Statistički testovi i njihova primena u geodeziji

ANASTASIJA B. MARTINENKO, Univerzitet u Beogradu, Građevinski fakultet, Beograd
VESNA S. JEVREMOVIĆ, Državni univerzitet Novi Pazar, Novi Pazar
PETKO R. VRANIĆ, Univerzitet u Beogradu, Građevinski fakultet, Beograd
JOVAN M. POPOVIĆ, Univerzitet u Beogradu, Građevinski fakultet, Beograd
MARKO M. PEJIĆ, Univerzitet u Beogradu, Građevinski fakultet, Beograd

Stručni rad
UDC: 528:519.23
DOI: 10.5937/tehnika2102147M

Ispravan zaključak o postavljenim pretpostavkama u vezi proučavane pojave može se dobiti samo putem naučno obavljene analize odgovarajućih statističkih podataka. Taj naučni postupak verifikovanja hipoteze naziva se statistički test. U zavisnosti da li se testiraju hipoteze o parametrima u raspodeli obeležja ili se testira raspodela u celini, koriste se neparametarski ili parametarski testovi. U radu su prikazane teorijske osnove statističkih testova i ilustrovani su primeri iz geodezije, pri čemu je za svaki primer izabran odgovarajući test.

Kao značajniji parametarski testovi, prikazani su test količnika verodostojnosti, Nojman – Pirsonova lema i Bootstrap metoda, a kao neparametarski testovi prikazani su Pirsonov test i test Kolmogorova.

Ključne reči: *parametarski testovi, neparametarski testovi, Test količnika verodostojnosti, Nojman-Pirsonova lema, Pirsonov x^2 test, Test Kolmogorova*

1. UVOD

Statistika (grčki: statos – uređen, fiksiran) je danas sastavni deo naučnih, obrazovnih, privrednih i drugih institucija. Matematička statistika je pružila svoje korene u skoro svakoj ljudskoj delatnosti, a može se reći da na evropskom tlu datira još od IV veka p.n.e kada je Aristotel vršio „popis“ stanovništva. Statistika je prvobitno proučavala masovne pojave u ljudskom društvu kroz prikupljanje, upoređivanje i tumačenje podataka o stanovništvu, imovini.

Jedan od osnovnih zadataka matematičke statistike jeste statistička provera hipoteza. Ovoj problematici pripadaju zadaci kao što su upoređenje različitih metoda po tačnosti i ekonomičnosti, upoređenje konstruktivnih osobina instrumenata i pribora i sl. o obeležjima koja ispitujemo - ocenjujemo (npr. tačnost merenja ili kvalitet instrumenata) ispravne zaključke možemo donositi samo na osnovu naučno postavljene analize statističkih podataka [1].

Pod statističkim istraživanjem podrazumevamo skup matematičko-statističkih i drugih postupaka koji se primenjuju u nekoj statističkoj analizi. Predmet statističkog istraživanja su masovne pojave koje su po prirodi varijabilne, pa ih stoga treba posmatrati na velikom broju elemenata populacije i na osnovu tih posmatranja doneti određene zaključke. Postupak testiranja u statističkom zaključivanju nam omogućava da proverimo pretpostavku.

Provera hipoteza često se svodi na upoređivanje empirijskih karakteristika, kojima ocenjujemo parametar neke raspodele. Uopšteno, pod statističkim hipotezama podrazumevamo razne pretpostavke o zakonu raspodela posmatranih slučajnih veličina.

Postoje dve grupe pretpostavki. Jedna grupa se odnosi na vrednost parametara funkcije raspodele posmatranog obeležja za koje znamo tip raspodele (npr. očekivanu vrednost i varijansu, ukoliko je raspodela obeležja normalna), a druga grupa su hipoteze o tipu raspodele (normalna, eksponencijalna ili neka druga raspodela).

Adresa autora: Anastasija Martinenko, Univerzitet u Beogradu, Građevinski fakultet, Beograd, Bulevar kralja Aleksandra 73

e-mail: amartinenko@grf.bg.ac.rs

Rad primljen: 23.03.2021.

Rad prihvaćen: 01.04.2021.

Parametarski testovi predstavljaju testiranje hipoteza o parametrima raspodele obeležja za koje je ona unapred poznata.

Neparametarski testovi predstavljaju testiranje raspodele u celini, pa je hipoteza da je raspodela obeležja X jednaka nekoj konkretnoj raspodeli.

2. METODE TESTIRANJA

Za testiranje statističkih hipoteza postoje različite metode. U ovom radu su u vezi parametarskih testova prikazane sledeće metode:

- Intuitivna metoda,
- Test količnika verodostojnosti,
- Nojman - Pirsonova lema i
- Bootstrap metoda,

Od neparametarskih testova opisani su:

- Testovi zasnovani na karakterizacijama,
- Metoda poređenja sa histogramom i
- Metoda poređenja sa empirijskom funkcijom raspodele.

2.1. Parametarski testovi

2.1.1. Intuitivna metoda

Intuitivni pristup pri konstruisanju testa znači da se za konkretnu situaciju, bez dokazivanja, uzima „logični“ izbor test-statistike i kritične oblasti. Intuitivni izbor nekada može biti potvrđen teorijskim izvođenjem, kao pri testiranju matematičkog očekivanja kod normalne raspodele $\mathrm{N}(\mathrm{m}, \sigma^2)$. Za test-statistiku se, u tom slučaju, intuitivno, uzima srednja vrednost uzorka $\overline{\mathrm{X}}_\mathrm{n}$, jer se matematičko očekivanje ocenjuje upoređivanjem sa srednjom vrednošću. Primenom testa količnika verodostojnosti potvrđuje se korektnost ocene sredine iz uzorka.

Testiranje hipoteza o matematičkom očekivanju za obeležja koje nemaju normalnu raspodelu ostvaruje se saglasno graničnoj teoremi[1].

Problem glasi: Testirati hipotezu $\mathrm{H}_0(\mathrm{m} = \mathrm{m}_0)$ o matematičkom očekivanju obeležja X protiv alternativne hipoteze $\mathrm{H}_0(\mathrm{m} \neq \mathrm{m}_0)$ koje ima normalnu raspodelu $\mathrm{N}(\mathrm{m}, \sigma^2)$, ako je disperzija σ^2 poznata.

Ako je nulta hipoteza $\mathrm{H}_0(\mathrm{m} = \mathrm{m}_0)$ tačna, statistika $Z = \frac{\bar{X}_n - m_0}{\sigma}\sqrt{n}$ ima normalnu raspodelu, u oznaci $N(0,1)$. Alternativna hipoteza može imati sledeće oblike: $H_1(m \neq m_0)$, $H_1(m < m_0)$, $H_1(m > m_0)$, kao i $H_1(m = m_1)$ u varijantama $m_1 < m_0$ i $m_1 > m_0$.

[1]Neka je dat niz $X_1, X_2, \ldots$ niz slučajnih veličina i neka slučajna veličina X ima $N(0,1)$ rasodelu.

Ako važi $\frac{\bar{X}_n - E(\bar{X}_n)}{\sqrt{D(\bar{X}_n)}} \xrightarrow{Z} X$, n → ∞, tada se kaže da za niz $X_1, X_2, \ldots$ važi *centralna granična teorema*.

Postupak testiranja podrazumeva da se najpre, za dati prag značajnosti α, odrede granice kritične oblasti iz uslova

$$P_{H_0}\{|\bar{X}_n - m_0| \geq \varepsilon\} = \alpha \qquad (1)$$

Na taj način je obuhvaćeno sve što je nepovoljno za nultu hipotezu, a ide u prilog alternativnoj hipotezi.

Ukoliko se izvrši transformacija izraza u uslovu (1) u zagradi množenjem sa $\frac{\sqrt{n}}{\sigma}$, dobija se:

$$\begin{aligned} &P_{H_0}\{|\bar{X}_n - m_0| \geq \varepsilon\} = \\ &= P_{H_0}\left\{\frac{|\bar{X}_n - m_0|}{\sigma}\sqrt{n} \geq \frac{\varepsilon}{\sigma}\sqrt{n}\right\} = \\ &= P\{|Z| \geq c\} = \alpha, \end{aligned} \qquad (2)$$

gde $c = \frac{\varepsilon}{\sigma}\sqrt{n}$ predstavlja kritičnu vrednost.

Iz tablica za normalnu raspodelu računa se kritična vrednost kao $c = F^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$, gde F predstavlja funkciju raspodele slučajne veličine sa normalnom normiranom raspodelom $N(0,1)$. Sledeći korak je računanje ε.

Ako je $\bar{x}_n$ realizovana vrednost statistike $\bar{X}_n$ i ako je $|\bar{x}_n - m_0| \geq \varepsilon$, nulta hipoteza se odbacuje,

Kritična oblast ovog testa je oblika $W_n = (-\infty, m_0 - \varepsilon] \cup [m_0 + \varepsilon, +\infty)$, pa se, ako $\bar{x}_n \in W_n$, nulta hipoteza odbacuje, odnosno alternativna hipoteza prihvata (za $\bar{x}_n \notin W_n$).

U formulama u vezi statističkih testova povezuju se: kritična oblast $\mathrm{W_n}$, test-statistika (ovde je to srednja vrednost uzorka), prag značajnosti α (verovatnoća greške prve vrste), verovatnoća greške druge vrste β, nulta i alteranativna hipoteza:

$$P_{H_0}(\bar{X}_n \in W_n) = \alpha \qquad (3)$$

$$P_{H_1}(\bar{X}_n \notin W_n) = \beta \qquad (4)$$

Moć testa je 1-β i predstavlja verovatnoću donošenja pravilne odluke – prihvatanje $\mathrm{H_1}$ kada je ona tačna.

2.1.2. Test količnika verodostojnosti

Ideja testa količnika verodostojnosti pri testiranju nulte hipoteze $H_0(m = m_0)$ protiv alternativne hipoteze $H_1(m \neq m_0)$ zasnovana je na metodi maksimalne verodostojnosti (MMV) koja je jedna od opštih metoda za određivanje, u određenom smislu optimalne, statistike kojom se ocenjuje nepoznati parametar u raspodeli obeležja. Ukoliko je nepoznati parametar matematičko očekivanje ili disperzija raspodele obeležja, onda je „prirodno“ uzeti srednju vrednost uzorka, odnosno disperziju kao ocenu parametra. Tu „prirodnost“ često potvrđuje i MMV. Ako je parametar koji treba oceniti neka druga veličina u raspodeli obeležja, onda

MMV dovodi do statistike kojom se taj parametar može ocenjivati [2].

Neka je $\hat{m}$ ocena parametra m dobijena po MMV. Tada je vrednost funkcije verodostojnost L_n u toj tački maksimalna. Stoga količnik funkcija verodostojnosti

$$\Lambda = \frac{L_n(\vec{x}, m_0)}{L_n(\vec{x}, \hat{m})}, \quad (5)$$

za svaki uzorak $\vec{x}$ obima n zadovoljava uslov $\Lambda \leq 1$.

Zaključuje se da što je Λ bliže 1, to je m_0 više saglasna oceni $\hat{m}$ (dobijena po MMV), a što je Λ manje, to je m_0 manje saglasna sa $\hat{m}$.

Hipoteza H_0 se odbacuje u slučaju da je $\Lambda \leq c$, pri čemu je $P_{H_0}(\Lambda \leq c) = \alpha$.

U testu količnika verodostojnosti ukoliko je hipoteza H_0 korektna, pokazuje se da je $-2\ln\Lambda \longrightarrow \chi_1^2$ (konvergencija u raspodeli ka hi-kvadrat raspodeli sa jednim stepenom slobode) pri važenju uslova regularnosti:

- $m \neq m' \Rightarrow f(x,m) \neq f(x,m')$; $f(x,m)$ raspodela obeležja x;
- oblast definisanja za f ne zavisi od m;
- m_0 je unutrašnja tačka skupa Θ (parametarski prostor);
- $\frac{\partial}{\partial m}\int f(x,m)dx = \int \frac{\partial}{\partial m} f(x,m)dx$;
- $f(x,m)$ tri puta diferencijabilna m i f''' ograničena funkcija u nekoj okolini m:

$$\left(\frac{\bar{X}_n - m_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)^2 = (N(0,1))^2 = \chi_1^2, \quad (6)$$

koji su ispunjeni kod normalne raspodele.

Kod Normalne raspodele, raspodela količnika verodostojnosti se pokorava χ^2 raspodeli, a kod drugih raspodela koristi se aproksimacija χ^2 raspodelom, kao što je gore navedeno.

H_0 se odbacuje ako je $-2\ln\Lambda$ veće od tablične vrednosti χ_1^2 za dati prag značajnosti α.

2.1.3. Nojman-Pirsonova lema

Ovo je zapravo teorema koja govori o mogućnosti dobijanja najmoćnijeg testa ukoliko je parametarski prostor[2] Θ dvočlan, tj. ako je $\Theta = \{m_0, m_1\}$, pa su ovde nulta i alternativna hipoteza proste hipoteze, tj. $H_0(m = m_0)$ i $H_1(m = m_1)$.

Po definiciji, test sa pragom značajnosti α je najmoćniji ako za njegovu kritičnu oblast W_T važi da za svaku drugu kritičnu oblast W_T' veličine α' manje ili jednake α

$$P_{H_1}(T_n \in W_T) \geq P_{H_1}(T_n \in W_T'). \quad (7)$$

Nojman-Pirsonova lema tvrdi da postoji najmoćniji test čija kritična oblast sadrži sve tačke uzoračkog prostora x[3] tako da je:

$$\frac{L_n(\vec{x}, m_1)}{L_n(\vec{x}, m_0)} \geq c(\alpha), \quad (8)$$

gde je L_n funkcija verodostojnosti, a $c(\alpha)$ dobija se iz uslova:

$$P_{H_0}(T_n \in W_T) \leq \alpha. \quad (9)$$

Nojman-Pirsonova lema je primenljiva i analogno se koristi u slučaju hipoteze o raspodeli obeležja, samo ako su moguće dve raspodele za obeležje X, tj. da je dvočlan skup mogućnosti. Ovo proizilazi iz dokaza Nojman-Pirsonove leme u kome se vrednosti parametara ne pominju, nego je jedino važno da su i nulta i alternativna hipoteza proste.

2.1.4. Bootstrap metoda

Bootstrap je računarska metoda za testiranje hipoteza kojom se na osnovu raspoloživih podataka iz jednog reprezentativnog uzorka kreira veliki broj novih uzoraka, koji su istog obima kao i izvorni uzorak, slučajnim biranjem sa vraćanjem iz skupa raspoloživih podataka.

Lako je videti da svaki element ima jednaku verovatnoću da uđe u uzorak, pa da se stoga neki elementi mogu pojaviti više puta, a neki nijednom.

Pretpostavimo u nastavku da se testira matematičko očekivanje, ali se postupak takođe analogno primenjuje i na testiranje hipoteze o bilo kom parametru raspodele posmatranog obeležja.

Neka je $\vec{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ uzorak obeležja X određene raspodele, a m_0 predstavlja matematičko očekivanje obeležja.

Treba testirati nultu hipotezu $H_0: m = m_0$ protiv alternativne hipoteze $H_1: m > m_0$.

Pri testiranju nulte hipoteze, umesto na realizovani uzorak $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, postupak se primenjuje na skup $\vec{z} = (z_1, \ldots, z_n)$, gde je

$$z_i = x_i - \bar{x} + m_0, \quad i = 1,2, \ldots, n \quad (10)$$

Ovde je $\bar{x}$ predstavlja srednju vrednost uzorka za polazni uzorak. Zatim se na osnovu datog, reprezentativnog uzorka, generiše k uzoraka istog obima kao reprezentativni uzorak i za svaki od njih se računa srednja vrednost uzorka za podatke dobijene po formuli (10).

Broj tako dobijenih uzoračkih sredina koje su veće od $\bar{x}$, deli se sa k i poredi sa pragom značajnosti α. Ako je manji od α, nulta hipoteza se odbacuje.

[2]Skup svih mogućih vrednosti parametra θ predstavlja parametarski prostor

[3]x- uzorački prostor, odnosno skup mogućih vrednosti uzoraka $\vec{x}$

2.2. Neparametarski testovi

Hipoteza o raspodeli obeležja (koje se ne odnose na parametre, već na samu raspodelu obeležja) se nazivaju neparametarske hipoteze, a odgovarajući testovi su testovi saglasnosti ili neparametarski testovi.

2.2.1. Testovi zasnovani na karakterizacijama

Testovi za testiranje hipoteza oblika $H_0(F_X(x) = F_0(x))$ koji su zasnovani na karakterizacijama raspodela su specifični po tome što se odnose na samo jednu određenu raspodelu.

Karakterizacioni problemi mogu se opisati na sledeći način:

Neka slučajna veličina X ima funkciju raspodele F, s tim da ima neko određeno svojstvo I. Karakterizacija predstavlja drugi smer tvrđenja, tj. ako slučajna veličina X ima svojstvo I, tada mora imati raspodelu F.

Svojstvo I koje karakteriše raspodelu može biti različitih oblika. Navodimo karakterizaciju normalne raspodele:

Teorema:

Obeležje X ima normalnu raspodelu ako i samo ako su srednja vrednost uzorka $\bar{X}_n$ i uzoračka disperzija[4] $\bar{S}_n^2$ nezavisne statistike.

2.2.2. Pirsonov $\boldsymbol{\chi^2}$ – test

Pirsonov $\boldsymbol{\chi^2}$ - test primenjuje se za obeležja sa diskretnim i za obeležja sa neprekidnim raspodelama, dosta se koristi u praksi i pripada neparametraskim testovim.

Testirati na saglasnost znači utvrditi da li je raspodela slučajne promenljive, kojoj određeni uzorak $x_1, x_2, \dots, x_n$ pripada, saglasna pretpostavljenoj raspodeli verovatnoća $F(x)$ slučajne promenljive.

Nulta hipoteza H_0 je hipoteza da obeležje X ima jednu potpuno određenu (poznatu) raspodelu $f(x)$, sa funkcijom raspodele $F(x)$, i testira se protiv alternativne hipoteze H_1 da X nema tu raspodelu.

Skup vrednosti koje su dobijene u uzorku se podeli na k disjunktnih skupova koji treba da obuhvataju sve moguće vrednosti obeležja prema nultoj hipotezi.

Neka je n_j' - broj rezultata opažanja koji se nalaze u intervalu j ($j = 1, 2, \dots, k$), pri čemu je

$$n_1' + n_2' + \cdots + n_k' = n \qquad (11)$$

i neka je n_j teorijski broj rezultata opažanja u intervalu j ($j = 1, 2, \dots, k$).

Teorijski broj opažanja u j-tom intervalu: $n_j = n \cdot p_j$, gde je p_j verovatnoća da će obeležje imati vrednost u intervalu j, ukoliko važi nulta hipoteza.

Test-statistika:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} y_j^2 \ \sim \chi_s^2 \mid H_0 \, , \qquad (12)$$

$$y_j^2 = \frac{(n_j' - n \cdot p_j)^2}{n \cdot p_j} \ , \ \ s = k - c - 1, \qquad (13)$$

gde je c broj parametara raspodele koja je ocenjena na osnovu uzorka.

Ako je realizovana vrednost test-statistike manja od tablične vrednosti kvantila za zadatu verovatnoću i broj stepeni slobode:

$$\chi^2 < \chi_{1-\alpha;s}^2 \ , \qquad (14)$$

prihvata se H_0.

2.7. Test Kolmogorova

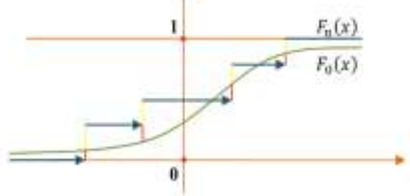
Test Kolmogorova je jedan od neparametarskih testova (slobodan, nezavisan od raspodele obeležja) i primenjuje se za obeležja koja imaju neprekidne raspodele. Nulta hipoteza H_0 označava da je raspodela posmatranog obeležja X jednaka nekoj raspodeli $F_0(x)$, pri čemu u izrazu za tu raspodelu svi parametri moraju biti specifikovani, a alternativna hipoteza znači da je raspodela različita od raspodele $F_0(x)$. Test Kolmogorova je jedan od testova koji su zasnovani na centralnoj graničnoj teoremi matematičke statistike, po kojoj empirijska funkcija raspodele uzorka uniformno konvergira ka raspodeli obeležja, kad se obim uzorka neograničeno uvećava.

U testu Kolmogorova najpre, na osnovu datog uzorka, računa se empirijska funkcija raspodele:

$$F_n(x) = \begin{cases} 0, & za \ \ x < x_1 \\ \frac{k}{n}, \ za \ \ x_k \le x < x_{k+1} & \\ 1, & za \ x > x_n \end{cases} \qquad (15)$$

i ona će se uporediti sa pretpostavljenom, poznatom teorijskom raspodelom $F_0(x)$.

Ako $F_n(x)$ predstavlja empirijsku funkciju raspodele, a $F_0(x)$ predstavlja raspodelu pri H_0, u svakoj tački skoka $F_n(x)$ potrebno je posmatrati vrednosti i sa leve i sa desne strane, kao što je prikazano na slici 1, gde su vrednosti sa leve strane prikazane sa crvenom bojom, dok su vrednosti sa desne strane prikazane žutom bojom.



Slika 1 - Empirijska funkcija raspodele $F_n(x)$ i raspodela $F_0(x)$ pri H_0

[4]Neka je $(X_1, \dots, X_n)$ prost slučajni uzorak obima n za posmatrano obeležje X. Ukoliko matematičko očekivanje nije poznato, tada je uzoračka disperzija statistika $\bar{S}_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2$.

Na taj način formira se *2n* razlika po apsolutnoj vrednosti i nakon toga traži se maksimalna od tih vrednosti, koja će predstavljati realizovanu vrednost test statistike:

$$D_n = sup\,|F_n(x) - F_0(x)| \qquad (16)$$

Kolmogorov je pokazao da za neprekidne funkcije F_o granična raspodela za D_n NE zavisi od F_o, pa se dobijena raspodela naziva njemu u čast – raspodela Kolmogorova:

$$\lim_{n\to\infty} P\{\sqrt{n}\cdot D_n < \lambda\} = \lim_{n\to\infty} P\left\{D_n < \frac{\lambda}{\sqrt{n}}\right\} =$$

$$K(\lambda) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k\, e^{-2k^2\lambda^2}, \qquad (17)$$

za svako $\lambda > 0$.

Konvergencija je brza i aproksimacija zadovoljavajuća već za $n \geq 20$.

Naravno, $K(\lambda) = 0$ za svako $\lambda \leq 0$.

Sa $K(\lambda)$ određena je tzv. raspodela Kolmogorova.

Nulta hipoteza glasi - $H_0 : F(x) = F_0(x)$, dok alternativna glasi - $H_1 : F(x) \neq F_0(x)$.

Neka je $d_n = max\,|F_n(x) - F_0(x)|$ realizovana vrednost statistike Kolmogorova. Jasno je da velike vrednosti d_n govore u prilog nesaglasnosti raspodele $F_n(x)$ sa F_0. Zato je kritična oblast određena uslovom $D_n \geq c$. Dakle, $W = [c, 1) = \left[d_{n,\alpha}, 1\right)$. Broj $d_{n,\alpha}$ koji je granica kritične oblasti nalazi se iz odgovarajućih tablica za usvojeni prag značajnosti α i broj stepeni slobode koji je jednak broju elemenata uzorka (od n = 1 do 100).

Ako je $d_n > d_{n,\alpha}$, tada se hipoteza H_0 odbacuje (za dati prag značajnosti i za dati uzorak).

3. PRIMERI STATISTIČKIH TESTOVA U GEODETSKIM PROBLEMIMA

U parametarskim testovima, test-statistiku formira parametar koji se ocenjuje. To je prikazano na primeru testiranja hipoteze o matematičkom očekivanju obeležja X sa normalnom raspodelom $N(m, \sigma^2)$, ako je disperzija σ^2 poznata.

Primer 3.1:

Dužina baze za kalibraciju daljinomera iznosi 800.008 m. Iz serije od 30 merenja sa daljinomerom, dobijena je srednja vrednost koja iznosi 800.016 m sa standardnim odstupanjem od 0.003 m.

Testirati hipotezu $H_0(m = 800.008\,\text{m})$ protiv alternativne hipoteze $H_1(m \neq 800.008\,\text{m})$, koristeći prag značajnosti $\alpha = 0.05$.

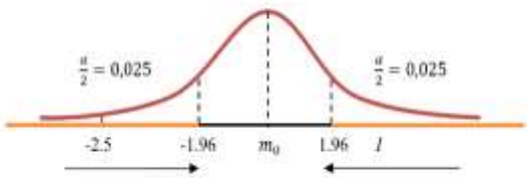
Rešenje:

Kod parametarskih testova test-statistika formira se na osnovu statistike kojom se parametar ocenjuje. U prikazanom primeru za test-statistiku, intuitivno, uzima se $\bar{X}_n$ jer se matematičko očekivanje ocenjuje srednjom vrednošću uzorka.

Test-statistika $Z = \frac{\bar{X}_n - m_0}{\sigma}\sqrt{n}$ ima normalnu raspodelu u oznaci $N(0,1)$ i jednaka je:

$$\frac{\bar{x}_n - m_0}{\sigma}\sqrt{n} = 14.61.$$

Iz uslova $P\{|Z| \geq c\} = 0.05$, dobija se da je $c = F^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) = F^{-1}\left(1 - \frac{0.05}{2}\right) = F^{-1}(0.975)$, obzirom da se radi o dvostranom testu $\frac{\alpha}{2} = 0.025$. Iz tablice za normalnu raspodelu, sledi da je $c = 1.96$ (*Slika 2.*).



Slika 2 - Kritična oblast za $H_0(m = 800.008\,m)$ protiv $H_1(m \neq 800.008\,m)$ iz tablica za normalnu raspodelu

Gde je ε:

$$\varepsilon = \frac{c\cdot\sigma}{\sqrt{n}} = 0.001\,m$$

Kako je:

$$|\bar{x}_n - m_0| = 0.008\,m \geq 0.001\,m = \varepsilon.$$

$$W = (-\infty, m_0 - \varepsilon] \cup [m_0 + \varepsilon, +\infty)$$

$$= (-\infty, 800.007\,m] \cup [800.009\,m, +\infty).$$

Zaključak:

Srednja vrednost $\bar{x}_{30} = 800.016$ m dobijena iz 30 serija merenja, statistički je različita od najverovatnije vrednosti koja iznosi $m_0 = 800.008$ m i na osnovu čega se nulta hipoteza odbacuje, za dati prag značajnosti $\alpha = 0.05$.

Primer 3.2:

Primeniti Nojman-Pirsonovu lemu na testiranje hipoteze da je $E(X) = 5$ protiv alternativne da je $\mathrm{E}(X) = 1$ sa pragom značajnosti $\alpha = 0.01$, ako je uzorak obima $n = 100$, a raspodela za $X \sim N(m, 16)$ i parametarski prostor dvočlan $\Theta = \{1, 5\}$.

Rešenje:

Uočava se da se u ovom tipu testa ne daju podaci.

Primenjuje se Nojman-Pirsonova lema koja pripada grupi parametarskih testova i govori o mogućnosti dobijanja najmoćnijeg testa ukoliko parametarski prostor sadrži tačno dva člana, odnosno ako su moguće samo dve vrednosti parametra.

Karakteristično za ovu metodu je to da su i nulta i alternativna hipoteza proste hipoteze.

Raspodela za X: $N(m, 16)$ je $\frac{1}{4\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{32}}$,

$x \in \mathbb{R}$, $m \in \{1, 5\}$.

Funkcija verodostojnosti je:

$$L_{100}(\vec{x}, m) = \left(\frac{1}{4\sqrt{2\pi}}\right)^{100} \prod_{j=1}^{100} e^{-\frac{(x_j-m)^2}{32}}, \quad (18)$$

$\vec{x} = (x_1, \dots, x_{100})$.

U kritičnoj oblasti treba da bude:

$$\frac{L_{100}(\vec{x}, m_1)}{L_{100}(\vec{x}, m_0)} \geq c(\alpha), \; tj. \frac{L_{100}(\vec{x}, 1)}{L_{100}(\vec{x}, 5)} \geq c(\alpha) \quad (19)$$

Dobija se:

$$\frac{\left(\frac{1}{4\sqrt{2\pi}}\right)^{100} \prod_{j=1}^{100} exp^{-\frac{1}{32}(x_j-1)^2}}{\left(\frac{1}{4\sqrt{2\pi}}\right)^{100} \prod_{j=1}^{100} exp^{-\frac{1}{32}(x_j-5)^2}} \geq c(\alpha)$$

$$\Rightarrow exp\left(\frac{1}{32}\left(2400 - 8\sum_{j=1}^{100} x_j\right)\right) \geq c(\alpha)$$

$$\Rightarrow e^{-\frac{1}{4}\sum_{j=1}^{100} x_j} \geq c'$$

$$-\frac{1}{4}\sum_{j=1}^{100} x_j \geq c'' \Rightarrow \sum_{j=1}^{100} x_j \geq c''',$$

pa je ovo oblik za kritičnu oblast (u kome se pojavljuje $n \cdot \bar{X}_n$, a $\bar{X}_n$ služi kao ocena za $E(X)$, pa rezultat potvrđuje intuiciju i po pitanju test-statistike i po pitanju oblika kritične oblasti.

Kritične vrednosti za $\bar{x}_{100}$ su male vrednosti, pa je prihvatljivije da je $m_1 = 1$ za $E(X)$, nego $m_0 = 5$.

$$P_{H_0}(\bar{X}_{100} \leq c^*) = 0.01.$$

Primenjujući tablice za Normalnu raspodelu, dobija se: $c^* = 4.068$.

Zaključak: Ako je $\bar{x}_{100} < 4.068$, odbacuje se nulta hipoteza H_0 pri datom pragu značajnosti α.

Primer 3.3: [5]: U jednoj poligonskoj mreži izmereno je 615 dužina.

Tabela 1. Dužine u poligonskoj mreži

Grupa k	Dužine m	Broj merenja n_j'	Srednja vrednost $\bar{x}_j$	$n_j' \cdot \bar{x}_j$	$n_j' \cdot \bar{x}_j^2$
1	1.5 - 2.5	9	2	18	36
2	2.5 - 3.5	46	3	138	414
3	3.5 - 4.5	119	4	476	1904
4	4.5 - 5.5	218	5	1090	5450
5	5.5 - 6.5	151	6	906	5436
6	6.5 - 7.5	59	7	413	2891
7	7.5 - 8.5	13	8	104	832
		615		3145	16963

Na osnovu podataka merenja proveriti da li se slučajna promenljiva ponaša po zakonu normalne raspodele. Za nivo značajnosti usvojiti $= 0.05$.

Rešenje:

χ^2-test odnosi se na sve raspodele (i diskretne i neprekidne), i kod njega se upoređuju empirijske i teorijske (hipotetičke) frekvencije.

U χ^2-testu se vrši grupisanje podataka i jedino je važno koliko podataka ima po pojedinim intervalima, a ne i koji su podaci. U ovom primeru, koristi se χ^2-test jer su dužine date u intervalima.

Potrebno je testirati nultu hipotezu

$$H_0: f(x) = N(m, \sigma^2) \quad (20)$$

gde je alternativna hipoteza

$$H_1: f(x) \neq N(m, \sigma^2) \quad (21)$$

Srednja vrednost, varijansa i standardna devijacija osnovnog skupa su, redom: $m = 5.1$, $S_{\overline{m}}^2 = 1.47$ i $S_{\overline{m}} = 1.2$. Stoga će, po nultoj hipotezi raspodela za X biti:

$$N(m, \sigma^2) = \frac{1}{1.2 \cdot \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-5.1)^2}{2 \cdot 1.2^2}},$$

za $-\infty < x < +\infty$. Korišćenjem tablica za normalnu raspodelu računamo teorijske verovatnoće i dobijamo:

$$P(X \leq 2.5) = 0.0150$$
$$P(2.5 < X \leq 3.5) = 0.0768$$
$$P(3.5 < X \leq 4.5) = 0.2168$$
$$P(4.5 < X \leq 5.5) = 0.3208$$
$$P(5.5 < X \leq 6.5) = 0.2497$$
$$P(6.5 < X \leq 7.5) = 0.0983$$
$$P(X > 7.5) = 0.0228.$$

Koristeći te verovatnoće računamo očekivane frekvencije po intervalima, a zatim i realizaciju test-statistike i dobijamo $\chi^2 = 3.904$.

U ovom slučaju je $k = 7$ i c = 2, jer su dva parametra osnovnog skupa, tako da je broj stepena slobode 7-2-1 = 4.

Ovoj vrednosti za $\alpha = 0.05$ iz tablice za χ^2 raspodelu odgovara kritična vrednost:

$$\chi^2_{4,0.05} = 9.488$$

Zaključak:

Kako je $\chi^2 = 3.904 < 9.488$, prihvata se H_0, podaci imaju normalnu raspodelu odnosno ne protivureče pretpostavci o pripadnosti populaciji sa normalnom raspodelom.

Primer 3.4. [5]: Na osnovu datog uzorka od 20 merenja čije su vrednosti date u tabeli, primenom testa Kolmogorova, sa pragom značajnosti $\alpha = 0.05$ testirati hipotezu da uzorak pripada normalnoj raspodeli *N(0,1)*.

0.464	0.137	0.2455	-0.323	-0.068
0.906	-0.513	-0.525	0.595	0.881
-0.482	1.678	-0.057	-1.229	-0.486
-1.787	-0.261	1.237	1.046	-0.508

Rešenje:

Test Kolmogorova primenjuje se samo za neprekidne raspodele sa svim specificiranim parametrima. Kod testa Kolmogorova upoređuju se empirijska i teorijska funkcija raspodele.

Formiranjem varijacionog niza $z_1 \leq z_2 \leq \ldots \leq z_n$, (tj. uređivanjem podataka iz uzorka u neopadajući niz) određuje se empirijska funkcija raspodele.

Emprijska funkcija raspodele:

$$F_{20}(z) = \begin{cases} 0, & z < -1.787 \\ \frac{1}{20}, & -1.787 \leq z < -1.229 \\ \frac{2}{20}, & -1.229 \leq z < -0.525 \\ & \ldots \\ 1, & 2.455 < z \end{cases}$$

Potrebno je izračunati sve razlike $|F_{20}(z_i) - F_0(z_i)|$ i $|F_{20}(z_{i-1}) - F_0(z_i)|$, pri tome je $F_{20}(z_0) = 0$. Najveća od svih vrednosti će biti realizovana vrednost d_{20} test-statistike D_{20} i u primeru je jednaka:

$$d_{20} = \max |F_{20}(z_{i-1}) - F_0(z_i)| \cong 0.1998$$

Broj elemenata uzorka je n=20 i pri pragu značajnosti α = 0.05 tome odgovara kritična vrednost

$$d_{20;0.05} = 0.294$$

Kako je u ovom slučaju $d_{20} < d_{20;0.05}$ odnosno $0.1998 < 0.294$, prihvata se nulta hipoteza da obeležje X ima normalnu normiranu raspodelu, na osnovu dobijenog uzorka i za dati prag značajnosti.

4. ZAKLJUČAK

U ovom radu opisano je nekoliko statističkih testova sa primerima njihove primene u geodeziji. Kod intuitivne metode vrši se izbor $\bar{X}_n$ kod testiranja matematičkog očekivanja, jer se matematičko očekivanje ocenjuje srednjom vrednošću uzorka i na osnovu toga pripada parametarskim testovima.

Test količnika verodostojnosti takođe pripada grupi parametarskih testova i zasnovan je na primeni metode maksimalne verodostojnosti za ocenjivanje parametra. Nojman-Pirsonova lema govori o mogućnosti dobijanja najmoćnijeg testa ukoliko parametarski prostor sadrži tačno dva člana i to da su i nulta i alternativna hipoteza proste hipoteze.

Specifičnost testa zasnovanog na karakterizaciji je u tome da se odnosi na samo jednu određenu raspodelu i neku njenu karakterizacionu osobinu. Po tome se razlikuju od neparametarskih testova Pirsonovog χ^2-test i testa Kolmogorova koji su primenljivi na sve raspodele i kod kojih je izraz za test-statistiku uvek isti, sa raspodelom koja ne zavisi od raspodele pretpostavljene nultom hipotezom.

Pirsonov χ^2-test i test Kolmogorova odnose se na istu problematiku - testiranje hipoteze o raspodeli obeležja X. χ^2-test odnosi se na sve raspodele (i diskretne i neprekidne), a test Kolmogorova samo za neprekidne raspodele sa svim specifikovanim parametrima. χ^2-test je slobodan od raspodele i u χ^2-testu mogu figurisati raspodele u kojima ima nepoznatih parametara.

Kod χ^2-testa se upoređuju empirijske i teorijske (hipotetičke) frekvencije, a kod testa Kolmogorova empirijska i teorijska funkcija raspodele. U χ^2-testu se vrši grupisanje podataka i samo je važno koliko ih ima po pojedinim intervalima, a ne i koji su. Time se gubi veliki deo informacija koje sadrži uzork.

Zbog važnosti donošenja pravilne odluke o prihvatanju hipoteze koja se testira treba, ukoliko je moguće pronaći „najmoćniji" test i primeniti ga u konkretnoj situaciji.

5. ZAHVALNICA

Ovaj rad je deo tehnološkog razvoja projekata br. 200092 koji finansira Ministarstvo prosvete, nauke i tehnološkog razvoja.

LITERATURA

[1] Perović G, *Teorija grešaka merenja*, Monografija 3, Beograd, AGM knjiga, 2015.

[2] Jevremović V. *Verovatnoća i statistika*. Beograd: Univerzitet u Beogradu - Matematički Fakultet, 2014.

[3] Jevremović V, Mališić J, (red.), *Izabrana poglavlja statistike*. Novi Pazar: DUNP, 2018.

[4] Božić B, *Teorija grešaka geodetskih merenja*, Beograd: Univerzitet u Beogradu - Građevinski fakultet, 2015.

[5] Nenadović M, *Matematička obrada podataka dobijenih merenje*m, Beograd, Srpska akademija nauka i umetnosti, 1988.

[6] Mladenović P, *Elementarni uvod u verovatnoću i statistiku*, Beograd, Društvo matematičara SR Srbije, 1990.

[7] Bešić A, *Metode konstruisanja statističkih testova*, DUNP, Novi Pazar, master rad, 2020.

SUMMARY

STATISTICAL TESTS AND THEIR APPLICATION IN GEODESY

The correct conclusion about the assumptions concerning some phenomena can be obtained only through scientific analysis of statistical data. The scientific procedure of verifying a hypothesis using measurement results is called a statistical test. Depending on whether the hypotheses about the parameters in the feature distribution are tested or the distribution as a whole is tested, a parametric or non-parametric test is selected. The most significant representatives of parametric tests are the Probability Ratio Test, the Neumann - Pearson Lemma and the Bootstrap method, while the Pearson χ^2 *test and the Kolmogorov test are presented as representatives of nonparametric tests.*

The paper presents the theoretical basis of some methods used in construction of statistical tests with given examples in geodesy.

Key words: *Parametric tests, Nonparametric tests, Likelihood ratio test, Neumann-Pearson lemma, Pearson* χ^2 *test, Kolmogorov test*