др Александру Липковском и проф. др Маријани Зељић, чије су сугестије и критике значајно унапредиле квалитет истраживања и без чије подршке и стручног вођења ова монографија не би постојала. Такође захваљујем Факултету за образовање учитеља и васпитача у Београду на пруженим ресурсима и подршци током реализације истраживања. Захвалност дугујем и основним школама „Михаило Петровић Алас", „Краљ Петар Први" и „Старина Новак", учитељима који су омогућили реализацију истраживања и ученицима који су у њему учествовали.

2. *Математички појам и математичко знање*

Да би се пришло било којој теми у почетној настави математике, треба се осврнути на теоријску основу која нам пружа увид у начине на којима се у литератури приступа математичким садржајима и математичком знању. Та основа обухвата учење о појмовима, односно концептима, концепцијама, као и врстама разумевања и знања у математици. Иако је о овим темама писано небројено пута, оне ће наћи место и у овој монографији, будући да се у њој дотичемо зачетака у математичком знању.

О *појму*, односно *концепту*, први су писали Жан Пијаже [Jean Piaget] и Лав Виготски [Лев Семёнович Выготский]. Оба аутора су поделили појмове на две класе, Пијаже на спонтане и неспонтане, а Виготски на свакодневне и научне. Неспонтани појмови су појмови који су наметнути споља (за разлику од спонтаних) и који социјализацијом и школовањем замењују спонтане. Виготски пише о развоју научних и свакодневних појмова који је у суштини исти, али је за стварање научних појмова потребна зрелост свакодневних. Он поставља систем у центар и сматра да само у систему појам може бити схваћен. Узрок несхватања је по њему у несистематичности (Vigotski, 1983).

Појмовима и, још конкретније, математичким појмовима, бавио се Скемп [Richard Skemp], поделивши их на примарне – из свакодневног искуства, и секундарне, који су настали апстраховањем из примарних или већ формираних секундарних појмова (Skemp, 1987). Сâм појам Скемп је описао као менталну репрезентацију „заједничке особине ранијих искустава коју је могуће препознати у новим приликама“ (Skemp, 1989: 54), док је процес формирања појма назвао апстраховањем. Скемп је нагласио да „дефиницијом не можемо створити појам, али му можемо дати прецизност и разграничити га од других. Ако постоје појмови вишег реда, са неколико примера можемо створити појам“ (Skemp, 1987: 27).

Нови појмови не могу бити комуницирани директно, већ их ученик мора сам конструисати. Учитељ може олакшати тај процес на два начина. Први је да групише појмове који учествују у формирању новог појма, а други је да користи појмове које је ученик већ конструисао и да комбинацијом и повезивањем тих појмова помогне ученику у конструисању новог појма. На други начин могу се пренети само појмови истог или нижег реда које је ученик конструисао (Skemp, 1989).

Математички појам није спонтани односно свакодневни појам. Цитат који следи добро описује улогу школског система у формирању математичких појмова:

> „Напомињемо овде, да су математички појмови нешто што је далеко преко могућности спонтаног формирања било ког појединца, да су настали као резултат мисаоних активности најдаровитијих појединаца у прошлости и да је за њихово формирање сваком потребна дугогодишња помоћ у оквиру система који називамо школа“ (Марјановић, 1993: 28).

Осим о математичком појму (односно концепту), у последњих тридесет година пише се и о *концепцијама*. При дефинисању концепција, Сфард (Sfard, 1991) је разматрала два термина:

- *концепт (или појам)* – математичку идеју у „званичној“ форми, односно теоријски конструктор у оквиру „формалног универзума идеалног знања“ и

- *концепцију* – групу унутрашњих репрезентација и асоцијација евоцираних концептом, односно одраз концепта у унутрашњем, субјективном „универзуму људског знања“.

Код других аутора користе се Фројденталови [Hans Freudenthal] термини *концепт*, који постоји у математици, и *ментални објекат* (који одговара индивидуалној мисаоној употреби објеката), као и Фројденталов став да је школски циљ најпре конституисати менталне објекте, а тек онда концепте, који долазе након што су ментални објекти чврсто конституисани (Filloy, Puig & Rojano, 2008).

Осим *математичког појма,* потребно је да разумемо шта се подразумева под *математичким знањем* и какве врсте математичког знања постоје. У литератури се могу наћи поделе математичког знања на: фигуративно и оперативно (Пијаже); концептуално и процедурално (Хиберт); релационо и инструментално (Скемп) (цитирано према: Sfard, 1991: 8). Јасно је да сви аутори виде две врсте математичког знања, можда најбоље објашњене дефиницијама Хиберта [James Hiebert] и Лефевреа [Paul Lefevre] из 1986. године, који су концептуално знање описали као „знање богато везама“, а процедурално знање као знање које се састоји из формалног језика, алгоритама и правила. Они такође напомињу да постоје и процедуре које су повезане са концептуалним знањем, а то су процедуре учене са значењем (према Kieran, 2013: 217). Слично, Скемп (Skemp, 1989) је инструментално разумевање представио као познавање правила без схватања због чега се она користе, док је релационо разумевање објаснио као знање о томе шта треба да се уради и због чега.

Сфард (Sfard, 1991) дефинише два начина формирања концепција која су наизглед некомпатибилна, али суштински комплементарна: *структурално* – као објекат, и *операционо* – као процес (Sfard, 1991). У процесу учења и решавања проблема присутно је и структурално и операционо схватање концепата. Ауторка ових дефиниција прихвата становиште да је за већину људи први корак за стицање нових математичких концепата операционални и да је прелазак са рачунских операција на апстрактне објекте дуг и тежак процес који се постиже кроз три корака: интериоризацију, кондензацију и реификацију. У фази интериоризације учиници постају упознати са процесима који ће довести до новог концепта и постају вешти у извођењу ових процеса. У фази кондензације ученици могу размишљати о процесу као о целини, без потребе улажења у детаље. Тада је концепт „рођен“. Прогрес у кондензацији јесте у лакоћи преласка између различитих репрезентација концепта. Реификација је комплексни и на појединим нивоима изузетно тежак феномен који за неке ученике може остати ван сазнајних домашаја. Представља могућност да се познато „види“ у сасвим другачијем светлу, да се процес учврсти у објекат, тј. статичку структуру. Ова фаза се не може достићи уколико претходна није остварена. Проблем реификације ауторка види у узајамној неопходности нижег нивоа реификације и вишег нивоа интериоризације, стварајући тако зачарани круг. Наиме, не постоји разлог да се процес претвори у објекат уколико не постоји процес вишег нивоа који ће се применити на овај, нижи, процес, док је за постојање тих процеса вишег нивоа потребан објекат јер је без објекта процес безначајан.

Дакле, инструментално (односно процедурално) разумевање није неважно, будући да је процес основа за формирање математичког појма, односно, операционалне концепције често претходе структуралним. Структуралне концепције, са друге стране, јесу носиоци математичке креације, и са операционалним чине јединство математичког знања.

Становиште бихејвиориста је да је усавршавање процедуре (дрил) препоручљив само када особа већ разуме идеје и процесе и користи се да се повећа спретност у самом извођењу процедуре (према Sfard, 1991: 32). Са друге стране, ако процедуралне концепције претходе структуралним, тј. особа мора бити већ вешта у алгоритмима да би створила идеју о „објектима“ који учествују у алгоритмима, долази се до закључка да нека врста усавршавања процедура мора постојати иако процеси нису повезани за структуралним концепцијама. Ово имплицира да у неким случајевима ученик мора да савлада механички дрил праћен сумњама о значењу и осећају недовољног разумевања (Sfard, 1991: 33).

Међутим, кроз литературу се истиче да је структурална компонента важна и у овладавању процедурама, тј. да је „разумевање како процедура ради, укључујући примењивање концепта и принципа, неопходни пратилац развијању вештина“ (Kieran, 2013, 214). Разумевање процедуре, осим што помаже у развијању вештина, чини их мање подложним грешкама и мање склоним заборaву. Уједно, одређени ниво вештина је потребан при учењу многих математичких концепата са разумевањем, а коришћење процедура може помоћи у ојачавању и развијању разумевања“ (Kieran, 2013: 219). Дакле, Киеран [Carolyn Kieran] закључује да је процес елаборације процедуре концептуално оријентисана активност чак и кад процедуралне вештине постану аутоматизоване.

Стар [Jon Star] је дефинисао дубоко процедурално знање као „знање процедура које је повезано са разумевањем, флексибилношћу и критичким ставом и то је различито (али могуће повезано) са познавањем концепата; раздвајање ових независних карактеристика знања (тип према квалитету) допушта нам да реконцептуализујемо процедурално знање као потенцијално дубоко“ али је остало нејасно „колико суштински дубоко разумевање процедуре може постојати без разумевања њеног образложења“ (према: Kieran, 2013: 233).

Дакле, било да говоримо о инструменталном и релационом, концептуалном и процедуралном знању или операционалним и структуралним концепцијама, закључак је да та знања у математици нису супротстављена, већ су комплементарна и сáмо учење математике тече у њиховом наизменичном смењивању.

2.1. Коришћена терминологија

Користећи литературу на енглеском и српском језику, неретко смо наилазили на коришћење једног назива за именовање различитих појмова. Стога ћемо најпре описати појмове које користимо. Такође се јављала потреба за превођењем термина који су коришћени у страној литератури, за које нисмо успели да пронађемо већ уведене термине у литератури на српском језику.

Израз. Под овим термином подразумевамо неформално дефинисане изразе тј. терме језика уведене у математичкој дисциплини – алгебри. Ако је алгебарски језик L коначан скуп симбола који је унија дисјунктних скупова – скупа симбола константи и скупа операцијских симбола, и ако су променљиве пребројив низ симбола, индуктивна дефиниција израза била би:

1. Променљиве су изрази, симболи константи су изрази.
2. Ако је α унарни операцијски знак и u израз, онда је αu односно u^{α} израз. Ако је * бинарни операцијски знак онда је *u*v* такође израз за било које изразе *u* и *v* језика L
3. Сваки израз језика L добија се коначном применом правила 1 и 2 (Mijajlović, 1993).

Пошто се у овом раду бавимо изразима и законима скупа N_0, без проширења на скуп рационалних и целих бројева, операцијски знаци +, -, · и : јесу знаци бинарних операција, где су сабирање и множење затворене операције, а одузимање и дељење нису. Користи се нотација *u*v*. Бројеви скупа N_0 су симболи константи.

Уколико се израз састоји само од симбола константи и операцијских симбола користићемо термин **бројевни израз**, а уколико укључује и неку променљиву користићемо термин **словни израз**.

Будући да операције одузимања и дељења нису затворене у скупу N_0, записивање словног израза са овим операцијама укључиваће и претпоставку о вредности слова које учествују у изградњи израза. Вредности слова треба да буду такве да су све операције у изразу изводљиве у скупу N_0.

Алгебарски закон. Употребљаваћемо термин алгебарски закон или идентитет за формулу облика *u*=*v*, где су *u* и *v* изрази (Mijajlović, 1993). За сваки закон користићемо и дидактички прилагођене називе који се користе у настави:

1. Замена места сабирака – Закон комутативности операције сабирања, $a+b=b+a$
2. Здруживање сабирака – Закон асоцијативности операције сабирања. $(a+b)+c=a+(b+c)$
3. Замена места чинилаца – Закон комутативности операције множења. $a \cdot b=b \cdot a$
4. Здруживање чинилаца – Закон асоцијативности операције множења. $(a \cdot b) \cdot c=a \cdot (b \cdot c)$
5. Множење збира бројем – Закон леве дистрибутивности множења према сабирању. $(a+b) \cdot c=a \cdot b+a \cdot c$

Аритметичко правило је назив који је коришћен раније у литератури (Марјановић, 1993; Дејић & Егерић, 2003). У овом раду, сматраћемо под аритметичким правилом горенаведене законе, као и једнакости које важе за операције одузимања и дељења. Као што је напоменуто, подразумевају се рестрикције које омогућавају изводљивост операција у скупу N_0. Законитости које најчешће истичемо у почетној настави и њихови дидактичко прилагођени називи:

1. Множење разлике бројем: $(a-b) \cdot c=a \cdot b-a \cdot c$
2. Дељење збира бројем: $(a+b):c=a:b+a:c$
3. Дељење разлике бројем – Правило (закон) десне дистрибутивности дељења према одузимању. $(a-b):c=a:b-a:c$
4. Одузимање збира од броја – Правило: $a-(b+c)=a-b-c$
5. Одузимање броја од збира – Правило: $(a+b)-c=(a-c)+b=a+(b-c)$

Правила 4. и 5. користе се при сабирању и одузимању већ у другој десетици, тако да су ова правила део градива првог разреда основне школе. Међутим, аналогони ових правила са операцијама множења и дељења нису саставни део математике у разредној настави.

Својство операције. Овакав назив се појављује у оперативним задацима Наставног програма (НП1 – НП4)[1], где се помиње да се „упозната својства операција користе за рационалније (лакше) рачунање". Међутим, већ следећи задатак јесте да се „упознају зависности резултата од компонената операције". Према претходном, под својством операције се подразумевају закони скупа N_0, али не и зависности резултата од компонената операције. Ми ћемо под својством операције подразумевати најшири скуп једнакости: законе, правила, као и зависности операција од њихових компоненти. Иста терминологија се користи и у новим наставним програмима (ННП1 – ННП4)[2]. У својствима која ћемо навести даље у тексту такође важе услови

1 *НП 1 - 2. Правилник о наставном плану и програму за I и II разред основног образовања и васпитања. Службени гласник РС – Просветни гласник бр. 10/04, 20/04, 1/05, 3/06 и 15/06; НП 3. Правилник о наставном плану и програму за први, други трећи и четврти разред са наставним и програмом за трећи разред. Службени гласник РС – Просветни гласник бр. 1/05 и 15/06; НП 4. Правилник о наставном плану и програму за четврти разред основног образовања и васпитања. Службени гласник РС – Просветни гласник бр. 3/06 и 15/06.*

2 *ННП 1. Правилник о плану наставе и учења за први циклус основног образовања и васпитања и програму наставе и учења за први разред основног образовања и васпитања. . Службени гласник РС – Просветни гласник бр. 10/2017-1; ННП 2. Правилник о плану наставе и учења за први циклус основног образовања и васпитања и програму наставе и учења за први разред основног образовања и васпитања. . Службени гласник РС – Просветни гласник бр. 16/2018-47; ННП 3. Правилник о плану наставе и учења за први циклус основног образовања и васпитања и програму наставе и учења за први разред основног образовања и васпитања. . Службени гласник РС – Просветни гласник бр. 5/2019-6; ННП 4. Правилник о плану наставе и учења за први циклус основног образовања и васпитања и програму наставе и учења за први разред основног образовања и васпитања. . Службени гласник РС – Просветни гласник бр. 11/2019-11*

који ће омогућити изводљивост сваке од операција у N_0. Дидактички прилагођени називи зависности су:

1. Зависност збира од промене сабирака.
   $a+b=c$,
   $(a \pm m)+b=a+(b \pm m)=c \pm m$
2. Сталност збира.
   $a+b=c$,
   $(a+m)+(b-m)=c$, $(a-m)+(b+m)=c$
3. Зависност разлике од промене умањеника и умањиоца.
   $a-b=c$,
   $(a+m)-b=a-(b-m)=c+m$, $(a-m)-b=a-(b+m)=c-m$
4. Сталност разлике.
   $a-b=c$,
   $(a \pm m)-(b \pm m)=c$
5. Зависност производа од промене чинилаца.
   $a \cdot b=c$
   $(a \cdot m) \cdot b=a \cdot (b \cdot m)=c \cdot m$
   $(a:m) \cdot b=a \cdot (b:m)=c:m$
6. Сталност производа.
   $a \cdot b=c$
   $(a \cdot m) \cdot (b:m)=c$
   $(a:m) \cdot (b \cdot m)=c$
7. Зависност количника од промене дељеника и делиоца.
   $a:b=c$
   $(a \cdot m):b=a:(b:m)=c \cdot m$
   $(a:m):b=a:(b \cdot m)=c:m$
8. Сталност количника.
   $a:b=c$
   $(a \cdot m):(b \cdot m)=c$
   $(a:m):(b:m)=c$

Олакшица или пречица у рачуну подразумева рачунање вредности израза не само помоћу правила приоритета операција, већ и коришћењем неког од својстава операције чијом применом ће се добијати међурезултати погодни за рачунање, као што су вишеструке десетице, стотине, хиљаде.

3. *Алгебарско мишљење*

Не може се рећи да постоји јединствена дефиниција алгебарског мишљења, али су многи аутори овај термин објаснили кроз његове аспекте и примере. Оно се не јавља онтолошки, нити је обавезна последица когнитивног развитка. Да би изазвали појаву алгебарског мишљења, оно треба да буде доступно ученицима (Radford, 2011), што и јесте један од циљева математичког образовања у првом образовном циклусу. Пошто је разумевању потребно пуно времена да би се развило, алгебарско мишљење треба развијати кроз дуже време, почевши од раних разреда. Многи наставници и аутори уџбеника у другом циклусу образовања су несвесни когнитивних потешкоћа у учењу алгебре, па многи ученици немају времена да конструишу добре интуитивне основе за алгебарске идеје, или да их повежу са пре-алгебарским идејама које су развили у првом циклусу образовања. Такође, не успевају да конструишу значење за симболизам и сведени су на спровођење безначајних операција на симболима које не разумеју (Herscovics & Linchevski, 1994).

Карактерисање алгебарског мишљења у зависности од типа математичких објеката је неадекватно, будући да ученици могу радити са матрицама или целим бројевима по модулу 7 користећи аритметику, али да могу резоновати алгебарски, користећи конкретне бројеве, чак можда и реторички, без писања (Kaput, 1995).

Аспекти, препознати као потребни за развој алгебарског мишљења у првом циклусу образовања су:

- прављења и изражавања генерализације у формалном и конвенционалном симболичком систему; резоновања са симболичким формама, укључујући синтаксички вођене манипулације тих симболичких форми (Blanton & Kaput, 2011);
- анализа односа међу величинама, примећивање структуре, проучавање промена, генерализација, решавање проблема, моделовање, образлагање, доказивање и предвиђање (Cai & Knuth, 2011; Kieran, 2004).

Питања која су постављена још 2011. године – како је могуће интегрисати прилике за алгебарско мишљење у почетне разреде и припремити ученике за математику у каснијим разредима и како учитељи могу трансформисати њихове ресурсе и инструкције у овом смеру, још увек су актуелна. Међутим, јављају се одређене смернице које могу водити ка одговорима на ова питања. Као термини који могу бити пут ка алгебарском мишљењу јављају се „аритметика са променљивама, „моделовање" и „аритметичка правила" (Carraher & Schliemann, 2007), а Киеран (Kieran, 2004) још експлицитније идентификује примере активности које укључују алгебарско мишљење кроз разумевање израза и једначина. То су:

- једначине које садрже непознату за представљање проблемских ситуација
- изрази који генерализују геометријски или нумерички задате обрасце (patterns)
- изрази који представљају правила бројевних односа
- трансформационе активности које укључују факторисање, проширивање, сабирање и множење полиномијалних израза, експоненте са полиномима, решавање једначина, упроштавање израза, рад са еквивалентним изразима и једначинима итд., од чега је велики део у

промени форме израза или једначине, али са задржавањем еквивалентности.

Предлог је да се ове активности могу укључити без употребе словне симболике, али тако да се могу касније надоградити да је обухвате. Радфорд (Radford, 2011) је овакав тип алгебарског мишљења назвао контекстуално-алгебарско мишљење, јер су генерализовани записи дубоко повезани са просторним или контекстуалним концепцијама. Примери оваквих генерализација су „ Кад додајеш нулу, добијаш увек исти број“, или „Кад сабираш три броја, није битно која два сабереш прво“. Оне чине математичке идеје доступним ученицима за решавање проблема и продубљивање разумевања (Carpenter & Levi, 2000).

3.1. Реторичке генерализације

Као што је већ истакнуто, генерализација је централна тема у математичком образовању. Ако учитељи нису свесни значаја, прилика и могућности за генерализацију и немају навику да ученике доводе у ситуацију у којој би изражавали генерализације, не можемо рећи да је код ученика заступљено математичко мишљење (Mason, 1996). Мејсон (1996) пише да се свесност о генералности постиже на два начина „гледањем кроз“ које води ка апстракцији (видети генералност на основу појединачног), или „гледањем на“ које води ка конкретизацији (видети појединачно у генералном). Аутор описује да се културални померај у смеру математичког мишљења односи на начин мишљења и деловања у којем се учитељи осећају угодно у математичкој комункацији са ученицима и у којој ученици математичко мишљење изражавају са истом природношћу као што слушају и разговарају. Виђење генералности кроз појединачно је део свакодневних активности и компетентне употребе језика. У говору, деца показују моћ да генерализују јер речи јесу генералишуће, нису појединачне, а говор представља померај од бављења појединачним ка бављењем генерализованим. Мејсон указује на још један проблем у вези са генерализацијом. Када учитељ представи „пример" ученицима, његово искуство је потпуно другачије од искуства ученика. За учитеља, тај пример је пример нечега. За ученике, пример је све. Тада се пример не посматра као илустратор генералности, него као нешто засебно. Задатак ученикā је да реконструишу генералност из случаја који је понуђен. Често ученици ово раде бриљантно, али непримерено јер ненамерно наглашавају аспекте које учитељ не наглашава и обратно.

Једно виђење у вези са вербалним изражавањем јесте да се мора процесирати секвенцијално и да више одговара рачунским процедурама (Sfard, 1991). Међутим, желимо да истакнемо и други аспект вербалног изажавања који је у вези са генерализацијма (као што је претходно описано), а не са рачунским процедурама.

У поменутом експерименту Карпентера и Левија (Carpenter & Levi, 2000), у којем ученици користе реторичке формулације при генерализацијама неке од формулација до којих су ученици дошли вежбајући бројевне реченице су:

- Кад одузмеш број већи од почетног, увек ћеш добити негативни број;
- Нула плус неки број једнак је том броју;
- Ако одузмеш број од истог тог броја, добићеш нулу;
- Ако одузмеш нулу од броја, добићеш исти број;
- Ако сабереш два непарна цела броја, добићеш паран број;
- Ако сабереш паран и непаран цео број, добићеш непаран цео број. (Carpenter & Levi, 2000, 11).

Ученици у том експерименту су такође показали да разумеју да контрапример чини претпоставку нетачном, а да један пример не показује да је претпоставка тачна. Током године, нека деца су могла да размишљају користећи опште појмове. Тврдње до којих су ученици дошли успели су да представе као симболички запис користећи квазипроменљиве (симбол □) или слово за представљање променљиве.

На интервјуу који је обављен на крају године, ученици су углавном правили генерализације које су укључивале нулу, дакле, сабирање, одузимање нуле и одузимање броја од самог себе.

> „Све у свему, испоставља се да ученици у нижим разредима могу да учествују у формулисању, репрезентовању и образлагању претпоставки, иако њихово образлагање није увек довољно да потврди све претпоставке које су у могућности да идентификују" (Carpenter & Levi, 2000, 16).

Ворен и Купер виде алгебарско мишљење као могућност да се оперише са генерализованим апстракцијама и виде природни језик, односно измишљену нотацију од стране деце као носиоца алгебарских идеја у истој мери као и конвенционалне симболичке нотације (Warren & Cooper, 2001).

Овакве врсте генерализација, формулисаних вербално, називамо реторичким генерализацијама. Илустроваћемо то кроз додатан пример. У експерименту са ученицима другог разреда који је спровео Радфорд (Radford, 2011), задатак ученика је био да генералишу правило у низу. Правило је било 2n+1, а низ је био графички представљен. Један од ученика је закључио да који год да је резултат (мислећи на 2n) треба додати 1 (Radford, 2011: 310). Овакву генерализацију сматрамо реторичком.

4. *Аритметика као основ за развој алгебарског мишљења*

Често је процедурално или операционално знање повезано са аритметиком, а структурално са алгебром (Stacey & MacGregor, 1999), међутим претходно поглавље о узајамној неопходности операционалних и структуралних концепција баца сенку на овај став. За развој процедура у оквиру артиметике потребно је разумевање њиховог образложења и њихово усавршавање, да би у оквиру алгебре могле бити виђене у новом светлу и да би прешле у структуралне концепције (Kieran, 2013). Стога се од последњих деценија 20. века дискутује о месту алгебре у основношколском образовању. Дускусија се одвија кроз научне скупове и радове у научним часописима у којима су допринос давали аутори из многих земаља. Посебан значај овој теми дала је монографија *Рана алгебризација* (Cai & Knuth, 2011), која се преласком са аритметике на алгебру бави са више апеката: когнитивног, инструкционалног и са аспекта наставног програма. У овој монографији истиче се да је постигнут консензус о месту алгебре у првом циклусу школовања. Ученици треба да буду изложени алгебарским идејама док развијају брзину и тачност у рачуну која се захтева у аритметици, што се не постиже измештањем дела курикулума који се односи на алгебру из другог циклуса школовања у први. Треба подстаћи дубље, фундаменталне структуре математике (Cai & Knuth, 2011: 8). Радови унутар ове монографије указују на значај боље интеграције могућности развијања алгебарског мишљења у настави, као и на значај подршке напорима учитеља да уврсте активности које поспешују развој алгебарског мишљења (Cai & Knuth, 2011: 10).

Један од разлога неуспешности у настави алгебре је чињеница да алгебра, иако је уведена као генерализација аритметике, губи везу са аритметиком, чиме се ствара тзв. „когнитивни јаз“ (Herscovic & Linchevski, 1994) или „дидактички рез“ (Filloy & Rojano, 1989). Док је у аритметици акценат на флуентности и брзини рачунања, у алгебри је акценат на манипулацији симболима, решавању једначина и неједначина. У циљу смањења овог јаза, алгебарске идеје треба да буду присутне у наставном програму математике од почетка, да не чекају усавршавање аритметике (Kilpatrick, 2011).

Сходно томе, у литератури су установљени појмови *рана алгебра* и *спремност за алгебру*. Термином *рана алгебра* описано је продубљивање ученикових схватања структура и општости у математици, насупрот појединачним искуствама са којима се срећу у рачуну, док *спремност за алгебру* подразумева искуства у грађењу, изражавању и тумачењу математичких генерализација. То је беспрекидан процес који почиње на почетку формалног образовања и не представља садржај ексклузиван у каснијим разредима (Blanton & Kaput, 2011: 7).

Разлика између „ране алгебре“ и садржаја из алгебре који је само измештен из виших разреда у ниже је у следећем (Carraher et al., 2008):

1. Рана алгебра се темељи на контексту проблема. Овим се спречава да ученици користе формалну нотацију без њеног повезивања са значењем, јер ученици не закључују искључиво кроз логику и синтаксичка правила. Користе мешавину интуиција, уверења и претпостављених чињеница упарених са чињеничним резоновањем и аргументима (стр. 236).

2. Формална нотација је уведена искључиво постепено. Алгебарски изрази треба да буду уведени, али промишљено, како би била избегнута превремена формализација. Аутори наводе да учитељи треба да уведу непознате термине, репрезен-

тације и технике, без обзира што их ученици на почетку неће разумети.

3. Рана алгебра се чврсто преплиће са постојећим темама у раној математици. Она се неприметно налази у математичком курикулуму, у текстуалним задацима, у различитим темама (сабирању, одузимању, множењу, дељењу, односима и пропорцији, рационалним бројевима, мерењу) и у репрезентационим системима (бројевне праве и графици, табеле, писане аритметичке нотације и образлажуће структуре).

Конвенционална алгебарска нотација није једини начин да се испоље алгебарске идеје (Carraher & Schliemann, 2007). Табеле, бројевне реченице, графици, специјалне лингвистичке структуре такође могу бити носиоци алгебарских идеја, а пожељни су контекст, утемељење у физичким величинама и функције. Стога, улазне тачке у алгебру могу бити следеће:

1. Кроз аритметику и нумеричко резоновање;
2. Кроз аритметику и квантитативно резоновање (посредством моделовања, квантитети и величине могу да припадну домену аритметике, нпр. бројевна права);
3. Кроз аритметику и функције (примери су функције као правила за генерисање колекције, табеле, графици).

Из претходног се може видети да се аритметика сматра основом за увођење алгебре. У овом раду бавићемо се првим аспектом, дакле, аритметиком и нумеричким резоновањем. Карахер и Шлиман (Carraher & Schliemann, 2007) сматрају да се генерализације над бројевима, аксиоме поља и квазиваријабле могу довести у везу са „алгебарским карактером аритметике“. Ово подразумева да ученици у раним разредима праве алгебарске генерализације без употребе алгебарске нотације. Такође истичу да су студије аритметике као улазне тачке у алгебру обећавајуће, али да ово поље још увек треба истражити.

Ради бољег схватања односа између аритметике и алгебре у нижим разредима основне школе, у овом поглављу биће анализиране неке специфичности курикулума наставе математике у разним земљама. Разлике постоје у старосној доби ученика (односно разреду) у којем је алгебра уведена, а затим и у начину на који је уведена. У литератури су цитирана запажања Исака Вирцапа [Izaak Wirszup], дугогодишњег истраживача математичког образовања:

> „У Европи (укључујући Русију) започиње се са аритметиком која је комбинована са геометријом и не представља само рачунање. Алгебарски концепти и алгебарско мишљење се уводе од првог разреда, од предшколског узраста. Променљиве, држачи места, празни квадрати, знаци питања, то су променљиве прокријумчарене без објашњавања, само кроз примере. А у првом циклусу (elementary grades) учи се о једначинама, неједначинама, системима једначина. Сва ова искуства резултују чињеницом да је у Европи транзиција са аритметике на алгебру скоро невидљива, док је у САД после осам година бескрајног, бесмисленаог рачуна дат једногодишњи курс алгебре на првој години, са променљивим и полиномима и експонентима и једначинама“ (према Kilpatrick, 2011:126):

Из овог цитата се опажа суштинска разлика у приступима у курикулумима. У САД је присутан „јаз“ између аритметике и алгебре, док се у Европи и Русији алгебарске идеје развијају у оквиру аритметике, али на различите начине. Давидов курикулум (Русија), у чијој је основи рад Виготског, прати идеју да се мишљење развија од апстрактног ка конкретном, док се у другим земљама алгебра уводи као процес генерализације из примера (Kilpatrick, 2011).

Може се рећи да Наставни програм Републике Србије, чији ће поједини аспекти бити представљени у Прилогу 1, предлаже формирање математичких појмова генерализацијом из примера, али укључује алгебарске идеје још од првог разреда. Да је у настави математике у РС превазиђена подела између аритметике, тј. „рада са само посебним бројевима у нижим разредима“ и алгебре, тј. „рада са, како се то говорило, општим бројевима, у вишим“ описано је и *Методици математике 1* проф.

Марјановића (1996: 66), у којој се издвајају једначине и неједначине у нижим разредима као тачке додира аритметике и алгебре. Такође су дати аргументи против рашчлањивања наставе математике на области међу којима се не успостављају суштинске везе (Липковски, 1993). Једно од важних питања овог рада је питање успешности интеграције алгебарских идеја у почетну наставу математике које нису у вези искључиво са једначинама и неједначинама. Пре него што акценат буде стављен на наставу аритметике и алгебре у првом циклусу образовања у Републици Србији, дајемо преглед литературе која дискутује о времену и начину увођења алгебре, а затим и преглед најзначајнијих идеја у курикулумима других земаља.

4.1. Алгебарске идеје у почетној настави математике

Као што је у претходном поглављу описано, многи аутори сматрају да је настава аритметике добар основ за наставу алгебре. Међутим, поставља се питање да ли можемо казати да се ученици у оквиру почетне наставе математике баве алгебром.

Неки аутори виде алгебру свуда, и тврде да се деца, проналазећи непознати сабирак, као у примеру 4+☐=9, баве алгебром, јер се држач места може сматрати непознатом. Наравно, непознати број се може открити употребом аритметичких метода, као што су добројавање или употребом инверзних операција. Са друге стране, неки аутори тврде да се алгебра не може увести без познавања целих бројева, што је у супротности са историјском чињеницом да се оцем алгебре сматра Ел-Хорезми који ју је увео на Медитерану око 9. века када негативни бројеви још увек нису сматрани бројевима (Herscovics & Linchevski, 1994).

Једна од идеја која је објављена 1984. године (према Herscovics & Linchevski, 1994) јесте да границу између аритемтике и алгебре представља појава непознате са обе стране једнакости у једначини првог степена са једном непознатом ($ax+b=cx+d$). Аутори су понудили моделе за решавање ових једначина користећи модел теразија и оригиналан модел заснован на еквиваленцији различитих правоугаоних области.

Питање времена увођења алгебре покренуто је и на истраживачком форуму конференције ПМЕ 2001. године, где је као стимулишући рад постављено истраживање са ученицима старости од 8 до 9 година (Carraher et al., 2001). Аутори овог рада истакли су да алгебра долази касно после аритметике и да долази до конфликта са учениковим знањем и интуицијама у аритметици, као и да аритметика треба да буде прожета алгебарским идејама од почетка математичког образовања. У њиховом истраживању са 16 ученика, чак 13 је прихватило слово као ознаку за непознату вредност, један ученик је користио упитник, док је само двоје било истрајно у коришћењу специфичне вредности. Записивање слова као непознате и његово укључивање у релационалне ситуације виде као нешто што претходи разумевању промењиве. На ово истраживање су се јавиле и реакције. Једна од реакција била је образложење значења шта представља оперисати „са" и „над" непознатом (Linchevski, 2001). Способност рада са симболима је добијена из спознаје да слово не „симболизује број", „не стоји уместо броја", није „знак" за непознати број, слово је број. Тако су ученици у могућности да користе операције над словима које користе и над бројевима. Радфорд (Radford, 2001) је истакао да су математички концепти уоквирени у културни мод знања, и да су различите културе концептуализовале бројеве и промењиве на различите начине, некад више аритметичке, а некад више геометријске. Радфорд сматра да су постављањем истраживачког питања у којем се усваја традиционални поглед да се алгебра осваја само кроз аритметику, аутори стимулишућег рада смањили могућност да се баве увођењем нових значења у аритметици. Аутор такође сматра да је схватање алгебарских идеја повезано са богатством културног репрезентационог репертоара који је доступан ученицима и учитељима.

Може се рећи да претходном анализом нисмо утврдили када се сматра да ученици завршавају бављење аритметиком и почињу да се баве алгебром. Стога ћемо разматрати различите аспекте школске алгебре. Усискин (Usiskin, 1988) је описао четири концепције школске алгебре. То су: генерализована аритметика, скуп процедура за решавање одређених проблема, проучавање релација између квантитета и студија структура.

Пратећи историјски развој, Киеран (Kieran, 1992) закључује да је данашња школска алгебра симболизовање бројевних односа и математичких структура и оперисање са тим структурама. „Алгебарске репрезентације су третиране као генерализоване изјаве о операцијама спровођеним у аритметици, тј. третиране у процедуралним терминима помоћу нумеричких вредности које су замењиване у алгебарски израз, да би се добио одређени резултат" (Kieran, 1992: 392). Ауторка износи и да објекти често нису алгебарски изрази, већ њихова нумеричка примена, а да су извођене операције рачунске, тј. дају бројевни резултат. Ово је напоменуто да би се раздвојио термин процедуралног (претходно описано) од структуралног, који подразумева да операције нису извршене над бројевима, већ над алгебарским изразима.

Капут је 1995. године идентификовао три димензије реформе школске алгебре: широку, интегративну – интеграција са материјом осталих предмета и педагошку – померај према експлоративној педагогији, усмереној према искоришћавању технологија. Широка димензија подразумева пет аспеката алгебре (Kaput, 1995):

1. Алгебра као генерализација и формализација низова, а специјално али не и искључиво алгебра као генерализовано аритметичко резоновање и алгебра као генерализовано квантитативно резоновање;
2. Алгебра као синтаксички вођена манипулација (нетранспарентних) формалних објеката;
3. Алгебра као проучавање структура апстрахованих из рачунања и релација;

4. Алгебра као проучавање функција, релација и узајамних варијација;
5. Алгебра као скуп језика моделовања и језика контроле феномена.

У оквиру првог циклуса образовања, ослањамо се на први аспект, који детаљније образлажемо. Капут увиђа два извора генерализације и формализације. Први је резоновање у оквиру математичког окружења, којем одговара генерализовање у аритметици (бројевни низови, алгоритми, итд.), а које почиње у математичком систему, често у оквиру целих бројева, њихових својстава и операција, где разумевање структуре тог система игра ограничавајућу улогу. Други је изван оквира математике а подразумева квантитативно резоновање базирано на математизовању ситуација, где је разумевање семантике ситуације основна ограничавајућа улога. У генерализацији и формализацији, Капут види главни проблем школске алгебре:

> „Чин генерализације и постепене формализације конструисане генералности мора да претходи раду са формулама – другачије формализми немају извор у искуству ученика. Тренутни нашироки неуспех школске алгебре показао је неадекватност покушаја за везивање формализма за ученикова искуства <u>након</u> што су уведена. Изгледа да једном безначајно увек остаје безначајно“ (Kaput, 1995, 5).

Алгебра као генерализовано аритметичко резоновање препознато је јер се, између осталог, надовезује на оно што би ученик требало да зна (аритметику) и помаже генерализацији тог знања. Алгебра као генерализовано квантитативно резоновање, уведено од стране Томпсона (Thompson) подразумева „размишљање о квантитету када особа размишља о квалитету неког аспекта ситуације коју сматра мерљивом или бројивом – ширина, густина, маса, године, брзина, број црвених кликера, површи, стопи инфлације итд.,... што може и не мора укључивати додељивање нумеричких вредности квалитета употребом јединице мере или бројења“ (према Капут, 1995: 6).

Капут аргументује да је квантитативно резоновање супериорније у односу на аритметичко у грађењу алгебарског резоновања, будући да је окренуто ка изражавању односа, а не само ка рачунању вредности квантитета.

Други аспект (у вези са синтаксичким манипулацијама) је окарактерисан применом правила за рачунање без обзира на шта се симболи односе. Пажња је тада усмерена на симболе и синтаксичка правила за њихову манипулацију (мењање њихове форме). Семантички приступ би подразумевао решавање једначине 3x-2=10 уназад (инверзним операцијама), док би синтаксички био додавање 2 са обе стране једнакости па дељење са 3. Капут напомиње да многи сматрају да су синтаксички вођења рачунања на формализмима суштина алгебре, али да „ни формализми, а ни акције над њима не могу бити успешно научене без семантичке полазне тачке“ (Капут, 1995: 7).

Остале аспекте нећемо детаљно описивати будући да се не примењују у разредној настави у Републици Србији. Међутим, настава математике у првом циклусу образовања садржи аспекте које су аутори Блантон и Капут (Blanton & Kaput, 2011) описали терминима *рана алгебра* и *спремност за алгебру*, који су описани раније у овом поглављу.

4.2. Перспектива курикулума других земаља

У овом поглављу изнећемо начин и време увођења алгебарских идеја у први циклус образовања у курикулумима разних земаља.

Циљеви кинеског и сингапурског курикулума јесу продубљивање разумевања квантитативних односа и употреба алгебарских модела у ту сврху. У кинеском курикулуму у нижим разредима изучава се квалитативна анализа промена, иако је појам функције уведен тек у каснијим разредима. Фокус је на једначинама, на њиховом решавању, променљивима и почетном развијању појма функције (Cai et al., 2011). Концепт промењиве и функције није формално дефинисан у првом циклусу образовања, али курикулум прожимају идеје променљиве и функције у циљу развоја осећаја за њих (Kieran, 2004).

У кинеским основним школама, променљиве су употребљене на три начина: као држачи места, при генерализацији правилности или као репрезенти опсега вредности, за представљање веза (директне и индиректне пропорционалности). Сам курикулум треба да развије три навике у размишљању ученика:

- испитивање квантитативних односа из различитих перспектива (ученици су охрабривани да представљају квантитативне односе на различите начине);
- решавање проблема коришћењем и аритметичких и алгебарских приступа;
- коришћење инверзних операција при решавању једначина (од првог разреда одузимање је дефинисано као инверзна операција сабирању).

У Сингапуру, алгебарски концепти као и употреба слова за променљиве, формално се уводе у шестом разреду (који је уједно и последњи у првом циклусу), док се једначине уводе од седмог разреда. До тада, користе се модели за конструисање сликовних једначина. Такође, истражују се низови кроз активности у којима се од ученика тражи да генералишу правило и наставе низ бројева. У приручнику за наставнике наглашава се и употреба инверзних операција током увођења четири операције.

Многи циљеви овог курикулума, као што су разумевање низова, релација и функција, решавање проблема (који укључује релационалне преспективе и развијање функционалних интерпретација) исти су као и у стандардима у САД 2000. године (Kieran, 2004).

У САД, решавање проблема подразумева истраживање контекстуализованог проблема, конструкцију стратегија на основу математичког разумевања односа, употребу разних алата (нпр. средстава, компјутера, калкулатора) и комуникацију математичког резоновања кроз цртање, писање и разговор (Cai et al., 2011: 39). Такође, Каи [Jinfa Cai] напомиње да неки аутори верују да алгебра не мора да се учи кроз реалне ситуације, јер њена суштина није примењена. Циљ треба да буду апстрактне структуре, а не учење како те структуре могу да опишу реалне ситуације.

Четири математичке активности од 2. до 6. разреда (САД) на којима се темеље аритметика и алгебра, као и веза међу њима јесу:

- разумевање операција,
- генерализација и верификација,
- проширивање бројног система,
- коришћење нотације са значењем (Russell et al., 2011).

Аутори истичу да се њиховом употребом омогућује студентима да са аритметике пређу на алгебру, побољшава разумевање аритметичких операција и доприноси умењу рачунања. Иако ученици рачунске операције у скупу целих бројева извршавају тачно, постоји потешкоћа у преласку са аритметике на алгебру. Многи од тих проблема, аутори наводе, своде се на недостатак знања о својствима и понашању операција. У најгорем случају, ученици користе меморисане процедуре, али не разумеју како се користе и на који начин се темеље на особинама операција (Russell et al., 2011: 45).

Употреба симболичке репрезентације у првом циклусу изостављена је фокусним тачкама NCTM и истакнут је значај проучавања низова. Такође, NCTM разматра учење различитих особина операција као почетак алгебарског мишљења (Watanabe, 2011).

Три групе концепата и вештина наведана по питању транзиције са аритметике на алгебру названа Критичке основе школске алгебре (*Critical Foundations for School Algebra)* (у оквиру *U. S. National Mathematics Advisory Panel, 2008,* даље у тексту NMAP, према Kilpatrick, 2011) су:

- добро познавање целих бројева;

- добро познавање разломака;
- поједини аспекти геометрије и мерења.

NMAP је дао препоруку да се „алгебарски“ проблеми који укључују низове бројева и правилности редукују, а разлог томе види у компаративној анализи курикулума. Наиме, из анализа, у већини земаља у којима су ученици осмог разреда били добро пласирани, курикулум није садржао тему „низови (patterns), релације и функције“ до осмог разреда. Међутим, идеје о овим темама прожимају курикулуме у тим земљама (Kilpatrick, 2011).

Функционални приступ, без обзира на неслагања да ли су функције заиста део алгебре, јесте раширен у математичком образовању у САД и део је стандардā објављених 2000. године. То је приступ који наглашава односе међу величинама и начине представљања тих односа, а схваћен је као претходник алгебарског мишљења. Од трећег до петог разреда (у САД), алгебарске идеје треба да се појаве и изучавају при:

- идентификовању бројевних и геометријских образаца (patterns),
- њиховом вербалном, табеларном или симболичком опису,
- у тражењу и примењивању односа међу величинама које варирају у циљу предвиђања решења,
- прављењу и објашњавању генерализација, употреби графика за опис правилности и постављању претпоставки,
- испитивању особина бројева,
- употребу стандардне нотације, симбола и променљивих за изражавање шаблона, генерализација или ситуација. (Из стандарда NCTM, 2000, према Kieran, 2004)

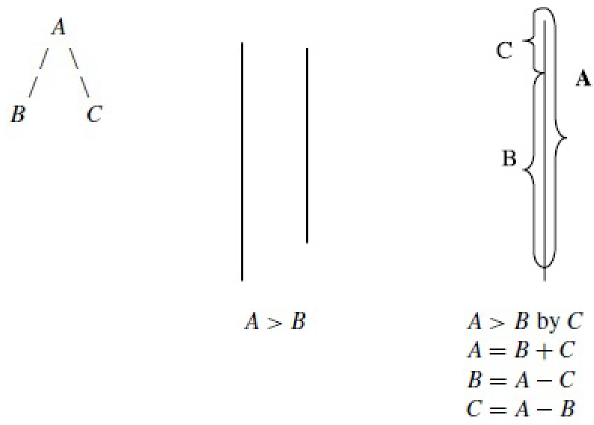
Према Давидовом курикулуму, у Руској Федерацији, ученици раних разреда раде са апстракцијама. Заснован је на схватању Виготског да ученици који разумеју алгебру достижу ниво апстракције и генерализације који трансформише значење „нижег аритметичког нивоа“ (Schmittau, 2011).

> „Стога, иако историјски у математици, и традиционално у образовању алгебра прати аритметику, у својству оријентисања деце на апстрактније и генералније нивое разумевања од почетка формалног образовања, теорија Виготског, са нагласком на научни концепт и теоријско разумевање, подржава супротно. Будући да деца у првом циклусу образовања не поседују софистицирано разумевање математичара и аритметичко знање као у другом циклусу, није очигледно како инструкције могу бити дизајниране да начине присутним алгебарске структуре на нивоу првог циклуса, без наметања концептуално стерилног формализма, непогодног за учење“ (Schmittau, 2011: 73).

Како је већ наглашено у поглављу „Математички појам и математичко знање“, Виготски посматра одвојено научне и свакодневне појмове попут Пијажеа, али је главна разлика што швајцарски теоретичар тврди да само свакодневни појмови карактеришу дечје мишљење, док Виготски тврди да развој научних и свакодневних појмова није одвојен, да је исти, и да је само за развој научних потребна зрелост свакодневних. Да подсетимо, Виготски поставља систем у центар и сматра да се задаци лакше решавају у оквиру научних појмова, које карактерише развој од сложених ка елементарним појмовима. Дакле, учење води развој, трансформишући структуру дечјих спонтаних концепата и организујући их у систем (Vigotski, 1983). На основу овог схватања, Давидов је видео ману курикулума у којим се концепти формирају од артиметике ка алгебри. Нема увођења низова, нити су бројеви база за развој алгебре. Као основа, користе се односи међу величинама. Нпр. једначине се не уче преко инверзних операција, већ преко односа (Kieran, 2004).

Овај курикулум предлаже да до алгебарске структуре реалних бројева деца могу доћи кроз проучавање бројевних величина као што су дужина, површина, запремина, маса реалних објеката које могу опазити визуелно или тактилно и примећивати њихова својства. Давидов курикулум такође одступа од почињања формалног математичког образовања увођењем броја, а до броја долази помоћу мерења величина. Разлог томе

Давидов види у посматрању културолошког и индивидуалног развоја у коме концепт квантитивности претходи концепту броја. Кључни однос у курикулуму Давидова је однос део – целина, представљен шемом, а не сликом (Слика 1), док је као важан „психолошки алат" представљена табела, коју би требало увести у процес решавања проблема. Ово је, према курикулуму, заступљено у трећем разреду. Такође, схема може послужити као помоћ у увођењу променљивих (Schmittau, 2011).



Слика 1. Шематски приказ део – целина у Давидовом приступу (Schmittau, 2011)

Најочигледније разлике у курикулумима виђене су у моменту увођења симболичке алгебре. У Давидовом курикулуму то је одмах од првог разреда, чак и пре учења аритметике, док курикулум САД предвиђа одсуство симболичке алгебре до 6. разреда. У њему се наглашава квалитативно разумевање идеје математичке промене при дискутовању о низовима. Заједничке идеје, према анализи Киеран (2004) јесу наглашавање односа међу величинама, иако природа тих односа варира (функционални односи су негде централни, а негде нису). Фокус је, као што је и раније поменуто, на генерализацији, оправдавању, решавању проблема, моделовању и примећивању структуре.

У Индији, формална алгебра почиње у шестом разреду (деца старија од 11 година) са целобројним операцијама, увођењем промењљивих у контексту генерализације и решавањем једноставних једначина са једном непознатом (Subramaniam & Banerjee, 2011). У књигама, алгебра се уводи као грана математике чија је главна функција употреба слова за „генерални запис формула и правила" (Subramaniam & Banerjee, 2011: 89). Да би се смањио јаз који се јавио преласком у симболичку алгебру, који је према ауторима настао због продуковања уџбеника у различитим нивоима образовања од стране различитих тимова и притиска да се ученици спреме за средњошколску симболичку алгебру, приступа се фокусу на симболичку аритметику као припрему за алгебру. Ученици раде са нумеричким изразима који захтевају помак у њиховом интерпретирању са циљем да се не рачуна искључиво вредност израза, већ да се разуме њихова структура. У индијској историјској традицији математике, алгебра није виђена као генерализација аритметике, него као основа за аритметику.

У јапанском математичком образовању у првих шест разреда (од 6. године живота) акценат је на изучавању низова, а затим на изучавању израза (Watanabe, 2011). У раду овог аутора може се видети да по јапанском курикулуму, ученици на крају трећег разреда треба да манипулишу са операцијама сабирања и одузимања у скупу целих бројева, на крају четвртог разреда да идентификују и представе разломке и децималне записе и упоређују их на бројевној правој, а до краја петог разреда да манипулишу са операцијама множења и дељења у скупу целих бројева. На крају шестог разреда ученици треба да буду вешти са свим операцијама које укључују и позитивне и негативне бројеве. Истраживачи и састављачи курикулума сложили су се да школска алгебра треба да укључи следеће аспекте:

- алгебра као генерализована аритметика,
- алгебра као студија функција, низова и односа,
- алгебра као алат за решавање проблема,
- алгебра као студија структура.

а консензус који је постигнут јесте да искуства у првом циклусу образовања јесу кључни фактор успешности у алгебри (Watanabe, 2011: 111). Први документ везан за математичко образовање објављен од стране јапанског Министарства образовања – COS (*Course of Study*), 1989. године, сличан је COS-у из 2008. године, чија је имплементација почела школске 2011/2012. У вези са алгебром, овај документ прописује да ученици:

- на крају трећег разреда умеју да организују податке, да користе и цене употребу математичких израза и графова, да репрезентују и истражују величине и њихове математичке односе;
- на крају четвртог разреда умеју да репрезентују величине и њихове математичке односе користићи изразе или графове и да умеју да истражују односе зависности међу њима;
- на крају петог разреда да могу да репрезентују словне изразе и да истражују односе међу њима;
- на крају шестог разреда да продубе представе о функцији кроз разумевање пропорције и да је ефикасно користе у изражавању односа међу величинама.

У јапанским уџбеницима нагласак је на коваријационим величинама, док су низови запостављенији. Нпр. у првом разреду учитељи су подстицани да организују резултате декомпозиције броја 10 на збир два броја да би деца приметила да ако се један број повећа за 1, други се смањује за 1.

У „Инструкцијама за подучавање аритметике“ (*Elementary School Teaching Guide for the Japanese Course of Study: Arithmetic*, 2004.), како је цитирано (Watanabe, 2011: 114), да би се репрезентовали бројеви и величине, користе се табеле, дијаграми, графови и изрази. Такође је напоменуто:

> „Ако се математички изрази предају као нешто чиме ће се изражавати како раде прорачуни, или као пука конвенција, може доћи до недовољног разумевања израза и начина рада са њима. Тако да је у предавању важно интерпретирати изразе, манипулисати њима, објашњавати процес трансформације, као и изражавати феномене и односе у конкретним ситуацијама. Нарочито је битно фокусирати се на разумевање значења које математички израз носи.“

Од првог разреда, ученици у Јапану су навођени на употребу израза при увођењу основних операција, тако што на основу израза пишу приче или проблемске ситуације. У трећем разреду срећу се са непознатим бројем користећи симбол □. После наставне јединице у којој се уводи непознат број следи наставна јединица где ће на основу прича и проблемских ситуација писати једнакости са непознатим бројем. У четвртом разреду симболи као што су □, О, Δ користе се као промењиве (Слика 2). Заменом бројева у једнакост, ученици се уверавају да важе приказане једнакости.

$$(\blacksquare + \bullet) \times \blacktriangle = \blacksquare \times \blacktriangle + \bullet \times \blacktriangle$$

$$(\blacksquare - \bullet) \times \blacktriangle = \blacksquare \times \blacktriangle - \bullet \times \blacktriangle$$

Слика 2. Употреба симбола за означавање променљивих

Употребом ових симбола у четвртом разреду, ученици уче да записују односе између две величине. Такође, у четвртом разреду проблеми се решавају моделом дужи. У петом резреду (по COS 1989.), односно у шестом (по COS 2008.) разреду уводе се слова као променљиве заменом симбола □, О, Δ.

Употреба симболичке репрезентације у првом циклусу изостављена је, како у фокусним тачкама NCTM (*National Council of Teachers of Mathematics*) (САД), тако и у NMAP (*National Mathematics Advisory Panel)* (Јапан). У NMAP акценат је на вештини рачунања, али и разумевању кључних концепата, аутоматском извршавању стандардних алгоритама и употреби претходног у решавању проблема. Перспектива која је конзистентна са темама NMAP је алгебра као генерализована аритметика (Watanabe, 2011). Насупрот јапанског курикулума који разматра низове и идеје везане за изразе, амерички се фокусира на репрезентације користећи конкретне материјале или визуелне репрезентације као графове и дијаграме. Јапански курикулум као главни фокус истиче писање и интерпретирање математичких израза у домену квантитативних односа (Watanabe, 2011: 122).

5. *Когнитивне потешкоће у преласку са аритметике на алгебру*

Описивање когнитивних препрека које се јављају када ученици прелазе са аритметике на алгебру била је тема многих скупова и научних радова. У овом поглављу описаћемо препреке при преласку на алгебру које је досадашња литература препознала.

Као прву, навешћемо употребу променљиве, јер један део истраживача сматра да ученици нису у могућности да спонтано манипулишу променљивом (Cerulli & Mariotti, 2001; Herscovics & Linchevski, 1994). Херковиц и Линчевски указали су на то да наставници који желе да припреме ученике за курс алгебре треба да имају идеју шта чини когнитивни јаз, јер би у супротном презентовали ранији увод у алгебру уместо припрему за њу, и која може да побољша њихову спремност. Студија случаја показала је да рачунање са словима није изведено из модела који је повезан са бројевима.

> „Схватање везе између рачунања са бројевима и словима тражи радикалну промену перспективе у којој су особине операција основа.... У оквиру нумеричког контекста, својства операција не играју оперативну улогу, они једноставно изражавају еквиваленцију у рачунањима, али нису неопходна, и обично нису консултована при рачунању. У алгебарском контексту, својства операција имају оперативну улогу и морају постати инструменти трансформације израза... Да закључимо, изгледа разумно узети хипотезу да промена улоге треба да постане први циљ при

> увођењу ученика у манипулације са симболима“ (Cerulli & Mariotti, 2001: 231).

Ученици у алгебри могу манипулисати са више од једне бинарне операције, што је новина у односу на манипулацију операцијама у аритметици. Иако су се ученици сретали са више операција, извршавали су их једну по једну. Нпр. када изрази у аритметици садрже више од једне бинарне операције, интерпретирани су као инструкције за извршавање појединачних операција, и не наводе на промишљање о њиховој структури. Пре преласка на алгебру, репрезентационе могућности ученика треба проширити изван могућности манипулисања само једном бинарном операцијом (Subramaniam & Banerjee, 2011). И други аутори виде као једну од главних препрека у овладавању алгебром, изостанак сагледавања релационог аспекта операција и фокусирање на рачун (Kieran, 2004). Погодна прилагођавања алгебарског начина размишљања Киеран види у:

- фокусирању на релације, а не искључиво на рачунање бројевног одговора,
- фокусирање на операције, на њихове инверзне операције и на идеји враћања на претходно *(doing-undoing),*
- фокусирању и на представљање и на решавање проблема, а не искључиво на његово решавање,
- фокусирању и на бројеве и на слова, а не само на бројеве. Ово укључује и:
    - рад са словима која могу бити непознате, променљиве или параметри;
    - прихватање отворених словних израза за одговоре;
    - поређење израза по еквиваленцији базираних на својствима, а не на нумеричкој евалуацији;
- мењање значења знака једнакости.

(Kieran, 2004: 140).

Један од разлога дидактичких проблема и проблема у учењу у преласку са аритметике на алгебру између осталог виђен је и у вишезначности значења и улога које исти симболи имају у алгебарском језику (нпр. заграде као означаваоци приоритета операција или за раздвајање операцијског знака од знака броја, затим употребу знака „-“ као унарне и као бинарне операције), као и ретка употреба мултипликативних репрезентација у аритметици, а учестало у алгебри, чим је уведена (Malara & Iaderosa, 1999). О потешкоћама у мултипликативним моделима, говори и истраживање из 1981. године са тринаестогодишњацима (према Herscovics & Linchevski, 1994) у којем је 91% ученика било успешно у решавању једначина $4\cdot\square=24$, док је 65% било успешно када су број и слово повезани $6x=36$.

Знак чија је вишезначна употреба основ преласка из аритметике у алгебру јесте знак једнакости. Дуална употреба знака једнакости је препозната од стране многих аутора (нпр. Booth, 1988; Kieran, 2004; Knuth, et al., 2005; Linchevski & Livneh, 1999; Malara & Iaderosa, 1999; Sfard, 1991; Tall, 2001; Zeljić, 2014). Знак се може употребљавати операционо као концизан опис неког рачуна, или структурално као релација између две величине.

Потешкоћа преласка са аритметике на алгебру, као и у претходно описаним случајевима (употреба заграде, знака -, мултипликативне нотације) подразумева да се знак за једнакост у аритметици примењује на један, а у алгебри на други начин. У аритметици је то знак за означавање резултата, а у алгебри релацијски знак.

Проблем који се јавља у интерпретацији знака једнакости потврђен је у истраживању у којем је учествовало 22 ученика просечног узраста 12 година и 9 месеци (Herscovics & Linchevski, 1994). Ученици су питани да ли је израз 34=19+15 записан коректно или не. Двоје ученика није прихватило овакву употребу симбола. Када је једнакост записана $35=a+16$, седморо ученика је прочитало једнакост са десна на лево, што овде није имало последице, али је у једнакости $364=796-a$ троје променило једнакост читајући је са десна на лево „*a* минус 796 једнако је 364“. Такође, у студији са 373 ученика од шестог до осмог разреда (Knuth et al., 2005) потврђено је да ученици посматрају знак једнакости само операционално.

Карпентер и Леви (Carpenter & Levi, 2000) су сматрали да је контекст у којем ће ученици имати активности које могу укључити алгебарско мишљење решавање и дискусија о „тачним-нетачним (23 – 14 = 9, 7 + 8 = 13, 67 + 54 = 571) и отвореним (x + 57 = 84, x + y = 7, x + x = 24) бројевним реченицама“. И ови аутори пишу о знаку једнакости као инструкцији за извршавање и о потешкоћи његове употребе и указују да ученици треба да схвате знак = као релацију, још од првог разреда. Један од примера који су аутори искористили као бројевну реченицу је 78+49-49=78.

Због овог, према Малари и Иадероси (Malara & Iaderosa, 1999) расцеп у подучавању аритметиком и алгебром, делимично настао због историјског развоја, доноси два становишта:

- стандардна репрезентација наспрам више репрезентација бројева,
- инструктивно значење знака једнакости наспрам симетричног,
- развоја вештине рачунања наспрам посматрања односа и својстава,
- адитивни наспрам мултипликативног модела.

Од когнитивних потешкоћа у алгебри јавља се и проблем који је Дејвис (Davis) 1975. године назвао „име-процес“ дилема (name-process dilemma), јер је израз *6x* и индикација процеса множења 6 са *x,* и „име одговора“. Име предложено од стране других ауторки, Сфардове и Линчевске (Sfard, Linchevski) 1993. године јесте „процес-продукт“ дилема (process-product dilemma) (Herscovics&Linchevski, 1994).

Друга когнитивна потешкоћа јесте прихватање недостатка решења (Acceptance of the Lack of Closure – ALC) описана 1974. године, коју је именовао Колис (Collis). Он је запазио да ученици на узрасту од седам година захтевају да се два елемента повезана операцијским знаком замене трећим. После десете године ученици ово не сматрају неопходним и такође могу користити две операције у изразу. Дванаестогодишњаци могу да се уздрже од затварања и способни су да раде са формулама, а ученици између 13 и 15 година иако још увек не могу да манипулушу променљивим, немају потешкоћу са симболизмом све док је симболизовани концепт подржан конкретном генерализацијом (Herscovics & Linchevski, 1994). Иако узраст ученика које је Колис предложио нећемо безусловно прихватити, пошто на алгебарско мишљење утичу многи фактори (курикулум, начин обраде појединих наставних тема, избор задатака, репрезентација...), узећемо у обзир његов опис при разматрању развоја кроз који ученици пролазе.

5.1. Појам променљиве у почетној настави математике

У овом поглављу је истакнуто да се употреба променљиве сматра једном од препрека у повезивању аритметике и алгебре. Стога, посветићемо пажњу овом појму и навести најзначајније изворе у литератури који анализирају проблем употребе променљивих у настави математике.

У алгебри као математичкој дисциплини под променљивима подразумева се неки пребројиви низ симбола, под доменом променљиве скуп у којима она узима вредности, под метапроменљивим променљиве чији су домени неки други скупови променљивих (Mijajlović, 1993). У литератури су се јављали покушаји описних дефиниција које нису резултат бављења алгебром као математичком дисциплином, већ су резултат употребе променљивих, пре свега, у основношколској настави математике. Из текста који је написао Усискин (Usiskin, 1988) помиње се да је Харт [Keith Hart] педесетих година, тачније 1950. године дефинисао променљиву на следећи начин: „У свакој формули слова пoредстављају бројеве. Употреба слова за представљање бројева је начелна карактеристика алгебре". У другој књизи из 1951. године напомиње да је „променљива словни број који може имати две или више вредности током дискусије" (према

Usiskin, 1988: 9). Из истог извора сазнајемо да крајем педесетих (тачније, 1959. године), Меј и Ван Енген (May, Van Engen) помињу променљиву као „симбол којим се супституише други објекат, обично број у алгебри. Променљива је увек повезана са скупом објеката чија имена може заменити. Ти објекти се зову вредност променљиве“ (Исто, 9).

У истраживању алгебарских израза спроведеном 1975. године Колис је слова називао пронумералима, пошто стоје уместо неког броја или скупа бројева (в. Herscovics & Linchevski, 1994). Као највиши ниво концептуализације пронумерала Колис сматра њихову употребу као генерализованих бројева, тј. њихово коришћење при симболичком записивању аритметичких правила. Наводи три нивоа концептуализације пронумерала:

- најнижи ниво (10–11 година старости) представља директно замењивање пронумерала бројем који изгледа одговарајући. Уколико један покушај не доведе до задовољавајућег резултата, дете одустаје од рада на том примеру;
- средњи ниво (12–13 година старости) поседују они који су вољни да замене групу бројева техником „погађања и тестирања“;
- висок ниво (14–15 година старости) поседују они који су усвојили концепт генерализованог броја, код ког симбол може бити сам по себи сматран као ентитет који има исте особине као било који број са којим су имали искуства.

Као и претходна разматрања везана за способности ученика при интерпретацији операција (прихватање недостатка решења), и нивое концептулизације променљиве, Колис везује за узраст ученика. Херсковиц и Линчевски напомињу да се узрасти који су наведени морају узети са резервом, јер су алгебарски изрази коришћени у истраживању формални и донекле површни, али и да пронумерали морају бити обогаћени операционалним својствима броја, да непозната мора бити виђена као генерализовани број који је изложен свим операцијама које су изводљиве са бројевима. Ови аутори за то предлажу израз *операционални генерализовани број*.

На основу теоријског оквира који је поставио Колис, Кухеман (Kuchemann, 1978) је спровео истраживање 1978. године над 3000 ученика старости 13–15 година, у којем се испитивало разумевање појма промењиве. Описано је да је израз „промењива" резервисан за слова која представљају различите величине, и то:

- слово као објекат који се евалуира – подразумева да је слово тренутно (често мисаоно) замењено бројем. Нпр. једначина a+5=8 решава се замењивањем вредности (можда методом покушаја и погрешки) док се не добије 8 на левој страни једнакости. Такође, пример су и задаци типа: ако је m=3n+1, n=4, колико је m.
- игнорисана слова – подразумева се да су израчунавања спроведена над бројевима у једначини избегавајући слова. Нпр. једначина 12a+20=44 решава се „уназад"– инверзним операцијама, „радећи око" промењиве. Такође, овде се могу сврстати и задаци облика a+b=43, a+b+2=?, затим, n-246=762, n-247=? и e+f=8, e+f+g=?
- слово као објекат – подразумева манипулисање промењивом, као објектом, без потребе да се прво оцени његова вредност. Нпр. у једначинама облика 3x+2x=5x. Чињеница да је слово x (одређени) непознати број се не мора свесно разматрати у овим манипулацијама. Такође, задаци типа 2a+5a+3b=7a+3b.
- слово као (одређени) непознати број – подразумева да се у једначини или изразу слово користи за изражавање односа између величина, а да се не мора прво заменити за његову одређену нумеричку вредност. Нпр. површина правоугаоника страница 8 и t може се изразити изразом 8t, знајући да t представља одређени број. Чести одговори ученика могу бити да „не знају површину пошто не знају дужине обе странице".

Такође, овде спада и задатак типа „додај 4 на 3n“ или „помножи n+5 са 4“.

– слово као генерализовани број – подразумева употребу слова као генерализованог броја, представљајући скуп вредности, а не једну вредност. Нпр. $1 \cdot a = a$ или задатак шта можеш рећи о променљивој c, ако је c мање од d и c+d= 10.
– слово као променљива (променљива величина) – слово које узима низ вредности и у односу је са другим словом, као у функцији или формули. Нпр. једнакост $ha = 100a$ која изражава однос између хектара и ара.

Прве три категорије Кухеман је назвао елементарним, у смислу да је на тим нивоима могуће примењивати алгоритме и процедуре за решавање једначина без размишљања о вредности променљиве, што би могло да онемогући идентификацију и интерпретацију променљиве у решењима проблема, или у генерисању једнакости која би репрезентовала однос. Коришћење последње три категорије, аутор сматра вишим разумевањем концепта променљиве. Тада је могуће прихватање недостатка решења. Кухеманов највиши ниво постигнут је када се променљива третира на многе начине (горе наведене), зависно од контекста и комплексности ситуације.

Усискин, заобилазећи релацију „име-објекат“, говори о променљивој као о „симболу којим ствари (прецизније ствари из одређеног скупа замена) могу бити замењене“ (Usiskin, 1988: 9). У овом раду такође је напоменуто да је формалистичка школа математике сматрала променљиве као и остале математичке симболе, само као ознаке на папиру повезане претпостављеним или изведеним својствима која су такође ознаке на папиру. Усискин сматра да, ако дефинишемо да се школском алгебром бавимо ако се бавимо променљивим, треба да размотримо у којим се облицима она javља, што је урадио на следећи начин:

(1) P=ab, формула, где су a, b и P величине,

(2) 40=5x, једначина, где је x непозната,

(3) sinx=tgxcosx, идентитет, x је аргумент функције,

(4) 1=n(1/n), својство, n је генерализовани број,

(5) y=kx, функција, где је x аргумент фунције, а k и y су константе односно параметри. Овде постоји осећај промене, тј. варијације вредности.

Извори забуне у алгебри који имају корене у разумевању променљивих су (PDTP, 2004):

- Променљиве често зависе од контекста (мисли се на изнад наведене категорије коришћења променљивих);
- Најчешћа употреба променљивих у алгебри је одређивање непознатих у једначини;
- Дата променљива представља исти број у једначини, без обзира на број пута који се појављује, нпр. $5x+2x=14$;
- Понекад се променљиве користе као константе;
- Различите променљиве немају увек различите вредности, нпр. 3*т*+4=19 и $3x+4=19$;
- Неке променљиве у једној једначини могу имати другачију употребу, нпр. $y=mx+b$;
- Некад постоји више вредности непознате за које је једначина тачна;
- У мерним јединицама променљиве су коришћене као обележивачи 10mm=1cm, што не значи да ће се заменом вредности за mm и cm добити тачни подаци.

До уочавања ових проблема дошло се путем бројних истраживања. Указаћемо на још нека истраживања која се баве потешкоћама ученика при раду са непознатим и променљивим величинама. Рецимо, ученици не могу спонтано да раде са или над непознатом, показало се кроз истраживање у којем су ученици у једначинама успешно груписали терме које су чисто нумеричке, али нису успели да групишу терме који имају непознату (Linchevski & Herscovic, 1996).

Показало се такође да ученици не знају коју величину или величине да означе као непознате, а уколико означе величину која није јасно дефинисана, за њих нема смисла да оперишу користећи правила која примењују на бројеве (Stacey & MacGregor, 1999). Непозната је коришћена и за означавање оног што треба да буде пронађено из рачуна. Такође се показало да ученици користе слова на следеће начине:

- словом (x) обележавају различите величине у једној једначини;
- словом (x) обележавају различите величине у различитим ступњевима решавања проблема;
- слово (x) генерално користе за означавање било које величине или комбинације величиина.

Да је неуспех у разумевању променљиве један од узрока неуспешности у алгебри, показује и истраживање објављено 2006. године (Akgün & Özdemir, 2006). Студија је урађена са 158 ученика осмог разреда. На питање које вредности x може узети у једначини $x+2=2+x$, већина ученика је покушала да реши ову једначину. Од тога, 25% ученика је рекло да x има једну вредност, 15% ученика увидело је да је у питању генерализовани број, а 12% је дало тачан одговор. У овој студији, само је 20% ученика одговорило да је релација x+y=z+y тачна само за неке вредности x и z. Аутори ове студије сматрају да „[а]ко желимо да ученици разумеју више од базичних аритметичких операција, треба да у потпуности разумеју концепт променљиве пре него што се упознају са осталим концептима у алгебри“ (Akgün & Özdemir, 2006: 45).

У раду о развоју идеја о променљивим користећи аритметичка знања ученика (Fujii & Stephens, 2008), аутори су кроз интервју са ученицима различитог узраста испитивали способност ученика да сагледају алгебарску природу „бројевних реченица“. На тај начин, до алгебарског мишљења дошли су користећи аритметику. Ученици другог и трећег разреда (старости 8 и 9 година) били су у могућности да у циљу реторичког исказивања датих једнакости игноришу конкретне вредности бројева, а могли су и да оставе израз „незавршеним“, тј. нису морали да рачунају његову вредност. У шестом и седмом разреду, преко реченица навели су ученике да генерализују појам променљиве записујући изразе са једном, а у понеким случајевима и са две променљиве. За овакве бројеве, разматране алгебарски, користили су термин „квазиваријабле" како би нагласили да веза која је представљена једнакошћу не зависи од бројева који су употребљени. „Квазиваријабле" можемо позати са Радфордовим коришћењем "неодређених бројева као инстанци променљивих" (Radford, 2011: 310).

После разматрања претходних истраживања која су са једне стране потврдила потешкоће у употреби променљивих и њиховој нотацији у вишим разредима, док су са друге стране показала да ученици у првом циклусу образовања (3–5 разреда) могу да схвате употребу променљивих, њихових нотација и генерализација, спроведено је истраживање у којем су аутори анализирали рад ученика првог разреда (шестогодишњаци) са променљивама (Brizuela et al., 2015). Показали су да су ученици тог узраста у могућности да начине прве кораке у грађењу разумевања и флуентне употребе променљиве и њене нотације. Анализиран је учинак 22 ученика првог разреда из североисточног дела САД. Ученици су представљали односе облика $y=mx+b$ (за разне вредности m и b током експеримента), у датим контекстуалним проблемима. Одабрано је четири интервјуа који су представљени. Анализа интервјуа показала је да:

- Ученици могу да користе променљиву као ознаку и били су вољни да оставе величине „неодређеним" када су променљиве коришћене. На примеру једног интервјуа, ученица је прихватила предлог да се нечија висина означи словом Z и није имала жељу да то слово замени одређеном вредношћу. Али, када ју је истраживач упитао колико би била висока особа са шеширом, ученица је покушавала да опише на који начин би је измерила. На истраживачев предлог да означи ту висину са нпр. Z+1 ученица је рекла да је то „безвезе" јер „[слово] не треба да буде са бројевима, јер бројеви су другачији од, хм.... слова..." (Brizuela et al., 2015: 44). Дакле, укључивање и бројева и слова у једном запису ученицима је деловало немогуће.

- Ученици су захтевали одређене квантитативне вредности када промењиве нису укључиване. Нпр. на питање истраживача како би записала ако не зна колико је неко висок, ученица је описала процес мерења и долазак до квантитативне вредности. Са друге стране, када су промењиве биле укључене, тј. када је истраживач предложио да ту вредност означи неким словом, ученица није показала интересовање ка замени слова неком вредношћу.
- Ученици су такође умели да изразе квантитативне односе кроз редне односе између слова у алфабету. Нпр. ако је неки број био означен за j, ученици су број за један већи умели да означе са k.

Ученици у овом истраживању су захтевали одређене квантитативне вредности када промењиве нису укључиване, док их нису захтевали када су промењиве биле укључене. Према овим ауторима, одлагање упознавања са промењивим може резултирати употребом нотације без везе са њеним значењем. Они предлажу постепено увођење, од најранијих година јер се тако може пружити могућност да потпуно употребе своје разумевање.

У вези са претходним истраживањем, морамо истаћи да је разумевање слова у математичким записима ограничено на означитеља и да нема манипулације над промењивом од стране ученика и разумевања слова као непознате величине. Однос између слова у алфабету и бројева у низу видимо као успостављање 1-1 коресподенције, коју су ученици упознали још кроз пребројавање.

У домаћој литератури, термини „слово као непозната“ и „слово као промењива“ су широко распрострањени, а слово као генерализовани број се назива и слово у улози „неусловљене (слободне) промењиве“ (Марјановић, 1993, 66).

Од посебног значаја је начин на који се у уџбеницима третира појам непознате односно променљиве. Истраживање уџбеника првог разреда у Републици Србији спроведено 2018. године (Дабић, 2018) показало је да у уџбеницима не постоји јединствен став око обележавања непознате и око начина проналажења њене вредности. На пример, само неки од уџбеника нуде задатке са бирањем вредности из скупа понуђених решења и у већини њих није потенцирано да се до вредности непознатог броја може доћи на више начина. У неким уџбеницима посвећено је недовољно пажње начинима репрезентовања овог појма, а визуелна комуникација и репрезентације се сматрају важним носиоцима значења у математичком образовању (Milinković & Dabić Boričić, 2018).

6. *Представљање и решавање проблема*

У претходном поглављу су представљене потешкоће у преласку са аритметике на алгебру, а као један део споне између ове две гране математике предложен је фокус на представљање и решавање проблема. Иако ћемо у литератури чешће срести употребу термина *проблем* у односу на *задатак*, треба нагласити да ли је реч о задатку или проблему зависи од ученика који га решава – од његових/њених претходних знања, познавања проблема, врсте потребних знања и вештина, итд. (Zeljić, 2021). Проблем би требало да буде ситуација или задатак која од ученика тражи да повеже информације на нов начин. Када се говори о решавању и представљању проблема, последњих деценија је незаобилазан појам математичког моделовања у образовању о чему, између осталог, говори и број научних радова који се њиме баве. Више о прегледу многобројних истраживања може се наћи у чланку Вилфрида Блума (Blum, 1994).

Почетна тачка у моделовању је реална ситуација. Дакле, када причамо о математичком моделовању, причамо о решавању проблема чији је контекст реалистична ситуација. Према Блуму, та ситуација мора бити упрошћена, структуирана и прецизирана од стране оног који решава проблем, што води до реалног модела ситуације. Дакле, реални модел је такође део реалности који зависи од намера онога ко га решава. Затим, реалан модел је математизован и резултира математичким моделом оригиналне ситуације. После тога се долази до одређених математичких резултата који се интерпретирају у односу на оригиналну ситуацију. На тај начин се валидира математички модел. Све ово се односи на „праве“ реалне ситуације.

Текстуални проблеми, који представљају „вештачко маскирање чисто математичког проблема“, а чије се решавање заснива само на њиховом разумевању, могу исто бити од дидактичког значаја.

> „Термин математичко моделовање може означавати процес грађења модела који води од реалне ситуације до математичког модела или примењен процес решавања проблема, или било који вид повезивања реалног света са математиком“ (Blum, 1994: 5).

Моделовање је виђено и као један од начина уласка у алгебру. Сфард (Sfard, 1991) сматра да је улога алгебарског система изражавање релација између варијабли и кореспондентних феномена или ситуација у реалном свету, са дидактичком путањом која је слична оној коју је описао Блум:

1. Прелазак са конкретних ситуација или ситуација изражених природним језиком (текстуални проблеми) на алгебарски код,
2. Анализа релација између варијабли, базираних на манипулацији над алгебарским изразима (синтаксички ниво),
3. Интерпретација конкретних ситуација у светлу резултата рада над алгебарском синтаксом.

У првом кораку значење је дато алгебарским изразима, а у корацима 2 и 3, синтаксичка манипулација над овим изразима постаје значајна.

Јасно је да последњи део Блумове дефиниције као и дидактичка путања коју описује Сфард говори о широком значењу термина математичког моделовања, а оба становишта дају важност и решавању текстуалних задатака који „вештачки маскирају математички проблем“.

6.1. *Аритметичко и алгебарско решавање проблема*

Као што је у једном од претходних поглавља наглашено, неадекватно је карактерисати резоновање у односу на тип математичких објеката којима се манипулише. Стога се поставља питање да ли је резоновање које је коришћено при решавању неког проблема алгебарско или аритметичко. Стејси и Макгрегор (Stacey & MacGregor, 1999) дефинисали су разлике између алгебарског и аритметичког решавања проблема. Ови аутори су закључили да ученици морају створити нову логику у размишљању да би могли да решавају проблеме користећи алгебру.

Алгебарско решавање проблема подразумева проналажење релација које су описане употребом и познатих и непознатих, као и проналажење њима еквивалентних релација док се не стигне до решења. Како је цитирано (Stacey & MacGregor, 1999: 151), Декарт је описао алгебарски метод решавања проблема на следећи начин:

- најпре је претпостављено да је проблем решен,
- непознатим величинама су дата имена,
- није направљена разлика међу познатим и непознатим величинама,
- пронађене су релације између познатих и непознатих и једна величина је изражена на два начина чинећи једначину.

Са друге стране, аритметичко решавање проблема подразумева рачунање са познатим бројевима које доводи до решења.

Истраживање које су ови аутори спровели укључивало је око 900 ученика школа у Аустралији старости од 13 до 15 година, који су већином учили алгебру две или три године. Аутори овог истраживања су мишљења да ранија искуства решавања проблема у аритметици дају ученицима компулсивност у рачунању, што је манифестовано у значењу које дају „непознатој“, интерпретацији једначине и методама које користе при решавању једначина. Такође сматрају да ова компулсивност може „скренути ученике од алгебарског пута решавања проблема враћањем на мишљење утемељено у аритметичким методама решавања проблема“ (Stacey & MacGregor, 1999: 149). Ово утемељење, настало због свакодневног искуства и математике у првом циклусу образовања, аутори сматрају одговорним за велики број проблема у учењу алгебре. Да би потврдили своју хипотезу, аутори су ученицима дали четири задатка које је требало да реше користећи алгебру (што је експлицитно наглашено). Само око једне трећине ученика је решавало задатке користећи алгебру, док су остали који су дошли до решења (а њих је око две трећине на лакшим, а само 17% на тежем задатку) користили неалгебарске методе.

Неалгебарске руте подразумевале су:

- аритметичко резоновање (решавање проблема коришћењем инверзних операција, манипулишући само познатим величинама);
- методу узастопних покушаја (*trial and error*) извођену на три начина:
  - насумично – погађајући решења без одређеног реда,
  - секвенционо – погађајући решења у секвенцама (као у табели),
  - напредно – извршавајући један или више покушаја и користећи резултат сваког покушаја да би се одабрао наредни.

Писање формула аутори су назвали површно алгебарском рутом. Међутим, писање формула представља аритметичко резоновање: „Употреба формула захтева рачун са датим бројевима док употреба једначина подразумева операције са непознатим бројевима; формула дефинише процедуру за рачунање, док једначина специфицује структуре једнакости међу променљивим“ (Stacey & MacGregor, 1999: 157).

Алгебарске руте, насупрот писању формула, захтевају употребу једначина за изражавање еквивалентних форми израза. Док неки ученици користе слова само да означе резултат рачунања, неки их користе алгебарски – за означавање непознатих величина. Неки од ученика су користили алгебру само да запишу једначину, али нису знали да им писање једначине може помоћи у решавању проблема. Други су записали једначину и решавали је на неки од три начина:

- инверзним операцијама на дијаграму (метода инверзије),
- употребом методе узастопних покушаја на један од три горе приказана начина,
- манипулацијом симбола, укључујући непознате, у ланцу дедуктивног резоновања.

Прве две стратегије аутори су повезали са аритметичким. Трећу, алгебарску руту, употребила је мањина ученика.

Такође, аутори су описали виђење једначине ученика на различите начине, као формуле за проналажење одговора, као приче која описује операције које доводе до резултата или као опис есенцијалних односа.

Виђење једначине као чињенице о једнакости, а не као формуле, суштинско је за употребу алгебарског метода за решавање проблема. Такође, напоменуто је да ученици морају научити нову логику размишљања при преласку на алгебарско решавање проблема.

Други аутори врсту резоновања одређују у односу на облик једначине која се решава. У студији са ученицима старости 12 и 13 година, закључено је да се операције над непознатима појављују у акцијама решавања одређених једначина првог степена са најмање два појављивања непознате, нпр. $38x+72=56x$ или $3x+20=x+164$. Према овој студији, прелазак са разумевања решавања једначина облика $x+27=58$ или $4(x+11)=52$, на решавање горенаведених, није тренутан јер захтева неке елементе алгебарског мишљења засноване на аритметичким појмовима (Filloy & Rojano, 1989). Можемо рећи да овакво виђење кореспондира са виђењем да границу између аритемтике и алгебре представља појава непознате са обе стране једнакости. Аутори уводе и термин *аритметичка* једначина, под којим подразумевају једначине код којих лева страна представља низ операција спроведен над познатим или непознатим бројевима, а десна је последица примене тих операција. Таква је једначина $Ax+B=C$, која се може решити *супротним* операцијама на левој страни почевши од броја C. Код једначина облика $Ax+B=Cx+D$ захтевају се операције над непознатом, што код ученика захтева промену концепта једначине или једнакости бројева. Разумевање *не-аритметичке* једначине подразумева схватање да су изрази на обе стране једнакости исте природе (или структуре), и да постоје акције које дају значење једнакости израза (нпр. замењивање нумеричке вредности) (Filloy & Rojano, 1989: 19). У овој студији, када су први пут сусретани са једначинама облика $Ax+B=Cx$, ученици су приступили решавању методом покушаја и грешака. Аутори истичу да између аритметичког и алгебарског нивоа знања треба достићи *пре-алгебарски* ниво знања, који у смислу горенаведеног примера значи препознавање аритметичких операција као таквих и њихово очување у решавању једначина. Дакле, „концепције операција над бројевима треба да се промене да би се могли развити концепти операција на објектима који нису бројеви (као што су непознате) и да би се концепти ових нових објеката (оно што представљају, или могу представљати) могу развити“ (Filloy & Rojano, 1989: 20).

У Републици Србији, ученици према актуелном програму (ННП1–ННП4) не користе алгебарске руте при решавању једначина у смислу који је претходно описан, већ се решавање једначина своди на инверзне операције. Истраживања су показала да ученици другог, четвртог па чак и шестог разреда у Републици Србији нису склони ни записивању једначина при решавању проблема као ни коришћењу графичких репрезентација (Zeljić et al., 2022; 2023; 2024).

6.2. Контекст математичког задатка

Кроз математичко образовање, задаци су представљени у реторичкој, графичкој или симболичкој форми (Zeljić et al., 2021). У класи реторички постављених задатака (или проблема, што је претходно дискутовано), постоје текстуално задати нумерички задаци (проблеми) који су постављени у реторичкој форми и такозвани текстуални проблеми који подразумевају реалистични контекст (Verschaffel, et al., 2000). Текстуално задати нумерички задаци представљају задатке формулисане као математике реченице (нпр. „Израчунај први сабирак ако је други 23, а збир је 50"). Поред ових, постоје и задаци који укључују геометрију и мерење, за које кажемо да су задати у геометријском контексту (Zeljić et al., 2021). Питање је да ли је постигнуће на задацима са реалистичним контекстом веће од постигнућа на задацима у другим контекстима, тј. да ли сам контекст задатка представља препреку или олакшицу ученицима у њиховом решавању.

Према истраживању објављеном 2000. године (Nathan & Koedinger, 2000), које је испитивало успешност ученика у решавању текстуалних, симболички постављених и математичким реченицама задатих проблема, мишљење учитеља и истраживача у образовању о тежини овако задатих проблема разликује се од добијених резултата. Највећа разлика је што су учитељи и истраживачи предвидели да су текстуални проблеми тежи од симболички задатих, док су ученицима симболички задати проблеми били најтежи. Истраживање је рађено са средњошколцима уписаним на курс *Алгебра 1* или *Геометрија 1*.

Према истраживању из 2019. године спроведеном на ученицима четвртог разреда из Републике Србије успешност ученика је била иста на задацима у реалистичном, алгебарско-аритметичком и геометријском контексту (Zeljić et al., 2021).

Текстуални задаци се, дакле, могу посматрати са два становишта, као контекст у којем математичке идеје могу бити и развијане и примењене. Динг и Ли (Ding & Li, 2014) указују да је коришћење текстуалног контекста за развијање математичког знања игнорисано због сматрања многих аутора да су текстуални задаци тежи од задатака рачунања. Они напомињу да са́мо дизајнирање оваквих задататака није довољан услов за постизање релационалног разумевања.

> „Презентација пажљиво дизајнираних задатака не може осигурати успешан трансфер репрезентација, као што поседовање доброг возила не може гарантовати стизање на дестинацију" (Ding & Li, 2014: 118).

Задатке са текстуалним контекстом Динг и Ли сматрају конкретним репрезентацијама јер се њима активира учениково свакодневно искуство. Ово није ново становиште, будући да се текстуални задаци користе на тај начин у неким уџбеницима у РС. Раније студије су указале и на потенцијалне проблеме у коришћењу текстуалних задатака за развијање математичких знања. Наиме, ученици имају тенденцију да не користе правилно знања о реалности и њихова решења су често некомпатибилна са реалистичном ситуацијом, тј. имају тенденцију давања „нереалистичних" решења (Palm, 2008). Као неке од разлога, Палм (Palm, 2008) наводи следеће:

- ученици користе калкулације не разматрајући реалистичне аспекте ситуација описаних у задацима;
- ученици уопште не разматрају реалистичност ситуација, што је последица социо-културалних норми школовања;
- ученици немају довољна знања о реалности које је неопходно за разматрање реалистичности ситуације;
- ученици верују да сви математички задаци имају јединствено нумеричко решење.

Овај аутор је, разматрајући однос између школских задатака и реалистичних ситуација, увео израз „веродостојности" текстуалних задатака. Потврђена хипотеза истраживања била је да би ученици чешће разматрали реалистичност одговора да су задати проблеми веродостојнији.

7. Улога репрезентација у формирању математичких појмова и решавању проблема

Уколико причамо о представљању, а не само о решавању проблема или задатака, незаобилазно је да се дотакнемо појма репрезентација. Према Драјфусу (Dreyfus, 1991a), репрезентовати концепт значи генерисати инстанцу, пример, слику. Драјфус препознаје и различите врсте репрезентација – симболичку и менталну, односно екстерну и интерну. Симболичка репрезентација је екстерно писана или изречена, често са циљем да комуникација у коју је концепт укључен буде олакшана. Ментална репрезентација, са друге стране, указује на интерну схему коју особа користи у интеракцији са спољним светом. То је оно што се појављује у мислима када се промишља о екстерном свету и може бити различита од особе до особе (Dreyfus, 1991a).

Осим важности постојања различитих менталних репрезентација концепата, које су од значаја за успех у математици, Драјфус (Dreyfus, 1991a) истиче и важност транслација, тј. преласка са једне репрезентације на другу. Такође истиче да је репрезентација богата ако постоји много умрежених аспеката тог концепта, а лоша ако има премало елемената које дозвољавају флексибилно решавање проблема. Најбоље је поседовати вишеструко умрежене репрезентације које дозвољавају да се више њих користи истовремено и ефикасно врши прелазак са једне на другу.

Развој репрезентација за операције је кључан у повезивању аритметике и алгебре. Чак и ученици виших разреда који су сигурни у процедуре рачунања могу имати неразвијене представе операција које могу да користе у новим контекстима, нпр. у преласку са коришћења искључиво бројевних израза на употребу симболичке нотације у алгебарским изразима. Употреба слика, дијаграма и текстуалног контекста за потврђивање тврдњи чини се доступним, моћним и генералишућим у нижим разредима (Russell et al., 2011: 58, 59). Аутори виде њихов значај у провођењу времена у јасној формулацији тврдњи речима и повезивању те формулације са аргументима заснованим на репрезентацији. Али, да би се постигла веза између аритметике и алгебре, аутори наводе, учитељима треба боље разумевање како се ове идеје могу остварити у курикулуму, док наставници другог цикуса треба да знају више о знањима и концептима ученика у првом циклусу. Ученичке репрезентационе форме које чине идеје видљивим другима укључују природан језик (њихове речи), дијаграме и писане математичке приче (иако се у тим случајевима ученици ослањају на лингвистичке и графичке конвенције) (Carraher, Schliemann & Schwartz, 2008). Конвенционалне репрезентацијске форме у математици су оне које су санкционисане кроз модерну математику: графици, табеле, различити типови писане нотације, итд. Временом ће ученици повећавати употребу конвенционалних репрезентација у њиховом експресивном репертоару и направити њихов репрезентационални систем који се не састоји само од форми већ и од придружених дубљих структура и процеса.

Осим представљених касификација репрезентација, честа је класификација на конкретне и апстрактне репрезентације. Последњих година води се полемика да ли је учење ефикасније ако се полази од конкретних репрезентација и касније прелази на апстрактне, или обрнуто. Донекле, ова полемика је слична полемици између приступа у курикулумима заснованим на теоријама Пијажеа и Виготског. Међутим, врста и природа проблематике у вези са класификацијом репрезентација није толико сложена, па су се брзим темпом јављала истраживања која су заступала један, односно други став. Изнећемо најзначајнија.

Камински, Слоутски и Хеклер (Kaminski et al., 2006, 2008) засновали су став да се трансфер у учењу математике јавља чешће ако се учи на симболичким и апстрактним репрезентацијама него на конкретним примерима. Истакли су да је један фактор који утиче на трансфер концептуалног знања или стратегије у решавању проблема степен сличности између наученог и циљаног домена, а да конкретне репрезентације носе више информација од одговарајућих апстрактних, тако да те информације могу скретати пажњу од оног што је позадинска структура. Став су потврдили експериментом који су спровели са децом старости 12 година и са студентима, чиме су истакли да је трансфер бољи при учењу са апстрактним репрезентацијама и код деце и код одраслих. Експеримент се заснивао на учењу математичког концепта комутативне групе реда три. Једна група је учила на сликовном примеру који је представљао остатак при додавању једне, две односно три трећине посуде воде, док је други пример био такође сликовни, али су слике биле апстрактни симболи који нису могли бити доведени у везу са реалистичном ситуацијом. Иако је трансфер био бољи у групи која је учила на симболичкој нотацији, иницијално учење било је боље у групи која је учила на конкретним примерима. Стога аутори закључују:

> „Ако је циљ учења математике продукција знања које ученици могу применити у разним ситуацијама, тада је представљање математичких концепата кроз генеричке инстанце, као што је традиционална симболичка нотација, ефективнија него серија „добрих примера". Ово не значи да едукација не треба да укључи контекстуализоване примере. Сугеришемо да дубоко утемељавање математике у конкретне контексте може ограничити њену примену. Ученици могу боље генерализовати математичке концепте у различитим ситуацијама ако су концепти уведени кроз генеричке инстанце." (Kaminski, et al., 2008: 455).

Став заснован на оваквом експерименту изазвао је низ критика (De Bock et al., 2011). Највећа се односила на оно шта је заправо научено, да ли је то концепт групе, аритметика модула три (која је позадинска структура у низу конкретних примера), како се примењују научена правила, или нешто друго. Експеримент је редизајниран и поновљен са 130 студената. Резултати јесу потвдили да је трансфер на нови апстрактни домен бољи код оних који су подучавани помоћу апстрактних репрезентација. Међутим, трансфер на нове конкретне домене је бољи код оних који су подучавани на конкретним инстанцама. Такође је указано да је ово веома специфична ситуација да би се екстраполирала на друге, шире области математичког образовања (De Bock et al., 2011: 123).

Из претходног можемо да закључимо да се још увек није дошло до консензуса о бољем смеру кретања између конкретних и апстрактних репрезентација. Међутим, предложен је још један приступ. Студија је рађена кроз симулацију са елементима који су константно конкретни, константно идеализовани, или мењани током симулације са конкретних на идеализоване или обрнуто. Резултати су показали је да је најбољи трансфер када конкретне ситуације постану идеализоване. „Прогресивна идеализација („конкретност бледи") омогућава да принципи, који су оригинално утемељени и могу се интерпретирати, постану мање везани за специфични контекст, због чега су погоднији за трансфер" (Goldston & Son, 2005: 69). Са́мо значење назива „конкретност бледи" јесте да коришћене симулације које су оригинално конкретне временом постају идеализоване.

Овај приступ, аутори објашњавају, подразумева да је апстрактност ефективно учена коришћењем слика, филмова, интерактивних ситуација и реалистичних физичких искустава, што је у складу са ставом да је дедуктивно резоновање олакшано када је домен познат и конкретан (Goldston & Son, 2005: 70–71). „Конкретност бледи" је приступ којим се добијају користи и конкретних и апстрактних материјала. Те користи укључују:

- помоћ ученицима да интерпретирају двосмислене или нетранспарентне апстрактне симболе коришћењем концепата који су добро усвојени;

– пружање перцептуалних и физичких искустава на којим се темељи апстрактно мишљење;
– пружање конструкције слика које се могу користити када апстрактни симболи изгубе значење;
– омогућавање ослобађања конкретних својстава и уопштавања генеричких својстава (Fyfe, et al., 2014).

Теоријски модел овог приступа укључује три стања: акционо, иконичко и симболичко, од којих прво укључује физичке моделе, друго графичке, односно сликовне моделе, и треће симболичке, односно апстрактне моделе.

Како се испоставило да је коришћење мноштва репрезентација (дијаграма, графика, симбола) у подучавању једна од успешнијих метода, у скорашње време урађено је истраживање са питањем да ли редослед приступа у подучавању (прво теоријски приступ па приступ са више репрезентација или обрнуто) утиче на решавање проблема. Истраживање је урађено коришћењем проблема са разломцима, процентима и децималним записима (Flores et al., 2015). Студија је рађена са 43 ученика старости 12–13 година (седми разред), који су били подељени у две групе. Са једном је најпре рађен теоријски приступ, па приступ са више репрезентација, а са другом прво приступ са више репрезентација, па теоријски приступ. Један од закључака је да је наставницима који су одређени да раде приступ са више репрезентација било теже да заинтересују ученике који су већ знали ефикасне алгоритамске процедуре. Резултати на крајњем тесту нису показали статистички значајне резултате у међусобном поређењу, али је група која је најпре подучавана користећи више репрезентација имала боље резултате у самопоуздању при решавању задатака.

Репрезентације можемо класификовати и у односу на когнитивне стилове. Под термином „визуелизација“, који ће се даље користити, подразумевамо процес који омогућава постојање менталних репрезентација (Dreyfus, 1991a). Последња истраживања когнитивних стилова који су у вези са алгебарским мишљењем и смислом за број предлажу да сви типови визуелизације не спадају у једну хомогену групу. Основ за истраживање нађен је у неуропсихолошким доказима да просторна и објектна визуелизација укључују различите мождане активности (Chrysostmou et al, 2013). Најчешћи коришћени когнитивни стил у вези са математичким образовањем јесте визуелно/вербални, који је увео Паивио (Paivio) 1971. године, а 2005. године Козевников (Kozhevnikov) предлаже постојање два типа визуелизације – објектну и просторну. Особе које имају доминантну објектну визуелизацију користе је при конструкцији живописних слика индивидуалних објеката које су базиране на њиховим карактеристикама. Они настоје да усвоје слику глобално, као једну перцептуалну јединицу којој приступају холистички, па су стога бржи и прецизнији у задацима препознавања и меморисања. Са друге стране, особе са доминантном просторном визуелизацијом могу је користити за репрезентовање и трансформисање просторних односа и конструкцију шематских приказа. Они процесуирају слике део по део, користећи просторне односе да организују и анализирају њене компоненте (цитирано у Chrysostmou et al, 2013). Истраживање ових аутора спроведено је користећи две различите репрезентације, вербалну и сликовну у задацима, како би анализирали когнитивне стилове. Визуелном процесу могу приступити тако што ће се фокусирати на површинска својства објеката, као што су боја и облик, или детектујући просторне релације између објеката и њихових делова и изводити ментално просторне трансформације и манипулације. Резултати су показали да просторна визуелизација игра значајну улогу у постигнућима, без обзира на коришћену репрезентацију у задатку. Такође се показало да просторна визуелизација подстиче концептуалне стратегије, док су особе са ниском просторном визуелизацијом, а високом објектном или вербалном тежила ка процедуралним стратегијама. Они са високом вербалном и ниском просторном су тежили ка формулама и процедурама које су усвојили кроз вербални симболички начин.

Могућност конкретне сликовне имагинације се није показала ефективном у решавању проблема. Они са високом објектном визуелизацијом нису били међу најуспешнијим јер су приступили задацима наглашавајући детаље или површинске карактеристике објеката. Закључак који су ови аутори извели (Chrysostmou et al., 2013) јесте да учитељи треба да користе бројеве и алгебарске концепте кроз различите репрезентације, а посебно просторне. Њихова пажња треба да буде усмерена на флексибилну транзицију између тих репрезентација како би помогли ученицима да се одвоје од модела и дођу до апстракције.

У последње време, информационе технологије доводе до могућности коришћења репрезентација које су компјутерски генерисане и многих истраживања која се баве компјутерски генерисаним репрезентацијама. Једно од њих, рађено у области геометрије у Републици Србији (Đokić et al., 2022), показало је да су оне једнако ефикасне као и конкретније репрезентације. У овој монографији се нећемо детаљније бавити компјутерски генерисаним репрезентацијама.

7.1. Графичке репрезентације

Као графичке репрезентације, ученици користе схематске приказе и дијаграме. Разлика између њих је у нивоу конвенционалности при креирању. Схематски прикази су ближе цртежима који ученици сами продукују. Они користе мање конвенција и могу се испоставити прихватљивијим ученицима. Са друге стране, дијаграми користе конвенције и могу бити препрека у учењу због некомпатибилности са претходним моделима (Fagnant & Vlassis, 2013).

Као што смо већ изнели, алгебарске репрезентације могу бити интерпретиране операционално или структурално (Sfard, 1991). Менталне слике подржавају структуралну концепцију, тако што визуелизација чини апстрактне идеје опипљивим и подстиче њихов третман као да су реални објекти. Међутим, претходно је изнето да визуелизација може бити просторна и објектна. Визуелизацију коју Сфард (1991) помиње, а која подстиче структуралну концепцију, сматрамо просторном, водећи се претходно изнетим анализама у литератури. Према овоме, схематске приказе сматрамо репрезентацијама које су основа за просторно визуелни когнитивни стил и структуралну концепцију. Указаћемо на истраживања која подржавају овај став.

Фагнант и Власис (Fagnant & Vlassis, 2013) изнели су став да присуство схематских репрезентација има позитивни ефекат на учинак ученика у решавању аритметичких проблема. Како ови аутори наводе, ранија истраживања су показала да је централни елемент у решавању проблема његова репрезентација, да вредност модела лежи у активности моделовања, а да сама конструкција модела омогућава особи да додели смисао математичкој ситуацији. Такође, ови аутори указују на истраживања која потврђују да присуство схема помаже једним, а збуњује друге ученике.

Да схематски приказ има позитиван утицај на развијање алгебарских идеја, говори и истраживање ауторке Маријане Зељић (Zeljić, 2014: 2015), која је креирала модел подучавања са употребом схематског приказа и спровела истраживање са ученицима четвртог разреда. Резултати истраживања показали су да су ученици створили адекватне репрезентације појмова које су омогућиле визуелизацију и апстракцију.

Дрејфус (Dreyfus, 1991b) је истакао важност визуелних репрезентација и дао преглед потешкоћа у визуелизацији које је дотадашња литература препознала. Потешкоће су везане за немогућност ученика да виде дијаграм на различите начине, да препознају трансформације које су показане на дијаграму, да интерпретирају варијације и коваријације на графицима, као и да упаре визуелизацију са њиховом аналитичком мисли. Дијаграми садрже релевантне математичке информације у форми која је одређена правилима и конвенцијама, а које су често специфичне за сам тип дијаграма, због чега нису доступне ученицима који нису имали прилику да се упознају са тим правилима и конвенцијама. Овај аутор је такође указао на изворе у литератури у којима се помиње да ученици избегавају визуелна разматрања. Разлог овоме пронашао је у ставовима едукатора да докази засновани на визуелној аргументацији никако нису циљ, већ само важан корак у доказивању. Ово спречава слабије ученике у успешном решавању проблема. Исто је показано и у истраживањима рађеним у Републици Србији, у којима ученици у првом циклусу образовања нису користили визуелизацију чак ни у геометријском контексту (Zeljić et al., 2021), а ни при решавању проблема (Zeljić et al., 2022).

Крумхојер (Krummheuer, 2013) је препознао два типа аргументације на часовима математике првог циклуса образовања – „дијаграмску аргуметацију" и „наративну аргументацију". Прва укључује употребу цртежа, дијаграма, графичких симбола и формула, а сам термин „дијаграм" схваћен је (по Пирсовој (Pierce) номенклатури) као материјал или графичка репрезентација која је креирана у оквиру конвенцијалног система правила која се односе на продукцију, коришћење и трансформацију дијаграма. Друга, наративна аргументација, односи се на колективну аргументацију, коју продукују ученици у интерактивном решавању проблема: „Математички доказ може бити виђен као наративни, у којем секвенционирање реченица прати секвенционирање логичких импликација. Њихов непромењљив редослед спроводи логичку стриктност аргумента." (Krummheuer, 2013: 253–254). Дијаграми могу бити део наративне аргуметације и обрнуто. Претпоставља се да се од предшколског ка раном школском узрасту пракса креће од дијаграмског ка наративном аргументовању.

7.2. Симболичке репрезентације

Пре описивања шта подразумевамо под симболичком репрезентацијом, даћемо кратак опис шта се у литератури под симболима подразумева.

Кроз цитате у литератури (Filloy, et al., 2008: 44) сазнајемо да је Пирс (Pierce) именовао три врсте знакова: иконе, индексе и симболе, од којих су иконе без динамичке везе са објектом који представљају, већ њихови квалитети само личе на квалитете објекта; индекси су физички повезани са објектом, формирају „органски пар“, али интерпретација нема ништа са овом везом, осим да је означи; симбол је повезан са објектом у смислу мисаоног коришћења, и без њега веза између мисли и објекта не би постојала. Слова у изразу јесу индекси, јер означавају бројност, док знаци +, - и = јесу симболи у Пирсовом смислу. И Драјфус (Dreyfus, 1991a) описује симболе као представнике односа између знакова и значења. Симболи служе да имплицитно знање начине експлицитним. Овај аутор такође напомиње да значење мора бити повезано са концептом пре симбола, да би концепт могао касније бити коришћен, што је често занемарено.

Примере симболичких репрезентација можемо наћи и код Динга и Лија (Ding & Li, 2014) у дискусији о значајности разумевања дистрибутивности при операцијама са биномима, решавању једначина, при разумевању функција. Симболичке записе сврстаћемо у апстрактне репрезентације. Као примере апстрактних репрезентација, ови аутори су навели: „16·401, 1.9x+0.4x=9.2, 3x+2x=(_+_)·_“.

Међутим, да симбол не би био семантички празан, мора бити у вези са идејом (Skemp, 1987). Пошто се у оквиру овог рада бавимо симболима који су „алгебарске природе“, а не „аритметичке“, усмерићемо пажњу на њихову интерпретацију. Читање алгебарског текста уводи читача у мрежу интертекстуалних односа који су продукт ранијег математичког и лингвистичког искуства (Rojano et al., 2014). При том се алгебарски симболи и изрази, читани од стране ученика који тек треба да уче алгебру, ослањају на друге текстове који припадају природном језику или аритметичком систему симбола. Математички систем симбола који је раније уведен сада је проширен на скуп симбола који укључују знаке природног језика, слике и дијаграме, као и ИКТ, када је присутна (Filloy et al., 2008).

Радфорд (Radford, 2002) је указао да ученици додељују значење симболичким изразима и оперишу са знацима у оквиру типичних текстуалних проблема. Аутор је направио разлике између кратких текстуалних проблема и симболичких наратива. Симболички изрази постају значајни када нису ни потпуно остављени у оригиналној причи (у природном језику), нити су потпуно ушли у симболички наратив.

Истаћи ћемо још да смо у литератури наишли на два смисла симболичких репрезентација – ужи и шири смисао (Carraher et al., 2001). Симболичка репрезентација у ужем смислу подразумева манипулацију алгебарским симболима, за коју ови аутори верују да заслужује место у раном математичком образовању, док други (Linchevski, 2001) верују да је треба одложити неколико година јер може довести до „безначајне манипулације симболима". Симболичка репрезентација у ширем смислу подразумева употребу аритметичко-алгебарске нотације, табела, графика и природног језика.

7.3. Изазови при коришћењу различитих модела и репрезентација

Постоји студија која указује на потенцијалне проблеме у коришћењу различитих модела и репрезентација (Filloy & Rojano, 1989). Аутори ове студије су истраживали не-аритметичко решавање једначина које је било помињано раније у тексту. Издвојили су два дидактичка приступа, од којих је први био употреба моделовања у конкретном контексту, док је други подразумевао учење синтактичких правила и њихову примену.

У приступу који укључује модел, аутори су испитали „апстракције из операција" које су спроведне на моделу. Коришћени модели за решавање једначина су били геометријски модел и модел ваге. Ученицима су показани први кораци у прављењу модела, након чега су они самостално креирали остале кораке, а потом је приступљено решавању различитог типа једначина помоћу ових модела. Издвојили су се неки од заједничких феномена, независно од употребљеног модела. Прво, иако су одабрани ученици добро познавали решавање аритметичких једначина, јавио се привремени губитак ових знања и фиксација модела. Затим, појавили су се лични кодови који означавају акције у решавању. На крају, јавило се трансферовање операција над непознатим величинама на њихове коефицијенте, што може водити до познате грешке у комбиновању терма различитих степена. Аутори су закључили да спонтани развој и употреба модела у циљу операције над промењивом није уједначен чак ни код ученика са сличним нивоима пре-алгебарског знања. Затим, постоје препреке у апстракцији операција над моделом, без обзира на избор модела или ученикове преференције. Чак су и ученици са јаком везаношћу за модел правили грешке сабирања и одузимања коефицијената различитих степена при прављењу личних кодова.

Према овим ауторима, моделовање има два фундаментална концепта. Први, који су назвали превођење, помоћу којег су операције и објекти у апстрактнијим ситуацијама обогаћене значењем у конкретнијим, и други који су назвали сепарација, који представља одвајање нових објеката и операција уведених помоћу модела од детаља у конкретном контексту. Један може ослабити или инхибирати други. Аутори такође закључују да моделовање, када је спонтано развијено од стране деце, има тенденцију да сакрије оно што треба научити. Нове објекте и операције је теже видети. Због тога је потребна интервенција и посебна пажња у предавању.

8. Алгебарски закони у структури природних бројева

Многи аутори су мишљења да садржаје у првом циклусу математичког образовања треба прилагодити тако да подрже изучавање алгебарских израза и закона. У овом поглављу изнећемо нека од истраживања која су разлог таквог става.

Истраживање спроведено под претпоставком да алгебарски систем који ученици користе наслеђује структуралне особине ученицима познатог, бројевног система, потврдило је да су потешкоће откривене у разумевању структуралних особина алгебарског система укорењене у неразумевању бројевног система (Linchevski & Livneh, 1999). Киеран (Kieran, 1992: 390) је 1992. године пренела резултате истраживања из 1988. године, у којем је закључено да ученици, у недостатку разумевања, меморишу правила и процедуре, и да почињу да верују да је то суштина алгебре, да је математика оријентисана на правила и да је учење математике заправо меморисање.

При подучавању аритметике пажњу треба усмерити на релационалне и структуралне аспекте укључених бројевних оквира и обратити пажњу на значење кроз рефлексије и компарације нотација код којих долази до грешке у интерпретацији (Malara & Iaderosa, 1999). Ови аутори закључују да је потребно дидактички развити алгебарске аспекте аритметике које не треба нужно одложити на крај аритметичких садржаја. У неким концептима нема довољно рефлексије код ученика чак ни на нивоу факултетског образовања, иако су неке когнитивне препреке превазиђене сазревањем учениковог мишљења. Као пример наводе бројевни израз $(2 \cdot 3)^2 + 2 \cdot (2 \cdot 3)$ и словни израз $(ab)^2 + 2ab$, који је интерпретиран као $6^2 + 12$ у аритметици, односно као $ab \cdot (ab + 2)$ у алгебри. Овим примером аутори наглашавају да словни изрази истичу релације и форме које нумерички изрази понекад скривају. Употребом слова уместо бројева, својства која би ученици требало да знају, често нису препозната у новој или другачијој симболици. Стога, аутори верују да је једино употребом *метакогнитивног подучавања аритметике,* увођењем ране и постепене употребе слова и увођењем алгебарских аспеката који су садржани у аритметици од самог почетка, могуће навести ученике на успех у правилној употреби алгебарског кода.

У истраживању у којем су учествовали ученици старости око 12 година (Herscovics & Linchevski, 1994) разматрало се и да ли ученици поседују способност да глобалније опазе низ операција. На питање да израчунају вредност израза 17+59-59+18-18, само 5 (од 22) ученика (од којих су 3 сврстана у слабију групу) је одговорило да не треба да се рачуна вредност, 4 је видело једно „скраћивање“, док је 13 (59%) рачунало вредност извршавајући све операције. После указивања на скраћивање у том примеру, на другом примеру резултати су били нешто бољи (8 је увидело „скраћивања“, 8 је увидело једно „скраћивање“, док је 5 ученика опет извршавало све операције). Такође, 50% је у једначини 4+*n*-2+5=11+3-5 „одвојило“ знак „-“ од броја 2 рачунајући најпре 2+5, док је 95% тачно решило једначину 39+*n*-12=74, а 100% *n*+15-9=61.

Линберг и колеге (Lienberg et al., 1999) су кроз истраживање потврдили да структуралне особине бројевних израза могу да поспеше учениково схватање алгебарских структура израза, али да ученици нису увек у могућности да трансферују познавање тих структура на нове ситуације. Овим истраживањем, у којем су учествовали ученици 6. разреда, указали су на потребу да се у развијању разумевања структуре бројевних израза треба фокусирати, осим на рачунске, и на друге задатке.

Аутори су такође указали на немогућност ученика да искористе разумевање основних рачунских операција у објашњавању валидности алгебарске трансформације. Један део истраживања састојао се из анализе добијених одговора на постављени задатак, у којем је требало да закључе због чега постоји разлика у вредности израза облика 4+5·17 и 12·9+28 када се користе две врсте калкулатора – онај који врши израчунавања узимајући у обзир приоритет операција (тзв. научни) и онај који не узима у обзир приоритет операција (тзв. секвенционални). Ученици нису могли да закључе како ова два калкулатора продукују резултате, тј. који је разлог добијања различитих резултата.

Бројевним изразима је заправо могуће изразити интуиције које деца имају у аритметици (Subramaniam & Banerjee, 2011). Као главна питања постављају шта ученицима у њиховом искуству у аритметици може бити корисно за учење алгебре и да ли ученици стичу увид у квантитативне односе кроз искуства у аритметици, који могу бити полазна тачка улаза у симболичку алгебру. Аутори сматрају да допринос у преласку са аритметике на алгебру могу дати изрази интерпретирани као *операционалне композиције*. Идеја о операционалним композицијама је слична идеји функције, али је мање прецизна. Представља информације о изразу као што су адитивне компоненте од којих је израз састављен и скалирање тих компоненти. Дати примери су представљање израза $500 - 500 \cdot 20:100$ као умањење цене за попуст, представљање броја 536 у канонском облику или представљање наплате укључујући претплату и цену од 0.6 по јединици времена изразом $300 + 0.6t$. На овај начин, пажња ученика је усмерена на квантитативне односе међу изразима. Као примери дате су и инструкције добијања различитих информација о бројевима према одговарајућем изразу (изрази 6+2 и 2·4 носе различите информације о структури броја 8).

Изнећемо резултате још једног истраживања које указује на важност равијања значења у структури природних бројева. Наиме, показано је да су ефекти операција у скупу природних бројева („додавање чини већим“, „дељење чини мањим“) присутни и код одраслих, чак и после много година школовања (Vamvakoussi, et al., 2012). Истраживање је рађено са 127 особа старости између 18 и 28 година, мерењем времена реакције при давању тачних одговора. Индикације су да овакве интуиције утичу на потребно време за давање одговора. Резултати су показали да је тешко превазићи уверења о природним бројевима и њиховом понашању у операцијама, тј. да она имају интуитивну основу. Могу навести на погрешне одговоре, али могу утицати и на резоновање у случајевима када су продуковани одговори коректни. Како ови аутори тврде, резоновање базирано на природним бројевима има „јак интуитивни карактер“ (Vamvakoussi, et al., 2012:328). Слична истраживања су рађена још осамдесетих година прошлог века. Фишбајн са колегама (Fischbein et al., 1985) на основу свог истраживања наводи:

> „Аритметичке операције остају везане за примитивне моделе који тацитно утичу на избор операције иако је ученик прошао кроз добро формално-алгоритамско обучавање.... Свака фундаментална операција у аритметици остаје везана за своје имплицитне, несвесне и примитивне интуитивне моделе. Идентификација операције која је потребна за решавање проблема са два нумеричка податка није директна, већ је посредована моделом. Модел намеће своја ограничења у процесу тражења“ (Fischbein et al., 1985: 3–4).

У овом истраживању указано је да величине које су употребљене у задацима, познавање контекста, величина и тип употребљених бројева (ако су већи од стотина или имају децимални запис) могу утицати на тежину проблема који ученици решавају. Такође, конкретни контекст може да олакша проналажење решења, али главни изузетак је тежина изазвана непознатим текстом (терминима, ситуацијама). Ови аутори верују да су аритметичке операције бихејвиоралне природе, тј. да се у покушају откривања интуитивних модела које особа повезује са одређеном операцијом, морају разматрати практична понашања која су изводљиви дупликати операције. Интуитивни модел који је повезан са сабирањем је унирање два или више дисјунктних скупова, док је за одузимање уклањање и допуњавање. Модел за множење је сабирање истих сабирака, којим се не може интерпретирати комутативност множења. За дељење, ту су дељење и садржавање. Аутори претпостављају да ови модели намећу бројна ограничења у коришћењу бројева и њиховој улози у структури математичких проблема. Такође, два проблема, иако су текстуално и операционо идентична, могу да се разликују у тежини у зависности од типа бројева и њиховој улози у проблему. Објашњавају на два начина изворе ових примитивних модела. Први је да се модел формира онако како је концепт иницијално учен у школи. Други је да је примитивни модел отпоран на промене и утицајан јер одговара аспектима човекових менталних активности које су примарне, основне и природне.

Према претходном, бављење структуром бројевних израза и законима аритметике може бити основа за схватање алгебарских закона. При томе, треба инсистирати на примерима којима се расветљавају грешке у тумачењу математичких записа, и треба имати у виду интуитивне представе ученика о операцијама. Стога ћемо у наредном делу текста представити грешке које су се у ранијим истраживањима појављивале, а које указују на неразумевање структуре израза.

8.1. Структуралне грешке

Важност идентификације грешака и разлога њиховог прављења је један од начина проналаска одговора на питање шта ученицима чини алгебру тешком за учење (Booth, 1988). Анализом, Бут је увидео да поједини типови грешака не зависе од узраста ученика и њиховог искуства у алгебри. Интервју са ученицима показао је да је извор многих грешака у следећем:

- фокусу на алгебарске активности и природу одговора. Насупрот аритметици, где је фокус на налажењу нумеричког одговора, у алгебри је фокус на процедурама и релацијама. Ученици не знају да ли су дали коректан алгебарски одговор;

- употреби нотација и конвенција у одговорима. Симбол + се употребљава за извођење операције, а = за записивање одговора. Ово је примећено и од стране других аутора и детаљно је изложено у поглављу „Когнитивне потешкоће у преласку са аритметике на алгебру";
- потреби за прецизном нотацијом. У аритметици, ако ученик напише 12/3 или 3/12, није важно уколико следи тачан одговор;
- значењу слова и променљивих;
- врсти односа и метода употребљаваних у аритметици. Многи ученици мисле да вредност израза остаје непромењена иако је промењен редослед рачунања, нпр. 18·27+19 и 27+19·18. Такође, многи ученици игноришу потребу за заградама.

Истраживање које је укључивало 53 ученика шестог разреда који нису до тада имали формално алгебарско образовање, нити су познавали рад са негативним бројевима, довело је до класификације препрека у алгебарском контексту (Linchevski & Livneh, 1999):

- статичко виђење употребе заграда,
- „прескакање" операција (115-n+9 је виђено као 106+n),
- немогућност да се одреди операција над парцијалним сумама,
- одвајање терма од операције,
- немогућност спознаје поништавања у изразу,
- неприхватање знака једнакости као симбола за декомпозицију,
- нетачан редослед операција.

Статичко виђење употребе заграда огледа се у чињеници да је само шест ученика без интервенције (а 17 после интервенције) закључило да ће изрази 926-167-167 и 926-(167+167) имати исте вредности. Аутори овог истраживања сматрају да је овај проблем последица увођења заграда само као означитеља приоритета операција.

Прескакање операција у нумеричком окружењу показало се у задатку у којем је требало да се оцени вредност израза 217+175-217+175+67 без рачунања, где је 28% ученика поништило 175 због знака минус после броја 175.

Немогућност да се одреди операција над парцијалним сумама виђена је у примеру 195+67-117+39, где је од ученика тражено да одреде вредност израза рачунајући прво са троцифреним па са двоцифреним бројевима. Ученици нису били сигурни да ли треба прво да саберу 195 и 117, 67 и 39 па да резултате одузму, или да саберу 195 и 117 па да одузму 39 од 67. Операција међу парцијалним сумама је стављана насумично.

Само 6 од 53 ученика није имало проблем са одвајањем терма од операције у било којем контексту, 14 није правило грешке у извршавању редоследа операција, док 24 није имало проблема са „прескакањем“операција.

У овом истраживању показало се и да „одвајање терма од операције“ зависи од избора бројева. За дата три примера (1) 27-5+3, (2) 167-20+10+30 и (3) 50-10+10+10, стопа одвајања терма од операције је, редом, 30%, 43% и 51%. Како је цитирано, више истраживача се бавило овим проблемом. Једно од објашњења јесте да су ученици често охрабривани да користе различита аритметичка правила ради олакшавања рачуна, нпр. 31+4+6 често решавају груписањем 31+(4+6), због чега је може доћи до грешке у изразу 31-4+6. Такође, могуће је да израз 50-10+10+10 виде као 50-3·10, јер је множење уведено као сабирање једнаких сабирака.

> „Ови налази потврђују претпоставку да су потешкоће у разумевању структуралних особина алгебарског система укорењене у разумевању бројевног система. Међутим, не смемо претпоставити да је начин да се ове потешкоће спрече „алгебарско“ увођење бројевног система. На пример, треба ученицима у вишим разредима основне школе представити структурално виђење бројевних израза и бројевних еквиваленција. Логика таквог предлога је јасна: искуство са познатим бројевним контекстом подржаће конструкцију новог алгебарског контекста“ (Linchevski & Livneh, 1999: 192).

Такође је напоменуто да иако за неке ученике стварање „аритметичке везе“ са алгебром може имати смисла, за неке је можда бољи приступ „одозго на доле“, тј. приступ „освртања“ – отпакивања рутинских процедура које су ништа више до нумеричке навике и њихово анализирање са структуралне тачке гледишта.

Још једна типична грешка која се појавила у истраживањима (Lienberg et al., 1999) била је везана за изразе облика $a{\cdot}b+c{\cdot}d$. Ученици су објаснили правила која су користили као „разбити израз на делове, прво помножити па сабирати“, као и „стављање заграда око множења, па сабирања“, што је проузроковало грешке следећег као у примеру

$5{\cdot}3+2{\cdot}4{\cdot}6+7{\cdot}9$

$(5{\cdot}3)+(2{\cdot}4){\cdot}6+(7{\cdot}9)$

$15+8+63=86$

$86{\cdot}6$,

иако су ученици познавали правило множења збира бројем, тј. активно су користили „метод“ за множење $6{\cdot}12=6{\cdot}(10+2)=6{\cdot}10+6{\cdot}2$. Још једна грешка која се у поменутом истраживању спомиње јесте *прегенерализација* структуре коју су аутори видели из грешака као у примерима:

$4{\cdot}6+7{\cdot}9=(4{\cdot}6{\cdot}9)+7$

$6{\cdot}(10+2)=6{\cdot}10+6{\cdot}2$, $5{\cdot}2{\cdot}6=5{\cdot}2+6{\cdot}2$

Све претходно наведене грешке, као и грешке које су продукт у овом поглављу наведених потешкоћа у алгебарском контексту, назваћемо структуралним, јер се услед њих јавља промена у структури израза.

8.2. Еквивалентност израза

Да је еквивалентност алгебарских израза кључан концепт школске математике – кључ у упрошћавању израза и решавању једначина, препознато је од стране многих аутора, али је третман овог концепта површан (Kieran et al., 2013). Еквиваленција је у уџбеницима ограничена на третирање еквиваленције полиномијалних израза и најчешће се односи на домен реалних бројева, а мало истраживачких радова се односи на концепт еквивалентности ван схватања да су „два алгебарска израза еквивалентна ако имају исту нумеричку вредност за дате бројеве који замењују променљиве, или да су два алгебарска израза еквивалентна ако је могуће трансформисати један у други (или оба у трећи) помоћу аксиома“ (Kieran et al., 2013: 1048).

Под термином *структурално знање* у аритметици и алгебри подразумева се могућност да се идентификују све еквивалентне форме израза (уведено од стране Киеран, према Linchevski & Livneh, 1999: 175), а термин *осећај за структуру* подразумева „креативну и флексибилну могућност употребе еквивалентних израза“ (Linchevski & Livneh, 1999: 191).

Студије су указале на проблеме у идентификацији једнакости два аритметичка израза без рачунања. Такође, показале су да ученици не разумеју редослед рачунских операција и не користе их да развију разумевање трансформација које чине вредност израза истом (Banerjee & Subramaniam, 2012). Стога, аутори студија закључују да претходна знања у рачунању бинарних операција не припремају ученике на коришћење више операција у аритметичким изразима и на развијање разумевања особина бројева и операција. Један од уочених проблема јесте и да ученици могу да развију псеудоструктурално разумевање алгебарских израза, тј. могу знати правила симболичких трансформација и могу разумети изразе као еквивалентне ако су њихове вредности исте после замене слова бројем. Ови аутори су због потешкоћа у алгебарском манипулисању симболима и недовољног разумевања аритметичких израза, развили приступ у подучавању који може управљати транзицијом са аритметике на почетну симболичку алгебру и допринети стварању значења за симболичке трансформације. Део овог приступа зове се „резоновање о изразима“, а бави се дискусијом о могућностима и ограничењима операција у контексту евалуације израза, дискутовањем о симболу једнакости и поређењем и оцењивањем једнакости, односно еквиваленције израза. Приступ подразумева увођење појма терма, као и визуелну истакнутост терма (уоквиривањем) која помаже ученицима при решавању задатака. Аутори указују на то да су правила приоритета операција довољна за израчунавање вредности израза у аритметици, али нису довољна за трансформисање алгебарских израза.

У истраживању објављеном 1984. године (Chaiklin & Lesgold, 1984) аутори су потврдили да ученици могу учити алгебру са више разумевања ако прво уче алгебарске концепте примењене на аритметичким изразима и разумеју како су ти концепти коришћени да би се алгебарске операције примениле. Такви алгебарски задаци би се изводили при процењивању еквиваленције два алгебарска израза. Такође, аутори су мишљења да је познавање структуре тј. знање о математичким односима између елемената математичког израза потребно за извршавање математичких операција и у аритметичким и у алгебарским изразима. То је знање да еквиваленција подразумева да је a+b једнако b+a, али да a-b није једнако са b-a. Аутори претпостављају да је знање о структури уграђено у мноштво математичких проблема као што су интерпретација израза, рачунање вредности израза, оцењивање еквиваленције израза и извршавање трансформација над изразима која чувају еквивалентност.

8.3. Структура скупа природних бројева

Осмишљавању емпиријског истраживања које ће бити представљено у наредном поглављу претходила је анализа већ спроведених истраживања. Прва студија бави се истраживањем еквивалентних израза у структури природних бројева (Chaiklin & Lesgold, 1984). Узорак су чинили ученици 6. и 8. разреда, тачније, пет шестака и један осмак. Према речима аутора, вероватно су били натпросечни ђаци. Ученици су оцењивали еквивалентне изразе са три терма са сабирањем и одузимањем, али без рачунања вредности. Претпостављено је да ове активности укључују структурално знање из два разлога. Прво, ово је нови захтев за ученике, а друго, пошто је ово нови захтев, ученици морају користити разумевање структуре аритметичких израза да би развили процедуре. Резултати су потврдили хипотезу да су ученици у могућности да резонују о концептима који су потребни у алгебри, али им недостају важна ограничења у овом знању. Ученици су оцењивали еквивалентност израза представљених табелом (Табела 1).

Табела 1. Класе еквивалентних израза у истраживању Чаиклина и Лесголда (Chaiklin & Lesgold, 1984)

Класа 1	Класа 2	Класа 3
12-2+6	947-685+492	648+873-597
12+2+6	947-492+685	873+597-648
12+2-6	685-492+947	597+648-873
12+6-2	947+492-685	648-597+873
		597-648+873

Закључци до којих се дошло јесу да оцењивање еквивалентности није немогућ, али и да није увек једноставан задатак, као и да поређења у различитим класама задатака нису била различите тежине за ученике. Генерално, ученици могу урадити овај задатак, али не превише добро.

Осим ових закључака дошло се до још неких важних резултата. Они укључују следеће:

- изрази могу бити рашчлањени на различите начине од стране различитих ученика;
- исти израз, када је упоређен са различитим изразима некад је рашчлањен на различити начин од стране једног ученика. То показује да рашчлањивање израза може бити зависно од контекста;
- специфичне грешке су показатељ одсуства важних ограничења ученикових разумевања структуре аритметичких израза.

За описивање успешности, коришћене су следеће категорије. Једна је бинарна – описују је рашчлањивања у којима су коришћене бинарне јединице рашчлањивања. Друга је унарна, у којој су рашчлањивања која користе унарне јединице. Бинарно рашчлањивање представљено је паром терма који су повезани оператором. Тако се у изразу са три терма могу увидети три редоследа којим се израз може рашчланити. Ако је нпр. дат пример a + b – c, бинарна рашчлањивања могу бити:

- a + b, а затим q – c, где је q = a + b
- b – c, а затим a + q, где је q = b – c
- a – c, а затим q + b, где је q = a – c

Све ове категорије аутори су сматрали једном категоријом.

Јединица унарног рашчлањивања састоји се од пара оператор–број. Аутори су запазили две врсте оваквог рашчлањивања. Разлика је у интерпретацији првог броја у изразу. Прва врста подразумева да је први број третиран као почетна величина. Друге су додате или одузете од ове величине. Друга врста рашчлањивања подразумева да нема почетне величине и сви терми у изразу могу бити комбиновани. Прва интерпретација поставља већа ограничења над операцијама извршеним у изразу. Изразе 12-2+6 и 12+6-2 ученик је поредио са: „имамо исте бројеве у проблему и исте знакове, само си их заменио“, или „узимаш исти износ и враћаш исти износ, само у обрнутом редоследу“. Дакле, ученик је поредио вредности које су одзуете или додате, без обзира на редослед којим се појављују. Већина рашчлањивања је била бинарна.

Неке од карактеристичних грешака које су аутори запазили биле су:

- „бинарна грешка“ – нпр. у примерима 947 - 685 + 492 и 947 - 492 + 685,
- „рашчлањивање са десна на лево“ или „рашчлањивање уназад“, нпр. да су изрази 635-492+947 и 947+492-635 еквивалентни јер су записани уназад.

Још један од закључака ових аутора је да ученици немају добро развијене стратегије за извршавање задатака оцењивања еквивалентности. Немају развијене алгоритамске приступе. Али, могу да развију и користе многе методе. Методе које су ученици користили аутори су поделили на аналитичке и неаналитичке. Даље, аналитичке методе поделили су на бројевно зависне и бројевно независне.

Бројевно независне методе, као што им име каже, јесу методе за оцењивање еквивалентности израза у којима се не користе вредности бројева које учествују у изразу. Ове методе су засноване на аксиомама и теоремама које су својствене алгебри. Принцип коришћен при унарном рашчлањивању у бројевно независним методама јесте да су два израза еквивалентна ако се исти терми додају и одузимају без обзира на њихов редослед у изразу. Принцип коришћен при бинарном рашчлањивању у бројевно назависним методама јесте да су два израза еквивалентна ако су бинарни парови у изразима еквивалнетни, где један бинарни пар може бити терм у другом бинарном пару.

Аутори описују две психолошке имплементације које су у основи ових структура. Прва је синтаксичка, у којој ученици не користе вредности бројева, већ само примећују да ли су бројеви исти или различити. Овакве методе су често коришћене у алгебри. Друга је семантичка, у којој се бројеви интерпретирају као величине које се користе у процесу расуђивања. Када је реч о бројевно независним методама, опажене су само бинарне синтактичке методе.

Аналитичке бројевно зависне методе користе семантику бројевних вредности за утврђивање еквивалентности израза. У утврђивању вредности израза, користи се семантика „више или мање“, тј. ученици закључују да ли израз има већу или мању вредност у односу на други, што одређује да они не могу бити еквивалентни.

Неаналитичке методе продукују одговоре који немају логички систем који гарантује истину у закључцима. Око 60% решења која су ученици продуковали била су аналитичка.

Даље, грешке при расуђивању су или кршење алгебарских својстава, или коришћење неаналитичких метода. Кршење алгебарских својстава односи се на операцију одузимања, у смислу да ученик претпоставља да су изрази a-b и b-a еквивалентни или да су изрази q-a и a-q еквивалентни, где је q подизраз. Такође и метод рада уназад може бити подршка оваквом типу грешака.

Закључци ових аутора су и да „(...) ученици нису крути и ограничени у својим приступима да разумеју структуру аритметичких израза... постоји доказ да су ученици у могућности да у аритметици раде трансформацију величина, као и са компензацијом и ординалном семантиком" (Chaiklin & Lesgold, 1984: 65). Такође, аутори излажу да ученици нису сигурни у исправност метода, или да су методе развијене као одговор на задатак који решавају.

Друго истраживање којем желимо да посветимо пажњу јесте истраживање са ученицима на крају петог и шестог разреда (Banerjee et al., 2008). Испитиван је приступ који је имао за циљ изградњу јаког структуралног и процедуралног смисла за аритметику и алгебарске изразе кроз визуелну и концептуалну подршку. Истраживање је засновано на схватању да је израђивање структуралног смисла довољно за „прелазак" на алгебру, али је у току истраживања закључено да грађење структуралног осећаја тражи адекватно процедурално разумевање. Процедурално разумевање је виђено у:

- разумевању да израз стоји уместо броја који је његова вредност,
- разумевању да израз „изражава" различите информације о броју у форми односа између два или више бројева.

Студија је спроведена кроз два пробна и три главна истраживања.

Један од циљева првог пробног истраживања био је да се код ученика развије могућност да увиде еквивалентност израза без рачунања. Ово је најпре постигунто проширивањем њиховог разумевања о симболу „=“. Затим су upoређивани изрази који могу бити повезани, као што су 27+32 и 29+30 или пронаћи 228+149 ако је 227+148=375. У истраживању је уведен концепт терма као компоненте израза (нпр. 12+4-3 се састоји из терма +12, +4, -3), и ученицима је показано да се вредност израза не мења ако се терми у њему реорганизују.

Другим пробним истраживањем проширено је прво на алгебарске изразе, где су уведени „прости терми“ (нпр. +3, -1) и „производ терми“ (нпр. 3·4, 2·y). Употреба терма је била ограничена на задатке поређења израза. Ово истраживање показало је да је група над којом је спроведено прво истраживање (група која је на аритметичким изразима уочавала структуру) боље одговарала на ове захтеве, од групе која је учила алгебру без овакве припреме.

> „Међутим, увиђање површинске структуре (surface structure) није довело до апстракције процедура којим би се омогућило манипулисање алгебарским изразима, које је захтевало дубље разумевање правила и својстава операција (Banerjee et al., 2008: 124).

Закључак је да су процедуре коришћене у аритметичким и алгебарским изразима за њихово упрошћавање (груписањем сличних израза) различите и да нема трансфера из једне у другу. Ово се огледало и кроз грешку (conjoining error) облика 3+5·x=8·x. Такође, ученицима је уведено правило одузимања збира од броја користећи контекст приче која је доводила до два начина репрезентовања и рачунања вредности израза. Ово је ученицима изгледало гломазно и ученици нису успели да протумаче структуру израза. На крају овог истраживања аутори су закључили:

> „Иако је учвршћивање разумевања аритметике било од помоћи у разјашњавању алгебре и правила трансформације алгебарских симбола, постоји потреба да се секвенце начине кохерентнијим и премосте јазови између процедуре и структуре, као и између аритметике и алгебре како би разумевање развијено у контексту аритметике могло плодоносно да се користи у контексту алгебре“ (Banerjee et al., 2008: 125).

У главном делу истраживања, терми су учињени визуелно видљивим уоквиривањем ($\boxed{+19}$, $\boxed{-7}$, $\boxed{+4}$). Ученици опет нису успели да направе везу између процедура упрошћавања у аритметици и алгебарског израза. Покушај да се оваква веза учини експлицитном начињен је задатком евалуације алгебарског израза за дату вредност слова (нпр. $5+4\cdot x$ за $x=2$), као и задатком проналажења лаког начина за израчунавање вредности израза (нпр. 28-17-8+17) наглашавајући несеквенцијална рачунања. Ови покушаји нису били потпуно успешни, делом због ригидности правила евалуације (Banerjee et al., 2008: 125). Идеје одузимања збира од броја и сабирања збира са бројем верификоване су кроз рачунање. У последњој фази главног истраживања терми су класификовани као прости и сложени. Процедуре за комбиновање терма у сврху евалуације израза уведене су као структуралне реинтерпретације правила првенства.

> Постало је јасно да просто присуство концепта структуре и наглашавање површинске структуре није довољно да се направи веза између процедуре и структуре и између аритметике и алгебре (Banerjee et al., 2008: 126).

У истраживању са ученицима седмог разреда из четири школе у Израелу испитивано је „предавање аритметике у аглебарске сврхе“, тј. да ли ће интервенција у нумеричком контексту довести до већег успеха у алгебарском контексту (Livneh & Linchevski, 2007). Резултати су показали да овај трансфер постоји, али да је на вишем нивоу алгебре низак. Ученици који су тестирањем у нумеричком контексту показали да имају потешкоћа (тзв. SAR група – *students at risk)* такође су имали потешкоће у алгебарском контексту. SAR група је на основном алгебарском тесту постигла резулатате 31% – 53%, док је друга SNR група (SNR – *students not at risk*) постигла резултате 55% – 74%. На вишем алгебарском тесту обе групе су имале лоше резултате. После интервенције (у чисто нумеричком контексту) над SAR групом, која је индивидуално планирана за сваког ученика, разлике између ове две групе су статистички значајно смањене. Код SAR групе је структурално знање добијено у нумеричком контексту утицало да се побољшају резултати у алгебарском контексту, а у обе групе резултати су били бољи на пост-тесту који је одржан годину дана касније.

Још једно истраживање, спроведено у шестом разреду (са ученицима старости око 11 година), пратило је две групе: прву која је учила аритметичке изразе као спону са алгебром, и другу која је учила изразе само у оквиру алгебре (Subramaniam & Banerjee, 2004). Аутори су истакли да у првом циклусу образовања, ученици приступају аритметичким изразима као питањима, тј. инструкцијама да изврше одређене операције и дођу до одговора, док транзиција на алгебру захтева да ученици разумеју троструко значење аритметичких израза: процес, резултат и релацију. Као базични појам на основу кога се схвата структура израза аутори помињу једнакост:

> „Концепт израза и концепт једнаких израза могу функционисати као локуси трансфера знања са аритметике на алгебру. Тако могу бити названи ‘мостовима концепције’" (Subramaniam & Banerjee, 2004: 122).

Даље, аутори су нагласили да изрази могу омогућити ученицима да виде број у изразу заједно са придруженим знаком. Као кључну компоненту разумевања симболичке аритметике и алгебре и манипулацију са незатвореним изразима аутори виде у способности „рада са заградама". Закључак истраживања ових аутора је да је ову тему најефикасније подучавати као скуп јасно дефинисаних и повезаних правила за уклањање заграда и поновног записивања израза. Међутим, „правила морају бити повезана са концепцијама како би се побољшало њихово учење и задржавање“ (Subramaniam & Banerjee, 2004: 122).

У истраживању које је комбиновало два модела у подучавању на примеру решавања једначина (Filloy et al., 2008), аутори су нове операције и објекте моделовали у конкретнијем контексту и на синтаксичком нивоу. У конкретнијем контексту (у смислу, контекста који је познатији ученицима), значење и први елементи манипулације операцијама су конструисани узимајући контекст као полазну тачку. Друго становиште је синтаксички ниво и подучавање правилима синтаксе која се касније могу употребити за решавање једначина и проблема. Аутори су имплементацијом модела који припада првом становишту истакли две стратегије. Прва је моделовање апстрактније ситуације у конкретнијем језику у циљу развијања синтаксичких способности, док је друга коришћење тих синтаксичких могућности у развоју стратегија решавања. Према овим ауторима, постоје две фундаменталне компоненте моделовања у подучавању. Прва је транслација, која подразумева да су значење и смисао дати у конкретнијем контексту исти као и у апстрактнијим ситуацијама. Друга је одвајање од нових објеката и операција у конкретнијем контексту у којем су уведени. Конкретне моделе аутори су назвали семантичким, јер је нагласак на значењу, док је у синтаксичким моделима нагласак на правилима. Термин *семантика елементарне алгебре* ови аутори интерпретирају као семантику која је у неком тренутку повезана са елементима синтаксе. Ово укључује значење помоћу ког су елементи синтаксе научени, који могу бити у синтаксичком контексту, као и значење које се захтева током њихове употребе, које може бити операционално или употребно у решавању проблема. Ово води порекло из становишта да су читање и интерпретација знакова и израза у алгебри и њихова употреба у решавању проблема два различита процеса, са различитим почетним тачкама и продуктима које генеришу. Ови аутори сматрају да један од највећих изазова учења алгебре, када ученици усвоје основне елементе алгебарске синтаксе (нпр. кроз конкретне моделе), како навести ученике да их користе у решавању текстуалних проблема. Резултати студије ових аутора показали су да трансфер алгебарских манипулација на контекст проблема (који уобичајено није део подучавања, већ је већински остављен спонтаном развоју) није једноставан.

Истраживање у вези са структуром ираза које је спроведено у Републици Србији 2014. године (Zeljić & Dabić, 2014) показало је да приступ у којем се користе заграде за изражавање структуре не доприноси повећању процедуралних вештина ученика, али да доприноси успеху при уопштавању правила рачунања и разумевању структуре и значења израза. У овом истраживању учествовало је 257 ученика четвртог разреда основне школе. Закључено је да стратегије учења усмерене на развијање процедуралних вештина не воде ка томе да се поступци рачунања примене са разумевањем.

9. Емӣиријско исӣраживање разумевања алīебарских закона у ӣочеӣној насӣави маӣемаӣике

Емпиријски део истраживања осмислили смо узимајући у обзир аспекте алгебарског мишљења и питања која су поставили Блантон и Капут (Blanton & Kaput, 2011). Једно од централних питања било је, подсетићемо, интеграција прилика за алгебарско мишљење у почетне разреде школовања. У овом истраживању концентрисали смо се на први аспект алгебарског мишења, тј. на прављење и изражавање генерализације у формалном и конвенционалном симболичком систему. Други аспект који укључује синтаксички вођене манипулације симболичких форми није био разматран у истраживању, јер смо се водили идејом да синтаксичке манипулације треба да буду конструисане кроз постепену формализацију и генерализацију (Kaput, 1995). Ово није супротстављено рекурзивном процесу процедуралног и концептуалног који је изложен у теоријском делу, а који је описала Киеран (Kieran, 2013), јер су ученици пре спровођења експеримента већ постали вешти у процедурама рачунања и коришћења неких својстава структуре природних бројева.

Разумевање не-аритметичких једначина и постизање пре-алгебарског нивоа знања (Filloy & Rojano, 1989) дало је важност изучавању еквивалентних форми израза. Сматрамо да ученици, након што пређу једну од препрека у учењу алгебре, а коју представља концепт једнакости, могу да искористе познавање еквивалентних форми израза при не-аритметичком решавању једначина и алгебарском решавању проблема. Стога смо се у овом истраживању фокусирали на препознавање еквивалентних форми израза, при том користећи различите репрезентације и транслације са једне репрезентације на другу, будући да је описана њихова важност у развоју алгебарског мишљења (Dreyfus, 1991a). Посебан акценат стављен је на употребу схематског приказивања, текстуалног контекста и симболичких репрезентација. У истраживању ће бити испитана употреба квазиваријабли и упоређена манипулација са квазиваријаблама и са промењивима.

У наредним поглављима изложићемо предмет, циљ, задатке и хипотезе истраживања, описаћемо узорак и начине статистичке обраде података. Затим ћемо описати ток истраживања, представити и анализирати добијене резулате и изложити закључке утемељене у теоријским оквирима описаним у првом делу рада.

9.1. Предмет, циљ и задаци истраживања

У овом истраживању испитали смо до ког нивоа су формирани алгебарски закони у првом циклусу образовања. Време и начин обраде појмова везаних за структуру скупа N, предвиђен је Наставним програмом РС.

Како је истакнуто у првом делу рада, употреба различитих репрезентација за изражавање алгебарских закона је једна од основних карактеристика алгебарског мишљења. Стога, осим оспособљености ученика за процедурални, реторички и симболички начин изражавања, испитивали смо и разумевање алгебарских закона представљених различитим репрезентацијама. У ту сврху, развијена су два Модела систематизовања знања о структури скупа N (у даљем тексту Модела), у којима су обновљени алгебарски закони и својства операција помоћу различитих репрезентација. У опису Модела, осим секвенце математичког текста, односно секвенце проблемских ситуација

(Filloy et al., 2008), описано је и математичко-логичко структурирање садржаја, след активности, материјал за учење и временски оквир реализације одабраног садржаја. Карактеристике модела биће представљене у поглављу „Основне карактеристике Модела 1 и Модела 2“. Посебна пажња у овом раду посвећена је симболичком запису и употреби променљивих. Ово сматрамо важним јер је употреба симболичког језика предвиђена при увођењу целих бројева, а појам целог броја је апстрактнији (у терминима које је увео Скемп, 1989) од појма природног броја. Дакле, желимо описати у којој мери и на које начине су ученици, на крају првог циклуса образовања у РС, оспособљени за изражавање алгебарских закона структуре природних бројева симболичким језиком и колико су оспособљени да ове законе примене након завршетка увођења скупа N (начином на који је предвиђено Наставним програмом РС).

Дакле, *предмет истраживања* је анализирање разумевања алгебарских закона структуре природних бројева и симболичког језика код ученика четвртог разреда, односно, пре увођења скупа Z. Осим тога, желимо да испитамо да ли су алгебарски садржаји који су уведени у оквиру наставе аритметике у скупу природних бројева резултирали структуралним концепцијама потребним за наставу алгебре. Такође, желимо да представимо и анализирамо два *Модела* којима би се олакшала употреба симболичке нотације за описивање структуре природних бројева.

Циљ истраживања јесте утврђивање и анализирање ефеката различитих Модела на постигнућа ученика у разумевању алгебарских закона пре увођења скупа целих бројева.

Задаци истраживања који операционализују циљ су:

1. Испитати разумевање алгебарских закона кроз изражавање генерализација и формализација аритметичких правила и својстава операција на крају четвртог разреда основног образовања;
2. Испитати разумевање употребе слова у математичким записима пре примене Модела;

3. Утврдити ефикасност и упоредити два конструисана Модела (Модел 1 и Модел 2) којима би се систематизовало знање о структури скупа природних бројева.

До ког нивоа су формирани алгебарски закони структуре природних бројева пре Модела проверавали смо кроз оспособљеност ученика да одговоре на захтеве који су предвиђени деловима Наставног програма РС (описани у Прилогу 1), а односе се на:

1. познавање процедура израчунавања вредности израза са операцијама истог или различитог приоритета,
2. реторичко и симболичко изражавање закона структуре природних бројева и шире, реторичко и симболичко изражавање својстава операција скупа природних бројева,
3. третман промењиве у алгебарским записима.

Ефикасност Модела проверили смо кроз оспособљеност ученика да примене својства операција:

4. као олакшица у рачуну израчунавањем вредности израза са операцијама истог или различитог приоритета,
5. у процесу математичког моделовања,
6. у писању еквивалентих форми израза.

9.2. Методе, технике и инструменти истраживања

Истраживање је из области методике наставе математике и емпиријског је карактера. Коришћен је метод експеримента са две експерименталне и једном контролном групом. У експерименталним групама подучавање по Моделу 1 и Моделу 2 спровео је аутор, намерним изазивањем појава које се испитују, док у контролној групи није било утицаја експерименталног програма.

За потребе истраживања конструисани су следећи инструменти: иницијални тест знања за уједначавање група и анализирање степена познавања структуре природних бројева, и завршни тест знања за анализу ефикасности Модела који се испитују. Структура и садржај тестова биће представљени даље у тексту.

9.3. Узорак у истраживању

Иницијално тестирање је обухватило 8 одељења четвртог разреда основних школа „Краљ Петар Први", „Михаило Петровић Алас" и „Старина Новак" из Београда. Иако су са територија различитих општина, школе су у међусобно непосредној близини. Један од разлога одабира ових школа био је коришћење истог уџбеника за математику. Коришћени уџбеник је уџбеник Математка 4 издавача „Едука".

Тестирању је приступило укупно 184 ученика. На основу резултата тестирања одабрано је 6 одељења (148 ученика) која су подељена у три уједначене групе – експерименталну 1 (Е1), експерименталну 2 (Е2) и контролну групу (К). Експерименталну 1 групу сачињавало је једно одељење из школе „Краљ Петар Први" и једно одељење школе „Михаило Петровић Алас". Експерименталну 2 групу чинило је једно одељење школе „Михаило Петровић Алас" и једно одељење школе „Старина Новак", док су два одељења школе „Старина Новак" чинила контролну групу. Уједначавање група урађено је помоћу иницијалног тестирања ученика, које ће бити описано у поглављу „Иницијално тестирање". Бројеви ученика по групама и школе којима су ученици припадали приказани су табелом (Табела 2).

Табела 2. Број ученика по групама и школама које су учествовале у истраживању

Група	ОШ „Краљ Петар Први“	ОШ „Михаило Петровић Алас“	ОШ „Старина Новак“	Укупно
Е1 (N)	24	31	0	55
Е2 (N)	0	22	25	47
К (N)	0	0	46	46
Укупно (N)	24	53	71	148

9.4. Начин статистичке обраде података

У иницијалном тестирању коришћена је једнофакторска анализа варијансе (ANOVA) једне независне промењиве (резултат на иницијалном тесту) која је подељена на више група. За пост-хок анализу, тј. проверавање да ли постоји значајна разлика по паровима група, коришћен је Шефеов (Scheffe) пост-хок критеријум за значајност. Вредност употребљавана при одлуци о статистичкој значајности је 0.05.

За анализу података, такође је коришћена дескриптивна статистика, као и Фи коефицијент као мера повезаности између две бинарне варијабле.

Како смо у завршном тестирању желели да разматрамо начине на који су урађени задаци, користили смо статистичке поступке предвиђене за поређење неуређених категоричких варијабли. За поређење међу групама Е1, Е2 и К у завршном тестирању, коришћен је Хи-квадрат тест хомогености дистрибуција (Пирсонов тест хомогеност дистрибуција) (Todorović, 2008; Marascuilo & Serlin, 1995). У случајевима када предуслов за коришћење овог теста није био испуњен (да највише 20% ћелија у табелама које су креиране овим тестирањем има очекивану вредност мању од 5), употребљен је Фишер-Фриман-Халтонов тест (Fisher-Freeman-Halton), који је екстензија Фишеровог егзактног теста за табеле веће од 2×2 (McDonald, 2014).

У случају оба теста (и Хи-квадрат и Фишер-Фриман-Халтон) у пост-хок анализи поређене су само Е1 и Е2 група, јер нам је ово поређење било значајно за интерпретацију. За статистичку значајност коришћена је Бонферонијева корекција (Bonferroni-correction), која подразумева да је $p < \frac{0.05}{k}$ где је k број могућих поређења (у нашем случају k=3) (McDonald, 2014).

У случајевима када је употребљен Хи-квадрат тест, пост-хок процедура је подразумевала и израчунавање резидуала и додељене p вредности за сваку ћелију табеле контингенција, која за статистички значајан резултат треба да буде мања од $\frac{0.05}{i \cdot j}$ (i – број категорија, j– број група) (Beasley&Schumacker, 1995).

За статистичку обраду података коришћен је програм SPSS.

9.5. Ток истраживања

Истраживање је обухватило више етапа:

1. Креирање два модела систематизовања знања о алгебарским изразима;
2. Иницијално тестирање;
3. Уједначавање група које ће учествовати у истраживању;
4. Реализацију наставних часова по Моделу 1 и Моделу 2;
5. Завршно тестирање.

Све етапе су реализоване током априла и маја 2015. године, осим прве која је претходила реализацији осталих.

Како је наведено у „Начину остваривања програма", који је био актуелан у тренутку спровођења истраживања (Прилог 1), ученици би на крају четвртог разреда требало да у потпуности савладају скуп природних бројева и својства операција тог скупа. Из тог разлога, спровели смо експеримент на крају четвртог разреда, када је у школама завршено градиво везано за ову тему. Програм у петом разреду није подразумевао даље бављење својствима операција у скупу природних бројева, док у шестом разреду програм предвиђа увођење скупа целих бројева. Дакле, у тренутку спровођења експерименталних Модела, ученици су формирали скуп природних бројева, знају својства операција као и везе између операција у том скупу. Својства операција ученици су изучавали од првог разреда процедурално, а од трећег симболички. Слово као математички знак ученици су упознали у другом разреду, а од трећег разреда су употребљавали слова у сврху изражавања својства операција.

Узимајући у обзир теоријски оквир изложен у првом делу рада и релевантне делове наставног програма, развили смо два модела систематизовања знања о алгебарским изразима и законима.

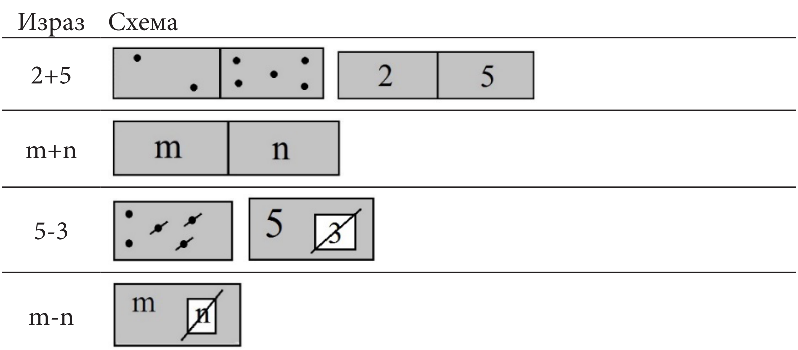
9.5.1. Основне карактеристике Модела 1 и Модела 2

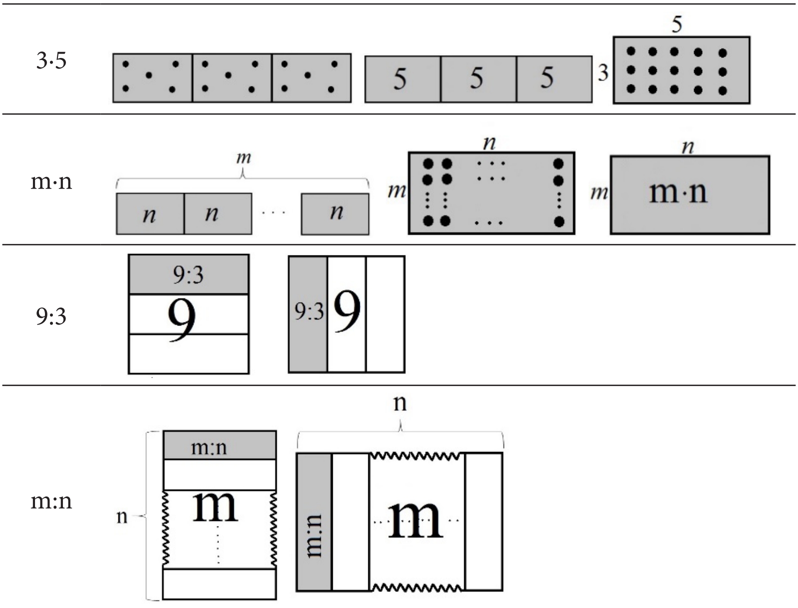
Модели су базирани на два различита теоријска приступа. У Моделу 1 користе се словни изрази и схематско представљање израза и својства операција, док се у Моделу 2 користе бројевни изрази и процедурално и реторичко представљање израза и својства операција.

У оба модела, након уводног дела часова који ће бити представљен даље у тексту, задатак ученика је био да заједно са експериментатором пишу еквивалентне изразе у два различита контекста. Први контекст у оба модела подразумевао је текстуалне задатке (реалистичке ситуације) као подршку семантичком разумевању сваког од еквивалентних израза. Други контекст био је писање еквивалентних израза помоћу схема у Моделу 1, односно помоћу раније научених реторичких формулација правила у Моделу 2. Подучавање у оба модела вршено је кроз одабране математичке вежбе (задатке) који имају значајну улогу у настави математике (Đokić, 2013).

Модел 1. У овом моделу, својства операција обнављана су користећи словне изразе и схематско представљање појмова као носиоца значења. У словним изразима коришћени су и бројеви, да би се текстуални задаци и изрази ученицима делимично представили у контексту који је већ познат. На Слици 3 приказане су схеме које су коришћене за представљање рачунских операција. Да би увели сваку од схема полазили смо од бројевних израза. За сваку операцију постојало је више схема, а при њиховом увођењу представљене су прво схеме за које смо сматрали да су мањег степена апстрактности (редослед је приказан сликом). Ограничења у извођењу операција која су била присутна због тога што су у изразима разматране особине скупа N, дискутована су са ученицима.

Како су у ранијој литератури препозната два типа аргументације на часовима математике у првом циклусу образовања, „дијаграмска“ и „наративна“ (Krummheuer, 2013), аргументација коришћена у овом моделу ближа је дијаграмској. Она укључује употребу цртежа, дијаграма, графичких симбола и формула, а сам термин дијаграм схваћен је (по Пирсовој номенклатури), као материјал или графичка репрезентација која је креирана у оквиру конвенционалног система правила која се односе на продукцију, коришћење и трансформацију дијаграма. Пошто једна аргументација не искључује другу, у овом моделу делом је коришћена и наративна аргументација.



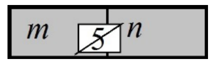
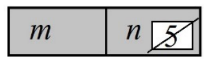
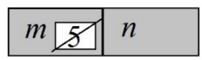
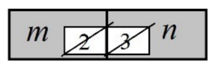
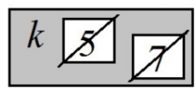
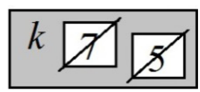
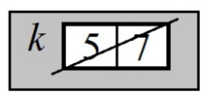


Слика 3. Схеме коришћене у Моделу 1
за представљање рачунских операција

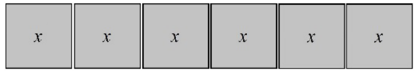
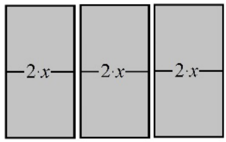
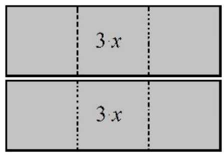
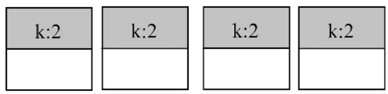
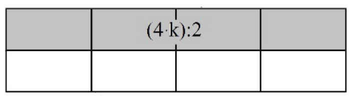
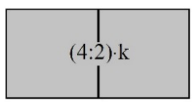
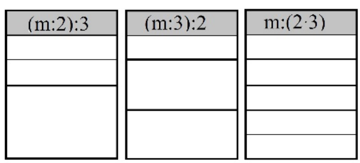
Као што је раније напоменуто, ученици су приступили систематизацији својстава рачунских операција најпре кроз текстуалне задатке. При решавању задатака била је понуђена најпогоднија схема.

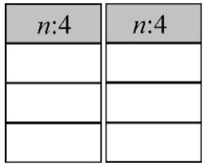
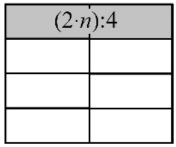
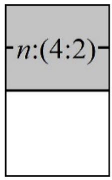
Текстови задатака, изрази и схеме коришћене на часовима представљени су у табелама (Табела 3, Табела 4, Табела 5). Треба напоменути да је цртање схеме укључивало је и временску компоненту, како би се разликовали изрази нпр. (k-5)-7 и (k-7)-5. При цртању схеме за израз (k-5)-7, прво је нацртана схема за израз (k-5), а потом је направљена схема (k-5)-7, док је код израза (k-7)-5 прво направљена схема за k-7.

Табела 3. Текстуални задаци, еквивалентни изрази и схеме коришћене у Моделу 1. Изрази са сабирањем и одузимањем

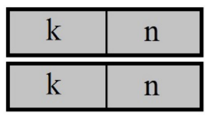
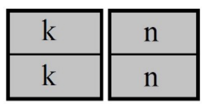
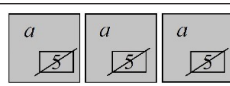
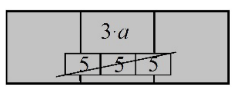
Текст	Изрази	Схеме
Милан је добио неколико свезака на линије, 5 на квадратиће и 2 празне свеске. Колико је укупно свезака добио Милан?	(a+5)+2	
	a+(5+2)	
	(a+2)+5	
Продавачица је имала две кутије са оловкама. У једној је било m оловака, а у другој n оловака. Продала је 5 оловака. Колико јој је оловака остало? (У свакој кутији има више од 5 оловака.)	(m+n)-5	
	m+(n-5)	
	(m-5)+n	
	(m-2)+(n-3)	
Андријана је имала пуну кутију жвака, из које је узела 5 за један џеп и 7 за други. Колико јој је жвака остало у кутији?	(k-5)-7	
	(k-7)-5	
	k-(5+7)	

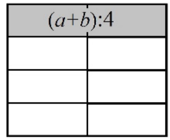
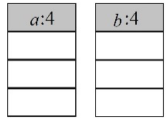
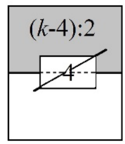
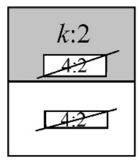
Табела 4. Текстуални задаци, еквивалентни изрази и схеме коришћене у Моделу 1. Изрази са множењем и дељењем

Текст	Изрази	Схеме
Михаило је имао три кутијице са две преграде. У свакој прегради је имао исти број кликера. Колико је Михаило укупно имао кликера?	$(3{\cdot}2){\cdot}x$	
	$3{\cdot}(2{\cdot}x)$	
	$2{\cdot}(3{\cdot}x)$	
Хана је имала четири једнака паковања са k карата. Поделила их је на две једнаке гомиле. Колико карата има на свакој гомили?	4·(k:2)	
	(4·k):2	
	(4:2)·k	
Филип је секао торту од неколико килограма. Поделио ју је на парчиће тако што ју је поделио на два дела, па на три дела. Колике масе је свако парче торте? Да ли је могао торту да подели на још неки начин на исти број делова?	(m:2):3 (m:3):2 m:(2·3)	

Рада је купила сличице које је подједнако поделила у 4 кесице. Две кесице је дала другарици. Колико је сличица добила другарица?	2·(n:4)	
	(2·n):4	
	n:(4:2)	

Табела 5. Текстуални задаци, еквивалентни изрази и схеме коришћене у Моделу 1. Изрази са операцијама различитог приоритета

Текст	Изрази	Схеме
Јоца на два места има по k црних и n зелених бојица. Колико укупно бојица има Јоца?	2·(k+n)	
	2·k+2·n	
Анђела је имала три једнаке кутије са украсима. Из сваке је извадила 5 украса. Колико је украса остало у кутијама?	3·(*a*-5)	
	3·*a*-3·5	

У рибарници се у једној кутији налазило a риба а у другој b риба. Продавац је поделио рибе из обе кутије на четири места. Колико је риба било на сваком месту? (Претпоставимо да је број риба у свакој кутији дељив са 4).	$(a+b):4$ $a:4+b:4$	 
Од m сијалица узете су 4, па су прерасподељене у 2 кутије. Колико има сијалица у свакој кутији? (Претпоставимо да је број сијалица дељив са 2).	$(k\text{-}4):2$ $k:2\text{-}4:2$	 

Модел 2. У овом моделу својства операција обнављана су коришћењем бројевних израза и аргументације засноване на особинама операција које су ученици учили у ранијем математичком образовању. Коришћена аргументација била је наративна (Krummheuer, 2013). Својства операција (са називима у дидактички прилагођеној форми) приказана су табелом (Табела 6). Задаци коришћени у Моделу 2 представљени су такође у табелама (Табела 7, Табела 8, Табела 9). И у овом моделу дискутована су ограничења која су присутна због тога што су операције дефинисане у скупу N.

Табела 6. Коришћена својства операција и аргументација у Моделу 2

Еквивалентне форме израза	Својства операција	Аргументација
(a+b)+c, a+(b+c), (a+c)+b, ...	Здруживање сабирака, Замена места сабирака	Збир ће остати непромењен без обзира на редослед здруживања сабирака.
(a+b)-c, (a-c)+b, a+(b-c)	Зависност збира од промене сабирака	Збир се може смањити за вредност c тако што се први сабирак смањи за вредност c или се други сабирак смањи за вредност c.
(a-b)+c, (a+c)-b, a-(b-c)	Зависност разлике од промене умањеника и умањиоца	Разлика се може увећати за вредност c тако што се умањеник повећа за вредност c или се умањилац смањи за вредност c.
(a-b)-c, (a-c)-b, a-(b+c)	Зависност разлике од промене умањеника и умањиоца	Разлика се може смањити за вредност c тако што се умањеник смањи за вредност c или се умањилац повећа за вредност c.
(a·b)·c, a·(b·c), (a·c)·b,...	Здурживање чинилаца, Замена места чинилаца	Производ ће остати непромењен без обзира на редослед здруживања чинилаца.
(a·b):c, (a:c)·b, a·(b:c)	Зависност производа од промене чинилаца	Производ се може смањити c пута тако што се први чинилац смањи c пута или се други чинилац смањи c пута.
(a:b)·c, (a·c):b, a:(b:c)	Зависност количника од промене дељеника и делиоца	Количник се може повећати c пута тако што се дељеник повећа c пута или се делилац смањи c пута.

(a:b):c, (a:c):b, a:(b·c)	Зависност количника од промене дељеника и делиоца	Количник се може смањити с пута тако што се дељеник смањи с пута или се делилац повећа с пута.
(a+b)·c a·c+b·c	Множење збира бројем	Збир се може помножити бројем тако што се сваки сабирак помножи бројем и добијени производи саберу.
(a-b)·c a·c-b·c	Множење разлике бројем	Разлика се може помножити бројем тако што се умањеник и умањилац помноже бројем и добијени производи одузму.
(a+b):c a:c+b:c	Дељење збира бројем	Збир се може поделити бројем тако што се сваки сабирак подели бројем и добијени количници саберу.
(a-b):c a:c-b:c	Дељење разлике бројем	Разлика се може поделити бројем тако што се умањеник и умањилац поделе бројем и добијени количници одузму.

Табела 7. Текстуални задаци, еквивалентни изрази и својства операција коришћена за аргументацију у Моделу 2. Изрази са сабирањем и одузимањем

Текст	Изрази	Својство операција
У првом вагону воза било је 80 путника, у другом 70, а у трећем 50. Колико је укупно било путника у возу?	(80+70)+50 80+(70+50) (80+50)+70	Здруживање сабирака, Замена места сабирака
У продавници љубимаца било је два кавеза. У једном је било 18, а у другом 14 папагаја. Продато је 6 папагаја. Колико је папагаја остало у продавници?	(18+14)-6 (18-6)-14 18+(14-6)	Зависност збира од промене сабирака

Љубица је у куповину кренула са 10000 динара, на фармерке је потрошила 2500 а на патике 4500 динара. Колико је новца Љубици остало после куповине?	(10000-2500)-4500 (10000-4500)-2500 10000-(4500+2500)	Зависност разлике од промене умањеника и умањиоца
У једном расаду било је 1250 садница. Једног дана је купљено 80, а засађено 150 садница. Колико је садница сада у расаду?	(1250-80)+150 (1250+150)-80 1250+(150-80)	Зависност збира од промене сабирака

Табела 8. Текстуални задаци, еквивалентни изрази и својства операција коришћена за аргументацију у Моделу 2. Изрази са множењем и дељењем

Текст	Изрази	Својство операција
У једном граду се налазе три аеродрома. Сваки од њих дневно организује 50 летова. Колико укупно у граду буде летова за недељу дана?	(3·7) ·50 3·(7·50) 7·(3·50)	Здруживање чинилаца, Замена места чинилаца
На једној фарми налазе се 4 штале са 20 оваца. Фармер жели да премести овце на два пашњака, тако да на сваком буде исти број оваца. Колико оваца има на сваком пашњаку?	(4·20):2 (4:2)·20 4·(20:2)	Зависност производа од промене чинилаца
Свеске су у књижару стигле у пакетима од по 100 комада. Да би се лакше снашао при продаји, продавац је поделио сваки од пакета на 4 кутије. Колико је свезака продато, ако је продавац продао 2 кутије?	(100:4) ·2 (100·2):4 100·(4:2)	Зависност количника од промене дељеника и делиоца
Пекар је замесио тесто за хлеб масе 1800g. Размишљао је о томе како да га подели на шест лоптица једнаке масе, од којих би направио хлеб. На које начине је пекар могао да подели тесто? Колике је масе сваки хлеб?	(1800:2):3 (1800:3):2 1800:(2·3)	Зависност количника од промене дељеника и делиоца

Табела 9. Текстуални задаци, еквивалентни изрази и својства операција коришћена за аргументацију у Моделу 2. Изрази са операцијама различитог приоритета

Текст	Изрази	Својство операција
У једној рибари је било две кутије по 80 пастрмки и две кутије по 100 скуша. Колико је укупно ових риба било у рибари?	2·80+2·100 2·(80+100)	Множење збира бројем
Анђела је имала три једнаке кутије са 120 украса. Из сваке је извадила 5 украса. Колико је украса остало у кутијама?	3·(120-5) 3·120-3·5	Множење разлике бројем
У магацину се у једној кутији налазило 328 kg воћа, а у другој 360 kg. Продавац је поделио сво воће подједнако у 4 гајбе. Колико је килограма воћа било у свакој гајби?	(328+360):4 328:4+360:4	Дељење збира бројем
Од 620 листова папира треба узети 10 и поделити их на две гомиле. Колико ће листова папира бити на свакој гомили?	(620-10):2 620:2-10:2	Дељење разлике бројем

9.5.2. Тестирања и уједначавање група

Иницијални тест смо конструисали у две сврхе. Прва је уједначавање гупа које ће учествовати у истраживању, а друга је прикупљање података о разумевању промењивих и својстава операција код ученика. Иницијално тестирање обухватило је проверу знања ученика о аритметичким правилима и изразима. Обухваћени су следећи аспекти знања које смо сматрали релевантним за истраживање:

1. реторичка формулација аритметичких правила и својстава операција;

2. симболичка формулација аритметичких правила и својстава операција;
3. рачунање вредности израза са операцијама истог или различитог приоритета, употреба заграда у рачунању вредности израза;
4. оцењивање тачности процедурално израженог аритметичког правила (оцењивање се може извршити и на основу једнакости вредности израза).

Коришћени задаци дати су у прилогу (Прилог 2). У оквиру иницијалног тестирања, ученицима је постављен и задатак којим се испитује разумевање промењиве (Прилог 3).

Метријске карактеристике испитиване су на узорку од 148 ученика. За ваљаност емпиријских варијабли користили смо логичко-емпиријске критеријуме (Todorović, 2008). Валидација теста подразумевала је проверавање да ли се тест слаже са захтевима наставног програма и да ли одговара садржајима на које се односи. Консултовано је мишљење истакнутих стручњака из ове области (проф. др Александра Липковског, проф. др Мирка Дејића и проф. др Маријане Зељић).

За мерење поузданости теста је искоришћен Кронбахов алфа коефицијент, који одређује интерну конзистенцију (Reynaldo & Santos, 1999). Над 30 ставки (бодованих са 0, 0.5 или 1 поеном) Кронбахов алфа коефицијент износи 0.825, што указује на добру поузданост, будући да су вредности веће од 0.7 прихватљиви коефицијенти поузданости (Reynaldo & Santos, 1999).

Шапиро-Вилковим тестом (Shapiro-Wilk) испитали смо да ли расподела значајно одступа од нормалне расподеле (Табела 10). Како је значајност већа од 0.05, нема значајног одступања од нормалне расподеле.

Табела 10. Резултати Шапиро-Вилковог теста одступања од нормалне расподеле

N	Вредност	Значајност
148	0.984	0.085

Дескриптивна статистика приказана је у Табели 11. Максималан број поена на иницијалном тесту био је 30.

Табела 11. Дескриптивна статистика иницијалног тестирања

	N	Минимум	Максимум	Узорачка средина	Стандардна девијација
Е1	148	7	30	19.75	4.99

Детаљна анализа задатака и постигнућа на сваком задатку биће представљена касније. Анализом варијансе, проверено је да ли постоје разлике између Е1, Е2 и К групе. Тест је показао да не постоји значајна разлика међу групама на иницијалном тесту: $F(2, 148)=0.327$ $p=0.722$. Пост-хок анализом, коришћењем Шефеовог пост-хок критеријума за значајност, показано је да нема значајних разлика ни по паровима група што је приказано табелом (Табела 12).

Табела 12. Шефеов пост-хок критеријум у анализи варијансе

групе		Значајност
Е1	Е2	0.727
Е1	К	0.968
Е2	К	0.874

Шапиро-Вилковим тестом испитали смо да ли расподела значајно одступа од нормалне расподеле, узевши у обзир добијене групе. Како је значајност већа од 0.05, нема значајног одступања од нормалне расподеле (Табела 13).

Табела 13. Резултати Шапиро-Вилковог теста (Shapiro-Wilk) одступања од нормалне расподеле у групама Е1, Е2 и К.

	N	Вредност	Значајност
Е1	55	0.965	0.115
Е2	47	0.973	0.355
К	46	0.966	0.188

Дескриптивна статистика за сваку од група приказана је Табелом 14.

Табела 14. Дескриптивна статистика иницијалног тестирања за групе Е1, Е2 и К.

	N	Минимум	Максимум	Узорачка средина	Стандардна девијација
Е1	55	7	28	19.42	4.81
Е2	47	9	30	20.21	5.02
К	46	9	29	19.67	5.23

Наставни часови по Моделу 1 и Моделу 2 реализовали су се исте седмице у мају 2015. године. Оба модела реализовао је аутор. Група Е1 подучавана је по Моделу 1, док је група Е2 подучавана по Моделу 2. Ученици у групи К нису подвргнути експерименталном програму, радили су текстуалне задатке из уџбеника са својим учитељима. У оба експериментална модела уводни део наставних часова се односио на обнављање правила и увеђење схема које су потребне за задатке рађене на том часу. Затим су ученици са експериментатором колективно решавали задатке.

Пошто смо желели да анализирамо различите аспекте знања ученика, задаци завршног теста подељени су у три групе:

1. задатке примене аритметичких правила као „пречице“ у рачуну;
2. писање еквивалентних израза (бројевних и словних) на основу текстуалног задатка – реалистичне ситуације;

3. писање еквивалентних израза (бројевних и словних) датом изразу.

Завршни тест није коришћен у целини за оцену знања ученика, већ је коришћен за квалитативну и квантитативну анализу постигнућа ученика на сваком задатку. Стога, нећемо се бавити метријским карактеристикама овог теста, већ ћемо у наредном поглављу детаљно анализирати постигнуће ученика на свакој групи задатака. Задаци коришћени на завршном тесту дати су у Прилогу 4.

10. Анализа и интерпретација резултата истраживања

Ово поглавље ће садржати анализу постигнућа ученика на задацима који испитују разумевање структуре скупа природних бројева и разумевање променљивих код ученика (задаци са иницијалог теста), као и анализу постигнућа ученика на задацима који ће се користити за поређење креираних модела подучавања (задаци са завршног теста). Добијени резултати биће интерпретирани као одговор на истраживачка питања узимајући у обзир теоријски оквир истраживања и наставне програме у Републици Србији који су актуелни и који су били актуелни у тренутку спровођења експеримента (Прилог 1).

За сваки од задатака чије постигнуће анализирамо, дефинисане су категорије одговора ученика, а за статистичку обраду података коришћена је дескриптивна статистика, као и статистички поступци описани у поглављу „Начин статистичке обраде података". Задаци у оквиру група неће бити анализирани редом којим су били дати, већ према врсти операција које су употребљене у изразима.

10.1. Разумевање аритметичких правила код ученика

Први задатак истраживања односио се на испитивање степена разумевања алгебарских закона структуре природних бројева кроз изражавање генерализација и формализација аритметичких правила и својстава операција. Колико је генерализација сматрана важним процесом говоре бројни радови (Skemp, 1987; Blanton & Kaput, 2011; Radford, 2001; Mason 1996; Warren & Cooper, 2001; Kaput, 1995). Процес генерализације изучаван је са различитих аспеката – употребом вишеструких репрезентација (Dreyfus, 1991), изучавањем правилности (Cai et al., 2011; Watanabe, 2011; Kieran, 2004; Zeljić, 2015), са аспекта геометрије (Radford, 2001), реторичких генерализација (Carpenter & Levi, 2000; Warren & Cooper, 2001), симболичких генерализација (Cerulli & Mariotti, 2001; Hercovics & Linchevski, 1994; Carraher et al., 2001; Radford, 2011; Brizuela et al., 2015). У овом раду, одлучили смо да испитамо колико су ученици после првог циклуса образовања оспособљени за прављење реторичких и симболичких генерализација, за које сматрамо да су једни од најважнијих носиоца математичке комуникације у изучавању алгебре. Стога најпре представљамо најинтересантније резултате иницијалног теста, који су укључивали реторичку и симболичку формулацију аритметичких правила и својстава операција, а детаљни приказ постигнућа и врста грешака на сваком задатку могу се пронаћи у докторској дисертацији (Дабић Боричић, 2019).

Од аритметичких правила, од ученика је тражено да формулишу правила замене места сабирака, здруживање чинилаца и множење збира бројем, док је од својстава испитивана зависност збира од промене сабирка, множење збира бројем и сталност разлике. Питања су била отвореног типа, а начин на који су формулисана се може видети у Прилогу 2. Постигнуће ученика на задацима реторичке и симболичке формулације аритметичких правила и својстава операција представљено је у Табели 15.

Табела 15. Проценат тачних одговора у реторичкој и симболичкој формулацији, мере повезаности између променљивих

	рет. форма	сим. форма	φ-коеф.	значајност
1.а Замена места сабирака	98.6%	86.5%	.296	.000
1.б Здруживање чинилаца	35.8%	43.2%	.628	.000
1.в Множење збира бројем	10.8%	8.8%	.584	.000
2.а Зависност збира од промене једног сабирка	81.1%	75.7%	.369	.000
2.б Зависност збира од промене оба сабирка	64.9%	70.3%	.574	.000
3.в Множење збира бројем	20.3%	13.5%	.319	.000
3.г Сталност разлике	58.8%	52.7%	.691	.000
3.д Зависност разлике од промене умањеника и умањиоца	41.2%	43.2%	.848	.000

На основу вредности које су дате у Табели 15, може се уочити да успешност у генерализацији зависи од својства операције односно аритметичког правила које се генерализује. Наизглед, разлике у успешности су велике, али детаљном анализом резултата уочава се да су ученици дошли до математички правилних генерализација, само што оне нису биле одговор на тражено питање. На пример, при формулисању правила здруживања чинилаца, око 10% ученика је покушало да формулише правило „зависност производа од промене чинилаца" у реторичкој форми, али је само један ученик успео да формулише ово правило у симболичкој форми. На питање здруживања чинилаца 45.3% одговорило је правилном математичком генерализацијом у реторичкој форми (не нужно траженим правилом), а 46.6% правилном генерализацијом у симболичкој форми. Слично, у изражавању дистрибутивног закона, правилне генерализације изразило је 48.5% ученика у реторичкој форми, а 44.6% у симболичкој форми.

Можемо закључити да се вредности процената ученика који су дали тачан одговор у симболичкој и реторичкој формулацији не разликују у знатној мери. Међутим, за одговор на питање да ли постоји повезаност између реторичке и симболичке формулације правила, морамо у обзир узети коефицијент који је такође дат у табели (Табела 15). Ако размотримо Коенов критеријум вредности коефицијента φ према којем се вредност 0.1 сматра за слабу, 0.3 за средњу, а 0.5 за јаку повезаност (Pallant, 2009), можемо рећи да постоји средња до јака повезаност између реторичке и симболичке формулације. То значи да ученици који су били успешни у реторичкој формулацији правила јесу већином успешни и у симболичкој формулацији правила, и обрнуто. Ради илустрације, размотрићемо два случаја – случај где је повезаност најслабија (формулација правила замене места сабирака) и случај где је ова повезаност најјача (формулација зависности разлике од промене умањеника и умањиоца). У формулацији правила замене места сабирака видимо да су ученици који су неуспешни у реторичкој формулацији без изузетка неуспешни и у симболичкој (Табела 16). Треба, наравно, имати у виду да су у питању само 2 ученика. Са друге стране, од ученика који су успешни у реторичкој формулацији, 87.7% је успешно и у симболичкој, док је преосталих 12.3% неуспешно у симболичкој формулацији. Стога, припадајући коефицијент (φ=0.369, Табела 15) је релативно низак.

Табела 16. Успешност ученика у реторичкој и симболичкој формулацији правила замене места сабирака.

Реторичка формулација	симболичка формулација нетачна	тачна	укупно
нетачна N	2	0	2
%	100.0	0.0	100.0
тачна N	18	128	146
%	12.3	87.7	100.0
укупно N	20	128	148
%	13.5	86.5	100.0

У табели која описује успешност ученика у формулацији зависности разлике од промене умањеника и умањиоца (Табела 17), можемо видети да од укупног броја ученика који нису успешни у реторичкој формулацији, 92% није успешно ни у симболичкој, док од укупног броја ученика који су успешни у реторичкој формулацији, 93.4% ученика је успешно и у симболичкој. Стога, постоји велика повезаност између ова два типа формулације у овом правилу која се огледа и у чињеници да је φ=0.848 коефицијент висок (Табела 15).

Табела 17. Успешност ученика у реторичкој и симболичкој формулацији зависности разлике од промене умањеника и умањиоца.

Реторичка	симболичка формулација		
формулација	нетачна	тачна	укупно
нетачна N	80	7	87
%	92.0	8.0	100.0
тачна N	4	57	61
%	6.6	93.4	100.0
укупно N	84	64	148
%	56.8	43.2	100.0

Податак који је интересантан јесте постојање скоро константне разлике између реторичке и симболичке формулације правила (Табела 18). То значи да је ова разлика независна од комплексности правила које се формулише. Пример у којем је начињена највећа разлика (1.б) јесте пример у којем су ученици грешком покушавали да формулишу правило зависности производа од промене чиниоца, које нису успевали да формулишу симболички.

Табела 18. Разлика између успешности у формулисању закона односно својства у реторичкој и симболичкој форми

	1.а	1.б	1.в	3.а	3.б	3.в	3.г	3.д
рет. форма	0.0	12.8	30.4	2.7	4.7	6.1	8.8	12.8
сим. форма	4.1	24.3	36.5	8.8	10.8	12.2	14.9	16.2
разлика	4.1	11.5	6.1	6.1	6.1	6.1	6.1	3.4

Резултат да успешност у реторичкој и симболичкој формулацији правила зависи од операције и својства операције које се формулише није изненађујући. Многа истраживања указују да постоје веће когнитивне потешкоће у извођењу операција множења и дељења (Greer, 1992; Barmby et al., 2009; Dabić & Milinković, 2015) и одузимања (Skemp, 1993), него сабирања. Такође, ранија истраживања упућују на велику важност примене дистрибутивног закона, али и на значајне потешкоће које ученици имају у његовом разумевању (Ding & Lee, 2014). Стога, није изненађујуће да је успешност ученика у генерализацији особина операција (када изузмемо дистрибутивни закон) у реторичкој форми у интервалу од 45% до 99%, а у реторичкој форми од 46% до 87% (Табела 15).

Протумачићемо овај резултат и са становишта Наставног програма РС који је био актуелан у тренутку извођења истраживања. Наглашавање важности разумевања својстава операција присутно је у сваком разреду првог цикулса образовања, што говори цитат који је у сва три документа: „Програм предвиђа прво упознавање својстава операција, а затим, на тој основи, објашњавање начина рачунања“ (НП1–2, НП3, НП4). Стога, добијени резултати, где је око 45% ученика тачно генерализовало неко својство, сматрамо слабим, посебно због тога што се у Наставном програму РС за пети разред више не помињу својства операција у скупу N осим дељивости (НП5). Даље, изражавање својстава операција помоћу слова и примена ових својстава за рационалније рачунање наглашава се у трећем и четвртом разреду (НП3, НП4), а примена својстава за трансформисање израза у четвртом разреду (НП4). Стога, такође не сматрамо добрим резултате симболичких генерализација, где је око 45% ученика извело тачну генерализацију. Сматрамо да је за остатак ученика, који нису достигли нивое реторичких и симболичких генерализација у скупу N, од почетка отежан приступ изучавању структуре скупова Q, Z и садржаја алгебре.

Будући да се наставни програм променио од извођења овог експеримента, остаје отворено питање је да ли ће исходи и смернице за спровођење новог наставног програма утицати на успешност ученика у изражавању генерализација, а тиме и на њихову већу спремност за изучавање алгебарских садржаја. У новом програму, правила замене места и здруживања сабирака се уводе од првог разреда због примене у рачуну, а за илустрацију се користе очигледна средства и визуелни приказ (ННП1). Слично је са заменом места и здруживањем чинилаца који се уводе од другог разреда (ННП2). У оба разреда, по један исход је везан за аритметичка правила, а то је исход у којем се помиње примена замене места и здруживања сабирака односно чинилаца ради лакшег рачунања. У трећем разреду нема исхода директно везаних за аритметичка правила, док је у четвртом разреду један исход везан за примену својства рачунских операција (ННП3, ННП4). У деловима програма у вези са остваривањем наставе и учења, помиње се симболичко и реторичко утврђивање својства операција (четврти разред), али и значај аритметичких правила у процени вредности израза и математичком моделовању (трећи и четврти разред).

Из претходног произилази да су смернице у новим наставним програмима везане за генерализације сличне као и у претходним програмима, али да се на различите начине указује на значај генерализација у настави математике. У „старим" програмима значајност аритметичких правила и генерализација се огледа кроз већи број оперативних задатака наспрам мањег броја исхода у „новим" наставним програмима. Са друге стране, „нови" наставни програми садрже разрађенији и продубљенији осврт на генерализације у одељку „Начин остваривања програма", као и указивање на могућност развијања генерализација при процењивању, моделовању, изучавању функционалних зависности, изражавања правила у низовима. Требало би испитати да ли су овакве промене исувише суптилне да би изазвале неку врсту промене у начину извођења наставе математике, која би осим учења процедура рачунања, решавања једначина и сл., требало да има фокус на развијање генерализација, формализација и логичког мишљења.

У задацима у којима су ученици могли да покажу познавање процедура рачунања, можемо рећи да су добијени добри резултати. Други задатак иницијалног теста односио се на оцењивање тачности једнакости. Проценти ученика који су успешно успели да оцене једнакост представљени су у табели (Табела 19). Очекивано, ученици су најуспешније оценили правило здруживање сабирака, а најмање успешно су оценили правило одузимања збира од броја. Како је већину израчунавања могуће извршити без писменог рачунања, нисмо у могућности да закључимо да ли су ученици оцењивали тачност једнакости на основу аритметичких правила или усменог рачунања.

Табела 19. Проценат ученика који је био успешан у оцењивању једнакости

Једнакост	Успешност (%)
(142+23)+47=142+(23+47)	93.9
100-(15+2)=(100-15)-2	70.3
100-(15+2)=(100-15)+2	71.6
100:5=120:5-20:5	66.9
(183-20)+9=(183+9)-20	86.5
172·5+8·5=183·5	89.9

Последњи задатак иницијалног теста подразумевао је рачунање вредности израза. Коришћени изрази и проценти тачних процедура у израчунавању представљени су табелом (Табела 20). Под тачним процедурама рачунања сматрали смо и одговоре са рачунском грешком, али у којима је процедура рачунања тачна. Навешћемо само најзаступљеније грешке које су ученици правили, а детаљан приказ расподеле грешака се може наћи у докторској дисертацији (Дабић Боричић, 2019). У изразу б) 3·49+1 (Табела 20), највећи број грешака (22.3% од свих грешака) проузрокован непоштовањем приоритета операција, док су у изразу ђ) 728-99+11 у највећем броју случајева (39.2% од свих грешака) ученици „одвојили“ знак од броја, тј. рачунали вредност израза као вредност израза 728-(99+11). У изразу ж) 5·3+2·4·6, највећи број грешака (16.2%) подразумева да ученици поштују приоритет операција у првом кораку, док у следећем рачунају вредност датог израза као вредност израза (15+8)·6.

Табела 20. Проценат тачних процедура рачунања у задацима израчунавања вредности израза

	Израз	Успешност (%)
а)	9999+6758	97.4
б)	3·49+1	73.7
в)	(350+27)-(50+27)	91.2
г)	2·72-2·2	91.9
д)	346+100-46	98.0
ђ)	728-99+11	58.1
е)	7·8+7·8	96.6
ж)	5·3+2·4·6	73.6

Резултат да су ученици били успешни између 74% и 98% (Табела 20), сматрамо добрим, будући да су грешке одражавале непознавање структуре скупа N, а не непознавање процедура рачунања. Овде смо изоставили пример у којем је било успешно само 58% ученика, што је пример 728-99+11, у којем су бројеви „наводили“ на неправилан поступак рачунања (Linchevski & Livneh, 1999). Овакву грешку такође приписујемо непознавању структуре скупа N.

10.2. Разумевање употребе слова у математичким записима

Други истраживачки задатак се односи на употребу слова у математичким записима на крају првог циклуса образовања. Значајност ове теме описана је у многим радовима, а потешкоће при употреби слова у математичким записима су виђене као главне препреке у преласку са аритметике на алгебру. Последњих година, посебна важност се придаје откривању узраста у којем ученици могу разумети слово у математичком запису (Brizuela et al., 2015; Cerulli & Mariotti, 2001; Herscovics & Linchevski, 1994; Carraher et al, 2001; Radford, 2011). То је последица анализе која је открила да је пракса која је била присутна у САД-у (да се слово у математичке записе уводи после осам година рачуна у аритметици), допринела да за већину ученика алгебра буде несавладива препрека (Kilpatrick, 2011).

У Табели 21 приказан је проценат тачних одговора ученика на задатку који испитује разумевање слова, а у којем слово има улогу непознате и променљиве у генерализацији правила и неједнакостима (Прилог 3). Ученици су имали највише постигнуће на задатку где је слово било употребљено за непознату (пример б), што је било очекивано, док је нешто ниже постигнуће било на задатку у којем је слово употребљено у генерализацији правила (пример а) односно неједнакости (пример в). Међутим, да ученици не разумеју употребу слова у генерализацији, показано је примером г), где је само 43.2% ученика препознало генерализовану неједнакост. У том примеру, 26.4% ученика сматра да је та неједнакост тачна само за неке вредности слова, док 18.9% сматра да је неједнакост тачна само за n=0. Такође, само половина ученика је разумела употребу слова у једнакости која је представљена примером д), док је 35.1% сматрало да је та једнакост тачна само за k=27 i i=0.

Табела 21. Формулација, тачан одговор и проценат ученика који је тачно одговорио у задатку за испитивање разумевања променљиве

Формулација	Тачан одговор	Проценат тачних одговора
а) Једнакост $a \cdot 2 = 2 \cdot a$	Тачна је за било коју вредност слова a	78.4
б) Једнакост $r+117=165$	Тачна је само за $r = 48$	82.4
в) Неједнакост $m-25<76$	Тачна је само за неке вредности слова m	77.0
г) Неједнакост $n< n+1$	Тачна је за било коју вредност слова n	43.2
д) Једнакост $(k-27)+i=(k+i)-27$	Тачна је за било које вредности слова k и i $(k>27)$	50.0

Желели смо да испитамо који проценат ученика је у потпуности разумео појам променљиве, а под тим подразумевамо да може да схвати различите улоге које слово има у једнакостима и неједнакостима, и да препозна када се која улога слова користи. Свих 5 примера тачно је урадило само 20.9% ученика, а како се смањивао проценат тачних одговора ученика приказано је Табелом 22. Видимо да је укључење трећег примера драстично утицало на процент ученика који је урадио групу примера тачно. Трећи пример, у којем слово има улогу променљиве, 77% ученика урадило је тачно (Табела 21), али је сва три примера – први, други и трећи, у којима слова имају различите улоге, тачно урадило само 34.5% ученика (Табела 22). Ако испитамо разумевање на примерима а), б), в) и д), видећемо да је проценат ученика сличан, тј. 37.2% (Табела 22).

Табела 22. Број и проценат ученика који је дао тачне одговоре на свим примерима у групи примера, у задатку испитивања разумевања променљиве

Тачни одговори	Број ученика	%
На прва 2 примера	103	69.6
На прва 3 примера	92	62.2
На прва 4 примера	51	34.5
На примерима а), б) в) и д)	55	37.2
На свих 5 примера	31	20.9

Ови резултати указују да је само око 21% ученика показало је да је разумело употребу слова у математичким записима, што подразумева флексибилну употребу слова (Kuchemann, 1978). Око 62% разликује употребу слова као променљиве, непознате и генерализованог броја у изражавању својства операција (Табела 21, Табела 22).

У Наставним програмима РС који су били актуелни, препозната је важност употребе слова у првом циклусу образовања. Слово се уводи од II разреда, замењујући симболе за записивање непознатог броја (Прилог 1). Будући да у Програму постоји добра подршка за употребу словних записа (као непознате, промењљиве, за оцењивање вредности, у генерализацијама), ниску успешност ученика можемо приписати недовољној и несистематској употреби у уџбеницима (Дабић, 2018) и недовољној заступљености у наставном процесу. Нови наставни програми, чији су релевантни делови такође цитирани у Прилогу 1, слично као и са генерализацијама не доносе веће промене у вези са начином и временом увођења слова у математичким записима. Већи је фокус на решавање простих и сложених једначина и неједначина и математичком моделовању, а значај различите употребе слова у математичким записима види се у делу који описује начин остваривања програма, а не у исходима.

10.3. Поређење креираних модела подучавања

Последњи истраживачки задатак везан је за испитивање ефеката Модела употребљених за систематизацију знања о структури скупа природних бројева. Ефекти су процењивани мерењем постигнућа на задацима примене аритметичких правила у рачуну, примене правила при решавању текстуалних задатака (у процесу моделовања) и примене правила у писању еквивалентних израза.

Задатке смо, према редоследу којем ћемо их анализирати, објединили у Табели 23, док је сам тест дат у Прилогу 4. Овде ћемо представити главне резултате, а анализа успешности на сваком задатку може се наћи у докторској дисертацији (Дабић Боричић, 2019).

Табела 23. Задаци на завршном тесту

Задаци рачунања	Текстуални задаци	Еквивалентност израза
1.1 99 999+75666+1	2.1 Продавац је на пијацу донео сир за продају у две кофе. У једној је било 28kg, а у другој 32kg сира. Продао је 8 kg сира. Колико kg сира је остало продавцу за продају?	3.1 250 + 5 + 180
1.2 328+100-100	2.2 Маријана је у једном џепу имала m бомбона, а у другом n. Марини је дала 5 бомбона. Колико је бомбона остало Маријани?	3.2 250 – 5 + 150
1.3 6346+7588-346	2.3 У аутобусу се вози 60 путника. На станици је на предњим вратима изашло 12 а на задњим 22 путника. Колико је путника остало у аутобусу?	3.3 250 : 10 : 5
1.4 5199-500-500	2.4 У продавници кућних љубимаца налази се шест акваријума са по 120 рибица. Продавац жели те рибице да премести у три акваријума, тако да у сваком буде исти број. Колико ће рибица бити у сваком акваријуму?	3.4 a · b · c
1.5 58000:100:10	2.5 Петра је торту масе x килограма поделила на два једнака дела, па је сваки од преосталих делова поделила на још 4 једнаких делова. Колика је маса сваког тако добијеног парчета торте? Да ли је Петра могла на још неки начин да подели торту на исти број делова?	3.5 e - 5 - g
1.6 4 · 999 + 1	2.6 У књижари је било 10 једнаких пакета са по 100 свезака. Продавац је из сваког пакета узео по две свеске. Колико је укупно свезака остало у пакетима?	3.6 h · i : 2
1.7 201 · 301 – 201 · 1	2.7 Све поморанџе једне гајбе треба расподелити подједнако у 4 кесе, али да 8 поморанџи остане издвојено са стране. Колико ће се поморанџи бити у свакој кеси?	3.7 (7+8)·2
1.8 3 · 3 + 2 · 4 · 6		3.8 (a - b) : 2
		3.9 3 · a + 18 · a

10.3.1. Примена својстава структуре скупа природних бројева при израчунавању вредности израза

У задацима примене израчунавања вредности израза, тј. у задацима тзв. „пречица" или „олакшица" у рачуну, од ученика се тражило да израчунају вредност израза на њима најлакши начин, уз очекивање да ће увидети примену аритметичких правила и еквивалентних израза. Задаци су, ради прегледности резултата, груписани у задатке са изразима у којима су операције истог приоритета (Табела 24) и задатке са изразима у којима су операције различитог приоритета (Табела 25).

Табела 24. Изрази, тестови и статистичка значајност у задацима рачунања вредности израза (изрази са операцијама истог приоритета).

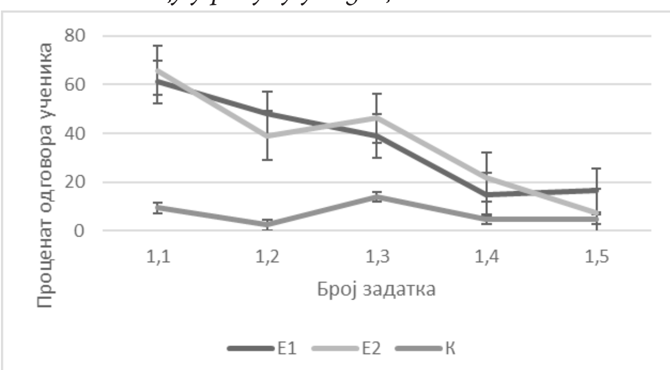
Редни број задатка	Израз	Тест (поређење међу Е1, Е2 и К) (N=138)	Значајност/ Хи-квадрат	Пост-хок тест (поређење међу Е1 и Е2) (n=95)	Значајност/ Хи-квадрат
1.1	99 999+75666+1	Фишер-Фриман-Халтон	$p = 0.000$	Фишер-Фриман-Халтон	$p = 0.532$
1.2	328+100-100	Хи-квадрат	$p = 0.000$/ $X^2(4,N)=$ 34.262	Хи-квадрат	$p = 0.011$/ $X^2(2, n)=$ 9.056
1.3	6346+7588-346	Фишер-Фриман-Халтон	$p = 0.004$	Фишер-Фриман-Халтон	$p = 0.317$
1.4	5999-500-500	Фишер-Фриман-Халтон	$p = 0.000$	Фишер-Фриман-Халтон	$p = 0.142$
1.5	58000:100:10	Фишер-Фриман-Халтон	$p = 0.025$	Фишер-Фриман-Халтон	$p = 0.083$

Табела 25. Изрази, тестови и статистичка значајност у задацима рачунања вредности израза (изрази са операцијама различитог приоритета)

Редни број задатка	Израз	Тест (поређење међу Е1, Е2 и К) (N=138)	Значајност	Пост-хок тест (поређење међу Е1 и Е2) (n=95)	Значајност
1.6	$4 \cdot 999 + 1$	Фишер-Фриман-Халтон	p = 0.000	Фишер-Фриман-Халтон	p = 0.815
1.7	$201 \cdot 301 - 201 \cdot 1$	Фишер-Фриман-Халтон	p = 0.027	Фишер-Фриман-Халтон	p = 1.000
1.8	$3 \cdot 3 + 2 \cdot 4 \cdot 6$	Фишер-Фриман-Халтон	p = 0.109		

У примени аритметичких правила као рачунских олакшица у свим изразима (1.1 – 1.5, Табела 24) постоји статистички значајна разлика између Е1, Е2 и К групе. Разлика је у томе што су ученици Е1 и Е2 групе статистички значајно више употребљавали правила као олакшицу у рачуну од ученика у К групи. Међутим, статистички значајне разлике између Е1 и Е2 групе углавном нема (са изузетком у примеру 1.2 где је већи број ученика написао само резултат, па нисмо у прилици да кажемо да ли јесте или није употребио пречицу у рачуну). Проценат ученика који је применио олакшицу у рачуну у задацима 1.1–1.5 приказан је Графиком 1.

График 1. Проценти ученика сваке групе који су применили олакшицу у рачуну у задацима 1.1-1.5



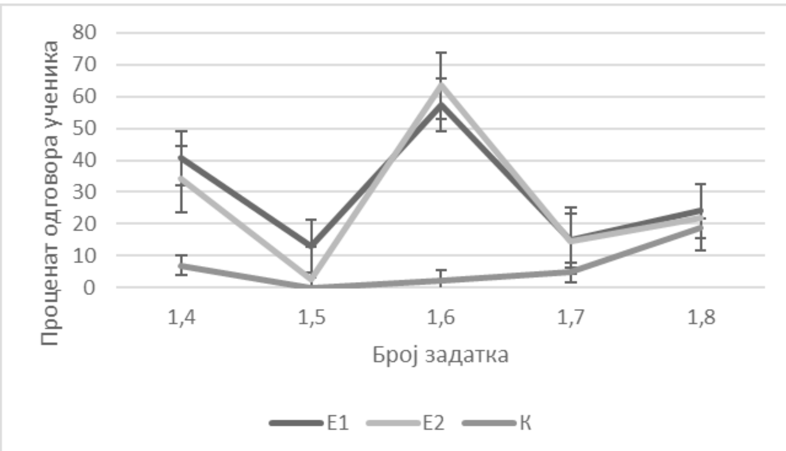
Анализом резулатата контролне групе у истраживању (група у којој није било никаквих интервенција), долазимо до закључка у којој мери ученици примењују својства операција у практичном рачунању. Својства операција примењивана су у највише 14% случајева, а употребљавана су углавном у само 5% случајева (График 1). Ови резултати нису добри јер је флексибилна употреба рачуна један од важних показатеља разумевања у математици (Zeljić et al., 2017). Према овим резултатима може се рећи да су ученици који су учествовали у експерименталном програму у знатно већем броју почели да користе примену аритметичких правила у рачунању, тј. показали су неки вид разумевања структуре израза и математичких операција.

Задаци 1.6–1.8 су послужили као „контролни задаци", тј. задаци којима се проверава поштовање приоритета операција при рачунању вредности израза са операцијама различитог приоритета (Табела 25). У задацима 1.6 и 1.7 појавиле су се статистички значајне разлике између Е1, Е2 и К групе, које су се огледале у томе што су ученици К групе поштовали приоритете операција у веома високом проценту (више од 95% ученика), док су ученици Е1 и Е2 групе у извесном броју заборавили на поштовање приоритета операција. Ове разлике су се изједначиле у примеру 1.8, који је комплекснији од претходних, јер се при рачунању вредности израза датог у том примеру мора уочити структура израза која је комплекснија од оних које ученици најчешће користе. У овом примеру статистичких разлика у начину рачунања вредности израза у Е1, Е2 и К групи нема.

Осим успешности ученика, анализирали смо погрешне поступке рачунања, који су се јавили у задацима 1.4–1.8. Задаци 1.1–1.3 немају природу која наводи ученике на погрешно схватање структуре израза. Разматрајући проценте погрешних одговора у задацима 1.4–1.8 (График 2), може се уочити да су ученици групе Е1 у нешто већем броју правили грешке од ученика у групи Е2. Такође је интересантно да ученици у К групи уопште нису правили грешке представљеног типа. Могуће је да је потенцирање реторичке генерализације правила у Е2 групи допринело већем препознавању примене ових правила у рачуну. Група К није била укључена у експериментални програм, те није била охрабрена да покуша да на лакши начин израчуна вредност израза.

Највећи број грешака у обе експерименталне групе изазвао је задатак 1.6) 4 · 999 + 1, што се може објаснити употребом специфичних бројева који наводе на начине рачунања (Linchevski & Livneh, 1999), али не и у контролној групи. Најмањи број грешака, разматрајући ове задатке, направљен је у задатку 1.5) 58000:100:10, који је био и међу најнеуспешније урађеним задацима.

График 2. Проценти ученика сваке групе који су направили грешке представљеног типа у задацима 1.4–1.8.



Међу грешкама које су ученици правили могу се издвојити два типа грешака. Први тип - $г_1$, јесу грешке неразумевања операција које учествују у изразима, као у задацима 1.6 и 1.7, где ученици поистовећују изразе 4·99 999 +1 са изразом 99 999+4·1, односно израз 201 · 301 – 201 · 1 са изразима 201·201-301·1 и (201-201) ·301·1. Други тип грешака јесу грешке типа $г_2$ у којима ученици структуру израза мењају неправилном употребом заграда, као у следећим задацима, поистовећујући следеће изразе:

1.4) 4 · 999 + 1 са 4·(99 999+1)

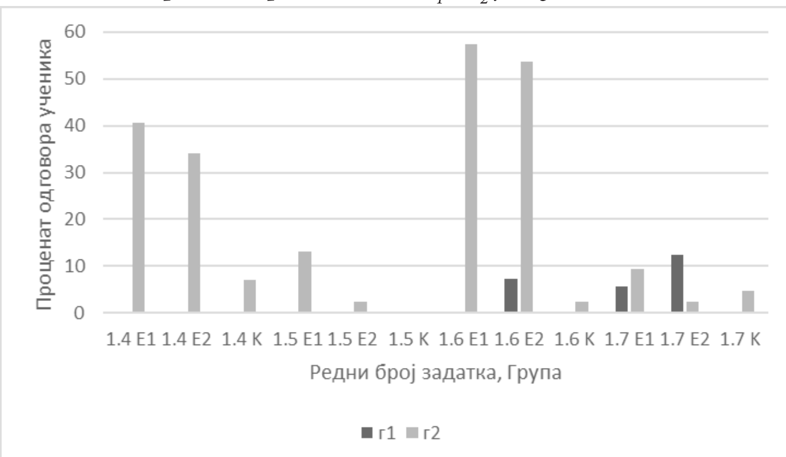
1.5) 58000:100:10 са 58000:(100:10)

1.6) 5999-500-500 са 5999-(500-500)

1.7) 201 · 301 – 201 · 1 са 201·(301-201) ·1.

Са Графика 3, на којем је представљен број грешака сваке категорије, може се уочити да су ученици углавном правили грешке типа $г_2$, дакле мењајући структуру израза неправилом употребом заграда. Грешке је највише евоцирао задатак 1.6 – израз са две операције одузимања, а проценат грешака био је далеко већи него у аналогном задатку 1.5, са две операције дељења.

График 3. Проценат одговора ученика у свакој групи који су направили грешке типа $г_1$ и $г_2$ у задацима 1.4–1.7



Претходни резултати говоре у прилог постојању разлике између познавања процедура рачунања и познавања структуре скупа N, као и о недовољном концептуалном разумевању структуре скупа N. Ученици који су били у експерименталним групама почели су да праве грешке које нису правили на иницијалном тесту. Један од разлога може бити утемељен у истраживању у којем су аутори описали да се код ученика који су решавали једначине помоћу модела јавио „привремени губитак“ знања о решавању једначина и фиксација модела (Filloy & Rojano, 1989). Слично, у нашем истраживању, јавио се губитак знања о приоритетима рачунских операција и начина рачунања вредности израза са више операција. Ово се огледа у чињеници да је нпр. чак и 57% односно 63% ученика направило структуралну грешку у рачунању у експерименталним групама, док је у контролној групи направљено само око 2% грешака (График 2, График 3). Овакви подаци нас наводе на закључак да је знање које ученици поседују о приоритетима рачунских операција процедуралног, а не концептуалног карактера, будући да је једнонедељно излагање ученика писању еквивалентних форми израза узроковало заборављање приоритета операција. Са друге стране, осмишљени Модели нису били у потпуности ефикасни у обнављању својстава структуре природних бројева. Истраживачи су експеримент спровели са полазном претпоставком да су ученици концептуално разумели структуру скупа N у досадашњем школовању, а да ће Модели бити ефикасни у систематизацији досадашњих знања и формирања концепција о еквивалентности израза. Мејсон (Mason, 1996) је у вези са примерима као полазним тачкама у подучавању писао да је искуство учитеља који представља пример потпуно другачије од искуства публике, јер је за њега то пример нечега, а за ученике пример је све. Тако су задаци у Моделима били примери својстава операција за истраживача и поједине ученике који су разумели својства концептуално, док су били само појединачни примери за ученике који су разумели својства процедурално. Заправо, то је познато „неслагање између ученика и учитеља“ које је описао Скемп (Skemp, 1989) када је у питању настава математике. Једно од неслагања јесте да ученици, чији је циљ да разумеју инструментално (јер је то знање до кога се брже долази и које брже доводи до решења) уче учитељи који желе да ученици разумеју релационално. Међутим, подучавати процедурално (инструментално) такође доводи брже до резултата који су жељени и од стране учитеља. Стога, иако је Наставним програмом предвиђено да се математика учи концептуално (релационално), што је описано у горенаведеним цитатима, одсуство детаљне анализе наставних садржаја и импликација на који начин, кроз које активности и задатке би се могли имплементирати концепти, резултирало је да се у самом наставном процесу акцентује процедурално знање. Ово је подржано и у „Општим стандардима постигнућа за крај првог циклуса обавезног образовања“ (ОСП), где се на основном нивоу од ученика траже основна знања везана за писање и читање бројева и релације међу њима, извођење рачунских операција и решавања једноставнијих једначина. На средњем нивоу захтеви су слични, док се тек на високом нивоу од ученика очекује примена својства природних бројева. На крају, овим закључцима не одбацујемо ставове новије литературе о „лажној дихотомији између процедуралног и концепуталног знања“ (Kieran, 2013) и неопходном постојању оба вида знања, већ само упућујемо на недовољно присуство потенцирања концептуалног знања у наставном процесу.

10.3.2. Својства структуре природних бројева у процесу математичког моделовања

У другој групи задатака од ученика се тражило да на основу датог текста запишу више израза који могу представљати решење задатака. Ученицима је објашњено да треба да претпоставе да су све операције са непознатим величинама изводљиве. У табелама (Табела 23, Табела 26) дати су текстови задатака, статистички тестови који су коришћени, као и статистичка значајност за сваки тест.

Табела 26. Коришћени тестови и статистичка значајност у успешности рачунања текстуалних задатака.

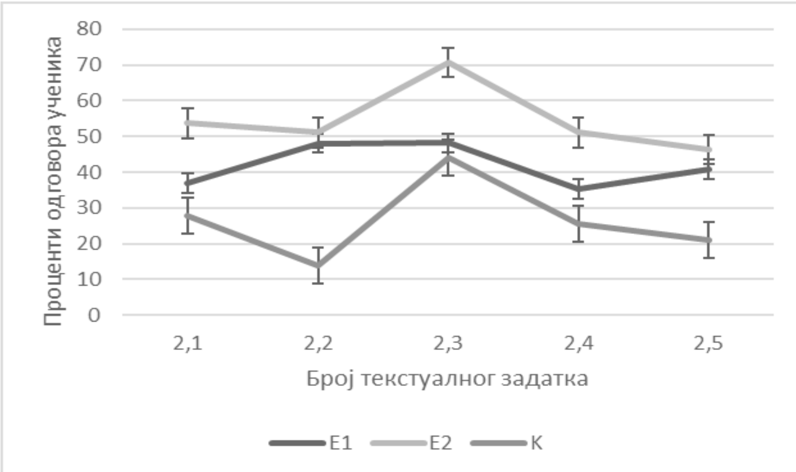
Редни број задатка	Тест (поређење међу Е1, Е2 и К) (N=138)	Значајност/ Хи-квадрат	Пост-хок тест (поређење међу Е1 и Е2) (n=95)	Значајност/Хи-квадрат (n=95)
2.1	Фишер-Фри-ман-Халтон	0.008	Фишер-Фри-ман-Халтон	0.209
2.2	Фишер-Фри-ман-Халтон	0.000	Фишер-Фри-ман-Халтон	0.920
2.3	Фишер-Фри-ман-Халтон	0. 001	Фишер-Фри-ман-Халтон	0.265
2.4	Фишер-Фри-ман-Халтон	0.176		
2.5	Хи-квадрат	p = 0.000/ $X^2(8,N)= 42.198$	Хи-квадрат	p = 0.045/ $X^2(4,n)= 9.717$
2.6	Фишер-Фри-ман-Халтон	0.046	Фишер-Фри-ман-Халтон	0.270
2.7	Хи-квадрат	p = 0.082/ $X^2(4,N)=8.289$		

Сумирајући резултате постигнућа у текстуалним задацима, може се приметити да у задацима 2.4 и 2.7 нема статистички значајне разлике између Е1, Е2 и К групе, док у осталим задацима има. У задатку 2.4 решење представља израз множењем и дељењем. Задатак 2.7, чије је решење израз са операцијама дељења и одузимања, нешто је другачији, јер ученици углавном нису дали одговор или су давали одговоре који су некатегорисани.

У осталим задацима постоји разлика између Е1, Е2 и К групе. Разлика је у томе што ученици у К групи углавном нису дали одговор са више израза, док у Е1 и Е2 групи јесу. Е2 група је у овој категорији била успешнија од Е1 групе (али не статистички значајно).

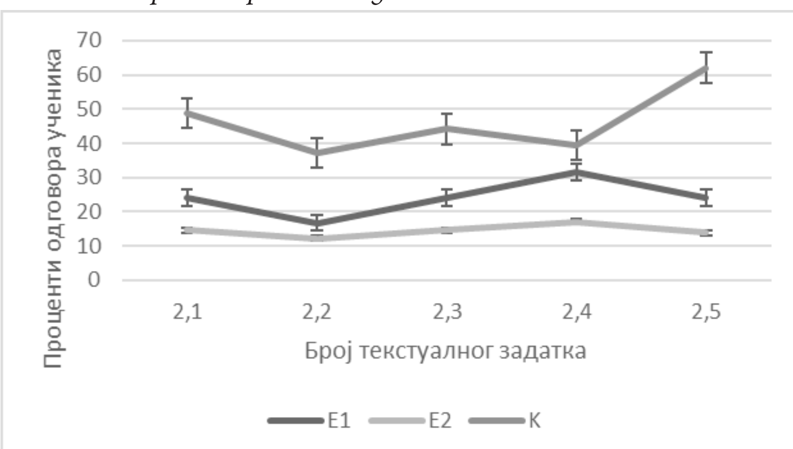
Ако прикажемо графиком број ученика који су записали два или више израза разматрајући задатке 2.1–2.5, можемо приметити да су ученици групе Е2 у сваком задатку дали највећи број одговора (График 4).

График 4. Проценти ученика сваке групе који су записали два или више израза као решење задатака 2.1–2.5



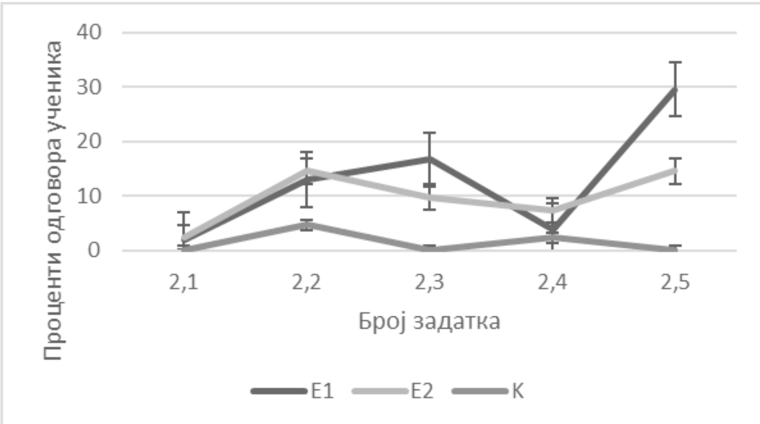
Ако разматрамо број ученика који је записао један израз као решење текстуалног задатка, може се уочити да је највише одговора у овој категорији дала К група, а најмање Е2 група (График 5).

График 5. Проценти ученика сваке групе који су записали један израз као решење задатака 2.1–2.5



Најзад, анализираћемо проценте карактеристичних грешака у задацима. То су примери у којима су ученици покушавали да примене знање писања еквивалентних израза, али су направили грешку. Ученици К групе су правили мали број оваквих грешака (График 6).

График 6. Проценти ученика сваке групе који су направили карактеристичне грешке у задацима 2.1–2.5



Као и у претходној групи задатака, све карактеристичне грешке поделићемо на два типа грешака: грешке типа $г_1$, које су последица неразумевања операција у изразима, као у задацима 2.2, 2.3, 2.4 и 2.5; и грешке типа $г_2$, у којима ученици структру израза мењају неправилном употребом заграда, као у задацима 2.3 и 2.5. Грешке типа $г_1$ јављају се у следећим облицима у задацима:

2.2 поистовећујући изразе (m+n)-5, (5+m)-n, (5+n)-m, затим (m+n)-5, m-(n+5), 5+(n-m), (5-n)+m и изразе (m+n)-5, 5-(m+n), (n+5)-m, (m+5)-n.

2.3 поистовећујући изразе 60-(12+22), 60-12-22, 60+22-12 затим 60-(12+22), (60-12)+22, (60-22)+12 и изразе 60-(12+22), 60-12+22, 60-22+12

2.4 поистовећујући изразе (120·6):3, (120:3)·6, 120:(3·6), затим (120·6):3, (120:3)·6 (120·3):6, (120:6) ·3, (6·3):120

2.5 поистовећујући изразе x:2:4, x:(4:2), (4:2):x затим x:2:4, (x:4):2, x:(4+2) и изразе x:2:4, x:(4·2), (4·2):x

Грешке типа $г_2$ јављају се у следећим облицима и задацима:

2.3 поистовећујући изразе 60-12-22, (60-12)-22, 60-(22-12), (60-22)-12

2.5 поистовећујући изразе x:2:4, x:4:2, x:(4:2).

Представљањем процената ученика у групама који су направили грешке типа $г_1$ и $г_2$ на графику (График 7) може се уочити да је у текстуалним задацима повећан број грешака типа $г_1$, а смањен број грешака типа $г_2$, који готово изостаје.

График 7. Проценат ученика сваке групе који је направио грешке типа $г_1$ односно $г_2$ у задацима 2.2–2.5

Ако текстуалне задатке посматрамо као контекст у којем математичко знање може бити примењено (Ding & Li, 2014) не можемо рећи да је овај контекст у већој мери подстакао ученике контролне групе да користе својства скупа природних бројева. Са друге стране, ученици експерименталне групе који су били моделом подучавања подстакнути да пишу еквивалентне изразе нису искористили контекст како би смањили број грешака у разумевању структуре природних бројева.

10.3.3. Примена својстава структуре природних бројева у писању еквивалентних израза

Трећа група задатака односи се на задатке у којима се од ученика тражи да запишу више израза који ће имати исту вредност као дати израз. За словне изразе дата је инструкција да записани изрази треба да имају исту вредност као задати израз за било коју вредност слова, али таквих да се операција увек може извести у скупу N. Као и у првој групи задатака, ради веће прегледности, задаци су груписани у групу задатака у којима су изрази са операцијама истог приоритета и групу задатака у којима су изрази са операцијама различитог приоритета.

Задати изрази, статистички тестови и значајност приказани су у табелама (Табела 27, Табела 28).

Табела 27. Изрази, тестови и статистичка значајност у задацима записивања еквивалентинх израза (исти приоритет операција)

Редни број задатка	Израз	Тест (поређење међу Е1, Е2 и К) (N=138)	Значајност/Хи-квадрат	Пост-хок тест (поређење међу Е1 и Е2) (n=95)	Значајност/ Хи-квадрат
3.1	250 + 5 + 180	Фишер-Фриман-Халтон	p = 0.024	Фишер-Фриман-Халтон	p = 0.038
3.2	250 – 5 + 150	Фишер-Фриман-Халтон	p = 0.000	Фишер-Фриман-Халтон	p = 0.031
3.3	250 : 10 : 5	Фишер-Фриман-Халтон	p = 0.000	Фишер-Фриман-Халтон	p = 0.051
3.4	a · b · c	Фишер-Фриман-Халтон	p = 0.005	Фишер-Фриман-Халтон	p = 0.436
3.5	e - 5 - g	Фишер-Фриман-Халтон	p = 0.004	Фишер-Фриман-Халтон	p = 0.075
3.6	h · i : 2	Хи-квадрат	p = 0.001/ $X^2(8,N)=27.275$	Хи-квадрат	p = 0.071/ $X^2(4,n)=8.629$

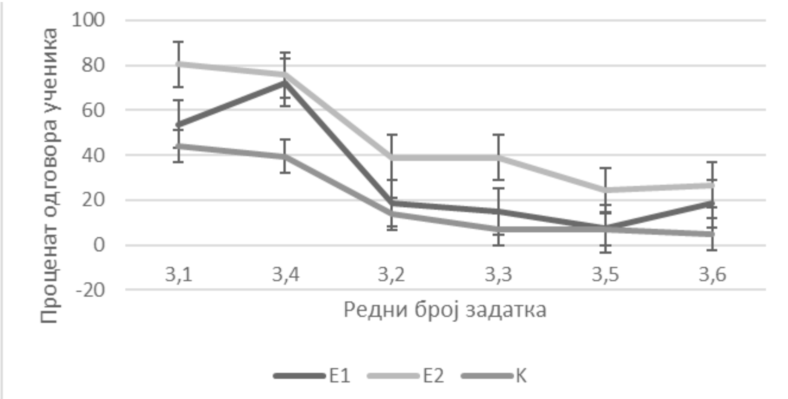
Табела 28. Изрази, тестови и статистичка значајност у задацима записивања еквивалентних израза (различити приоритет операција)

Редни број задат-ка	Израз	Тест (по-ређење међу Е1, Е2 и К) (N=138)	Значајност/ Хи-квадрат	Пост-хок тест (поређење међу Е1 и Е2) (n=95)	Значајност/ Хи-квадрат
3.7	(7+8)·2	Хи-квадрат	$p = 0.013$ $X^2(4,N)=12.622$	Хи-квадрат	$p = 0.968$ $X^2(2,n)=0.066$
3.8	(a - b) : 2	Фишер-Фриман-Халтон	$p = 0.01$	Фишер-Фриман-Халтон	$p = 0.163$
3.9	3 · a + 18 · a	Фишер-Фриман-Халтон	$p = 0.005$	Фишер-Фриман-Халтон	$p = 0.056$

У свим задацима 3.1–3.6 (Табела 27) писања еквивалентних израза постоје статистички значајне разлике између Е1, Е2 и К групе. Статистичке разлике између Е1 и Е2 групе не постоје.

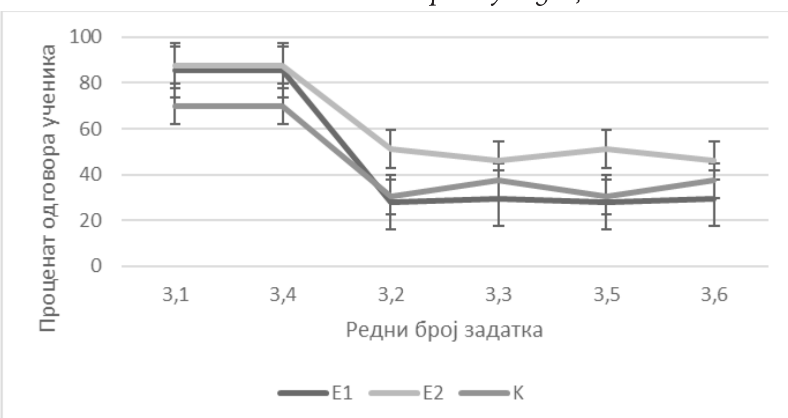
Ако разматрамо категорију у задацима у којој су ученици писали три еквивалнетна израза, у свим задацима 3.1–3.6, може се видети да је група Е2 имала најбоље резултате (График 8). (Редослед задатака је промењен због сличности задатка 3.1 и 3.4, јер оба задатка означавају аритметичко правило, први процедурално исказано, а други симболички). Контролна група имала је најмање одговора у којима су ученици писали еквивалентне изразе. Наравно, учинак у задацима 3.1) 250+5+180 и 3.4) a·b·c, у којима су се примењивала знања о асоцијативности и комутативности операција, био је најбољи. Више процената ученика је написало три израза еквивалентна бројевним изразима 3.2) 250 – 5 + 150 и 3.3) 250 : 10 : 5, него словним 3.5) e-5-g и 3.6) h·i:2.

График 8. Проценти ученика сваке групе који су записали три еквивалентна израза у задацима 3.1-3.6



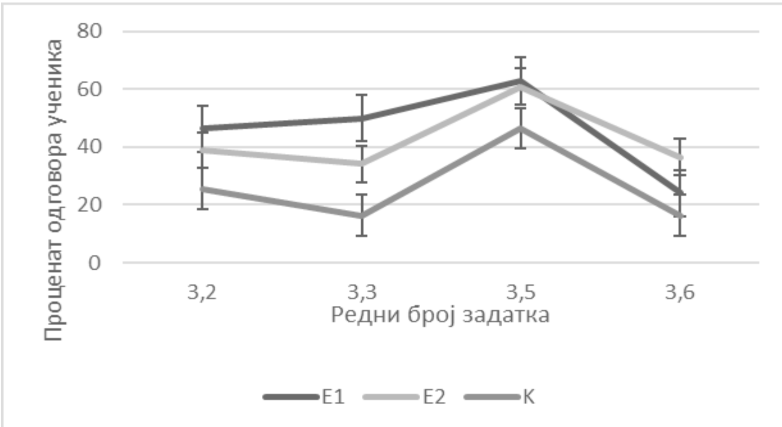
Међутим, ако се узму у обзир све категорије у којима су ученици написали еквивалентне изразе (три, два или чак један еквивалентан израз уколико није идентичан задатом), може се приметити да је и даље Е2 група имала најбоље резултате, као и да је учинак групе Е1 у неким задацима лошији од учинка К групе (График 9). Уједначавају се разлике међу групама, поготову између Е1 и К групе.

График 9. Проценти ученика сваке групе који су записали један и више еквивалентних израза у задацима 3.1–3.6



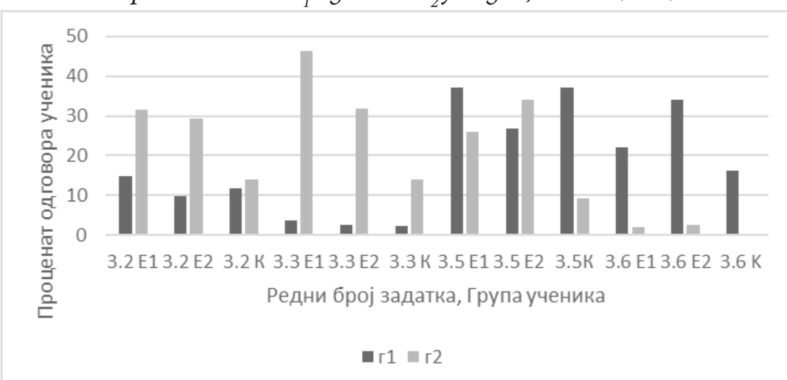
Разматрањем броја начињених грешака које су издвојене као карактеристичне, а могле су бити направљене у изразима који су садржали операције одузимања или дељења – задаци 3.2, 3.3, 3.5 и 3.6 (График 10), уочава се да је група Е1 углавном у највећем броју правила грешке.

График 10. Проценти ученика сваке групе који су направили грешке наведених типова у задацима 3.2, 3.3, 3.5 и 3.6



Приказани график (График 11) представља проценте ученика који су правили грешке типа у $г_1$ односно $г_2$.

График 11. Проценат ученика који је дао одговоре у категорији грешки типа $г_1$ односно $г_2$ у задацима 3.2, 3.3, 3.5 и 3.6

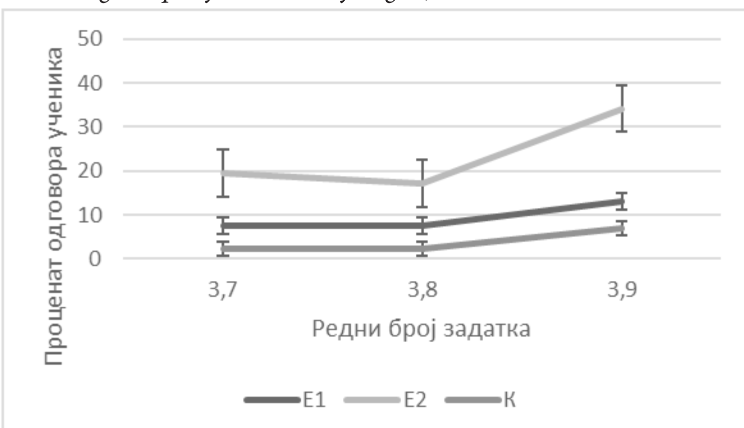


Размотрићемо задатке 3.2 и 3.3 здружено, где су у питању бројевни изрази, а потом задатке 3.5 и 3.6 са словним изразима. У задацима са бројевним изразима свим групама, већи је број ученика који је правио грешку типа $г_2$ него $г_1$ тј. неправилном употребом заграда ученици су добили нееквивалентне изразе. С друге стране, број грешака типа $г_1$ (где ученици покушавају да „прошире" правило комутативности на операције одузимања и дељења) није порастао много у односу на групу К, шта више, у Е2 групи, овакав тип грешке се смањио.

У словним изразима повећан је проценат грешака типа $г_1$, али није повећан проценат грешака типа $г_2$. Проценат грешака типа $г_2$ углавном је смањен.

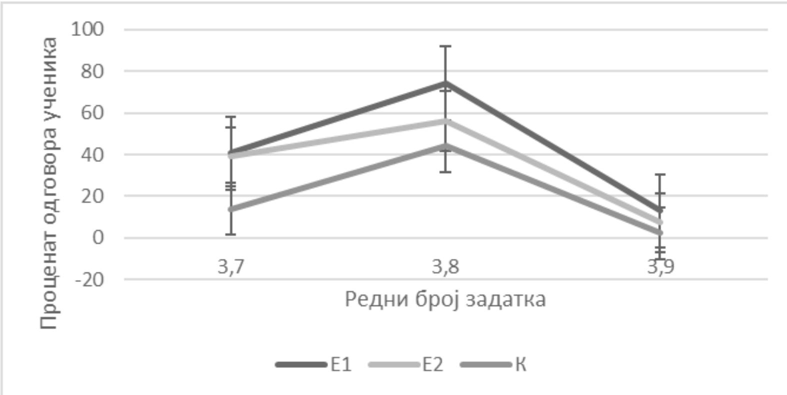
Анализирајући успешност ученика у задацима са изразима у којима операције имају различите приоритете 3.7) (7+8)·2, 3.8) (a-b):2 и 3.9) 3·a+18·a, приметно је да је дистрибутивност препознао највећи проценат ученика Е2 групе, а најмањи проценат ученика К групе (График 12).

График 12. Проценат ученика сваке групе који је препознао дистрибутивност у задацима 3.7–3.9



Као и у претходној групи задатака, највише грешака наведених типова правили су ученици Е1 групе, затим Е2, а најмање ученици К групе (График 13).

График 13. Проценат ученика сваке групе који је направио грешке наведеног типа



На основу претходног, можемо закључити да тип грешке који ученици праве зависи од тога да ли су изрази бројевни или словни. У бројевним изразима су склонији неправилној употреби заграда, док су у словним склонији да мењају структуру израза. Ученици су писање еквивалентних форми применили у мање од 40% случајева, уколико се не ради о експлицитном симболичком формулисању аритметичког закона (График 9). Овај проценат је низак, узевши у обзир захтеве Наставних програма и ставове релевантне литературе у којима је примена еквивалентних форми израза препозната као важна компонента алгебарског мишљења и „спремности за алгебру“ (Linchevski & Livneh, 1999; Livneh & Linchevski, 2007; Subramaniam & Banerjee, 2004; Banerjee et al., 2008; Chaiklin & Lesgold, 1984; Kieran et al., 2013).

11. Закључак

Да би се успоставила веза између аритметике и алгебре, потребно је да учитељи боље разумеју како могу да интегришу алгебарске идеје у наставни процес (Russell et al., 2011). Кроз експерименталне моделе, истражили смо начине укључивања идеја о еквиваленцији, промењивој, квазипромењивој, као и укључивању алгебарских закона кроз текстуалне задатке, односно процес моделовања, који је широко распрострањен у настави. Експерименталним програмом покушали смо да код ученика евоцирамо пре-алгебарски ниво знања (Filloy & Rojano, 1989), тј. да користимо операције над објектима који нису искључиво бројеви. Резултати су показали да су оба развијена Модела (М1 и М2) ефикасна у контекстима у којима је њихова ефикасност мерена, али се на основу овог истраживања не може утврдити који је од два модела ефикаснији.

Треба напоменути и методолошко ограничење емпиријског дела истраживања, које се односи на временски период извођења експеримента, а у вези је са мерењем ефикасности модела. Постоји могућност да дужина експерименталног програма (једна седмица) није била довољна да би се направиле статистички значајне разлике између експерименталних група. Пошто је једна седмица била предвиђена „Наставним планом за систематизацију знања о изразима“, њу смо могли да користимо за спровођење експерименталног програма. Међутим, чак је и овај период био довољан да се направе разлике између експерименталних и контролне групе.

Ефикасност конструисаних Модела поређена је на завршном тесту кроз испитивање постигнућа на задацима примене својства операција у рачунским процедурама, у процесу моделовања и при писању еквивалентних форми израза. Разлике између експерименталних и контролне групе биле су присутне у свим типовима задатака. Експерименталне групе Е1 и Е2 су значајно више користиле „олакшице" у рачунању него контролна група, али као што је у раније истакнуто, у обе групе су се јавиле грешке типа „одвајања знака" (Linchevski & Livneh, 1999) и непоштовања приоритета операција у изразима. И у текстуалним задацима постојале су разлике скоро у свим примерима. Упоређивањем сличних примера (израза са истим операцијским знацима) алгебарских и бројевних израза, дошли смо до закључка да су ученици били подједнако успешни у писању еквивалентних форми изараза, без обзира на експериментални модул који су похађали. То значи да слова у изразима нису била препрека ни за ученике који су били подучавани помоћу квазиваријабли. Ово нас наводи на закључак да структуру скупа N не треба објашњавати само са становишта алгебарских записа, већ и са становишта где се аритметички изрази сматрају инстанцама алгебарских записа, наглашавајући „алгебарски карактер аритметике" (Carraher & Schliemann, 2007). У писању еквивалентних форми израза, ученици су такође били успешнији у експерименталним него у контролној групи.

Анализом резултата добијених у контролној групи, можемо закључити да контекст текстуалних задатака (примена у математичком моделовању) сам по себи не олакшава писање еквивалентних израза. Чак су на неким задацима остварени бољи резултати у симболичком контексту него у реалистичном. Ово је у складу са претходним истраживањима (Banerjee et al. 2008) у којима је наговештено да су текстуални проблеми понекад превише тешки за разумевање. Са друге стране, коришћене схеме у М1 моделу, и реторичке генерализације у М2 моделу, допринеле су бољем постигнућу ученика на свим задацима. Реалистични контекст такође није погодан за откривање структуралних грешака, што се огледа у чињеници да су оне биле присутне у рачунском и симболичком контексту, али не и у реалистичном.

Значајан резултат истраживања јесте откривање постојања средње до јаке повезаности која постоји између реторичке и симболичке формулације закона. То значи да уколико ученици умеју да формулишу закон реторички, умеће да га формулишу и симболичким језиком. На основу тога можемо претпоставити да проблеми везани за математичке записе долазе из недовољно формираних генерализација, а не из неразумевања слова у математичком запису као што су многи аутори претпоставили (Akgün & Özdemir, 2006; Booth, 1988; Carpenter & Levi 2000; Cerulli & Mariotti, 2001; Radford, 2011). Овај закључак се не одсликава само кроз представљену везу, већ и кроз чињеницу да су разлике у успешности на реторичким и симболичким генерализацијама скоро константне (не зависе од комплексности задатка). Даља истраживања би требало да покажу да ли би се усавршавањем вербалних генерализација побољшало и са́мо симболичко записивање код ученика.

Уколико имамо у виду теоријску основу формирања нових појмова (Sfard, 1991), можемо рећи да су ученици постигли фазу интериоризације у разумевању појмова структуре природних бројева. Наиме, ученици су вешти у извођењу свих операција, као и у (реторичкој и процедуралној) формулацији закона, што обезбеђује интериоризацију концепата. Током извођења експеримента, ученици су користили различите репрезентације – дијаграмску и симболичку. Са једне стране, ученици су лако прихватили различите репрезентације, што говори о томе да су ови појмови у фази кондензације, али са друге стране, модели су изазвали повећање броја структуралних грешака. Дакле, у присуству других репрезентација испољава се да концепти још увек нису у потпуности схваћени, тј. да фаза кондензације није завршена. Фаза реификације, односно, да се оно што је научено „види у новом светлу“, треба да уследи при формирању скупа целих и рационалних бројева. Како реификација не може да се оствари док се фаза кондензације не заврши, концепције који су ученици усвојили у структури природних бројева остају операционалне, и не могу прећи у структуралне. Према нашем мишљењу, ово води операционалним концепцијама у структури целих и рационалних бројева, па и шире, у разним областима математике. Иако је реификација према творцу овог појма комплексни и на појединим нивоима тежак феномен (Sfard, 1991), наше истраживање иде у прилог томе да разлог структурално неформираних концепција у скупу N није сама фаза реификације, већ незавршена фаза кондензације. Сагласни смо са мишљењем Сфард (1991) да дуготрајно извођење активности, као што су оцењивање или писање еквивалентних форми бројевних и словних израза при коришћењу различитих операција може допринети структуралном формирању концепција које су виђене као носиоци математичке креације. Овоме у прилог иде и разматрање Капута (1995) да је неуспех ученика у бављењу алгебром у школи (у вишим разредима) у вези са покушавањем да се формализми вежу за ученикова искуства, али тек након што су формализми уведени. Дакле, пре увођења формализама потребно је инсистирати на продубљивању разумевања структуре скупа природних бројева кроз повећање искуства ученика у коришћењу алгебарских идеја.

Према претходном, наш закључак је да ученици нису довољно разумели својства структуре скупа природних бројева пре увођења рационалних и целих бројева. Различити аутори (Fishbein et al. 1985; Vamvakoussi et al. 2012) су писали да су претпоставке о систему природних бројева утемељене у разумевању одраслих особа чак и после многих година школовања. Међутим, наше истраживање је показало да ти темељи нису чврсто постављени на крају четвртог разреда и да треба уложити додатан напор да би ученици могли да користе исправне претпоставке када се буду сусрели са скуповима рационалних и целих бројева.

Након истраживања које је представљено у овој монографији, не можемо рећи да ученици познају структуру скупа природних бројева на начин који је предвиђен Наставним програмом РС. Ученици имају потребна процедурална знања која се од њих очекују, али према претходном, оскудевају у концептуалним знањима потребним за изучавање структуре скупа целих и рационалних бројева. Стога, потребно је да се кроз наставни програм, стручна усавршавања, приручнике за учитеље и уџбенике, у већој мери нагласи значај развијања генерализација и пре-алгебарског нивоа знања код ученика.

12. Литература

- Akgün, L. & Özdemir, E. (2006). „Students' understanding of the variable as general number and unknown: a case study“. *The Teaching of Mathematics,* Vol. IX, No. 1, 45–51.
- Banerjee R., Subramaniam, K. & Naik, S. (2008). „Bridging Arithmetic and Algebra: Evolution of a Teaching Sequence“. In O. Fogueras, J. L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano & A. Sepulveda (Eds.), *Proceedings of the Joint Meeting of PME 32 and PME-NA XXX (PME29) Vol 2,* Full Papers, July 17 – 21 2008, Morelia (pp. 121–128), México: Cinvestav-UMSNH.
- Banerjee, R. & Subramaniam, K. (2012). „Evolution of a teaching approach for beginning algebra“. *Educational Studies in Mathematics,* Vol 80, 351–367.
- Barmby, P., Harries, T., Higgins, S. & Suggate J. (2009). „The array representation and primary children's understanding and reasoning in multiplication“. *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 70, 217–241.
- Beasley, T. M., & Schumacker, R. E. (1995). „Multiple regression approach to analyzing contingency tables: Post hoc and planned comparison procedures“. *The Journal of Experimental Education*, *64*(1), 79–93.
- Blanton, M. & Kaput, J. (2004). „Elementary grades students' capacity for functional thinking“. In M. J. Høines & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings from the the 28th International Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Full Papers, July 14–18 2004, Bergen (Vol. 2, pp. 135–142). Bergen: PME.
- Blanton, M. & Kaput, J. (2011). „Functional Thinking as a Route into Algebra in the Elementary Grades“. In E. Cai & J. Knuth (Eds.), *Early Algebraization* (5–23). Berlin-Heidelberg: Springer.
- Brizuela, B., Blanton, M., Sawerey, K., Newman-Owens, A. & Gardiner, A. (2015). „Children's Use of Variables and Variable Notation to Represent

Their Algebraic Ideas". *Mathematical Thinking and Learning*, Vol. 17: 34–63.

- Blum, W. (1994). „Mathematical modeling in mathematics education and instruction". In T. Breiteig, I. Huntley & G. Kaiser-Messmer (Eds.), *Teaching and learning mathematics in context* (3–14). Chichester, England: Ellis Horwood Limited.
- Booth, L. (1998). „Children's difficulties in beginning algebra". In A. F. Coxford (Ed.). *The Ideas of Algebra. K-12* (pp. 20–32). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Cai, J. & Knuth, E. (2011). „A Global Dialogue About Early Algebraization from Multiple Perspectives, Early Algebraization", In E. Cai & J. Knuth (Eds.), *Early Algebraization* (pp. vii – xi). Berlin-Heidelberg: Springer.
- Cai, J., Ng S. F. & Moyer, J. C. (2011). „Developing Students' Algebraic Thinking in Earlier Grades: Lessons from China and Singapore". In E. Cai & J. Knuth (Eds.), *Early Algebraization* (pp. 25–41). Berlin-Heidelberg: Springer.
- Carraher, D. W., & Schliemann, A. D. (2007). „Early algebra and algebraic reasoning". In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (p. 669–706). Charlotte, NC: Information Age.
- Carraher, D. W., Schliemann, A. D., & Schwartz, J. (2008). „Early algebra is not the same as algebra early". In J. Kaput, D. Carraher, & M. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 235–272). Mahwah, NJ: Lawrence ErlbaumAssociates/Taylor & Francis Group.
- Carraher, D., Schliemann, A. & Brizuela, B. (2001). „Can young students operate on unknowns?" In M. V. D. Heuvel Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 130–138). Utrecht, The Netherlands: Freudenthal Institute.
- Carpenter, T. & Levi, L. (2000). „Developing Conceptions off Algebraic Reasoning in The Primary Grades". Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association, Montreal, Canada.
- Cerulli, M. & Mariotti, M. A. (2001). „Arithmetic and Algebra, Continuity or Cognitive Break? The Case of Francesca". In M. van-den Heuvel Pannhueizen (Ed.), *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 225–232). Utrecht, Netherlands: PME

- Chaiklin, S. & Lesgold, S. B. (1984). „Prealgebra Students' Knowledge of Algebraic Tasks with Arithmetic Expressions". Paper presented at the meeting of the American Research Association, New Orleans. (ERIC Document Reproduction Service No. ED 247 147).
- Chrysostomou, M., Pitta-Pantazi, D., Tsingi, C., Cleanthous, E. & Christou, C. (2013). „Examining number sense and algebraic reasoning through cognitive styles". *Educational Studies in Mathematics,* 83, 205–223.
- Дабић, М. (2018). „Појам непознате у уџбеницима за 1. разред основног образовања". *Методичка теорија и пракса,* 1/2018, 181–192.
- Dabić Boričić, M. (2019). *Metodički aspekti formiranja algebarskih zakona u početnoj nastavi matematike* [Doktorska disertacija, Učiteljski fakultet, Beograd].
- Dabić, M. & Milinković, J. (2015). „Teachers' Representations of Multiplication – Do Children Understand them?" In J. Novotna & H. Moraova (Eds.), Developing mathematical language and reasoning (pp. 99–107), Prague: Charles University, Faculty of Education.
- Dabić Boričić, M. & Zeljić, M. (2021). „Modelovanje ekvivalencije matematičkih izraza u početnoj nastavi", *Inovacije u nastavi*, 34(1), 30–43.
- De Bock, D., Deprez, J., Van Dooren, W., Roelens, M. & Verschaffel, L. (2011). Abstract or Concrete Examples in Learning Mathematics? A Replication and Elaboration of Kaminski, Sloutsky, and Heckler's Study. *Journal for Research in Mathematics Education,* Vol 42. No. 2, 109-126.
- Дејић, М., Егерић, М., Михајловић, А. (2015). *Методика математике у разредној настави.* Јагодина: Учитељски факултет.
- Ding, M. & Li, X. (2014). „Transition from concrete to abstract representation: the distributive property in a Chinese textbook series". *Educational Studies in Mathematics,* Vol 87, 103–121.
- Dreyfus, T. (1991a). „Advanced mathematical thinking processes". In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 25–41). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Dreyfus, T. (1991b). „On the status of visual reasoning in mathematics and mathematics education". In F. Furinghetti (Ed.), Proc. 15 th Conf. of the Int. Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 1, pp. 33–48). Assisi, Italy: PME
- Đokić, O. (2013). „Mathematical exercises as a basis for pupils' mathematical thinking development", in: Radovanović, I., & Zaclona, Z. (Eds.), *Theoretical and methodological basis of quality education*. Belgrade

/ Nowy Sacz: University of Belgrade, Teachers` Training Faculty / State Higher Vocational School Nowy Sacz

- Đokić, O., Dabić Boričić, M. & Jelić, M. (2022). „Comparing ICT with physical manipulative supported learning of 3D geometry in elementary school". *Journal of Educational Computing Research, 59*(8), 1623–1654.
- Fagnant, A. & Vlassis, J. (2013). „Schematic representations in arithmetical problem solving: Analysis of their impact on grade 4 students". *Educational Studies in Mathematics,* Vol. 84, 149–168.
- Filloy, E., Puig, L. & Rojano, T. (2008). *Educational Algebra. A Theoretical and Empirical Approach.* Melbourne: Springer.
- Filloy, E. & Rojano, T. (1989). „The Transition from Arithmetic to Algebra". *For the Learning of Mathematics,* Vol. 9, No. 2, 19–25.
- Fischbein, E. Deri, M., Nello, M. S. & Marino, M. S. (1985). „The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division". *Journal for Research in Mathematics Education,* Vol 16, No. 1, 3–17.
- Flores, R, Koontz, E. Inan, F. A. & Algic, M. (2015). „The Impact of Multiple Representations First versus Algorithms First on Student Abilities". *Educational Sudies in Mathematics,* Vol. 89, 267–281.
- Fuji, T. & Stephens, M. (2001). „Fostering an understanding of algebraic generalisation trough numerical expressions: the role of quasi-variables". In H. Chick, K. Stacey, & J. Vincent (Eds.), Proceedings of the 12th ICMI Study Conference: The Future of the Teaching and Learning of Algebra (Vol. 1, pp. 258–264). Melbourne: The University of Melbourne.
- Fujii, T. & Stephens, M. (2008). „Using number sentences to introduce the idea of a variable". In C. E. Greenes & R. Rubenstein (Eds.), *Algebra and Algebraic Thinking in School Mathematics, Seventieth Yearbook* (pp. 127–140). Reston, VA: NCTM.
- Fyfe, E., McNeil, N., Son, J. & Goldstone, R. (2014), „Concretness Faiding in Mathematics and Science Instruction: a Systematic Review". *Educational Psychology Review,* Vol. 26, 9–25.
- Goldstone, R. & Son, J. (2005). „The Transfer of ScientificPrinciples Using Concrete and Idealized Simulations". *The Journal of the Learning Sciences,* Vol 14. 69–110.
- Greer, B. (1992). „Multiplication and division as models of situations". In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 276–295). New York: Macmillan.

- Herscovics, N. & Linchevski, L. (1994). „A Cognitive Gap between Arithemetic and Algebra". *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 27, 59–78.
- Izaak Wirszup, 1915 – 2008 (2011). Retrieved August 14, 2014, from the World Wide Web http://www-news.uchicago.edu/releases/08/080131.wirszup.shtml
- Kaminski, J., Sloutsky, V. & Heckler, A. (2006). „Do Children Need Concrete Instantiations to Learn an Abstract Concept?" In R. Sun & N. Miyake (Eds.), Proceedings of the XXVIII Annual Conference of the Cognitive Science Society (pp. 411–416). Mahwah, NJ: Erlbaum.
- Kaminski, J., Sloutsky, V. & Heckler, A. (2008). „The Advantage of Abstract Examples in Learning Math". *Science*, Vol. 320, 454–455.
- Kaput, J. (1995). „A Research Base Supporting Long Term Algebra Reform?" In D. T. Ouens, M. K. Reed, & G. M. Millsaps (Eds.), *Proceedings of the seventh Anual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 71–94). Dolumbus, OH: ERIC Clearinghouse for Science, Mathematicws, and Environmental Education. (ERIC Document Reproduction Service No.ED 389 539).
- Kieran, C. (1992). „The Learning and Teaching of School Algebra". *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning,* New York: Macmillan Publishing Company.
- Kieran, C. (2004). „Algebraic thinking in the early grades: What is it?" *The Mathematics Educator (Singapore)*, Vol. 8, No. 1, 139–151.
- Kieran, C, Boileau, A., Tanguay, D. & Drijvers, P. (2013). „Design researchers' documentational genesis in a study on equivalence of algebraic expressions". *ZDM Mathematics Education,* Vol 45, 1045–1056.
- Kieran, C. (2013). „The false dichotomy in mathematics education between conceptual understanding and procedural skills: an example from algebra". In K. R. Leatham (Ed.), *Vital Directions for Mathematics Education Research* (pp. 153–171). New York: Springer.
- Kilpatrick, J. (2011). „Commentary on Part I". In E. Cai & J. Knuth (Eds.), *Early Algebraization* (pp. 125–130). Berlin-Heidelberg: Springer.
- Knuth, E., Alibali, M., McNeil, N., Weinberg, A. & Stephens, M. (2005). „Middle School Students' Understanding of Core Algebraic Concepts: Equivalence & Variable". *ZDM Mathematics Education,* Vol. 37, No. 1, 68–76.
- Krummheuer, G. (2013). „The relationship between diagrammatic argumentation and narrative argumentation in the context of the

development of mathematical thinking in the early years". *Educational Studies in Mathematics,* Vol. 87, 249–265.

- Kuchemann, D. (1978). „Children's Undrestanding of Numerical Variables", *Mathematics in School*, Vol. 7, No. 4, 23–26.
- Linchevski, L. (2001). „Operating on the unknowns: What does it really mean?" In M. V. D. Heuvel Panhuizen (Ed.), Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (pp. 141–144). Utrecht, The Netherlands: Freudenthal Institute.
- Liebenberg, R. E., Linchevski, L., Sasman, M.C. & Olivier, A. (1999). „Focusing on the structural aspects of numerical expressions". In J. Kuiper (Ed.), *Proceedings of the Seventh Annual Conference of the Southern African Association for Research in Mathematics and Science Education*, Full Papers, Harare (pp. 249–256), Harare, Zimbabwe.
- Linchevski, L. & Herscovics, N. (1996). „Crossing the Cognitive Gap between Arithmetic and Algebra: Operationg on the Unknown in the Context of Equations". *Educational Studies in Mathematics,* Vol. 30, 39–65.
- Linchevski L. & Livneh, D. (1999). „Structure sense: The Relationship between Algebraic and Numerical Contexts". *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 40, 173–196.
- Липковски, А. (1993). „О настави линеарне алгебре и аналитичке геометрије". *Настава математике, 38(2),* 28–34.
- Livneh D. & Linchevski, L. (2007). „Algebrification of Arithmetic: Developing Algebraic Structure Sense in the Context of Arithmetic". In J. H. Woo, H. C. Lew, K. S. Park & D.Y. Seo (Eds.), *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Full Papers, July 8–13 2007, Seoul (Vol 3, pp. 217–224). Seoul: PME.
- Malara, N. & Iaderosa, R. (1999). „The interweaving of arithmetic and algebra: Some questions about syntactic and structural aspects and their teaching and learning". In I. Schwank (Ed.), *Proceedings of the First Conference of the European Society for Research in Mathematics Education,* Full Papers, August 27–31 1998, Osnabruck (Vol. 2, pp. 159–171). Osnabrueck: Forschungsinstitut fuer Mathematikdidaktik.
- Marascuilo, L. A. & Serlin, C. S. (1995). *Statistical Methods for the social and behavioral sciences*. New York: W. H. Freeman and Company.
- Marjanović, M. (1996). *Metodika matematike 1.* Beograd: Učiteljski fakultet.

- Mason, J. (1996). „Expressing generality and roots of algebra“. In N. Bednarz, C. Kieran, & L. Lee (Eds.), Approaches to algebra. Perspectives for research and teaching (pp. 65–86). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- McDonald, J.H. (2014). *Handbook of Biological Statistics(3rd ed.).* Baltimore: Sparky House Publishing.
- Mijajlović, Ž. (1993). *Algebra 1*. Beograd: Milgor.
- Milinković, J. & Dabić Boričić, M. (2018). „Vizuelna komunikacija u nastavi matematike“. *Pedagogija, 73*(4), 620–635.
- Nathan, M. & Koedinger, K. (2000). „Teachers’ and Researchers’ Beliefs about the Development of Algebraic Reasoning“. *Journal for Research in Mathematics Education,* Vol. 31, No. 2, 168–190.
- ННП 1. *Правилник о плану наставе и учења за први циклус основног образовања и васпитања и програму наставе и учења за први разред основног образовања и васпитања.* . Службени гласник РС – Просветни гласник бр. 10/2017-1
- ННП 2. *Правилник о плану наставе и учења за први циклус основног образовања и васпитања и програму наставе и учења за први разред основног образовања и васпитања.* . Службени гласник РС – Просветни гласник бр. 16/2018-47,
- ННП 3. *Правилник о плану наставе и учења за први циклус основног образовања и васпитања и програму наставе и учења за први разред основног образовања и васпитања.* . Службени гласник РС – Просветни гласник бр. 5/2019-6
- ННП 4. *Правилник о плану наставе и учења за први циклус основног образовања и васпитања и програму наставе и учења за први разред основног образовања и васпитања.* . Службени гласник РС – Просветни гласник бр. 11/2019-11
- НП 1 - 2. *Правилник о наставном плану и програму за I и II разред основног образовања и васпитања.* Службени гласник РС – Просветни гласник бр. 10/04, 20/04, 1/05, 3/06 и 15/06.
- НП 3. *Правилник о наставном плану и програму за први, други трећи и четврти разред са наставним и програмом за трећи разред.* Службени гласник РС – Просветни гласник бр. 1/05 и 15/06.
- НП 4. *Правилник о наставном плану и програму за четврти разред основног образовања и васпитања.* Службени гласник РС – Просветни гласник бр. 3/06 и 15/06.

- НП5. *Правилник о наставном плану и програму за пети разред основног образовања и васпитања*. Службени гласник РС – Просветни гласник бр. 6/07, 2/10 и 3/11.
- ОСП. *Општи стандарди постигнућа – образовни стандарди за крај првог циклуса обавезног образовања. Математика*. Службени гласник РС – Просветни гласник бр. 5/2010.
- Pallant, J. (2009). *SPSS priručnik za preživljavanje*. Beograd: Mikro knjiga.
- Palm, T. (2008). „Impact of authencity on sense making in word problem solving". *Educational Studies in Mathematics,* Vol. 67, 37–58.
- PDTP (2004). „Patterns, Functions, and Algebra for Elementary School Teachers". A Professional Development Training Program to Implement the 2001 Virginia Standards of Learning. Virginia Department of Education.
- Radford, L. (2001). „Of course they can!" In M. V. D. Heuvel Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 145–148). Utrecht, The Netherlands: Freudenthal Institute.
- Radford, L. (2002). „On heroes and the collapse of narratives: a contribution to the study of symbolic thinking". In A. D. Cockburn, & E. Nardi (Eds.): Proceedings of the 16th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 4 (pp. 81–88). Norwich, UK.
- Radford, L. (2011). „Grade 2 Students Non-symbolic Algebraic Thinking". In E. Cai & J. Knuth (Eds.), *Early Algebraization* (pp. 202–322). Berlin-Heidelberg: Springer.
- Reynaldo, J. &Santos, A. (1999). „Cronbach's Alpha: A Tool for Assessing the Reliability of Scales". *The Journal of Extension,* 37 (2). Retreived from http://www.joe.org/joe/1999april/index.php Decembar, 2015.
- Rojano, T., Filloy, E. & Puig, L. (2014). „Intertextuality and sense production in the learning of algebraic methods". *Educational Studies in Mathematics,* Vol. 87, 389–407.
- Russell, S. J., Schifter, D. & Bastable, V. (2011). „Developing Algebraic Thinking in the Context of Arithmetic". In E. Cai & J. Knuth (Eds.), *Early Algebraization* (pp. 43–69). Berlin-Heidelberg: Springer.
- Schmittau, J. (2011). „The Role of Theoretical Analysis in Developing Algebraic Thinking: A Vygotskian Perspective". In E. Cai & J. Knuth (Eds.), *Early Algebraization* (pp. 71–85). Berlin-Heidelberg: Springer.

- Sfard, A. (1991). „On the Dual Nature of Mathematical Conceptions: Reflections on Processes and Objects as Different Sides of the Same Coin". *Educational Studies in Mathematics*, Vol 22, No 1, 1–36.
- Skemp, R. (1987). *The Psychology of Learning Mathematics.* London: Routledge
- Skemp, R. (1989). *Mathematics in the Primary School.* London: Routledge.
- Skemp, R. (1993). *Structured Activities for Intelligent Learning.* Calgary: EEC Ltd.
- Stacey, K. & MacGregor, M. (1999). „Learning the Algebraic Method of Solving Problems". *Journal of Mathematical Behavior,* Vol. 18, No. 2, 149–167.
- Subramaniam, K. & Banerjee, R. (2004). „Teaching arithmetic and algebraic expressions". In M. Johnsen Hoines & A. Berit Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th International Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Full Papers, July 14–18 2004, Bergen (Vol 3, pp. 121–128). Bergen: PME.
- Subramaniam, K. & Banerjee, R. (2011). „The Arighmetic-Algebra Connection: A Historical-Pedagogical Perspective". In E. Cai & J. Knuth (Eds.), *Early Algebraization* (pp. 87–107). Berlin-Heidelberg: Springer.
- Tall, D. (2001). „Reflections on early algebra". In M. V. D. Heuvel Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 149–152). Utrecht, The Netherlands: Freudenthal Institute.
- Todorović, D. (2008). *Metodologija psiholoških istraživanja.* Beograd: Cenar za primenjenu psihologiju.
- Usiskin, Z. (1988). „Conceptions about School Algebra and Uses of Variables". In A. F. Coxford & A. P. Shulte (Eds.), The ideas of algebra, K-12 (1988 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics, pp. 8–19). Reston, VA: NCTM.
- Vamvakoussi, X., Van Dooren, W. & Verschaffel, L. (2013). „Educated adults are still affected by intuitions about the effect of arithmetical operations: evidence from a reaction-time study". *Educational Studies in Mathematics,* Vol. 82, 323–330.
- Verschaffel, L., Greer, B., & De Corte, E. (2000). *Making sense of word problems*. Lisse, The Netherlands: Swets & Zeitlinger.
- Vigotski, L. S. (1983). Mišljenje i govor, Beograd: Nolit.
- Watanabe, T. (2011). „Shiki: A Critical Foundation for School Algebra in Japanese Elementary School" In E. Cai & J. Knuth (Eds.), *Early Algebraization* (pp. 25–41). Berlin-Heidelberg: Springer. 87–107.

- Warren, E. & Copper, T. J. (2001). „The unknown that does not have to be known“. In M. V. D. Heuvel Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 130–138). Utrecht, The Netherlands: Freudenthal Institute.
- Wittmann, M., Flood, V. & Black, K. (2013). „Algebraic manipulation as motion within a landscape“., Vol *Educational Studies in Mathematics*. 82, 169–181.
- Zeljić, M. (2014). *Metodički aspekti rane algebre,* Beograd: Učiteljski fakultet.
- Zeljić, M. & Dabić, M. (2014). „Odnos proceduralnog i konceptualnog znanja učenika u procesu ovladavanja postupcima računanja u početnoj nastavi matematike“. *Nastava i vaspitanje, 63*(4), 653–668.
- Zeljić, M. (2015). „Modelling the Relationships Between Quantities: Meaning in Literal Expressions“. *Euroasia Journal of Mathematics, Scinece and Technology Education,* Vol. 11, No. 2, 431–442.
- Zeljić, M. (2021). *Učenje i poučavanje matematike – jednakost sa više (ne) poznatih,* Beograd: Učiteljski fakultet.
- Zeljić, M., Dabić Boričić, M. & Ilić, S. (2022). „The understanding of relational terms in compare-combine word problems on different levels of education“. *Uzdanica,* XIX, 29–52.
- Zeljić, M., Dabić Boričić, M. & Ilić, S. (2023). „Razumevanje zadataka poređenja kod učenika drugog razreda osnovne škole“. *Inovacije u nastavi, XXXVI,* 117–132.
- Zeljić, M., Dabić Boričić, M. & Ilić, S. (2024). „Insight into students' understanding of relational terminology through integrated compare and combine word problems“, *Journal of Educational Research,* Early Access.
- Zeljić, M., Dabić Boričić, M. & Maričić, S. (2021). „Problem Solving in Realistic, Arithmetic/algebraic and Geometric Context“, *Egitim ve Bilim - Education and Science,* 46, 208, 413–430.
- Zeljić, M., Ilić, S. & Jelić, M. (2017). „Mentalna aritmetika – strategije oduzimanja“, *Inovacije u nastavi,* 30 (4), 49–61.

13. Прилози

13.1. Прилог 1. Релевантни делови наставних програма

Преглед оперативних задатака Наставних програма (НП1–НП4) узетих за основу при изради Модела 1 и 2

Разред	**Оперативни задаци. Ученици треба да:**
Први	савладају сабирање и одузимање до 100 (без прелаза преко десетице), разумеју поступке на којима се заснивају ове операције; упознају (на примерима) комутативност и асоцијативност сабирања (без употребе ових назива); одређују непознати број у одговарајућим једнакостима искључиво путем „погађања"; успешно решавају текстуалне задатке (са једном и две операције) у оквиру сабирања и одузимања до 100 (помоћу састављања израза, као и обратно, да на основу датог израза умеју да састављају одговарајуће задатке);
Други	упознају (на примерима) комутативност и асоцијативност рачунских операција (без употребе ових назива); савладају множење и дељење у оквиру 100, упознају функцију заграде и редослед извођења рачунских операција; умеју да прочитају и запишу помоћу слова збир, разлику, производ и количник, као и да знају да одреде вредност израза са две операције;

	упознају употребу слова као ознаку за непознати број (односно, као замену за неки број) у најједноставнијим примерима сабирања и одузимања; умеју да решавају текстуалне задатке с једном и две рачунске операције, као и једначине с једном операцијом (на основу веза између компонената операције);
Трећи	упозната својства операција користе за рационалније (лакше) рачунање; упознају зависност резултата од компонената операције; знају да израчунају вредност бројевног израза са највише три операције; умеју да прочитају и запишу помоћу слова својства рачунских операција; знају да одреде вредност израза са словима из дате вредности слова; знају да решавају једноставније једначине у скупу бројева до 1000; успешно решавају текстуалне задатке;
Четврти	умеју да читају и записују помоћу слова основна својства рачунских операција упознају и уочавају зависност између резултата и компонената операције (на примерима); примењују упозната својства рачунских операција при трансформисању израза и у случају рачунских олакшица; знају да читају, састављају и израчунавају вредност израза са више операција; знају да решавају једноставније једначине и неједначине (упознатих облика) у скупу природних бројева; успешно решавају задатке дате у текстуалној форми;
Пети	упознају дељивост природних бројева и основна правила дељивости; могу да читају, састављају и рачунају једноставније бројевне изразе; увиђају математички садржај у текстуалним задацима и изражавају га математичким језиком;

Цитирамо и делове програма који су дати у поглављу „Начин остваривања програма“:

> „Програм математике у разредној настави предвиђа да ученици поступно упознају бројеве природног низа и број нулу како би на крају IV разреда у потпуности савладали систем природних бројева и његова својства“ (НП 1–2, НП 3, НП4).
>
> „Програм предвиђа прво упознавање својстава операција, а затим, на тој основи, објашњавање начина рачунања. Тиме се повећава ефикасност наставе и ученицима знатно олакшава усвајање таблица сабирања и множења, као и формирање других рачунских умења. Исто тако, благовремено изучавање својстава операција и веза између њих подиже теоријски ниво целог рада из математике и потпуније открива смисао операције. Усвајање сваког својства операције пролази кроз неколико етапа: припремна вежбања, одговарајуће операције на одабраним примерима, формулисање својства, примена својства у одређивању вредности израза и начину рачунања, запис својства помоћу слова. Посебно је важно да се утврди како промене компонената рачунских операција утичу на резултат; као и да се укаже на значај ових чињеница у практичном рачунању. Тако, на пример, није довољно да ученици само знају да производ двају бројева не мења вредност ако се један од њих помножи неким бројем, а други подели тим истим бројем, већ то треба да умеју и да примене на конкретним примерима“ (НП 1–2, НП3, НП4).
>
> „Бројевне изразе треба обрађивати упоредо са увежбавањем рачунских операција. Треба инсистирати на томе да ученици текстуално записане задатке приказују бројевним изразима и да речима исказују бројевне изразе, односно да их читају. Оваквим начином обрађивања бројевних израза ученици се сигурно сналазе у редоследу рачунских операција и лако схватају значај заграда у задацима“ (НП 1–2, НП 3, НП4).

„**Почеци формирања математичког језика.** Математички језик чине основни симболи, изрази и формуле. То је језик тачан, јасан и истовремено прецизан. Слово у својству математичког знака појављује се већ у II разреду. Њиме се замењују разни симболи за записивање непознатог броја (тачка, цртица, квадратић), на пример при решавању задатака облика: „Ако замишљеном броју додамо 5, онда добијемо 9. Који је број замишљен." (Превод гласи: x + 5 = 9). Код ученика се поступно изграђује представа о промењљивој, при чему слово наступа у својству симбола промењљиве. Ученици најпре одређују вредности најпростијих израза (облика: а + 3, б - 4, а + б, а - б) за различите бројевне вредности слова која у њима фигуришу. Касније постепено упознају сложеније изразе. Програм предвиђа да се једначине, као специјалне формуле, решавају паралелно са вршењем одговарајућих рачунских операција. Решавање једначина у II разреду заснива се на познавању рачунских операција и њихове међусобне повезаности. При решавању једначина с непознатим елементом множења и дељења треба узимати само примере с целобројним решењима." (НП 1–2)

Исходи предвиђени новим наставним програмима (ННП1–ННП4) који су у вези са генерализацијама, употребом слова у изразима и употребом текстуалних задатака у сврси моделовања. Нови наставни програми су донети након реализације истраживања.

Разред	Исходи. Ученици ће бити у стању да:
Први	растави број на сабирке и примени замену места и здруживање сабирака ради лакшег рачунања; реши текстуални задатак са једном операцијом;
Други	примени замену места и здруживање сабирака и чинилаца ради лакшег рачунања; одреди непознати број у једначини са једном аритметичком опера- цијом; реши текстуални задатак постављањем израза са највише две рачунске операције и провери тачност решења;

Трећи	израчуна вредност бројевног израза са највише три рачунске операције; реши једначину са једном рачунском операцијом; одреди и запише скуп решења неједначине са сабирањем и одузимањем; реши проблемски задатак користећи бројевни израз или једначину; уочи и речима опише правило за настајање бројевног низа;
Четврти	састави израз, израчуна вредност бројевног израза и примени својства рачунских операција; реши једначине и неједначине и провери тачност решења; реши проблемски задатак користећи бројевни израз, једначину или неједначину;

Изводи из упутства за дидактичко-методичко остваривање програма:

Први разред:

„Правила замене места сабирака и здруживање сабирака уводе се пре обраде бројева друге десетице јер се користе при извођењу сабирања у блоку до 20. За илустрацију правила користе се очигледна средства као и визуелни приказ. Разматрају се и случајеви у којима је један од сабирака непознат број. На основу добро савладане таблице сабирања и одузимања ученици откривају непознати сабирак, умањилац, а затим и примере где је непознат умањеник. Ово је погодан тренутак за решавање задатака са теразијама, у којима је циљ успостављање равнотеже тасова. Разматрају се ситуације у којима су на тасовима: 1) исти предмети; 2) различити предмети. Нпр. на првој слици је на једном тасу куглица, а на другом коцка. На другој слици су на једном тасу две куглице, а на другом ваљак. На трећој слици је на једном тасу ваљак, а на другом треба доцртати одговарајући број коцки. Оваквим задацима се постепено развија логичко мишљење и идеја решавања једначине, а представљају и увод у мерење масе, које се обрађује у наредним разредима.“

Други разред:

„Правила замене места сабирака и здруживања сабирака обнављају се кроз очигледне примере и описују реторички, без формулског записа. За илустрацију правила користе се манипулативна средства као и визуелни прикази. Ученике кроз примере наводити на логичко разумевање и функционалну примену замене места сабирака и здруживања сабирака. Овде пре свега треба водити рачуна о мисаоном процесу ученика који треба да буде у директној вези са оним што ученик записује приликом решавања проблема. Ученици ће кроз примере увидети сврсисходност замене места сабирака, као и њихово здруживање, а не постојање ових својстава ради њих самих.

Непотпуном индукцијом кроз примере и анализом сликовних представа долази се до правила замене места чинилаца, здруживања чинилаца, множења и дељења збира и разлике бројем као и множења бројевима 1 и 0, дељења нуле и дељења са 1, без симбо- личког записа правила. На основу наведених правила прелази се на случајеве ванталичног множења (односно дељења) једноцифреним бројем.

Разматрају се случајеви једначина – математичких реченица исказаних помоћу бројева, знака аритметичке операције и релације једнакости у којима је један од елемената непознат број представљен словом. На основу веза сабирања и одузимања, множења и дељења, као и добро савладаних таблица сабирања, одузимања, множења и дељења, ученици одређују непознати сабирак, умањилац, умањеник, чинилац, дељеник и делилац (нпр. $7 = x + 5$, $12 : x = 4$). Користе се примери једначина које се решавају и проверавају искључиво директном применом таблица множења и дељења.

Идеја пресликавања се развија прављењем табела зависности. Нпр. приказивањем како се у зависности од промене вредности променљиве x, мења вредност израза $x + 2$. Комбинаторни задаци, задаци одређивања следећег члана низа или уочавање правила у делимично попуњеној табели и попуњавање остатка табеле посебно су подстицајни за развој математичко логичког мишљења. Нпр. одреди правило за формирање низа задатог почетним члановима или попуњавање започете табеле и обрнуто, на основу датог упутства одреди чланове низа или попуни табелу. Важно је размотрити различита решења, уколико их има."

Трећи разред:

Посебно, проблеми уочавања и описивање речима правила за настајање бројевног низа подстичу развијање математичко логичког мишљења.

Решавање задатака у реалистичним и проблемским ситуацијама је контекст за утврђивање и проширивање знања о својствима рачунских операција и примени аритметичких правила као олакшици у рачунању. Зависност резултата од промене компоненти операција, као важна особина, обрађује се кроз примере у циљу стицања функционалних знања. Симболички запис аритметичких правила се не ради у трећем разреду.

Ученике треба навикавати да, пре израчунавања, процењују вредности бројевних израза. То је вештина која им помаже да уоче да су направили грешку приликом рачунања и има примену у свакодневном животу (нпр. процена рачуна у продавници, процена потребне количине материјала и слично). Процењивање вредности израза заснива се на познавању својстава аритметичких операција и зависности резултата од промена компоненти операција.

Посебна пажња се поклања вези операција и зависности ре-зултата од промена компоненти као основе за решавање једначина и неједначина. Решавају се једначине облика $a + x = b$, $a - x = b$, $x - a = b$, $a \cdot x = b$ на основу веза операција сабирања и одузимања и множења и дељења. Подстиче се навика провере решења и анализа „логичности" решења с обзиром на контекст проблема. Решавају се неједначине облика: $a \pm x < b$, $a \pm x > b$, $x - a < b$, $x - a > b$. Бирати примере неједначина код којих је лако сагледати скуп решења (погађањем или коришћењем табела). Увести начин записивања решења уз коришћење симбола ∈, { и }.

Четврти разред:

„Упознају се својства скупа N_0: уређеност, кардиналност, органиченост са леве стране као и својства рачунских операција (замена места сабирака, здруживање сабирака, замена места чинилаца, 0 као сабирак, 1 као чинилац, множење збира и разлике бројем, сталност збира и разлике).

Утврђују се својства операција која се изражавају реторички и симболички (формулама). Кроз примере ученицима се указује на функционалну примену својства операција при рачунању.

Поред утврђивања способности израчунавање вредности простих и сложених бројевнх израза, код ученика се развија способност састављања бројевних израза и израза са промењљивом на основу инструкција или математичког моделовања проблемске ситуације.

Решавају се просте и сложене једначине (a x x ± b = c, a – b x x = c, x : a ± b = c, a – x : b = c, a:x ± b = c, a – b : x = c, a x (x ± b) = c, a □ (b - x) = c, (x ± b) : a = c, (a-x):b = c, a : (x ± b)=c, a : (b-x) = c) и просте неједначине (у којима су релацијски знаци < , > , ≤ или ≥)са решењима из скупа N_0 . Решавање једначина заснива се на познавању рачунских операција и њихове међусобне повезаности. Ученици се упућују да утврде вредности које би могла имати непозната у неједначини и у том скупу утврђује се за које вредности непознате се добија тачна неједнакост. Решавање неједначина заснива се на таблицама или на решавању одговарајућих једначина и познавања фунционалне зависности резултата рачунских операција од њених компонената. Решења се записују уз коришћење симбола { и }. Разматрају се случајеви код којих неједначина има једно решење, има више решења или нема решења. Подстиче се навика провере решења и анализа „логичности“ решења с обзиром на природу проблема.

Решавање задатака у реалистичним и проблемским ситуацијама је контекст за утврђивање и проширивање знања о својствима рачунских операција и развој способности математичког моделоавања.

Важно је омогућити ученицима да решавају задатке који ће допринети даљем развијању математичко логичког мишљења и припреми за бављење појмом функције у наредним разредима. Зато су корисни задаци одређивања следећег члана низа, уочавања и описивања правила на основу започетог низа, формирања низа на основу заданог правила, као и осмишљавања новог правила за формирање низа."

13.2. Прилог 2. Задаци коришћени на иницијалном тестирању

1. Допуни реченицу и једнакост, тако да добијеш формулацију аритметичког правила:

а) Замена места сабирака:

Ако заменимо места сабирцима ____________________________

a+b=____

б) Здруживање чинилаца:

Производ се не мења ______________________________

(k·n)·m=____

в) Множење збира бројем:

Збир множимо бројем тако што________________________________

____

____

p·(r+s)=____

2. У овом задатку можеш да не рачунаш, а ако треба нешто да израчунаш, пиши на линијама испод. **Да ли је једнакост тачна? Заокружи тачан одговор.**

а) (142+23)+47=142+(23+47) ДА НЕ

____

____

б) 100-(15+2)=(100-15)-2 ДА НЕ

____

____

в)100-(15+2)=(100-15)+2 ДА НЕ

____

____

г)100:5=120:5-20:5 ДА НЕ

____

____

д) (183-20)+9=(183+9)-20 ДА НЕ

____

____

ђ) 172·5+8·5=183·5 ДА НЕ

____

____

3. Одговори на питање и допуни једнакост:

а) Шта се дешава са збиром ако први сабирак повећамо за 12?

____

a+b=z; (a+12)+b=______________________________________

б) Шта се дешава са збиром ако први и други сабирак повећамо за 12?

____

a+b=z (a+12)+(b+12)=_____________________

в) Шта се дешава са збиром ако први и други сабирак увећамо два пута?

____

$a+b=z$; $(a\cdot 2)+(b\cdot 2)=$______________________________________

г) Шта се дешава са разликом ако и умањеник и умањилац повећамо за 12?

____

$x-y=r$; $(x+12)-(y+12)=$______________________________

д) Шта се дешава са разликом ако умањеник повећамо за 14 а умањилац повећамо за 2?

____

$x-y=r$; $(x+14)-(y+2)=$_________________________________

4. Израчунај на теби најлакши начин:

$9999+6758=$____________________________________

$3\cdot 49+1=$_______________________________________

$(350+27)-(50+27)=$______________________________

$2\cdot 72-2\cdot 2=$______________________________________

$346+100-46=$___________________________________

$728-99+11=$____________________________________

$7\cdot 8+7\cdot 8=$______________________________________

$5\cdot 3+2\cdot 4\cdot 6=$______________________________________

13.3. Прилог 3. Задатак за испитивање разумевања променљиве

5. Заокружи слово испред тачног одговора.

а) Једнакост а·2=2·а

А Тачна је за било коју вредност слова а

Б Тачна је само за а=0

В Тачна је само за неке вредности слова а

Г Задатак није довољно јасно постављен

б) Једнакост r+117=165

А Тачна је за било коју вредност слова r

Б Тачна је само за r = 48

В Задатак није јасно постављен

в) Неједнакост m-25<76

А Тачна је за било коју вредност слова m

Б Тачна је само за неке вредности слова m

В Задатак није довољно јасно постављен

Г) Неједнакост n< n+1

А Тачна је за било коју вредност слова n

Б Тачна је само за n=0

В Тачна је само за неке вредности слова n

Г Задатак није довољно јасно постављен

д) Једнакост (k-27)+i=(k+i)-27

А Тачна је за било које вредности слова k и i (k>27)

Б Тачна је само за k=27 и i=0

В Задатак није довољно јасно постављен

13.4. Прилог 4. Задаци коришћени на завршном тесту

1. Израчунај на теби најлакши начин. Начин рачунања и решење пиши на линијама.

99 999 + 7 566 + 1 = ______________________________

4 · 999 + 1 =______________________________

328 + 100 – 100 = ______________________________

350 + 27 – 150 – 27 =______________________________

201 · 301 – 201 · 1 =______________________________

6 346 + 7 588 – 346 =______________________________

6 346 + (7 588 – 346) = ______________________________

728 - 101 + 1 =______________________________

5 999 – 500 – 500 =______________________________

58000 : 100 : 10 = ______________________________

3 · 3 + 2 · 4 · 6 =______________________________

2. Постави задатак на више начина тако што ћеш написати изразе.

а) Продавац је на пијацу донео сир за продају у две кофе. У једној је било 28kg, а у другој 32kg сира. Продао је 8 kg сира. Колико kg сира је остало продавцу за продају?

____

____

____

____

б) У аутобусу се вози 60 путника. На станици је на предњим вратима изашло 12, а на задњим 22 путника. Колико је путника остало у аутобусу?

в) Маријана је у једном џепу имала m бомбона, а у другом n. Марини је дала 5 бомбона. Колико је бомбона остало Маријани?

г) У продавници кућних љубимаца налазе се шест акваријума са по 120 рибица. Продавац жели те рибице да премести у три акваријума. Колико ће рибица бити у сваком акваријуму?

д) Петра је торту масе x килограма поделила на два дела, па је сваки од преосталих делова поделила на још 4 дела. Колика је маса сваког тако добијеног парчета торте? Да ли је Петра могла да подели торту на још неки начин?

ђ) У књижари је било 10 једнаких пакета са по 100 свезака. Продавац је из сваког пакета узео по две свеске. Колико је укупно свезака остало у пакетима?

____

____

____

____

е) Продавац треба да извади 8 поморанџи из гајбе и да преостале поморанџе расподели у 4 кесе. Колико ће се поморанџи бити у свакој кеси?

____

____

____

____

3. Помоћу датих бројева и слова (можеш употребљавати и заграде), на линијама запиши изразе који ће имати исту вредност као дати израз (претпостави да све операције можеш да изведеш):

а) 250 + 5 + 180 **б)** 250 – 5 + 150 **в)** 250 : 10 : 5

______________ ______________ ______________

______________ ______________ ______________

______________ ______________ ______________

г) $a \cdot b \cdot c$

д) $e - 5 - g$

ђ) $h \cdot i : 2$

е) $(7 + 8) \cdot 2$

ж) $(a - b) : 2$

з) $3 \cdot a + 18 \cdot a$

Милана Дабић Боричић
АЛГЕБАРСКИ ЗАКОНИ У ПОЧЕТНОЈ
НАСТАВИ МАТЕМАТИКЕ

Издавач

Факултет за образовање учитеља и васпитача
Београд, Краљице Наталије 43
www.uf.bg.ac.rs

За издавача

проф. др Данимир Мандић, декан

Лектор и коректор

Страхиња Полић

Графички уредник

Зоран Тошић

DOI 10.46793/7849.359.1.Dabic

ISBN 978-86-7849-359-1

ЕДИЦИЈА МОНОГРАФИЈЕ

1. др Јасмина Милинковић: *Методички аспекти увода у вероватноћу и статистику*
2. мр Вера Ж. Радовић: *Феминизација учитељског позива*
3. мр Валерија Јанићијевић: *Родови и врсте у настави књижевности (у млађим разредима основне школе)*
4. мр Оливера Ђокић: *Појам линије у почетној настави геометрије*
5. мр Зорица Јоцић: *Језичко стваралаштво ученика у настави граматике*
6. мр Валентина Хамовић: *Два песника превратника*
7. мр Маријана Зељић: *Начини изражавања процедуре и правила аритметике*
8. мр Зорана Опачић: *Алхемичар приповедања Станислав Краков*
9. мр Зорица Веиновић: *Настава природе и друштва и одрживи развој*
10. мр Бојана Милосављевић: *Форме учтивости у српском језику*
11. мр Сања Благданић: *Методичка ефикасност мреже појмова (у настави познавања природе)*
12. др Слађана Јаћимовић: *Путописна проза Милоша Црњанског*
13. мр Дејан Вук Станковић: *Морал и право. Филозофија Херберта Харта*
14. др Гордана Мишчевић Кадијевић: *Кооперативна настава природе и друштва и квалитет знања ученика*
15. мр Зорица Ковачевић: *Инструкције за самостално учење у уџбеницима за млађе разреде*
16. др Иљаз Османлић: *Развој грађанског друштва и образовање*
17. др Миодраг Вуковић: *Измењена стања свести у религији*
18. др Зорица Цветановић: *Читанка у разредној настави*
19. мр Мирсада Зукорлић: *Унапређивање комуникације у школи*
20. др Јелена Д. Врањешевић: *Развојне компетенције и партиципација деце: од стварног ка могућем*

21. др Дејан Вук Станковић: *Морални аргумент у прилог права. О филозофији Џона Мичела Финиса*
22. др Маријана Зељић: *Методички аспекти ране алгебре*
23. др Сања Благданић: *Историјски садржаји у настави природе и друштва*
24. др Александар Тадић: *Наставнички модели и стратегије разредне дисциплине*
25. др Вишња Мићић: *Синтакса просте реченице у разредној настави*
26. мр Филдуза Прушевић Садовић: *Савремена наставна технологија учења и поучавања*
27. др Горан Зељић: *Морфолошко-семантичке карактеристике бројева у српском језику*
28. др Валерија Јанићијевић: *Теорија књижевности у разредној настави*
29. др Даница Џиновић Којић, Владан Пелемиш: *Квантитативне и квалитативне карактеристике морфолошког и моторичког простора предшколске деце*
30. др Ана Сарвановић: *Образовни обрт: ка савременим теоријама образовања у уметности и култури*
31. др Оливера Ј. Ђокић: *Реално окружење у почетној настави геометрије*
32. др Зорица Ковачевић: *Оспособљавање за самостално учење*
33. др Александра Мандић: *Хеуристичке математичке игре*
34. др Зорица Веиновић: *Улога деце у очувању животне средине и/у одрживом друштву: прилози васпитању и образовању за одрживи развој*
35. Бојан Марковић: *(Не)могуће границе поезије за децу и младе*
36. Милана Дабић Боричић: *Алгебарски закони у почетној настави математике*

ЕДИЦИЈА МОНОГРАФИЈЕ

МИЛАНА ДАБИЋ БОРИЧИЋ рођена је 1985. године у Панчеву, где је завршила основну школу и гимназију. Дипломирала је на Математичком факултету Универзитета у Београду, а докторирала на Факултету за образовање учитеља и васпитача у Београду на теми из области математичког образовања.

Ауторка је радова објављиваних у научним часописима и тематским зборницима и учесница многих научних скупова у земљи и иностранству. Учествовала је у више међународних пројеката. Ради као доцент на Катедри за методику математике Факултета за образовање учитеља и васпитача Универзитета у Београду.