

Mila S. Milošević, asistent¹
 Učiteljski fakultet Univerziteta u Beogradu
Dr Olivera J. Đokić, vanredni profesor²
 Učiteljski fakultet Univerziteta u Beogradu

Originalni naučni rad
 UDK: 371.322
 DOI: 10.5937/IstrPed2301036M

STRUKTURISANJE PRAVOUGAONIKA KOD UČENIKA MLAĐEG ŠKOLSKOG UZRASTA³

Apstrakt: U radu se bavimo problemom prostornog strukturisanja kao mentalne operacije organizovanja 2D ili 3D prostora putem ortogonalnih mernih jedinica. S jedne strane, istraživanja pokazuju da učenici imaju poteškoća da sagledaju površ pravougaonika u terminima redova i kolona. S druge strane, ova mentalna aktivnost je ključna za pojmovno razumevanje merenja površine, ali i za druge oblasti u početnoj nastavi matematike. Cilj i zadaci rada odnose se na ispitivanje i klasifikaciju strategija prostornog strukturisanja pravougaonika pre formalnog učenja površine. Intervjuisano je devetoro dece mlađeg školskog uzrasta tokom perioda pandemije virusa Kovid-19. Kvalitativna analiza video-zapisa individualnih intervju ukazuje na to da učenici imaju različite strategije prostornog strukturisanja zavisno od razvojnog nivoa kome pripadaju i konteksta zadatka. Strategije učenika su sagledane u svetlu teorije hijerarhijskog interakcionizma i pristupa učenju zasnovanog na trajektorijama učenja prema kome je učenje integrativan i postepen proces koji se odvija kroz nivoje mišljenja. U radu je dat predlog praktičnih aktivnosti sa ciljem učenja merenja površine. Na kraju, skrećemo pažnju na dva važna problema matematičkog obrazovanja: prenaplašenost rada sa diskretnim veličinama u osnovnoškolskoj nastavi matematike i nedostajanje povezanosti nenumeričkog (geometrijskog) i numeričkog razmišljanja o površini.

Ključne reči: pravougaonik, merenje površine, prostorno strukturisanje, multiplikativno strukturisanje, učeničke strategije.

Uvod

Merenje površine je veoma važna i kompleksna oblast u nastavi matematike. Njome se povezuje znanje aritmetike, algebre, zatim geometrije i prostora sa situacijama iz svakodnevnog života. Brojna istraživanja izveštavaju o nepotpunom razumevanju pojma površine učenika mlađeg školskog uzrasta (Eames et al., 2020; Tan Sisman & Aksu, 2016; Zaharos, 2006). Da bi shvatili kako formula za izračunavanje površine pravougaonika funkcioniše, učenici treba da 1) uoče vezu množenja i sabiranja i 2) sagledaju pravougaonik kao strukturu sačinjenu od redova i kolona (Outhred & Mitchelmore, 2000). U ovom radu bavićemo se drugim od navedena dva problema.

Površina se može razumeti kao *kontinuirana* veličina (oblast zatvorene krive) ili kao *diskretna* veličina (broj jedinica površine koje pokrivaju oblast). Postupak merenja površine podrazumeva kvantifikovanje ograničene površi. Konkretno površina pravougaonika je broj dvodimenzionalnih mernih jedinica dovoljnih da se poploča cela površ (Smith III & Barrett, 2017). Međutim, ovaj proces nije jednostavan i uključuje niz povezanih ideja: 1) razumevanje površine kao veličine kojoj se dodeljuje merni broj; 2) razdeljivanje površi na jednake delove; 3) pojam merne jedinice za površinu i njeno neprekidno nadovezivanje; 4) strukturisanje površi na redove i kolone; 5) konzervaciju površine; 6) uslovljenost

¹ mila.milosevic@uf.bg.ac.rs

² olivera.djokic@uf.bg.ac.rs

³ Rad predstavlja rezultat rada na projektu „Konceptije i strategije obezbeđivanja kvaliteta bazičnog obrazovanja i vaspitanja”, broj 179020, Učiteljskog fakulteta Univerziteta u Beogradu.

mernog broja i merne jedinice; i 7) razumevanje tranzitivnosti, aditivnosti i ostalih svojstva koja važe i za merenje dužine. Istraživanja i praksa upućuju na to da učenici mešaju obim i površinu, kao i merne jedinice za dužinu, površinu i zapreminu. Neretko koriste pravilo „dužina + širina” kako bi izračunali površinu, a, takođe, ne razumeju da se površina ne menja ukoliko se figura rastavi na delove (Tan Sisman & Aksu, 2016). Za većinu učenika ostaje misteriozno kako se kvadratne jedinice površine pravougaone figure prostorno pojavljuju množenjem mernih brojeva dužine i širine (Huang & Witz, 2013). Neki od razloga površnog razumevanja površine su neadekvatno razumevanje merenja dužine, zatim načini poučavanja i interpretacija ove nastavne oblasti u udžbenicima i nastavnim materijalima, gde se od učenika u ranom stadijumu učenja o površini traži isključivo jednostavno prebrojavanje jedinica (Hong, Choi, Runnalls, & Hwang, 2018; Milošević, 2020).

U određenom smislu, deo pripreme za učenje površine jesu i zahtevi koji se javljaju u zadacima s razlomcima, a koji uključuju podelu površi na jednake delove, ponavljanje i spajanje tih delova, a predstavljaju ništa drugo do merenje (Confrey, Maloney, Nguyen, Mojica, & Myers, 2014). Takođe, da bi učenici razumeli multiplikativnu strukturu u postupku merenja površine, poželjno je da se pravougaona oblast javlja kao model za učenje množenja, počevši od prirodnih, a kasnije i celih brojeva (Van de Walle, Karp, & Bay-Williams, 2013).

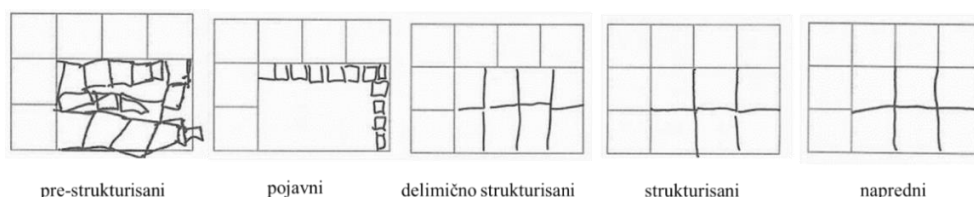
1. Prostorno strukturisanje pravougaonika

Četiri mentalna procesa su uključena u razumevanje merenja površine (Battista, 2007) – osmišljavanje i korišćenje mentalnih modela, prostorno strukturisanje (prostorna organizacija unutar tih modela), lociranje jedinica u nizovima i organizovanje prostora pomoću kompozitne (složene) jedinice. Prostorno strukturisanje je mentalna operacija organizovanja 2D ili 3D prostora putem ortogonalnih mernih jedinica (kao što su kvadrat, pravougaonik, trougao) neophodna za određivanje površine pravougaonika. To je forma apstrakcije koja doprinosi da se geometrijski objekat (pravougaonik) organizuje, koordiniše i tako zapamti u memoriji kako bi se nad njim vršile mentalne akcije (Battista, Clements, Arnoff, Battista, & Borrow, 1998). Više autora zaključilo je da učenici ne sagledavaju sve karakteristike pravougaone strukture i da u procesu učenja prolaze kroz više nivoa (Battista et al., 1998; Outhred & Mitchelmore, 2000; Clements, Barrett, & Sarama, 2017). Dok Battista (Battista, 2007) govori o nenumeričkom (kvalitativnom i geometrijskom) i numeričkom rezonovanju o površini, Barrett i saradnici (Barrett et al., 2017) su objedinili i predložili sekvencu od osam uređenih nivoa. Učenici počinju sa prepoznavanjem površi kao svojstva oblasti; prelazi se na nasumične pokušaje da se oblasti pokriju „jedinicama” pre savladavanja sistematskih i potpunih pokrivanja; zatim postepeno razvijanje i korišćenje iterabilne kompozitne jedinice u pravougaoniku; povezivanje mera dužine i mera površine u pravougaonicima; i konačno prilagođavanje formule pravougaonika drugim geometrijskim figurama. Koordinacija jedinica dužine i površine u pravougaonicima igra ključnu ulogu u obe putanje. Kako je „prostorno strukturisanje pravougaonika” mentalna operacija, mi ćemo je sagledavati kroz način određivanja ukupnog broja kvadrata kojim se popločava površ pravougaonika i strategije crtanja kvadratne mreže.

Navešćemo nekoliko principa koji su u osnovi strukture merenja površine pravougaonika, a koji su izvedeni iz opsežne empirijske studije (Outhred & Mitchelmore, 2000). Prvo, učenici bi trebalo da budu svesni prekrivanja površi dvodimenzionalnim mernim jedinicama bez preklapanja i bez praznina. Drugo, učenici shvataju da kvadrati treba da budu kolinearni tako da u svakom redu bude jednak broj kvadrata. Treće, uočavaju vezu mernih jedinica za dužinu i površinu, odnosno shvataju da dužina stranice pravougaonika određuje broj jediničnih kvadrata duž te stranice. Nakon toga bi trebalo da uvide da se ukupan broj kvadrata u pravougaoniku računa na osnovu broja kvadrata u svakom redu i koloni.

Mulligan i saradnici (Mulligan, Mitchelmore, & Stephanou, 2015) govore o pet nivoa svesnosti o strukturi (Prikaz 1) koje su ispitali na različitim zadacima među kojima je i zadatak docrtavanja kvadratne mreže kako bi se ispitalo razumevanje prostorne strukture. Odgovori se kategorišu na „niveo svesnosti” prema strategiji crtanja i kvalitetu crteža. Na *prestrukturalnom* nivou učenici ne pokazuju da su svesni bilo kog aspekta strukture. Na *pojavnom* nivou učenici su svesni jednog ili dva elementa strukture (npr. shvataju da površ treba da bude popločana, ali ne shvataju da kvadrati treba da budu

podudarni). Radovi mogu da deluju neorganizovano jer se iscrtava prevelik broj jedinica nalik kvadratu. Na *delimično strukturisanom nivou* učenici prepoznaju elemente strukture, ali to ne umeju da prikažu crtežom, te se javljaju greške u poravnanju koje nastaju usled strategije crtanja pojedinačnih kvadrata ili strategijom strukturisanja putem redova. Na *strukturisanom nivou* učenici su svesni svih svojstava strukture, ali strategija kojom crtaju ukazuje da je ne sagledavaju globalno (ne shvataju da jedan kvadrat pripada i redu i koloni). Na ovom nivou svesnosti učenici i dalje mogu da iscrtavaju pojedinačne kvadrate. Na *naprednom nivou* učenici koriste paralelne linije kako bi nacrtali mrežu pravougaonika, crteži su tačni i precizni. Prikaz 1 pokazuje kvalitativno različite dečje radove s obzirom na nivoe svesnosti o pravougaonoj strukturi.



Prikaz 1. Nivoi svesnosti o pravougaonoj strukturi
(Mulligan, Mitchelmore, & Stephanou, 2015: 64)

U sledećem delu rada opisaćemo strategije prostornog strukturisanja prema razvojnim nivoima koje su opisali Baret i saradnici (Barrett et al., 2017), a koji su relevantni za uzrast učenika kojim se bavimo.

Povezivanje i ponavljanje jedinice za površinu – na ovom nivou učenicima je potrebna perceptivna podrška kako bi odredili površinu pravougaonika. Učenici znaju da treba da prekriju površ pravougaonika u potpunosti, a to rade crtajući svaki kvadrat pojedinačno. Računaju broj kvadrata brojeći svaku jedinicu i koristeći red kako bi ispratili putanju brojanja.

Pocetno strukturisanje složenom jedinicom – na ovom nivou pravougaonik se strukturise na osnovu intuitivno shvaćenog reda. Učenici crtaju redove povlačeći linije, ali se vraćaju na crtanje pojedinačnih kvadrata. Broj redova se ne određuje na osnovu druge dimenzije, već intuitivno. Broje sistematično svaki kvadrat duž redova ili koriste naprednije strategije poput višestrukog sabiranja, ali im je i dalje potrebna figuralna podrška kako bi merni broj kvadrata bio tačan.

Strukturisanje površi putem redova i kolona – na ovom nivou se koriste dimenzije kako bi se strukturisao pravougaonik. Učenici crtaju paralelne linije kako bi označili redove i kolone. Koriste množenje, brojanje na preskok ili višestruko sabiranje. Mlađi učenici mogu da broje pojedinačne kvadrate u svakom redu, ali ritmično.

Uređena struktura – na ovom nivou struktura je generalizovana i interiorizovana. To znači da učenicima nije potrebna perceptivna podrška kako bi izračunali ukupan broj kvadrata u pravougaoniku. Razumeju formulu za izračunavanje površine pravougaonika, a umeju da je prošire kada rešavaju zadatke u kojima merna jedinica nije kvadrat.

2. Definisanje problema istraživanja

Učenici iz Srbije takođe imaju problem sa razumevanjem pojma površine (Čarapić i sar., 2007 [Nacionalno testiranje učenika 4. razreda]; Mullis, Martin, Foy, Kelly, & Fishbein, 2020). Nov nastavni program iz oblasti matematike za treći razred daje mogućnost za osmišljavanje i sprovođenje aktivnosti prostornog strukturisanja pravougaonika pomoću 2D mernih jedinica, što je preduslov za pojmovno razumevanje formule za površinu pravougaonika koja se uvodi u četvrtom razredu (Milošević, 2020). Da bi se osmislio efikasan metod poučavanja i adekvatni zadaci, potrebno je utvrditi na kom nivou strukturalne svesnosti i na kom mestu u putanji učenja površine se nalaze učenici u Srbiji. Dakle, predmet istraživanja je

spособnost učenika nižeg školskog uzrasta da prostorno strukturišu pravougaonik. Pod tim podrazumevamo sposobnost da se zamisli kvadratna mreža površi pravougaonika, te da se na osnovu toga odredi ukupan broj jedinica u pravougaoniku i da se takva struktura adekvatno prikaže crtežom. Zanimalo nas je kojim se strategijama rukovode učenici mlađeg školskog uzrasta kada je pred njima zadatak da prostorno strukturišu pravougaonik.

2. 1 Metod

Ovo istraživanje je eksplorativnog karaktera. Koristili smo deskriptivnu metodu i tehniku intervjuisanja. Strukturisani intervju sa svakim učenikom sastojao se od 16 zadataka (videti Prilog 1) preuzetih iz istraživanja Batiste i saradnika (Battista et al., 1998: 507). U kontekstu teorije hijerarhijskog interakcionizma (Clements, Barrett, & Sarama 2017), nivo razvoja razumevanja određenog matematičkog pojma učenika je kulturološki i društveno uslovljen, te smatramo opravdanim da ponovimo istraživanje u Srbiji. Rezultate smo tumačili u kontekstu revidiranih trajektorija učenja površine (Barrett et al, 2017).

Jedan primer (i) iz originalnog intervjuja je izbačen zbog ograničenog trajanja od 30 minuta. Svakom učeniku smo davali jedan po jedan zadatak, a zatim smo pokazali kako se jedinični kvadrat uklapa u pravougaonik i pitali koliko je takvih kartica potrebno da bi se prekrila cela figura. Nakon toga smo tražili ispitanicima da nacrtaju gde bi svaki od tih kvadrata bio smešten u datom pravougaoniku. Treći deo intervjuja se odnosio na popločavanje površi karticama oblika kvadrata. Ova poslednja aktivnost bila je kontrolne prirode i davali smo je učenicima povremeno, te neće biti analizirana. Napravljeni su video-zapisi individualnih intervjuja na osnovu kojih je urađena transkripcija kao deo analize podataka.

2. 2 Uzorak istraživanja

Uzorak istraživanja je prigodan. Intervjuisani su učenici iz privatnog produženog boravka „Modi” u gradskom naselju Galenika u Zemunu. Uzorak je činilo devet učenika iz osnovne škole „Mihajlo Pupin”; od njih devet tri pohađaju prvi, tri pohađaju drugi i tri pohađaju treći razred. Razlog malog broja ispitanika leži u činjenici da su intervjui sprovedeni u periodu pandemije virusa Kovid-19 (COVID-19), tokom aprila 2021. godine. Na osnovu ocena iz matematike i mišljenja učitelja težili smo da učenici unutar razreda budu diferenciranih matematičkih sposobnosti. Premda učenici nemaju prethodnog znanja o pojmu površine, imaju neformalno, intuitivno znanje i iskustva s reprezentacijama koje uključuju kvadratnu mrežu (o kojoj su učili u drugom razredu).

2. 3 Cilj i zadaci istraživanja

Cilj istraživanja je ispitivanje sposobnosti prostornog strukturisanja pravougaonika učenika pre formalnog uvođenja pojma površine. Iz ovog cilja proističu zadaci:

1. Ispitati učeničke strategije određivanja broja kvadrata u pravougaoniku;
2. Ispitati strategije crtanja kvadratne mreže pravougaonika; i
3. Posledično, utvrditi gde se na putanji učenja površine nalaze učenici.

2. 4 Analiza podataka

Pre svega smo svakom učeniku dodelili kod koji se sastoji od slova „U” i dva broja. Prvi broj označava razred učenika (1, 2. ili 3), dok drugi broj označava redni broj ispitanika (1, 2. ili 3). Gledanjem video-zapisa u više navrata pokušali smo da odredimo, a potom i klasifikujemo strategije prostornog strukturisanja. To je podrazumevalo utvrđivanje načina na koji učenici određuju broj jediničnih kvadrata potrebnih da se prekrije pravougaonik (mentalno strukturisanje) i utvrđivanje načina crtanja kvadratne mreže. Nakon toga smo odredili dominantne strategije za svakog učenika, što je dalje vodilo određivanju mesta u putanji učenja površine (Barrett et al., 2017). Iz potrebe za celovitom slikom i preciznijim uvidom u učenje površine ispitanih učenika koristili smo se opisanim *nivoima svesnosti o pravougaonoj strukturi* (Mulligan et al., 2015).

3. Rezultati i diskusija

3.1 Strategije mentalnog strukturisanja

U okviru prvog istraživačkog pitanja zanimalo nas je na koji način učenici određuju broj jediničnih kvadrata u pravougaoniku, odnosno ispitivali smo strategije mentalnog strukturisanja. Iz Tabele 1 vidimo da su strategije koje su ispitanici koristili sledeće: 1) brojanje kvadrata duž redova ili kolona; 2) brojanje kvadrata duž stranica figure (a potom i ostalih jedinica); 3) višestruko sabiranje ili brojanje na preskok; i 4) množenje. Određujući broj jediničnih kvadrata, najveći broj netačnih odgovora daju dva ispitanika prvog razreda (U1-1, U1-2) i ispitanica drugog razreda (U2-1). Učenik prvog razreda (U1-1) i učenica drugog razreda (U2-1) su napravili po šest grešaka, a učenica prvog razreda (U1-2) devet grešaka. Ostali ispitanici ili nisu grešili (U3-2) ili su pravili jednu do tri greške u određivanju broja potrebnih kvadrata da se prekrije pravougaonik, što čitamo iz Tabele 2.

Tabela 1. Strategije određivanja broja jediničnih kvadrata u pravougaoniku

Strategije brojanja	prvi razred U1			Σ	drugi razred U2			Σ	treći razred U3			Σ	Ukupno
	1	2	3		1	2	3		1	2	3		
1. Pojedinačnih kvadrata duž redova/kolona	14	12	13	39	15	2	0	17	14	0	0	14	70
2. Brojanje duž stranica figure	2	1	1	4	1	2	3	6	0	0	0	0	10
3. Višestruko sabiranje i brojanje na preskok	0	0	2	2	0	6	6	12	2	0	2	4	18
4. Množenje	0	0	0	0	0	6	7	13	0	16	14	30	43
Neurađeno	0	3	0	3	0	0	0	0	0	0	0	0	3
Ukupno	16	16	16	48	16	16	16	48	16	16	16	48	144

Tabela 2. Tačni i netačni odgovori u određivanju broja jediničnih kvadrata u pravougaoniku

	prvi razred U1						drugi razred U2						treći razred U3					
	1		2		3		1		2		3		1		2		3	
	T	N	T	N	T	N	T	N	T	N	T	N	T	N	T	N	T	N
	10	6	7	9	14	2	10	6	15	1	13	3	15	1	16	0	15	1
Ukupno	16		16		16		16		16		16		16		16		16	

Iz Tabele 1 vidimo da šest ispitanika broji kvadrate duž redova ili kolona kako bi odredilo ukupan broj kvadrata (U1-1, U1-2, U1-3, U2-1, U2-2, U3-1). Reč je o najčešće korišćenoj strategiji, čak 70 puta. Međutim, primetili smo određene razlike između učenika koji koriste ovu strategiju. Učenici prvog i drugog razreda (U1-1, U1-2, U2-1), za koje smo rekli da češće greše u brojanju, koriste red da bi ispratili putanju brojanja, ali se greške javljaju usled nemogućnosti da se zamisli kvadratna mreža, pa broj kvadrata u redu varira prilikom brojanja. Pritom, učenica prvog (U1-2) i učenica drugog razreda (U2-1) prstom iscrtavaju svaki pojedinačni kvadrat. Ostali učenici dodiruju prstom ili olovkom mesta gde zamišljaju da bi kvadrati u redovima/kolonama bili smešteni. Za ispitanika prvog razreda (U1-3) i ispitanicu trećeg razreda (U3-1), koji takođe najčešće koriste strategiju brojanja kvadrata duž redova, karakteristično je ritmično brojanje čime pokazuju razumevanje jednakog broja kvadrata u svakom redu.

Brojanje kvadrata duž stranica figure (potom i ostalih jedinica), učenici su koristili u 10 primera ukupno. Nikome ova strategija nije bila dominantan izbor. Jedan učenik (U2-3) je koristio ovu strategiju najviše tri puta. Zanimljivo je da učenici ovu strategiju koriste ili u prvom zadatom primeru (*a*) ili u primerima u kojima ne postoji perceptivna podrška u vidu započete mreže (*j*, *q*) ili kada perceptivna podrška nije data duž svih stranica, pa učenicima mreža nije vidljiva i jasna (*k*). Odnosno, strategija brojanja kvadrata duž stranica figure se može smatrati „fallback” sigurnosnom strategijom, jer je učenici koriste u susretu s nepoznatim ili složenim problemom (Clements, Barrett, & Sarama, 2017), međutim, nije efikasna jer učenici greše u 6 od 10 primera.

Iz Tabele 1 vidimo da je višestruko sabiranje upotrebljeno 18 puta. Ovu strategiju su koristili učenici svih razreda. Najčešće je koriste dva učenika drugog razreda (U2-2 i U2-3 u šest primera) pre nego što su počeli da množe u narednim primerima. Za učenika U2-2 su višestruko sabiranje i množenje dve strategije koje podjednako učestalo koristi, dok učenik U2-3 u jednom primeru više množi. Samo je učenica trećeg razreda (U3-3) pogrešila u višestrukum sabiranju (u primeru *a*), a ostali učenici ne greše kada koriste ovu strategiju. Jedini učenik prvog razreda koji je u dva primera višestruko sabirao, primenio je ovu strategiju kada je primetio 5 kvadrata u redu, odnosno koloni (u primerima *l*, *q*). On je u ostalim primerima ritmično brojao duž redova.

Množenje je druga po učestalosti strategija za određivanje broja kvadrata u pravougaoniku, 43 puta je korišćena. Ova strategija je dominantna dvema učenicama trećeg razreda (U3-2 i U3-3). Jedna od njih je koristila množenje kroz sve primere, dok je druga u dva primera sabirala (Tabela 1). Kao što smo već napomenuli, dva učenika drugog razreda, takođe, koriste množenje (U2-2 i U2-3). Prvaci nisu koristili ovu strategiju s obzirom da nisu upoznati sa računskom operacijom množenja. S druge strane, učenica drugog razreda (U2-1) i učenica trećeg razreda (U3-1), iako upoznate sa množenjem, nisu množile. Koristeći množenje za određivanje ukupnog broja kvadrata u pravougaonoj strukturi, učenici gotovo da ne greše. Jedinu grešku je napravio učenik drugog razreda (U2-3) u primeru sa iscrtanom mrežom (*l*). U nameri da množi, brojao je kvadrate u prvom redu i prvoj koloni, ali nije znao da li se kvadrat u uglu broji dva puta. Time je pokazao da nije u potpunosti siguran u strukturu množenja, tj. nije siguran u to da ako je u svakom redu *a* kvadrata i ako je broj kolona *b*, onda je ukupan broj kvadrata *a b*. U kasnijim primerima nije pravio greške. Upravo je primer *l* za U2-2 i U2-3 bio prekretnica nakon koga su nastavili da množe. Učenici su najčešće grešili u primerima *a* i *k* (po pet puta), gde su mreže izbrisane duž susednih stranica (u prvom delimično sama mreža, dok je u drugom i deo spoljašnjih graničnih linija), i u primerima bez mreža *j* i *q* (po četiri puta).

3. 2 Strategije crtanja kvadratne mreže

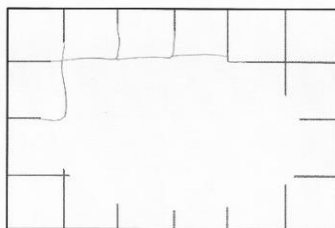
Drugim istraživačkim zadatkom ispitivali smo strategije kojim učenici dovršavaju crtanje mreže. S obzirom da je u jednom primeru (*l*) mreža već iscrtana, pred učenicima je bilo 15 zadataka. Izdvojili smo sledeće strategije: 1) crtanje pojedinačnih kvadrata duž redova ili kolona, 2) kombinovana strategija crtanja pojedinačnih kvadrata i povlačenja linija, 3) strukturisanje složenom jedinicom (red/kolona), 4) jedan red – jedna kolona i 5) povlačenje linija. Upotrebljavaćemo termine „linija” i „crtica”, umesto matematički tačnijeg termina „duž” radi slikovitijeg objašnjenja korišćenih strategija. Pogledajmo sada Tabelu 3 sa dobijenim podacima o strategijama crtanja mreže.

Tabela 3. Strategije crtanja kvadratne mreže

Strategije crtanja	prvi razred U1			Σ	drugi razred U2			Σ	treći razred U3			Σ	Ukupno
	1	2	3		1	2	3		1	2	3		
1. Pojedinačni kvadrati	8	0	0	8	15	1	1	17	0	1	0	1	26
2. Kombinovana	5	0	0	5	0	2	2	4	0	1	0	1	10
3. Strukturisanje složenom mernom jedinicom	1	2	3	6	0	0	0	0	5	1	0	6	12
4. Jedan red – jedna kolona	0	1	1	2	0	1	4	5	0	1	0	1	8
5. Linije	1	12	11	24	0	11	8	19	10	11	15	36	79
Ukupno	15	15	15	45	15	15	15	45	15	15	15	45	135

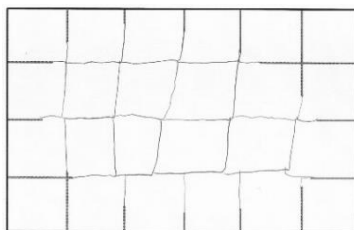
Iz Tabele 3 vidimo da su dve učenice koristile jednu strategiju kroz sve primere (U2-1 i U3-3), dok su ostali koristili dve (U3-1), tri (U1-2, U1-3), četiri (U1-1, U2-2, U2-3) ili svih pet (U3-2) identifikovanih strategija.

Strategija crtanja pojedinačnih kvadrata je druga najčešće korišćena strategija. Kako izgleda proces nastajanja kvadratne mreže ovom strategijom vidimo na Prikazu 2. Dosledno ju je koristila učenica drugog razreda (U2-1). Ova strategija je bila dominantna i kod učenika prvog razreda (U1-1). Dva učenika drugog razreda (U2-2 i U2-3) su primenili ovu strategiju jednom, u primeru m, u kome su spojili crtice kako bi iscrtali kvadrate (videti primer).



Prikaz 2. Strategija crtanja pojedinačnih kvadrata

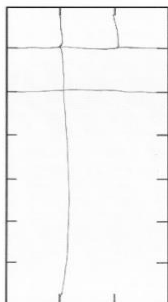
Crteži učenika kojima je ovo dominantna strategija (U2-1 i U1-1) pokazuju da učenici nisu svesni svih elemenata pravougaone strukture (Mulligan et al., 2015), što vidimo na Prikazu 3. Prema Mulliganu i saradnicima (Mulligan et al., 2015) učenici koji crtaju pojedinačne kvadrate mogu pripadati najviše strukturisanom nivou svesnosti o pravougaonoj strukturi.



Prikaz 3. Crtež učenice U2-1 nastao strategijom crtanja pojedinačnih kvadrata (primer a)

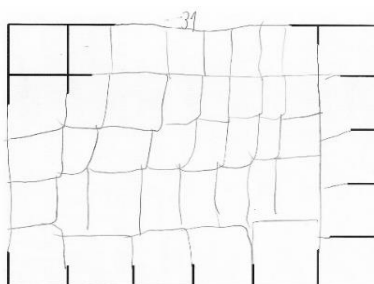
Kombinovana strategija podrazumeva crtanje pojedinačnih kvadrata, a zatim prelazak na povlačenje linija ili obrnuto (Prikaz 4). Ova strategija nije dominantna ni kod jednog učenika (Tabela 3). Najviše je koristio U1-1, i to u primerima b, c, k, n, p. Interesantno je to da je učenik koristio ovu strategiju u složenom primeru k, s obzirom da je ovo naprednija strategija od njegove dominantne strategije crtanja

pojedinačnih kvadrata. Ista ova strategija je predstavljala „fallback” strategiju za učenika U2-2, za koga je dominantna strategija povlačenje linija. Kombinovanu strategiju su koristili još U2-2 u primerima *a*, *k* i U2-3 u primerima *a*, *c* i U3-2 u primeru *c*.



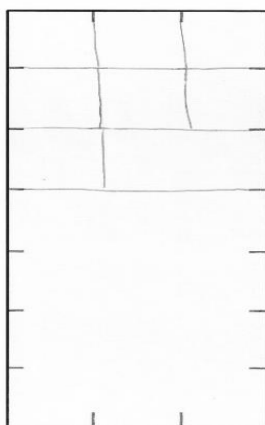
Prikaz 4. Kombinovana strategija crtanja mreže pravougaonika

Premda crtež kvadratne mreže nastao kombinovanom strategijom može upućivati na to da učenik sagledava sve elemente pravougaonog uređenja (Mulligan et al., 2015), smatramo da primena kombinovane strategije crtanja u slučaju kada se sa povlačenja linija vraća na iscrtavanje pojedinačnih kvadrata ukazuje da učenici ne sagledavaju da jedan kvadrat pripada i redu i koloni, tj. strukturu ne sagledavaju globalno. Učenici koji koriste ovu strategiju u pojedinim primerima ne pokazuju nužno napredni nivo svesnosti o pravougaonoj strukturi, kao što vidimo na Prikazu 5, gde je učenik povukao jednu horizontalnu liniju kako bi označio prvi red i jednu vertikalnu kako bi označio poslednju kolonu, ali je nastavio da crta pojedinačne kvadrate koji nisu dobro poravnati.



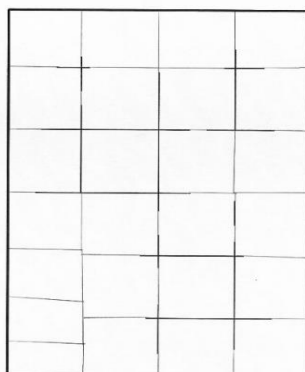
Prikaz 5. Crtež učenika U1-1 nastao kombinovanom strategijom (primer *k*)

Strukturisanje složenom jedinicom podrazumeva povlačenje linije kako bi se označio red ili kolona, a potom docrtavanje crtica kojim se red, odnosno kolona, ispunjavaju kvadratima (Prikaz 6). Ni ova strategija nije bila dominantan izbor učenicima (Tabela 3). Najviše je upotrebljavala učenica trećeg razreda (U3-1) u primerima *j*, *m*, *n*, *o*, *q*, zatim U1-3 u primerima *c*, *j*, *p*, potom U1-2 u primerima *j*, *m*, a U1-1 u primeru *m* i U3-2 u primeru *n*. Strukturisanje složenom jedinicom predstavlja ključnu strategiju crtanja putem koje može da se prikaže veza sabiranja i množenja. Pretpostavljali smo da će ovu strategiju učenici koristiti u većem broju primera (korišćena je samo 12 puta, Tabela 3), s obzirom na to da je broj jedinica u pravougaoniku većina učenika određivala brojeći kvadrate duž redova. Međutim, malo njih je koristilo višestruko sabiranje (Tabela 1).



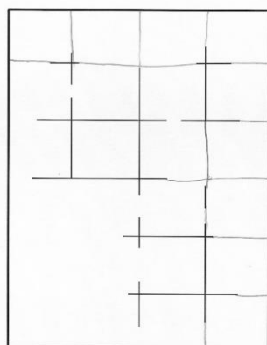
Prikaz 6. Strategija crtanja složenom jedinicom

Crtež sa Prikaza 7 je nastao primenom ove strategije i on pokazuje *delimično strukturisani nivo svesnosti* o pravougaonoj strukturi, iako primenom ove strategije mogu nastati crteži koji pokazuju napredni nivo svesnosti o strukturi (Mulligan et al., 2015).



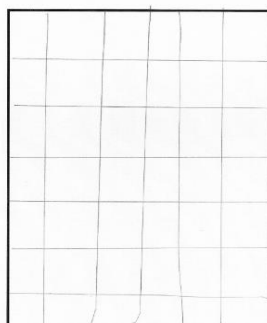
Prikaz 7. Crtež učenice U3-1 nastao strategijom crtanja složenom jedinicom (primer o)

Strategija koju smo nazvali „jedan red jedna kolona” podrazumeva povlačenje linije kako bi se označio red koji se potom ispunjava kvadratima, zatim povlačenje linije kako bi se označila kolona koja se potom popunjava kvadratima (Prikaz 8). Ostatak pravougaonika se strukturise povlačenjem linija. U izuzetnom slučaju, učenici su povlačili linije duž svih stranica pravougaonika na opisani način, a potom bi linijama iscrtavali mrežu pravougaonika. Na potonji način su crtali U1-2 i U1-3 primeru a. Učenik U2-3 je koristio ovu strategiju četiri puta u primerima f, j, k, o, a učenik U2-2 jednom u primeru o. Zanimljivo je to da su ova dva učenika drugog razreda u prelaznoj fazi razvoja multiplikativnog mišljenja, te im ovakav način crtanja pomaže da strukturu sagledaju globalno (Battista et al., 1998). Oba učenika su u primeru o prokomentarisali da im nije potrebno da crtaju celu mrežu kako bi znali broj kvadrata. Nakon crtanja prvog reda i poslednje kolone, prekinuli su crtanje kako bi množili i time proverili prethodnu pretpostavku o potrebnom broju kvadrata. Učenica U3-2, koja je koristila sve navedene strategije, takođe upotrebljava strategiju „jedan red jedna kolona” u primeru o. Crteži nastali primenom ove strategije pokazuju *napredni ili strukturisani nivo svesnosti o strukturi*.



Prikaz 8. Strategija crtanja „jedan red – jedna kolona”

Povlačenje horizontalnih i vertikalnih linija predstavlja naprednu strategiju strukturisanja pravougaonika crtežom. Reč je o najčešće korišćenoj strategiji (korišćena je 79 puta). Ova strategija je dominantna kod učenika trećeg razreda (U3-1, U3-2, U3-3), zatim kod učenika drugog razreda (U2-2, U2-3) i učenika prvog razreda (U1-2, U1-3). Prema Mulliganu i saradnicima (Mulligan et al., 2015) crteži nastali povlačenjem linija pokazuju da su učenici svesni relevantnih elemenata pravougaonog uređenja. Međutim, određeni učenici se ne nalaze na istoj tački u trajektoriji učenja površine kada je reč o mentalnom prostornom strukturisanju i kada je reč o crtanju kvadratne mreže (Miller, 2013). U našem slučaju to su učenice prvog (U1-2) i trećeg (U3-1) razreda koje primenjuju strategiju povlačenja linija, ali broj kvadrata pre iscrtavanja mreže određuju brojanjem pojedinačnih kvadrata što smatramo manje naprednom strategijom. Napominjemo da učenica prvog razreda pritom pravi veliki broj grešaka, dok učenica trećeg razreda gotovo da ne greši. Dakle, u našem ispitivanju se pokazalo da strategija povlačenja linija kojom bi se iscrtala kvadratna mreža ne pokazuje sama po sebi da su učenici spremni da koordinišu dimenziju dužine i površine. U1-3 i U1-2 u primeru *q* iscrtavaju veći, odnosno manji broj kolona nego što je potrebno (Prikaz 9). Smatramo da strategije koje više odražavaju strukturu – strukturisanje složenom mernom jedinicom i „jedan red-jedna kolona” – a koje učenici ređe koriste (Tabela 3), treba da budu deo planiranih nastavnih časova iz površine pre nego što učenici počnu nasumično da povlače linije u primerima bez oznaka duž stranica.



Prikaz 9. Crtež učenika U1-3 nastao povlačenjem linija (primer *q*)

3.3 Nivo razvoja u učenju površine

Učenje je postepen i integrativan proces koji se dešava između stabilnih nivoa. Svaki naredni nivo u učenju površine karakteriše nov nivo sofisticiranosti u primenjenim strategijama i veći nivo opštosti (Clements, Barrett, & Sarama 2017). Naših devet ispitanika pokazuje karakteristike sledećih nivoa učenja površine: povezivanje i ponavljanje merne jedinice za površinu, početno strukturisanje složenom

jedinicom, strukturisanje površi redovima i kolonama i elemente pravougaonog uređenja (Barrett et al., 2017). Razmatrali smo i nivoe svesnosti pravougaone strukture (Mulligan et al., 2015) kako bismo dobili celovitu sliku o putanji učenja naših ispitanika, a strategije crtanja i crteži ukazuju na svesnost na sledećim nivoima: pojavni nivo, delimično strukturisan nivo, strukturisan i napredni nivo (videti Sliku 1). U Tabeli 4 vidimo za svakog od ispitanika gde se nalazi na putanji učenja površine.

Tabela 4. Nivoi učenja površine

	Mulligan et al., 2015	Barrett et al., 2017
U1-1	$P \rightarrow DS \rightarrow S$	PPJ $\rightarrow$ PSSJ
U1-2	N	PPJ $\rightarrow$ PSSJ
U1-3	N	SRK
U2-1	$P \rightarrow DS \rightarrow S$	PPJ
U2-2	N	SRK
U2-3	N	SRK
U3-1	N	SRK
U3-2	N	SRK $\rightarrow$ US
U3-3	N	SRK $\rightarrow$ US

P – pojavni nivo; DS – delimično strukturisani nivo; S – strukturisani nivo; N – napredni nivo; PPJ – povezivanje i ponavljanje jedinice; PSSJ – početno strukturisanje složenom jedinicom; SRK – strukturisanje putem redova i kolona; US – uređena struktura

3. 3. 1 Povezivanje i ponavljanje jedinice za površinu i početno strukturisanje složenom jedinicom

Učenici čiji je stabilan nivo razumevanja *povezivanje i ponavljanje jedinice za površinu* su U1-1, U1-2 i U2-1. Oni mentalno strukturiraju pravougaonik zamišljajući pojedinačne kvadrate koje iscrtavaju prstom. Neretko greše u brojanju jer još uvek ne shvataju da su redovi numerički jednaki. U primerima gde perceptivna podrška nije data duž svih susednih stranica (j, k, q) češće greše. Učenici U1-1 i U2-1 crtaju pojedinačne kvadrate, stoga su njihovi radovi neprecizni i često netačni. U određenim slučajevima, U1-1 crta kombinovanom metodom, pa i njegovi crteži sugerišu da je *delimično svestan* (šest primera) karakteristika pravougaone strukture. Ostali crteži i strategije koje koristi U1-1 ukazuju na *pojavni* (tri primera) i *strukturisani nivo svesnosti* (šest primera). Možemo reći da se on nalazi između dva nivoa: *povezivanje i ponavljanje merne jedinice za površinu i početno strukturisanje složenom jedinicom*. Učenica U2-1 je dosledna u svojim strategijama crtanja i brojanja pojedinačnih kvadrata, te zavisno od kvaliteta svojih crteža pokazuje *delimično strukturisani* (šest primera) i *strukturisani nivo svesnosti* o pravougaonoj strukturi (osam primera) i čvrsto se nalazi na nivou *ponavljanja i povezivanja mernih jedinica*. Premda u mentalnom strukturisanju nailazi na probleme, crteži učenice U1-2 ukazuju na *napredan nivo svesnosti* (13 primera) jer je njena dominantna strategija povlačenje linija čime pokazuje da razume pojam složene merne jedinice. Stoga smatramo da se ona kreće ka narednom nivou sofisticiranosti, a to je *početno strukturisanje složenom jedinicom*.

3. 3. 2 Strukturisanje putem redova i kolona

Za *strukturisanje površi putem redova i kolona* karakteristično je određivanje broja kvadrata u pravougaoniku množenjem, višestrukim sabiranjem, i brojanjem duž redova, odnosno kolona. Kada učenici crtaju, uglavnom označavaju redove ili kolone koje popunjavaju kvadratima ili povlače linije. Učenici su sposobni da povežu dimenzije pravougaonika sa brojem kvadrata u redu, odnosno koloni. Ka ovom nivou kreću se sledeći ispitanici: U1-3, U2-2, U2-3, U3-1. Bez obzira što U1-3 i U3-1 nisu koristili množenje, pokazali su razumevanje redova kao geometrijski i numerički jednakih, a njihove strategije i crteži većinom pokazuju *napredni nivo svesnosti* o pravougaonoj strukturi (14 primera U1-3 i 11 primera U3-1), a prilikom mentalnog strukturisanja retko greše ili se ispravljaju. S druge strane, U2-2 i U2-3 su

tokom intervjuja uvideli kako množenjem mogu da izračunaju ukupan broj kvadrata. Kada crtaju, koriste različite strategije, ali najviše povlače linije. Međutim, učenje ova dva učenika drugog razreda nije potpuno učvršćeno na ovom nivou. To pokazuju takozvane „fallback” strategije koje primenjuju na složenijim primerima i koje su im se pokazale kao efikasne (Clements, Barrett, & Sarama, 2017). Konkretno, primena kombinovane strategije crtanja je „fallback” strategija ovim učenicima koji dominantno crtaju povlaćeci linije. U određenim situacijama lokalno sagledavaju strukturu. To znači da ne shvataju uvek kako broj kvadrata u koloni određuje broj redova. Većina njihovih crteža, kao i crteži ispitanika U1-3 i U3-1, pokazuju *napredni nivo svesnosti* o pravougaonoj strukturi (10 primera U2-2 i 11 primera U2-3).

3. 3. 3 Ka uređenoj strukturi

Niko od ispitanika nije u potpunosti dosegao nivo uređene strukture s obzirom na to da još uvek nisu učili formulu za izračunavanje površine pravougaonika i da su u zadacima uvek imali određenu perceptivnu podršku, te nismo mogli da ispitamo koliko je njihov nivo znanja generalizovan. Takođe, učenicima smo davali zadatke koji se tiču samo kvadrata kao merne jedinice, a da bi se stekao bolji uvid u rezonovanje učenika, konkretno u razumevanje odnosa merne jedinice za dužinu i površinu, potrebno je uključiti i trougao i pravougaonik (Barrett et al., 2017). Međutim, smatramo da su učenice trećeg razreda (U3-2 i U3-3) na dobrom putu da shvate uređenu strukturu i da je interiorizuju. Obe su koristile množenje što pokazuje da pravougaonu strukturu sagledavaju globalno (Battista et al., 1998), odnosno da su dostigle kritičnu masu ideja i da razmišljaju u terminima redova, a da broj kvadrata u koloni koriste kako bi odredile broj redova (Outhred & Mitchelmore, 2000). Njihovi crteži su uredni i nastali su povlačenjem linije i pokazuju da su svesne svih karakteristika pravougaonog uređenja.

4. Zaključak

Naš rad se zasniva na istraživanjima o merenju u kontekstu proučavanja geometrije i prostornog razmišljanja (npr. Battista, 2007). U radu smo se bavili prostornim strukturisanjem pravougaonika kao važnom mentalnom operacijom koja se nalazi u osnovi učenja o površini figura. Ovaj oblik apstrakcije smo ispitivali kroz 1. mentalno strukturisanje pri čemu smo tražili od učenika da odrede broj potrebnih kvadrata da se poploča pravougaonik i kroz 2. crtanje kvadratne mreže pravougaonika. Pre svega, zanimalo nas je koje strategije će učenici primeniti s obzirom da nemaju prethodnog znanja o merenju površine. Učenici su pokazali različite strategije i mentalnog strukturisanja (brojanje pojedinačnih kvadrata duž redova/kolona; brojanje kvadrata duž stranica figure; višestruko sabiranje/brojanje na preskok; množenje) i crtanja kvadratne mreže (crtanje pojedinačnih kvadrata; kombinovana strategija; strukturisanje složenom jedinicom; jedan red – jedna kolona; povlačenje horizontalnih i vertikalnih linija). Upotrebljene strategije, tačnost odgovora u određivanju broja jediničnih kvadrata i kvalitet dečjih crteža kvadratne mreže ukazuju da se učenici nalaze na sledećim nivoima u putanji učenja o površini: *ponavljanje i povezivanje jedinice za površinu; početno strukturisanje složenom jedinicom; strukturisanje redovima i kolonama*; a za dve učenice trećeg razreda (U3-2 i U3-3) smatramo da se nalaze na dobrom putu da savladaju *uređenu strukturu*.

Teorija hijerarhijskog interakcionizma, na kojoj se temelje trajektorije učenja, ne govori isključivo o razvoju određenog matematičkog pojma shodno uzrastu, već opisuje prelaze u načinu mišljenja koji su uslovljeni obrazovnim uslovima, društvenim okolnostima i drugim faktorima kao što je zrelost (Barrett et al., 2017). U našem uzorku se, takođe, pokazalo da učenici istog uzrasta ne pokazuju nužno isti nivo razmišljanja o površini, odnosno da trajektorije učenja zavise od zrelosti i različitih iskustava sa kojima su se učenici ranije susretali. Učenici mogu biti na jednom nivou i tokom nekoliko razreda ukoliko im se ne pruži adekvatna prilika za napredovanje u naredne nivoe mišljenja. Učenici u prve tri godine formalnog školovanja pokazuju nivoe mišljenja o površini od početnog popločavanja fizičkim manipulativom, preko povezivanja i ponavljanja mernih jedinica, pri čemu se broji svaki nacrtani kvadrat, ka intuitivnom shvatanju reda i tome da je broj kvadrata u redu uslovljen drugom dimenzijom pravougaonika. Ispitanici obuhvaćeni ovim istraživanjem ne zaostaju za učenicima koja su bila deo longitudinalnog istraživanja na osnovu kog su trajektorije učenja o površini revidirane (Barret et al., 2017). Premda se cilj ovog rada

odnosi na sagledavanje učeničkih strategija prostornog strukturisanja, te da je uzorak ispitanih učenika veoma mali, što smatramo glavnim nedostatkom istraživanja, ne bismo donosili opšte preporuke za sastavljače programa matematike, međutim, smatramo da intuitivne strategije koje su pokazali naši ispitanici treba da budu podržane, formalno uobličene i vođene ka naprednijim strategijama, posebno kada je reč o sagledavanju multiplikativne kompoziciju u pravougaonom uređenju. Pored toga, potrebno je raditi i na usklađivanju mentalnih strategija i strategija crtanja kvadratne mreže kako bi se bolje upoznale sve relevantne karakteristike pravougaone strukture, a kurikulum u Srbiji ne pruža priliku za kontinuiranim razvojem pojma površine.

Kako se učenje površine pre formalnog uvođenja formule ne bi svelo na prebrojavanje mernih jedinica, predlažemo aktivnosti poređenja površina figura već u prvom razredu putem superpozicije ili kompozicije i dekompozicije, čime se naglašava površina kao kontinuirana veličina koja će kasnije biti kvantifikovana. Dalje bi se učenici osposobljavali različitim strategijama određivanja broja kvadrata u pravougaonom uređenju (višestrukim sabiranjem i brojanjem na preskok u prvom, a u drugom uvesti i množenje) da bi se u trećem razredu radilo na povezivanju broja 2D mernih jedinica (kvadrata, trougla, pravougaonika) u redu/koloni sa dimenzijom dužine, a u četvrtom došlo do uopštavanja i upotrebe formule.

Kao što smo videli iz rezultata, učenici menjaju svoje strategije shodno zadacima koji su im dati. Korišćeni test i opisani nivoi učenja pogodni su za sticanje jasnijih uvida u razumevanje pojma površine učenika iz Srbije, te ih i nastavnici mogu koristiti. Zadaci koji su bili obuhvaćeni istraživanjem nisu primećeni u udžbenicima koje učenici koriste (Milošević, 2020), a to je slučaj i u inostranim udžbenicima matematike (Hong, Choi, Runnalls, & Hwang, 2018). Primetili smo da su učenici bili uspešniji i u određivanju broja potrebnih kvadrata i u crtanju kvadratne mreže u zadacima, gde je data perceptivna podrška u vidu crtica duž stranica pravougaonika ili u vidu započete kvadratne mreže. Stoga bi kreatori udžbenika i istraživači koji osmišljavaju modele učenja površine trebalo da vode računa o variranju primera (Guo & Pang, 2011) shodno učeničkom nivou razumevanja pojma površine. Takođe, varijacija treba da uključuje i pravougaonik i trougao kao merne jedinice (Eames, Miller, Krar, Cullen, & Barrett, 2013). U svojoj doktorskoj tezi, Miler (Miller, 2013) je određivala razvojne nivoe u učenju merenja površine posebno za aktivnosti mentalnog strukturisanja, crtanja i popločavanja. U našem istraživanju učenice U1-2 i U3-1 su pokazale da se nalaze na različitim razvojnim nivoima u mentalnom strukturisanju pravougaonika i u crtanju kvadratne mreže. Obe su mentalno strukturisale putem individualne jedinice, a crtale povlačenjem linija što se smatra naprednijom strategijom. Nastavnici bi trebalo da budu svesni ovih razvojnih faza i finih razlika među njima. Iako malo po svom obimu, ovo istraživanje nam je pružilo dodatnu potvrdu da je potrebno sistematičnije podučavati temu površine, te ćemo u narednim etapama raditi na osmišljavanju modela učenja površine kao deo doktorske teze.

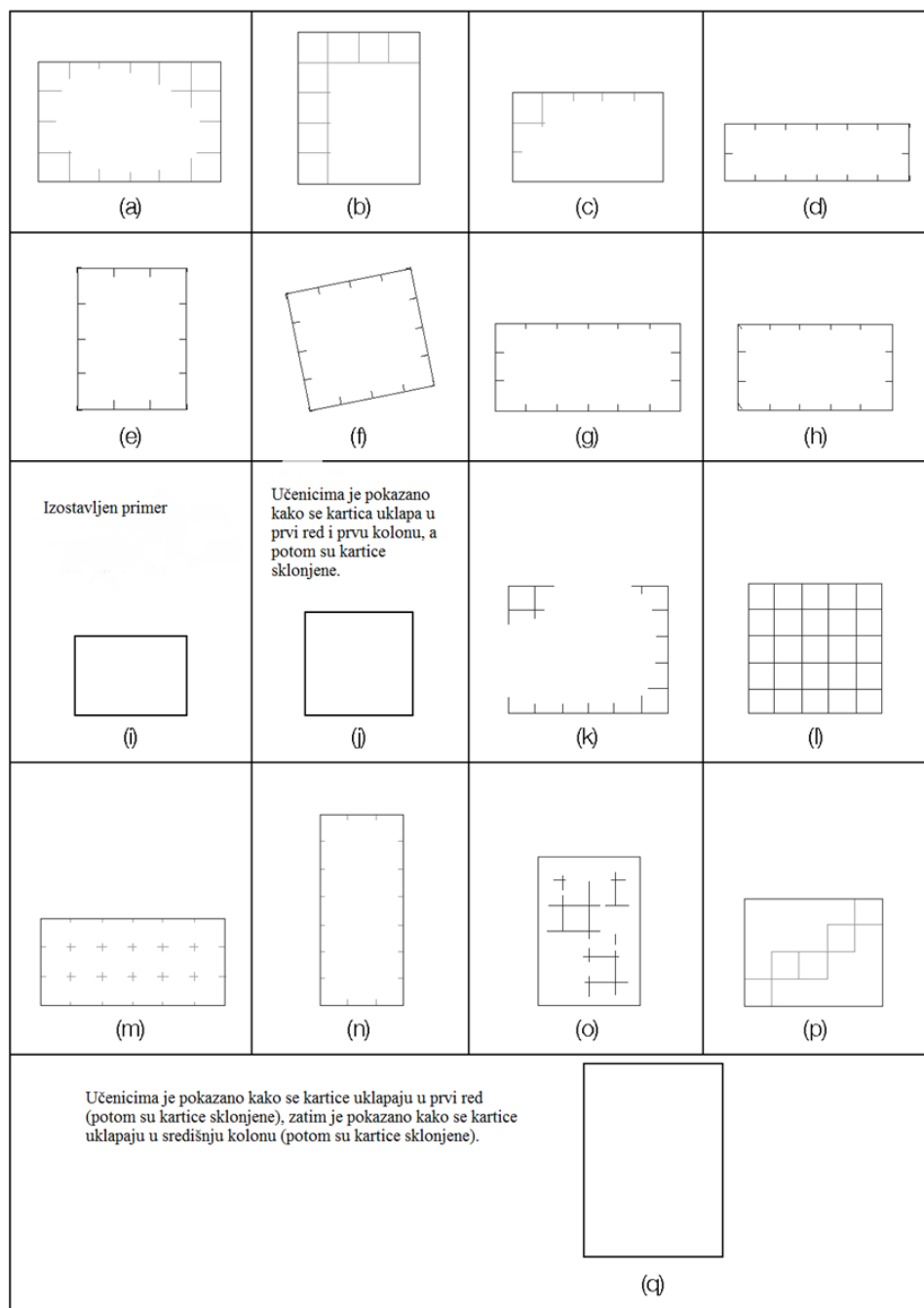
Za kraj, skrećemo pažnju na dva važna problema matematičkog obrazovanja koja su u vezi sa temom merenja. Prvo, matematika u osnovnoj školi snažno naglašava rad sa diskretnim veličinama (skupovi brojeva, aritmetičke operacije) (Smith III & Barrett, 2017). Merenju neprekidnih veličina (one koje se u početku ne mogu prebrojati, npr. površina) pridaje se mnogo manje pažnje. Ova tradicija je zabrinjavajuća jer učenike ostavlja loše pripremljenim da rade sa kontinuiranim količinama u svakodnevnom aktivnostima i bez konceptualne osnove za učenje i razumevanje matematičkih pojmova. U svetlu teme kojom se bavimo, nedostaje povezanost nenumeričkog (geometrijskog) i numeričkog razmišljanja o površini (Battista, 2007). Zalažemo se za prethodno sagledavanje površi figure kao kontinuirane veličine koje će se postepeno, prvo razdeljivanjem zatim mentalnim strukturisanjem, a potom i formuliski, kvantifikovati i posmatrati kao diskretna veličina. Drugo, a u vezi sa prvim, jeste zanemarivanje teme geometrije i prostornog razmišljanja u kurikulumima, te nas raduje težnja istraživačke zajednice matematičkog obrazovanja da se matematički kurikulumi učine „više prostornim” (Đokić, 2017; Sinclair & Bruce, 2015), te je i ovo istraživanje i teorijsko sagledavanje teme merenja viđeno u tom svetlu, jer je razumevanje teme merenja površine neodvojivo od poznavanja svojstva dvodimenzionalnih (i trodimenzionalnih) objekata.

Literatura:

- Barrett, J. E., Clements, D. H., Sarama, J., Miller, A. L., Cullen, C. J., Van Dine, D. W., Newburgh, K., Vukovich, M., Eames, C. L., & Klanderman, D. (2017). Integration of Results: A Revised Learning Trajectory for Area Measurement. In: J. E. Barrett, D. H. Clements, & Sarama J.(Eds.), *Children's Measurement: A Longitudinal Study of Children's Knowledge and Learning of Length, Area and Volume* (JERME Monograph No. 16) (pp. 129–151). NCTM.
- Battista, M. (2007). The Development of Geometric and Spatial Thinking. In: F. K., Jr. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning: a project of the national council of teachers of mathematics* (pp. 843–909). National Council of Teachers of Mathematics.
- Battista, M. T., Clements, D. H., Arnoff, J., Battista, K., & Borrow, C. V. A. (1998). Students' Spatial Structuring of 2D Arrays of Squares. *Journal for Research in Mathematics Education*, 29(5), 503–532. <https://doi.org/10.2307/749731>
- Čarapić, G., Vukmirović, J., Najdanović-Tomić, J., Todorović, O., Stanić, A., Pejić, A., Pantić, J., Nikolić, J., Džida, B., Glamočak, S., i Golubović-Tasevska, M. (2007). *Nacionalno testiranje učenika IV razreda*. Ministarstvo prosvete i sporta, Zavod za vrednovanje kvaliteta obrazovanja i vaspitanja. Zavod za vrednovanje kvaliteta obrazovanja i vaspitanja.
- Clements, D. H., Barrett, J. E., & Sarama, J. (2017). Measurement in Early and Primary Education. In: J. E. Barrett, D. H. Clements, & Sarama J.(Eds.), *Children's Measurement: A Longitudinal Study of Children's Knowledge and Learning of Length, Area and Volume* (JERME Monograph No. 16) (pp. 3–25). NCTM.
- Confrey, J., Maloney, A., Nguyen, K., Mojica, G., & Myers, M. (2009). Equipartitioning/splitting as a foundation of rational number reasoning using learning trajectories. In: M. Tzekaki, M. Kaldrimidou, & H. Sakonidis (Eds.), *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 345–353). PME.
- Đokić, O. J. (2017). *Realno okruženje u početnoj nastavi geometrije*. Beograd: Učiteljski fakultet Univerziteta u Beogradu.
- Eames, C. L., Barrett, J. E., Cullen, C. J., Rutherford, G., Klanderman, D., Clements, D. H., Sarama, J., & Van Dine, D. W. (2020). Examining and developing fourth grade children's area estimation performance. *School Science and Mathematics*, 120(2), 67–78. <https://doi.org/10.1111/ssm.12386>
- Eames, C. L., Miller, A. L., Kara, M., Cullen, C. J., & Barrett, J. E. (2013). The Longitudinal development of unit concepts in area and volume measurement contexts: a case study. In: M. Martinez, & A. Castro Superfine (Eds.), *Proceedings of the 35th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 171–178). University of Illinois at Chicago.
- Guo, J.-P., & Pang, M. F. (2011). Learning a mathematical concept from comparing examples: the importance of variation and prior knowledge. *European Journal of Psychology of Education*, 26(4), 495–525. <https://doi.org/10.1007/s10212-011-0060-y>
- Hong, D. S., Choi, K. M., Runnalls, C., & Hwang, J. (2018). Do textbooks address known learning challenges in area measurement? A comparative analysis. *Math Ed Res J*, 30, 325–354. <https://doi.org/10.1007/s13394-018-0238-6>
- Huang, H-M. E., & Witz, K. G. (2013). Children's Conceptions of Area Measurement and Their Strategies for Solving Area Measurement Problems. *Journal of Curriculum and Teaching*, 2(1), 10–26. <https://doi.org/10.5430/jct.v2n1p10>
- Miller, A. (2013). *Investigating conceptual, procedural, and intuitive aspects of area measurement with non-square area units* (Publication No. 3572989) [Doctoral dissertation, Illinois State University]. ProQuest Dissertations.
- Milošević, M. (2020). *Konceptualno razumevanje površine u udžbenicima matematike* [Master rad]. Beograd: Učiteljski fakultet Univerziteta u Beogradu.
- Mulligan, J., Mitchelmore, M., & Stephanou, A. (2015). *PASA Pattern and Structure Assesment: an assesment program for early mathematics (F–2)* [Teacher Guide]. Australian Council for Educational Research.

- Mulligan, J., Woolcott, G., Mitchelmore, M., Busatto, S., Lai, J., & Davis, B. (2020). Evaluating the impact of a Spatial Reasoning Mathematics Program (SRMP) intervention in the primary school. *Math Ed Res J*, 32, 285–305. <https://doi.org/10.1007/s13394-020-00324-z>
- Mullis, I. V. S., Martin, M. O., Foy, P., Kelly, D. L., & Fishbein, B. (2020). *TIMSS 2019 International Results in Mathematics and Science*. TIMSS & PIRLS International Study Center; Lynch School of Education and Human Development; Boston College; IEA.
- Osmokrović, N. (2019). *Intuitivno razumevanje mera i merenje površine i strategije koje učenici koriste pri izračunavanju površine* [Master rad]. Beograd: Učiteljski fakultet Univerziteta u Beogradu.
- Outhred, L. N., & M. C. Mitchelmore (2000). Young Children's Intuitive Understanding of Rectangular Area Measurement. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31(2), 144–167. <https://doi.org/10.2307/749749>
- Sinclair, N., & Bruce, C. D. (Eds.) (2015). Geometry in the primary school [Special issue]. *ZDM Mathematics education*, 47(3).
- Smith, III, J. P., & Barrett, J. E. (2017). The learning and teaching of measurement: Coordinating quantity and number. In: J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp. 355–385). National Council of Teachers of Mathematics.
- Tan Sisman, G., & Aksu, M. (2016). A Study on Sixth Grade Students' Misconceptions and Errors in Spatial Measurement: Length, Area, and Volume. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 14(7), 1293–1319. <https://doi.org/10.1007/s10763-015-9642-5>
- Van de Walle, J. A., Karp, K. S., & Bay-Williams, J. M. (2013). *Elementary and Middle School Mathematics – Teaching Developmentally* (8th ed.). Pearson.
- Zacharos, K. (2006). Prevailing educational practices for area measurement and students' failure in measuring areas. *The Journal of Mathematical Behavior*, 25, 224–239. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2006.09.003>

Prilog 1.
Zadaci prostornog strukturisanja pravougaonika
 (Battista et al., 1998: 507)



Biografije autora:

Msr. Mila S. Milošević je asistent na Fakultetu za obrazovanje učitelja i vaspitača (nekadašnji Učiteljski fakultet) na Univerzitetu u Beogradu. Studentkinja je doktorskih studija na smeru za metodiku nastave matematike. U objavljenim radovima bavi se analizom udžbenika matematike, konkretno analizom matematičkih zadataka i strukture udžbenika kroz referentni okvir TIMSS istraživanja. Zatim se bavila temom mentalnog računa, motivacije i metakognitivnog vođenja u nastavi matematike. Posebno je zainteresovana za oblast i nastavu geometrije, te je kao koautor istraživala ulogu ICT u geometriji i figuralne pojmove koje imaju studenti završne godine.

Prof. dr Olivera J. Đokić je vanredni profesor za oblast metodika nastave matematike. Zaposlena je na Fakultetu za obrazovanje učitelja i vaspitača (ranije Učiteljski fakultet) Univerziteta u Beogradu i nastavnik je na sva tri nivoa obrazovanja – osnovne, master i doktorske studije i dva smera – smer za obrazovanje učitelja i smer za obrazovanje vaspitača. Izvršni je urednik međunarodnog časopisa *Teaching Innovations* i član je uredništva međunarodnih časopisa *Teaching Innovations*, *Journal of Pedagogical Research*, *Journal of the Korean Society of Mathematical Education*, series D: *Research in mathematical education*. Kouređivala je tri tematska broja časopisa *Teaching Innovations* i *Uzdanica* posvećenih istoriji matematike i metodici nastave matematike. Član je savetodavnog odbora *History and Pedagogy of Mathematics*, ICMI (2020-2024). U objavljenim radovima bavi se istraživanjem i razvojem udžbenika matematike, formiranjem početnih matematičkih pojmova i učeničkim rezonovanjem pri konstrukciji/ko-konstrukciji matematičkog znanja. Objavila je dve monografije posvećene početnoj nastavi geometrije i inovativnim pristupima nastavi geometrije.