
Mila S. JELIĆ¹
Učiteljski fakultet,
Univerzitet u Beogradu

Pregledni naučni rad PEDAGOGIJA LXXVI, 3/4, 2021. UDK: 37.091.315.7 37.015.3:159.953

KORIŠĆENJE REPREZENTACIJA U REŠAVANJU PROBLEMSKIH ZADATAKA²

Rezime: Sposobnost rešavanja problema smatra se važnom veštinom današnjice. Ova tema istražuje se u oblastima obrazovanja, nauke, tehnologije i matematike. Važan aspekt rešavanja problemskih zadataka jeste njegovo predstavljanje. Problemski zadaci se mogu rešavati formalnim načinima predstavljanja, npr. jednačinama, ili manje formalnim kao što su grafički prikazi. Istraživanja reprezentacije pokazuju da su shematski prikazi odnosa iz zadataka povezani sa sposobnošću vizuelizacije i uspehom u rešavanju matematičkih problema. Takođe, istraživanja potvrđuju da u umu pojedinaca koji uspešno rešavaju zadatke postoji model koji odražava strukturu samog aritmetičkog zadatka. Cilj rada je prikazivanje zajedničkih metodičkih implikacija koje se tiču reprezentacija u rešavanju matematičkih problema. Glavni zaključci su da nastavnici koji će pre svega imati pozitivna uverenja o korisnosti reprezentacija, zajedno sa učenicima, izgrađuju i usavršavaju i kritikuju spoljašnje forme reprezentacija, i da na taj način osposobljavaju učenike za modelovanje u postupku rešavanja problemskih zadataka. Pre toga, neophodno je da reprezentacije i problemski zadaci budu integralni deo nastavnog programa matematike, udžbenika matematike i učioničke kulture kao važni procesi učenja.

¹ mila.jelic@uf.bg.ac.rs

² Rad predstavlja rezultat rada na projektu „Konceptije i strategije obezbeđivanja kvaliteta bazičnog obrazovanja i vaspitanja”, broj 179020, Učiteljskog fakulteta u Beogradu.

Ključne reči: nastava matematike, reprezentacije, problemski zadatak.

Uvod

Sposobnost rešavanja problema smatra se ključnom sposobnošću današnjice i zbog toga se ova oblast istražuje sa aspekta nauke, tehnologije, inženjerstva i matematike (Van Gog, Hoogerheide & Van Harsel, 2020). Važan aspekt rešavanja problemskih zadataka jeste njegovo predstavljanje (Ke & Clark, 2020). S druge strane, postoje brojni dokazi o korisnosti ranog učenja, te je tema ovog prikaza učeničko rešavanje problemskih zadataka posredstvom reprezentacija. Cilj rada je prikazivanje savremenih kretanja u istraživanjima reprezentacija u rešavanju problemskih zadataka.

Problemski zadaci i reprezentacije imaju svoje mesto u nacionalnim kurikulumima. U okviru nacionalnog kurikuluma Sjedinjenih Američkih Država za školsku matematiku (National Council of Teacher of Mathematics [NCTM], 2000), problemski zadaci i reprezentacije predstavljaju procese učenja koji treba da budu zastupljeni kroz sve sadržinske oblasti. U nacionalnom kurikulumu Singapura, čiji učenici prednjače na međunarodnim testiranjima, problemsko rešavanje ima centralno mesto u pentagonalnom okviru (Curriculum Planning and Development Division [CPDD], 2020). To znači da je cilj matematičkog obrazovanja razvijanje matematičkog mišljenja i veština rešavanja problema u različitim oblastima. Pod rešavanjem problemskih zadataka podrazumeva se sticanje i primena matematičkih pojmova u različitim situacijama, uključujući nerutinske zadatke, zadatke otvorenog i zatvorenog tipa, kao i zadatke u realnom kontekstu. Osmišljavanje i korišćenje reprezentacija radi rešavanja problema javlja se, kao i u kurikulumu SAD, kao proces učenja. U Singapuru je razvijen *model metod* kao alat za prikazivanje i vizualizovanje odnosa datih u tekstualnim zadacima koji se tiču aritmetike celih brojeva. Njegova korist se pokazala pri rešavanju zadataka i doprinosu osećaju za broj (Kaur, 2015).

Dakle, rešavanje problemskih zadataka uz korišćenje reprezentacija, kao jedne od strategija rešavanja, ima istaknuto mesto u nacionalnim kurikulumima SAD i Singapura. U stručnoj literaturi se ističe da ove oblasti treba da budu integralni deo svakog nastavnog programa, a ne odvojene celine (Van de Walle, Karp & Bay-Williams, 2013).

Pojmovno određenje problemskih zadataka

„Matematički problem je zadatak u kome figurišu matematički objekti, a može se rešiti korišćenjem matematičkog aparata, pri čemu je put rešavanja nepoznat ili nije očigledan” (Milinković, 2015: 376). Da bi zadatak imao karakteristike problema, mora da se odnosi na trenutni nivo učeničkog razumevanja matematičkih pojmova, zatim, problematični deo zadatka treba da se odnosi na pojmove koje učenik uči, a rešenje i proces rešavanja zadatka nisu jednoznačni, već zahtevaju obrazloženje (Van de Walle, Karp & Bay-Williams, 2013).

U udžbeniku metodike namenjenom nastavnicima matematike, o problemskom rešavanju zadataka govori se iz tri perspektive: 1. poučavanje *za* problemsko rešavanje; 2. poučavanje *o* problemskom rešavanju i 3. poučavanje *kroz* problemsko rešavanje. Prvi pristup podrazumeva prethodno učenje apstraktnih pojmova, a potom rešavanje zadataka a rad uvežbavanja procedura. Drugi pristup se odnosi na učenje različitih metoda rešavanja zadataka, dok treći pristup podrazumeva uvođenje matematičkih pojmova kroz probleme zadate u realnom kontekstu (Van de Walle, Karp & Bay-Williams, 2013). Tema ovog rada odgovara drugom pristupu – zanima nas kakve reprezentacije kreiraju učenici u procesu rešavanja problemskih zadataka.

Proces rešavanja zadataka ima četiri faze (Polya, 1966): 1. razumevanje zadatka; 2. pravljenje plana; 3. izvršenje plana; 4. provera rešenja i diskusija. Tokom pravljenja plana rešavanja problemskog zadatka, posebno kada je reč o tekstualnom zadatku, učenici pristupaju modelovanju. Odnose iz zadatka predstavljaju neformalnim načinima: crtežima, dijagramima, tabelama ili formalnijim načinima: jednačinama (Obradović i Zeljić, 2015).

Pojmovno određenje reprezentacija i njihova klasifikacija

Formalan ili manje formalan način predstavljanja matematičkih pojmova, ideja i odnosa naziva se reprezentacija (Terwel, Van Oers & Van Dijk, 2009). Postoji razlika između upotrebe termina *model* i *reprezentacija* u smislu širine pojma. *Reprezentacija* je širi pojam iz kognitivne psihologije, a *model* specifičan izraz koji se koristi u matematičkom obrazovanju i prirodnim naukama. U tom smislu, model se definiše kao „strukturni oblik reprezentacije” (Terwel, Van Oers & Van Dijk, 2009: 27). Mi smo se opredelili za termin *reprezentacija*, jer je ustaljen u jeziku metodike nastave matematike u Srbiji.

Jedna od podela reprezentacija može biti na konkretne i apstraktne (Ding & Li, 2014). Matematički simboli kojim se predstavljaju matematički pojmovi, ideje i odnosi jesu apstraktne reprezentacije, a fizički objekti (realni predmeti, manipulativi), vizuelne slike (dijagrami, sheme, slike) i tekstualni zadaci s realističnim kontekstom jesu konkretne reprezentacije. Reprezentacije se mogu posmatrati kao unutrašnje ili spoljašnje, u zavisnosti od toga da li su matematički pojmovi, ideje i odnosi predstavljeni kao unutrašnje kognitivne sheme ili kao eksternalizacija ovih mentalnih konstrukata u vidu dijagrama, grafikona, shema, slika. Učenici mogu da stvore unutrašnju predstavu i spoljašnju reprezentaciju na osnovu mentalne slike, radi rešavanja matematičkog zadatka (Pape & Tchoshanov, 2001). Presmidž (Presmeg, 2014) razlikuje pet vrsta mentalnih slika, odnosno reprezentacija u umu pojedinca. To su: 1. konkretne, likovne slike, koje podsećaju na objekte iz realnog sveta; 2. slike obrasci, koje predstavljaju veze i odnose, bez suvišnih detalja; 3. slike formule, koje predstavljaju apstraktne informacije na konkretnijim slikama; 4. kinestetičke slike, koje prate gestovi, i 5. dinamičke slike, koje se transformišu u umu pojedinca.

Reprezentaciona prilagodljivost (eng. *representational fluency*) je sintagma koja se koristi da bi se opisala sposobnost razumevanja više različitih formi reprezentacija jednog matematičkog pojma. Ova sposobnost je posebno važna u uslovima kada više stručnjaka komunicira kroz različite dizajne radeći na jednom problemu (Lesh & Zawojewski, 2007). Imajući u vidu definiciju rešavanja problemskih zadataka i sintagmu reprezentacione prilagodljivosti, interesovalo nas je mogu li učenici samostalno osmišljavati i usavršavati reprezentacije kao vid efikasne strategije rešavanja zadataka, kao i da li je sposobnost osmišljavanja reprezentacija u vezi sa uspehom u rešavanju matematičkih problema.

Pregled istraživanja o reprezentacijama u rešavanju problemskih zadataka

Pavešćemo istraživanja koja objašnjavaju kako vrsta i kvalitet korišćene reprezentacije objašnjavaju postignuća u rešavanju problemskih zadataka, kako stavovi nastavnika i sadržaji udžbenika utiču na korišćenje reprezentacija u rešavanju problema i koja je uloga mentalnih modela koji se javljaju u procesu rešavanja zadatka.

Značaj shematskih reprezentacija

Hegarti i Kozhevnikov (Hegarty & Kozhevnikov, 1999) su ispitivale vizuelno-prostorne reprezentacije u kontekstu rešavanja problemskih

zadataka. Uočile su dva tipa prostorno-vizuelnih reprezentacija: shematske, u kojima su kodirane prostorne veze iz matematičkog problema, i slikovne, u kojima su prikazane vizuelne karakteristike objekata iz zadatka. Istraživale su kakva veza postoji između vizuelnih/mentalnih slika, prostorne sposobnosti i rešavanja problemskih zadataka. Rezultati pokazuju da ne postoji značajna korelacija između korišćenja vizuelno-prostornih reprezentacija i uspeha u rešavanju problemskih zadataka. Međutim, kada se ove reprezentacije kategorišu na shematske i slikovne, dobijaju se novi uvidi u to kako vrsta korišćene reprezentacije utiče na rešavanje zadataka. Korišćenje shematskih reprezentacija u pozitivnoj je korelaciji sa uspehom u rešavanju problemskih zadataka, dok je korišćenje slikovnih reprezentacija u negativnoj korelaciji sa rešavanjem problemskih zadataka. Korišćenje shematskih reprezentacija povezano je i sa sposobnošću vizualizacije (mere prostorne sposobnosti), ali nije povezano sa sposobnošću mentalne rotacije (takođe mera prostorne sposobnosti). Suprotno rezultatima Hegarti i Korhe nilove, Van Garderen (van Garderen, 2006) je uočila značajnu korelaciju između vizuelno-prostornih reprezentacija i rešavanja problemskih zadataka. Kako autorka ističe, ovoj razlici doprineli su nadareni učenici koji su, pored učenika prosečnih sposobnosti i učenika s teškoćama u učenju, bili deo uzorka ovog istraživanja.

U jednom kvalitativnom istraživanju, učenici su dobili zadatak da odrede broj pataka i zečeva na osnovu date informacije o broju nogu (Velez & Da Ponte, 2009). Zadatci ovog tipa se rešavaju pomoću metode lažne pretpostavke. Učenici koji su koristili slikovnu reprezentaciju, s nevažnim detaljima, pokušavali su da reše zadatak nasumično i nisu uspeali da uoče vezu između broja nogu i broja životinja. Učenici koji su koristili formalnu, simboličku reprezentaciju nisu to uradili na pravi način, jer nisu imali dovoljno znanje iz algebre, te su na kraju zadatak rešili pogađanjem. Učenici koji su crtali crtice umesto nogu životinja (takozvana preformalna reprezentacija) bili su najuspešniji. Njihova strategija pogađanja bila je sistematska. Prepostavljali su da su u dvorištu samo patke ili samo zečevi ili da ih je jednak broj, a potom su smanjivali ili povećavali broj pataka ili zečeva kako bi dobili broj nogu iz uslova zadatka. Dakle, reprezentacija lišena nevažnih detalja omogućila im je uvid u relevantne odnose za rešavanje zadatka.

Dakle, sposobnost vizuelizacije u vezi je sa stvaranjem shematskih reprezentacija i uspešnim rešavanjem problemskih zadataka. Shodno tome, postavlja se pitanje koje su to aktivnosti koje će pružiti priliku učenicima da razviju veštinu shematizovanja.

Značaj ranog učenja potvrđen je sekundarnim analizama rezultata međunarodnog testiranja *TIMSS 2015* (eng. *Trends in International Mathematics and Science Study*) (Radišić i Ševa, 2017). Jednim longitudinalnim kvaziekperimentalnim istraživanjem ispitivano je da li shematizovanje može da se nauči u ranom dobu (pet-šest godina), da li te aktivnosti utiču na uspeh u učenju i da li su, kao takve, integralni deo učioničke kulture. Kroz aktivnosti shematizovanja u eksperimentalnom programu decu su vodili obučeni učitelji koji su navodili decu da transformišu crtež u shemu, npr. da spoljašnji izgled zamka zamene predstavom njegovih prostorija. Rezultati pokazuju da deca koja su učestvovala u eksperimentalnom programu imaju bolja postignuća na testu shematizovanja od dece iz kontrolne grupe. Takođe, deca iz eksperimentalne grupe imaju bolja postignuća na testu koji meri opšte ishode učenja matematike. Aktivnosti shematizovanja integralni su deo učioničke kulture, te je potrebna svojevrsna obuka učitelja (Poland & Van Oers, 2007).

Zajednička implikacija nekoliko pomenutih istraživanja i nacionalnih kurikuluma jeste potreba za osmišljavanjem shematskih reprezentacija od strane učenika u procesu vođene kokonstrucije (Güler & Çiltaş, 2011; Hegarty & Kozhevnikov, 1999; Poland & Van Oers, 2007; Van Garderen, 2006; Velez & Da Ponte, 2013). Di Sessa (Di Sessa, 2000) uvodi termin *metareprezentacijske kompetencije* koji se odnosi na sposobnost učenika da izgrađuju, usavršavaju i kritikuju spoljašnje forme reprezentacija. Ova veština je proučavana kroz epizodu rešavanja problemskih zadataka i zaključeno je da učenici mogu da razviju metareprezentacijsku kompetenciju i da rad sa vršnjacima pozitivno utiče na to. Tervel, Van Oers i Van Dijk (Terwel, Van Oers & Van Dijk, 2009) potvrđuju da su reprezentacije koje nastaju kao rezultat kolaborativnog učenja apstraktnije od reprezentacija koje kreira pojedinačno jer se traži rešenje koje premošćuje individualne potrebe.

Uloga nastavnika i udžbenika matematike u korišćenju reprezentacija

Pored stvaranja prilika da učenici samostalno ili uz nastavnikovu pomoć osmišljavaju reprezentacije, znatan uticaj na ishode učenja i stavove učenika prema reprezentacijama, kao strategiji rešavanja problemskih zadataka, imaju stavovi nastavnika i zvanične programske odredbe koje svoju primenu imaju u udžbenicima matematike.

Učenici čiji nastavnici koriste vizuelne reprezentacije uspešniji su u rešavanju tekstualnih zadataka i imaju pozitivna uverenja o korišćenju reprezentacija prilikom rešavanja problemskih zadataka. Više od dve trećine

ispitanih učenika smatra da su vizuelne reprezentacije dobar način učenja rešavanja problemskih zadataka i da im njihova upotreba poboljšava uspeh u učenju (Güler & Çiltaş, 2011).

Učitelji u Srbiji skoro isključivo koriste simboličke reprezentacije i tekstualne zadatke i ne vide značaj drugih vidova reprezentacija kao što su, na primer, shematske slike (Zeljić, Đokić i Dabić, 2016). Samim tim, i učenici iz Srbije pri rešavanju tekstualnih zadataka koriste metode zasnovane na simboličkim reprezentacijama. To su sledeće metode: 1. intuitivni model u kome se zapisuje samo rezultat; 2. metod pokušaja i pogreški; 3. aritmetički metod izračunavanja putem složenog izraza ili u više koraka; i 4. algebarski metod, tj. metod jednačina. Posledično, zadatke koji se mogu rešavati modelovanjem na razne načine, ali ne i navedenim metodima učenici ne mogu da reše (Obradović i Zeljić, 2015; Ilić i Zeljić, 2016).

Kai (Cai, 2000) takođe smatra da su različita gledišta američkih i kineskih nastavnika o ulozi reprezentacija u rešavanju zadataka jedan od uzroka korišćenja različitih strategija američkih i kineskih učenika. Učenici iz Amerike su značajno češće koristili grafikone, tabele i slike, dok su učenici iz Kine češće pisali matematičke izraze, što ih je u nekim zadacima dovelo do prednosti u rešavanju. Drugi uzrok mogu biti udžbenici matematike. Drugo komparativno istraživanje, koje je takođe ispitalo učenike šestog razreda, iz Kine, Amerike i Singapura, potvrdilo je da učenici koriste strategije rešavanja zadataka koje su im ponuđene u udžbenicima. Tabele i dijagrami su dvostruko češće prikazivani u američkim udžbenicima, dok se vizuelne reprezentacije pojavljuju samo u singapurskim udžbenicima, što je u skladu sa njihovim nacionalnim kurikulumom (Fan & Zhu, 2007; CPDD, 2020).

Istraživanja mentalnih modela u procesu rešavanja problemskih zadataka

Prethodno prikazana istraživanja odnose se na spoljašnje reprezentacije. One su bile ili proizvod učenika, ili strategija rešavanja zadataka ponuđena od strane učitelja ili autora udžbenika. Sada ćemo se osvrnuti na istraživanja koja su se bavila konstrukcijom mentalnih modela za rešavanje problemskih zadataka.

Mentalni model je reprezentacija koja je izgrađena u radnoj memoriji pojedinca. Struktura mentalnog modela analogna je strukturi objekta koji reprezentuje (Thevenot, 2010). Istraživanje koje je sproveda Devenot bavilo se ispitivanjem odraslih, pod pretpostavkom da, ukoliko eksperti u rešavanju problema izgrađuju mentalne modele, onda deca koja imaju poteškoću u rešavanju problema imaju problem sa izgrađivanjem unutrašnjih

reprezentacija. Rezultati pokazuju da su ispitanici izgradili mentalni model. Taj mentalni model nema relaciju prema prirodi prema kojoj se pamte konkretne reči iz zadatka, već se pamte veze između elemenata u zadatku. Takođe, rezultati sugerišu da aritmetički zadatak ima strukturu, te da manje uspešni u rešavanju zadataka, prilikom prisećanja (faza u istraživanju), češće pamte pojedine reči i izraze, a manje situaciju opisanu u zadatku. Rezultati impliciraju da od učenika treba tražiti da preformulišu zadatak u celini, da predstave zadate odnose kako bi stvorili osećaj za situaciju iz zadatka.

Jedno novije, domaće istraživanje (Zeljić i Dabić Boričić, 2018) potvrđuje da učenici veruju da je identifikacija ključnih reči i odabir odgovarajuće aritmetičke operacije suština procesa rešavanja problema. Prilikom rešavanja nestandardnih tekstualnih zadataka, učenici izostavljaju fazu transformisanja situacionog modela u matematički, te ne procenjuju da li rezultat odgovara situaciji u problemu. Proces razumevanja tekstualnog zadatka podrazumeva neke manje formalne reprezentacije u umu učenika, koje su pod uticajem znanja i iskustva iz svakodnevnog života, a koje podržavaju izgradnju *situacionog modela* (Voyer, 2011). Ovim vidom reprezentacija teži se prevazilaženju raskoraka između samog teksta zadatka i informacija koje su relevantne za njegovo rešavanje. Učenici slabijih matematičkih postignuća daju veći značaj informacijama koje dodatno objašnjavaju situaciju iz zadatka i uspešniji su kada rešavaju ovakve zadatke u odnosu na one „ogoljene”. To znači da učenici izgrađuju različite mentalne modele u zavisnosti od informacija datih u zadatku (Voyer, 2011).

Zaključak

Učenici sa razvijenom sposobnošću prostorne vizuelizacije bolji su u vizualno-shematskom predstavljanju odnosa iz problemskih zadataka, pa su i uspešniji u njihovom rešavanju. Učenici slabije sposobnosti prostorne vizualizacije predstavljaju odnose iz zadataka sa više nebitnih detalja. Rane aktivnosti shematizovanja mogu da budu od koristi učenicima u razumevanju grafički predstavljenih odnosa. Takođe, rad sa vršnjacima na stvaranju i usavršavanju reprezentacija tokom rešavanja problemskih zadataka može da bude koristan.

Da bi reprezentacije, kao jedna od strategija rešavanja problemskih zadataka, postale deo učioničke kulture, najpre treba da imaju eksplicitno mesto u zvaničnim nastavnim programima. Paralelno s tim, neophodno je težiti promenama nastavnikovih stavova i uverenja putem institucija koje obrazuju nastavničke kadrove. I na kraju, kao zajednička implikacija

prikazanih istraživanja, navodi se potreba za procesom vodene kokonstrukcije u izgrađivanju reprezentacija tokom rešavanja problemskih zadataka.

Ostaje otvoreno pitanje mogućnosti i uticaja tehnologija i alata za učenje na proces problemskog rezonovanja (Liljedahl et al., 2016). Virtuelni manipulativi su jedna od mogućnosti podrške učenicima u rešavanju problemskih zadataka zbog mogućnosti simultanog prikazivanja više reprezentacija (Osana & Duponsel, 2016).

Literatura:

1. Van Gog, T., Hoogerheide, V. & Van Harsel, M. (2020). The role of mental effort in fostering self-regulated learning with problem-solving tasks. *Educational Psychology Review*, 1–18, (<https://doi.org/10.1007/s10480-020-09544-y>).
2. Ke, F. & Clark, K. M. (2020). Game-based multimodal representations and mathematical problem solving. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 18 (1), 103–122, (<https://doi.org/10.1007/s1053-018-9938-3>).
3. National Council of Teachers of Mathematics [NCTM]. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.
4. Curriculum Planning and Development Division [CPDD]. (2020). *Mathematics syllabus primary one to six*. Ministry of Education Singapore.
5. Kaur, B. (2015). The model method – A tool for representing and visualising relationships, in: X. Sun, B. Kaur & J. Novotná (eds.), *Proceedings of The Twenty-third ICMI Study: Primary Mathematics Study on Whole Numbers*, Macao, China: University of Macau, 442–546.
6. Van de Walle, J. A., Karp, K. S & Bay-Williams, J. M. (2013). *Elementary and middle school mathematics – teaching developmentally* (8th ed). Boston: Pearson.
7. Milinković, J. (2014). Matematički problem, u: P. Pijanović (ur.) *Leksikon obrazovnih termina*. Beograd: Učiteljski fakultet.
8. Polya, G. (1966). *Kako ću riješiti matematički zadatak*. Zagreb: Školska knjiga.
9. Obradović, B. & Zeljić, M. (2015). Metode i strategije rešavanja tekstualnih zadataka u početnoj nastavi matematike, *Inovacije u nastavi*, XXVIII (1), 69–81.
10. Terwel, J., Van Oers, B. & Van Dijk, I. (2009). Are representations to be provided or generated in primary mathematics education? Effects on transfer, *Education Research and Evaluation*, 15 (1), 25–44, (<https://doi.org/10.1080/13803610802481265>).
11. Ding, M. & Li, X. (2014). Transition from concrete to abstract representations: the distributive property in a chinese textbook series, *Educational Studies in Mathematics*, 87 (1), 103–121, (<https://doi.org/10.1007/s10649-014-9558-y>).
12. Presmeg, N. (2014). Visualization and learning in mathematics education, in: S. Lerman (ed.) *Encyclopedia of Mathematics Education*, Springer Science + Business Media, Dordrecht, 636–641, (<https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0>).

13. Pape, S. J. & Tchoshanov, M. A. (2001). The role of representation(s) in developing mathematical understanding, *Theory into Practice*, 40 (2), 118–127, (https://doi.org/10.1207/s15430421tip4002_6).
14. Lesh, R. & Zawojewski, J. (2007). Problem solving and modeling, in: F. K. Lester Jr. (ed.), *Second handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, NCTM, 763–805.
15. Hegarty, M. & Kozhevnikov, M. (1999). Types of visual-spatial representations and mathematical problem solving, *Journal of Educational Psychology*, 91 (4), 684–689, (<https://doi.org/10.1037/0022-0663.91.4.684>).
16. Van Garderen, D. (2006). Spatial visualization, visual imagery, and mathematical problem solving of students with varying abilities, *Journal of Learning Disabilities*, 39 (6), 496–506, (<https://doi.org/10.1177/00222194060390060201>).
17. Velez, I. & Da Ponte, J. P. (2013). Representations and reasoning strategies of grade 3 students, in: B. Ubuz, Ç. Haser & M. A. Mariotti (eds.), *Proceedings of the Eighth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education Problem Solving*, CERME 8, Manavgat-Side, Antalya Turkiye, 383–393.
18. Radišić, J. i Ševa, N. (2017). Značaj ranog učenja za postignuce učenika iz matematike, u: M. Marušić Jablanović, N. Gutvajn i L. J. J. kšić (ur.), *TIMSS 2015 u Srbiji*, Institut za pedagoška istraživanja, 95–115.
19. Poland, M. & Van Oers, B. (2007). Effects of schematising on mathematical development. *European Early Childhood Education Research Journal*, 15 (2), 269–294, (<https://doi.org/10.1080/13502930701321509>).
20. Güler, G. & Çiltaş, A. (2011). The visual representation usage levels of mathematics teachers and students in solving verbal problems, *International Journal of Humanities and Social Science*, 1 (14), 145–154.
21. Di Sessa, A. A., & Sherin, B. L. (2006). Meta-representation: an introduction, *The Journal of Mathematical Behavior*, 19 (4), 385–398, ([https://doi.org/10.1016/S0732-3123\(01\)00051-7](https://doi.org/10.1016/S0732-3123(01)00051-7)).
22. Zeljić, M., Đokić, O. & Dabić, M. (2016). Teachers' beliefs towards the various representations in mathematics instruction, in: C. Csíkós, A. Rausch & J. Sztányi (eds.), *Proceedings of the 40th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, vol. 4, Hungary, Szeged, 403–410.
23. Ilić, S. i Zeljić, M. (2016). Razumevanje i primena pravila aritmetike učenika četvrtog razreda osnovne škole, *Pedagogija*, LXXI (4), 419–433.
24. Zhai, L. (2010). Mathematical thinking involved in U.S. and Chinese students' solving of process – constrained and process – open problems, *Mathematical Thinking and Learning*, 2 (4), 309–340, (https://doi.org/10.1207/S15327833MTL0204_4).
25. Fan, L. & Zhu, Y. (2007). Representation of problem-solving procedures: A comparative look at China, Singapore, and US mathematics textbooks, *Educational Studies in Mathematics*, 66, 61–75, (<https://doi.org/10.1007/s10649-006-9069-6>).
26. Thevenot, C. (2010). Arithmetic word problem solving: Evidence for the construction of a mental model, *Acta Psychologica*, 133 (1), 90–95, (<https://doi.org/10.1016/j.actpsy.2009.10.004>).
27. Zeljić, M. i Dabić Boričić, M. (2018). Razumevanje konteksta problema, u: S. Marinković (ur.) *Jezik, kultura, obrazovanje*, Pedagoški fakultet, Užice, 639–650.
28. Voyer, D. (2011). Performance in mathematical problems solving as a function of comprehension and arithmetic skills, *International Journal of Science and*

- Mathematics Education*, 9 (5), 1073–1092, (<https://doi.org/10.1007/s10763-010-9239-y>).
29. Liljedahl, P., Trigo, M. S., Malaspina, U., Pinkernell, G. & Vivier, L. (2016). TSG 19: Problem solving in mathematics education, in: G. Kaiser (ed.) *Proceedings of the 13th International Congress on Mathematical Education*, Springer Open, Hamburg, 463, (<https://doi.org/10.1007/978-3-319-62597-3>).
30. Osana, H. P. & Duponsel, N. (2016). Manipulatives, diagrams, and mathematics: A framework for future research on virtual manipulatives, in: P. Moyer-Packenham (ed.), *International Perspectives on technology and Learning Mathematics with Virtual Manipulatives*, Mathematics Education in Digital Era 7, 95–120, (https://doi.org/10.1007/978-3-319-32718-1_5).

* * *

USING REPRESENTATIONS IN SOLVING PROBLEM TASKS

Summary: Ability of solving problems is considered to be a significant skill nowadays. This topic is researched in the fields of education, technology and mathematics. The significant aspect of solving problem tasks is its representation. Problem tasks should be solved by formal ways of representation, for example by equations, or less formal, such as graphic design. Representations researches show that schematic display of relations from the tasks is connected to the ability of visualization and achievement in solving mathematical tasks. Nevertheless the research shows that the mind of an individual who successfully solves the tasks, there is a model which reflects the structure of the very arithmetical task. The aim of the paper is showing mutual methodological implications which refer to representations in solving mathematical tasks. Main conclusions lead to the teachers who will have positive attitudes about the usefulness of presentations and together with students build, master and criticize outer forms of representations, and in this way they train students for modelling in the procedure of solving problem tasks. Before all of that it was necessary for the representations and problem tasks to be integral part of the Mathematics syllabus, course book of mathematics and students' culture as significant processes of learning.

Key words: Teaching Mathematics, representations, problem task

* * *

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ (РЕПРЕЗЕНТАЦИЙ) ПРИ РЕШЕНИИ ПРОБЛЕМНЫХ ЗАДАЧ

Способность решения проблем считается сегодня очень важным навыком. Эта тема исследуется в области образования, науки, технологии и математики. Важным

Korišćenje reprezentacija u rešavanju problemskih zadataka

аспектом решения проблем является их изложение. Проблемные задачи могут быть решены формальными способами представления, например уравнением, или менее формальными, такими как графические представления. Исследование репрезентаций показывает, что схематические представления взаимосвязей в задаче связаны со способностью визуализации и успешным решением математических задач. Исследования также подтверждают, что в сознании людей, успешно решающих задачи, существует модель, отражающая структуру самой арифметической задачи. Цель данной статьи – представить общие методологические выводы, касающиеся представлений при решении математических задач. Основные выводы заключаются в том, что учителя, которые в первую очередь имеют положительные убеждения о полезности представлений, вместе с учащимися выстраивают, улучшают и критикуют внешние формы представлений и, таким образом, обучают учащихся моделированию в процессе решения проблемных задач. Перед этим необходимо, чтобы репрезентации и проблемные задачи были неотъемлемой частью учебной программы по математике, учебников по математике и школьной культуры, как важных процессов в обучении.

Ключевые слова: обучение математике, представления (репрезентации), проблемное задание

Datum kada je uredništvo primilo članak: 14.8.2021.

Datum kada je uredništvo konačno prihvatilo članak za objavljivanje: 15.11.2021.