

Оливера Ј. Ђокић<sup>\*1</sup> и Мина М. Милошевић<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Факултет за образовање учитеља и васпитача, Универзитет у Београду, Србија

<sup>2</sup>Основна школа „Васа Чарапић“, Београд, Србија

## КОНЦЕПТУАЛНО РАЗУМЕВАЊЕ ПОВРШИНЕ У УЏБЕНИЦИМА МАТЕМАТИКЕ<sup>1</sup>

Резултати међународног истраживања TIMSS (2011, 2015, 2019) за Србију за ученике четвртог разреда основне школе показују да су постигнућа ученика у области мерења нижа у односу на постигнућа у другим областима (као што је број). Како бисмо испитали могуће узроке, анализирали смо актуелне уџбенике за трећи и четврти разред основне школе који су одобрени и који се користе у школама у Републици Србији. Циљ истраживања је испитивање две врсте знања – концептуалног и процедуралног – у уџбеницима математике за област мерење и појам површина. У раду је примењена дескриптивна метода. Основни резултати истраживања показују да: 1) у уџбеницима за трећи разред према новом наставном програму готово је искључиво присуство задатака мерења површине оријентисаних на концептуално разумевање и 2) у уџбеницима за четврти разред индикатори који су оријентисани на препознавање концептуалног разумевања показују знатно мање присуства у односу на индикаторе који указују на процедурална знања. Разлог овоме видимо у почетном формирању појма површине који представља прво нумеричко рачунање (после мерења дужине). Закључци рада упућују на забринутост присуства задатака који траже искључиво концептуално разумевање у новим уџбеницима за трећи разред и затечене интеракције између две врсте знања у сада већ старим уџбеницима за четврти разред чиме се отварају питања за даља истраживања у новим уџбеницима.

*Кључне речи:* мерење површине, концептуално и процедурално знање, уџбеници математике, наставни програм, Србија

### Увод

Још од предшколског образовања млађа деца се упознају са мерењем различитих величина, на пример дужине. Поред дужине,

*olivera.djokic@uf.bg.ac.rs*

<sup>1</sup>Истраживање представља резултате прерађеног и у теоријском делу допуњеног мастер дипломског рада Концептуално разумевање површине у уџбеницима математике, одбрањеног на Учитељском факултету Универзитета у Београду 17. 07. 2020. године (под менторством проф. др Оливере Ј. Ђокић).

ученици већ у почетној настави уче и о мерењу површине. Увођење сваког од наведених математичких појмова захтева добру припрему учитеља, а важним фактором у процесу формирања наведених појмова сматра се и уџбеник математике. Начин на који се наведени математички појмови о мерењу величина представљају у уџбеницима, у великој мери утиче на то како ће ученици формирати математичке појмове у области мерења.

Наше истраживање усмерено је на садржинску анализу уџбеника у првом циклусу образовања за област мерење и појам површине пратећи настале промене наставних програма у Србији. Анализирани уџбеници су одобрени и користе се у настави. Овим радом и дубљом методичком анализом утврдићемо како изгледа први сусрет ученика са појмом површине и њеним мерењем. Утврдићемо начин на који је појам површине уведен у уџбенике математике различитих издавача и ка каквим знањима се у њима тежи. Да бисмо код ученика формирали појмове и конструисали знања која подразумевају разумевање и довођење појмова у везе, треба тежити ка концептуалном разумевању, уз процедуралну флексибилност. Због тога, испитаћемо каквим знањима теже уџбеници математике који се користе у настави у Србији, пратећи интеракцију између концептуалног и процедуралног знања у области мерења за појам површине према индикаторима Тан Сисман (Tan Şişman, 2010; Tan Şişman и Aksu, 2016) а који упућују на две наведене врсте знања.

### **Теоријски оквир истраживања**

Полазна идеја за наше истраживање проистекла је из рада Хонга и сарадника (Hong, и сар., 2018) који су анализирали уџбенике који се користе у настави у Источној Азији и Сједињеним Америчким Државама, са циљем да испитају постоји ли узрочно-последична веза између резултата TIMSS (Trends in International Mathematics and Science Study) и PISA (Programme for International Student Assessment) тестова, у којима ученици Источне Азије остварују боље резултате од ученика Сједињених Америчких Држава, и садржаја уџбеника који се користе у настави у овим деловима света. Иако уџбеници нису једини извор информација, они представљају главни извор са којим се ученици сусрећу, те, уколико су понуђене информације које покривају математичке области оскудне, оне могу бити разлог потешкоћа у савладавању математичких области. Резултати истраживања Хонга

и сарадника су показали да је приступ области мерења површине у уџбеницима Јужне Кореје и САД-а различити, као и редослед тема, али оба модела (приступа) имају своје предности и недостатке. Ово нас је подстакло да исте елементе испитамо и у Србији, а из ширег истраживања (Milošević, 2020), због обима рада, овде представљамо само део који се односи на интеракцију две врсте знања у актуелним уџбеницима математике који се користе у Србији.

*Мерење површине.* Већ у почетној настави математике постепено се замењују мерења нестандартним мерним јединицама и коришћење алата и почињу да се користе формуле и формулска рачунања у области мерења и то прво површине (касније и запремине). Иако се површина обично дефинише у просторном смислу, фокус мерења ове величине управо укључује нумеричко резоновање. Формула за површину, дакле, замењује коришћење мерног инструмента и мерење нестандартним јединицама мере. Овај прелаз од једних ка другима укључује више од нумеричког рачунања; укључује упознавање ученика са конструисањем нових величина од познатих мултипликативних композиција (Smith III, Males и Gonulates, 2016). Тамо где мултипликативна композиција подржава напредовање у учењу, учioniчке дискусије о томе како су нове количине мултипликативно створене су ретке. Уместо тога, фокус учioniчких дискусија постаје рачунски (нпр. „4 центиметра дуго“ постаје „4“).

Смит и Берет истичу да се мерењу често придаје много мање пажње у настави од нпр. броја (Smith III, Males и Gonulates, 2016). Сматра се да би то могао да буде један од разлога слабијих постигнућа ученика у односу на постигнућа у домену број и домену подаци, иако ово није општи случај. У многим уџбеницима тема мерење се појављује готово по правилу на крају. Будући да садржај уџбеника у многим земљама снажно обликује наставу и шта учитељи раде (нпр. Jelić, Đokić, 2017; Đokić и Popović, 2023; Smith III, Males и Gonulates, 2016), садржај и структура наставних програма обликују искуство ученика у мерењу у многим учioniцама. Задаци мерења високо су процедурално засновани у уџбеницима почетне наставе математике (Smith III, Males и Gonulates, 2016). Мало се пажње посвећује концептуалном разумевању и то ограничава поступке мерења. Не посвећује се пажња испитивању како обе врсте знања удружено структурирају мерење величина, односно каква је интеракција две наведене врсте знања.

*Врсте знања – концептуално и процедурално.* У литератури

(Tirosh, 1999) често се помињу различите врсте знања, нпр. инструментално, релационо, концептуално, процедурално, алгоритамско, формално, визуелно, интуитивно, имплицитно, експлицитно, елементарно, напредно, знати нешто, знати зашто и како. Настава се све више препознаје као професија која захтева доношење одлука и решавање проблема у сложеном и динамичном окружењу. Све више је увиђања да математичко знање само по себи не гарантује бољу наставу и чине се покушаји да се дефинишу различите врсте знања потребних за наставу. Под процедуралним знањем онако како је Р. Скемп дефинисао подразумевамо знање о специфичним алгоритамским поступцима и њиховом коришћењу, а под концептуалним разумевање математичких принципа и процеса кроз које се тренутно стање знања ученика повезује са претходним (Skemp, 1993). Поступци усмерени на развијање концептуалног знања подразумевају проблемску ситуацију која захтева резонување ученика и повезивање појмова који се формирају са претходно формираним (Henning, 2004). Резултати истраживања указују на потребу истовременог изграђивања и повезивања процедуралног и концептуалног знања (Zeljić и Dabić, 2014; Zeljić, 2021; Ђокић, 2013; Antić и Ђокић, 2019).

Тан Сисман (Tan Şişman, 2010) и Тан Сисман и Аксу (Tan Şişman и Aksu, 2016) су у својим опсежним истраживањима о мерењу дужине, површине, запремине представиле примере математичких задатака који су усмерени на концептуална и процедурална знања. Наводимо типичне примере које смо и ми преузели као модел-задатке у нашем истраживању, а који се односе на појам површине.

- *Конзервација површине*. Цејн има папир правоугаоног облика (фигура А у Задатку 1). Исекла је парче (фигура В), а затим га је превукла на доњу страну папира (фигура С). Изабери један од три започета одговора као тачан на постављено питање према слици и објасни опредељење за такав одговор.

Одговор са објашњењем 1: Површина фигуре С је већа од површине фигуре А, јер...

Одговор са објашњењем 2: Површина фигуре С је мања од површине фигуре А, јер...

Одговор са објашњењем 3: Површине фигура А и С су једнаке, јер...

### Задатак 1.

Конзервација површине (Tan Şişman, Aksu, 2016, Appendix C)

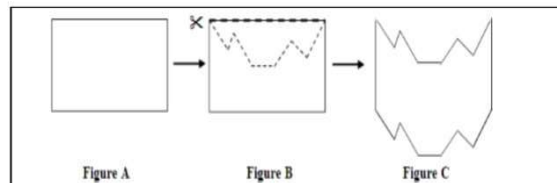


Figure A                      Figure B                      Figure C

Jane has rectangular piece of paper (see Figure A). She cuts a piece from it (see Figure B) and then, slides that piece to the opposite side of the rectangular paper (see Figure C). Based on the information given, choose one of three comments about the figures and explain your reasoning.

Comment 1	Comment 2	Comment 3
<input type="checkbox"/> The area of Figure C is larger than the area of Figure A. Because,	<input type="checkbox"/> The area of Figure C is smaller than the area of Figure A. Because,	<input type="checkbox"/> Both the area of Figure C and the Figure A are equal. Because,
.....	.....	.....
.....	.....	.....
.....	.....	.....
.....	.....	.....

Погледајмо пажљиво дати задатак. Папир је исечен, али тако да укупна површина папира остаје непромењена (површина је конзервирана). Да би решио задатак, ученик би требало концептуално да разуме површину.

- *Израчунавање површине правоугаоника.* Израчунај површину правоугаоника приказаног на слици.

### Задатак 2.

Израчунавање површине правоугаоника (Tan Şişman и Aksu, 2016, Appendix D)

*Task 4: Finding the Area of a Rectangle*



Find the area of a rectangle shown at the left side.

Можемо увидети да је потребно да ученик зна формулу за израчунавање његове површине. Подаци о дужинама страница су дати, те само треба применити формулу множећи мерне бројеве дужине и ширине правоугаоника. У овој ситуацији је неопходно да је ученик конструисао процедурално знање.

*Интеракције између различитих врста математичког знања.*  
 На основу анализа о две наведене врсте знања бројна истраживања (Hurrell, 2021; Rittle-Johnson, Schneider, 2015; Rittle-Johnson и с а р . , 2015; Rittle-Johnson, 2017) наводе следеће ставове

истраживача по питању редоследа конструисања одређене врсте знања. *Прво-концеп-туални ставови* истраживача износе да ученици у почетку конструишу концептуално знање, на пример, кроз објашњења одраслих, а затим из њега изводе и изграђују процедурално знање кроз поновљено решавање проблема. *Друго-процедурални ставови* истраживача постављају да ученици прво уче процедуре, на пример истражујући, а затим постепено извлаче концептуално знање из њих путем процеса апстракције. Трећа могућност, понекад означена као *инактивациони поглед* јесте да се концептуално и процедурално знање развијају независно један од другог. Четврта могућност је *итеративни поглед*. За узрочне везе се каже да су двосмерне, са повећањем концептуалног знања које доводи до накнадног пораста процедуралног знања, и обрнуто. Итеративни поглед је истраживачки најприхваћенија пер спектива. Ритл-Џонсон и сарадници у својим истраживањима (Rittle-Johnson и сар., 2015; Rittle-Johnson, 2017) отварају и истраживачки пут о двосмерности конструисања две врсте знања наводећи резултате њихових секвенцијалних јављања.

Хурел (Hurrell, 2021) наводи да би многи наставници са становишта претежно присутног процедуралног знања вероватно користили уџбенике као значајан извор у свом подучавању. Овакав приступ наглашава рачунања и процедуре и подстиче ограничено, нефлексибилно учење, а не концептуално знање. Тада би могло бити разумно тврдити да фаворизовање процедуралног знања иде управо кроз употребу уџбеника. Оно што је, такође, уочено у детаљним анализама уџбеника математике на које се Хурел ослања јесте да они теже представљању типичних задатака и предлагања начина за њихово решавање. Најчешће се дају у форми алгоритамских корака као што су поступци решених примера задатака и стварању прилика за учење у кратком року, али које указују да они не успевају да унапреде дугорочно концептуално знање ученика.

*Индикатори који указују на концептуално разумевање и процедурално знање у уџбеницима математике при мерењу површине.* Иако говоримо о две врсте знања, процедуралном и концептуалном, Ритл-Џонсон и сарадници их именују *процедуралним знањем* и *концептуалним разумевањем*, наглашавајући да је за концептуално знање потребно дубље разумевање математичких појмова (Rittle-Johnson и сар., 2001). Ми смо ове термине преузели од њих. Тан Сисман (Tan Sisman, 2010) је испитивала постигнућа ученика на крају другог ци-

класа образовања у Турској из области мерења коришћењем задатака оријентисаних на две врсте знања, те концептуално разумевање мерења дужине, површине, запремине. Захтеви и задаци из наведеног истраживања су нам дали основу за формирање листе индикатора који указују на две врсте знања у области мерење за појам површине. На основу математичких задатака Тан Сисман извели смо индикаторе за препознавања две врсте знања при мерењу и то оне који се односе на мерење површине (видети *Прилог 1*).

*Појам површине у првом циклусу основног образовања у Србији.* Од школске 2018/2019. године у Србији се уводе промене у наставним програмима математике, а оно што је за наш рад занимљиво је промена у трећем разреду (*Pravilnik o program nastave i učenja za treći razred osnovnog obrazovanja i vaspitanja, 2019*). Наставни програм сада уноси измену и прописује упознавање ученика са појмом мерења површине геометријских фигура и то без увођења стандардних мерних јединица за мерење површине. Са ученицима треба решавати једноставније проблеме у којима је потребно поплочати (прекривати) задату површ различитим геометријским фигурама и измерити њену површину, а задаци у реалном контексту треба да буду основа за бављење овим садржајима.

У наставном програму за четврти разред који је важио до 2021/22. школске године (*Pravilnik o nastavnom programu za četvrti razred osnovnog obrazovanja i vaspitanja, 2006*), област мерење површине износи захтеве да ученици упознају јединице мере за површину и примењују их при израчунавању површине квадрата, правоугаоника, те коцке и квадра. Потребно је да ученици науче формуле за израчунавање површине наведених фигура и тела и примењују их у задацима. Наставни програм за четврти разред, дакле, акценат ставља на претварање мерних јединица и примену формуле за израчунавање површине фигура и тела. Овако постављене захтеве у Наставном програму издавачи имају у виду при интерпретацији програма и изради уџбеника.

Подстакнути чињеницом да ће ученици трећег и четвртог разреда на часовима математике изучавати површину, као и резултатима истраживања Хонга и сарадника (Hong, и сар., 2018), поставили смо следећа истраживачка питања:

- Каква је интеракција две врсте знања - концептуалног и процедуралног - у уџбеницима математике за трећи разред за област мерење и појам површине према индикаторима који указују на одређену врсту знања?

- Каква је интеракција две врсте знања - концептуалног и процедуралног - у уџбеницима математике за четврти разред за област мерење и појам површине према индикаторима који указују на одређену врсту знања?

### Методолошки оквир истраживања

- *Циљ* истраживања је испитивање односа две врсте знања – концептуалног и процедуралног - Утврдити интеракције две врсте знања у уџбеницима математике за трећи разред према индикаторима који указују на одређену врсту знања.
- Утврдити интеракције две врсте знања у уџбеницима математике за четврти разред према индикаторима који указују на одређену врсту знања.

У истраживању смо се служили *дескриптивном методом*, тежећи да опишемо тенденције уочене у анализираним уџбеницима. У оквиру дескриптивне методе користили смо се *техником анализе садржаја*. Као *инструмент истраживања* користили смо протокол у коме су бележене посматране појаве (видети *Прилог 1*). Протокол има функцију бележења учесталости појављивања задатака чији су захтеви усмерени на две врсте знања, те праћење њихове интеракције. *Узорак истраживања* чинили су сви уџбеници математике за трећи разред основне школе издавача Нови Логос, Едука, Клет, Фреска, БИГЗ школство, ЈП Завод за уџбенике, Креативни центар и Вулкан и сви уџбеници математике за четврти разред основне школе издавача Нови Логос, Едука, Клет, БИГЗ школство, ЈП Завод за уџбенике и Креативни центар, који су били одобрени за употребу у настави у Србији у школској 2019/2020. години када је рађено наше истраживање (*Katalog udžbenika za treći i sedmi razred osnovnog obrazovanja i vaspitanja, 2018; Katalog udžbenika za četvrti i osmi razred osnovnog obrazovanja i vaspitanja, 2018*). У току нашег истраживања појам површине се уводио само у четвртном разреду. Наше истраживање, дакле, за узорак има нове уџбенике за трећи и актуелне, који постају стари, за четврти разред. Осим издавача чији су уџбеници коришћени за четврти разред у школама у Србији (Нови Логос, Едука, Клет, БИГЗ школство, ЈП Завод за уџбенике, Креативни центар), два нова издавача (Вулкан и Фреска) објавила су уџбенике на основу новог наставног програма за трећи разред. Са намером да анализирамо и њихове предлоге и решења мерења површине, и њих смо уврстили у наше ис-



траживање, јер се очекује да ће континуитет наставити са насловима и за четврти разред. Уџбеници су анализирани као део јединственог уџбеничког комплета, који је различит у зависности од издавача.

### Резултати истраживања са дискусијом

#### - Интеракције две врсте знања у уџбеницима за трећи разред

Наш први истраживачки задатак био је да утврдимо интеракције две врсте знања у уџбеницима математике за трећи разред према индикаторима који указују на одређену врсту знања. У Табели 1 дајемо приказ учесталости појављивања индикатора и њихов однос према наведеним врстама знања.

#### Табела 1.

Индикатори који указују на две врсте знања у свим уџбеницима за трећи разред

Индикатор	N (%)
<i>Концептуално разумевање</i>	
1. Избор потребне информације за решавање проблемске ситуације из реалног окружења, уз објашњење избора.	1 (1,22)
2. Избор погодне мерне јединице за рачунање површине.	0 (0)
3. Конзервација површине.	8 (9,76)
4. Површина и запремина коцке.	0 (0)
5. Коришћење квадратне мреже при израчунавању површине (мерна јединица – основни елемент мреже).	6 (7,32)
6. Мрежа кутије облика квадрата.	67 (81,70)
<i>Концептуално разумевање <math>\dot{a}</math></i>	82 (100%)
<i>Процедурално знање</i>	
<i>Процедурално знање <math>\dot{a}</math></i>	0 (0%)
$\dot{a}$	82 (100%)

Од свих индикатора у уџбеницима за трећи разред за област мерење и појам површине идентификовани су само они који упућују на концептуално разумевање. Ако погледамо сваки од индикатора у Табели 1, за појам мреже кутије облика квадрата упућен је највећи број инструкције (захтева и задатака), чак 81,70%. Много мањи број захтева односи се на конзервацију површине 9,76% и коришћење квадратне мреже при израчунавању површине, где се мерна јединица препознаје као основни елемент мреже 7,32%. Избор потребне информације за решавање проблемске ситуације заступљен је са свега 1,22%, док је избор погодне мерне јединице за рачунање површине, те површина и

запремина коцке као интуитивно разумевање и разликовање уопште нису заступљени нити у једном уџбенику за трећи разред. Уџбеници ученике не стављају у ситуације за учење о процени и закључивању којом мерном јединицом је најпогодније изразити величину површине. На основу овога закључујемо да уџбеници за трећи разред готово искључиво позивају на концептуално учење, без потпоре у процедуралном који би надаље развијао флексибилност мишљења ученика и доводио их до правог знања.

- *Интеракције две врсте знања у уџбеницима за четврти разред*

Наш други истраживачки задатак био је да утврдимо интеракције две врсте знања у уџбеницима математике за четврти разред према индикаторима који указују на одређену врсту знања. У Табели 2 приказана је учесталост појављивања индикатора и њихов однос према наведеним врстама знања.

## Табела 2.

Индикатори који указују на две врсте знања у свим уџбеницима за четврти разред

Индикатор	N (%)
<i>Концептуално разумевање</i>	
1. Избор потребне информације за решавање проблемске ситуације из реалног окружења, уз објашњење избора.	7 (0,90)
2. Избор погодне мерне јединице за рачунање површине.	14 (1,80)
3. Конзервација површине.	13 (1,68)
4. Површина и запремина коцке.	6 (0,78)
5. Коришћење квадратне мреже при израчунавању површине (мерна јединица – основни елемент мреже).	61 (7,88)
6. Мрежа кутије облика квадрата.	40 (5,17)
<i>Концептуално разумевање а</i>	141 (18,21%)
<i>Процедурално знање</i>	
7. Претварање мерних јединица за површину у оквиру система мера.	129 (16,67)

8. Коришћење формуле за површину коцке.	73 (9,43)
9. Коришћење формуле за површину правоугаоника.	48 (6,20)
10. Рачунање површине квадрата.	168 (21,71)
11. Рачунање неосенченог дела правоугаоника.	61 (7,88)
12. Рачунање површине правоугаоника.	154 (19,90)
<i>Процедурално знање <math>\hat{a}</math></i>	633 (81,79%)
$\hat{a}$	774 (100%)

Од укупног броја издвојених индикатора, свега 18,21% указује на концептуална разумевања, а чак 81,79% на процедурална знања уџбеницима за четврти разред за појам површина. Овакав однос две врсте знања указује нам на општу тенденцију издавача уџбеника ма-тематике за четврти разред ка процедуралним знањима.

У оквиру индикатора који указују на концептуална разумевања најмање смо идентификовали оних који указују на задатке интуитивног разумевања површине и запремине коцке и избор потребне информације за решавање проблемске ситуације из реалног окружења, уз објашњење избора, редом 0,78% и 0,90%. Уџбеници тиме не стављају ученике у прилике за учење засноване на интуитивно блиском реалном окружењу при изграђивању појма површине. Конзервација површине и избор погодне мерне јединице заступљени су са 1,68% и 1,80% редом. Овакви уџбеници готово да не позивају ученике на промишљање о идеји растављања/саставања неке површи и уочавања како да измеримо њену површину (Еуклидска метода), нити шта је погодна мерна јединица којом се таква површ поплочава (прекрива). Индикатори који указују на мрежу кутије облика квадрата и на коришћење квадратне мреже препознајемо код 5,17% и 7,88%. Приметимо да овако структурисани уџбеници ученике стављају у ситуације учења где се доста инсистира на преласку из равни у простор, скалапајући мрежу у тела, и обрнуто.

У оквиру индикатора који указују на процедурална знања најмање смо идентификовали оних који указују на задатке коришћење формуле за површину правоугаоника и рачунање неосенченог дела правоугаоника 6,20% и 7,88%. Овим се види да уџбеници не стављају ученике у прилике за учење о правоугаонику и рачунању његове површине тако да задаци иду ка задацима примене наученог знања са елементима закључивања, што може отежавати долазак до нивоа закључивања/резоновања као највишег нивоа знања ученика. Коришћење формуле за површину коцке појављује се у нешто више, 9,43% задатака. Следи група задатака за претварање мерних јединица за површину у оквиру система мера, рачунање површине правоугаоника и рачунање површине квадрата и то редом заступљени са 16,67%, 19,90% и 21,71% задатака. На основу овога закључујемо да уџбеници за четврти разред за појам површина доста по-

живају на учење са меморисањем чињеница, јер захтевају једноставније поступке претварања мерних јединица и рачунања површине.

### Закључци

Циљ нашег рада био је да утврдимо однос концептуалног и процедуралног знања у уџбеницима математике за област мерење и појам површина према индикаторима који упућују на ове две врсте знања. На основу података добијених анализом уџбеничких комплекта можемо да закључимо да је код свих издавача присутност индикатора који указују готово искључиво на концептуална знања у трећем и већу присутност за процедурална у односу на концептуална у четвртом разреду. Нити један уџбеник издавача за трећи разред ставља ученике у прилике да уче у интеракцији две врсте знања. Као разлог овоме видимо у предвиђеном садржају области мерење за појам површина (Pravilnik o programu nastave i učenja za treći razred osnovnog obrazovanja i vaspitanja, 2019). У наставном програму за трећи разред се наводи да ученике треба упознати са појмом мерења површине геометријских фигура, и то без увођења стандардних јединица. Предлаже се решавање једноставнијих проблема у којима је потребно поплочавати одређену површ различитим геометријским фигурама (правоугаоник, квадрат и троугао). Основу за бављење овим садржајима чине задаци у реалном контексту. Препоручује се коришћење мануелних наставних средстава при уводним разматрањима појма површине (нпр. поплочавање површи фигуре моделом од картона). Иако овај наставни програм јасно акцентује концептуално разумевање површине, не занемарује ни процедурално знање - мада не експлицитно - које ни сами аутори уџбеника не препознају. На пример, при избору нестандартне мерне јединице квадрата при поплочавању може се бирати квадрат и његова четвртина (мањи квадрат), или квадрат и његова половина (троугао) и сл. и вршити претварање наведених мерних јединица из мањих у веће, и обрнуто. Овим би се створила основа претварања прво нестандартних мерних јединица, а касније и стандардних у оквиру система мера у четвртом разреду који би подстицали процедуралну флексибилност и јачали интеракцију две врсте знања. Ако имамо на уму да концептуално разумевање тражи подршку у процедуралној флексибилности у дужем процесу подучавања и учења (Rittle-Johnson, 2017), која је овде приметно изостала, постављамо питање о интеракцији између две врсте математичког знања и стварања потпоре једна другој, јер се из наведених подата-

ка анализе уџбеника види да оне изостају. Наведене врсте знања се према Ритл-Џонсону често развијају двосмерно и итеративно (у понављањима), са побољшањима у једној врсти знања која подржавају побољшања у другој. Такве прилике за учење у уџбеницима за четврти разред су смисленије бирани. Па ипак, ученицима су захтеви у задацима више усмерени на процедурална знања, чак изражено више код већине издавача. Па ипак, можемо да кажемо да су уџбеници за четврти разред боље структурирани од уџбеника за трећи. Овде се отвара питање структуре нових уџбеника као интерпретације новог наставног програма (*Pravilnik o programu nastave i učenja za četvrti razred osnovnog obrazovanja i vaspitanja*, 2019) са јаснијим идејама за формирање појма површине у стварању прилика за учење. Оно што нас је и подстакло на ово истраживање јесу нови уџбеници будући да ученици по њима уче, исти они ученици чија ће се постигнућа мерити у новом циклусу TIMSS 2023 у ком учествује и Србија. Биће то прва генерација ученика која учи према комплетно измењеном наставном програму за математику и према новим уџбеницима математике.

Основа за наше истраживање био је рад Хонга и сарадника (Hong и сар., 2018) којим је вршена компаративна анализа уџбеника из САД-а и Јужне Кореје у области мерења за појам површина. Наши резултати садржинске анализе уџбеника за четврти разред подударају се са резултатима Хонга и сарадника у којима је заступљеност концеп-туално оријентисаних задатака знатно мања од заступљености задатака процедуралног знања, док се наши резултати анализе уџбеника за трећи разред не подударају са резултатима из наведеног истраживања. Резултати нашег истраживања могу користити развоју и унапређењу увођења мерења површине у почетној настави математике, али и тенденције у новим наставним програмима математике и њихове интерпретације у новим уџбеницима. Могу, такође, да укажу на добре стране али и мањкавости које треба уклонити како бисмо ученицима створили прилике за учење у процесу формирања појма површине, усмерене на обе врсте знања.

Ово истраживање нам отвара нова питања за даља истраживања, на пример узорак истраживања може да буде проширен новим уџбеницима математике за четврти разред који су одобрени за употребу од школске 2021/2022. године, уопште за развој и истраживања уџбеника математике.

Методичке импликације. На основу претходних истраживања и резултата нашег рада, трагали смо за обједињујућим моделом учења

о површини и то нас је довело до рада Имса и сарадника (Eames и сар., 2020) који су приказали путање учења у области мерења површине (Табела 3). Реч је о могућем концептуалном моделу учења за увођење појма површине у почетну наставу математике. У њему можемо да са- гледамо усмереност на развој концептуалног разумевања површине, не занемарујући ни процедуралну флуентност, чиме се ствара њихова двосмерност у секвенцијалним оквирима и могућа међусобна инте- ракција ове две врсте знања. Погледајмо предложени модел.

### Табела 3.

Резиме модела учења за област мерење и појам површина (Eames и сар., 2020, у: Milošević, 2020:88).

<i>Ниво за ученика</i>	<i>Резиме нивоа напретка</i>
<i>1. Разликује површи</i>	Уочава дводимензионални простор и објекте унутар њега. Користи интуитивно мишљење при поређењу површи.
<i>2. Физички поплочава и пребројава јединичне површи</i>	Уочава да површи могу бити поплочане другим површима, уз перцептивну подршку. Уме да физички и у потпуности поплоча дату површ.
<i>3. У потпуности поплочава и пребројава јединичне површи</i>	Подразумева изричито разумевање да цела површ мора бити поплочана једнаким и правилним фигурама датог облика. Користи пребројавање јединичне површи како би израчунао површину поплочане површи.
<i>4. Повезује и понавља мерне јединице</i>	Повезује величину и број јединица (мање већих, више мањих). Користи редове као интуитивну структуру када поплочава фигуру. Израђује појам понављања јединица.
<i>5. Почетни конструктор композиције</i>	Израђује и манипулише менталним сликама јединичних површи, структурише их као засебне, јединствене облике и целине. Поставља јединице понављајући их, али не нужно и пажљиво.
<i>6. Структурише редове и колоне правоугаоника</i>	Поставља јединице површи, пажљиво их понављајући, координишући постављање додавањем једну по једну јединицу, формирајући правоугаону структуру по колонама. Примењује појам у ком дужина дужи одређује број јединица које ће се садржавати дужином те дужи.
<i>7. Структурише мрежу правоугаоника</i>	Развој апстрактног разумевања формуле за површину правоугаоника. Има јасну менталну слику мреже једнаких квадратних јединица. Сваки квадрат се може посматрати као засебна јединица, као јединица (реда или колоне) и саставни део (мреже).
<i>8. Концептуално рачуна површину правоугаоника/фигуре</i>	Формула за површину правоугаоника се генерализује када се уведу и формуле за површину других фигура.

Водећи се овим моделом, аутори уџбеника би, на пример, могли помоћу наведених развојних путањи структурирати област мерење за појам површине, знајући да би код ученика могли да га формирају тако да је он заснован на обе врсте знања (Hong и сар., 2018). За поступност на оваквом путу одлично би било да се почне са изграђивањем појма површине и раније, у разредима пре трећег (Ђокић и Osmokrović, 2022; Milošević и Ђокић, 2023).

### Литература

- Antić, M. D. & Ђокић, O. J. (2019). The Development of the Components of the Length Measurement Concept in the Procedure of Measurement Using a Ruler. *Research in Mathematical Education*, 22(4), 261–282.
- Božin, A. (2014). Konzervacija. U P. Pijanović (ur.), *Leksikon obrazovnih termina* (326–327). Beograd: Univerzitet u Beogradu, Učiteljski fakultet.
- Ђерић, I., Gutvajn, N., Jošić, S. i Ševa, N. (2020). *Nacionalni izveštaj: TIMSS 2019 u Srbiji - pogled osnovnih nalaza*. Beograd: Institut za pedagoška istraživanja.
- Ђокић, O. (2013). Mathematical exercises as a basis for pupils' mathematical thinking development. In: I. Radovanović & Z. Zaclona, Z. (eds.), *Theoretical and methodological basis of quality education (79–95)*. University of Belgrade, Serbia, Teachers' Training Faculty and State Higher Vocational School in Nowy Sacz, Poland.
- Ђокић, O. J. & Osmokrović, N. D. (2022). Young pupils' intuitive understanding and strategies of area measurement. In book of proceedings The 28<sup>th</sup> International Scientific Conference “Educational Research and School Practice“ - *The State, Problems, and Needs of the Modern Education Community* (95-105). Belgrade, Serbia: Institute for Educational.
- Ђокић, O. J. i Popović, P. S. (2023). Konceptualno razumevanje zapremine u uđbenicima matematike. *Inovacije u nastavi* (u štampi).
- Eames, C. L., Barrett, J., E., Cullen, C. J., Rutherford, G., Klanderma, D., Clements, D. H., Sarama, J., & Van Dine, D. W. (2020). Examining and developing fourth grade children's area estimation performance. *School Science and Mathematics*, 120(2), 67–78.
- Henning, P. H. (2004). Everyday Cognition and Situated Learning. In: D. H. Jonassen (Ed.), *Handbook of Research on Educational Communications and Technology* (143–168). Mahwah, New Jersey & London: Lawrence Erlbaum Associates.
- Hong, D. S., Mi Choi, K., Runnalls, C., & Hwang, J. (2018). Do textbooks address know learning challenges in area measurement? A comparative analysis. *Mathematics Education Research Journal*, 30(1), 325–358.
- Hurrell, D. P. (2021). Conceptual knowledge OR Procedural knowledge OR Con-

- ceptual knowledge AND Procedural knowledge: Why the conjunction is important for teachers. *Australian Journal of Teacher Education*, 46(2), 57–71.
- Jelić, M. i Đokić, O. (2017). Ka koherentnoj strukturi udžbenika matematike – analiza udžbenika prema strukturnim blokovima TIMSS istraživanja, *Inovacije u nastavi*, 30(1), 67–81.
- Milošević, M. M. (2020). *Konceptualno razumevanje površine u udžbenicima matematike* (master rad). Beograd: Univerzitet u Beogradu, Učiteljski fakultet.
- Milošević, M. S. i Đokić, O. J. (2023). Strukturisanje pravougaonika dece mlađeg školskog uzrasta. *Research in Pedagogy* (u štampi).
- Rittle-Johnson, B., Siegler, R. S., & Alibali, M. W. (2001). Developing conceptual understanding and procedural skill in mathematics: An iterative process. *Journal of Educational Psychology*, 93(2), 346–362.
- Rittle-Johnson, B., Schneider, M. (2015). Developing conceptual and procedural knowledge in mathematics. In: R. Cohen Kadosh & A. Dowker (Eds.), *Oxford handbook of numerical cognition* (1102-1118). Oxford, UK: Oxford University Press.
- Rittle-Johnson, B., Schneider M., & Star, J. R. (2015). Not a One-Way Street: Bidirectional Relations Between Procedural and Conceptual Knowledge of Mathematics. *Educational Psychology Review*, 27(4), 587–597.
- Rittle-Johnson, B. (2017). Developing Mathematics Knowledge. *Child Development Perspectives*, 11(3), 184–190.
- Skemp, R. R. (1993). *The Psychology of Learning Mathematics*. Penguin Books.
- Smith III, J., Males, L., & Gonulates, F. (2016) Conceptual Limitations in Curricular Presentations of Area Measurement: One Nation’s Challenges. *Mathematical Thinking and Learning*, 18(4), 239–270.
- Tan Şişman, G. (2010). *Sixth grade students’ conceptual and procedural knowledge and word problem solving skills in length, area, and volume measurement* (doctorial dissertation). Ankara: Middle East Technical University.
- Tan Şişman, G. & Aksu, M. (2016). A Study on Sixth Grade Students’ Misconceptions and Errors in Spatial Measurement: Length, Area, and Volume. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 14(7), 1293–1319.
- Tirosh, D. (Ed.) (1999). *Forms of Mathematical Knowledge. Learning and Teaching with Understanding*. Kluwer Academic Publishers.
- Zeljić, M., Dabić, M. (2014). Odnos proceduralnog i konceptualnog znanja učenika u procesu ovladavanja postupcima računanja u početnoj nastavi matematike. *Nastava i vaspitanje*, 63(4), 653–668.
- Zeljić, M. (2021). *Učenje i poučavanje matematike – jednakost sa više (ne)poznatih*. Beograd: Učiteljski fakultet.
- Katalog udžbenika za treći i sedmi razred osnovnog obrazovanja i vaspitanja.*



Službeni glasnik Republike Srbije, 27/2018.

*Katalog udžbenika za četvrti i osmi razred osnovnog obrazovanja i vaspitanja.*  
Službeni glasnik Republike Srbije, 27/2018.

*Pravilnik o nastavnom programu za četvrti razred osnovnog obrazovanja i vaspitanja.* Službeni glasnik Republike Srbije, 3/2006-4.

*Pravilnik o programu nastave i učenja za treći razred osnovnog obrazovanja i vaspitanja.* Službeni glasnik Republike Srbije, 5/2019-6.

*Pravilnik o programu nastave i učenja za četvrti razred osnovnog obrazovanja i vaspitanja.* Službeni glasnik Republike Srbije, 11/2019-1.

## CONCEPTUAL UNDERSTANDING OF AREA MEASUREMENT IN MATHEMATICS TEXTBOOKS

The results of the international survey TIMSS (2011, 2015, 2019) for Serbia for students of the fourth grade of primary school show that (the) students' achievements in the area measurement are lower compared to the achievements in other areas (such as number). In order to examine the possible causes, we analyzed the current textbooks for the third and fourth grades of elementary school that have been approved and are used in schools in Serbia. The aim of the research is to examine two types of knowledge – conceptual and procedural – in mathematics textbooks for domain measurement and area concept. The descriptive method was applied in the paper. The main results of the research show that: 1) in the textbooks for the third grade according to the new curriculum, there is almost exclusively the presence of area measurement tasks oriented to conceptual understanding and 2) in the textbooks for the fourth grade, indicators that are oriented to the recognition of conceptual understanding show significantly less presence in relation to the indicators that point out procedural knowledge. We see the reason for this in the initial formation of the concept of area measurement, which represents the first numerical computation (after measuring the length). The conclusions of the paper point to the concern of the presence of tasks that require only conceptual understanding in the new textbooks for the third grade and the found interaction between the two types of knowledge in the now old textbooks for the fourth grade with open questions for further research in the new textbooks.

*Key words:* area measurement, conceptual and procedural knowledge, mathematics textbooks, curriculum, Serbia

## Prilozi

Уџбеник		Заступљеност у уџбенику
	<i>Индикатори концептуалног разумевања</i>	
1.	Избор потребне информације за решавање проблемске ситуације из реалног окружења, уз објашњење избора. <ul style="list-style-type: none"><li>Површина папира за обмотавање кутије.</li></ul>	
2.	Избор погодне мерне јединице за рачунање површине. <ul style="list-style-type: none"><li>Разумевање погодности избора мерне јединице.</li><li>Разумевање односа између особина тела и мерне јединице за рачунавање његове површине.</li></ul>	
3.	Конзервација површине. <ul style="list-style-type: none"><li>Поређење две фигуре садржане од истих делова, уз објашњење решења.</li></ul>	
4.	Површина и запремина коцке. <ul style="list-style-type: none"><li>Узајамни однос површине и запремине при промени једног од њих, уз објашњење решења.</li><li>Разумевање повезаности површине и запремине коцке.</li></ul>	
5.	Коришћење квадратне мреже при израчунавању површине (мерна јединица – основни елемент мреже). <ul style="list-style-type: none"><li>Поређење обима/површине две фигуре са датим мрежама, уз образложење решења.</li></ul>	
6.	Мрежа кутије облика квадрата: <ul style="list-style-type: none"><li>Избор одговарајуће мреже од које се квадар може саставити, уз образложење избора.</li><li>Израчунавање површине квадрата помоћу мреже (квадрат као јединица мере).</li><li>Просторна визуализација.</li><li>Разумевање разлике између површине и запремине квадрата.</li></ul>	
	<i>Индикатори процедуралног знања</i>	Заступљеност у уџбенику
7.	Претварање мерних јединица за површину у оквиру система мера. <ul style="list-style-type: none"><li><math>\text{km}^2</math> у <math>\text{m}^2</math>, <math>\text{m}^2</math> у <math>\text{km}^2</math>, <math>\text{m}^2</math> у <math>\text{cm}^2</math>.</li></ul>	
8.	Коришћење формуле за површину коцке. <ul style="list-style-type: none"><li>Дате су површина коцке и њена дужина, пронаћи ширину/ висину коцке.</li></ul>	
9.	Коришћење формуле за површину правоугаоника. <ul style="list-style-type: none"><li>Дат је обим и дужина једне стране правоугаоника, израчунати његову површину.</li></ul>	
10.	Рачунање површине квадрата. <ul style="list-style-type: none"><li>Дате су све димензије квадрата, израчунати његову површину.</li></ul>	
11.	Рачунање неосенченог дела правоугаоника. <ul style="list-style-type: none"><li>Дате су све дужине страница у фигури правоугаоног облика, одредити површину његовог неосенченог дела.</li></ul>	
12.	Рачунање површине правоугаоника. <ul style="list-style-type: none"><li>Дати су дужина и ширина правоугаоника, израчунати његову површину.</li></ul>	