

Универзитет у Београду  
Машински факултет

Петар Д. Мандић

**НАПРЕДНО МОДЕЛОВАЊЕ  
СЛОЖЕНИХ РОБОТСКИХ СИСТЕМА И  
МЕХАНИЗАМА И ПРИМЕНА МОДЕРНИХ  
ЗАКОНА УПРАВЉАЊА**

Докторска дисертација

Београд, 2019.

University of Belgrade  
Faculty of Mechanical Engineering

Petar D. Mandić

**ADVANCED MODELING OF COMPLEX  
ROBOTIC SYSTEMS AND MECHANISMS  
AND APPLICATIONS OF MODERN  
CONTROL THEORY**

Doctoral dissertation

Belgrade, 2019.

## **Комисија за преглед, оцену и одбрану докторске дисертације**

**Ментор:** др Михаило Лазаревић, редовни професор, ментор,  
Универзитет у Београду, Машински факултет

**Чланови комисије:** др Александар Обрадовић, редовни професор,  
Универзитет у Београду, Машински факултет  
др Зоран Митровић, редовни професор,  
Универзитет у Београду, Машински факултет  
др Радиша Јовановић, ванредни професор,  
Универзитет у Београду, Машински факултет  
др Томислав Шекара, редовни професор,  
Универзитет у Београду, Електротехнички факултет

**Датум одбране:**

## Изрази захвалности

Желим да захвалим мом ментору и професору др Михаилу Лазаревићу на стручној помоћи, стрпљењу и несебичној подршци коју ми је пружао током свих година докторских студија, што ме је увео у свет науке и од кога сам учио, и учим и даље, како постати добар професор и добар човек. Велику захвалност дугујем и професору др Томиславу Шекари на несебичним и стручним саветима, без кога такође ова дисертација не би имала садашњи изглед и квалитет.

Речи захвалности упућујем и члановима комисије, професорима др Александру Обрадовићу, др Зорану Митровићу и др Радиши Јовановићу, као и свим професорима катедре за механику, на бризи и саветима током рада на докторској дисертацији. Захваљујем млађим колегама Александру Томовићу и Бојану Јеремићу на колегијалности и подршци током наших заједничких година на докторским студијама. Колегиници Невени Аранђеловић и колеги Бошку Цветковићу желим да захвалим на пруженој помоћи током израде докторске дисертације.

Посебну захвалност дугујем мојим родитељима Светлани и Дејану, и мојој сестри Тини, без чије љубави, бриге и подршке не бих постигао много у животу. Захваљујем и мојој родбини на подршци и интересовању.

Мојим пријатељима: Павлу, Милану, Саши, Марку, Видоју, Јовици, Јелени, Ани, Стефану, Дарку, Бојану, Мићи, Илији, Николи и Марији, Ивану, Влади, Ђурђу, Раци, Марку, Јовици, Алену, Мирку, другарима са *CrossFit*-а и свим другима, захваљујем на подршци и интересовању.

Ова докторска дисертација урађена је у оквиру пројекта ТР 33047 „Интелигентни системи управљања климатизације у циљу постизања енергетски ефикасних режима у сложеним условима климатизације“, чији је руководилац проф. др Драган Лазић, коме такође захваљујем.

# Напредно моделовање сложених роботских система и механизма и примена модерних закона управљања

## Резиме

Предмет истраживања ове докторске дисертације јесте моделовање и управљање механичких система, са посебним акцентом на роботске системе типа отвореног кинематичког ланца. При формирању математичког модела робота коришћен је тзв. Родригов приступ, који је посебно погодан за примену на рачунару и аутоматско формирање диференцијалних једначина кретања система. За описивање дисипативних сила које се јављају у зглобовима роботских сегмената при кретању система, уводи се модел трења фракционог типа који представља генерализацију стандардног модела. Стабилизација кретања механичких система типа инверзног клатна, који се одликују мањком управљачких величина у односу на број степени слободе, такође је предмет истраживања ове дисертације. За управљање ових система коришћен је пропорционално диференцијални (ПД) регулатор фракционог реда, чији параметри су одређени методом Д-разлагања. Области стабилности у функцији три подешљива параметра добијене су за две врсте клатна: ротационо инверзно (Фурутино) и транслаторно инверзно клатно. Експериментални резултати управљања транслаторног инверзног клатна показују да регулатор нецелобројног типа даје систем са бољим перформансама него класични ПД регулатор. Метода доминантног подешавања полова у комбинацији са техником Д-разлагања употребљена је за подешавање параметара класичног и фракционог пропорционално интегрално диференцијалног (ПИД) регулатора. Параметри регулатора се подешавају са циљем што бољег потискивања немерљивог поремећаја који делује на улазу у процес, притом водећи рачуна о робустности система, осетљивости на шум, као и о времену смирења и прескоку. Предложена метода је упоређена са неким већ постојећим техникама подешавања ПИД-а ради демонстрирања њене ефикасности. Такође, наведена метода искоришћена је и за управљање роботским манипулатором са шест степени слободе, приликом чега је успешно решен задатак позиционог управљања робота. На крају, за управљање датим роботским манипулатором употребљен фракциони интегрални компензатор. Његови параметри одређени су решавањем оптимизационе

процедуре која се заснива на принципу симетричног оптимума. Пројектовани компензатор је изузетно робустан, јер приликом решавања позиционог задатка управљања добијају се одзиви роботских сегмената без појаве прескока, а перформансе система остају у жељеним границама и при промени номиналних параметара процеса.

**Кључне речи:** моделовање механичких система, роботски системи, динамика робота, инверзно клатно, управљање система, ПИД регулатор, фракциони рачун, фракциони ПИД регулатор, метода Д-разлагања, метода доминантног подешавања полова, робустност.

**Научна област:** Машинство

**Ужа научна област:** Механика

**УДК:** 007.52:519.711]:62-551.45(043.3)

# **Advanced modeling of complex robotic systems and mechanisms and applications of modern control theory**

## **Abstract**

The main research topics of this doctoral dissertation are modeling and control of mechanical systems, with special emphasis on robotic systems with open-chain structure. The so-called Rodriguez's approach, which is well suited for usage on a computer and for automatic derivation of differential equations of motion, has been used for obtaining mathematical model of robot. In order to define more accurately dissipative forces occurring in robot joints when the system is in motion, a fractional order friction model, which represents a generalization of the standard model, has been introduced. The stabilization of inverted pendulum mechanical systems, which have less control inputs than degrees of freedom, is also one of the research topics covered in this dissertation. A fractional order proportional derivative (PD) controller, whose parameters are determined by applying the D-decomposition theory, has been introduced for the motion control of these systems. Stability domains in three-dimensional parameter space have been calculated for the two types of pendulum: rotational inverted pendulum (the Furuta pendulum) and cart inverted pendulum. The experimental results of the cart inverted pendulum control show that fractional-order controller provide a better performance system, compared to the classical PD controller. Dominant pole placement method combined with the D-decomposition technique has been used for adjusting the parameters of both integer order and fractional order proportional-integral-derivative (PID) controller. Controller tuning is performed in order to minimize unmeasured load disturbance response, with a constraint on the system robustness, maximum sensitivity and sensitivity to measurement noise. Short settling time and low overshoot are also one of the design goals of this technique. The proposed approach has been compared with other existing PID techniques with the aim to demonstrate its effectiveness. Furthermore, this method has been used successfully for controlling robot manipulator with six degrees of freedom, whereby the problem of robot position

control has been successfully solved. Finally, fractional-order lag compensator has been introduced for controlling the above manipulator. Its parameters have been determined by solving the optimization procedure based on the principle of symmetrical optimum. A closed loop response with no overshoot is obtained during robot's execution of position control task. Because the designed compensator is very robust, closed loop system gives response with satisfactory performances even in the non-nominal conditions.

**Key words:** modeling of mechanical systems, robotic systems, robot dynamics, inverted pendulum, control systems, PID controller, fractional calculus, fractional PID controller, D-decomposition method, dominant pole placement, robustness.

**Scientific discipline:** Mechanical engineering

**Scientific subdiscipline:** Mechanics

**UDC:** 007.52:519.711]:62-551.45(043.3)



## Садржај

<b>1. Увод</b> .....	<b>1</b>
1.1 Преглед литературе.....	1
1.2 Кратак преглед докторске дисертације по поглављима.....	8
1.3 Основе рачуна нецелобројног реда .....	10
<b>2. Математички модел роботског система</b> .....	<b>14</b>
2.1 Основни појмови механике робота.....	14
2.2 Родригова матрица трансформације .....	17
2.3 Сложена матрица трансформације .....	20
2.4 Брзина центра инерције и угаона брзина крутог тела.....	22
2.5 Кинетичка енергија роботског система .....	24
2.6 Коваријантни облик диференцијалних једначина кретања роботског система.....	26
2.7 Генералисане силе роботског система .....	28
2.7.1 Генералисане силе од сила теже роботског система .....	30
2.7.2 Генералисане силе од сила у опругама .....	31
2.7.3 Генералисане силе од дисипативних сила трења .....	33
2.7.4 Генералисане силе од система погонских сила .....	37
2.8 Математички модел роботског система са динамиком актуатора..	38
2.9 Линеарни математички модел роботског система .....	41
<b>3. Примена методе Д-разлагања у стабилизацији механичких система</b> .	<b>45</b>
3.1 Основе методе Д-разлагања .....	45
3.2 Стабилизација ротационог инверзног клатна .....	50
3.2.1 Математички модел ротационог инверзног клатна.....	50
3.2.2 Анализа стабилности ротационог инверзног клатна методом Д- разлагања .....	52
3.2.3 Резултати симулације .....	59
3.3 Стабилизација транслаторног инверзног клатна .....	64
3.3.1 Математички модел транслаторног инверзног клатна.....	64
3.3.2 Анализа стабилности транслаторног инверзног клатна методом Д-разлагања .....	67
3.3.3 Резултати симулације .....	69
3.3.4 Експериментални резултати.....	71
<b>4. Метода пројектовања класичног и фракционог ПИД регулатора применом доминантног подешавања полова и Д-разлагања под ограничењима на перформансе</b> .....	<b>76</b>
4.1 Увод .....	77

4.2 Поставка проблема.....	78
4.3 Примена методе Д-разлагања у поступку доминантног подешавања полова .....	82
4.4 Нумерички примери .....	85
4.4.1 Процес са уравнотеженом динамиком .....	86
4.4.2 Процес са доминантним транспортним кашњењем .....	91
4.4.3 Процес са доминантним динамиком у односу на транспортно кашњење .....	93
<b>5. Нумерички резултати управљања роботским манипулатором са шест степену слободу.....</b>	<b>97</b>
5.1 Математички модел <i>NeuroArm</i> роботског манипулатора.....	97
5.2 Математички модел мотора једносмерне струје <i>NeuroArm</i> роботског манипулатора.....	101
5.3 Управљање <i>NeuroArm</i> роботским манипулатором методом доминантног подешавања полова .....	103
5.4 Управљање <i>NeuroArm</i> роботским манипулатором применом методе симетричног оптимума и фракционог интегралног компензатора .....	108
5.4.1 Уводна разматрања .....	108
5.4.2 Метода симетричног оптимума .....	110
5.4.3 Подешавање параметара фракционог интегралног компензатора за управљање моторима једносмерне струје применом методе симетричног оптимума.....	112
5.4.4 Резултати симулације управљања роботског манипулатора .	115
<b>6. Закључак и научни доприноси дисертације.....</b>	<b>118</b>
<b>Литература.....</b>	<b>122</b>

# 1. Увод

## 1.1 Преглед литературе

Роботика је релативно нова, модерна и мултидисциплинарна област технике за чије разумевање је потребно познавање научних дисциплина попут механике, електротехнике, теорије управљања, компјутерских наука, математике, итд. Наука о роботима је имала стрмоглав успон у последњих неколико деценија захваљујући развоју рачунарских технологија, појави нових сензора, као и напретку теорије у областима управљања, обраде слике, вештачке интелигенције итд. Роботика у ширем смислу обухвата разноврсне механичке системе као што су фиксни, мобилни, хуманоидни, пливајући и летећи роботи, а чије проучавање би захтевало неколико томова књига. Ипак, највећа класа робота данас припада фиксним роботима који раде у индустријским условима и обављају репетитивне и врло прецизне механичке радње. Овде ћемо се ограничити управо на ову врсту робота која је у литератури и пракси позната под називом роботски манипулатори [1,2].

Предмет истраживања ове докторске дисертације је моделовање и управљање механичких система са више степени слободе, међу којима се првенствено мисли на роботске манипулаторе. Постоје различити приступи за добијање динамичког модела робота [3]. Без обзира на усвојени приступ, ако важе исте претпоставке при моделовању датог система, увек ће се доћи до истих или еквивалентних диференцијалних једначина кретања роботског система. Овде ће се искористити тзв. Родригов приступ који се заснива на употреби истоимених матрица трансформација [3]. Овај прилаз моделовању система је једноставан и прилагођен употреби на рачунару [4], што је врло битно јер извођење динамичког модела робота са три и више степени слободе је изузетно компликовано и подложно грешкама уколико се ради „ручно“. Коришћењем рачунара могућност грешке се драстично смањује, а

време које је потребно за добијање диференцијалних једначина кретања система је неупоредиво краће. Родригов приступ је изузетно погодан за моделовање не само серијских робота (где спадају роботски манипулатори), већ и механичких система другачијих структура, типа затворених кинематичких ланаца, затим ланаца са гранањем, паралелних робота и слично.

Са друге стране, у последњих пар деценија посебна пажња је посвећена развоју и имплементацији рачуна нецелобројног реда у моделовању и управљању механичких система [5–7]. Фракциони рачун или рачун нецелобројног реда је грана математике која се бави теоријом извода и интеграла произвољног реда  $\alpha \in \mathbb{R}$ . У литератури постоји велики број радова у којима је показано како се се разни физички системи и процеси могу тачније описати моделима фракционог типа [8–11]. Ту посебно место заузимају неконзервативни механички системи, где моделовање дисипативних сила рачуном произвољног реда доводи до бољег поклапања са експерименталним резултатима [12–15]. Носећи се том идејом, у овој дисертацији предложен је фракциони модел дисипативних сила трења које се јављају у зглобовима приликом кретања роботског система.

Постоји велики број различитих алгоритама за управљање роботима објављених у стручној литератури. Дobar преглед резултата из наведене области до 1999. године може се наћи у [16], а преглед новије литературе је презентован у [17]. Класични алгоритми управљања роботом могу се наћи у познатим уџбеницима из те области као што су [18–20]. На основу великог броја објављених радова, стратегије управљања роботским манипулаторима могу се поделити отприлике на следеће категорије: линеарне шеме управљања, робустан приступ управљању (који укључује линеарне, али првенствено нелинеарне технике управљања) и адаптивне методе управљања. Прва категорија, која је прилично заступљена у литератури, бави се линеарним приступом. Иако је понашање робота изразито нелинеарно, користећи нпр. технику *feedback* линеаризације могуће је линеаризовати и распрегнути његову динамику. На тај начин, робот се понаша као линеаран

систем, и многобројни алгоритми линеарне теорије могу се искористити за управљање роботом. Други, можда још важнији разлог за коришћење линеарног приступа, је следећи. У индустрији, где су роботи најзаступљенији, спрега између актуатора и роботских сегмената је остварена преко преносника снаге, односно редуктора. Показаћемо касније у овој дисертацији да када се користе редуктори великог преносног односа, нелинеарна динамика робота се може занемарити, а управљање роботом се тада своди на управљање моторима чије понашање је описано линеарним диференцијалним једначинама. Пропорционално интегрално диференцијални (или краће ПИД) регулатор је у том случају одговарајући избор управљачког алгоритма, па се стога најчешће и користи за управљање роботским манипулаторима у процесима индустријске аутоматизације [21–24].

Механички системи типа инверзног клатна такође су предмет истраживања ове докторске тезе. Ови системи су изразито нелинеарни, нестабилни и поседују мање управљачких величина у односу на број степени слободе система, што их чини изузетно компликованим и изазовним објектима за управљање [25–28]. У западној литератури ови системи су познати под називом „*underactuated mechanical systems*”, и ту спадају не само системи типа инверзног клатна, већ далеко шира класа објеката међу којима су разне врсте мобилних, ходајућих, пливајућих и летећих робота. Аутомобили, летелице, сателити, пловила итд, такође спадају у ову класу система. Управљање овим системима је и даље велики и отворен проблем. Ми ћемо овде посветити пажњу управљању два типа инверзног клатна са два степена слободе, а то су ротационо и транслаторно инверзно клатно. Приступ који ћемо применити за решавање проблема стабилизације наведених механичких система засниваће се на методи Д-разлагања.

Најважнији захтев при пројектовању управљачког система је свакако стабилност система. Познато је да стабилност линеарног система директно зависи од локације корена карактеристичног полинома у комплексној равни. Ако одредимо скуп свих променљивих параметара за које је дати систем

стабилан добићемо домен у параметарској равни који називамо област (асимптотске) стабилности система. Одређивање управо тог домена представља суштину методе која је у литератури позната као метода Д-разлагања. Руски научник Вишеградски [29] први је описао домен стабилности за карактеристични полином трећег реда у коме су фигурисала два коефицијента која се могу подешавати. Касније су аутори Фрејзер (*Frazer*) и Данкан (*Duncan*) [30] развили графичку методу за одређивање области стабилности за полином произвољног реда са два подешљива параметра. Ипак, може се рећи да је руски научник Неимарк [31,32] дао назив и заиста установио методу Д-разлагања. Он је у својим радовима, уопштавајући раније добијене резултате Вишеградског, одредио домене са фиксним бројем корена у датој полуравни и којих може имати више у параметарском простору. Затим, дозволио је да се подешљиви параметри система који су међусобно у линеарној вези појаве у било ком или свим коефицијентима карактеристичног полинома произвољног реда. Тиме је његов приступ постао је широко коришћен за решавање проблема робустне стабилности и стабилности система уопште.

Шиљак [33] је касније методу Д-разлагања проширио за случај нелинеарне везе подешљивих параметара. Српски научник Митровић [34] је надоградио оригинални концепт ове методе тако што је уместо имагинарне осе пресликао одговарајућу контуру у левој полуравни комплексне  $s$ -равни, и тиме је уместо асимптотске, добио област релативне стабилности система.

Предложени приступ, познат у литератури као Митровићева метода проширили су Талер (*Thaler*) и Браун (*Brown*) [35], а њено даље уопштење дали су, независно један од другог Грујић [36] и Шиљак [37], за случај када било која два коефицијента карактеристичног полинома могу преузети улогу подешљивих параметара. Следи тзв. алгебарска метода [38], где је сада могуће разматрати случајеве када се променљиви параметри појављују истовремено у више или свим коефицијентима карактеристичног полинома, у то у линеарној или нелинеарној комбинацији. При томе је стављен акценат на релативну стабилност система, и то на: издвајање области унапред

задатог времена смирења, и издвајање области унапред задатог степена пригушења у параметарској равни. Тиме се обезбеђује тражени квалитет рада система у прелазном режиму. Новије примене методе Д-разлагања могу се наћи у [39,40], где се ова техника користи за пројектовање регулатора нижег реда. У радовима [41,42] метода Д-разлагања је примењена за случај вишеструко преносних линеарних система.

За управљање горе поменути инверзним клатном овде ће се искористити пропорционално диференцијални (ПД) регулатор фракционог реда. Примена методе Д-разлагања за системе нецелобројног реда представљена је прво у [43], а затим и у [44,45]. Ту је у карактеристичном (квази) полиному заступљен члан  $\sqrt{s}$  који одговара систему који у временском домену има нецелобројни извод  $1/2$ . Проблем асимптотске стабилности за линеарне фракционе системе управљане пропорционално интегралним (ПИ) регулатором фракционог реда разматран је у раду [46]. Слично томе, радови [47,48] баве се стабилизацијом система нецелобројног реда са и без транспортног кашњења помоћу фракционог ПИД регулатора.

Метода доминантног подешавања полова је веома корисна техника коју можемо користити када желимо да са регулатором нижег реда управљамо процесом вишег реда, или системом са транспортним кашњењем. То можемо постићи избором параметара регулатора који ће гарантовати доминантност изабраних полова. Код класичне методе подешавања полова [49,50] која се заснива на упрошћеном моделу објекта управљања, доминантност изабраних полова се не може гарантовати. Штавише, у случају система са кашњењем или процеса вишег реда, овај приступ, ако се не примени пажљиво, може довести и до нестабилности затвореног система управљања. Да би се то избегло, у раду [51] предложена је метода која гарантује доминантност унапред одређених полова. Тачније, примењена је метода геометријског места корена (ГМК) и Најквистов критеријум стабилности да би се обезбедила доминантност изабраних полова. За процесе без транспортног кашњења може се користити метода геометријског места корена, док се Најквистов критеријум може применити за системе са кашњењем. У раду [52]

предложена је генерализација претходно публикованих резултата. Ту је показано да се метода геометријског места корена може применити без обзира да ли је у питању систем са транспортним кашњењем или не. Штавише, уопштена ГМК метода применљива је на процесе описане рационалним и ирационалним преносним функцијама, као и оне које су фракционог реда, и са дистрибуираним параметрима система. У овој дисертацији, методу доминантног подешавања полова у комбинацији са техником Д-разлагања искористићемо, између осталог, и за подешавање параметара ПИД регулатора за управљање роботским манипулатором са шест степени слободе.

Један од првих покушаја подешавања параметара ПИД регулатора везан је за рад Зиглера (*Ziegler*) и Николса (*Nichols*) [53]. У том раду, на основу критичних параметара процеса  $\omega_{kr}$  и  $k_{kr}$  у фреквенцијском домену, или на основу јединичног одскочног одзива, процењивана је динамика процеса и на основу тога су подешавани параметри П, ПД, ПИ и ПИД регулатора. Од тада, у литератури се појавио велики број метода за карактеризацију динамике процеса и одређивање параметара регулатора сходно томе [54–57]. Дobar преглед разних формула за подешавање ПИД-а дат је у [58], док су неке од познатих оптимизационих метода презентоване у [55,59–62]. Највећи број формула је изведен за идеални ПИД, а временска константа филтра  $T_f$  се усвајала накнадно и тако нарушавала перформансе или стабилност система. Међутим, због присуства шума у систему филтер мора бити саставни део управљачког алгоритма [63]. Са друге стране, модеран приступ пројектовања регулатора подразумева да његов примарни циљ буде што боље потискивање немерљивог поремећаја који делује на процес [64,65]. Због грешки у математичком моделу система, или због промене параметара процеса током времена, увек постоји разлика између реалног и моделованог понашања система. Због тога је важно да регулатор поседује особину робустности, односно да буде што мање осетљив на промене параметара процеса [66,67]. Утицај шума на рад система може бити изузетно штетан, поготово на век трајања актуатора, па се и о томе се мора водити рачуна при



пројектовању регулатора [68,69]. Све ово утиче и на показатеље квалитета процеса, односно на перформансе система. При подешавању ПИД-а увек се мора правити компромис између робустности система и перформанси, што је од кључне важности при пројектовању система [70].

Примена фракционог рачуна у теорији управљања има за циљ да побољша карактеристике затвореног система. Интуитивно је јасно да са регулатором нецелобројног реда постоји већа флексибилност у подешавању перформанси система него у случају класичног регулатора. Са друге стране, фракциони регулатор са мањим бројем подешљивих параметара постиже исту робустност као и класични регулатор знатно вишег реда. Значи, компромис између робустности и перформанси система је лакше постићи увођењем регулатора нецелобројног реда. У литератури постоје различите управљачке структуре фракционог типа, а неке од најзаступљенијих су фракциони ПИД регулатор [71,72], CRONE контролер [73], фракциони диференцијални и интегрални компензатори [74], итд.

Фракциони  $PI^\beta D^\alpha$  регулатор први је увео Подлубни (*Podlubny*) [75], и представља генерализацију класичног ПИД регулатора, где су  $\beta$  и  $\alpha$  интеграл и извод нецелобројног реда, респективно. У овој дисертацији, користићемо фракциони регулатор типа  $PD^\alpha$  и  $PID^\alpha$  ( $\beta=1$ ), ограничавајући се само на извод функције нецелобројног типа. Као што видимо, овакви регулатори имају један параметар више за подешавање него класични алгоритми, али и то је довољно да се добије систем са бољим перформансама уз задржавање исте робустности. У литератури постоји велики број метода за подешавање регулатора нецелобројног реда, добар преглед радова на ову тему дат је у [76]. Овде ће се параметри фракционог ПИД регулатора подешавати користећи горе поменуте методе Д-разлагања и доминантног подешавања полова, а у циљу управљања различитих процеса, али првенствено роботских система. Поред тога, на крају дисертације показаћемо и како се фракциони интегрални компензатор може искористити за управљање роботским манипулатором са шест степени слободе.

## 1.2 Кратак преглед докторске дисертације по поглављима

Сада ће се укратко дати преглед докторске тезе по поглављима. Ова дисертација садржи укупно шест поглавља. У првом поглављу, коме ова целина и припада, поред већ приказаног прегледа литературе, дат је и кратак увод у рачун нецелобројог реда.

Друго поглавље бави се моделовањем механичких система са више степени слободе, са акцентом на роботске системе. За извођење математичког модела роботског манипулатора коришћен је Родригов приступ, чија основа лежи у примени Родригових матрица трансформација координата. Коришћењем овог приступа, лако се дефинишу основни геометријски и динамички параметри система, као и кинематичке величине потребне за добијање диференцијалних једначина кретања у коваријантном облику. Посебна пажња посвећена је математичком опису дисипативних сила које делују на дати роботски систем. Тачније, предложен је фракциони модел дисипативних сила трења које се јављају у зглобовима роботских сегмената при њиховом релативном кретању. Затим је дат математички модел роботског манипулатора са интегрисаном динамиком актуатора, чиме се додатно повећава ред система. На крају поглавља показано је како се изведени нелинеарни модел робота може апроксимирати линеарним моделом, у случају постојања редуктора великог преносног односа између мотора и роботских сегмената.

Треће поглавље посвећено је стабилизацији кретања механичких система типа инверзног клатна. Тачније, два типа клатна су разматрана у овој дисертацији, ротационо (Фурутино) и транслаторно инверзно клатно. За њихову стабилизацију око нестабилног положаја равнотеже коришћен је ПД регулатор фракционог реда. Подешавање параметара регулатора омогућено је применом методе Д-разлагања. Добијене области стабилности у параметарској равни израчунате су прво за случај линеарне зависности параметара, па су затим дати резултати проширени и за случај нелинеарне зависности истих. На тај начин, уместо у равни два параметра, како је то

уобичајено у литератури, добијене су области стабилности у простору, односно у функцији три подешљива параметра. На крају поглавља приказани су експериментални резултати управљања транслаторним инверзним клатном, где је показано да примена фракционог регулатора даје систем са бољим перформансама.

Метода доминантног подешавања полова у комбинацији са техником Д-разлагања искоришћена је за пројектовање класичног и фракционог ПИД регулатора у четвртом поглављу. Доминантни полови затвореног система управљања се одређују на основу задатих перформанси као што су време смирења и прескок. Применом методе Д-разлагања добија се опсег вредности пропорционалног појачања  $k_p$  регулатора за које је обезбеђена доминантност датих полова. Даљи избор параметара врши се са циљем што бољег потискивања немерљивог поремећаја који делује на процес, и водећи рачуна о робустности система и осетљивости на шум. Затим су извршене симулације управљања за три карактеристична процеса у индустрији. Предложена метода упоређена је са неким од већ постојећих процедура подешавања ПИД-а, да би се показала ефикасност исте. Такође, на основу добијених резултата види да примена фракционог регулатора даје систем са бољим перформансама у односу на класични регулатор, а за исте вредности параметара робустности.

У петом поглављу приказани су резултати симулације управљања роботског манипулатора са шест степени слободе. На основу 3Д модела робота добијени су динамички параметри манипулатора неопходни за формирање диференцијалних једначина кретања. Због присуства редуктора великог преносног односа, нелинеарни роботски систем се са довољном тачношћу може апроксимирати линеарним моделом. Тиме је омогућена примена линеарних закона управљања који су изведени у претходним поглављима. Решен је задатак позиционог управљања где су се добили очекивани одзиви кретања роботских сегмената. На крају поглавља, приказана је још једна метода управљања роботским манипулатором која се заснива на употреби фракционог интегралног компензатора. Подешавање

параметара компензатора извршено је решавањем оптимизационе процедуре засноване на принципу симетричног оптимума. Овим приступом добијени су одзиви роботских сегмената без појаве прескока, а перформансе система се због робустног система управљања задржавају у жељеним границама и при промени номиналних параметара процеса.

Шесто поглавље садржи закључак и научне доприносе дисертације.

### 1.3 Основе рачуна нецелобројног реда

Иако се рачун нецелобројног реда или фракциони рачун први пут помиње пре више од 300 година у кореспонденцији између Лопитала (*L'Hopital*) и Лајбница (*Leibniz*), његова примена у физици и техници стара је тек неколико деценија [11]. Фракциони рачун бави се изучавањем и применом извода и интеграла произвољног реалног или комплексног реда [77–79]. Код класичног интегро-диференцијалног рачуна оператори интегралања и диференцирања имају целобројан степен, па можемо рећи да фракциони рачун представља његову генерализацију. Управо због овог уопштења можемо закључити да фракциони рачун има потенцијал да оствари оно што класични рачун не може.

Велики математичари као што су Ојлер (*Euler*), Фурије (*Fourie*), Лагранж (*Lagrange*) и Лорен (*Laurent*), поред већ поменутих Лајбница и Лопитала, дали су свој допринос овој грани математичке анализе. Ипак, први је научник Лакроа (*Lacroix*) увео појам фракционог извода произвољног реда. Он је извео следећи израз за случај извода реда  $\alpha$  функције  $f = t^m$

$$D_t^\alpha f(t) = \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} (t^m) = \frac{m!}{(m-\alpha)!} t^{m-\alpha}, \quad m > \alpha. \quad (1.1)$$

Горња формула, замењујући факторијал Ојлеровом гама функцијом  $\Gamma(\cdot)$ , постаје

$$\frac{d^\alpha f}{dt^\alpha} = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-\alpha+1)} t^{m-\alpha}, \quad m > \alpha. \quad (1.2)$$

У једначини (1.2)  $m$  и  $\alpha$  су рационални бројеви, а гама функција је дефинисана за  $z > 0$  као

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt. \quad (1.3)$$

Лакроа је за функцију  $f = t$  и  $\alpha = 0.5$  добио

$$\frac{d^{0.5}}{dt^{0.5}}(t) = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(3/2)} t^{0.5} = 2\sqrt{\frac{t}{\pi}}. \quad (1.4)$$

Одавде следи још један специјалан случај када је функција константа ( $m = 0$ ), а  $\alpha \neq 0$ ,

$$\frac{d^{\alpha}}{dt^{\alpha}}(1) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} t^{-\alpha} \neq 0. \quad (1.5)$$

Проблем таутохроне је први случај примене рачуна нецелобројног реда чије је решење нашао Абел (*Abel*). Ради се о проблему одређивања криве линије у равни  $y(x)$  по којој би требало да се спушта материјална тачка само под утицајем силе Земљине теже, али тако да време спуштања до најниже тачке криве не зависи од њеног почетног положаја. Решавајући дати проблем таутохроне, Абел је добио интегралну једначину облика

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (t-x)^{\alpha-1} y(t) dt = f(x), \quad x \leq b, \quad 0 < \alpha < 1, \quad (1.6)$$

чије је решење дато у форми

$$y(x) = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_x^b \frac{f(t)}{(t-x)^{\alpha}} dt. \quad (1.7)$$

Абелово решење, као и резултати горе поменутих математичара, привукли су пажњу наредне генерације научника као што су Лиувил (*Liouville*), Риман (*Riemann*) и Холмгрен (*Holmgren*). Лиувил се нпр. први бавио решавањем линеарних фракционих диференцијалних једначина. Риман је дошао до следеће дефиниције интеграла нецелобројног реда

$$I^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_c^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt + \Psi(x). \quad (1.8)$$

Комплементарна функција  $\Psi(x)$  је додата у једначини (1.8) због неодређености у доњој граници  $c$ . Холмгрен је затим био први научник који је избацио комплементарну функцију из дефиниције извода фракционог реда. Научници попут Грунвалда (*Grunwald*), Сонино (*Sonin*) и Летникова (*Letnikov*) објединили су постигнуте резултате, па се дошло до једне од данас најпознатијих дефиниција фракционог извода, познатог као Риман-Лиувиловог извод функције  $f(t)$

$${}^{RL}D^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau, \quad (1.9)$$

где је  $n-1 \leq \alpha < n$ . Грунвалд-Летникова дефиниција погодна је за нумеричко рачунање, и дата је са

$${}^{GL}D^\alpha f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\alpha}{k} f(t-kh), \quad (1.10)$$

У горњем изразу члан  $\binom{\alpha}{j}$  представља генерализовани биномијални коефицијент где су, за разлику од класичног коефицијента, факторијали замењени са одговарајућом гама функцијом.

Трећа најчешћа дефиниција фракционог извода која је данас у употреби поред последње две наведене, уведена је од стране Капута (*Caputo*) и гласи

$${}^cD^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau, \quad n-1 < \alpha < n. \quad (1.11)$$

Овде треба напоменути да се Капутова и Риман-Лиувилова дефиниција фракционог извода подударaju за нулте почетне услове. Лапласова трансформација фракционог извода зависи од усвојене дефиниције истог. Тако нпр. Лапласова трансформација Риман-Лиувиловог извода  ${}^{RL}D^\alpha f(t)$  износи

$$L\left[{}^{RL}D^\alpha f(t)\right] = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k {}_0D_t^{\alpha-k-1} f(0), \quad \alpha > 0. \quad (1.12)$$

Познато је да се Лапласова трансформација често користи у теорији управљања за описивање процеса у комплексном домену, што ће се овде доста користити. Она такође омогућава и анализу у фреквенцијском домену.

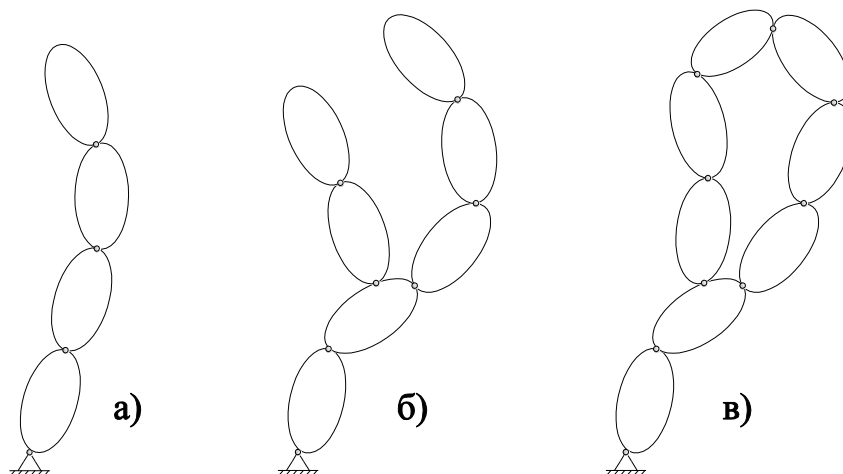
## 2. Математички модел роботског система

### 2.1 Основни појмови механике работа

Са механичке тачке гледишта, роботски систем представља везани систем тела која формирају кинематички ланац. Тела која улазе у састав роботског система називамо роботским сегментима. Веза између два суседна роботска сегмента ограничава број степени слободe при релативном кретању тих сегмената. Два суседна тела формирају кинематички пар одређене класе, при чему вези са једним степеном слободe одговара кинематички пар V (пете) класе, вези са два степена слободe кинематички пар IV (четврте) класе, итд. Најчешће везе у роботици су оне које допуштају један степен слободe кретања између сегмената, и оне су реализоване у форми цилиндричног или призматичног зглоба. Цилиндрични (или ротациони) зглоб омогућава обртање (ротацију) једног роботског сегмента у односу на други око задате осе обртања. Призматични зглоб омогућава транслаторно кретање између два суседна роботска сегмента. Треба напоменути и да се свака сложена веза која допушта више од једног степена слободe кретања може декомпоновати на одговарајући број веза са једним степеном слободe. На тај начин, без губљења на општости, овде ће се под роботским системом подразумевати систем крутих тела која образују кинематичке парове V класе, при чему укупан број тела која сачињавају тај систем неће бити ограничен. Такође, разматраће се такви системи тела чије је кретање ограничено холономним и склерономним везама.

Основна структура роботског система јесте отворени кинематички ланац (слика 2.1а). Такав ланац састоји се од  $n$  тела, а пут који спаја два произвољна тела тог ланца је јединствен. Поред тога, ланац може бити отворен са гранањем (слика 2.1б), а може бити и у облику затвореног кинематичког ланца (слика 2.1в), код кога горња претпоставка о јединствености пута између два сегмента не важи.



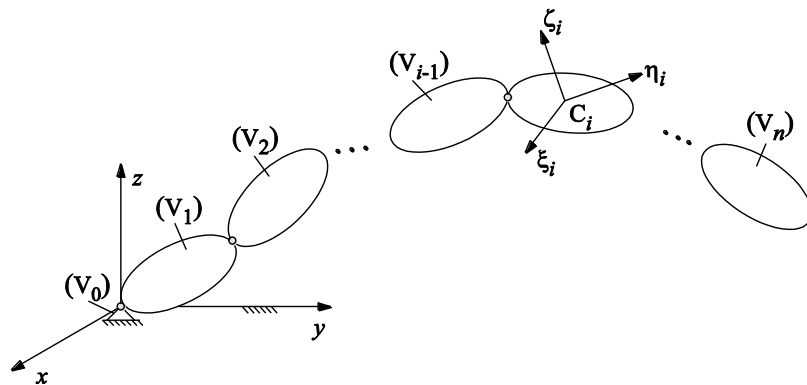


Слика 2.1 Кинематички ланац а) отвореног типа, б) са гранањем, в) затвореног типа.

Под роботским манипулатором подразумеваће се роботски систем са три или више степени слободе, који је фиксиран за постоље или мобилан, и који се користи у процесима индустријске аутоматизације. Рад роботског манипулатора у индустријским условима обично се обавља у контролисаном и унапред дефинисаном окружењу. Најчешће, индустријски роботи су ангажовани у процесима производње, где обављају разноврсне задатке попут премештања терета, складиштења, сортирања, паковања, мерења итд. Структура роботског манипулатора је најчешће реализована у форми отвореног кинематичког ланца са непокретним постољем, и управо овакав тип манипулатора биће предмет истраживања ове докторске дисертације.

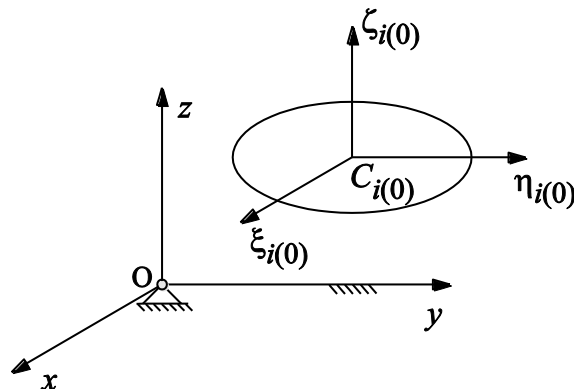
Шематски приказ роботског манипулатора са  $n$  степени слободе приказан је на слици 2.2. Произвољни роботски сегмент означен је са  $(V_i)$ , при чему важи  $1 \leq i \leq n$ . Као што је већ речено, тела  $(V_{i-1})$  и  $(V_i)$  формирају кинематички пар  $V$  класе који дозвољава праволинијску translацију или ротацију тела  $(V_i)$  у односу на тело  $(V_{i-1})$ . Први роботски сегмент  $(V_1)$  везан је за непокретно постоље  $(V_0)$ , у односу на које је дефинисан инерцијални Декартов координатни систем  $Oxyz$ . Произвољном сегменту  $(V_i)$  придружује се локални Декартов координатни систем  $C_i\xi_i\eta_i\zeta_i$ , где је са  $C_i$  означено

средиште маса  $i$  – тог сегмента.



Слика 2.2 Произвољна конфигурација роботског система.

Конфигурација роботског система одређена је скупом генералисаних (унутрашњих) координата  $(q_1, q_2, \dots, q_n)$ , који се у овом случају (отворени кинематички ланац) поклапа са скупом независних (Лагранжевих) координата [3]. Произвољна конфигурација роботског система одређује се у односу на референтну конфигурацију у којој су све генералисане координате једнаке нули. У референтној конфигурацији (означеној са  $(0)$ ) испуњен је и услов о паралелности одговарајућих оса непокретног и покретног координатног система (слика 2.3), тј. важи  $C_{i(0)}\xi_{i(0)} \parallel 0x$ ,  $C_{i(0)}\eta_{i(0)} \parallel 0y$ , и  $C_{i(0)}\zeta_{i(0)} \parallel 0z$ . Овај услов омогућава да се матрице трансформација координата произвољних тачака или вектора одреде на релативно једноставан начин, што даље олакшава формирање диференцијалних једначина кретања роботског система.

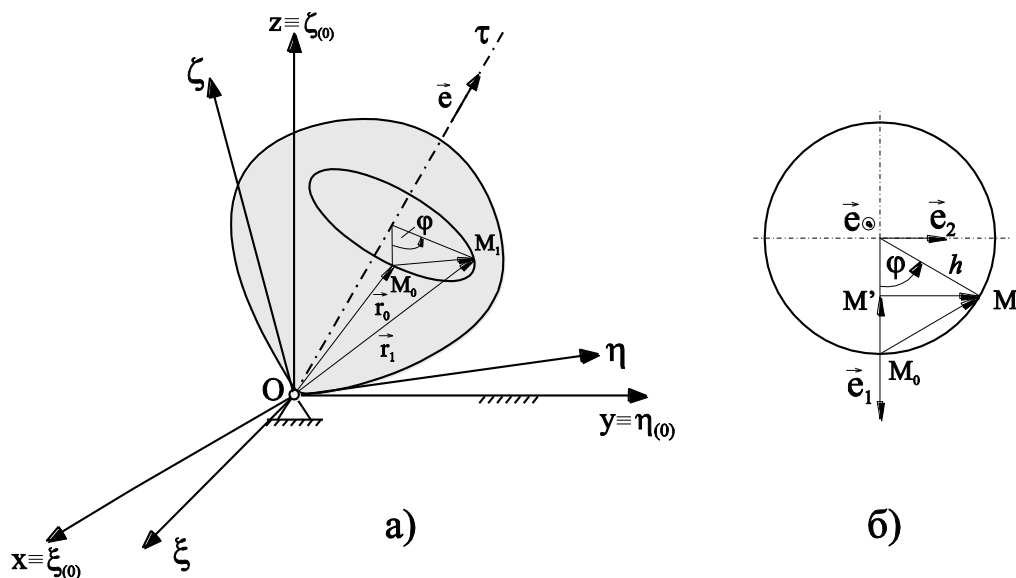


Слика 2.3 Референта конфигурација  $i$ -тог сегмента роботског система.

## 2.2 Родригова матрица трансформације

Нека се круто тело (слика 2.4а) обрће око непокретне тачке  $O$  за коју је везан инерцијални Декартов координатни систем  $Oxyz$ . Претпоставимо да круто тело изврши ротацију око произвољне осе  $O\tau$  дефинисане јединичним вектором  $\vec{e}$ , за угао  $\varphi$ . Ако уочимо произвољну тачку  $M$  на крутом телу, онда је веза између вектора положаја  $\vec{r}_0$  тачке  $M$  у почетном, и вектора  $\vec{r}_1$  у крајњем положају дата следећим изразом

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_0 + \Delta\vec{r} = \vec{r}_0 + \overline{M_0M_1}. \quad (2.1)$$



Слика 2.4 а) Обртање крутог тела око непокретне тачке, б) поглед „одозго“

На слици 2.4б приказана је линија путање тачке  $M$  посматрана из правца вектора  $\vec{e}$ . Ако уочимо тачку  $M'$ , онда се вектор  $\overline{M_0M_1}$  може записати као

$$\overline{M_0M_1} = \overline{M_0M'} + \overline{M'M_1}, \quad (2.2)$$

односно,

$$\overline{M_0M_1} = -\overline{M_0M'}e_1 + \overline{M'M_1}e_2. \quad (2.3)$$

Јединични вектори  $\vec{e}_1$  и  $\vec{e}_2$  су ортогонални како међусобно, тако и у односу на вектор  $\vec{e}$ , те се могу изразити као

$$\vec{e}_2 = \frac{\vec{e} \times \vec{r}_0}{|\vec{e} \times \vec{r}_0|} = \frac{1}{h} (\vec{e} \times \vec{r}_0), \quad \vec{e}_1 = \vec{e}_2 \times \vec{e} = \frac{1}{h} (\vec{e} \times \vec{r}_0) \times \vec{e}. \quad (2.4)$$

Приметимо такође да је  $\overline{M_0 M'} = h - h \cos \varphi$  и  $\overline{M' M_1} = h \sin \varphi$ . Сада израз (2.3) гласи

$$\overline{M_0 M_1} = -(h - h \cos \varphi) \frac{1}{h} (\vec{e} \times \vec{r}_0) \times \vec{e} + h \sin \varphi \frac{1}{h} (\vec{e} \times \vec{r}_0), \quad (2.5)$$

или

$$\overline{M_0 M_1} = (1 - \cos \varphi) \vec{e} \times (\vec{e} \times \vec{r}_0) + \sin \varphi (\vec{e} \times \vec{r}_0). \quad (2.6)$$

Убацујући последњи израз у (2.1) добијамо познати Родригов образац

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_0 + (1 - \cos \varphi) \vec{e} \times (\vec{e} \times \vec{r}_0) + \sin \varphi (\vec{e} \times \vec{r}_0). \quad (2.7)$$

Прикажимо сада горњу једначину у матричном облику који је погодан за нумеричку имплементацију. Вектори у горњем изразу изражени су преко пројекција у односу на координатни систем  $Oxyz$  као

$$\{\vec{r}_0\} = (x_0 \ y_0 \ z_0)^T, \quad \{\vec{r}_1\} = (x \ y \ z)^T, \quad \{\vec{e}\} = (e_x \ e_y \ e_z)^T. \quad (2.8)$$

Векторски производ вектора  $\vec{e}$  и  $\vec{r}_0$  (или било која друга два произвољна вектора) може се написати у облику

$$\vec{e} \times \vec{r}_0 = [e^d] \{\vec{r}_0\}, \quad (2.9)$$

где је  $[e^d]$  дуални објекат (другог реда) вектора  $\{\vec{e}\}$  (објекта првог реда), и који је дефинисан на следећи начин

$$[e^d] = \begin{bmatrix} 0 & -e_z & e_y \\ e_z & 0 & -e_x \\ -e_y & e_x & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.10)$$

Сада се релација (2.7) може написати компактно у матричној форми као

$$\{\vec{r}_1\} = [A_r] \{\vec{r}_0\}, \quad (2.11)$$

где је са

$$[A_r] = [I] + (1 - \cos \varphi) [e^d]^2 + \sin \varphi [e^d] \quad (2.12)$$

означена Родригова матрица. У претходном изразу  $[I]$  означава јединичну  $3 \times 3$  матрицу.

Нека је за тело круто везан покретни координатни систем  $O\xi\eta\zeta$  који се у почетном тренутку (пре извршене ротације тела за угао  $\varphi$ ) поклапао са коорд. системом  $Oxyz$ . У том случају, пројекције вектора  $\vec{r}_0$  биће дефинисане пројекцијама  $\xi, \eta, \zeta$  на осе коорд. система  $O\xi\eta\zeta$ , при чему важи

$$\{\vec{r}_0\} = (\xi \ \eta \ \zeta)^T = (x_0 \ y_0 \ z_0)^T. \quad (2.13)$$

Такође, треба приметити да су пројекције вектора  $\vec{e}$  на осе непокретног и покретног коорд. система међусобно једнаке

$$\{\vec{e}\} = (e_x \ e_y \ e_z)^T = (e_\xi \ e_\eta \ e_\zeta)^T. \quad (2.14)$$

На основу (2.8) и (2.13), израз (2.11) сада гласи

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = [A_r] \begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{Bmatrix}. \quad (2.15)$$

Одавде следи да Родригова матрица  $[A_r]$ , дефинисана изразом (2.12), представља матрицу трансформације координата тачке  $M$  крутог тела из координатног система  $O\xi\eta\zeta$  у координатни систем  $Oxyz$ , у случају када се ова два система у почетном тренутку поклапају. Родригова матрица трансформације спада у ортогоналне матрице, што значи да она поседује следеће две важне особине:

- матрица  $[A_r]$  је несингуларна, и важи  $\det[A_r] = 1$ ,

- инверзна матрица  $[A_r]^{-1}$  једнака је транспонованој матрици матрице  $[A_r]$ , тј.  $[A_r]^{-1} = [A_r]^T$ .

Сада је могуће дефинисати сложену матрицу трансформације која се јавља при трансформацији координата између два несуседна роботска сегмента, као и основне кинематичке величине које су потребне за формирање математичког модела роботског система.

### 2.3 Сложена матрица трансформације

На слици 2.5 дат је отворени кинематички ланац без гранања са  $n$  степени слободе. Први роботски сегмент је везан за непокретно постоље, а два суседна тела формирају кинематички пар  $V$  класе. У зависности да ли је  $i$ -ти зглоб ( $1 \leq i \leq n$ ) призматични или цилиндрични, дефинишу се параметри  $\xi_i$  и  $\bar{\xi}_i$  на следећи начин. Ако зглоб дозвољава ротацију тела ( $V_i$ ) у односу на тело ( $V_{i-1}$ ), важиће  $\xi_i = 0$  и  $\bar{\xi}_i = 1$ . У супротном, када је  $i$ -ти зглоб призматичан, важи  $\xi_i = 1$  и  $\bar{\xi}_i = 0$ . Уочавамо да између параметара  $\xi_i$  и  $\bar{\xi}_i$  постоји следећа веза,  $\xi_i = 1 - \bar{\xi}_i$ .

Инерцијални координатни систем  $Oxyz$  везан је за непокретно постоље, а за центар инерције  $C_i$  тела ( $V_i$ ) круто је везан покретни координатни систем  $C_i\xi_i\eta_i\zeta_i$ . Произвољан положај роботског система одређен је генерализаним координатама  $q_1, q_2, \dots, q_n$ , а у почетном тренутку систем се налазио у референтној конфигурацији.

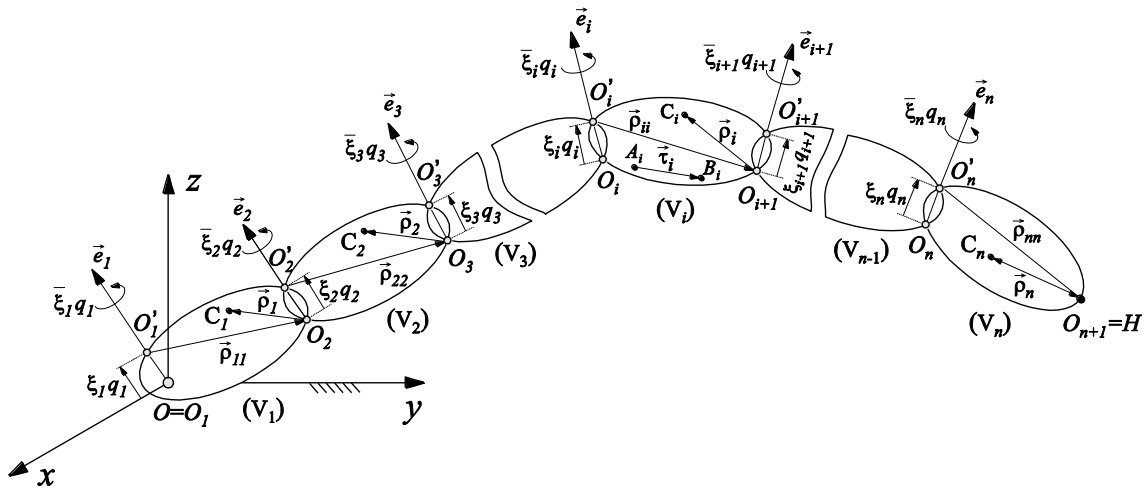
Оса цилиндричног (призматичног)  $i$ -тог зглоба дефинисана је јединичним вектором  $\vec{e}_i$ . Смер вектора  $\vec{e}_i$  одређен је према правилу десног завртња код цилиндричног зглоба, односно поклапа се са смером позитивног прираштаја координате  $q_i$  у случају призматичног зглоба. Карактеристични вектори положаја  $\vec{\rho}_{ii}$  и  $\vec{\rho}_i$  дефинисани су следећим релацијама

$$\vec{\rho}_{ii} = \overrightarrow{O_i' O_{i+1}}, \quad (2.16)$$

$$\vec{\rho}_i = \overrightarrow{O_{i+1} C_i}, \quad (2.17)$$

при чему се тачке  $O_i'$  и  $O_i$  налазе на оси цилиндричног (призматичног) зглоба. Тачка  $O_1$  поклапа се са тачком  $O$  (непокретно постоље), а тачка  $O_{n+1}$  је произвољно изабрана и припада последњем роботском сегменту у отвореном кинематичком ланцу. Уколико није другачије речено, сматраћемо да се тачка  $O_{n+1}$  поклапа са врхом роботске хватаљке  $H$ .

Вектори  $\vec{e}_i$ ,  $\vec{\rho}_{ii}$ ,  $\vec{\rho}_i$  задају се у односу на локални координатни систем  $C_i \xi_i \eta_i \zeta_i$ , што значи да су координате тих вектора константне величине. Исти закључак важи и за вектор  $\vec{\tau}_i = \overrightarrow{A_i B_i}$ , где су тачке  $A_i$  и  $B_i$  произвољно изабране ( $A_i, B_i \in (V_i)$ ).



Слика 2.5 Отворени кинематички ланац

Родригова матрица трансформације, записана у облику

$$[A_{i-1,i}] = [I] + \bar{\xi}_i \left( (1 - \cos q_i) [e_i^d]^2 + \sin q_i [e_i^d] \right), \quad (2.18)$$

представља матрицу трансформације координата произвољне тачке (или вектора) тела  $(V_i)$  из координатног система  $C_i \xi_i \eta_i \zeta_i$  у координатни систем  $C_{i-1} \xi_{i-1} \eta_{i-1} \zeta_{i-1}$ . Израз (2.18) важи за случај призматичног ( $\bar{\xi}_i = 0$ ), као и за

случај цилиндричног ( $\bar{\xi}_i = 1$ ) зглоба између сегмената ( $V_i$ ) и ( $V_{i-1}$ ), с тим што се у случају призматичног зглоба добија  $[A_{i-1,i}] = [I]$ . Сада, ако су координате вектора  $\vec{r}_i$  у координатном систему  $C_i \xi_i \eta_i \zeta_i$  дате са  $\{\vec{r}_i^{(i)}\} = (\xi_i^{(i)} \eta_i^{(i)} \zeta_i^{(i)})^T$ , онда координате тог истог вектора у координатном систему  $C_{i-1} \xi_{i-1} \eta_{i-1} \zeta_{i-1}$ , у ознаци  $\{\vec{r}_i^{(i-1)}\} = (\xi_i^{(i-1)} \eta_i^{(i-1)} \zeta_i^{(i-1)})^T$ , рачунамо према

$$\begin{Bmatrix} \xi_i^{(i-1)} \\ \eta_i^{(i-1)} \\ \zeta_i^{(i-1)} \end{Bmatrix} = [A_{i-1,i}] \begin{Bmatrix} \xi_i^{(i)} \\ \eta_i^{(i)} \\ \zeta_i^{(i)} \end{Bmatrix}. \quad (2.19)$$

Уопштавајући израз (2.19) за два несуседна роботска сегмента ( $V_k$ ) и ( $V_i$ ),  $k < i$ , можемо писати

$$\begin{Bmatrix} \xi_i^{(k)} \\ \eta_i^{(k)} \\ \zeta_i^{(k)} \end{Bmatrix} = [A_{k,i}] \begin{Bmatrix} \xi_i^{(i)} \\ \eta_i^{(i)} \\ \zeta_i^{(i)} \end{Bmatrix}, \quad (2.20)$$

где је

$$[A_{k,i}] = [A_{k,k+1}] [A_{k+1,k+2}] \dots [A_{i-1,i}] = \prod_{j=k}^{i-1} [A_{j,j+1}] \quad (2.21)$$

тражена сложена матрица трансформације координата вектора  $\vec{r}_i$  из координатног система  $C_i \xi_i \eta_i \zeta_i$  у координатни систем  $C_k \xi_k \eta_k \zeta_k$  везан за тело ( $V_k$ ).

## 2.4 Брзина центра инерције и угаона брзина крутог тела

Са слике 2.5 видимо да је положај центра инерције  $C_i$  крутог тела ( $V_i$ ) одређен у односу на непокретну тачку  $O$  следећом релацијом

$$\overrightarrow{OC_i} = \vec{r}_i = \sum_{k=1}^i (\vec{\rho}_{kk} + \xi_k \vec{e}_k q_k) + \vec{\rho}_i. \quad (2.22)$$



одакле закључујемо да важи  $\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_i)$ . Имајући у виду да је брзина центра инерције  $i$ -тог сегмента  $\vec{V}_{Ci} = \frac{d\vec{r}_i}{dt}$ , после краћег извођења можемо писати

$$\vec{V}_{Ci} = \sum_{\alpha=1}^i \vec{T}_{\alpha(i)} \dot{q}_\alpha, \quad (2.23)$$

где је  $\dot{q}_i$  извод по времену генерализане координате  $q_i$ , а  $\vec{T}_{\alpha(i)}$  квазибазни вектор дефинисан као

$$\vec{T}_{\alpha(i)} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} = \bar{\xi}_\alpha \bar{e}_\alpha \times \vec{R}_{\alpha(i)} + \xi_\alpha \bar{e}_\alpha, \quad (2.24)$$

при чему је  $\vec{R}_{\alpha(i)} = \sum_{k=\alpha}^i (\bar{\rho}_{kk} + \xi_k \bar{e}_k q_k) + \bar{\rho}_i$ . У случају да брзину изразимо преко пројекција у односу на непокретни (нулти) координатни систем  $Oxyz$ , израз (2.23) постаје

$$\{\vec{V}_{Ci}^{(0)}\} = \sum_{\alpha=1}^i \{\vec{T}_{\alpha(i)}^{(0)}\} \dot{q}_\alpha. \quad (2.25)$$

где је

$$\{\vec{T}_{\alpha(i)}^{(0)}\} = \bar{\xi}_\alpha [A_{0,\alpha}] [e_\alpha^d] \{\vec{R}_{\alpha(i)}^{(0)}\} + \xi_\alpha [A_{0,\alpha}] \{\bar{e}_\alpha\}, \quad (2.26)$$

и  $\{\vec{R}_{\alpha(i)}^{(0)}\} = \sum_{k=\alpha}^i [A_{\alpha,k}] (\{\bar{\rho}_{kk}\} + \xi_k q_k \{\bar{e}_k\}) + [A_{\alpha,i}] \{\bar{\rho}_i\}$ . Ради једноставности, у горњим изразима је за векторе  $\bar{\rho}_{kk}$ ,  $\bar{\rho}_i$ ,  $\bar{e}_k$  и  $\bar{e}_\alpha$  коришћена ознака без горњег индекса (нпр.  $\{\bar{\rho}_{kk}\}$  уместо  $\{\bar{\rho}_{kk}^{(k)}\}$ ) када су њихове пројекције дате у односу на координатни систем за који су везани. Иста примедба се односи и на дуалне објекте тих вектора ( $[e_\alpha^d]$  уместо  $[e_\alpha^{d(\alpha)}]$ ).

Угаона брзина  $i$ -тог роботског сегмента може се једноставно израчунати на основу следећег израза

$$\vec{\omega}_i = \sum_{\alpha=1}^i \bar{\xi}_\alpha \dot{q}_\alpha \vec{e}_\alpha, \quad (2.27)$$

или, записано преко пројекција у односу на непокретни коорд. систем

$$\{\vec{\omega}_i^{(0)}\} = \sum_{\alpha=1}^i \bar{\xi}_\alpha \dot{q}_\alpha [A_{0,\alpha}] \{\vec{e}_\alpha\}. \quad (2.28)$$

И у овом случају, слично као за брзину  $\vec{V}_{Ci}$ , важи  $\vec{\omega}_i = \vec{\omega}_i(q_1, q_2, \dots, q_i)$ .

Приметимо и да за произвољни вектор  $\vec{r}_i$  (слика 2.5) важи следећи закључак

$$\dot{\vec{r}}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \sum_{\alpha=1}^i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha = \sum_{\alpha=1}^i (\bar{\xi}_\alpha \vec{e}_\alpha \times \vec{r}_i) \dot{q}_\alpha = \sum_{\alpha=1}^i \bar{\xi}_\alpha \dot{q}_\alpha \vec{e}_\alpha \times \vec{r}_i = \vec{\omega}_i \times \vec{r}_i. \quad (2.29)$$

## 2.5 Кинетичка енергија роботског система

Користећи Кенигову теорему за круто тело [80,81] добија се кинетичка енергија  $i$ -тог сегмента ( $1 \leq i \leq n$ ) роботског манипулатора са  $n$  степени слободе у облику

$$E_{ki} = \frac{1}{2} m_i V_{Ci}^2 + \frac{1}{2} (\vec{\omega}_i) [J_{Ci}] \{\vec{\omega}_i\}, \quad (2.30)$$

где је  $[J_{Ci}]$  тензор инерције крутог тела ( $V_i$ )

$$[J_{Ci}] = \begin{bmatrix} J_{\xi_i} & -J_{\xi_i \eta_i} & -J_{\xi_i \zeta_i} \\ -J_{\eta_i \xi_i} & J_{\eta_i} & -J_{\eta_i \zeta_i} \\ -J_{\zeta_i \xi_i} & -J_{\zeta_i \eta_i} & J_{\zeta_i} \end{bmatrix}. \quad (2.31)$$

Као што видимо, тензор  $[J_{Ci}]$  дефинисан је у односу локални координатни систем тела ( $V_i$ ). Дијагонални елементи горње матрице представљају аксијалне моменте инерције у односу на одговарајуће осе коорд. система  $C_i \xi_i \eta_i \zeta_i$ , а остали елементи представљају одговарајуће центрифугалне моменте инерције (са знаком минус), при чему важи  $J_{\xi_i \eta_i} = J_{\eta_i \xi_i}$ ,  $J_{\xi_i \zeta_i} = J_{\zeta_i \xi_i}$  и  $J_{\eta_i \zeta_i} = J_{\zeta_i \eta_i}$ . Користећи изразе (2.23) и (2.27) за брзину

центра инерције и угаону брзину  $i$ -тог сегмента респективно, кинетичка енергија (2.30) добија облик

$$E_{ki} = \frac{1}{2} m_i \left( \sum_{\alpha=1}^i \vec{T}_{\alpha(i)} \dot{q}_\alpha \right) \left\{ \sum_{\beta=1}^i \vec{T}_{\beta(i)} \dot{q}_\beta \right\} + \frac{1}{2} \left( \sum_{\alpha=1}^i \bar{\xi}_\alpha \bar{e}_\alpha \dot{q}_\alpha \right) [J_{Ci}] \left\{ \sum_{\beta=1}^i \bar{\xi}_\beta \bar{e}_\beta \dot{q}_\beta \right\}, \quad (2.32)$$

Горњи израз може се написати и у следећој форми

$$E_{ki} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^i \sum_{\beta=1}^i a_{\alpha\beta(i)} \dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta, \quad (2.33)$$

при чему је

$$a_{\alpha\beta(i)} = m_i \left( \vec{T}_{\alpha(i)} \right) \left\{ \vec{T}_{\beta(i)} \right\} + \left( \bar{\xi}_\alpha \bar{e}_\alpha \right) [J_{Ci}] \left\{ \bar{\xi}_\beta \bar{e}_\beta \right\}. \quad (2.34)$$

Кинетичка енергија роботског система једнака је збиру кинетичких енергија свих роботских сегмента ( $V_i$ ) за  $i=1,2,\dots,n$ ,

$$E_k = \sum_{i=1}^n E_{ki} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{\alpha=1}^i \sum_{\beta=1}^i a_{\alpha\beta(i)} \dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta, \quad (2.35)$$

или

$$E_k = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n a_{\alpha\beta} \dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta, \quad (2.36)$$

где је

$$a_{\alpha\beta} = \sum_{i=\alpha,\beta}^n a_{\alpha\beta(i)} = \sum_{i=\alpha,\beta}^n m_i \left( \vec{T}_{\alpha(i)}^{(a)} \right) \left\{ \vec{T}_{\beta(i)}^{(a)} \right\} + \sum_{i=\alpha,\beta}^n \bar{\xi}_\alpha \bar{\xi}_\beta \left( \bar{e}_\alpha^{(i)} \right) [J_{Ci}] \left\{ \bar{e}_\beta^{(i)} \right\}. \quad (2.37)$$

У горњем изразу важе следеће ознаке:  $\overline{\alpha, \beta} = \max(\alpha, \beta)$  и  $a = \min(\alpha, \beta)$ . Коефицијенти  $a_{\alpha\beta}$  ( $\alpha, \beta=1,2,\dots,n$ ) називају се коваријантне координате метричког тензора, а из (2.37) следи  $a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}$ . Видимо на основу (2.36) да је кинетичка енергија позитивно дефинитна квадратна форма генералисаних брзина, па можемо писати

$$E_k = \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{q}}) [A] \{\dot{\mathbf{q}}\}, \quad (2.38)$$

где је  $\{\dot{q}\} = (\dot{q}_1 \dot{q}_2 \dots \dot{q}_n)^T \in \mathbb{R}^{n \times 1}$  вектор генерализаних брзина роботског система, а матрица  $[A] = [a_{\alpha\beta}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$  представља основни метрички тензор. Ако је кинетичка енергија роботског манипулатора дата као функција независних генерализаних координата и генерализаних брзина, коефицијенти  $a_{\alpha\beta}$  могу се поред израза (2.37), израчунати и на следећи начин

$$a_{\alpha\beta} = \frac{\partial^2 E_k}{\partial \dot{q}_\alpha \partial \dot{q}_\beta}. \quad (2.39)$$

## 2.6 Коваријантни облик диференцијалних једначина кретања роботског система

Диференцијалне једначине кретања роботског система могу бити представљене у форми Лагранжевих једначина друге врсте као

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_\gamma} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial q_\gamma} = Q_\gamma, \quad \gamma = 1, 2, \dots, n, \quad (2.40)$$

где  $Q_\gamma$  представља генерализану силу која делује на дати систем, и која одговара генерализаној координати  $q_\gamma$ . На основу (2.36) следи да је

$$\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_\gamma} = \sum_{\alpha=1}^n a_{\alpha\gamma} \dot{q}_\alpha, \quad (2.41)$$

одакле је даље

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_\gamma} \right) = \sum_{\alpha=1}^n a_{\alpha\gamma} \ddot{q}_\alpha + \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n \left( \frac{\partial a_{\alpha\gamma}}{\partial q_\beta} + \frac{\partial a_{\beta\gamma}}{\partial q_\alpha} \right) \dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta. \quad (2.42)$$

Величина  $\ddot{q}_\alpha$  представља други извод по времену координате  $q_\alpha$ . Парцијални извог  $E_k$  по генерализаној координати  $q_\gamma$  износи

$$\frac{\partial E_k}{\partial q_\gamma} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n \frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial q_\gamma} \dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta. \quad (2.43)$$

Узимајући у обзир (2.42) и (2.43), Лагранжеве једначине (2.40) добијају свој коваријантни облик

$$\sum_{\alpha=1}^n a_{\gamma\alpha} \ddot{q}_\alpha + \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n \Gamma_{\alpha\beta,\gamma} \dot{q}_\beta \dot{q}_\alpha = Q_\gamma, \quad \gamma=1,2,\dots,n. \quad (2.44)$$

Коефицијенти  $\Gamma_{\alpha\beta,\gamma}$  ( $\alpha, \beta, \gamma=1,2,\dots,n$ ) у горњем изразу називају се Кристофелови симболи прве врсте, и износе

$$\Gamma_{\alpha\beta,\gamma} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial a_{\beta\gamma}}{\partial q_\alpha} + \frac{\partial a_{\gamma\alpha}}{\partial q_\beta} - \frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial q_\gamma} \right). \quad (2.45)$$

Претходне диференцијалне једначине могу се написати у компактној форми ако се уведе следећи коефицијент

$$b_{\gamma\alpha} = \sum_{\beta=1}^n \Gamma_{\alpha\beta,\gamma} \dot{q}_\beta, \quad (2.46)$$

услед чега једначине (2.44) сада попримају матрични облик

$$[A]\{\ddot{\mathbf{q}}\} + [B]\{\dot{\mathbf{q}}\} = \{\mathbf{Q}\}, \quad (2.47)$$

где је  $\{\ddot{\mathbf{q}}\} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$  вектор генералисаних убрзања,  $[B] = [b_{\gamma\alpha}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , а  $\{\mathbf{Q}\} = (Q_1 \ Q_2 \ \dots \ Q_n)^T \in \mathbb{R}^{n \times 1}$  вектор генералисаних сила. Да би се у потпуности одредиле диференцијалне једначине кретања (2.44) роботског система (или њихова матрична форма (2.47)), потребно је одредити генералисане силе  $Q_\gamma$  ( $\gamma=1,2,\dots,n$ ) које делују на разматрани систем. У овој дисертацији сматраћемо да на роботски систем дејствују следеће спољашње силе: сила земљине теже, силе у опрузи, као и погонске силе. Поред ових сила, при кретању роботских сегмената јавља се отпор кретању у виду унутрашњих сила трења чије је дејство такође потребно размотрити. Стога, вектор генералисаних сила  $\{\mathbf{Q}\}$  можемо записати као

$$\{\mathbf{Q}\} = \{\mathbf{Q}^g\} + \{\mathbf{Q}^c\} + \{\mathbf{Q}^d\} + \{\mathbf{Q}^a\}, \quad \gamma=1,2,\dots,n, \quad (2.48)$$

где је  $\{\mathcal{Q}^g\}$  вектор генерализаних сила од сила земљине теже,  $\{\mathcal{Q}^c\}$  вектор генерализаних сила од сила у опругама,  $\{\mathcal{Q}^d\}$  вектор генерализаних сила од сила трења, и  $\{\mathcal{Q}^a\}$  вектор генерализаних сила од система погонских сила. Узимајући ово у обзир, диференцијалне једначине кретања сада гласе

$$\sum_{\alpha=1}^n a_{\gamma\alpha} \ddot{q}_\alpha + \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n \Gamma_{\alpha\beta,\gamma} \dot{q}_\beta \dot{q}_\alpha = \mathcal{Q}_\gamma^g + \mathcal{Q}_\gamma^c + \mathcal{Q}_\gamma^d + \mathcal{Q}_\gamma^a, \quad \gamma=1,2,\dots,n, \quad (2.49)$$

или у матричном облику,

$$[A]\{\ddot{\mathbf{q}}\} + [B]\{\dot{\mathbf{q}}\} = \{\mathcal{Q}^g\} + \{\mathcal{Q}^c\} + \{\mathcal{Q}^d\} + \{\mathcal{Q}^a\}. \quad (2.50)$$

## 2.7 Генерализане силе роботског система

Нека на тело  $(V_i)$  роботског манипулатора делује систем од  $l_i$  спољашњих активних сила  $(\vec{F}_{1(i)}, \vec{F}_{2(i)}, \dots, \vec{F}_{l_i(i)})$ , чије су нападне тачке  $A_{1(i)}, A_{2(i)}, \dots, A_{l_i(i)}$ , респективно. Ако изаберемо произвољну силу  $\vec{F}_{j(i)}$ ,  $1 \leq j \leq l_i$  (слика 2.6), онда је рад те силе при виртуалном померању тачке  $A_{j(i)}$  одређен са

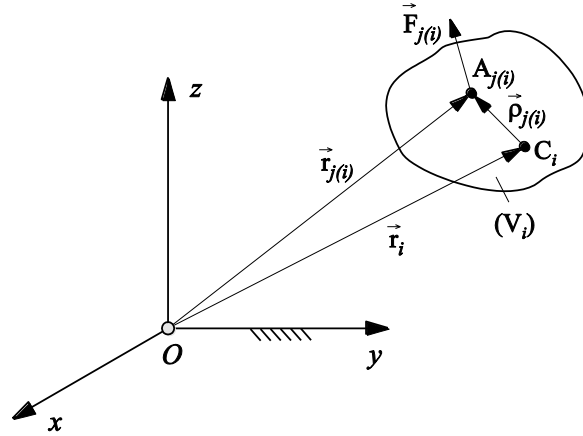
$$\delta A(\vec{F}_{j(i)}) = \vec{F}_{j(i)} \cdot \delta \vec{r}_{j(i)} = \vec{F}_{j(i)} \cdot (\delta \vec{r}_i + \delta \vec{\rho}_{j(i)}). \quad (2.51)$$

Узимајући у обзир релације (2.23) и (2.27), као и чињеницу да је  $\dot{\vec{\rho}}_{j(i)} = \vec{\omega}_i \times \vec{\rho}_{j(i)}$  (релација (2.29)), претходни израз постаје

$$\delta A(\vec{F}_{j(i)}) = \vec{F}_{j(i)} \cdot \left( \sum_{\alpha=1}^i \vec{T}_{\alpha(i)} + \sum_{\alpha=1}^i \vec{\xi}_\alpha \vec{e}_\alpha \times \vec{\rho}_{j(i)} \right) \delta q_\alpha, \quad (2.52)$$

што се даље може свести на форму

$$\delta A(\vec{F}_{j(i)}) = \sum_{\alpha=1}^i \left( \vec{F}_{j(i)} \cdot \vec{T}_{\alpha(i)} + \vec{M}_{Ci}(\vec{F}_{j(i)}) \cdot \vec{\xi}_\alpha \vec{e}_\alpha \right) \delta q_\alpha, \quad (2.53)$$



Слика 2.6 Рад произвољне силе  $\vec{F}_{j(i)}$  која дејствује на тело  $(V_i)$

Израз  $\vec{M}_{C_i}(\vec{F}_{j(i)})$  представља момент силе  $\vec{F}_{j(i)}$  у односу на центар инерције  $C_i$  тела  $(V_i)$ , тј.  $\vec{M}_{C_i}(\vec{F}_{j(i)}) = \vec{\rho}_{j(i)} \times \vec{F}_{j(i)}$ . Виртуални рад система сила  $(\vec{F}_{1(i)}, \vec{F}_{2(i)}, \dots, \vec{F}_{l(i)})$  над телом  $(V_i)$  сада износи

$$\delta A_i = \sum_{j=1}^{l_i} \delta A(\vec{F}_{j(i)}) = \sum_{j=1}^{l_i} \sum_{\alpha=1}^i \left( \vec{F}_{j(i)} \cdot \vec{T}_{\alpha(i)} + \vec{M}_{C_i}(\vec{F}_{j(i)}) \cdot \vec{\xi}_{\alpha} \vec{e}_{\alpha} \right) \delta q_{\alpha}, \quad (2.54)$$

односно

$$\delta A_i = \sum_{\alpha=1}^i \left( \left( \sum_{j=1}^{l_i} \vec{F}_{j(i)} \right) \cdot \vec{T}_{\alpha(i)} + \left( \sum_{j=1}^{l_i} \vec{M}_{C_i}(\vec{F}_{j(i)}) \right) \cdot \vec{\xi}_{\alpha} \vec{e}_{\alpha} \right) \delta q_{\alpha}. \quad (2.55)$$

Уводећи ознаке  $\vec{F}_{R(i)} = \sum_{j=1}^{l_i} \vec{F}_{j(i)}$  и  $\vec{M}_{C_i R(i)} = \sum_{j=1}^{l_i} \vec{M}_{C_i}(\vec{F}_{j(i)})$  за главни вектор и главни момент разматраног система сила за редуccionу тачку  $C_i$  респективно, израз (2.55) постаје

$$\delta A_i = \sum_{\alpha=1}^i \left( \vec{F}_{R(i)} \cdot \vec{T}_{\alpha(i)} + \vec{M}_{C_i R(i)} \cdot \vec{\xi}_{\alpha} \vec{e}_{\alpha} \right) \delta q_{\alpha}. \quad (2.56)$$

Укупни виртуални рад над роботским системом са  $n$  степени слободе једнак је збиру виртуалних радова  $\delta A_i$  за  $i=1, 2, \dots, n$ , тј.

$$\delta A = \sum_{i=1}^n \delta A_i = \sum_{i=1}^n \sum_{\alpha=1}^i \left( \vec{F}_{R(i)} \cdot \vec{T}_{\alpha(i)} + \vec{M}_{C_i R(i)} \cdot \vec{\xi}_{\alpha} \vec{e}_{\alpha} \right) \delta q_{\alpha}, \quad (2.57)$$

или

$$\delta A = \sum_{\alpha=1}^n \sum_{i=\alpha}^n \left( \vec{F}_{R(i)} \cdot \vec{T}_{\alpha(i)} + \vec{M}_{CiR(i)} \cdot \vec{\xi}_{\alpha} \vec{e}_{\alpha} \right) \delta q_{\alpha}, \quad (2.58)$$

У случају отвореног кинематичког ланца генералисане координате су независне, па генералисана сила  $Q_{\alpha}$  која одговара координати  $q_{\alpha}$  ( $1 \leq \alpha \leq n$ ) у изразу за виртуални рад  $\delta A$  фигурише на следећи начин

$$\delta A = \sum_{\alpha=1}^n Q_{\alpha} \delta q_{\alpha}. \quad (2.59)$$

Упоредивањем израза (2.58) и (2.59) добијамо коначно да је

$$Q_{\alpha} = \sum_{i=\alpha}^n \left( \vec{F}_{R(i)} \cdot \vec{T}_{\alpha(i)} + \vec{M}_{CiR(i)} \cdot \vec{\xi}_{\alpha} \vec{e}_{\alpha} \right), \quad \alpha = 1, 2, \dots, n. \quad (2.60)$$

У случају да на роботски систем делују конзервативне (потенцијалне) силе, тада се потенцијална енергија система може написати као функција генералисаних координата, тј.

$$\Pi = \Pi(q_1, q_2, \dots, q_n), \quad (2.61)$$

па су генералисане силе одређене познатим изразом [82]

$$Q_{\alpha} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_{\alpha}}, \quad \alpha = 1, 2, \dots, n. \quad (2.62)$$

### 2.7.1 Генералисане силе од сила теже роботског система

Нека се роботски манипулатор са  $n$  степени слободе креће у хомогеном пољу земљине теже. Означимо са  $\vec{g}$  вектор убрзања силе земљине теже. Нападна тачка силе теже  $\vec{G}_i$  тела ( $V_i$ ) поклапа се са центром инерције  $C_i$  датог сегмента. За главни вектор сила земљине теже можемо писати

$$\vec{F}_{R(i)} = \vec{G}_i = m_i \vec{g}, \quad (2.63)$$

а главни момент за редуccionу тачку  $C_i$  једнак је нули, тј.

$$\vec{M}_{CiR(i)} = 0. \quad (2.64)$$



Узимајући у обзир последња два израза, као и израз (2.60), лако долазимо до генералисане силе од сила земљине теже у облику

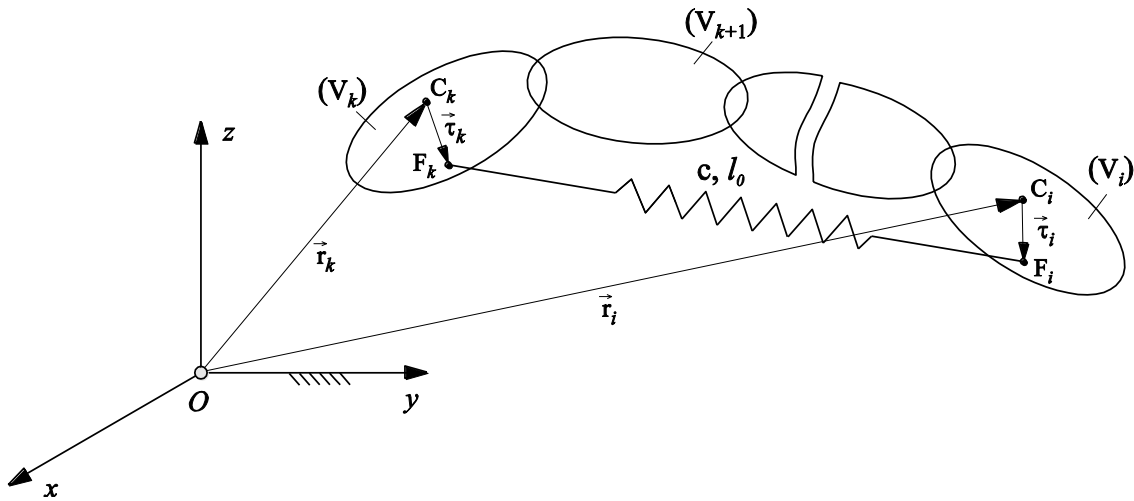
$$Q_\alpha^g = \sum_{i=\alpha}^n m_i \vec{g} \cdot \vec{T}_{\alpha(i)}, \quad \alpha = 1, 2, \dots, n. \quad (2.65)$$

До горњег израза може се лако доћи и коришћењем (2.62), с обзиром да је сила земљине теже потенцијална сила.

### 2.7.2 Генералисане силе од сила у опругама

Нека су за тачке  $F_k \in (V_k)$  и  $F_i \in (V_i)$  ( $k < i$ ) роботског манипулатора везани крајеви опруге крутости  $c$  (слика 2.7). Дужина ненапрегнуте опруге износи  $\ell_0$ , па је њена потенцијална енергија дата са

$$E_p^c = \frac{c}{2} (\overline{F_k F_i} - \ell_0)^2. \quad (2.66)$$



Слика 2.7 Рад силе у опрузи

Сада, сходно изразу (2.62), генералисана сила од силе у опрузи износи

$$Q_\alpha^c = -c (\overline{F_k F_i} - \ell_0) \frac{\partial \overline{F_k F_i}}{\partial q_\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, \dots, n. \quad (2.67)$$

С обзиром да важи

$$\overline{F_k F_i} \frac{\partial \overline{F_k F_i}}{\partial q_\alpha} = \overline{F_k F_i} \cdot \frac{\partial \overline{F_k F_i}}{\partial q_\alpha}, \quad (2.68)$$

израз (2.67) сада постаје

$$Q_\alpha^c = -c \left( \overline{F_k F_i} - \ell_0 \right) \frac{\overline{F_k F_i}}{F_k F_i} \cdot \frac{\partial \overline{F_k F_i}}{\partial q_\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, \dots, n. \quad (2.69)$$

Са слике уочавамо да је

$$\vec{r}_k + \vec{\tau}_k + \overline{F_k F_i} = \vec{r}_i + \vec{\tau}_i, \quad (2.70)$$

где су  $\vec{r}_k$  и  $\vec{\tau}_i$  вектори положаја тачака  $F_k$  и  $F_i$  у односу на  $C_k$  и  $C_i$ , респективно. Сада можемо писати

$$\overline{F_k F_i} = \left| \overline{F_k F_i} \right| = \left| \vec{r}_i + \vec{\tau}_i - \vec{r}_k - \vec{\tau}_k \right|, \quad (2.71)$$

$$\frac{\partial \overline{F_k F_i}}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial}{\partial q_\alpha} (\vec{r}_i + \vec{\tau}_i - \vec{r}_k - \vec{\tau}_k), \quad (2.72)$$

односно

$$\frac{\partial \overline{F_k F_i}}{\partial q_\alpha} = \vec{T}_{\alpha(i)} - \vec{T}_{\alpha(k)} + \vec{\xi}_\alpha \vec{e}_\alpha \times \vec{\tau}_i - \vec{\xi}_\alpha \vec{e}_\alpha \times \vec{\tau}_k, \quad (2.73)$$

при чему треба имати у виду да за величине у горњем изразу важи следеће

$$\begin{aligned} \vec{T}_{\alpha(i)} = 0 \quad \wedge \quad \vec{\xi}_\alpha \vec{e}_\alpha \times \vec{\tau}_i = 0, \quad \forall \alpha > i, \\ \vec{T}_{\alpha(k)} = 0 \quad \wedge \quad \vec{\xi}_\alpha \vec{e}_\alpha \times \vec{\tau}_k = 0, \quad \forall \alpha > k. \end{aligned} \quad (2.74)$$

Штавише, очигледно је да на промену дужине опруге утичу само кретања тела  $(V_{k+1}), (V_{k+2}), \dots, (V_i)$ , тј.

$$\overline{F_k F_i} = \overline{F_k F_i}(q_{k+1}, q_{k+2}, \dots, q_i). \quad (2.75)$$

па на основу (2.67) закључујемо да је

$$Q_\alpha^c = 0, \quad \alpha \leq k \vee \alpha > i+1. \quad (2.76)$$

Коначно, узимајући у обзир изразе (2.71), (2.73), (2.74) и (2.76), релација (2.69) постаје

$$Q_\alpha^c = -c \left( |\vec{r}_i + \vec{\tau}_i - \vec{r}_k - \vec{\tau}_k| - \ell_0 \right) \frac{\vec{r}_i + \vec{\tau}_i - \vec{r}_k - \vec{\tau}_k}{|\vec{r}_i + \vec{\tau}_i - \vec{r}_k - \vec{\tau}_k|} \cdot \left( \vec{T}_{\alpha(i)} + \vec{\xi}_\alpha \vec{e}_\alpha \times \vec{\tau}_i \right), \quad (2.77)$$

$$\alpha = k+1, k+2, \dots, i.$$

### 2.7.3 Генералисане силе од дисипативних сила трења

Трење битно утиче на квалитет рада машина и механизма, па тиме и на рад роботских система. Присуство трења може да изазове грешке при позиционирању система, појаву хистерезиса и транспортног кашњења, као и нежељене осцилације у систему [83–85]. С обзиром да је трење природан, нелинеаран феномен који није у потпуности схваћен, тачан аналитички модел трења још увек није познат. Стога, у литератури се моћу наћи његови различити апроксимативни модели [86–90]. Најчешће коришћени модел подразумева комбинацију Кулоновог и вискозног трења. При брзинама разлитим од нуле, а нарочито при великим брзинама какве се могу срести у раду индустријских робота, до изражаја долази утицај вискозног трења [91–95]. Ова компонента трења се углавном моделује да буде пропорционална релативној брзини додирних површина два тела. У случају призматичног  $i$ -тог зглоба ( $1 \leq i \leq n$ ), сила вискозног трења  $\vec{F}_i^d$  роботског манипулатора се може записати као [96,97]

$$\vec{F}_i^d = -\beta_{fi} \dot{q}_i \vec{e}_i, \quad (2.78)$$

где је  $\beta_{fi}$  коефицијент пропорционалности ( $\beta_{fi} > 0$ ), а  $\dot{q}_i$  релативна брзина између сегмената ( $V_{i-1}$ ) и ( $V_i$ ). У случају ротационог зглоба ( $\vec{\xi}_i = 1$ ) јавља се отпор релативном обртању тела ( $V_i$ ) у односу на тело ( $V_{i-1}$ ). Овај отпор се може представити помоћу спрега сила чији је момент  $\vec{M}_i^d$ , а за који по аналогији са (2.78) можемо писати

$$\vec{M}_i^d = -\beta_{mi} \dot{q}_i \vec{e}_i, \quad (2.79)$$

где је  $\beta_{mi}$  позитивна константа [98]. Коефицијенти  $\beta_{fi}$  и  $\beta_{mi}$  зависе од карактеристика додирних површина, врсте материјала, начина подмазивања, итд.



Да бисмо одредили генералисане силе од отпорних сила које делују у роботском систему, посматрајмо  $i$ -ти зглоб на слици 2.8 који повезује тела  $(V_i)$  и  $(V_{i-1})$ . Ако на сегмент  $(V_i)$  делује отпорна сила  $\vec{F}_i^{d,\lambda}$  или спрег сила момента  $\vec{M}_i^{d,\mu}$ , онда на сегмент  $(V_{i-1})$  делује сила  $\vec{F}_i^{*d,\lambda}$ , односно спрег сила момента  $\vec{M}_i^{*d,\mu}$ , при чему је

$$\vec{F}_i^{*d,\lambda} = -\vec{F}_i^{d,\lambda}, \quad \vec{M}_i^{*d,\mu} = -\vec{M}_i^{d,\mu}. \quad (2.82)$$

Претпоставимо да су тачке  $O_i' \in (V_i)$  и  $O_i \in (V_{i-1})$  нападне тачке за силе  $\vec{F}_i^{d,\lambda}$  и  $\vec{F}_i^{*d,\lambda}$ , респективно. Виртуални рад ових сила при померању датих тачака износи

$$\delta A(\vec{F}_i^{d,\lambda}) = \vec{F}_i^{d,\lambda} \delta \vec{r}_{O_i'}, \quad \delta A(\vec{F}_i^{*d,\lambda}) = \vec{F}_i^{*d,\lambda} \delta \vec{r}_{O_i}, \quad (2.83)$$

што, узимајући у обзир (2.82), доводи до

$$\delta A(\vec{F}_i^{d,\lambda}) + \delta A(\vec{F}_i^{*d,\lambda}) = \vec{F}_i^{d,\lambda} \delta \vec{r}_{O_i'} - \vec{F}_i^{d,\lambda} \delta \vec{r}_{O_i} = \vec{F}_i^{d,\lambda} \delta(\vec{r}_{O_i'} - \vec{r}_{O_i}). \quad (2.84)$$

Како је  $\vec{r}_{O_i'} - \vec{r}_{O_i} = \xi_i \vec{e}_i q_i$ , следи

$$\delta(\vec{r}_{O_i'} - \vec{r}_{O_i}) = \delta(\xi_i \vec{e}_i q_i) = \xi_i \vec{e}_i \delta q_i + \xi_i q_i \delta \vec{e}_i. \quad (2.85)$$

Сада израз (2.84) постаје

$$\delta A(\vec{F}_i^{d,\lambda}) + \delta A(\vec{F}_i^{*d,\lambda}) = \vec{F}_i^{d,\lambda} (\xi_i \vec{e}_i \delta q_i + \xi_i q_i \delta \vec{e}_i) = \vec{F}_i^{d,\lambda} \vec{e}_i \xi_i \delta q_i, \quad (2.86)$$

с обзиром да је  $\vec{F}_i^{d,\lambda} \delta \vec{e}_i = 0$ . Што се тиче виртуалног рада спрега сила момента  $\vec{M}_i^{d,\mu}$ , може се лако показати [3] да важи следећи израз

$$\delta A(\vec{M}_i^{d,\mu}) = \vec{M}_i^{d,\mu} \sum_{\alpha=1}^i \vec{\xi}_\alpha \vec{e}_\alpha \delta q_\alpha, \quad (2.87)$$

односно, за спрег сила момента  $\vec{M}_i^{*d,\mu}$

$$\delta A(\vec{M}_i^{*d,\mu}) = \vec{M}_i^{*d,\mu} \sum_{\alpha=1}^{i-1} \vec{\xi}_\alpha \vec{e}_\alpha \delta q_\alpha. \quad (2.88)$$

Сабирањем претходна два израза добијамо

$$\delta A(\vec{M}_i^{d,\mu}) + \delta A(\vec{M}_i^{*d,\mu}) = \vec{M}_i^{d,\mu} \sum_{\alpha=1}^i \bar{\xi}_\alpha \vec{e}_\alpha \delta q_\alpha - \vec{M}_i^{d,\mu} \sum_{\alpha=1}^{i-1} \bar{\xi}_\alpha \vec{e}_\alpha \delta q_\alpha, \quad (2.89)$$

што се своди на

$$\delta A(\vec{M}_i^{d,\mu}) + \delta A(\vec{M}_i^{*d,\mu}) = \vec{M}_i^{d,\mu} \vec{e}_i \bar{\xi}_i \delta q_i. \quad (2.90)$$

Сада можемо писати

$$\delta A_i = \delta A(\vec{F}_i^{d,\lambda}) + \delta A(\vec{F}_i^{*d,\lambda}) + \delta A(\vec{M}_i^{d,\mu}) + \delta A(\vec{M}_i^{*d,\mu}), \quad (2.91)$$

или, имајући у виду (2.86) и (2.90),

$$\delta A_i = \vec{F}_i^{d,\lambda} \vec{e}_i \bar{\xi}_i \delta q_i + \vec{M}_i^{d,\mu} \vec{e}_i \bar{\xi}_i \delta q_i = (\vec{F}_i^{d,\lambda} \bar{\xi}_i + \vec{M}_i^{d,\mu} \bar{\xi}_i) \vec{e}_i \delta q_i. \quad (2.92)$$

Укупни виртуални рад дисипативних сила које делују у роботском систему са  $n$  степени слободe је

$$\delta A = \sum_{i=1}^n \delta A_i = \sum_{i=1}^n (\bar{\xi}_i \vec{F}_i^{d,\lambda} + \bar{\xi}_i \vec{M}_i^{d,\mu}) \vec{e}_i \delta q_i, \quad (2.93)$$

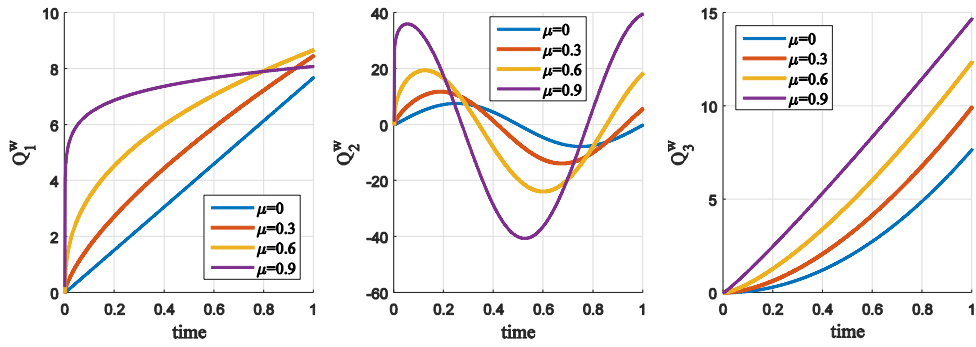
одакле следи израз за генералисане силе  $Q_i^d$  од сила трења [107]

$$Q_i^d = (\bar{\xi}_i \vec{F}_i^{d,\lambda} + \bar{\xi}_i \vec{M}_i^{d,\mu}) \vec{e}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.94)$$

Претходни израз заједно са (2.80) и (2.81) коначно даје

$$Q_i^d = -\bar{\xi}_i \beta_{fi}^\lambda \frac{d^{\lambda_i} q_i}{dt^{\lambda_i}} - \bar{\xi}_i \beta_{mi}^\mu \frac{d^{\mu_i} q_i}{dt^{\mu_i}}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.95)$$

Да бисмо видели како извод фракционог реда утиче на вредност генералисане силе, извршена је нумеричка симулација роботског манипулатора са три степена слободe. Претпостављено је да су у питању три ротациона зглоба, и да су кретања роботских сегмената позната и одређена следећим генералисаним координатама:  $q_1 = t$ ,  $q_2 = \sin(2\pi t)$  и  $q_3 = t^2$ . Слика 2.9 приказује промену генералисаних сила  $Q_i^d$  ( $i = 1, 2, 3$ ) у функцији времена за вредности параметра  $\mu_i \in \{0; 0,3; 0,6; 0,9\}$ , и за  $\beta_{mi}^\mu = 7.7$ ,  $i = 1, 2, 3$  [91].



Слика 2.9 Генералисане силе  $Q_i^d$  за различите вредности параметра  $\mu_i$

#### 2.7.4 Генералисане силе од система погонских сила

Управљање кретањем роботских сегмената остварује се помоћу погонских мотора. У случају призматичног зглоба ( $\xi_i = 1$ ) кретање тела ( $V_i$ ) у односу на ( $V_{i-1}$ ) омогућено је дејством погонске силе  $\vec{F}_i^a$ , односно спрегом погонских сила момента  $\vec{M}_i^a$  у случају ротационог зглоба ( $\bar{\xi}_i = 1$ ). Ови вектори делују у правцу јединичног вектора  $\vec{e}_i$ , па можемо писати

$$\vec{F}_i^a = F_i^a \vec{e}_i, \quad \vec{M}_i^a = M_i^a \vec{e}_i, \quad (2.96)$$

где су  $F_i^a$  и  $M_i^a$  пројекције датих вектора на осу translације или ротације  $i$ -тог зглоба. Такође, мотор делује силом  $\vec{F}_i^{*a}$ , односно спрегом сила момента  $\vec{M}_i^{*a}$  на сегмент ( $V_{i-1}$ ), при чему важи

$$\vec{F}_i^{*a} = -\vec{F}_i^a, \quad \vec{M}_i^{*a} = -\vec{M}_i^a. \quad (2.97)$$

С обзиром на колинеарност вектора  $\vec{F}_i^a, \vec{F}_i^{*a}, \vec{M}_i^a, \vec{M}_i^{*a}$  са векторима  $\vec{F}_i^{d,\lambda}, \vec{F}_i^{*d,\lambda}, \vec{M}_i^{d,\mu}, \vec{M}_i^{*d,\mu}$ , и уз претпоставку да имају исте нападне тачке, израз за генералисане силе  $Q_i^a$  система погонских сила може се извести на истоветан начин као у случају дисипативних сила. Стога, понављајући поступак из претходног поглавља, долазимо до израза

$$Q_i^a = \left( \xi_i \vec{F}_i^a + \bar{\xi}_i \vec{M}_i^a \right) \vec{e}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (2.98)$$

или, позивајући се на (2.96),

$$Q_i^a = \xi_i F_i^a + \bar{\xi}_i M_i^a, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.99)$$

## 2.8 Математички модел роботског система са динамиком актуатора

За реализацију кретања роботског система користе се погонски мотори. Најчешће, за погонске моторе у роботици користе се електрични мотори једносмерне струје. У оптималним условима рада, ови мотори обично обезбеђују угаоне брзине великих интензитета при малом обртном моменту. Са друге стране, захтеви кретања роботских сегмената обично подразумевају мале брзине и велике вредности обртних момената. Стога, неопходно је убацити преноснике снаге (у овом случају редукторе) између актуатора и роботских сегмената како би се испунили жељени захтеви. Најчешћи преносници за ротационе зглобове су зупчаници, а ређе заступљени су ремени и ланчани преносни парови, док у случају призматичних зглобова преовладавају пужни преносници снаге.

Погонска сила и погонски спрег сила могу се сматрати управљачким величинама роботског система. Вредности ових величина директно зависе од динамичких особина актуатора и примењеног редуктора. Стога, за прецизнији математички модел роботског манипулатора потребно је узети у обзир и утицаје наведених компоненти, што ће се овде и урадити.

Подсетимо се још једном изведених диференцијалних једначина кретања роботског система и израза (2.50)

$$[A]\{\ddot{q}\} + [B]\{\dot{q}\} = \{Q^g\} + \{Q^c\} + \{Q^d\} + \{Q^a\}, \quad (2.100)$$

где су генерализане силе  $\{Q^g\}$ ,  $\{Q^c\}$ ,  $\{Q^d\}$  и  $\{Q^a\}$  дате са (2.65), (2.77), (2.95) и (2.99), респективно. Понашање механичког дела електромотора може се изразити следећом диференцијалном једначином

$$[J_m]\{\ddot{q}_m\} = \{\tau_m\} - [B_m]\{\dot{q}_m\} - \{\tau_l\}, \quad (2.101)$$



где

-  $[J_m] \in \mathbb{R}^{n \times n}$  представља дијагоналну матрицу која садржи аксијалне моменте инерције мотора,

-  $\{\ddot{\mathbf{q}}_m\} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$  и  $\{\dot{\mathbf{q}}_m\} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$  су вектори чије су компоненте угаона убрзања и угаоне брзине мотора, респективно,

-  $\{\boldsymbol{\tau}_m\} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$  је вектор обртних момената које испоручују мотори,

-  $[B_m] \in \mathbb{R}^{n \times n}$  је дијагонална матрица која садржи коефицијенте вискозног трења у лежиштима мотора, и

-  $\{\boldsymbol{\tau}_l\} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$  представља вектор момената оптерећења којим роботски сегменти делују на осовине мотора.

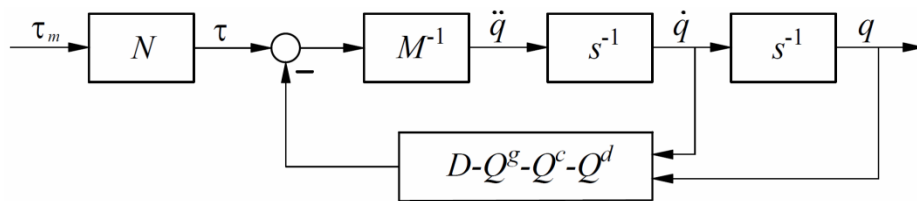
Без губљења на општости, у даљем излагању сматраћемо да су сегменти роботског система повезани ротационим зглобовима. Аналогне резултате, уз незнатне измене, добили бисмо и у случају призматичних зглобова. Сада, ако усвојимо претпоставку о осовинама мотора и роботских сегмената као о апсолутно крутим (нееластичним) телима, онда постоји једноставна веза између мотора, редуктора и кретања роботских сегмената у облику

$$\{\mathbf{q}_m\} = [N]\{\mathbf{q}\}, \quad \{\mathbf{Q}^a\} = [N]\{\boldsymbol{\tau}_l\}, \quad (2.102)$$

где је  $[N] \in \mathbb{R}^{n \times n}$  дијагонална матрица која садржи преносне односе редуктора за сваки зглоб. Убацујући претходне релације, као и израз (2.101) у матричну диференцијалну једначину (2.100), после кратког извођења добијамо

$$[M]\{\ddot{\mathbf{q}}\} + [D]\{\dot{\mathbf{q}}\} - \{\mathbf{Q}^s\} - \{\mathbf{Q}^c\} - \{\mathbf{Q}^d\} = [N]\{\boldsymbol{\tau}_m\}, \quad (2.103)$$

где је  $[M] = [A] + [N]^2 [J_m]$  и  $[D] = [C] + [N]^2 [B_m]$  ( $[M] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $[D] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ). Блок дијаграм резултујућег модела је приказан на слици 2.10.



Слика 2.10 Блок дијаграм роботског манипулатора

У горњем моделу, само механички део актуатора је укључен у динамику роботског система, а његов улазни сигнал је дат са  $\{\tau\} = [N]\{\tau_m\}$ . У стварности, робот се контролише напонским сигналом, а не обртним моментом који ствара мотор. Да бисмо имали реалнији модел робота, потребно је убацити и електричну компоненту актуатора. Одговарајући електрични модел мотора једносмерне струје је описан са

$$[R]\{\mathbf{i}\} + [L]\left\{\frac{d\mathbf{i}}{dt}\right\} + [K_e]\{\dot{\mathbf{q}}_m\} = \{\mathbf{u}\}, \quad (2.104)$$

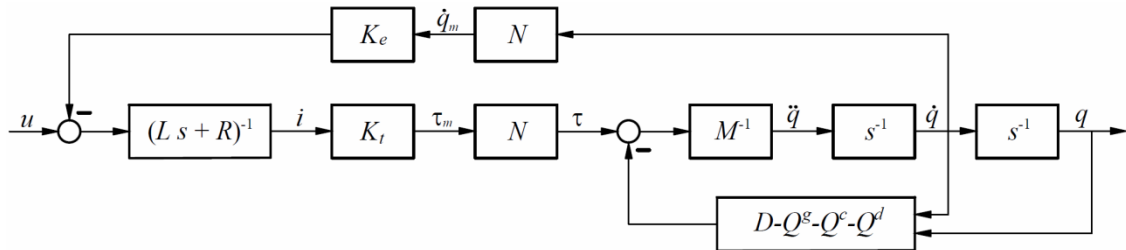
где је

- $[R] \in \mathbb{R}^{n \times n}$  дијагонална матрица која садржи отпоре намотаја ротора,
- $[L] \in \mathbb{R}^{n \times n}$  дијагонална матрица чији елементи изражавају индуктивност намотаја ротора,
- $\{\mathbf{i}\} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$  вектор струје роторског намотаја мотора, а  $\{d\mathbf{i}/dt\}$  представља извод по времену тог вектора,
- $[K_e] \in \mathbb{R}^{n \times n}$  дијагонална матрица која садржи константе електромоторне силе која се индукује при обртању ротора, и
- $\{\mathbf{u}\} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$  вектор напона на крајевима намотаја ротора.

Покретачки момент мотора  $\{\tau_m\}$  је линеарно сразмеран струји роторског намотаја, односно

$$\{\tau_m\} = [K_t]\{\mathbf{i}\}, \quad (2.105)$$

где  $[K_t] \in \mathbb{R}^{n \times n}$  представља дијагоналну матрицу са константама обртног момента. Повезујући изразе (2.105) и (2.104) са (2.103), коначно долазимо до модела роботског система са интегрисаном динамиком актуатора чији је блок дијаграм приказан на слици 2.11.



Слика 2.11 Блок дијаграм роботског манипулатора са динамиком актуатора

## 2.9 Линеарни математички модел роботског система

Веома једноставан начин пројектовања управљачког система роботског манипулатора јесте да се узме у обзир само динамика актуатора, а да се занемари нелинеарна динамика робота. У овом приступу, угаоне позиције мотора су управљане величине, и под важећом претпоставком о крутости осовина може се лако управљати позицијом роботских сегмената. Моменти оптерећења  $\{\tau_i\}$  којим роботски сегменти делују на осовине мотора сматрају се поремећајним величинама. Овакав приступ има предност зато што је модел који се користи линеаран и распрегнут. Његова мана, са друге стране, јесте што занемарена динамика робота може имати дестабилишући ефекат на систем. Међутим, ако се користе актуатори са великим редукционим односом, утицај нелинеарне динамике робота на моторе је занемарив, и овај приступ добија на значају. Да бисмо то доказали, напишимо једначину (2.103) у нешто другачијем облику као

$$[N]^2 ([J_m]\{\ddot{q}\} + [B_m]\{\dot{q}\}) + [A]\{\ddot{q}\} + [C]\{\dot{q}\} - \{Q^g\} - \{Q^c\} - \{Q^d\} = [N]\{\tau_m\}, \quad (2.106)$$

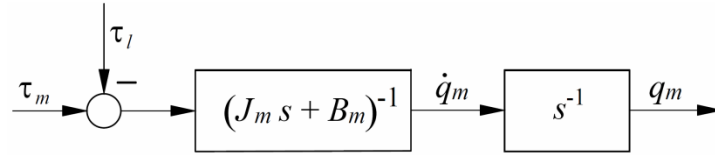
одакле, после мало сређивања и користећи везу  $\{q_m\} = [N]\{q\}$ , добијамо

$$[J_m]\{\ddot{q}_m\} + [B_m]\{\dot{q}_m\} = \{\tau_m\} - \left( [N^2]^{-1} ([A]\{\ddot{q}_m\} + [C]\{\dot{q}_m\}) - [N]^{-1}\{\mathcal{Q}^g\} - [N]^{-1}\{\mathcal{Q}^c\} - [N]^{-1}\{\mathcal{Q}^d\} \right). \quad (2.107)$$

Упоредујући горњи израз са (2.101), закључујемо да важи

$$\{\tau_l\} = [N^2]^{-1} ([A]\{\ddot{q}_m\} + [C]\{\dot{q}_m\}) - [N]^{-1} (\{\mathcal{Q}^g\} + \{\mathcal{Q}^c\} + \{\mathcal{Q}^d\}), \quad (2.108)$$

где се види како преносни однос редуктора утиче на момент оптерећења  $\{\tau_l\}$ . Сада се механички део електромотора може представити у виду блок дијаграма као што приказује слика 2.12.



Слика 2.12 Блок дијаграм механичког дела електромотора

Ако дијагоналну матрицу  $[N]$  дефинишемо као

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & N_n \end{bmatrix}, \quad (2.109)$$

где  $N_i$ ,  $i=1, \dots, n$ , представља редукцију између мотора и роботског сегмента  $i$ -тог зглоба, онда израз (2.108) можемо написати у форми

$$\{\tau_l\} = [A_l]\{\ddot{q}_m\} + [C_l]\{\dot{q}_m\} - \{\mathcal{Q}_l^g\} - \{\mathcal{Q}_l^c\} - \{\mathcal{Q}_l^d\}, \quad (2.110)$$

где је

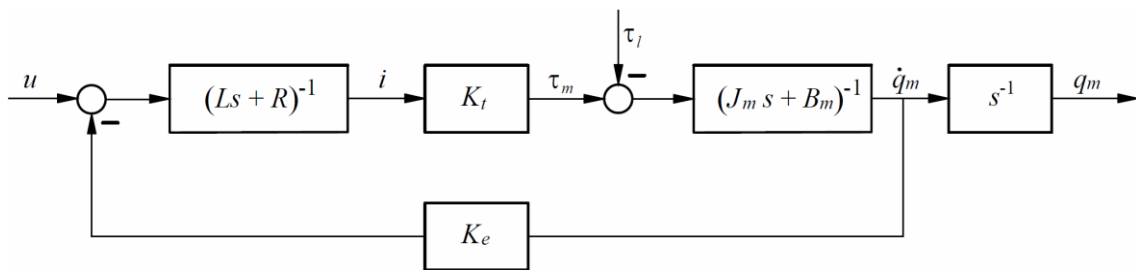
$$[A_l] = \begin{bmatrix} \frac{a_{11}}{N_1^2} & \frac{a_{12}}{N_1^2} & \dots & \frac{a_{1n}}{N_1^2} \\ \frac{a_{21}}{N_2^2} & \frac{a_{22}}{N_2^2} & \dots & \frac{a_{2n}}{N_2^2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{a_{n1}}{N_n^2} & \frac{a_{n2}}{N_n^2} & \dots & \frac{a_{nn}}{N_n^2} \end{bmatrix}, \quad [C_l] = \begin{bmatrix} \frac{c_{11}}{N_1^2} & \frac{c_{12}}{N_1^2} & \dots & \frac{c_{1n}}{N_1^2} \\ \frac{c_{21}}{N_2^2} & \frac{c_{22}}{N_2^2} & \dots & \frac{c_{2n}}{N_2^2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{c_{n1}}{N_n^2} & \frac{c_{n2}}{N_n^2} & \dots & \frac{c_{nn}}{N_n^2} \end{bmatrix}, \quad (2.111)$$

и

$$\{\mathbf{Q}_l^g\} = \begin{Bmatrix} Q_1^g/N_1 \\ Q_2^g/N_2 \\ \vdots \\ Q_n^g/N_n \end{Bmatrix}, \quad \{\mathbf{Q}_l^c\} = \begin{Bmatrix} Q_1^c/N_1 \\ Q_2^c/N_2 \\ \vdots \\ Q_n^c/N_n \end{Bmatrix}, \quad \{\mathbf{Q}_l^d\} = \begin{Bmatrix} Q_1^d/N_1 \\ Q_2^d/N_2 \\ \vdots \\ Q_n^d/N_n \end{Bmatrix}. \quad (2.112)$$

Релације (2.111) и (2.112) показују да се у случају зупчаника са великим преносним односом (обично  $N_i$  узима вредност од неколико десетина до неколико стотина) утицај коефицијената метричког тензора и елемената матрице  $[C]$  на осовину  $i$ -тог мотора се редукује за фактор  $1/N_i^2$ , док се утицај спољашњих и дисипативних сила роботског система редукује за фактор  $1/N_i$ . Другим речима, присуство редуктора тежи да линеаризује динамичке једначине кретања манипулатора.

Узимајући у обзир и електричну компоненту мотора описану изразима (2.104) и (2.105), долазимо до коначног модела актуатора чији блок дијаграм је приказан на слици 2.13.



Слика 2.13 Блок дијаграм мотора једносмерне струје

Претходна разматрања указују да се управљање роботског манипулатора своди на проблем управљања моторима. На понашање једног мотора не утиче динамика других мотора, као што је то случај са кретањем роботских сегмената. То даље значи да је у случају редукције великог степена понашање роботског система довољно тачно описано са  $n$  независних диференцијалних једначина кретања мотора. Изразимо сад те диференцијалне једначине понашања у комплексном домену. На основу горње слике, преносна функција  $i$ -тог електромотора износи

$$G_{pi}(s) = \frac{q_{mi}(s)}{u_i(s)} = \frac{k_{ti}}{(\ell_i s + r_i)(j_{mi} s + b_{mi}) + k_{ti} k_{ei}} \frac{1}{s}, \quad i=1, \dots, n, \quad (2.113)$$

при чему  $q_{mi} \in \{\mathbf{q}_m\}$ ,  $u_i \in \{\mathbf{u}\}$ ,  $k_{ti} \in K_t$ ,  $k_{ei} \in K_e$ ,  $j_{mi} \in J_m$ ,  $b_{mi} \in B_m$ ,  $\ell_i \in L$  и  $r_i \in R$ .

Горњи израз може се написати и на следећи начин

$$G_{pi}(s) = \frac{k_{mi}}{(T_{1i} s + 1)(T_{2i} s + 1)} \frac{1}{s}, \quad (2.114)$$

где је  $k_{mi} = 1/k_{ei}$ , уз претпоставку да се коефицијент вискозног трења  $b_{mi}$  осовине мотора у његовим лежиштима може занемарити у односу на друге параметре мотора. Такође, и индуктивност роторског намотаја се врло често може занемарити, чиме једна временска константа у горњем изразу постаје доминантнија у односу на другу, (нпр.  $T_{1i} \gg T_{2i}$ ). У том случају, преносна функција мотора постаје

$$G_{pi}(s) = \frac{q_{mi}(s)}{u_i(s)} = \frac{k_{mi}}{T_{mi} s + 1} \frac{1}{s}, \quad i=1, \dots, n, \quad (2.115)$$

при чему је  $T_{mi} = \max(T_{1i}, T_{2i})$ . Можемо овде напоменути и да је

$T_{mi} \approx T_{mech} = \frac{j_i r_i}{k_{ti} k_{ei}}$ , где се са  $T_{mech}$  у литератури обично означава механичка

константа електромотора [108]. Поред ње, дефинише се и електрична

константа мотора  $T_{elec} = \frac{\ell_i}{r_i}$ , за коју због горњих претпоставки важи

$T_{elec} \ll T_{mech}$ . Преносна функција (2.115) са довољном тачношћу описује

понашање мотора, па ће се тај израз уместо израза (2.113) користити за пројектовање управљачког система.

### 3. Примена методе Д-разлагања у стабилизацији механичких система

Један од основних захтева у теорији управљања јесте стабилност система, односно подешавање параметара управљачког система у циљу остварења датог захтева. Метода Д-разлагања је један од многих приступа за решавање овог проблема. Основна идеја те методе јесте одређивање скупа свих вредности подешљивих параметара управљачког система за које је разматрани систем стабилан. Тиме добијамо области у параметарској равни оивичене отвореним или затвореним контурама које представљају потенцијалне области стабилности [109]. Коришћењем познатих поступака за испитивање стабилности система, утврђује се која од добијених области, ако постоји, представља тражену област стабилности.

Овде ћемо се ограничити на примену методе Д-разлагања за линеарне фракционе системе [110,111], тј. посматра се стационарни континуални линеарни систем фракционог реда са концентрисаним параметрима. Карактеристични полином једног таквог система се може написати у следећој форми.

$$f(s) = a_m s^{b_m} + \dots + a_k s^{b_k} + \dots + a_1 s^{b_1} + a_0 = 0, \quad (3.1)$$

где је  $m$  је ред система,  $s$  комплексна променљива, а  $a_k$  и  $b_k$  ( $k=0,1,\dots,m$ ) су линеарне функције подешљивих параметара, и при томе важи  $b_0=0$  и  $b_1 < b_2 < \dots < b_m$ .

#### 3.1 Основе методе Д-разлагања

Руски научник Неимарк је установио методу Д-разлагања тако што је, уопштавајући раније постојеће резултате [29], дозволио да се два подешљива параметра  $\alpha$  и  $\beta$  нађу у било ком коефицијенту карактеристичне једначине,

[31,32]. Његова основна идеја била је да се у параметарској равни  $(\alpha, \beta)$  одреди скуп свих вредности подешљивих параметара за које је дати систем, описан својом карактеристичном једначином, стабилан. Познато је да је услов да се систем нађе на граници стабилности да његова карактеристична једначина нема корена са позитивним реалним деловима, а да поседује један или више једноструких корена на имагинарној оси  $s$ -равни. Тај услов, имајући у виду једначину (3.1), може се изразити релацијом

$$f(j\omega) = u(\omega) + jv(\omega) = 0, \quad (3.2)$$

односно,

$$u(\omega) = 0, \quad v(\omega) = 0. \quad (3.3)$$

Подешљиви параметри  $\alpha$  и  $\beta$ , чији утицај на стабилност система желимо да анализирамо [112], садржани су у коефицијентима карактеристичне једначине, што се може писати као

$$a_k = a_k(\alpha, \beta), \quad k = 0, 1, \dots, m. \quad (3.4)$$

Једначине (3.3) сада постају

$$u(\omega, \alpha, \beta) = 0, \quad v(\omega, \alpha, \beta) = 0. \quad (3.5)$$

па њиховим решавањем по  $\alpha$  и  $\beta$  добијамо

$$\alpha = f_1(\omega), \quad \beta = f_2(\omega). \quad (3.6)$$

Мењајући учестаност  $\omega$  од 0 до  $\infty$ , у равни параметара  $\alpha$  и  $\beta$  се помоћу горњих релација могу нацртати криве линије, које се називају кривама декомпозиције или кривама разлагања. Кажемо да оне декомпонују, односно деле параметарску раван  $(\alpha, \beta)$  на више области, при чему свака од тих области има тачно одређен број корена карактеристичне једначине који се налазе у левој (или десној) полуравни  $s$ -равни.

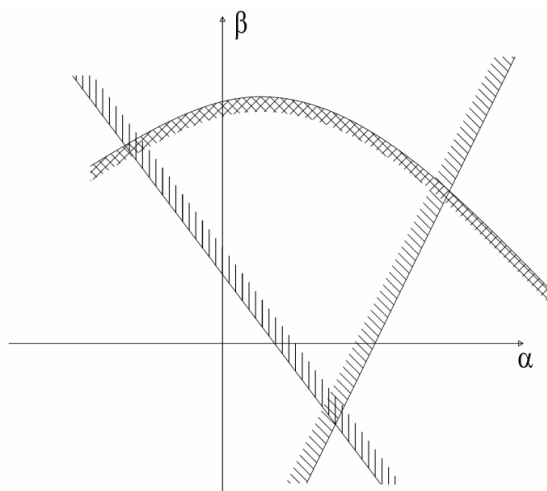
Криве декомпозиције можемо тумачити и као геометријска места тачака у параметарској равни за које карактеристична једначина система има као



решења корене на имагинарној оси. Област са једне стране криве разлагања карактерише један или два корена више у левој полуравни  $s$ -равни него у области са супротне стране ове криве. Да бисмо знали тачно који број корена је у питању, уводимо правило шрафирања датих кривих: шрафура је увек окренута ка области у којој се налази већи број стабилних полова преносне функције система у односу на другу суседну област (слика 3.1). Шрафура се наноси према следећем правилу, које наводимо без доказа [109,112]. Ако апсцисна оса параметарске равни садржи вредности параметра  $\alpha$ , а ордината параметра  $\beta$ , тада се шрафура наноси у смеру зависном од знака Јакобијана

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial \alpha} & \frac{\partial u}{\partial \beta} \\ \frac{\partial v}{\partial \alpha} & \frac{\partial v}{\partial \beta} \end{vmatrix}. \quad (3.7)$$

Ако је при кретању дуж криве разлагања вредност Јакобијана позитивна, шрафура се наноси са леве стране гледано у смеру пораста учестаности  $\omega$ . Супротно томе, ако је вредност Јакобијана негативна, шрафура се наноси са десне стране гледано у смеру пораста учестаности. Шрафура је једнострука ако крива разлагања представља геометријско место једног реалног корена, ако пак представља пар коњуговано комплексних корена карактеристичне једначине онда је у питању двострука шрафура.



Слика 3.1 Криве разлагања у  $(\alpha, \beta)$  параметарској равни

Потенцијална област стабилности је она област којој одговара највећи број корена карактеристичне једначине у левој полуравни  $s$ -равни. Да би она то заиста и била, потребно је изабрати произвољну тачку унутар те области и доказати да за њу карактеристична једначина има све корене са негативним реалним деловима, тј. да број корена у потенцијалној области одговара реду система  $m$ . Ако је тај број мањи од  $m$ , то онда значи да не постоји ни један пар вредности параметара  $\alpha$  и  $\beta$  за који ће посматрани систем бити стабилан. Тада кажемо да је систем структурно нестабилан. Потврду да је потенцијална област стабилности заиста област стабилности можемо добити применом неког од алгебарских (Раус, Хурвиц), графо-аналитичких (Најквист) критеријума, или нумеричком симулацијом.

У даљем излагању ограничићемо се на случај када су параметри  $\alpha$  и  $\beta$  у међусобно линеарној вези у коефицијентима карактеристичне једначине. Тада за релације (3.4) можемо писати

$$a_k(\alpha, \beta) = c_k \alpha + d_k \beta + e_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, m, \quad (3.8)$$

где су коефицијенти  $c_k$ ,  $d_k$  и  $e_k$  познате константе. После замене (3.8) у једначину (3.1), добијамо

$$f(s) = \alpha P(s) + \beta Q(s) + R(s) = 0, \quad (3.9)$$

где су сада  $P(s)$ ,  $Q(s)$  и  $R(s)$  полиноми у функцији комплексне променљиве  $s$  са реалним коефицијентима. Замењујући  $s = j\omega$  у (3.9) и изједначавајући реални и имагинарни део са нулом, добијају се следеће једначине

$$\begin{aligned} \alpha P_1(\omega) + \beta Q_1(\omega) + R_1(\omega) &= 0, \\ \alpha P_2(\omega) + \beta Q_2(\omega) + R_2(\omega) &= 0, \end{aligned} \quad (3.10)$$

где је  $P(j\omega) = P_1(\omega) + jP_2(\omega)$ ,  $Q(j\omega) = Q_1(\omega) + jQ_2(\omega)$  и  $R(j\omega) = R_1(\omega) + jR_2(\omega)$ .

Решавајући горње једначине по параметрима  $\alpha$  и  $\beta$  добијамо

$$\alpha = \frac{Q_1(\omega)R_2(\omega) - Q_2(\omega)R_1(\omega)}{\Delta},$$

$$\beta = \frac{R_1(\omega)P_2(\omega) - R_2(\omega)P_1(\omega)}{\Delta},$$
(3.11)

где је

$$\Delta = \begin{vmatrix} P_1(\omega) & Q_1(\omega) \\ P_2(\omega) & Q_2(\omega) \end{vmatrix} = P_1(\omega)Q_2(\omega) - Q_1(\omega)P_2(\omega).$$
(3.12)

При том су могући следећи случајеви:

1. Детерминанта  $\Delta$  је различита од нуле, а  $R_1$  и  $R_2$  нису истовремено једнаки нули. Једначине (3.10) су тада линеарно независне и њихово решење (3.11) за дато  $\omega$  описује тачку у  $(\alpha, \beta)$  равни.
2. За неку вредност  $\omega^*$  детерминанта  $\Delta$  је једнака нули, а бројиоци у изразима (3.11) нису једновремено једнаки нули. Тада једначине (3.10) постају несагласне, па немају коначно решење.
3. При некој вредности  $\omega^{**}$  бројиоци израза (3.11) и детерминанта  $\Delta$  постају истовремено једнаки нули, па параметри  $\alpha$  и  $\beta$  постају неодређени. Тада, као што знамо, једначине (3.10) постају линеарно зависне. Пошто једна од једначина постаје сувишна, постоји бесконачно много решења система (3.11) за дато  $\omega^{**}$ , а та решења су описана правом линијом

$$\alpha P_1 + \beta Q_1 + R_1 = 0$$
(3.13)

која се назива сингуларна права [42]. Она не припада фамилији кривих разлагања, пошто све тачке те праве имају исту вредност учестаности  $\omega^{**}$ , па не можемо одредити кретање дуж праве у смеру пораста  $\omega$ . Приметимо да вредности  $\omega = 0$  одговара сингуларна права у  $(\alpha, \beta)$  равни. Она се може директно добити из једначина (3.10)

$$\alpha P_1(0) + \beta Q_1(0) + R_1(0) = 0,$$

$$\omega(\alpha P_{20}(0) + \beta Q_{20}(0) + R_{20}(0)) = 0.$$
(3.14)

Лако запажамо да сингуларна права (3.14) одговара слободном члану карактеристичне једначине (3.1) изједначеном са нулом:  $a_0(\alpha, \beta) = c_0\alpha + d_0\beta + e_0 = 0$ . Другим речима, ова права представља геометријско место тачака у параметарској равни за које је решење карактеристичне једначине један прост корен  $s = 0$  у координатном почетку  $s$ -равни.

Поред  $\omega = 0$ , сингуларна права се може појавити и за вредност учестаности  $\omega$  која је различита од нуле. Прелазак преко такве праве у  $(\alpha, \beta)$  равни одговара преласку пара комплексних корена карактеристичне једначине преко имагинарне осе из једне полуравни  $s$ -равни у другу.

Такође, за вредност  $\omega = \infty$  може се појавити сингуларна права. Тада један од параметара  $\alpha$  или  $\beta$  (или оба) постоји у коефицијенту  $a_m$  најстаријег члана карактеристичне једначине (3.1). Једначина ове праве се лако добија из услова  $a_m(\alpha, \beta) = c_m\alpha + d_m\beta + e_m = 0$ , пошто променом знака  $a_m$  долази до нарушавања услова стабилности система. Можемо рећи да у овом случају сингуларна права представља границу у параметарској равни када један корен карактеристичне једначине прелази кроз бесконачност из једне полуравни  $s$ -равни у другу [113].

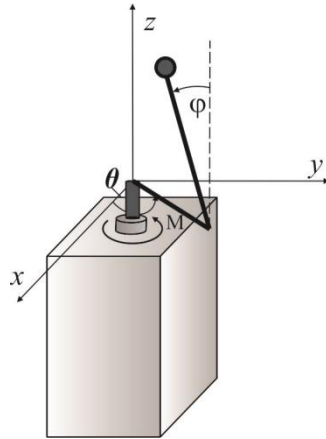
## 3.2 Стабилизација ротационог инверзног клатна

Сада ће се применити метода Д-разлагања за стабилизацију механичких система типа инверзног клатна. Прво ће се размотрити ротационо инверзно клатно. Ради се о механичком систему са два степена слободе.

### 3.2.1 Математички модел ротационог инверзног клатна

Шематски приказ ротационог инверзног клатна дат је на слици 3.2. Овај механички систем познат је у литератури и као Фурутино клатно [114]. Састоји се из хоризонталне руке и вертикалног клатна, чији су угаони помераји означени са  $\theta$  и  $\varphi$ , респективно. Механички системи типа инверзног клатна су компликовани објекти за управљање зато што им је број управљачких величина мањи од броја степени слободе. У случају Фурутиног

клатна управљачки спрег сила момента  $M$  делује на руку, а на клатно не делује директно управљачка величина. Значи, систем поседује две излазне величине ( $\theta$  и  $\varphi$ ), један управљачки сигнал ( $M$ ), и описан је са четири величине стања које су представљене вектором  $x = [\theta, \dot{\theta}, \varphi, \dot{\varphi}]^T$ .



Слика 3.2 Шематски приказ Фурутиног клатна

Параметри система су следећи:  $m_1$ -маса руке,  $m_2$ -маса клатна,  $R_1$ -растојање између тачке вешања руке и тачке вешања клатна,  $R_2$ -растојање између тачке вешања клатна и његовог краја,  $2r_1, 2r_2$ -укупна дужина руке и клатна, респективно,  $J_{\zeta_1}$ -аксијални момент инерције руке за осу  $\zeta_1$  која пролази кроз средиште маса руке,  $J_{\xi_2}, J_{\eta_2}, J_{\zeta_2}$ -аксијални моменти инерције клатна за осе  $\xi_2, \eta_2, \zeta_2$  респективно, у односу на средиште маса клатна.

Ако за генералисане координате  $q_1$  и  $q_2$  усвојимо угаоне помераје  $\theta$  и  $\varphi$ , респективно, онда једначине кретања ротационог инверзног клатна у коваријантој форми гласе

$$\sum_{\alpha=1}^n a_{\gamma\alpha} \ddot{q}_\alpha + \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n \Gamma_{\alpha\beta,\gamma} \dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta = Q_\gamma^g + Q_\gamma^a, \quad \gamma = 1, 2, \quad (3.15)$$

где  $a_{\alpha\beta}$  представља коефицијент метричког тензора, а са  $\Gamma_{\alpha\beta,\gamma}$  ( $\alpha, \beta, \gamma = 1, 2$ ) је означен Кристофелов симбол прве врсте. На десној страни једначине (3.15) су приказане генералисане гравитационе и управљачке силе, респективно.

Записане у развијеној форми, једначине кретања Фурутиног клатна сада постају

$$a_{11}\ddot{\theta} + a_{12}\ddot{\varphi} + 2\Gamma_{12,1}\dot{\theta}\dot{\varphi} + \Gamma_{22,1}\dot{\varphi}^2 = Q_1^a, \quad (3.16)$$

$$a_{12}\ddot{\theta} + a_{22}\ddot{\varphi} - \Gamma_{12,1}\dot{\theta}^2 = Q_2^g, \quad (3.17)$$

где су

$$\begin{aligned} a_{11} &= J_{\varphi_1} + J_{\eta_2} \sin^2(\varphi) + J_{\varphi_2} \cos^2(\varphi) + m_2 R_1^2 + m_1 (R_1 - r_1)^2 \\ &\quad + m_2 (R_2 - r_2)^2 \sin^2(\varphi), \\ a_{12} &= -m_2 R_1 (R_2 - r_2) \cos(\varphi) = -K_3 \cos(\varphi), \\ a_{22} &= J_{\varphi_2} + m_2 (R_2 - r_2)^2 = K_4, \\ \Gamma_{12,1} &= 0,5 (m_2 (R_2 - r_2)^2 + J_{\eta_2} - J_{\varphi_2}) \sin(2\varphi) = K_2 \sin(2\varphi), \\ \Gamma_{22,1} &= m_2 R_1 (R_2 - r_2) \sin(\varphi) = K_3 \sin(\varphi), \\ Q_2^g &= m_2 g (R_2 - r_2) \sin(\varphi) = K_1 \sin(\varphi), \\ Q_1^a &= M. \end{aligned} \quad (3.18)$$

У горњим једначинама параметри  $K_1, K_2, K_3, K_4$  представљају физичке константе система. Анализом једначина кретања можемо утврдити да Фурутино клатно поседује бесконачан број равнотежних положаја [115], при чему стабилним положајима одговара угао клатна  $\varphi_{e1} = \pi$  и произвољан положај хоризонталне руке, тј.  $x_{e1} = [\theta, 0, \pi, 0]^T, \forall \theta \in \mathbb{R}$ . Нестабилни равнотежни положаји описани су вектором стања  $x_{e2} = [\theta, 0, 0, 0]^T, \forall \theta \in \mathbb{R}$ . Циљ управљања је стабилизација клатна око нестабилног равнотежног положаја са условом  $\theta = 0$ , што чини проблем овај проблем додатно тежим.

### 3.2.2 Анализа стабилности ротационог инверзног клатна методом Д-разлагања

Управљање инверзним клатном се обично дели на фазу подизања клатна и фазу стабилизације истог. У фази подизања потребно је довести клатно из доњег равнотежног положаја у положај близак горњем равн. положају. У другом фази, када је клатно довољно близу горњег вертикалног положаја, управљачки систем за стабилизацију се активира и доводи клатно у жељени

положај. Проблем подизања клатна овде неће бити разматран, већ само његова стабилизација око горњег нестабилног положаја равнотеже.

Пре примене методе Д-разлагања примениће се парцијална *feedback* линеаризација [116], која има за циљ да поједностави горе изведене једначине кретања. Ако израчунамо  $\ddot{\theta}$  из једн. (3.17) и убацимо у (3.16), добијамо

$$\frac{a_{11}}{a_{12}}(Q_2^g + \Gamma_{12,1}\dot{\theta}^2) + \left(a_{12} - \frac{a_{11}a_{22}}{a_{12}}\right)\ddot{\phi} + 2\Gamma_{12,1}\dot{\theta}\dot{\phi} + \Gamma_{22,1}\dot{\phi}^2 = M. \quad (3.19)$$

Управљачки момент  $M$  бирамо у следећем облику

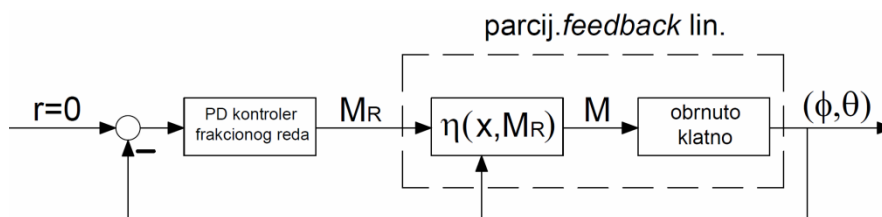
$$M = \frac{a_{11}}{a_{12}}(Q_2^g + \Gamma_{12,1}\dot{\theta}^2) + \left(a_{12} - \frac{a_{11}a_{22}}{a_{12}}\right)M_R + 2\Gamma_{12,1}\dot{\theta}\dot{\phi} + \Gamma_{22,1}\dot{\phi}^2, \quad (3.20)$$

где је  $M_R$  нови управљачки сигнал. Сада, убацујући горњи израз за  $M$  у (3.16) и (3.17), једначине ротационог инверзног клатна постају

$$\ddot{\theta} \cos(\varphi) = -\frac{K_1}{K_3} \sin(\varphi) - \frac{K_2}{K_3} \sin(2\varphi)\dot{\theta}^2 + \frac{K_4}{K_3} M_R, \quad (3.21)$$

$$\ddot{\phi} = M_R. \quad (3.22)$$

Идеја парцијалне *feedback* линеаризације илустрована је у форми блок дијаграма на слици 3.3. Повратна спрега типа  $M = \eta(x, M_R)$  линеаризује нелинеарну динамику система, па добијамо линеарну везу између сигнала  $M_R$  и излаза  $\varphi$ . Сада се може увести пропорционално диференцијални (ПД) регулатор нецелобројног типа који ће извршити стабилизацију система [117,118].



Слика 3.3 Шема парцијалне *feedback* линеаризације

Понашање нелинеарног система описаног са једн. (3.21)-(3.22) око равнотежног положаја  $(\theta, \dot{\theta}, \varphi, \dot{\varphi}) = (0, 0, 0, 0)$  можемо испитати линеаризацијом истог око дате тачке. Стога, развијањем нелинеарних чланова у једначини (3.21) у Тејлоров ред добијамо

$$f_1 = \cos(\varphi) \approx \cos(\varphi)|_0 + (\varphi - 0) \frac{df_1}{d\varphi}|_0 = 1, \quad (3.23)$$

$$f_2 = \sin(2\varphi)\dot{\theta}^2 \approx \sin(2\varphi)\dot{\theta}^2|_{0,0} + (\varphi - 0) \frac{\partial f_2}{\partial \varphi}|_{0,0} + (\dot{\theta} - 0) \frac{\partial f_2}{\partial \dot{\theta}}|_{0,0} = 0, \quad (3.24)$$

$$f_3 = \sin(\varphi) \approx \sin(\varphi)|_0 + (\varphi - 0) \frac{df_3}{d\varphi}|_0 = \varphi. \quad (3.25)$$

Дакле, линеаризацијом добијамо следеће једначине

$$\ddot{\theta} = -\frac{K_1}{K_3}\varphi + \frac{K_4}{K_3}M_R, \quad (3.26)$$

$$\ddot{\varphi} = M_R. \quad (3.27)$$

Користећи Љапуновљеву индиректну теорему [116], ако је линеаризовани систем описан са (3.26)-(3.27) асимптотски стабилан, онда је равнотежно стање нелинеарног система (3.21)-(3.22) локално асимптотски стабилно. У том случају, пројектовани регулатор за линеаризовани систем може се искористити за стабилизацију нелинеарног система, али само у блиској околини равнотежног положаја.

Коришћењем ПД регулатора типа  $M_R = -K_{P\varphi}\varphi - K_{D\varphi}\dot{\varphi}$  може се постићи асимптотска стабилност за  $(\varphi, \dot{\varphi})$ . Лако се закључује да ће клатно бити стабилно за свако  $K_{P\varphi}, K_{D\varphi} > 0$ , али овај регулатор не може да стабилише руку. Као што је већ речено, разлог за то лежи у чињеници да постоје два излаза система  $(\varphi, \theta)$  а једна управљачка величина  $(M_R)$ , због чега потпуна *feedback* линеаризација код оваквих система није могућа. Стога, ново управљање  $M_R$  мора бити такво да се оствари асимптотска стабилност за



$(\varphi, \dot{\varphi}, \theta, \dot{\theta})$ . То се може постићи пропорционално-диференцијалним регулатором нецелобројног типа, односно, уводи се генерализовани ПД регулатор [46,119] у облику

$$M_R = -(K_{P\theta}\theta + K_{D\theta}\theta^\alpha) - (K_{P\varphi}\varphi + K_{D\varphi}\varphi^\beta) + \frac{K_1}{K_4}\varphi, \quad (3.28)$$

где  $\alpha, \beta$  представљају изводе нецелобројног реда, а  $K_{P\theta}, K_{D\theta}, K_{P\varphi}$  и  $K_{D\varphi}$  пропорционална и диференцијална појачања регулатора. Једначине кретања инверзног клатна (3.26) и (3.27) сада постају

$$\ddot{\theta} + \frac{K_4}{K_3}K_{D\theta}\theta^\alpha + \frac{K_4}{K_3}K_{P\theta}\theta = -\frac{K_4}{K_3}K_{D\varphi}\varphi^\beta - \frac{K_4}{K_3}K_{P\varphi}\varphi, \quad (3.29)$$

$$\ddot{\varphi} + K_{D\varphi}\varphi^\beta + \left(K_{P\varphi} - \frac{K_1}{K_4}\right)\varphi = -K_{D\theta}\theta^\alpha - K_{P\theta}\theta. \quad (3.30)$$

Приметимо да се увођењем последњег члана на десној страни једначине (3.28) елиминише члан који садржи  $\varphi$  у (3.26). Класични ПД регулатор добијамо када је  $\alpha = \beta = 1$ . Видимо да фракциони регулатор има укупно шест подешљивих параметара, и то четири коефицијента појачања  $(K_{P\theta}, K_{D\theta}, K_{P\varphi}, K_{D\varphi})$  и два фракциона извода  $(\alpha, \beta)$ . Они се могу мењати да би се постигла апсолутна или релативна стабилност затвореног система управљања. Овде ћемо анализирати утицај параметара  $K_{D\theta}, K_{D\varphi}, \alpha$  и  $\beta$  на стабилност система описаног са (3.29)-(3.30).

Домен стабилности у  $(K_{D\theta}, K_{D\varphi})$  параметарској равни може се испитати користећи технику Д-разлагања [31,32]. Аналитичке изразе за криве разлагања је лако извести јер су ова два параметра у међусобно линеарној вези. Неки прелиминарни резултати примене методе Д-разлагања за роботске системе приказани су у [120]. Карактеристични полином линеаризованог система (3.29)-(3.30) је

$$f(s) = s^4 + s^2 \left( K_4 K_{D\theta} s^\alpha / K_3 + K_{D\varphi} s^\beta \right) - K_1 K_{D\theta} s^\alpha / K_3 + s^2 \left( K_4 K_{P\theta} / K_3 + K_{P\varphi} - K_1 / K_4 \right) - K_1 K_{P\theta} / K_3. \quad (3.31)$$

Криве разлагања деле параметарску раван  $(K_{D\theta}, K_{D\varphi})$  на коначан број региона  $D(k)$ , при чему за сваку тачку у области  $D(k)$  полином (3.31) има тачно  $k$  нула са позитивним реалним делом. Јасно је онда да област  $D(0)$  представља област асимптотске стабилности система. Поред кривих разлагања, јављају се у параметарској равни и сингуларне праве, од којих је једна одређена једначином  $f(0) = 0$ . Закључујемо да полином (3.31) нема нула у координатном почетку ( $s = 0$ ) ако је  $K_{P\theta} \neq 0$ , што овде мора бити случај, јер у супротном систем никад неће бити стабилан.

Да бисмо добили криве разлагања заменићемо  $s = j\omega$  у полиному (3.31) и изједначити га са 0, тј.

$$\omega^4 - \omega^2 \left( K_4 K_{D\theta} (j\omega)^\alpha / K_3 + K_{D\varphi} (j\omega)^\beta \right) - K_1 K_{D\theta} (j\omega)^\alpha / K_3 - \omega^2 \left( K_4 K_{P\theta} / K_3 + K_{P\varphi} - K_1 / K_4 \right) - K_1 K_{P\theta} / K_3 = 0. \quad (3.32)$$

Сада комплексну једначину (3.32) можемо написати као [112]

$$f(j\omega) = u(\omega, \alpha, \beta) + jv(\omega, \alpha, \beta) = 0, \quad (3.33)$$

где  $u(\omega, \alpha, \beta)$  и  $v(\omega, \alpha, \beta)$  представљају реални и имагинарни део једначине (3.32). Чланови  $(j\omega)^\alpha$  и  $(j\omega)^\beta$  који фигуришу у комплексној једначини могу се написати као [47]

$$(j\omega)^\alpha = \omega^\alpha \left( \cos(\alpha\pi/2) + j \sin(\alpha\pi/2) \right), \quad \omega \geq 0. \quad (3.34)$$

Следећи систем једначина добијамо изједначавајући реални и имагинарни део (3.33) са нулом,

$$\begin{bmatrix} U_1(\omega, \alpha, \beta) & U_2(\omega, \alpha, \beta) \\ V_1(\omega, \alpha, \beta) & V_2(\omega, \alpha, \beta) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} K_{D\theta} \\ K_{D\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_1(\omega) \\ Q_2(\omega) \end{pmatrix}, \quad (3.35)$$

где су

$$\begin{aligned}
a &= K_4/K_3, \quad b = K_1/K_3, \\
U_1(\omega, \alpha, \beta) &= (a\omega^2 + b)\omega^\alpha \cos(0,5\alpha\pi), \\
U_2(\omega, \alpha, \beta) &= \omega^{2+\beta} \cos(0,5\beta\pi), \\
V_1(\omega, \alpha, \beta) &= (a\omega^2 + b)\omega^\alpha \sin(0,5\alpha\pi), \\
V_2(\omega, \alpha, \beta) &= \omega^{2+\beta} \sin(0,5\beta\pi), \\
Q_1(\omega) &= \omega^4 - \omega^2(aK_{p\theta} + K_{p\varphi} - b/a) - bK_{p\theta}, \\
Q_2(\omega) &= 0.
\end{aligned} \tag{3.36}$$

Решавајући матричну једначину (3.35) по  $(K_{D\theta}, K_{D\varphi})$  добијамо [42]

$$K_{D\theta} = \frac{\Delta_\theta}{\Delta}, \quad K_{D\varphi} = \frac{\Delta_\varphi}{\Delta}, \tag{3.37}$$

при чему је

$$\Delta = \begin{vmatrix} U_1(\omega, \alpha, \beta) & U_2(\omega, \alpha, \beta) \\ V_1(\omega, \alpha, \beta) & V_2(\omega, \alpha, \beta) \end{vmatrix}, \tag{3.38}$$

$$\Delta_\theta = \begin{vmatrix} Q_1(\omega) & U_2(\omega, \alpha, \beta) \\ 0 & V_2(\omega, \alpha, \beta) \end{vmatrix}, \quad \Delta_\varphi = \begin{vmatrix} U_1(\omega, \alpha, \beta) & Q_1(\omega) \\ V_1(\omega, \alpha, \beta) & 0 \end{vmatrix}. \tag{3.39}$$

Лако можемо добити следећи израз из (3.38)

$$\Delta = (a\omega^2 + b)\omega^{\alpha+\beta+2} \sin(0,5(\beta-\alpha)\pi). \tag{3.40}$$

При промени  $\omega$  од 0 до  $\infty$ , и када важи  $\Delta \neq 0$ , једначине (3.37) описују криву разлагања у  $(K_{D\theta}, K_{D\varphi})$  параметарској равни, при константним вредностима  $K_{p\theta}, K_{p\varphi}, \alpha$  и  $\beta$ . Прелазак преко ове криве одговара преласку два корена карактеристичног полинома у  $s$ -равни из једне полуравни у другу.

Сингуларни случај  $\Delta = 0$  мора се детаљније анализирати. Видимо на основу (3.40) да то важи када је  $\omega = 0$ , или  $\beta - \alpha = k, \forall k = 0, \pm 2, \pm 4, \dots$  У случају када је  $\omega = 0$ , изрази у (3.36) постају

$$\begin{aligned}
U_1(0, \alpha, \beta) &= 0, \quad U_2(0, \alpha, \beta) = 0, \quad Q_1(0) = -bK_{p\theta}, \\
V_1(0, \alpha, \beta) &= 0, \quad V_2(0, \alpha, \beta) = 0, \quad Q_2(0) = 0.
\end{aligned} \tag{3.41}$$

Следи из (3.35) и (3.41) да је  $0 = -bK_{p\theta}$ . Пошто је  $K_{p\theta} \neq 0$ , и такође важи  $b \neq 0$ , закључујемо да систем (3.35) нема реална решења за  $\omega = 0$ . У другом случају добијамо да је  $\Delta = 0$  за  $\beta - \alpha = k$ ,  $\forall k = 0, \pm 2, \pm 4, \dots$ . Ако се ограничимо на вредности параметара  $\alpha$  и  $\beta$  у опсегу  $(0, 2)$ , следи да је  $\beta - \alpha = 0$ , односно  $\beta = \alpha$ , па изрази (3.36) добијају облик

$$\begin{aligned} U_1(\omega, \alpha, \alpha) &= (a\omega^2 + b)\omega^\alpha \cos(0,5\alpha\pi), \\ U_2(\omega, \alpha, \alpha) &= \omega^{2+\alpha} \cos(0,5\alpha\pi), \\ V_1(\omega, \alpha, \alpha) &= (a\omega^2 + b)\omega^\alpha \sin(0,5\alpha\pi), \\ V_2(\omega, \alpha, \alpha) &= \omega^{2+\alpha} \sin(0,5\alpha\pi), \\ Q_1(\omega) &= \omega^4 - \omega^2(aK_{p\theta} + K_{p\phi} - b/a) - bK_{p\theta}, \\ Q_2(\omega) &= 0. \end{aligned} \tag{3.42}$$

Једначине (3.35) сада гласе

$$\omega^\alpha \cos(0,5\alpha\pi) \left[ (a\omega^2 + b)K_{D\theta} + \omega^2 K_{D\phi} \right] = \omega^4 - \omega^2(aK_{p\theta} + K_{p\phi} - b/a) - bK_{p\theta}, \tag{3.43}$$

$$(a\omega^2 + b)K_{D\theta} + \omega^2 K_{D\phi} = 0. \tag{3.44}$$

Обе горње једначине ће бити задовољене само у случају када је

$$d(\omega) = \omega^4 - \omega^2(aK_{p\theta} + K_{p\phi} - b/a) - bK_{p\theta} = 0. \tag{3.45}$$

Сингуларна права је одређена вредношћу  $\omega_s$  за коју важи  $d(\omega_s) = 0$ . Тада добијамо да је  $\Delta = \Delta_\theta = \Delta_\phi = 0$ , па решење није тачка у параметарској равни, већ права линија која се може се добити из (3.43) или (3.44), и гласи

$$K_{D\phi} = - \left( a + \frac{b}{\omega_s^2} \right) K_{D\theta}. \tag{3.46}$$

Конечно, можемо рећи да су криве разлагања и сингуларне праве у  $(K_{D\theta}, K_{D\phi})$  параметарској равни одређене једначинама (3.37) и (3.46), респективно. Потврду изведене анализе потражићемо сада у нумеричкој симулацији.

### 3.2.3 Резултати симулације

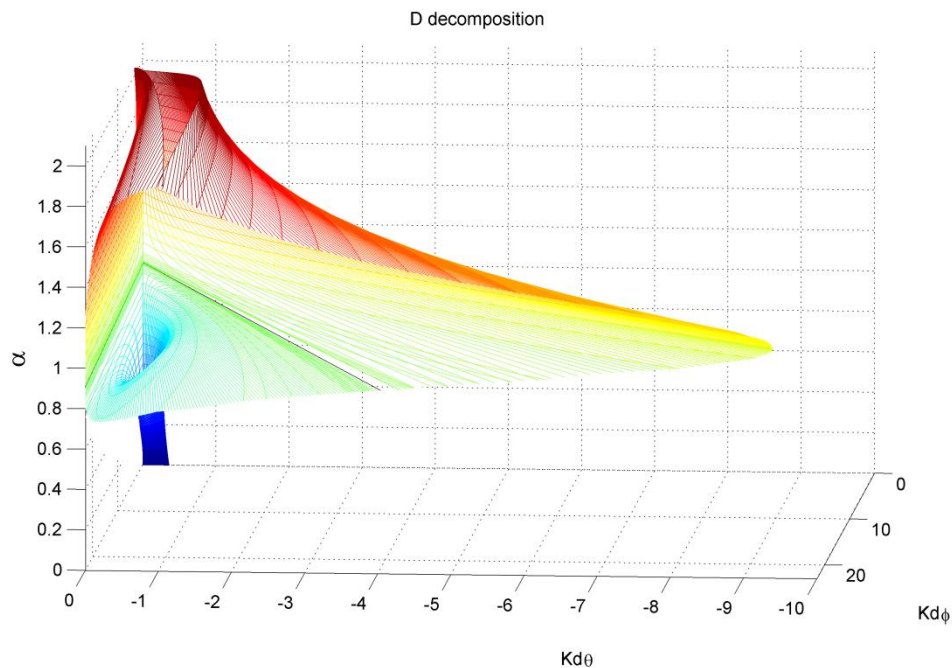
Овде ће бити приказани нумерички резултати стабилизације ротационог инверзног клатна. Физички параметри система  $K_1, K_2, K_3, K_4$  преузети су из лабораторијског модела Фурутиног клатна, и њихове вредности су следеће:  $K_1 = 6,51 \cdot 10^{-2}$ ,  $K_2 = 9,18 \cdot 10^{-4}$ ,  $K_3 = 1,42 \cdot 10^{-3}$  и  $K_4 = 1,83 \cdot 10^{-3}$ . Стабилни и нестабилни домени у  $(K_{D\theta}, K_{D\varphi})$  параметарској равни су добијени процедуром описаном у претходном поглављу. При одређивању домена стабилности  $D(0)$  бира се произвољна тачка у сваком од домена, и затим испитује стабилност полинома (3.31) користећи инверзну Лапласову трансформацију [121]. Ради једноставности, овде ће бити приказан само домен стабилности  $D(0)$ . Такође, ради прегледности шрафирање добијених кривих биће изостављено.

Једначине (3.37) и (3.46) дефинишу у параметарској равни  $(K_{D\theta}, K_{D\varphi})$  области са константним бројем полова у десној (или левој) полуравни. За фиксне вредности  $K_{P\theta}, K_{P\varphi}, \alpha$  и  $\beta$ , рачунамо домен стабилности у  $(K_{D\theta}, K_{D\varphi})$  равни. За испитивање асимптотске стабилности система могли смо уместо параметара  $(K_{D\theta}, K_{D\varphi})$  изабрати било која два од датих шест параметара, и спровести дату анализу. У том смислу, интересантан случај за разматрање наступа када се фракциони изводи  $\alpha$  и  $\beta$  изаберу као параметри уместо параметара  $K_{D\theta}$  и  $K_{D\varphi}$ . У том случају, због међусобно нелинеарне зависности датих параметара, добиле би се две имплицитне нелинеарне једначине чије је решење у затвореном облику тешко наћи. Посебна пажња при решавању овог проблема посвећена је у раду [119], где је предложена алтернативна метода Д-разлагања. Ипак, и овде се може индиректно испитати утицај параметара  $\alpha$  и  $\beta$  на стабилност система користећи процедуру описану у претходном поглављу. Прецизније, ако поновимо методу Д-разлагања у  $(K_{D\theta}, K_{D\varphi})$  параметарској равни за различите вредности параметра  $\alpha$ , при чему параметар  $\beta$  остаје константан, добићемо домен стабилности у

$(K_{D\theta}, K_{D\varphi}, \alpha)$  параметарском простору. Тиме постижемо две квалитативне допуне:

- метода Д-разлагања је проширена и сада се испитује домен стабилности у тродимензионалном простору уместо у равни два параметра,
- параметри чији се утицај на стабилност система испитује су у међусобно нелинеарној вези, а одређивање домена стабилности у равни три параметра се постиже без директног решавања нелинеарних једначина.

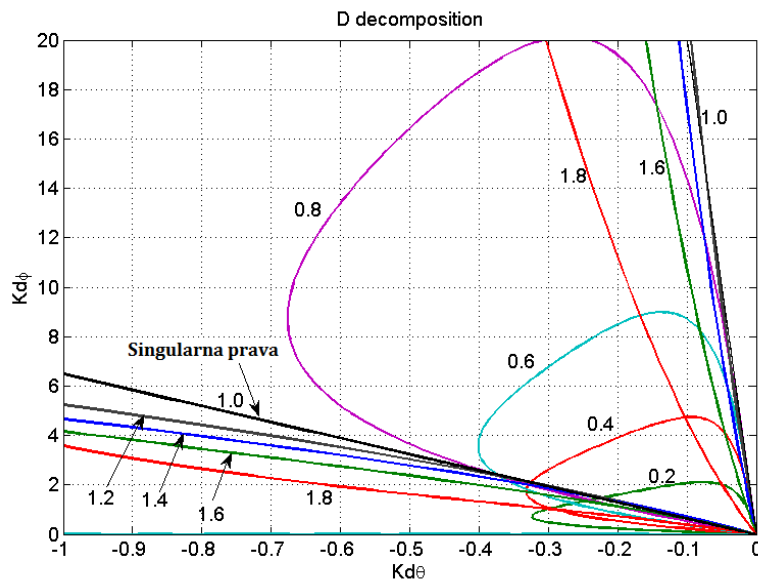
Сада можемо приступити испитивању утицаја параметара  $(K_{D\theta}, K_{D\varphi}, \alpha)$  на стабилност система. Појачања регулатора  $K_{P\theta}$  и  $K_{P\varphi}$  су унапред одређена и износе:  $K_{P\theta} = -0,022$ ,  $K_{P\varphi} = 41,5$ , док је  $\beta = 1$ . Имајући у виду горе описану процедуру, домен стабилности је израчунат за случај  $\alpha \in (0,2)$  и приказан на слици 3.4.



Слика 3.4 3Д домен стабилности за  $\alpha \in (0,2)$ ,  $\beta = 1$

Видимо да се за различите вредности параметра  $\alpha$  добијају различите области стабилности у  $(K_{D\theta}, K_{D\varphi})$  параметарској равни. Један начин на који

можемо изабрати подешљиве параметре регулатора је да изаберемо ону вредност параметра  $\alpha$  која даје највећу област стабилности. Ако поред тога желимо и робустан систем, онда бирамо тачку која се налази дубоко у домену стабилности, јер тиме обезбеђујемо систем са већом резервом стабилности. Да бисмо боље видели како вредност параметра  $\alpha$  утиче на стабилност система, приказани су на слици 3.5 региони стабилности у  $(K_{D\theta}, K_{D\varphi})$  равни.



Слика 3.5 Домен стабилности у 2Д равни за  $\alpha = (0, 2)$ ,  $\beta = 1$

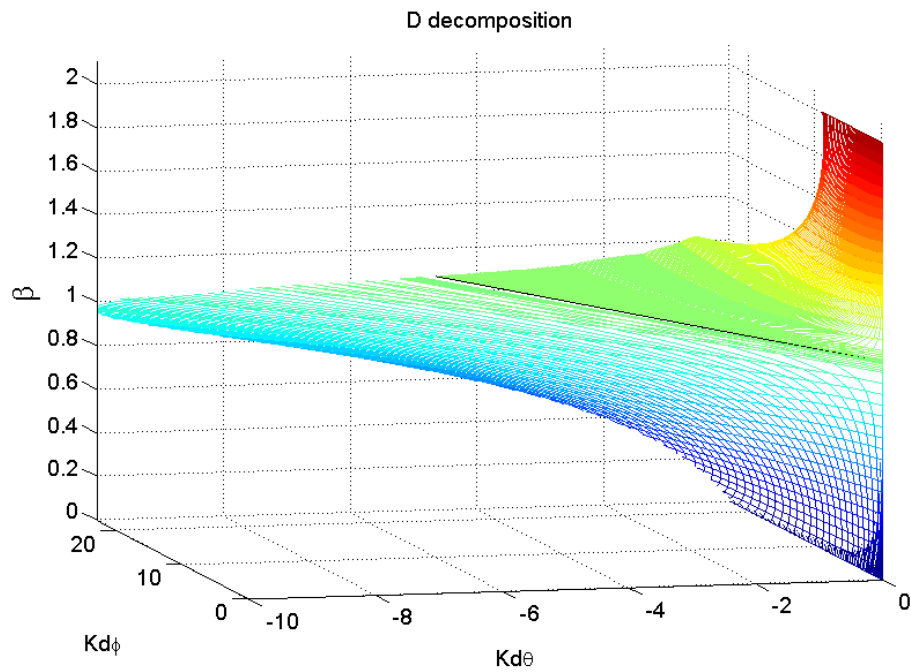
Сингуларне праве се добијају за случај  $\alpha = \beta = 1$ , и износе

$$K_{D\varphi} = -267,2K_{D\theta}, \quad K_{D\varphi} = -9,11K_{D\theta}. \quad (3.47)$$

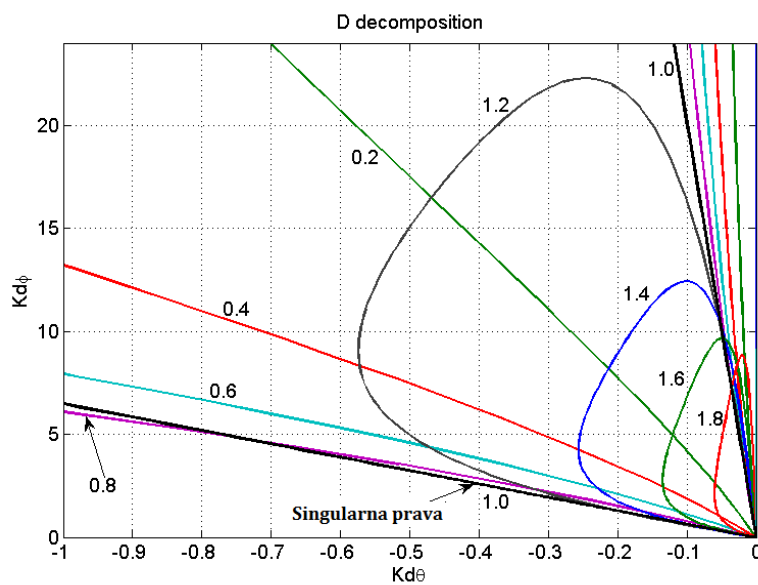
Сада, за константну вредност параметра  $\alpha$  ( $\alpha = 1$ ) варирамо параметар  $\beta$  од 0 до 2 и понављамо горњу процедуру. Добијени регион стабилности у  $(K_{D\theta}, K_{D\varphi}, \beta)$  параметарском простору приказан је на слици 3.6.

Домени стабилности у 2Д равни приказани су на слици 3.7. Видимо да највећем домену стабилности у  $(K_{D\theta}, K_{D\varphi})$  равни одговара  $\beta \approx 1$ . Баш као и у претходном примеру, сингуларне праве су одређене за случај  $\alpha = \beta = 1$ , и описане једначином (3.47). Треба напоменути и да смо уместо  $\alpha = 1$  могли изабрати неку другу константну вредност параметра  $\alpha$ . Ако бисмо усвојили

$\alpha = \alpha^* = \text{const}$ , добили бисмо сличне резултате, али би сингуларне праве одговарале случају  $\beta = \alpha^*$ .



Слика 3.6 3Д домен стабилности за  $\beta = (0, 2)$ ,  $\alpha = 1$



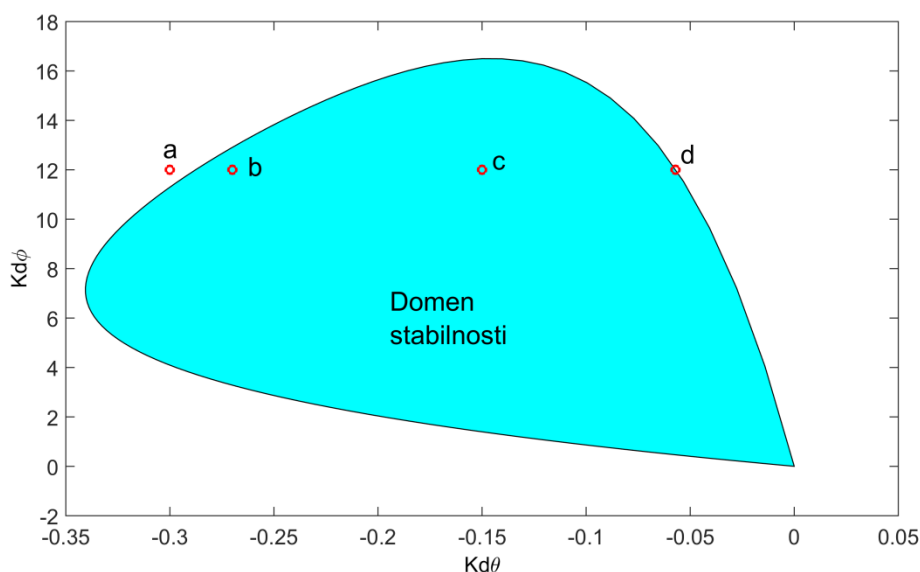
Слика 3.7 Домен стабилности у 2Д равни за  $\beta = (0, 2)$ ,  $\alpha = 1$

На основу Љапуновљеве индиректне теореме [116] следи да ће области стабилности добијене у горњим примерима за систем (3.26)-(3.27) важити и



за нелинеарни систем (3.21)-(3.22), али само у блиској околини равнотежног стања.

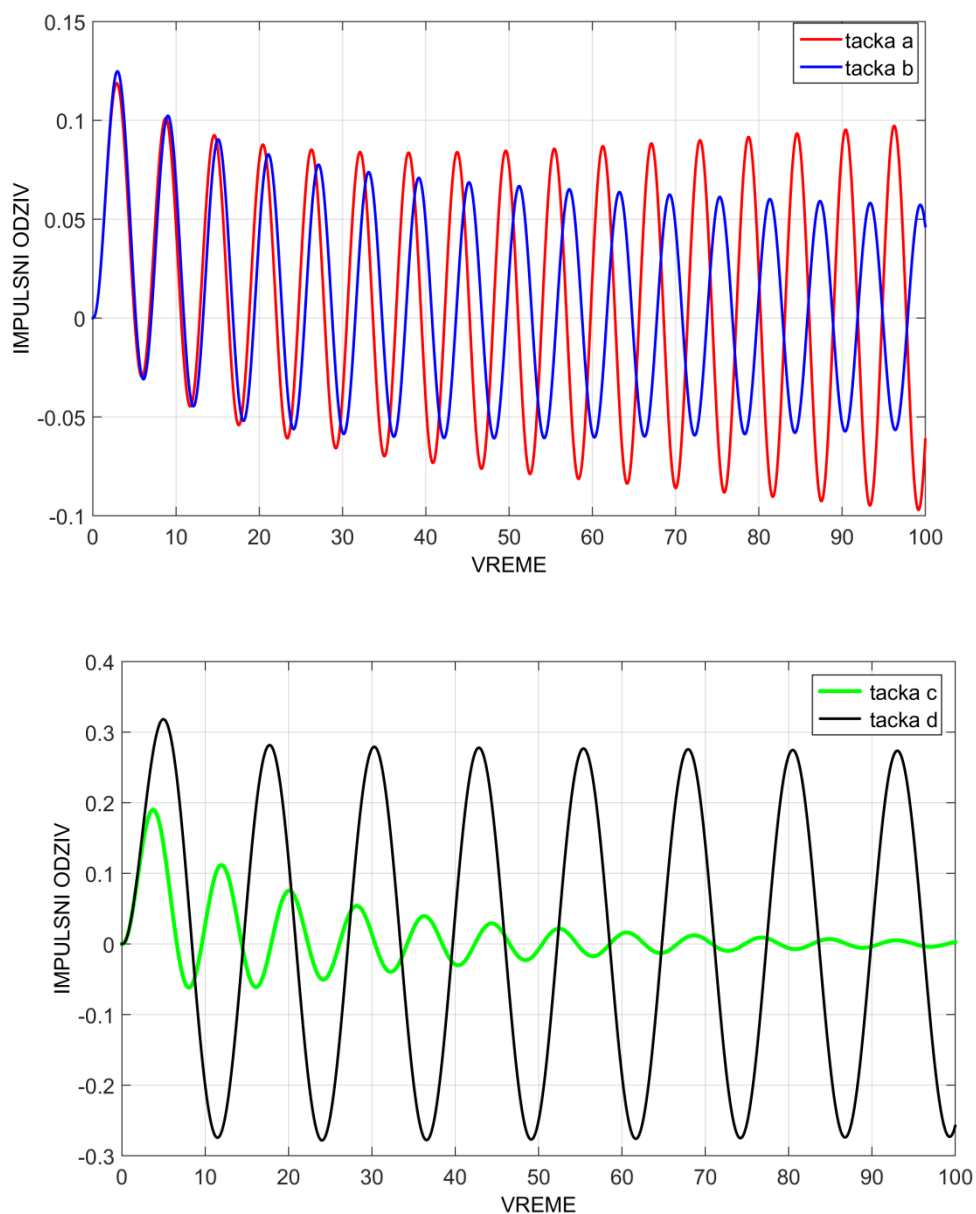
Као што је већ речено, област стабилности  $D(0)$  се одређује тако што бирамо произвољну тачку у датој области и испитујемо стабилност полинома (3.31). Симулације које следе су извршене да би се доказало да су границе стабилности тачно израчунате. На слици 3.8 уочавамо четири различите тачке у  $(K_{D\theta}, K_{D\phi})$  равни за вредности  $\alpha = 0,9$  и  $\beta = 1,1$ .



Слика 3.8 Одређивање домена стабилности

Тачке су означене са  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и  $d$ . Видимо да тачка  $a$  лежи ван домена стабилности. За параметре регулатора  $K_{D\theta}$  и  $K_{D\phi}$  одређене тачкама  $b$  и  $c$  затворени систем управљања је стабилан, док је систем одређен тачком  $d$  на граници стабилности.

Импулсни одзив система одређеног са  $1/f(s)$  може се добити користећи нумеричку инверзну Лапласову трансформацију [121]. Управо такав одзив добијен је за сваку од четири означене тачке и приказан на слици 3.9. Са слике видимо да су се добили очекивани импулсни одзиви, што потврђује чињеницу да су домени стабилности тачно израчунати.



Слика 3.9 Импулсни одзиви система за тачке  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , и  $d$

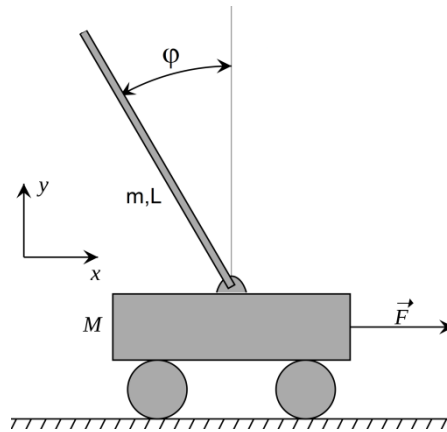
### 3.3 Стабилизација транслаторног инверзног клатна

Слично као у случају ротационог клатна, и овде ће се применити метода Д-разлагања за стабилизацију кретања транслаторног инверзног клатна.

#### 3.3.1 Математички модел транслаторног инверзног клатна

На слици 3.10 дат је шематски приказ транслаторног инверзног клатна. Опет, ради се о механичком систему са два степена слободе. Положаји колица

и клатна означени су са  $x$  и  $\varphi$ , респективно. Хоризонтална сила  $\vec{F}$  која делује на колица је једина управљачка величина, што овај механички систем чини нередундантним са становишта управљања.



Слика 3.10 Транслаторно инверзно клатно

Параметри система су:  $M$  - маса колица,  $m$  - маса клатна,  $L$  - укупна дужина клатна,  $0,5L$  - растојање тачке вешања клатна до центра масе клатна,  $J$  - аксијални момент инерције клатна у односу на тачку вешања клатна,  $k_v$  - коефицијент отпора средине.

За генералисане координате  $q_1$  и  $q_2$  узима се положај колица  $x$  и угао клатна  $\varphi$ , респективно. Диференцијалне једначине кретања транслаторног инверзног клатна гласе

$$\sum_{\alpha=1}^n a_{\gamma\alpha} \ddot{q}_\alpha + \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n \Gamma_{\alpha\beta,\gamma} \dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta = Q_\gamma, \quad \gamma=1,2, \quad (3.48)$$

где су  $a_{\alpha\beta}$ ,  $\Gamma_{\alpha\beta,\gamma}$  и  $Q_\gamma$  познате и већ дефинисане величине. Генералисане силе  $Q_\gamma$  се могу поделити на генералисане силе Земљине теже  $Q_\gamma^g$ , вискозног трења  $Q_\gamma^d$ , и погонских сила  $Q_\gamma^a$ , односно

$$Q_\gamma = Q_\gamma^g + Q_\gamma^d + Q_\gamma^a, \quad \gamma=1,2. \quad (3.49)$$

Диференцијалне једначине кретања транслаторног клатна у развијеној форми гласе

$$(m+M)\ddot{x} - \frac{mL}{2}\ddot{\varphi}\cos(\varphi) + \frac{mL}{2}\dot{\varphi}^2\sin(\varphi) = F, \quad (3.50)$$

$$-\frac{mL}{2}\ddot{x}\cos(\varphi) + \frac{mL^2}{3}\ddot{\varphi} = \frac{mgL}{2}\sin(\varphi) - k_v\dot{\varphi}, \quad (3.51)$$

где су

$$a_{11} = m+M, \quad a_{12} = -\frac{mL}{2}\cos(\varphi), \quad \Gamma_{22,1} = \frac{mL}{2}\sin(\varphi), \quad Q_1^a = F, \quad (3.52)$$

$$a_{21} = -\frac{mL}{2}\cos(\varphi), \quad a_{22} = \frac{mL^2}{3}, \quad Q_2^g = \frac{mgL}{2}\sin(\varphi), \quad Q_2^v = -k_v\dot{\varphi}. \quad (3.53)$$

Применимо сада опет методу парцијалне *feedback* линеаризације [116] чији је циљ упрошћавање горе изведених динамичких једначина понашања. Ако израчунамо  $\ddot{\varphi}$  из (3.51) и убацимо у (3.50), добијамо

$$\left(m+M - \frac{3m}{4}\cos^2(\varphi)\right)\ddot{x} - \frac{3mg}{4}\sin(\varphi)\cos(\varphi) + \frac{mL}{2}\dot{\varphi}^2\sin(\varphi) + \frac{3}{2}\frac{k_v}{L}\dot{\varphi}\cos(\varphi) = F. \quad (3.54)$$

Управљачку силу  $F$  бирамо на следећи начин

$$F = \left(m+M - \frac{3m}{4}\cos^2(\varphi)\right)F_R - \frac{3mg}{4}\sin(\varphi)\cos(\varphi) + \frac{mL}{2}\dot{\varphi}^2\sin(\varphi) + \frac{3}{2}\frac{k_v}{L}\dot{\varphi}\cos(\varphi), \quad (3.55)$$

где је  $F_R$  нова управљачка величина. Сада добијамо упрошћене једначине понашања

$$\ddot{x} = F_R, \quad (3.56)$$

$$\ddot{\varphi} = \frac{g}{b}\sin(\varphi) - \frac{k_v}{J}\dot{\varphi} + \frac{1}{b}F_R\cos(\varphi). \quad (3.57)$$

при чему је  $g \approx 9,81\text{m/s}^2$  и  $b = 2L/3[\text{m}]$ . Видимо из горњих једначина да на кретање клатна не утиче положај колица.

### 3.3.2 Анализа стабилности трансляторног инверзног клатна методом Д-разлагања

Потребно је извршити линеаризацију једначине (3.57) око нестабилног равнотежног положаја  $(\dot{x}, \varphi, \dot{\varphi}) = (0, 0, 0)$  да бисмо могли пројектовати управљачки систем. То нас доводи до следећих једначина

$$\ddot{x} = F_R, \quad (3.58)$$

$$\ddot{\varphi} = \frac{g}{b} \varphi - \frac{k_v}{J} \dot{\varphi} + \frac{1}{b} F_R. \quad (3.59)$$

Прва од горње две једначине је већ била линеарна, па остаје непромењена. Да бисмо постигли асимптотску стабилност за  $(\dot{x}, \varphi, \dot{\varphi})$ , уводи се пропорционално-диференцијални ПД регулатор нецелобројног типа [122], у облику

$$F_R = -K_{P\varphi} \varphi - K_{D\varphi} \varphi^{(\beta)} - K_{Dx} \dot{x}, \quad (3.60)$$

где су  $K_{P\varphi}, K_{D\varphi}, K_{Dx}$  пропорционална и диференцијална појачања регулатора, а  $\beta$  је извод нецелобројног реда. Сада једначине (3.58)-(3.59) постају

$$\ddot{x} + K_{Dx} \dot{x} = -K_{P\varphi} \varphi - K_{D\varphi} \varphi^{(\beta)}, \quad (3.61)$$

$$b\ddot{\varphi} + K_{D\varphi} \varphi^{(\beta)} + \frac{k_v b}{J} \dot{\varphi} + (K_{P\varphi} - g) \varphi = -K_{Dx} \dot{x}. \quad (3.62)$$

За  $\beta=1$  добијамо класични ПД регулатор. За постизање апсолутне или релативне стабилности система на располагању имамо четири параметра  $(K_{Dx}, K_{P\varphi}, K_{D\varphi}, \beta)$ . Овде ћемо се ограничити на испитивање утицаја параметара  $K_{P\varphi}, K_{D\varphi}$  и  $\beta$  на асимптотску стабилност система.

Понављамо поступак Д-разлагања [31,32] као у случају ротационог инверзног клатна, с тим што сада одређујемо област стабилности у параметарској равни  $(K_{P\varphi}, K_{D\varphi})$ . Карактеристични полином затвореног система се добија на основу једначина (3.61)-(3.62) и гласи

$$f(s) = bs^3 + K_{D\varphi}s^{1+\beta} + \left(bK_{Dx} + \frac{k_v b}{J}\right)s^2 + \left(K_{P\varphi} - g + K_{Dx} \frac{k_v b}{J}\right)s - gK_{Dx}. \quad (3.63)$$

Криву разлагања добијамо познатим поступком, замењујући  $s = j\omega$  у једн. (3.63) и изједначавајући је са 0, тј.

$$b(j\omega)^3 + K_{D\varphi}(j\omega)^{1+\beta} + \left(bK_{Dx} + \frac{k_v b}{J}\right)(j\omega)^2 + \left(K_{P\varphi} - g + K_{Dx} \frac{k_v b}{J}\right)(j\omega) - gK_{Dx} = 0. \quad (3.64)$$

Члан  $(j\omega)^{\beta+1}$  садржи реални и имагинарни део у облику

$$(j\omega)^{\beta+1} = \omega^{\beta+1} (\cos(\beta+1)\pi/2 + j\sin(\beta+1)\pi/2), \quad \omega \geq 0. \quad (3.65)$$

Комплексна једначина (3.64) се такође може написати преко реалног и имагинарног дела као

$$u(\omega, K_{P\varphi}, K_{D\varphi}) + jv(\omega, K_{P\varphi}, K_{D\varphi}) = 0, \quad (3.66)$$

где су

$$u(\omega, K_{P\varphi}, K_{D\varphi}) = K_{D\varphi}\omega^{\beta+1} \cos(\beta+1)\pi/2 - \left(bK_{Dx} + \frac{k_v b}{J}\right)\omega^2 - gK_{Dx}, \quad (3.67)$$

$$v(\omega, K_{P\varphi}, K_{D\varphi}) = -b\omega^3 + K_{D\varphi}\omega^{\beta+1} \sin(\beta+1)\pi/2 + \left(K_{P\varphi} - g + K_{Dx} \frac{k_v b}{J}\right)\omega. \quad (3.68)$$

Изједначавајући горње функције са нулом, добијамо систем од две једначине са две непознате  $K_{P\varphi}$  и  $K_{D\varphi}$ , које када решимо добијамо:

$$K_{D\varphi} = \frac{\left(bK_{Dx} + \frac{k_v b}{J}\right)\omega^2 + gK_{Dx}}{\omega^{1+\beta} \cos(\beta+1)\pi/2}, \quad (3.69)$$

$$K_{P\varphi} = g + b\omega^2 - K_{D\varphi}\omega^\beta \sin(\beta+1)\pi/2 - \frac{k_v b}{J}K_{Dx}. \quad (3.70)$$

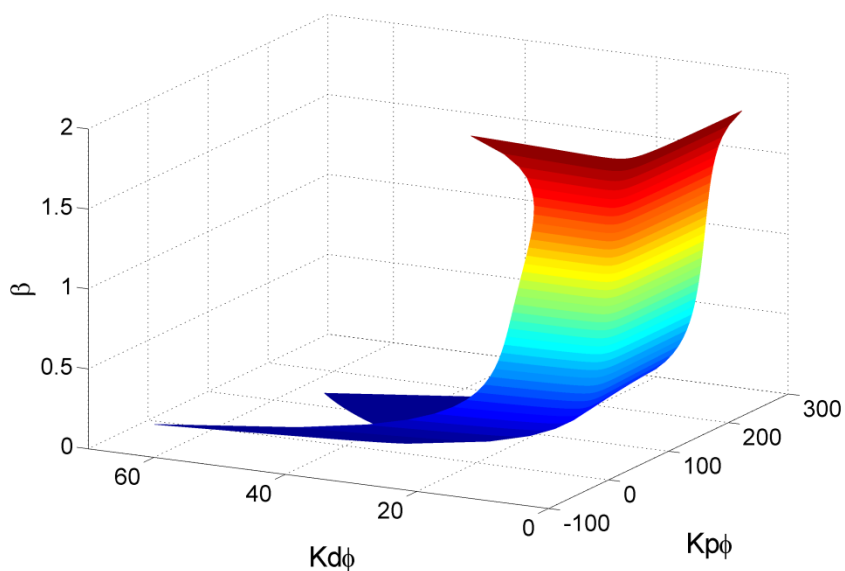
Инваријантне области  $D(k)$  у параметарској равни  $(K_{P\varphi}, K_{D\varphi})$  добијају се из горњих израза за  $\omega \in (0, \infty)$  и за фиксне вредности  $K_{Dx}$  и  $\beta$ . Ако мењамо

постепено вредност параметра  $\beta$  и понављамо методу Д-разлагања, добиће се области стабилности у 3Д простору [47].

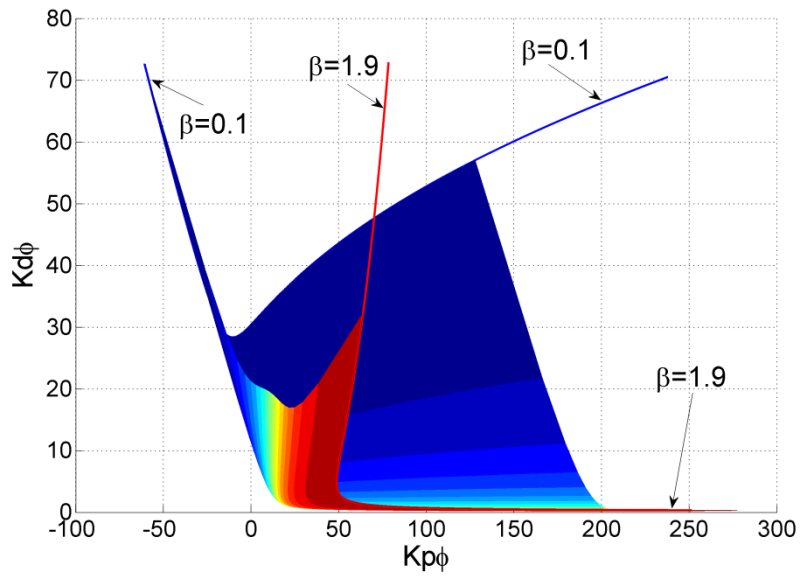
### 3.3.3 Резултати симулације

Овде ће бити приказани резултати нумеричких симулација користећи методу Д-разлагања за систем описан са (3.61)-(3.62). Параметарска равна ( $K_{p\phi}, K_{d\phi}$ ) се дели на стабилну и нестабилну област. Домен стабилности идентификујемо тако што за произвољно изабрану тачку у свакој области тестирамо стабилност полинома (3.63).

За следеће вредности параметара:  $K_{Dx} = -1$ ,  $0,1 \leq \beta \leq 1,9$ ,  $k_v = 0,002 \text{Nms}$  и  $L = 1\text{m}$ , добијамо област стабилности у 3Д простору ( $K_{p\phi}, K_{d\phi}, \beta$ ) као на слици 3.11. Иста та област, али у 2Д равни (поглед одозго) приказана је на слици 3.12. Да бисмо добили систем који је робустан и мање осетљив на промене параметара система морамо бирати тачку која се налази што дубље у домену стабилности  $D(0)$ .

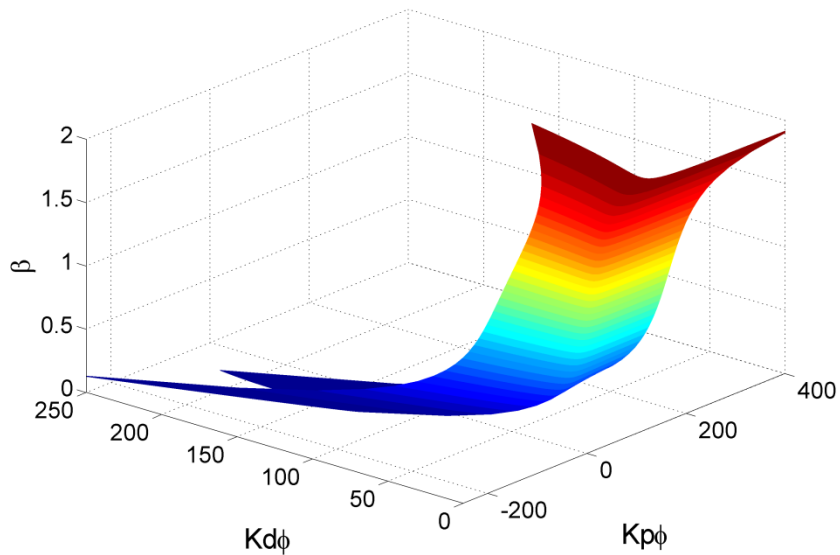


Слика 3.11 3Д област стабилности за  $K_{Dx} = -1$



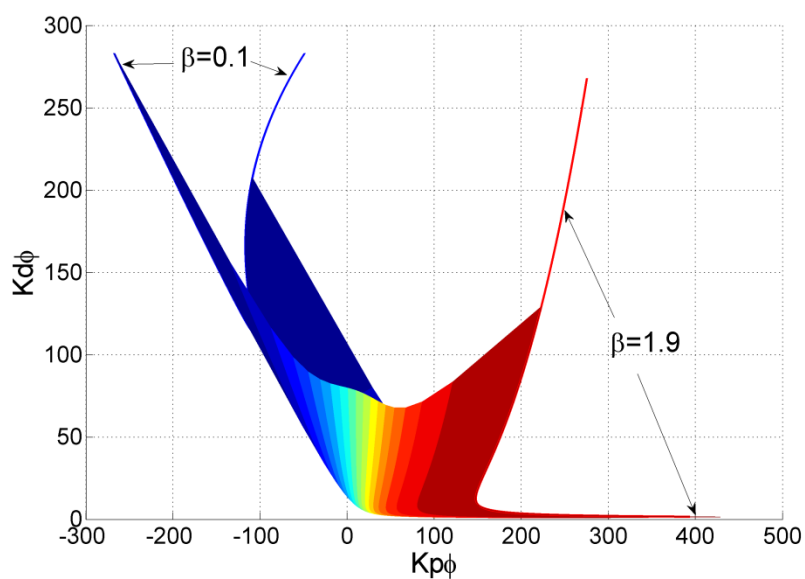
Слика 3.12 2Д област стабилности за  $K_{Dx} = -1$

Сада, слике 3.13 и 3.14 приказују исте резултате, али за вредност параметра  $K_{Dx} = -4$ . Видимо простим упоређивањем података да област стабилности опада са смањивањем вредности  $K_{Dx}$ . За  $K_{Dx} > 0$  систем је нестабилан.



Слика 3.13 3Д област стабилности за  $K_{Dx} = -4$





Слика 3.14 2Д област стабилности за  $K_{Dx} = -4$

На основу Љапуновљеве индиректне теореме, области стабилности добијене у горњим примерима за систем (3.61)-(3.62), важиће и за нелинеарни систем (3.56)-(3.57), али само у блиској околини равнотежног стања.

### 3.3.4 Експериментални резултати

Да би се показала практична имплементација фракционог ПД регулатора, извршен је експеримент управљања транслаторним инверзним клатном.



Слика 3.15 Лабораторијски модел транслаторног инверзног клатна

Неки од резултата примене регулатора фракционог реда на механички систем типа инверзног клатна приказани су у [123,124]. На слици 3.15 приказан је лабораторијски модел инверзног клатна на колицима, а физички параметри система наведени су у табели 3.1.

Табела 3.1 Физички параметри лабораторијског модела

$M = 0,75\text{kg}$	маса колица
$m = 0,127\text{kg}$	маса клатна
$g = 9,81\text{m/s}^2$	гравитациона константа
$L = 0,3365\text{m}$	укупна дужина клатна
$d = 0,1778\text{m}$	растојање тачке вешања клатна до центра инерције клатна
$J = 3,1613 \cdot 10^{-2}\text{kgm}^2$	аксијални момент инерције клатна у односу осу која пролази кроз тачку вешања клатна
$\beta_c = 4\text{Ns/m}$	коэффицијент вискозног трења колица
$\beta_p = 0,003\text{Ns}$	коэффицијент вискозног трења клатна

Колица се покрећу дејством силе коју генерише мотор једносмерне струје, при чему је сила дата са

$$F = c_m V_m - c_b \dot{x}, \quad (3.71)$$

где је  $V_m$  управљачки напон, а  $c_m = 1,0717\text{N/V}$  и  $c_b = 4,809\text{Ns/m}$  су позитивне константе. И колица и клатно опремљени су инкременталним енкодерима за мерење позиција истих. С обзиром да нумеричко диференцирање обично уноси значајан шум у систем, естимација брзине колица извршена је помоћу мерења одговарајуће позиције, и применом филтра фракционог реда чија је преносна функција

$$DF(s) = \left( \frac{s}{0,02s + 1} \right)^\alpha. \quad (3.72)$$

Параметар  $\alpha$  представља извод нецелобројног реда у случају колица, док је  $\alpha = 1$  за случај филтра примењог на клатну. У циљу што боље апроксимације горње нерационалне преносне функције, примењен је ефикасан метод рационалне апроксимације линеарних фракционих система који је прилагођен за рачунарску употребу. Детаљни поступак ове методе изведен је у раду [125], а овде ће се само укратко објаснити наведени поступак и

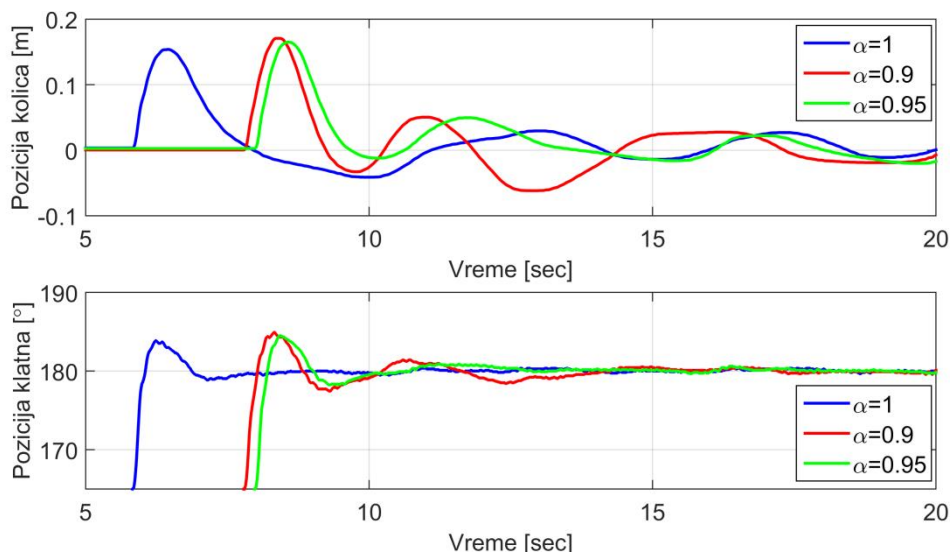
применити на преносну функцију (3.72). Претпоставља се рационална преносна функција следећег облика

$$\frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_{n-1}s^{n-1} + \dots + b_1s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0}, \quad (3.73)$$

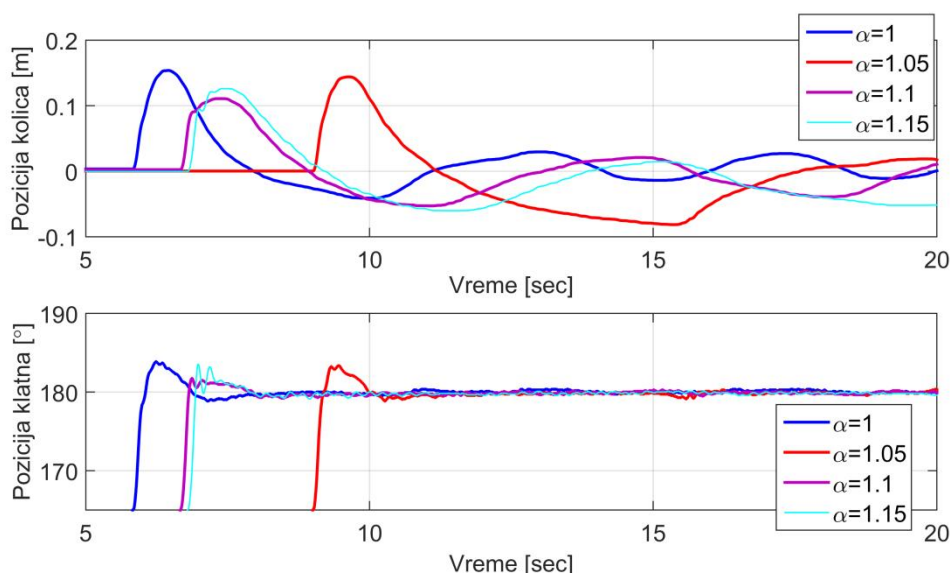
која ће апроксимирати преносну функцију дату са (3.72). Када је  $b_0 = 1$ , постоји  $2n$  непознатих коефицијената  $(a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n)$  који се одређују из  $2n$  једначина добијених из услова поклапања Бодевих фреквенцијских карактеристика на унапред дефинисаном скупу задатих фреквенција  $\omega \in \{\omega_0; \omega_1; \dots; \omega_{n-1}\}$ . У нашем случају, за дату преносну функцију (3.72), и за следеће вредности параметра  $\alpha \in \{0,9; 0,95; 1,05; 1,1; 1,15\}$ , рационална апроксимација (3.73) се добија преклапањем фреквенцијских карактеристика за следећих седам тачака  $\omega \in \{1; 10; 20; 40; 70; 100; 1000\}$ . За наведене кружне фреквенције израчунати су непознати коефицијенти у (3.73), и њихове вредности су дате у табели 3.2.

Табела 3.2. Коефицијенти рационалне преносне функције

Коефици.	$\alpha = 0,9$	$\alpha = 0,95$	$\alpha = 1,05$	$\alpha = 1,1$	$\alpha = 1,15$
$b_0$	1	1	-1	-1	-1
$a_0$	25,24	53,2	60,24	32,19	22,96
$b_1$	28,35	56,45	56,60	28,32	18,86
$a_1$	32,66	66,24	70,46	36,52	25,22
$b_2$	30,09	63,06	71,54	38,24	27,23
$a_2$	9,92	19,55	19,88	10,08	6,8
$b_3$	7,75	16,68	20,22	11,19	8,235
$a_3$	1,10	2,12	2,05	1,04	0,689
$b_4$	0,705	1,54	1,96	1,11	0,834
$a_4$	0,529e-1	0,100	0,955e-1	0,47e-1	0,307e-1
$b_5$	0,248	0,55e-1	0,723e-1	0,418e-1	0,319e-1
$a_5$	0,112e-2	0,208e-2	0,194e-2	0,947e-3	0,61e-3
$b_6$	0,289e-3	0,647e-3	0,875e-3	0,513e-3	0,397e-3
$a_6$	0,856e-5	0,157e-4	0,144e-4	0,694e-5	0,442e-5
$a_7$	0	0	0	0	0



Слика 3.16. Одзив колица и клатна за вредности  $\alpha \in \{0,9; 0,95; 1,0\}$



Слика 3.17. Одзив колица и клатна за вредности  $\alpha \in \{1,0; 1,05; 1,1; 1,15\}$

Слике 3.16 и 3.17 приказују експерименталне резултате управљања инверзним клатном за различите вредности параметра  $\alpha$ , тј. за  $\alpha \in \{0,9; 0,95; 1,0; 1,05; 1,1; 1,15\}$ . Резултати су ради прегледности приказани на две слике, уместо на једној. Параметри регулатора у експерименту имају следеће вредности:  $K_{Px} = 14,14$ ,  $K_{Dx} = 15,58$ ,  $K_{P\phi} = 66,26$  и  $K_{D\phi} = 10,7$ . Приликом извођења експеримента, клатно се ручно доводи у почетни

положај одређен са  $(x, \dot{x}, \varphi, \dot{\varphi}) = (0, 0, 165^\circ, 0)$ , након чега регулатор преузима управљање и стабилише систем. Видимо на основу слика да се најбољи одзив система добија за вредност  $\alpha = 1,1$ , па можемо закључити да регулатор фракционог реда даје систем са бољим перформансама у односу на класични регулатор.

## **4. Метода пројектовања класичног и фракционог ПИД регулатора применом доминантног подешавања полова и Д-разлагања под ограничењима на перформансе**

Метода доминантног подешавања полова је ефикасна техника која регулаторима нижег реда, попут ПИД-а, омогућава управљање сложених система или система са транспортним кашњењем. Овде ћемо показати како се овај приступ, заједно са методом Д-разлагања, може искористити за пројектовање управљачког система.

Већина роботских манипулатора који раде у индустријским условима се управљају помоћу ПИД регулатора. Може се лако доказати да је овај регулатор врло ефикасан када је у питању позиционо управљање роботом. Олакшавајућа околност при подешавању параметара ПИД регулатора је и присуство редуктора између мотора и роботских сегмената. Показано је у другом поглављу да, ако је преносни однос редуктора велики, може се занемарити нелинеарна динамика робота и проблем управљања свести на управљање мотором за кога је ПИД регулатор одговарајући избор.

Поред роботских манипулатора, метода која ће бити изложена у наставку овог поглавља погодна је за управљање динамички различитих процеса. У том циљу, уводи се фракциони ПИД регулатор као генерализација класичног ПИД-а. Овај регулатор, због већег броја подешљивих параметара, омогућава и постизање бољих перформанси система. Параметре регулатора подешавамо тако да се постигне што ефикасније потискивање немерљивог поремећаја, притом водећи рачуна о робустности система, осетљивости на шум, времену смирења, као и о дозвољеном прескоку, о чему се посебно мора водити рачуна код управљања кретањем робота. Предложена метода је примењена на репрезентативним процесима како би се показала њена

ефикасност и упоредила са постојећим методама подешавања ПИД регулатора.

## 4.1 Увод

Метода подешавања полова омогућава да се предвиди понашање система у затвореној повратној спрези [126]. Суштина ове методе је да су полови затвореног система управљања одређени унапред по својим позицијама у комплексној  $s$ -равни [39]. Ово је битно из разлога што локације полова директно утичу на понашање пројектованог линеарног система. Отежавајућа околност јесте да степен регулатора мора да буде најмање један ред мањи од степена управљаног објекта. Због тога се регулатор нижег реда не може се користити за управљање објектом вишег реда, или неког система са кашњењем. С друге стране, за управљање индустријским процесима најчешће се користи ПИД регулатор, који је релативно ниског реда (другог) [127].

У циљу превазилажења наведеног проблема, Пирсон (*Persson*) и Астром (*Astrom*) су у [49] увели идеју доминантног подешавања полова, а даље је развили Астром и Хаглунд (*Hagglund*) у [50]. Основна идеја овог приступа се заснива на чињеници да су одзиви система, па и оних који су сложеније природе, углавном окарактерисани положајем доминантних полова. Значи, замисао доминантног подешавања полова јесте подесити параметре ПИД регулатора тако да нпр. два пола буду у доминантној области, а сви остали полови система буду потиснути изван те области.

Овде ћемо показати како идеју доминантног подешавања полова извести користећи методу  $D$ -разлагања. Овим приступом могуће је третирати процесе са и без транспортног кашњења на јединствени начин. Штавише, фракциони системи, као и системи са расподељеним параметрима такође могу бити обухваћени предложеним поступком. Ова процедура је једноставна и од значаја за системе вишег реда. Спада у графичке методе и посебно је погодна је за примену на рачунару. Основна идеја је следећа: нека су  $k_p$ ,  $k_i$  и  $k_d$  пророрционално, интегрално и диференцијално појачање ПИД

регулятора, респективно. Са  $p_{1,2}$  означимо доминантне половине затвореног система управљања. Дати полови морају задовољити карактеристичну једначину система, па је онда могуће изразити интегрални и диференцијални члан  $k_i$  и  $k_d$  као линеарне функције пропорционалног појачања  $k_p$ , т.ј.  $k_i = k_i(k_p)$  и  $k_d = k_d(k_p)$ . Тако  $k_p$  остаје једини слободан параметар за подешавање, па се метода Д-разлагања може употребити за проналажење оних вредности параметра  $k_p$  које гарантују доминантност изабраних половина  $p_{1,2}$ .

Примарни циљ пројектовања регулятора овим приступом је добити добро потискивање немерљивог поремећаја, а то се постиже минимизирајући интеграл апсолутне грешке. Истовремено, да би систем био робустан, уводи се ограничење максималне осетљивости  $M_S$  и осетљивости система на шум  $M_N$ . Такође, још један битан захтев при пројектовању јесте да се добије добар одзив система при промени референтне вредности.

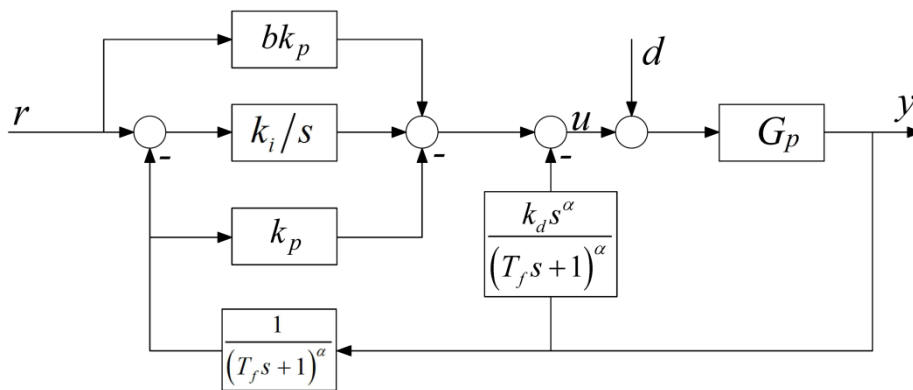
## 4.2 Поставка проблема

Преносна функција фракционог ПИД регулятора има следећи облик

$$C(s) = \frac{k_p + k_i/s^\beta + k_d s^\alpha}{(T_f s + 1)^\alpha}, \quad (4.1)$$

где  $T_f$  означава временску константу филтра првог реда, а  $\alpha, \beta$  су реални параметри извода и интеграла нецелобројног реда, респективно. Ако  $G_p(s)$  представља преносну функцију објекта (процеса), онда блок дијаграм затвореног система управљања са регулатором са два степена слободе има облик као на слици 4.1. Величине  $r, d, u, y$  представљају редом референтни улаз, поремећај, управљачку величину и управљану величину (излаз система).





Сл. 4.1. Блок дијаграм система регулисања за процес  $G_p(s)$  и регулатор  $C(s)$

Када причамо о перформансама система, овде ћемо под тим подразумевати одзив система на референтни улаз и потискивање поремећаја, тј. одзив система при деловању немерљивог поремећаја. Уобичајено је да се квалитет потискивања поремећаја мери преко интеграла апсолутне грешке IAE, [65].

$$IAE = \int_0^{\infty} |y_d(t)| dt, \quad (4.2)$$

где

$$y_d(t) = \Lambda^{-1} \left\{ \frac{G_p(s)}{1 + C(s)G_p(s)} \frac{1}{s} \right\} \quad (4.3)$$

представља одзив система на дејство јединичног поремећаја  $d(t)$ , док је  $r(t) = 0$ . Инверзна Лапласова трансформација операција је у горњем изразу означена са  $\Lambda^{-1}\{\bullet\}$ . У општем случају, када је  $\beta \neq 1$ , коначна вредност интеграла перформансе (4.2) се не може тако лако гарантовати (за више детаља видети [128]), па се стога овде усваја  $\beta = 1$ . Максимална осетљивост  $M_s$  је добар показатељ робустности система на немоделовану динамику, и дефинише се као највећа вредност функције осетљивости  $S(s)$  затвореног система са слике 4.1

$$M_S = \max_{\omega} |S(i\omega)| = \max_{\omega} \left| \frac{1}{1 + C(i\omega)G_p(i\omega)} \right|. \quad (4.4)$$

Поред показатеља робусности  $M_S$ , осетљивост система на грешке у моделу се може проценити и највећом вредношћу комплементарне функције осетљивости  $T(s)$ , у ознаци  $M_P$ ,

$$M_P = \max_{\omega} |T(i\omega)| = \max_{\omega} \left| \frac{C(i\omega)G_p(i\omega)}{1 + C(i\omega)G_p(i\omega)} \right|. \quad (4.5)$$

Квалитетно пројектован управљачки систем не сме бити превише осетљив на појаву шума у систему, а та особина се квантитативно може описати преко показатеља  $M_N$

$$M_N = \max_{\omega} |G_{in}(i\omega)| = \max_{\omega} \left| \frac{-C(i\omega)}{1 + C(i\omega)G_p(i\omega)} \right|. \quad (4.6)$$

Ако је ПИД регулатор добро пројектован, тада је  $M_N$  једнак граничној вредности  $|G_{in}(i\omega)|$  за  $\omega \rightarrow \infty$ , тј.

$$M_{N,\infty} = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \left| \frac{-C(i\omega)}{1 + C(i\omega)G_p(i\omega)} \right| = \frac{|k_d|}{T_f^\alpha} \approx M_N. \quad (4.7)$$

Видимо на основу (4.7) да је величина  $M_N$  повезана са временском константом филтра. Када подешавањем параметара  $k_p, k_i, k_d, \alpha$  и  $T_f$  постигнемо добро потискивање поремећаја, онда се одзив система на референтну вредност може побољшати додатним подешавањем параметра  $b$  (слика 4.1). Карактеристични полином затвореног система управљања са слике 4.1 дат је са

$$f(s) = 1 + C(s)G_p(s). \quad (4.8)$$

Означимо доминантне полове система у  $s$ -домену са  $p_{1,2} = \sigma_d \pm j\omega_d$ . Положај доминантних полова може се одредити на основу унапред задатих

жељених перформанси система, као што су прескок  $A_p$  и време смирења  $\delta\%$ .

Сада уводимо следећу тест функцију [118,129]

$$H(s) = \frac{1}{s^{\alpha+1} + 2\xi s + 1}, \quad (4.9)$$

где је  $\xi$  степен пригушења. Разлог увођења  $H(s)$  је следећи. Регулатор има функцију да „натера” дати објекат управљања да се понаша на начин који је одређен одређен жељеним карактеристикама система. Избор структуре регулатора има доминантан утицај на динамику затвореног система, па можемо рећи да ће тест функција  $H(s)$  бити истог типа као функција регулатора  $C(s)$ . Нормализовани доминантни полови  $s_n$  функције  $H(s)$  израчунати су за задати прескок  $A_p$  и познато време смирења  $\delta\%$ , и то за различите вредности параметра  $\alpha$ . Дати подаци приказани су у табели А на крају поглавља. Нормализовано време смирења  $t_n$  се добија на основу симулираног одскочног одзива система (4.9). Подаци из ове табеле користиће се у нумеричким симулацијама за различите индустријске процесе, што ће бити приказано касније.

Карактеристичну једначину добијамо када изједначимо полином (4.8) са нулом, тј.  $f(s) = 0$ . Ако убацимо нпр. доминантни пол  $p_1$  у карактеристичну једначину, добијамо

$$k_d p_1^{\alpha+1} + k_p p_1 + k_i = -\frac{p_1 (T_f p_1 + 1)^\alpha}{G_p(p_1)}, \quad (4.10)$$

где је  $p_1 = \sigma_d + j\omega_d$ . Из комплексне једначине (4.10) добијају се две линеарне једначине по непознатима  $k_p, k_i, k_d$

$$k_d (\sigma_d^2 + \omega_d^2)^{\frac{\alpha}{2}} \cos\left(\alpha \arctan \frac{\omega_d}{\sigma_d}\right) + k_i \frac{\sigma_d}{\sigma_d^2 + \omega_d^2} = -U - k_p, \quad (4.11)$$

$$k_d (\sigma_d^2 + \omega_d^2)^{\frac{\alpha}{2}} \sin\left(\alpha \arctan \frac{\omega_d}{\sigma_d}\right) - k_i \frac{\omega_d}{\sigma_d^2 + \omega_d^2} = -V, \quad (4.12)$$

где су  $U = \operatorname{Re} \left\{ \frac{(T_f p_1 + 1)^\alpha}{G_p(p_1)} \right\}$  и  $V = \operatorname{Im} \left\{ \frac{(T_f p_1 + 1)^\alpha}{G_p(p_1)} \right\}$ . Када су вредности

параметара  $\alpha$  и  $T_f$  фиксне, ове једначине можемо решити по непознатима  $k_i$  и  $k_d$  у зависности од  $k_p$

$$k_i = k_i(k_p) = \frac{-\tan\left(\alpha \arctan \frac{\omega_d}{\sigma_d}\right)}{\sigma_d \tan\left(\alpha \arctan \frac{\omega_d}{\sigma_d}\right) + \omega_d} k_p + \frac{V - U \tan\left(\alpha \arctan \frac{\omega_d}{\sigma_d}\right)}{\sigma_d \tan\left(\alpha \arctan \frac{\omega_d}{\sigma_d}\right) + \omega_d} = a_i k_p + b_i, \quad (4.13)$$

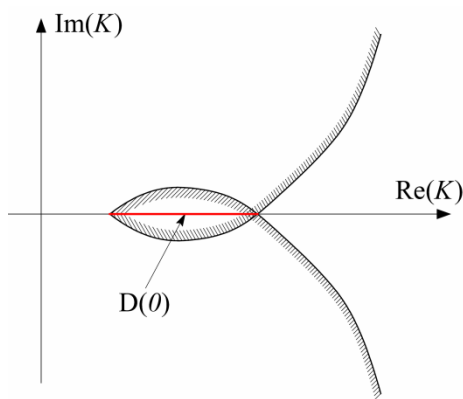
$$k_d = k_d(k_p) = \frac{-\tan\left(\alpha \arctan \frac{\omega_d}{\sigma_d}\right) \omega_d}{\left(\sigma_d^2 + \omega_d^2\right)^{\frac{\alpha}{2}} \sin\left(\alpha \arctan \frac{\omega_d}{\sigma_d}\right) \left(\sigma_d \tan\left(\alpha \arctan \frac{\omega_d}{\sigma_d}\right) + \omega_d\right)} k_p + \frac{-\tan\left(\alpha \arctan \frac{\omega_d}{\sigma_d}\right) (\omega_d U + \sigma_d V)}{\left(\sigma_d^2 + \omega_d^2\right)^{\frac{\alpha}{2}} \sin\left(\alpha \arctan \frac{\omega_d}{\sigma_d}\right) \left(\sigma_d \tan\left(\alpha \arctan \frac{\omega_d}{\sigma_d}\right) + \omega_d\right)} = a_d k_p + b_d. \quad (4.14)$$

где лако можемо идентификовати коефицијенте  $a_i, b_i, a_d, b_d$  из горњих једначина. Из горњег разматрања видимо да ПИД регулатор зависи само од параметра  $k_p$ , а положај свих осталих полова варира у зависности од ове променљиве. Сада можемо искористити методу Д-разлагања да нађемо оне вредности параметра  $k_p$  које ће нам осигурати доминантност полова  $p_1$  и  $p_2$ , што ће се објаснити у следећем кораку.

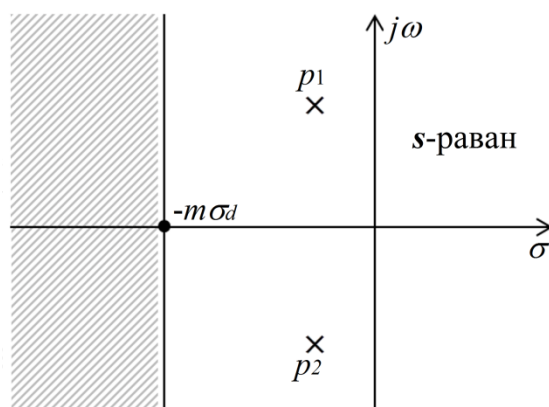
### 4.3 Примена методе Д-разлагања у поступку доминантног подешавања полова

Као што је већ речено, применом Д-разлагања добијамо криве разлагања које раван подешљивих параметара деле на инваријантне области  $D(k)$ . Област  $D(0)$ , ако постоји, представља област асимптотске стабилности

система [130]. Типичан изглед криве разлагања у равни једног параметра  $K$  видимо на слици 4.2. Шрафирање криве разлагања је могуће на основу једноставног правила: при порасту учестаности  $\omega$  шрафура се наноси дуж леве стране криве разлагања. Када знамо број полова са позитивним реалним делом у некој области, онда помоћу шрафуре лако можемо одредити и број полова у другим областима. У случају једног параметра, једино тачке које се налазе на реалној оси, када је параметар  $K$  реалан број, имају физички смисао. Као пример, на слици 4.2 црвеном линијом су означене оне тачке за које је систем стабилан. При преласку произвољне тачке  $M$  са шрафираних стране криве разлагања на супротну, долази до преласка једног корена карактеристичне једначине са леве на десну полураван  $s$ -равни.



Слика 4.2. Област стабилности у равни једног параметра



Слика. 4.3. Положај недоминантних полова (шрафирани део  $s$ -равни)

Сада ћемо методу Д-разлагања употребити да обезбедимо доминантност полова  $p_{1,2}$ . То значи да ће сви други полови затвореног система бити смештени лево од линије  $m\sigma_d + j\omega$ , где је  $\sigma_d = \text{Re}\{p_{1,2}\}$ , и  $m \geq 1$ . Слика 4.3 илуструје област у  $s$ -равни (шрафирани део  $s$ -равни) у којој се налазе сви полови осим доминантних  $p_1$  и  $p_2$ . То даље имплицира да ћемо криву разлагања добити пресликавањем не имагинарне осе, већ осе паралелне имагинарној [37], тј.  $f(m\sigma_d + j\omega) = 0$  за  $\omega$  ( $-\infty < \omega < +\infty$ ). Криве разлагања деле сада параметарску раван на области  $D(h)$ , где  $h$  представља број корена карактеристичне једначине који се налазе десно од линије  $m\sigma_d + j\omega$ . Из тога следи да се доминантни полови  $p_{1,2}$  увек налазе са десне стране ове линије, па ће се област стабилности која осигурава доминантност датих полова означити са  $D(2)$ . Али пре тога, карактеристичну једначину  $f(s) = 0$  морамо написати као функцију параметра  $k_p$ . Користећи се једначинама (4.8), (4.13) и (4.14), добијамо следеће изразе

$$s(T_f s + 1)^\alpha + (b_i + b_d s^{\alpha+1})G_p(s) + k_p(a_i + s + a_d s^{\alpha+1})G_p(s) = 0, \quad (4.15)$$

Из горње једначине следи

$$k_p = -\frac{s(T_f s + 1)^\alpha + (b_i + b_d s^{\alpha+1})G_p(s)}{(a_i + s + a_d s^{\alpha+1})G_p(s)}. \quad (4.16)$$

Сада, замењујући  $s = m\sigma_d + j\omega$  у једначини (4.16), добијамо комплексну једначину

$$k_1(\omega) + jk_2(\omega) = \frac{(m\sigma_d + j\omega)(X_1(\omega) + jY_1(\omega)) + (b_i + b_d X_2(\omega) + j b_d Y_2(\omega))(U_1(\omega) + jV_1(\omega))}{(a_i + m\sigma_d + j\omega + a_d X_2(\omega) + j a_d Y_2(\omega))(U_1(\omega) + jV_1(\omega))}, \quad (4.17)$$

где су

$$(T_f m\sigma_d + jT_f \omega + 1)^\alpha = X_1(\omega) + jY_1(\omega), \quad (m\sigma_d + j\omega)^{\alpha+1} = X_2(\omega) + jY_2(\omega), \quad (4.18)$$

$$G_p(m\sigma_d + j\omega) = U_1(\omega) + jV_1(\omega).$$

Видимо да функције  $k_1(\omega)$  и  $k_2(\omega)$  означавају реални и имагинарни део од  $k_p$ , тј.  $k_p(m\sigma_d + j\omega) = k_1(\omega) + jk_2(\omega)$ . Са једначином (4.17) пресликали смо одговарајућу праву из комплексне  $s$ -равни у комплексну раван параметра  $k_p$ . Функције  $k_1(\omega)$  и  $k_2(\omega)$  за вредности  $\omega \in (-\infty, +\infty)$  цртају криву разлагања у  $k_p$  параметарској равни, па се ова комплексна раван дели на стабилне и нестабилне области. Шрафирање криве врши се на основу већ споменутог правила. Уочимо да је функција  $k_1(\omega)$  парна, а  $k_2(\omega)$  непарна функција, па ће због тога крива разлагања увек бити симетрична у односу на реалну осу. Стабилни и нестабилни сегменти на реалној оси идентификују се тестирајући стабилност полинома (4.8) за произвољно изабрану тачку на оси и користећи нпр. инверзну Лапласову трансформацију. Када идентификујемо област стабилности  $D(2)$ , остале регионе можемо лако одредити.

#### 4.4 Нумерички примери

Горе описани поступак може се применити на велики број процеса, при чему је акценат стављен на процесе заступљене у индустрији. Различити модели могу подразумевати стабилне, осцилаторне, нестабилне процесе, неминималне фазе, као и оне са расподељеним параметрима, [54,59,60,62,131–133]

Управљачки сигнал  $u$  дефинишемо на основу слике 4.1 као

$$u(t) = k_p (br(t) - y_f(t)) + k_i \int (r(t) - y_f(t)) dt - k_d \frac{d^\alpha y_f(t)}{dt^\alpha}, \quad (4.19)$$

где је  $0 \leq b \leq 1$ , а  $y_f(t)$  је излаз сигнала  $y(t)$  после примењене филтрације. У свим симулацијама, дефинише се време смирења  $t_s$  и временска константа филтра  $T_f$  унапред, и то тако да се добију предефинисане вредности максималне осетљивости  $M_S$  и осетљивости на шум  $M_N$ . На тај начин, можемо међусобно упоређивати различите технике пројектовања регулатора и проценити њихову ефикасност. Такође, вредност параметра  $\alpha$

ће се мењати постепено од 0,9 до 1,2, и проверићемо да ли употреба извода нецелобројног реда доводи до побољшања перформанси. Дакле, пројектовање регулатора, односно подешавање параметара регулатора може се решити итеративним поступком. При фиксним вредности  $\alpha$  и  $T_f$ , параметри регулатора  $k_p$ ,  $k_i$ ,  $k_d$  се налазе у међусобно линеарној вези која се одређује користећи информацију о доминантним половима. Затим, примењујемо процедуру Д-разлагања и за  $m > 1$  бирамо да сви остали полови сем доминантних леже лево од праве  $m\sigma_d + j\omega$ . Када је неопходно, бира се нека позитивна вредност параметра  $b$  да би се добио добар одскочни одзив на референтну вредност, мада у већини симулација параметар  $b$  остаје једнак нули.

Као што је то уобичајено у литератури [61,134], и овде ће бити анализирана три динамички различита и репрезентативна процеса: процес са уравнотеженом динамиком  $G_{p1}$ , процес са великим транспортним кашњењем  $G_{p2}$ , и процес са доминантном динамиком у односу на транспортно кашњење  $G_{p3}$ . Поред тога, ова метода пројектовања биће искоришћена у следећем поглављу за управљање роботским манипулатором. Тачније, горе описани поступак подешавања ПИД регулатора биће примењен на преносну функцију мотора дату са (2.115).

#### 4.4.1 Процес са уравнотеженом динамиком

Разматра се процес  $G_{p1}(s) = \frac{1}{(s+1)^4}$  (овај тип процеса у западној литератури је познат под називом „*process with balanced dynamics*”). Прво ћемо за дати процес пројектовати класични ПИД регулатор који се добија из једначине (4.1) за случај  $\alpha = 1$  ( $\beta$  је, као што смо рекли, увек једнак 1). На основу захтева да прескок буде мањи од 2%, и време смирења 1% за  $t_s = 13,7s$ , онда из табеле А следи да су доминантни полови  $p_{1,2} = \omega_n s_n = -0,36862 \pm 0,29602j$ , при чему је  $\omega_n = t_n/t_s = 6,51/13,7 = 0,4728$ . Ако



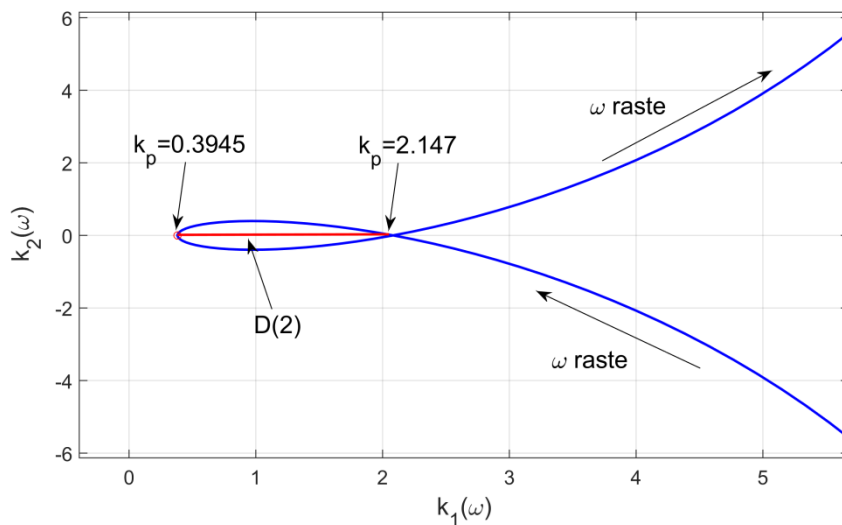
за временску константу филтра усвојимо  $T_f = 0,0942$ , једначине (4.13)-(4.14) постају

$$k_i = 0,303172k_p + 0,069729, \quad k_d = 1,356424k_p - 0,442177, \quad (4.20)$$

па следи из (4.16)

$$k_p = -\frac{0,069729 - 0,442177s^2 + s(0,0942s + 1)(s + 1)^4}{1,356424s^2 + s + 0,303172}. \quad (4.21)$$

Сада можемо нацртати криву разлагања у  $k_p$  параметарској равни, што је и урађено на слици 4.4. За  $m > 1$  добијамо да сви недоминантни полови морају бити лево од линије  $\sigma_d = \text{Re}\{p_{1,2}\} = -0,36862$ . Шрафирање криве није приказано због прегледности, али шрафура би се наносила са леве стране при порасту учестаности  $\omega$ , што је овде означено стрелицама на слици.



Слика 4.4. Крива Д-разлагања у парам. равни за процес  $G_{p1}$ ,  $\alpha = 1$

Видимо са слике да је област  $D(2)$  ограничена са следећим граничним вредностима:  $k_{p,\min} = 0,3945$  и  $k_{p,\max} = 2,147$ . Једино реалне вредности параметра  $k_p$  су физички оправдане, и оне су означене црвеном линијом на слици. Значи, када  $k_p$  има вредност између  $k_{p,\min}$  и  $k_{p,\max}$ , тада је

доминантност полова  $p_{1,2}$  обезбеђена. Бирајући  $k_p = 2,0048$ , следи из (4.20) да је  $k_i = 0,67753$  и  $k_d = 2,2772$ .

У циљу процене ефикасности, предложени поступак (Proposal) је упоређен са следећим методама: max(k) методом [62], KL методом [59], и РАН методом [61]. Табела 4.1 приказује резултате наведених метода за процес  $G_{P1}$ . Да би резултати били упоредиви, вредности параметара регулатора за све методе су израчунати за исто  $M_S$  и  $M_N$ .

Табела 4.1. Поређење различитих метода подешавања регулатора за процес  $G_{P1}$

$G_{P1}$	$k_p$	$k_i$	$k_d$	$T_f$	$M_S$	$M_P$	$M_N$	$IAE$	$A_{pr}[\%]$	$t_{sr}$	$b$
max(k)	1,999	0,787	2,381	0,09847	1,8	1,13	24,18	1,46	7,16	13,89	0
KL	1,9883	0,9393	2,4345	0,10068	1,8	1,24	24,18	1,504	18,1	17,18	0
РАН	1,877	0,855	1,892	0,07825	1,8	1,33	24,18	1,62	17,21	15,14	0
Proposal	2,0048	0,6775	2,2772	0,0942	1,8	1,12	24,18	1,54	2,37	14,7	0

Видимо да табела поред вредности параметара регулатора  $k_p, k_i, k_d$  и  $T_f$ , приказује и вредности показатеља робусности система ( $M_S$  и  $M_P$ ), као и критеријуме перформанси ( $IAE, A_{pr}, t_{sr}, M_N$ ). Параметар  $b$  једнак је нули у свим симулацијама. Видимо из табеле I да метод предложен овде (Proposal) даје релативно ниску вредност  $IAE$  у односу на остале методе за исто  $M_S$  и  $M_N$ , док је вредност прескока значајно мања, што је у већини случајева предност. Такође, добијени прескок и време смирења мало се разликују од вредности истих задатих на почетку процеса пројектовања.

Сада ћемо за исти процес увести фракциони ПИД регулатор да видимо како се карактеристике система мењају са променом извода нецелобројног реда. За  $\alpha = 0,9$ , прескок од 2% и време смирења 1% за  $t_s = 16,57s$ , доминантни полови су  $p_{1,2} = \omega_n s_n = -0,34707 \pm 0,21394j$ , при чему је

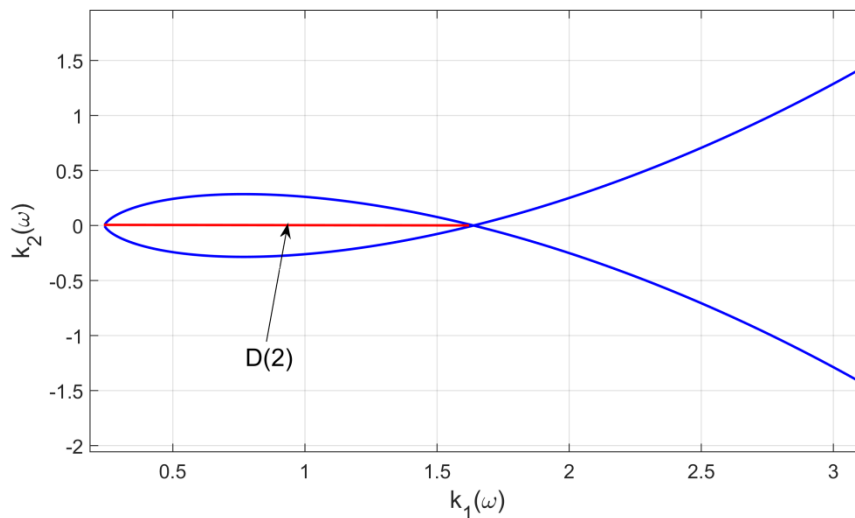
$\omega_n = t_n/t_s = 8,01/16,57 = 0,4834$ . Временска константа филтра је  $T_f = 0,0523$ , па на основу једначина (4.13),(4.14) и (4.16) добијамо

$$k_i = 0,302127k_p + 0,079383, \quad k_d = 1,202267k_p - 0,332876, \quad (4.22)$$

и

$$k_p = -\frac{0,079383 - 0,332876s^{1,9} + s(0,0523s + 1)^{0,9} (s + 1)^4}{1,202267s^{1,9} + s + 0,302127}. \quad (4.23)$$

Крива разлагања у равни параметра  $k_p$  за  $\alpha = 0,9$  дата је на слици 4.5. Као и у претходном примеру, реалне вредности параметра  $k_p$  за које је утицај полова  $p_{1,2}$  доминантан, означене су црвеном линијом. Максимална вредност  $k_p$  из тог опсега износи  $k_{p,\max} = 1,706$ , па бирајући  $k_p = 1,69$ , следи да је  $k_i = 0,58998$  и  $k_d = 1,699$ .



Слика 4.5. Крива Д-разлагања у парам. равни за процес  $G_{p1}$ ,  $\alpha = 0,9$

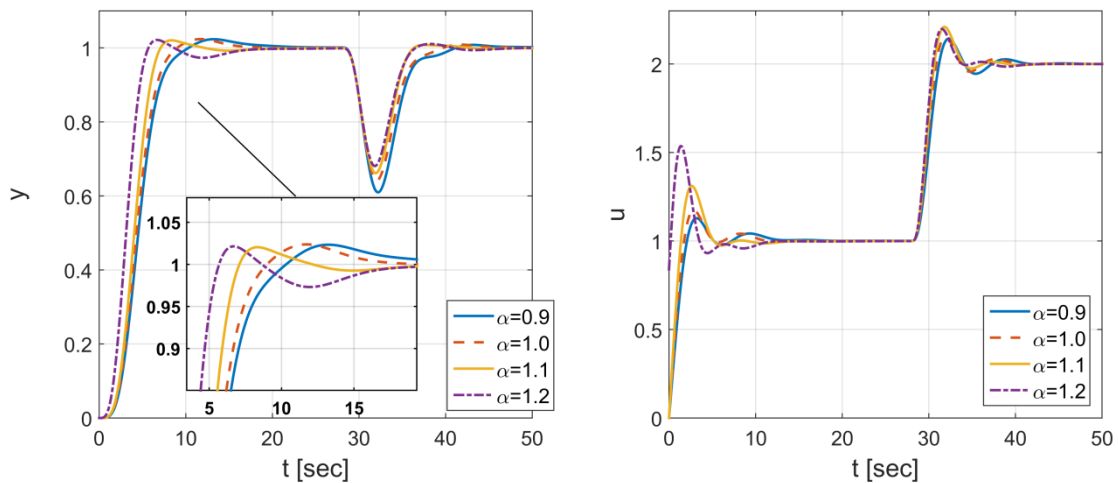
Понављајући описану процедуру за вредности параметра  $\alpha = 1,1$  и  $\alpha = 1,2$ , добијамо различите области у  $k_p$  параметарској равни. Табела 4.2 приказује упоредне резултате за процес  $G_{p1}$  за класични и регулатор нецелобројног реда. Индекси перформанси система  $(IAE, A_{pr}, t_{sr}, M_N)$  и

показатељи робусности ( $M_S, M_P$ ) приказани су као и у претходној табели. Слика 4.6 приказује одзив система на промену референце, као и одзив система услед дејства поремећаја  $d(s)=1/s$  у тренутку  $t=28s$ , и све то за  $\alpha \in \{0,9; 1,0; 1,1; 1,2\}$ . На десној страни слике дата је промена управљачког сигнала у току времена  $u(t)$ .

Табела 4.2. Параметри регулатора и показ. квалитета процеса  $G_{P1}$  за

$$\alpha \in \{0,9; 1,0; 1,1; 1,2\}$$

$G_{P1}$	$\omega_n$	$T_f$	$k_p$	$k_i$	$k_d$	$M_S$	$M_P$	$M_N$	$IAE$	$A_{pr} [\%]$	$t_{sr}$	$b$
$\alpha = 0,9$	0,4834	0,0523	1,69	0,59	1,699	1,8	1,12	24,18	1,7739	2,33	17,08	0
$\alpha = 1,0$	0,4728	0,0942	2,0048	0,6775	2,2772	1,8	1,12	24,18	1,54	2,37	14,7	0
$\alpha = 1,1$	0,53	0,13324	2,4	0,80528	2,6336	1,8	1,19	24,18	1,3105	2,04	10,27	0
$\alpha = 1,2$	0,5058	0,19103	2,8	0,84143	3,3172	1,8	1,15	24,18	1,2508	2,14	15,68	0,3



Слика 4.6. Одскочни одзив процеса  $G_{P1}$  праћен дејством поремећаја у тренутку  $t=28s$ , и управљачки сигнал  $u(t)$

Упоредјујући податке из табеле 4.2, као и са слике 4.6, закључујемо да са порастом  $\alpha$  параметра опада индекс перформансе  $IAE$ , а вредности  $M_S$  и  $M_N$  остају непромењене. Ово представља очигледну предност фракционог ПИД-а над класичним регулатором. У међусобном поређењу, фракциони регулатор

за вредност  $\alpha = 1,1$  смањује  $IAE$  за 14,9% у односу на класични ПИД, и 18,78% за  $\alpha = 1,2$ . Ако узмемо у обзир и критеријуме перформанси ( $IAE, A_{pr}, t_{sr}, M_N$ ), најбољи резултати добијају се за  $\alpha = 1,1$ .

#### 4.4.2 Процес са доминантним транспортним кашњењем

Размотримо сада процес са доминантним транспортним кашњењем

$$G_{P2} = \frac{e^{-5s}}{(s+1)^3} \text{ (овај тип процеса у литератури енглеског говорног подручја је}$$

познат под називом „*process with delay-dominated dynamics*”). Ако су захтеви за прескок  $A_{pr} = 2\%$ , и време смирења 1% за  $t_s = 33,0$ , онда су доминантни полови  $p_{1,2} = -0,18128 + 0,14558j$ , а  $\omega_n = 0,2325$ . За  $\alpha = 1$  и  $T_f = 0,105$ , везе између  $k_p$ ,  $k_i$  и  $k_d$  су следеће

$$k_i = 0,149096k_p + 0,050451, \quad k_d = 2,758160k_p - 0,562522, \quad (4.24)$$

па следи

$$k_p = -\frac{0,050451 - 0,562522s^2 + s(0,105s+1)(s+1)^3 e^{5s}}{0,149096 + s + 2,758160s^2}. \quad (4.25)$$

Цртајући криву разлагања уочавамо да је за вредност  $k_p$  из опсега  $[0,074, 0,628]$  обезбеђена доминантност полова  $p_{1,2}$ . Бирајући  $k_p = 0,625$  из опсега, добијамо да је  $k_i = 0,14364$  и  $k_d = 1,1613$ .

Табела 4.3. Поређење различитих метода подешавања регулатора за процес  $G_{P2}$

$G_{P2}$	$k_p$	$k_i$	$k_d$	$T_f$	$M_S$	$M_P$	$M_N$	$IAE$	$A_{pr}[\%]$	$t_{sr}$	$b$
max(k)	0,625	0,145	1,098	0,09982	2	1,02	11	7,51	3,74	33,06	0
KL	0,624	0,156	1,155	0,105	2	1,08	11	7,75	9,89	31,81	0
PAH	0,555	0,1729	0,9657	0,08779	2	1,36	11	9,43	25,79	40,29	0
Proposal	0,625	0,1436	1,1613	0,105	2	1,01	11	7,45	2,26	33,51	0

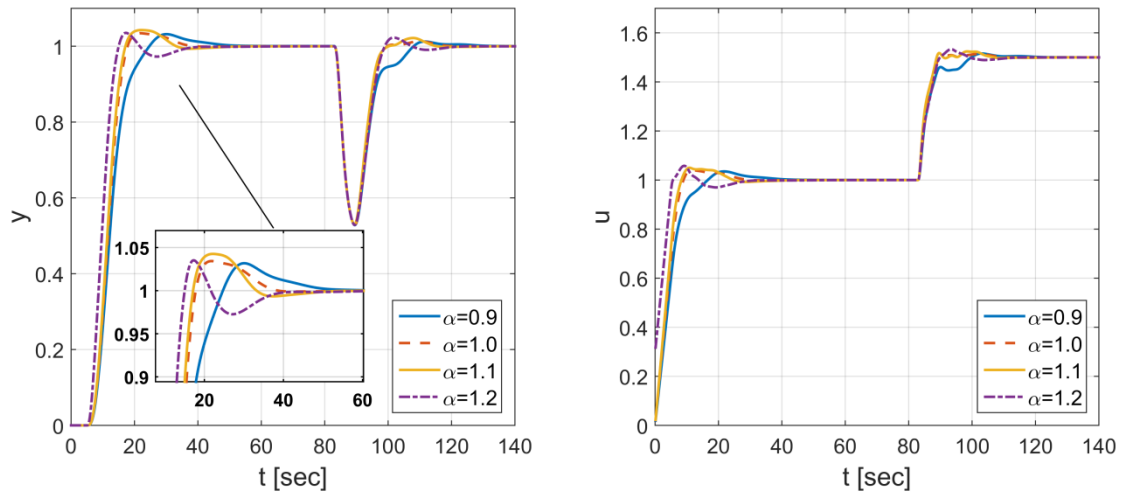
У табели 4.3 резултати добијени овим поступком за  $\alpha = 1$  упоређени су са осталим методама. Предложени поступак даје регулатор са приближно оптималним вредностима параметара када је у питању потискивање поремећаја, а за задату максималну осетљивост и осетљивост на шум. Такође, захтеви за прескок и време смирења су испуњени.

Даље, у табели 4.4 су приказани резултати за процес  $G_{P2}$ , а за различите вредности параметра  $\alpha$ , и  $A_p = 3\%$ . Одскачни одзив система на промену референце, праћен дејством поремећаја  $d(s) = 0,5/s$  у тренутку  $t = 78s$ , приказан је на слици 4.7.

Табела 4.4. Параметри регулатора и показ. квалитета процеса  $G_{P11}$  за  $\alpha \in \{0,9; 1,0; 1,1; 1,2\}$

$G_{P2}$	$\omega_n$	$T_f$	$k_p$	$k_i$	$k_d$	$M_S$	$M_P$	$M_N$	$IAE$	$A_{pr} [\%]$	$t_{sr}$	$b$
$\alpha = 0,9$	0,2039	0,0666	0,48	0,1196	0,9613	1,8	1,0	11	8,894	3,18	41,9	0
$\alpha = 1,0$	0,2277	0,0924	0,555	0,1365	1,0164	1,8	1,01	11	7,846	3,42	33,65	0
$\alpha = 1,1$	0,2107	0,1541	0,626	0,1441	1,4053	1,8	1,02	11	7,621	4,26	31,13	0
$\alpha = 1,2$	0,2524	0,1455	0,63	0,1312	1,0878	1,8	1,01	11	8,0993	3,51	34,45	0,47

У овом случају, потискивање поремећаја није ефикасно као за процес  $G_{P1}$ , па индекси перформанси имају веће вредности због великог транспортног кашњења процеса. Најбољи резултати добијају се опет за фракциони ПИД, и то за  $\alpha = 1,1$ . При потискивању поремећаја добија се вредност  $IAE = 7,621$ , при непромењеном  $M_S$  и  $M_N$ . Ради боље видљивости одзива система, у симулацији је коришћен поремећај  $d(s) = 0,5/s$  уместо јединичног  $d(s) = 1/s$ . Стварне вредности времена смирења  $t_{sr}$  и прескока  $A_{pr}$  разликују се незнатно од својих пројектованих вредности.



Слика. 4.7. Одскочни одзив процеса  $G_{P2}$  праћен дејством поремећаја у тренутку  $t=78s$ , и управљачки сигнал  $u(t)$

#### 4.4.3 Процес са доминантном динамиком у односу на транспортно кашњење

Посматра се процес  $G_{P3}(s) = \frac{1}{(s+1)(0,2s+1)(0,04s+1)(0,008s+1)}$  (овај тип процеса у литератури енглеског говорног подручја познат је под називом „*process with lag-dominated dynamics*”). Код овог типа процеса сопствена динамика система доминира у односу на транспортно кашњење. На основу захтева да прескок буде мањи од 2%, и време смирења 1% за  $t_s = 1,22$ , добијамо следеће доминантне полове затвореног система  $p_{1,2} = -4,1605 \pm 3,3412j$  ( $\omega_n = 5,3361$ ). Ако пројектујемо класични ПИД регулатор ( $\alpha = 1$ ) и  $T_f = 0,03213$ , једначине (4.13)-(4.14) сада дају

$$k_i = 3,421871k_p - 12,309696, \quad k_d = 0,120177k_p - 0,0625318, \quad (4.26)$$

па следи из (4.16)

$$k_p = -\frac{-12,309696 - 0,0625318s^2 + s(0,03213s+1) \prod_{i=0}^3 (0,2^i s+1)}{0,120177s^2 + s + 3,421871}. \quad (4.27)$$

Усвајајући  $m > 1$  и бирајући  $k_p = 15,667$  из опсега  $7,22 \leq k_p \leq 21,26$ , на основу добијене криве разлагања, обезбеђујемо да остали недоминантни полови леже лево од линије  $\sigma_d = \text{Re}\{p_{1,2}\} = -4,1605$ . Упоредни резултати различитих метода подешавања за класични ПИД регулатор приказани су у табели 4.5. И у овом случају, предложени поступак пројектовања регулатора даје приближно оптималан регулатор у смислу потискивања поремећаја, за исто  $M_S$  и  $M_N$ . Спецификације у виду прескока и времена смирења су такође испуњене. Требало би напоменути да најмања вредност индекса  $IAE$  је одговара РАН методи, али по цени вишег  $M_N$ .

Табела 4.5. Поређење различитих метода подешавања регулатора за процес  $G_{P3}$

$G_{P3}$	$k_p$	$k_i$	$k_d$	$T_f$	$M_S$	$M_P$	$M_N$	$IAE$	$A_{pr}[\%]$	$t_{sr}$	$b$
max(k)	15,5569	45,1787	1,9917	0,03319	2	1,67	60	0,0251	6,37	1,27	0
KL	15,3765	51,8726	1,9475	0,03245	2	1,78	60	0,0257	14,92	1,51	0
РАН	43,13	228,2	5,6069	0,0	2	1,65	$\infty$	0,006	28,87	1,22	0,81
Proposal	15,667	41,3008	1,9453	0,03213	2	1,66	60	0,0254	2,35	1,30	0

Ако желимо да подесимо параметре за фракциони ПИД реда  $\alpha = 1,1$  и изаберемо константу филтра  $T_f = 0,0431$ , онда су доминантни полови  $p_{1,2} = -4,0756 \pm 4,4421j$ , ( $\omega_n = 5,3$ ), при чему су узети у обзир захтеви за прескок од  $A_p = 2\%$  и време смирења  $1\%$  за  $t_s = 1,0$ . Параметри  $k_i$  и  $k_d$  као функције од  $k_p$  гласе

$$k_i = 3,425543k_p - 20,53302, \quad k_d = 0,103217k_p + 0,032618, \quad (4.28)$$

и

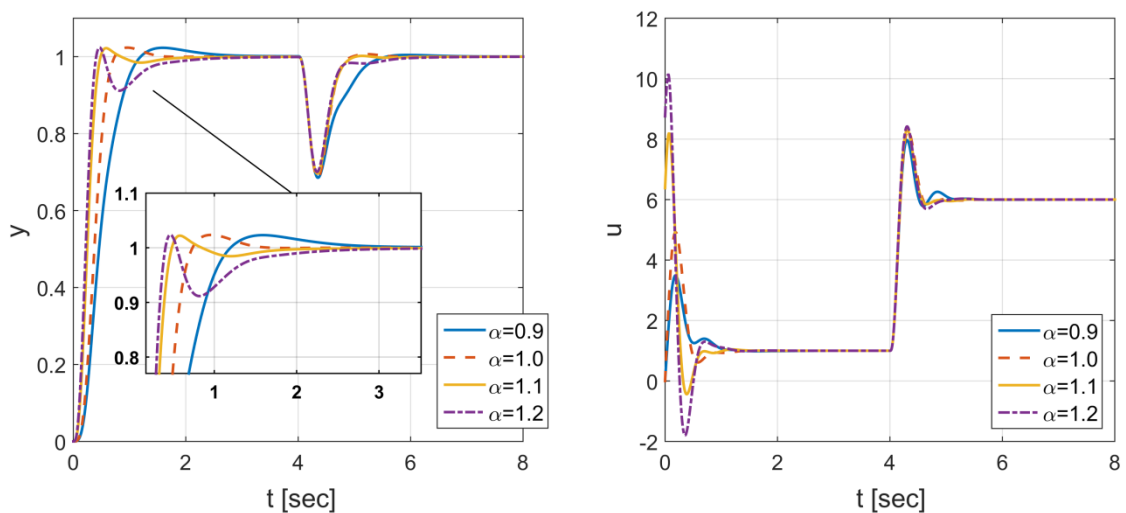
$$k_p = \frac{-20,53302 + 0,032618s^{2,1} + s(0,0431s + 1)^{1,1} \prod_{i=0}^3 (0,2^i s + 1)}{0,103217s^{2,1} + s + 3,425543}. \quad (4.29)$$



Бирајући  $k_p = 17,97$ , добијамо  $k_i = 41,024$  и  $k_d = 1,8874$ . У табели 4.6 видимо резултате за различите вредности параметра  $\alpha$ , како за конвенционални ( $\alpha = 1$ ), тако и за фракциони ( $\alpha \in \{0,9; 1,1; 1,2\}$ ) регулатор. Као и до сада, израчунати су критеријуми перформанси ( $IAE, A_{pr}, t_{sr}, M_N$ ) и робустности ( $M_S, M_P$ ) за процес  $G_{P3}$ . Референтни одскочни одзив са одзивом на поремећај  $d(s) = 5/s$  у тренутку  $t = 4s$ , приказан је испод на слици 4.8, заједно са временским одзивом управљачког сигнала  $u(t)$ .

Табела 4.6. Параметри регулатора и показ. квалитета процеса  $G_{P3}$  за  $\alpha \in \{0,9; 1,0; 1,1; 1,2\}$

$G_{P3}$	$\omega_n$	$T_f$	$k_p$	$k_i$	$k_d$	$M_S$	$M_P$	$M_N$	$IAE$	$A_{pr} [\%]$	$t_{sr}$	$b$
$\alpha = 0,9$	3,6477	0,0292	13,95	29,48	2,4912	2	1,59	60	0,0355	2,31	2,25	0
$\alpha = 1,0$	5,3361	0,03213	15,667	41,3	1,9453	2	1,66	60	0,0254	2,35	1,3	0
$\alpha = 1,1$	5,3	0,0431	17,97	41,02	1,8874	2	1,62	60	0,0245	2,21	1,47	0,355
$\alpha = 1,2$	5,7704	0,052	21,2	38,46	1,7089	2	1,71	60	0,026	2,39	2,01	0,413



Слика 4.8. Одскочни одзив процеса  $G_{P3}$  праћен дејством поремећаја у тренутку  $t = 4s$ , и управљачки сигнал  $u(t)$

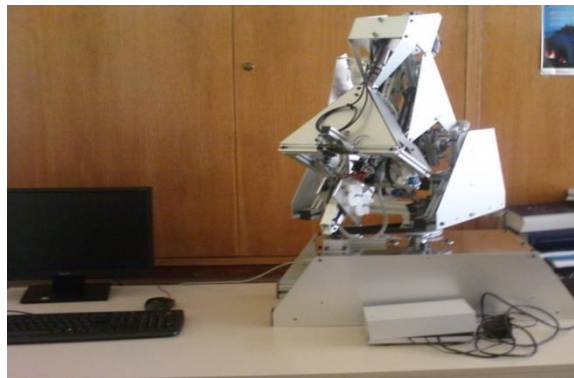
У овом случају, није лако закључити који управљачки систем даје боље резултате, јер предност фракционог регулатора је незнатна посматрајући  $IAE$  индекс за  $\alpha = 1,1$ . Видимо да су вредности  $IAE$  индекса релативно мале, што значи да оба регулатора (класични и фракциони) добро потискују поремећај. Управо из тог разлога, а ради боље видљивости одзива система, коришћен је поремећај  $d(s) = 5/s$  уместо јединичног  $d(s) = 1/s$ .

Табела А. „Look up” табела нормализованих полова  $s_n$  тест функције  $H(s)$

	$A_p=1\%$	$A_p=2\%$	$A_p=3\%$	$A_p=4\%$	$A_p=5\%$
$\alpha=0,9$	$\xi \approx 0,8805$ $s_n \approx -0,72262$ $\pm j 0,3341$ $t_n \approx 6,94$	$\xi \approx 0,8$ $s_n \approx -0,71797$ $\pm j 0,44257$ $t_n \approx 8,01$	$\xi \approx 0,7482$ $s_n \approx -0,70213$ $\pm j 0,50803$ $t_n \approx 7,9536$	$\xi \approx 0,7082$ $s_n \approx -0,68479$ $\pm j 0,55545$ $t_n \approx 7,81$	$\xi \approx 0,6749$ $s_n \approx -0,66763$ $\pm j 0,59277$ $t_n \approx 7,66$
$\alpha=0,95$	$\xi \approx 0,8498$ $s_n \approx -0,78725$ $\pm j 0,43552$ $t_n \approx 6,22$	$\xi \approx 0,7883$ $s_n \approx -0,75589$ $\pm j 0,52676$ $t_n \approx 7,23$	$\xi \approx 0,7457$ $s_n \approx -0,72836$ $\pm j 0,58202$ $t_n \approx 7,2595$	$\xi \approx 0,7115$ $s_n \approx -0,70395$ $\pm j 0,62239$ $t_n \approx 7,19$	$\xi \approx 0,6824$ $s_n \approx -0,68193$ $\pm j 0,65427$ $t_n \approx 7,09$
$\alpha=1,0$	$\xi \approx 0,8261$ $s_n \approx -0,82610$ $\pm j 0,56352$ $t_n \approx 5,58$	$\xi \approx 0,7797$ $s_n \approx -0,7797$ $\pm j 0,62615$ $t_n \approx 6,51$	$\xi \approx 0,7447$ $s_n \approx -0,74470$ $\pm j 0,66739$ $t_n \approx 6,6027$	$\xi \approx 0,7156$ $s_n \approx -0,7156$ $\pm j 0,69851$ $t_n \approx 6,59$	$\xi \approx 0,6901$ $s_n \approx -0,69010$ $\pm j 0,72371$ $t_n \approx 6,55$
$\alpha=1,05$	$\xi \approx 0,8100$ $s_n \approx -0,83086$ $\pm j 0,69664$ $t_n \approx 5,02$	$\xi \approx 0,7747$ $s_n \approx -0,78385$ $\pm j 0,73286$ $t_n \approx 5,86$	$\xi \approx 0,7496$ $s_n \approx -0,73487$ $\pm j 0,75958$ $t_n \approx 6,0027$	$\xi \approx 0,7211$ $s_n \approx -0,71667$ $\pm j 0,78100$ $t_n \approx 6,05$	$\xi \approx 0,6987$ $s_n \approx -0,68971$ $\pm j 0,79899$ $t_n \approx 6,05$
$\alpha=1,10$	$\xi \approx 0,8012$ $s_n \approx -0,80990$ $\pm j 0,81975$ $t_n \approx 4,58$	$\xi \approx 0,7736$ $s_n \approx -0,76898$ $\pm j 0,83814$ $t_n \approx 5,30$	$\xi \approx 0,7496$ $s_n \approx -0,73487$ $\pm j 0,85327$ $t_n \approx 5,47804$	$\xi \approx 0,7282$ $s_n \approx -0,70546$ $\pm j 0,86607$ $t_n \approx 5,56$	$\xi \approx 0,7085$ $s_n \approx -0,67913$ $\pm j 0,87727$ $t_n \approx 5,60$
$\alpha=1,15$	$\xi \approx 0,7989$ $s_n \approx -0,77317$ $\pm j 0,92889$ $t_n \approx 7,14$	$\xi \approx 0,7764$ $s_n \approx -0,73918$ $\pm j 0,93663$ $t_n \approx 7,39$	$\xi \approx 0,7561$ $s_n \approx -0,70944$ $\pm j 0,94350$ $t_n \approx 7,95151$	$\xi \approx 0,7374$ $s_n \approx -0,68276$ $\pm j 0,94969$ $t_n \approx 7,75$	$\xi \approx 0,7199$ $s_n \approx -0,65838$ $\pm j 0,95533$ $t_n \approx 7,87$
$\alpha=1,2$	$\xi \approx 0,8020$ $s_n \approx -0,72678$ $\pm j 1,02477$ $t_n \approx 7,76$	$\xi \approx 0,7830$ $s_n \approx -0,69893$ $\pm j 1,02623$ $t_n \approx 7,79$	$\xi \approx 0,7654$ $s_n \approx -0,67365$ $\pm j 1,02772$ $t_n \approx 7,8251$	$\xi \approx 0,7488$ $s_n \approx -0,65025$ $\pm j 1,02919$ $t_n \approx 7,86$	$\xi \approx 0,7330$ $s_n \approx -0,62837$ $\pm j 1,03065$ $t_n \approx 7,89$

## 5. Нумерички резултати управљања роботским манипулатором са шест степени слободе

Као саставни део лабораторије за примењену механику у оквиру Машинског факултета у Београду, налази се и роботски манипулатор *NeuroArm* [135] који се користи како у едукативне сврхе, тако и за научно-истраживачки рад из области роботике (слика 5.1). Са механичке тачке гледишта, овај робот поседује шест степени слободе, и то шест ротационих зглобова. Прва три ротациона зглоба служе за позиционирање врха роботске хватаљке, а преостала три за њену оријентацију. Робот поседује и седми степен слободе који припада роботској хватаљци, и служи за прихватање разних објеката (предмета). Због свог незнатног утицаја на динамику система, овај седми степен слободе може се занемарити приликом формирања математичког модела манипулатора. Интеракција робота са околином није предмет истраживања ове дисертације већ управљање кретањем робота [136], а на положај истог утичу искључиво првих шест степени слободе.

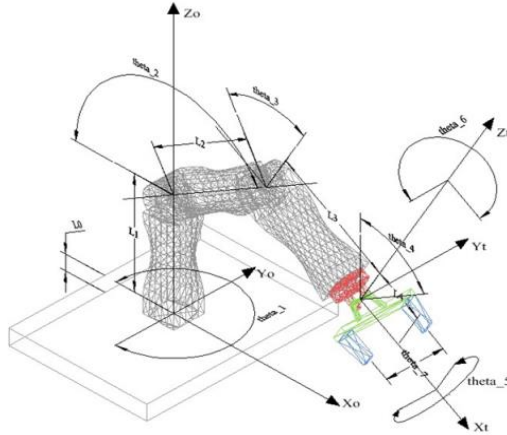


Слика 5.1 *NeuroArm* роботски манипулатор

### 5.1 Математички модел *NeuroArm* роботског манипулатора

Шематски приказ лабораторијског модела роботског манипулатора дат је на слици 5.2. Пошто су сви зглобови ротациони, можемо писати

$$\bar{\xi}_i = 1, \quad i = 1, 2, \dots, 6. \quad (5.1)$$



Слика 5.2 Шематски приказ *NeuroArm* роботског манипулатора

Избором референтне конфигурације дефинишу се локални координатни системи  $C_i \bar{\xi}_i \eta_i \zeta_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 6$ ), па су пројекције јединичних вектора  $\vec{e}_i$  на њихове локалне осе дате са

$$\vec{e}_1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \vec{e}_3 = \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \vec{e}_4 = \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \vec{e}_5 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad \vec{e}_6 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (5.2)$$

Физичким мерењем димензија робота, нацртан је 3Д модел манипулатора коришћењем софтверског пакета *SolidWorks*. Из датог 3Д модела извучене су геометријске и динамичке карактеристике робота. Тиме су добијене пројекције вектора  $\vec{\rho}_{ii}$  на осе локалних координатних система које гласе (све величине дате су у односу на основне јединице *SI* система)

$$\vec{\rho}_{11} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,47 \end{Bmatrix} \text{ m}, \quad \vec{\rho}_{22} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,235 \end{Bmatrix} \text{ m}, \quad \vec{\rho}_{33} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0,3 \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ m}, \quad (5.3)$$

$$\vec{\rho}_{44} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ m}, \quad \vec{\rho}_{55} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ m}, \quad \vec{\rho}_{66} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0,18 \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ m}.$$

Слично, пројекције вектора  $\vec{\rho}_i$  на локалне осе дате су са

$$\begin{aligned}
\vec{\rho}_1 &= \begin{Bmatrix} 0,0229 \\ -0,0331 \\ -0,1702 \end{Bmatrix} \text{ m}, \quad \vec{\rho}_2 = \begin{Bmatrix} 0,0503 \\ -0,0133 \\ -0,2230 \end{Bmatrix} \text{ m}, \quad \vec{\rho}_3 = \begin{Bmatrix} 0,0029 \\ -0,1795 \\ 0,0457 \end{Bmatrix} \text{ m}, \\
\vec{\rho}_4 &= \begin{Bmatrix} -0,0408 \\ -0,0107 \\ -0,0443 \end{Bmatrix} \text{ m}, \quad \vec{\rho}_5 = \begin{Bmatrix} 0,0002 \\ -0,0108 \\ -0,0462 \end{Bmatrix} \text{ m}, \quad \vec{\rho}_6 = \begin{Bmatrix} -0,0024 \\ -0,1020 \\ -0,0035 \end{Bmatrix} \text{ m}.
\end{aligned} \tag{5.4}$$

Нека генералисане координате  $q_i$  за  $i=1,2,\dots,6$ , означавају релативне углове померања роботског сегмента ( $V_i$ ) у односу на тело ( $V_{i-1}$ ). У случају првог роботског сегмента  $q_1$  представља апсолутни угао обртања тела ( $V_1$ ) у односу на непокретно постоље ( $V_0$ ) за које је везан Декартов инерцијални координатни систем  $Oxyz$ . Сада можемо дефинисати одговарајуће матрице трансформација. На основу (2.18), Родригова матрица трансформације за први сегмент је

$$[A_{0,1}] = [I] + \bar{\xi}_1 \left( (1 - \cos q_1) [e_1^d]^2 + \sin q_1 [e_1^d] \right) = \begin{bmatrix} \cos q_1 & -\sin q_1 & 0 \\ \sin q_1 & \cos q_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{5.5}$$

На сличан начин се одређују и следеће матрице

$$[A_{1,2}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos q_2 & \sin q_2 \\ 0 & -\sin q_2 & \cos q_2 \end{bmatrix}, \tag{5.6}$$

$$[A_{2,3}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos q_3 & \sin q_3 \\ 0 & -\sin q_3 & \cos q_3 \end{bmatrix}, \tag{5.7}$$

$$[A_{3,4}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos q_4 & \sin q_4 \\ 0 & -\sin q_4 & \cos q_4 \end{bmatrix}, \tag{5.8}$$

$$[A_{4,5}] = \begin{bmatrix} \cos q_5 & -\sin q_5 & 0 \\ \sin q_5 & \cos q_5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{5.9}$$

$$[A_{5,6}] = \begin{bmatrix} \cos q_6 & 0 & \sin q_6 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin q_6 & 0 & \cos q_6 \end{bmatrix}. \quad (5.10)$$

Сада се сложене матрице трансформација могу израчунати лако на следећи начин

$$\begin{aligned} [A_{0,2}] &= [A_{0,1}][A_{1,2}], [A_{0,3}] = [A_{0,2}][A_{2,3}], [A_{0,4}] = [A_{0,3}][A_{3,4}], \\ [A_{0,5}] &= [A_{0,4}][A_{4,5}], [A_{0,6}] = [A_{0,5}][A_{5,6}], [A_{1,3}] = [A_{1,2}][A_{2,3}], \\ [A_{1,4}] &= [A_{1,3}][A_{3,4}], [A_{1,5}] = [A_{1,4}][A_{4,5}], [A_{1,6}] = [A_{1,5}][A_{5,6}], \\ [A_{2,4}] &= [A_{2,3}][A_{3,4}], [A_{2,5}] = [A_{2,4}][A_{4,5}], [A_{2,6}] = [A_{2,5}][A_{5,6}], \\ [A_{3,5}] &= [A_{3,4}][A_{4,5}], [A_{3,6}] = [A_{3,5}][A_{5,6}], [A_{4,6}] = [A_{4,5}][A_{5,6}]. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Даље, тензори инерције  $[J_{C_i}]$  дефинисани су у односу на локалне координатне системе везане за тела, и гласе

$$[J_{C_1}] = \begin{bmatrix} 42085818 & 3082813 & 1997593 \\ 3082813 & 49380655 & -2988906 \\ 1997593 & -2988906 & 47614207 \end{bmatrix} \cdot 10^{-9} \text{kgm}^2, \quad (5.12)$$

$$[J_{C_2}] = \begin{bmatrix} 34378199 & -2156930 & -8549050 \\ -2156930 & 45493524 & 4460261 \\ -8549050 & 4460261 & 16278300 \end{bmatrix} \cdot 10^{-9} \text{kgm}^2, \quad (5.13)$$

$$[J_{C_3}] = \begin{bmatrix} 38660157 & -1124476 & -228711 \\ -1124476 & 9921087 & 1658551 \\ -228711 & 1658551 & 41940909 \end{bmatrix} \cdot 10^{-9} \text{kgm}^2, \quad (5.14)$$

$$[J_{C_4}] = \begin{bmatrix} 1448518 & -221761 & -613620 \\ -221761 & 3195995 & 268505 \\ -613620 & 268505 & 2465556 \end{bmatrix} \cdot 10^{-9} \text{kgm}^2, \quad (5.15)$$

$$[J_{C_5}] = \begin{bmatrix} 504398 & -2188 & 1581 \\ -2188 & 408439 & -69397 \\ 1581 & -69397 & 120563 \end{bmatrix} \cdot 10^{-9} \text{kgm}^2, \quad (5.16)$$

$$[J_{C_6}] = \begin{bmatrix} 1335978 & 3149 & -41263 \\ 3149 & 1052426 & -3372 \\ -41263 & -3372 & 590891 \end{bmatrix} \cdot 10^{-9} \text{kgm}^2. \quad (5.17)$$

Масе роботских сегмената процењене су на основу 3Д модела да имају следеће вредности

$$\begin{aligned} m_1 &= 3,3577\text{kg}, m_2 = 2,2493\text{kg}, m_3 = 1,6742\text{kg}, \\ m_4 &= 0,51097\text{kg}, m_5 = 0,13711\text{kg}, m_6 = 0,47721\text{kg}. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Сада се кинематске величине роботског система попут угаоне брзине  $i$ -тог роботског сегмента  $\vec{\omega}_i$ , као и брзине центра инерције  $\vec{V}_{Ci}$ , могу израчунати на основу израза (2.27) и (2.23), респективно. Пратећи поступак описан у другом поглављу може се доћи до диференцијалних једначина кретања роботског система (2.50) записаних у матричном облику

$$[A]\{\ddot{\mathbf{q}}\} + [B]\{\dot{\mathbf{q}}\} = \{\mathbf{Q}^g\} + \{\mathbf{Q}^c\} + \{\mathbf{Q}^d\} + \{\mathbf{Q}^a\}, \quad (5.19)$$

где је  $A = A(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ ,  $B = B(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ ,  $\mathbf{Q}^g = \mathbf{Q}^g(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^6$ ,  $\mathbf{Q}^c = \mathbf{Q}^c(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^6$ ,  $\mathbf{Q}^d = \mathbf{Q}^d(\dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^6$  и  $\mathbf{Q}^a \in \mathbb{R}^6$ . Овде ћемо се ограничити да на наш роботски систем делују силе земљине теже и погонске силе, док ће се утицај сила у опругама и дисипативних сила трења занемарити.

## 5.2 Математички модел мотора једносмерне струје *NeuroArm* роботског манипулатора

Управљање датим роботским манипулатором омогућено је деловањем шест *DC* мотора (мотора једносмерне струје) на шест роботских сегмената респективно. *NeuroArm* робот поседује следеће *Maxon*-ове моторе: прва три роботска сегмента задужена за позиционирање врха роботске хваталке покрећу се помоћу *Maxon RE 36* мотора снаге 70 W, а последња три сегмента помоћу *Maxon A-max 22* мотора снаге 5 W. Параметри који су потребни за формирање математичког модела мотора извучени су из техничких карактеристика мотора обезбеђених од стране произвођача истих. Показано је на крају другог поглавља да се понашање мотора може представити са

задовољавајућом тачношћу преносном функцијом (једн. (2.115)) другог реда облика

$$G_{pi}(s) = \frac{q_{mi}(s)}{u_i(s)} = \frac{k_{mi}}{T_{mi}s + 1}, \quad i = 1, \dots, 6, \quad (5.20)$$

За први, већи мотор, ознаке *Maxon RE 36*, из спецификације мотора могу се добити следећи подаци:  $j_{mi} = 65,2 \text{ gcm}^2$ ,  $r_i = 1,71 \Omega$ ,  $\ell_i = 0,3 \text{ mH}$ ,  $k_{ii} = 44,5 \text{ mNm/A}$  и  $k_{ei} = 215 \text{ rpm/V}$ , за  $i = 1, 2, 3$ . Убацујући горње карактеристике у (2.113), можемо добити преносну функцију облика (2.114), одакле следи

$$G_{pi}(s) = \frac{22,515}{s(0,00546s + 1)}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (5.21)$$

Понављајући исти поступак, само сада за мањи мотор *Maxon A-max 22*, долазимо до следећих података:  $j_{mi} = 4,2 \text{ gcm}^2$ ,  $r_i = 14 \Omega$ ,  $\ell_i = 0,89 \text{ mH}$ ,  $k_{ii} = 17,1 \text{ mNm/A}$  и  $k_{ei} = 558 \text{ rpm/V}$ , за  $i = 4, 5, 6$ . Преносна функција мотора у овом случају гласи

$$G_{pi}(s) = \frac{58,43}{s(0,02003s + 1)}, \quad i = 4, 5, 6. \quad (5.22)$$

У случају *NeuroArm* роботског манипулатора, између мотора и роботских сегмената постоје редуктори великог преносног односа који се могу дефинисати дијагоналном матрицом  $[N]$ , по узору на једн. (2.109)

$$[N] = \text{diag}\{74, 230, 74, 84, 370, 84\}, \quad (5.23)$$

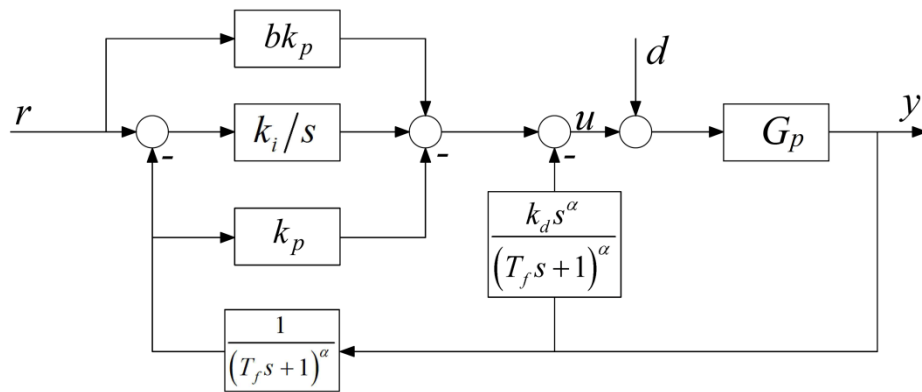
Као што је већ показано, присуство редуктора тежи да линеаризује систем, услед чега се нелинеарни чланови у динамичком моделу робота могу занемарити. Другим речима, при пројектовању управљачког система за *NeuroArm* манипулатор, довољно је узети у обзир преносне функције мотора (5.21) и (5.22), а дејство роботских сегмената на моторе посматрати као поремећајне величине. Тиме добијамо линеаран и распрегнут (декуплован) систем управљања, где се сваким мотором управља независно, као што је то



објашњено у потпоглављу 2.9. Сада ћемо применити методу подешавања параметара ПИД регулатора описану у четвртом поглављу за управљање датим роботским системом.

### 5.3 Управљање *NeuroArm* роботским манипулатором методом доминантног подешавања полова

Посматра се прво преносна функција мотора (5.21). Блок дијаграм затвореног система управљања приказан је на слици 5.3.



Слика 5.3 Блок дијаграм система регулисања мотора

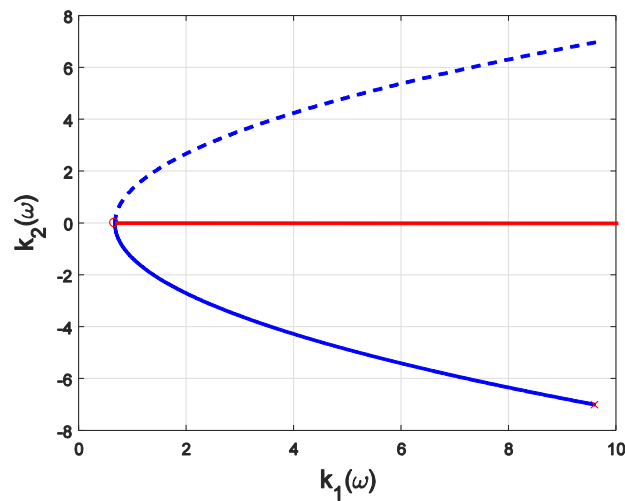
За дати процес класични ПИД регулатор представља одговарајући избор зато што је у овом случају ред мотора (други ред) једнак реду регулатора [137]. Значи, бирајући  $\alpha = 1$  ( $\beta = 1$ ), и на основу захтева да прескок буде мањи од 1%, и време смирења 1% за  $t_s = 1$ , из табеле А добијамо доминантне полове  $p_{1,2} = -4,6096 \pm 3,1445j$ , при чему је  $\omega_n = t_n/t_s = 5,58$ . Ако за временску константу филтра усвојимо  $T_f = 0,1$ , лако се добија

$$k_i = 3,377315k_p - 0,469046, \quad k_d = 0,108468k_p - 0,017602, \quad (5.24)$$

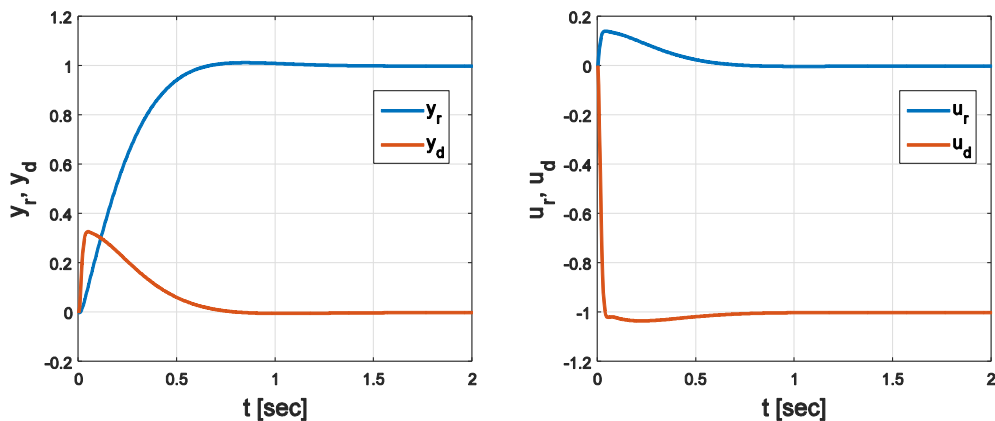
одакле следи

$$k_p = -\frac{s^2(0,1s+1)(0,00546s+1) - 22,515(0,469046 + 0,017602s^2)}{22,515(0,108468s^2 + s + 3,377315)}. \quad (5.25)$$

За  $m > 3$  сви недоминантни полови морају бити лево од линије  $\sigma_d = 3 \cdot \text{Re}\{p_{1,2}\} = -13,8288$ . Примењујући методу Д-разлагања црта се крива декомпозиције у  $k_p$  параметарској равни која је приказана на слици 5.4. Видимо да област  $D(2)$  није ограничена, а минимална вредност  $k_p$  параметра за коју су дати полови доминантни је  $k_{p,\min} \approx 0,665$ . Бирајући са реалне осе вредност  $k_p = 3$ , на основу (5.24) следи  $k_i = 9,6629$  и  $k_d = 0,3078$ .



Слика 5.4. Крива Д-разлагања у парам. равни за мотор  $G_{pi}$ ,  $i = 1, 2, 3$



Слика 5.5. Одзив мотора  $G_{pi}$ ,  $i = 1, 2, 3$ , при промени референтне вредности и при дејству поремећаја, и управљачки сигнал  $u(t)$

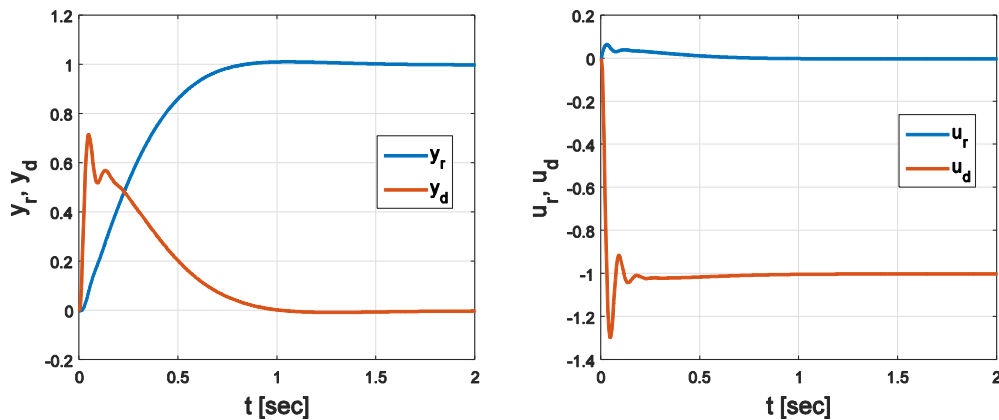
На слици 5.5 приказан је одзив мотора на промену референтне вредности, као и одзив истог услед дејства поремећаја  $d(s)=1/s$  при нултим почетним вредностима. На десној страни слике дата је и промена управљачког сигнала  $u(t)$  у току времена. Видимо са слике да предложена метода ефикасно потискује поремећај, и да прескок и време смирења не одступају много од својих пројектованих вредности.

Поновимо сада исти поступак, али за мотор дат преносном функцијом (5.22). Захтевајући следеће вредности  $\alpha=1$ , прескок  $A_p=1\%$  и време смирења  $1\%$  за  $t_s=1,2$ , доминантни полови постају  $p_{1,2}=-3,8414 \pm 2,6204j$ . Ако се усвоји  $T_f=0,1$ , добија се

$$k_i = 2,814429k_p - 0,108977, \quad k_d = 0,130162k_p - 0,007654, \quad (5.26)$$

и

$$k_p = -\frac{s^2(0,1s+1)(0,02003s+1) - 58,43(0,108977+0,007654s^2)}{58,43(0,130162s^2+s+2,814429)}. \quad (5.27)$$



Слика 5.6. Одзив мотора  $G_{pi}$ ,  $i=4,5,6$ , при промени референтне вредности и при дејству поремећаја, и управљачки сигнал  $u(t)$

На основу криве разлагања за  $m>3$  бирамо вредност параметра  $k_p=1,5$ , одакле следи  $k_i=4,1127$  и  $k_d=0,1876$ . Пошто су сада параметри регулатора подешени, може се тестирати мотор на промену референтне вредности и на

дејство поремећаја. То је и приказано на слици 5.6, одакле видимо да је одзив система очекиван.

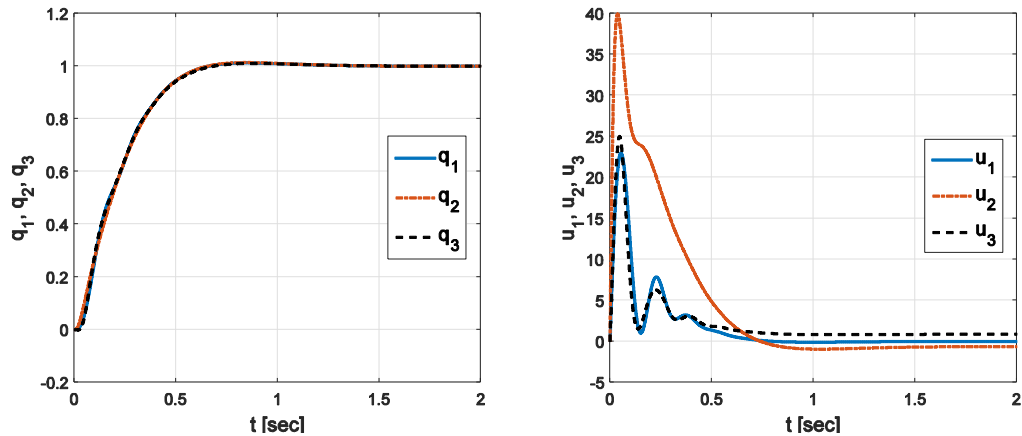
Вредности параметара регулатора  $k_p$ ,  $k_i$ ,  $k_d$  и  $T_f$ , затим показатељи робустности система ( $M_S$  и  $M_P$ ), као и критеријуми перформанси ( $IAE$ ,  $A_{pr}$ ,  $t_{sr}$ ,  $M_N$ ) за преносне функције оба мотора дате су у табели 5.1. Параметар  $b$  једнак је нули у обе симулације. Видимо из дате табеле да предложени метод даје ниску вредност  $IAE$ , што се закључује и на основу слика 5.5 и 5.6. Такође, нумеричке вредности прескока и времена смирења потврђују да се симулациони резултати мало разликују од захтеваних вредности.

Табела 5.1. Параметри регулатора и показатељи квалитета система управљања за моторе  $G_{pi}$ ,  $i = 1, 2, \dots, 6$

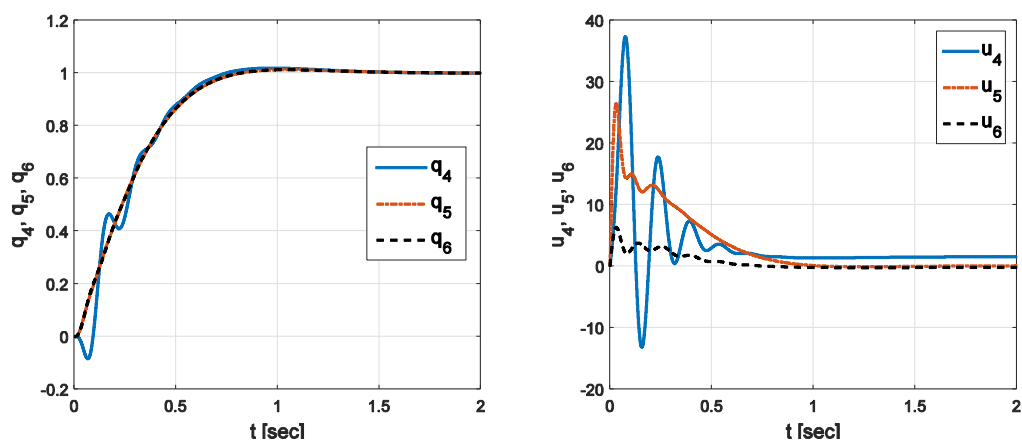
	$\omega_n$	$T_f$	$k_p$	$k_i$	$k_d$	$M_S$	$M_P$	$M_N$	$IAE$	$A_{pr}$ [%]	$t_{sr}$	$b$
$G_{P1,2,3}$	5,58	0,1	3,0	9,663	0,308	1,21	1,05	3,08	0,1063	1,35	1,01	0
$G_{P4,5,6}$	4,65	0,1	1,5	4,113	0,188	1,78	1,50	1,88	0,2491	1,21	1,21	0

Сада ћемо применити предложени поступак за управљање *NeuroArm* роботским манипулатором. Да резимирамо, прва три роботска сегмента се покрећу са три истоветна *Maxon RE 36* мотора чија је преносна функција дата са (5.21), а параметри ПИД регулатора за њихово управљање су:  $k_p = 3$ ,  $k_i = 9,6629$ ,  $k_d = 0,3078$  и  $T_f = 0,1$ . На преостала три роботска сегмента делују *Maxon A-max 22* мотори преносне функције (5.22), са следећим параметрима регулатора:  $k_p = 1,5$ ,  $k_i = 4,1127$ ,  $k_d = 0,1876$  и  $T_f = 0,1$ . Између мотора и сегмената постоје редуктори чији преносни однос је дат релацијом (5.23). Пред роботским манипулатором се поставља задатак позиционог управљања: из референтног положаја ( $q_i = 0$ ,  $i = 1, \dots, 6$ ) и нултим почетним условима ( $\dot{q}_i = 0$ ,  $i = 1, \dots, 6$ ), робот мора да дође у положај одређен са  $q_{i,r} = 1 \text{ rad}$ ,  $i = 1, \dots, 6$ . При наведеним условима извршена је симулација

управљања роботског манипулатора, а одзив система приказан је на сликама 5.7 и 5.8.



Слика 5.7. Одзив *NeuroArm* роботског манипулатора на промену референтне вредности и управљачки сигнали за прва три роботска сегмента



Слика 5.8. Одзив *NeuroArm* роботског манипулатора на промену референтне вредности и управљачки сигнали за последња три роботска сегмента

Одзиви прва три роботска сегмента и њихови управљачки сигнали приказани су на слици 5.7, а за последња три сегмента на слици 5.8. Ако упоредимо одзиве сегмената  $q_i(t)$ ,  $i=1,2,3$ , са слике 5.7 са одзивом мотора *Maxon RE 36* са слике 5.5, видећемо да се они незнатно разликују. Такав резултат смо могли и да претпоставимо, с обзиром да смо рекли да у случају присуства редуктора великог преносног односа динамика роботског система се са довољном тачношћу може апроксимирати динамиком мотора. Исти

закључак важи и за одзиве последња три роботска сегмента  $q_i(t)$ ,  $i = 4, 5, 6$ , са слике 5.8, и одзив мотора *Maxon A-max 22* са слике 5.6. У овом случају, до малог одступања долази код одзива четвртог роботског сегмента  $q_4(t)$ , што се може објаснити првенствено утицајем кретања другог и трећег сегмента, а која имају карактер поремећаја на поменути четврти сегмент. Што се тиче управљачких сигнала, они се знатно разликују ако упоредимо одговарајуће слике. То није изненађујуће, с обзиром да су јединични одскачни одзиви мотора са слика 5.5 и 5.6 добијени без додатног оптерећења на осовине мотора, док у случају одзива са слика 5.7 и 5.8 на кретање роботског сегмента утичу и остали сегменти, па одговарајући мотори морају да савладају тај утицај кроз адекватну промену управљачког сигнала.

## **5.4 Управљање *NeuroArm* роботским манипулатором применом методе симетричног оптимума и фракционог интегралног компензатора**

Овде ће се приказати још један начин управљања датим роботским манипулатором који се заснива на принципу симетричног оптимума и употреби фракционог интегралног компензатора. Подешљиви параметри компензатора одређени су решавањем нелинеарног оптимизационог проблема.

### **5.4.1 Уводна разматрања**

Карактеристике прелазног процеса и одзив система у стационарном стању може се побољшати уношењем диференцијалног и/или интегралног компензатора, који свој утицај остварује мењајући претек фазе и претек појачања система. Познато је да је претек фазе повезан са релативном стабилношћу система, док је брзина реаговања система пропорционална ширини пропусног опсега. Дакле, мењајући пресечну учестаност система можемо обликовати наведене карактеристике. Овде ћемо то постићи увођењем фракционог компензатора, који представља генерализацију класичног компензатора, и који је описан следећом преносном функцијом

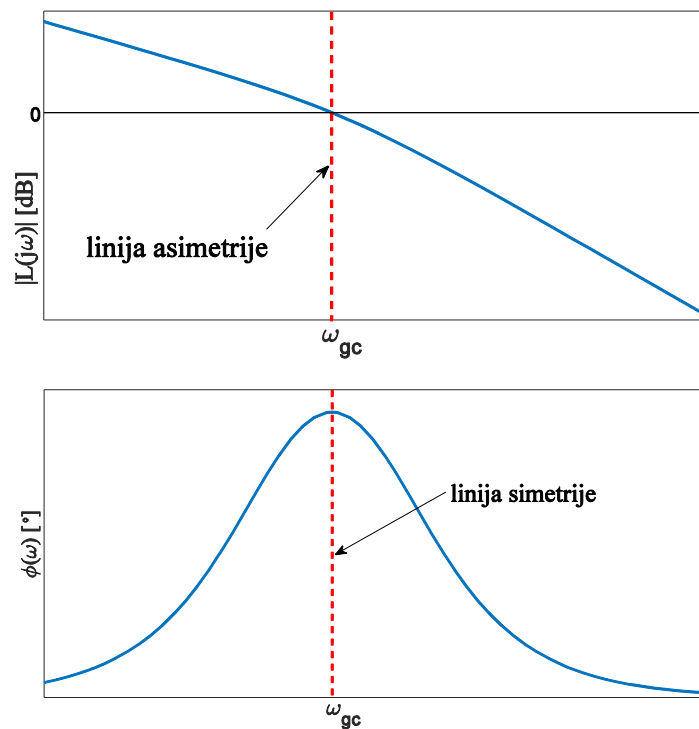
$$C(s) = K_c \left( \frac{as+1}{bs+1} \right)^\alpha, \quad (5.28)$$

где је  $K_c$  његово појачање,  $\alpha$  је извод нецелобројног реда ( $\alpha > 0$ ),  $1/a$  је нула, а  $1/b$  пол компензатора у левој полуравни. За  $a < b$  добијамо интегрални компензатор. Утицај фракционог извода  $\alpha$  на карактеристике затвореног система је значајан и изненађујућ. Са смањењем овог параметра растојање између нуле и пола постаје веће и обрнуто, а фазна карактеристика на одговарајућем опсегу постаје све „равнија”, тј. има скоро константну вредност. Због ове чињенице компензатор постаје флексибилнији и омогућава увођење робустности у систем. На пример, одговарајућим поступком пројектовања компензатора може се постићи да затворени систем управљања буде робустан са становишта прескока, тј. да прескок система остане у жељеним границама са променом параметара процеса [73,138]. Управо овакву особину тежићемо да постигнемо при управљању роботским манипулатором код кога, као што је раније наглашено, вредност прескока може бити један од битнијих захтева приликом пројектовања система.

Интегрални компензатор се обично користи када желимо да побољшамо тачност рада система у стационарног стању, и када желимо да постигнемо боље потискивање немерљивог поремећаја. За случај када је  $a > b$  у горњој формули добијамо фракциони диференцијални компензатор који се користи да се побољша претек фазе система. Овде ћемо пројектовати фракциони интегрални компензатор за управљање роботским манипулатором применом методе симетричног оптимума, а зарад постизања жељених перформанси система [139].

Велики број метода за подешавање параметара регулатора се заснива на решавању конкретног оптимизационог проблема [140]. Поред њих, развијене су алтернативне методе попут симетричног и несиметричног оптимума [141–145]. Принцип симетричног оптимума је први увео Кеслер (*Kessler*) [146], да би затим она била даље разрађена од стране разних аутора, [50,147,148]. Идеја методе симетричног оптимума је да фазно фреквенцијска

карактеристика  $\varphi(\omega)$  преносне функције отвореног кола (или карактеристика  $\varphi_{pm}(\omega) = 180^\circ + \varphi(\omega)$ ) буде симетрична у односу на линију која је управна на фреквенцијску осу у тачки пресечне учестаности ( $\omega_{gc}$ , 0dB). Принцип симетричног оптимума графички је илустрован на слици 5.9. Користећи ову идеју могуће је формирати критеријум симетричног оптимума на следећи начин: што више непарних извода фазно фреквенцијске карактеристике  $\varphi(\omega)$  требало би да тежи нули у тачки  $\omega_{gc}$ . Имајући ово у виду, параметри фракционог компензатора могу се добити решавањем оптимизационог проблема који ће бити формулисан у наставку текста.



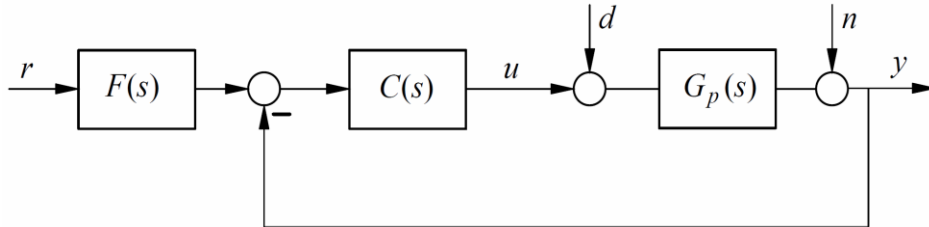
Слика 5.9 Илустрација принципа симетричног оптимума

#### 5.4.2 Метода симетричног оптимума

Блок дијаграм система управљања са фракционим компензатором  $C(s)$  је приказан на слици 5.10, и притом је коришћена следећа нотација:  $G_p(s)$  - је преносна функција процеса,  $r(t)$  - референтни сигнал,  $y(t)$  - излаз система,



$u(t)$ - управљачки сигнал,  $d(t)$ - немерљиви поремећај и  $n(t)$ - представља шум који се уноси у систем приликом мерења излаза. На одзив система се може додатно утицати увођењем префилтра у ознаци  $F(s)$ .



Слика 5.10 Предложена управљачка структура са фракционим компензатором

Преносна функција отвореног кола система са слике 5.10 дата је са

$$L_{ok}(s) = C(s)G_p(s). \quad (5.29)$$

Као што је већ речено, идеја иза симетричног оптимума је да се фазно фреквенцијска карактеристика  $\varphi(\omega)$  понаша као симетрична функција у  $\varepsilon$ -околини пресечне учестаности  $\omega_{gc}$ . Математички, то се може исказати следећим условом

$$\mu_p = \left. \frac{\partial^p \varphi(\omega)}{\partial \omega^p} \right|_{\omega=\omega_{gc}} = 0, \quad p = 1, 3, 5, \dots \quad (5.30)$$

Пошто компензатор облика (5.28) има ограничен број подешљивих параметара, релација (5.30) не може бити задовољена за све целобројне вредности  $p$ . Да би се обезбедио довољан степен симетричности фреквенцијске карактеристике од  $L_{ok}(s)$  око учестаности  $\omega_{gc}$ , довољно је узети да израз (5.30) буде испуњен за  $p=1,3$ . Поред овог услова, при пројектовању управљачког система мора се водити рачуна о жељеном претеку фазе  $\varphi_{pm}^*$ , односно мора важити следеће

$$\varphi_{pm}^*(\omega_{gc}) = 180^\circ + \varphi(\omega_{gc}), \quad |L_{ok}(j\omega_{gc})| = 1. \quad (5.31)$$

Подешљиви параметри фракционог компензатора су  $K_C$ ,  $a$ ,  $b$  и нецелобројни извод  $\alpha$ . Узимајући у обзир релације (5.30) и (5.31), може се формирати оптимизациони проблем за подешавање параметара фракционог компензатора на следећи начин

$$\begin{aligned} \min_{K_C, a, b, \alpha} (\mu_3)^2 \\ |L_{\text{ок}}(j\omega_{gc})| = 1, \\ 180^\circ + \varphi(\omega_{gc}) = \varphi_{\text{pm}}^*, \\ \mu_1(K_C, a, b, \alpha, \omega_{gc}) = 0, \end{aligned} \quad (5.32)$$

Критеријум оптималности дат је у облику извода вишег реда фреквенцијске карактеристике отвореног кола. Проблем (5.32) може се решити неком од стандардних оптимизационих метода. Почетне вредности параметара фракционог компензатора могу се емпиријски изабрати. Сада можемо предложену оптимизациону процедуру применити за управљање *DC* мотором.

#### 5.4.3 Подешавање параметара фракционог интегралног компензатора за управљање моторима једносмерне струје применом методе симетричног оптимума

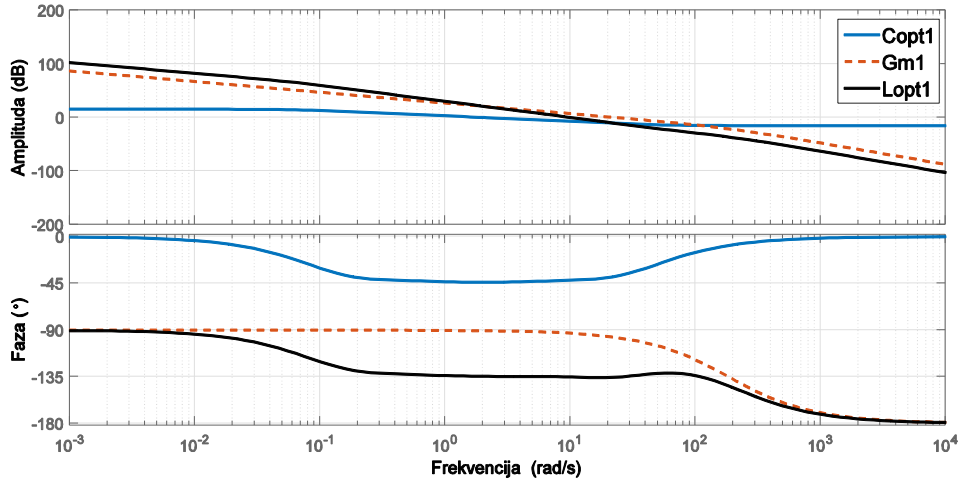
Прво ће се горе описана оптимизациона процедура применити за управљање *Махон RE 36* мотора чија је преносна функција дата са (5.21), а овде ћемо је означити са  $G_{\text{m1}}(s)$ . Нека су захтеви пројектовања управљачког система следећи: позициона статичка грешка  $\varepsilon_{sp} = 0$ , пресечна учестаност  $\omega_{gc} = 10 \text{ rad/s}$ , и претек фазе  $\varphi_{\text{pm}}^* = 45^\circ$ . Решавајући оптимизациону процедуру (5.32), добијају се следеће вредности подешљивих параметара система

$$K_C = 6,6517, a = 0,0114243, b = 21,7816, \alpha = 0,503186, \quad (5.33)$$

одакле следи преносна функција оптималног фракционог интегралног компензатора

$$C_{opt1}(s) = 6,6517 \left( \frac{0,0114243s + 1}{21,7816s + 1} \right)^{0,503186} . \quad (5.34)$$

Лако се може показати писањем преносне функције затвореног кола са слике 5.10 да је позициона статичка грешка  $\varepsilon_{sp}$  заиста једнака нули. Бодеоу дијаграми преносних функција  $C_{opt1}(s)$ ,  $G_{m1}(s)$  и  $L_{opt1}(s) = C_{opt1}(s)G_{m1}(s)$  приказани су на слици 5.11. Посматрајући логаритамску и фазно фреквенцијску карактеристику од  $L_{opt1}(s)$ , закључујемо да су захтеви пројектовања испуњени. Штавише, фракциони компензатор  $C_{opt1}(s)$  гарантује робустност затвореног система, јер у широј околини пресечне учестаности  $\omega_{gc} = 10 \text{ rad/s}$  фазна карактеристика  $\varphi(\omega)$  преносне функције оптималног отвореног кола је скоро константна. Ова особина гарантује стабилност затвореног система и неосетљивост одзива (робустност) на промену појачања отвореног кола.



Слика 5.11 Бодеоу дијаграми фракционог компензатора  $C_{opt1}(s)$ , мотора

$G_{m1}(s)$ , и преносне функције отвореног кола  $L_{opt1}(s)$

Иста оптимизациона процедура сада ће се применити за пројектовање компензатора за *Maxon A-max 22* мотор преносне функције (5.22), овде означене са  $G_{m2}(s)$ . За идентичне захтеве пројектовања као у претходном

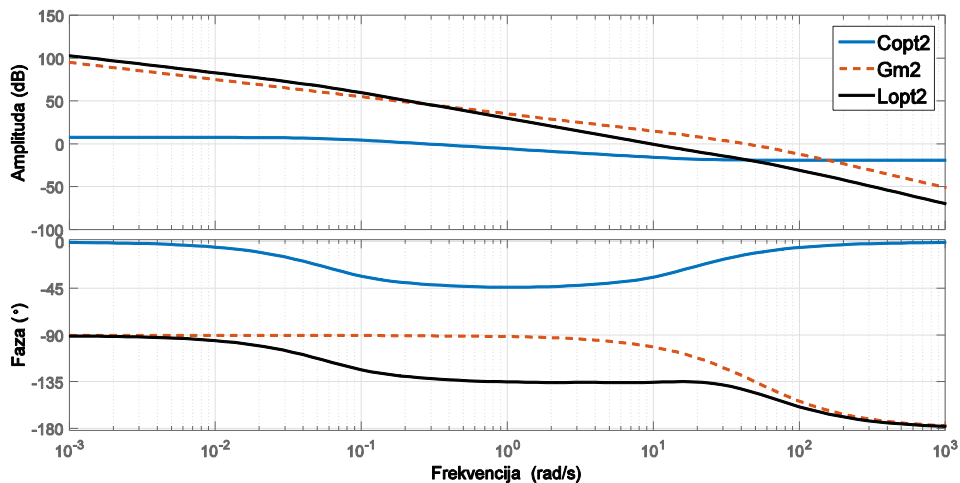
случају: позициону статичку грешку  $\varepsilon_{sp} = 0$ , пресечну учестаност  $\omega_{gc} = 10 \text{ rad/s}$  и претек фазе  $\varphi_{pm}^* = 45^\circ$ , добијају се следеће вредности параметара фракционог компензатора за  $G_{m2}(s)$

$$K_C = 6,6517, a = 0,0114243, b = 21,7816, \alpha = 0,503186, \quad (5.35)$$

па је преносна функција  $C_{opt2}(s)$  у овом случају

$$C_{opt2}(s) = 2,5828 \left( \frac{0,0456325s + 1}{20,6353s + 1} \right)^{0,516513}. \quad (5.36)$$

Поново цртамо Бодеве дијаграме за  $C_{opt2}(s)$ ,  $G_{m2}(s)$  и  $L_{opt2}(s) = C_{opt2}(s)G_{m2}(s)$  које видимо на слици 5.12. Можемо да извучемо идентичне закључке као и за мотор  $G_{m1}(s)$ : захтеви при пројектовању система су испуњени, и затворени систем управљања поседује висок степен робустности на промену појачања отвореног кола.



Слика 5.12 Бодеве дијаграми фракционог компензатора  $C_{opt2}(s)$ , мотора

$G_{m2}(s)$ , и преносне функције отвореног кола  $L_{opt2}(s)$

Сада ћемо добијене оптималне фракционе интегралне компензаторе употребити за управљање *NeuroArm* роботским манипулятором.

#### 5.4.4 Резултати симулације управљања роботског манипулатора

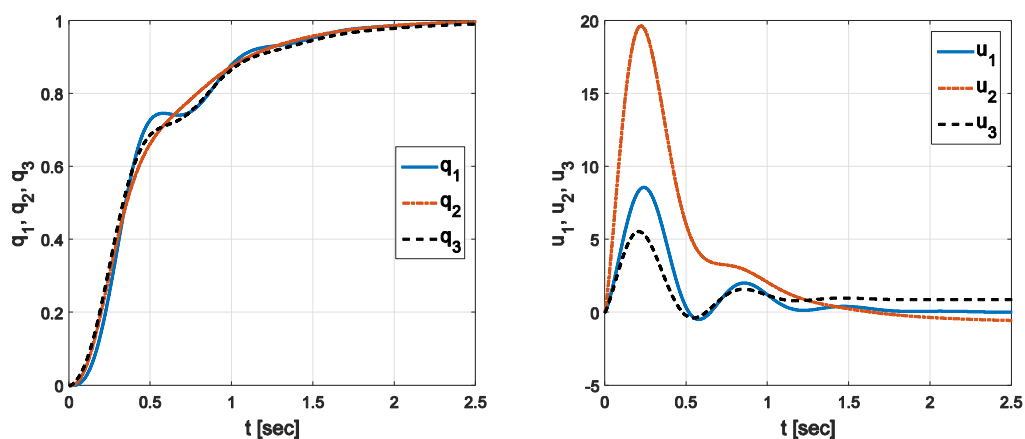
За управљање *NeuroArm* роботским манипулатором употребићемо фракциони интегрални компензатор чије подешљиве параметре смо добили решавајући оптимizacionу процедуру описану у претходном кораку. За прва три роботска сегмента искористићемо компензатор чија је преносна функција дата са (5.34), јер се сегменти погоне истим типом *Maxon RE 36* мотора. За последња три роботска сегмента употребићемо оптимални компензатор облика (5.36), који је добијен за управљање *Maxon A-max 22* моторима. С обзиром да је  $C_{opt}(s)$  ирационална преносна функција, тешко је имплементирати овакву врсту регулатора у симулацији, а и у пракси. Стога, неопходно је апроксимирати овај компензатор фракционог реда са рационалном функцијом у  $s$ -домену. У ту сврху, овде ће се применити једноставна и ефикасна рационална репрезентација фракционог компензатора облика (5.28) користећи Падеову апроксимацију [149]. Ова апроксимација се често користи у нумеричким прорачунима нерационалних функција зато што даје боље резултате у односу на друге методе. Стога, примењујући Падеову апроксимацију четвртог реда на компензатор (5.34), добијамо следећу преносну функцију

$$C_{pade,1}(s) = \frac{0,16926(s+37,27)(s+5,673)(s+1,434)(s+0,3108)}{(s+12,88)(s+2,79)(s+0,7055)(s+0,1076)}. \quad (5.37)$$

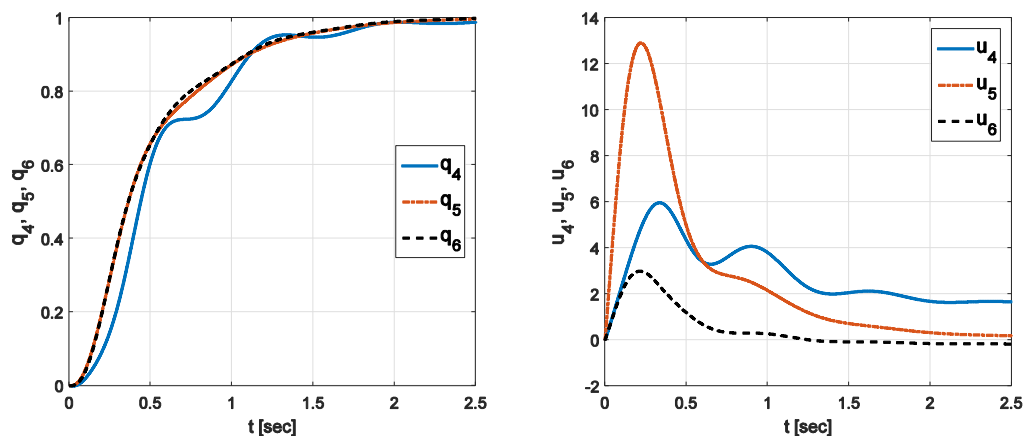
Иста та апроксимација, такође четвртог реда, али за компензатор облика (5.36), даје следећи резултат

$$C_{pade,2}(s) = \frac{0,11432(s+0,1824)(s+0,7386)(s+2,7208)(s+13,278)}{(s+0,0783)(s+0,3725)(s+1,368)(s+5,5936)}. \quad (5.38)$$

Применимо сада добијене рационалне компензаторе вишег реда за управљање датим роботом. И у овом случају, манипулатор мора да реши задатак позиционог управљања, да из референтне конфигурације дође при нултим почетним условима у нови положај одређен жељеним унутрашњим координатама  $q_{i,r} = 1 \text{ rad}$ ,  $i=1, \dots, 6$ . Резултати симулације за прва три сегмента дати су на слици 5.13, а за последња три на слици 5.14.



Слика 5.13. Одзив *NeuroArm* роботског манипулатора на промену референтне вредности и управљачки сигнали за роботске сегменте  $q_i, i = 1, 2, 3$



Слика 5.14. Одзив *NeuroArm* роботског манипулатора на промену референтне вредности и управљачки сигнали за роботске сегменте  $q_i, i = 4, 5, 6$

У неким случајевима непожељно је да при кретању робота дође до појаве прескока, јер тада може доћи до судара, ако се нпр. жељена трајекторија завршава на радном предмету. С обзиром да фракциони компензатори (5.34) и (5.36), као и њихове апроксимације (5.37) и (5.38) дају константан, али велики прескок од 30%, да бисмо га елиминисали, уводи се префилтер као на слици 5.10 чија је преносна функција  $F(s) = 1/(0,5s + 1)$ . Исти префилтер користи се за управљање свих шест мотора манипулатора. Као што видимо са слика 5.13 и 5.14, одзиви роботских сегмената сада немају прескок. Имајући у виду фазно фреквенцијске карактеристике од  $L_{\text{opt}}(s)$  са слика 5.11

и 5.12, и њихове приближно константе вредности у околини пресечне учестаности  $\omega_{gc}$ , овакви одзиви манипулатора добили би се и за случај великих варијација појачања система. Што се тиче управљачких сигнала  $u(t)$ , видимо да су њихове вредности доста мање него у случају управљања ПИД регулатором (видети слике 5.7 и 5.8), што је директна последица увођења префилтра  $F(s)$ . Стога, можемо на крају рећи да оптимални фракциони интегрални компензатор даје добре динамичке карактеристике заједно са побољшаном робустношћу система.

## 6. Закључак и научни доприноси дисертације

Предмет истраживања ове докторске дисертације је моделовање и управљање механичких система са више степени слободе. Прецизније, разматрани су механички системи типа инверзног клатна, као и индустријски манипулатори, под којима овде подразумевамо роботске системе са структуром отвореног кинематичког ланца (са три и више степени слободе). Приликом формирања математичког модела датих механичких система, као и за управљање кретањем истих, коришћен је рачун нецелобројног реда или фракциони рачун, који представља генерализацију класичног интегро-диференцијалног рачуна. Ова грана математике последњих пар деценија заокупља све већу пажњу научне и стручне јавности. Имајући горе наведено у виду, као кључне научне доприносе ове дисертације можемо навести следеће:

- Формирање математичког модела роботског манипулатора, укључујући модел дисипативне силе трења у зглобовима манипулатора. За формирање математичког модела роботског система искоришћен је тзв. Родригов приступ који се заснива на примени истоимених матрица трансформација. Његова предност у односу на друге поступке јесте то што је погодан за примену на рачунару, тј. могуће је „аутоматизовати“ процес добијања диференцијалних једначина кретања система. То је посебно важно за системе са три и више степени слободе, јер у тим случајевима изрази постају врло компликовани, па се употребом рачунара и датог поступка могућност појављивања грешке знатно смањује, а сам поступак вишеструко убрзава. Такође, механички системи различитих структура, не само роботски манипулатори, могу се моделовати овим поступком. Даље, у циљу добијања што тачнијег математичког модела, дисипативна сила трења је овде моделована да буде пропорционална фракционом изводу релативног помераја роботског сегмента (што



најчешће одговара генерализаној координати везаној за тај сегмент). Њено увођење у динамички модел манипулатора је остварено преко одговарајуће генерализане силе и користећи принцип виртуалног рада.

- Решавање проблема стабилизације ротационог инверзног (Фурутиног) клатна управљаног пропорционално-диференцијалним (ПД) регулатором фракционог реда. Механички системи типа инверзног клатна су веома компликовани за управљање јер су нелинеарни и поседују мањак управљачких величина у односу на број степени слободе система. Овде је метода Д-разлагања искоришћена за одређивање домена стабилности линеаризованог система у равни подешљивих параметара регулатора. На основу Љапуновљеве индиректне теореме добијене области стабилности важиће и за нелинеарни систем, али само у блиској околини равнотежног стања. Метода Д-разлагања је примењена на класу линеарних диференцијалних једначина фракционог реда, и то прво за случај линеарне зависности параметара. Добијени резултати су затим искоришћени и генерализовани за случај нелинеарне зависности истих. Такође, уместо у равни два параметра, како је то уобичајено у литератури, добијене су области стабилности у простору, односно у функцији три подешљива параметра.
- Стабилизација и управљање трансляторног инверзног клатна. Слично као и за Фурутино клатно, и овде је уведен ПД регулатор фракционог реда чији подешљиви параметри су одређени методом Д-разлагања. Област стабилности у простору за унапред изабрана три параметра одређена је и у овом случају. Додатно, приказани су и експериментални резултати управљања трансляторним инверзним клатном. Употребљена је ефикасна нумеричка метода за апроксимацију ирационалних функција како би се имплементирао закон управљања фракционог регулатора. Експериментални подаци су

показали да фракциони ПД регулатор постиже боље перформансе система у поређењу са класичним регулатором.

- Пројектовање пропорционално-интегрално-диференцијалног (ПИД) регулатора целобројног (класичног) и нецелобројног (фракционог) реда применом методе доминантног подешавања полова и технике Д-разлагања, под ограничењима на перформансе система. Ова метода подешавања параметара регулатора применљива је на различите типове процеса, са и без транспортног кашњења, рационалне и ирационалне преносне функције, као и оне са дистрибуираним параметрима. Фракциони ПИД регулатор због већег броја подешљивих параметара омогућава постизање бољих перформанси и робустности система. Параметри регулатора се подешавају са циљем што ефикаснијег потискивања немерљивог поремећаја који делује на процес, притом водећи рачуна о робустности система, осетљивости на шум, времену смирења, као и о дозвољеном прескоку.
- Извођење математичког модела роботског манипулатора са шест степени слободе укључујући динамику актуатора, и управљање његовим кретањем. Динамички модел *NeuroArm* роботског манипулатора изведен је користећи Родригов приступ и истоимене матрице трансформација. Показано је како се изразито нелинеаран и вишеструко преносни модел манипулатора може са задовољавајућом тачношћу апроксимирати линеарним распрегнутим системом, и то у случају постојања редуктора великог преносног односа између мотора и роботских сегмената. Под наведеном претпоставком, пројектован је за дати манипулатор ПИД регулатор методом доминантног подешавања полова описаној у претходној тачки доприноса. Решен је успешно задатак позиционог управљања манипулатора, доказујући тиме исправност увођења линеарног модела робота.
- Пројектовање фракционог интегралног компензатора за управљање *NeuroArm* роботским манипулатором применом принципа симетричног оптимума. Захваљујући изводу нецелобројног реда,

фракциони компензатор је флексибилнији у односу на класични компензатор, и омогућава разматрање робустности приликом пројектовања управљачког система. Подешавање параметара компензатора за случај линеарног модела робота постигнуто је решавањем оптимизационе процедуре користећи принцип симетричног оптимума. Захваљујући овој методи, при решавању задатка позиционог управљања добија се одзив роботског манипулатора без прескока, што је веома често захтев који се тражи код роботских система и у индустрији. Пројектовани управљачки систем је робустан (мање осетљив) на промену параметара процеса, чиме се тражене перформансе одржавају у жељеним границама и при неноминалним условима рада.

## Literatura

- [1] B. Siciliano, L. Sciavicco, L. Villani, G. Oriolo, Robotics, Springer-Verlag London, 2009.
- [2] R. Kelly, V. Santibañez, A. Loría, Control of Robot Manipulators in Joint Space, Springer-Verlag London, 2005.
- [3] V. Čović, M.P. Lazarević, Mehanika robota, Mašinski fakultet Univerziteta u Beogradu, 2009.
- [4] S. Marković, Automatsko formiranje analitičkog oblika diferencijalnih jednačina kretanja sistema krutih tela u opštem slučaju sa primenom na tehničke objekte, Doktorska disertacija, Beograd, 1996.
- [5] R. Caponetto, G. Dongola, L. Fortuna, I. Petrá?, Fractional Order Systems, WORLD SCIENTIFIC, 2010. doi:10.1142/7709.
- [6] C.A. Monje, Y. Chen, B.M. Vinagre, D. Xue, V. Feliu-Batlle, Fractional-order Systems and Controls, Springer-Verlag London, 2010.
- [7] S. Das, Functional fractional calculus for system identification and controls, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2008. doi:10.1007/978-3-540-72703-3.
- [8] F. Mainardi, Fractional Calculus BT - Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics, in: A. Carpinteri, F. Mainardi (Eds.), Springer Vienna, Vienna, 1997: pp. 291–348. doi:10.1007/978-3-7091-2664-6\_7.
- [9] V. Kiryakova, Generalized Fractional Calculus and Applications, Chapman and Hall, 1993.
- [10] R.L. Bagley, P.J. Torvik, On the Fractional Calculus Model of Viscoelastic Behavior, 1986. doi:10.1122/1.549887.
- [11] M.P. Lazarević, L. Bučanović, Prilog modeliranju i dinamičkoj analizi sistema necelobrojnog reda sa osnovama računa necelobrojnog reda, Mašinski fakultet Univerziteta u Beogradu, 2012.
- [12] G. Catania, S. Sorrentino, Analytical modelling and experimental identification of viscoelastic mechanical systems, in: J. Sabatier, O.P. Agrawal,

- J.A.T. Machado (Eds.), *Adv. Fract. Calc. Theor. Dev. Appl. Phys. Eng.*, Springer Netherlands, Dordrecht, 2007: pp. 403–416. doi:10.1007/978-1-4020-6042-7\_28.
- [13] R. Lewandowski, Z. Pawlak, Response spectrum method for building structures with viscoelastic dampers described by fractional derivatives, *Eng. Struct.* 171 (2018) 1017–1026. doi:10.1016/j.engstruct.2018.01.041.
- [14] R. Lewandowski, B. Chorazyczewski, Identification of the parameters of the Kelvin-Voigt and the Maxwell fractional models, used to modeling of viscoelastic dampers, *Comput. Struct.* 88 (2010) 1–17. doi:10.1016/j.compstruc.2009.09.001.
- [15] L. S. Taylor, A. Lerner, D. J. Rubens, K. J. Parker, A Kelvin-Voigt Fractional Derivative Model for Viscoelastic Characterization of Liver Tissue, 2002. doi:10.1115/IMECE2002-32605.
- [16] H.G. Sage, M.F. De Mathelin, E. Ostertag, Robust control of robot manipulators: A survey, *Int. J. Control.* 72 (1999) 1498–1522. doi:10.1080/002071799220137.
- [17] S.A. Ajwad, J. Iqbal, M.I. Ullah, A. Mehmood, A systematic review of current and emergent manipulator control approaches, *Front. Mech. Eng.* 10 (2015) 198–210. doi:10.1007/s11465-015-0335-0.
- [18] M.W. Spong, M. Vidyasagar, *Robot dynamics and control*, Wiley, New York, 1989.
- [19] C.C. De Wit, B. Siciliano, G. Bastin, eds., *Theory of robot control*, Springer-Verlag London, 1996. doi:10.1007/978-1-4471-1501-4.
- [20] H. Asada, J.J. Slotine, *Robot analysis and control*, Wiley, New York, 1986.
- [21] R. Kelly, Global positioning of robot manipulators via PD control plus a class of nonlinear integral actions, *IEEE Trans. Automat. Contr.* 43 (1998) 934–938. doi:10.1109/9.701091.
- [22] J. Alvarez-Ramirez, I. Cervantes, R. Kelly, PID regulation of robot manipulators: stability and performance, *Syst. Control Lett.* 41 (2000) 73–

83. doi:10.1016/S0167-6911(00)00038-4.
- [23] A. Zavala-Río, M. Mendoza, V. Santibáñez, F. Reyes, An Output-Feedback PID-type Global Regulator for Robot Manipulators with Bounded Inputs, *IFAC-PapersOnLine*. 48 (2015) 87–93. doi:10.1016/j.ifacol.2015.12.015.
- [24] V. Santibáñez, R. Kelly, A. Zavala-Río, P. Parada, A New Saturated Nonlinear PID Global Regulator for Robot Manipulators, *IFAC Proc. Vol.* 41 (2010) 11690–11695. doi:10.3182/20080706-5-kr-1001.01981.
- [25] K.J. Åström, K. Furuta, Swinging up a pendulum by energy control, *Automatica*. 36 (2000) 287–295. doi:10.1016/S0005-1098(99)00140-5.
- [26] J.Á. Acosta, Furuta's Pendulum: A Conservative Nonlinear Model for Theory and Practise, *Math. Probl. Eng.* (2010) 29. doi:10.1155/2010/742894.
- [27] K. Graichen, M. Treuer, M. Zeitz, Swing-up of the double pendulum on a cart by feedforward and feedback control with experimental validation, *Automatica*. 43 (2007) 63–71. doi:10.1016/j.automatica.2006.07.023.
- [28] M. Park, D. Chwa, Swing-Up and Stabilization Control of Inverted-Pendulum Systems via Coupled Sliding-Mode Control Method, *IEEE Trans. Ind. Electron.* 56 (2009) 3541–3555. doi:10.1109/TIE.2009.2012452.
- [29] I. Vishnegradsky, *Sur la theorie generale des regulateurs*, 1876.
- [30] R.A. Frazer, W.J. Duncan, On the criteria for the stability of small motions, *Proc. R. Soc. Lond. A*. 124 (1929). doi:10.1098/rspa.1929.0143.
- [31] Y.I. Neimark, On the problem of the distribution of the roots of polynomials, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*. 58 (1947) 357–360.
- [32] Y.I. Neimark, D-decomposition of the space of the quasipolynomials, *Appl. Math. Mech.* 13 (1949) 349–380.
- [33] D. Šiljak, *Analysis and Synthesis of Feedback Control Systems in the Parameter Plane I-Linear Continuous Systems*, 1964. doi:10.1109/TAI.1964.5407721.
- [34] D. Mitrović, *Graphical analysis and synthesis of feedback control systems I -*

- Theory and analysis, *Trans. Am. Inst. Electr. Eng. Part II Appl. Ind.* 77 (1959) 476–487. doi:10.1109/TAI.1959.6371486.
- [35] G.J. Thaler, R.G. Brown, *Analysis and Design of Feedback Control Systems*, McGraw-Hill, 1960.
- [36] L. Grujić, Possibilities of linear system design on the basis of conditional optimization in parameter plane, Part I: “Linear continual systems with constant parameters,” *Ibid.* 1–2 (1966) 49–60.
- [37] D. Šiljak, Generalization of the parameter plane method, *IEEE Trans. Automat. Contr.* 11 (1966) 63–70. doi:10.1109/tac.1966.1098230.
- [38] D. Šiljak, *Nonlinear systems: the parameter analysis and design*, Wiley, New York, 1968.
- [39] J. Ackermann, *Robust Control*, Springer London, 2002.
- [40] J. Ackermann, D. Kaesbauer, Stable polyhedra in parameter space, *Automatica*. 39 (2003) 937–943. doi:10.1016/S0005-1098(03)00034-7.
- [41] E.N. Gryazina, B.T. Polyak, Stability regions in the parameter space: D-decomposition revisited, *Automatica*. 42 (2006) 13–26. doi:10.1016/j.automatica.2005.08.010.
- [42] E.N. Gryazina, B.T. Polyak, A.A. Tremba, D-decomposition technique state-of-the-art, *Autom. Remote Control*. 69 (2008) 1991–2026. doi:10.1134/S0005117908120011.
- [43] J.A. Korobov, Stabilnost nekih sistema s raspodeljenim i koncentrisanim parametrima metodom Mitrovića, *Automatika*. 3 (1971) 147–154.
- [44] D.L. Debeljković, D. Babić, Dalje uopštavanje Mitrovićeve metode na sisteme sa raspodeljenim parametrima, *Tehnika*. 9 (1986) 885–891.
- [45] D.L. Debeljković, S.A. Milinković, Z. Aleksić, M.B. Jovanović, Novi prilaz primeni metode D-razglanja na sisteme sa raspodeljenim parametrima, *Tehnika-E*. 4 (1999) E1–E5.
- [46] A. Ruszewski, Stability regions of closed loop system with time delay inertial

plant of fractional order and fractional order PI controller, 2008.

- [47] S.E. Hamamci, An algorithm for stabilization of fractional-order time delay systems using fractional-order PID controllers, *IEEE Trans. Automat. Contr.* 52 (2007) 1964–1969. doi:10.1109/TAC.2007.906243.
- [48] S.E. Hamamci, Stabilization using fractional-order PI and PID controllers, *Nonlinear Dyn.* 51 (2008) 329–343. doi:10.1007/s11071-007-9214-5.
- [49] P. Persson, K.J. Åström, Dominant Pole Design - A Unified View of PID Controller Tuning, *IFAC Proc. Vol. 25 (1992)* 377–382. doi:10.1016/S1474-6670(17)50763-6.
- [50] K. Astrom, T. Hägglund, *PID controllers: theory, design and tuning*, Instrument Society of America, 1995. doi:1556175167.
- [51] Q.G. Wang, Z. Zhang, K.J. Astrom, L.S. Chek, Guaranteed dominant pole placement with PID controllers, *J. Process Control.* 19 (2009) 349–352. doi:10.1016/j.jprocont.2008.04.012.
- [52] T.B. Šekara, M.R. Rapaić, A revision of root locus method with applications, *J. Process Control.* 34 (2015) 26–34. doi:10.1016/j.jprocont.2015.07.007.
- [53] J.G. Ziegler, N.B. Nichols, Optimum settings for Automatic controllers, *Trans. ASME.* 64 (1942) 759–768. doi:10.1115/1.2899060.
- [54] K.J. Åström, T. Hägglund, Revisiting the Ziegler-Nichols step response method for PID control, *J. Process Control.* 14 (2004) 635–650. doi:10.1016/j.jprocont.2004.01.002.
- [55] T.B. Šekara, M.R. Mataušek, Revisiting the Ziegler-Nichols process dynamics characterization, *J. Process Control.* 20 (2010) 360–363. doi:10.1016/j.jprocont.2009.08.004.
- [56] T.B. Šekara, M.R. Mataušek, Classification of dynamic processes and PID controller tuning in a parameter plane, *J. Process Control.* 21 (2011) 620–626. doi:10.1016/j.jprocont.2010.12.004.
- [57] M.R. Mataušek, T.B. Šekara, PID controller frequency-domain tuning for stable, integrating and unstable processes, including dead-time, *J. Process*



- Control. 21 (2011) 17–27. doi:10.1016/j.jprocont.2010.09.007.
- [58] A. O’Dwyer, Handbook of PI and PID Controller Tuning Rules, Imperial College Press, 2009. doi:10.1142/p575.
- [59] B. Kristiansson, B. Lennartson, Evaluation and simple tuning of PID controllers with high-frequency robustness, J. Process Control. 16 (2006) 91–102. doi:10.1016/j.jprocont.2005.05.006.
- [60] K.J. Åström, H. Panagopoulos, T. Häggglund, Design of PI controllers based on non-convex optimization, Automatica. 34 (1998) 585–601. doi:10.1016/S0005-1098(98)00011-9.
- [61] T. Häggglund, H. Panagopoulos, K.J. Åström, Design of PID controllers based on constrained optimisation, IEE Proc. - Control Theory Appl. 149 (2002) 32–40. doi:10.1049/ip-cta:20020102.
- [62] T.B. Šekara, M.R. Mataušek, Optimization of PID controller based on maximization of the proportional gain under constraints on robustness and sensitivity to measurement noise, IEEE Trans. Automat. Contr. 54 (2009) 184–189. doi:10.1109/TAC.2008.2008359.
- [63] S.F. Graebe, A.J. Isaksson, Derivative filter is an integral part of PID design, IEE Proc. - Control Theory Appl. 149 (2002) 41–45. doi:10.1049/ip-cta:20020111.
- [64] K.J. Åström, T. Häggglund, The future of PID control, Control Eng. Pract. 9 (2001) 1163–1175. doi:10.1016/S0967-0661(01)00062-4.
- [65] F.G. Shinskey, How good are our controllers in absolute performance and robustness?, Meas. Control. 23 (1990) 114–121. doi:10.1177/002029409002300402.
- [66] T. Häggglund, K.J. Åström, Revisiting The Ziegler-Nichols Tuning Rules For Pi Control, Asian J. Control. 4 (2008) 364–380. doi:10.1111/j.1934-6093.2002.tb00076.x.
- [67] T. Häggglund, K. J.Åström, Revisiting the Ziegler-Nichols Tuning Rules for Pi Control - Part Ii the Frequency Response Method, Asian J. Control. 6 (2008)

- 469–482. doi:10.1111/j.1934-6093.2004.tb00368.x.
- [68] V.R. Segovia, T. Hägglund, K.J. Åström, Measurement noise filtering for PID controllers, *J. Process Control.* 24 (2014) 299–313. doi:10.1016/j.jprocont.2014.01.017.
- [69] A.D. Micić, M.R. Mataušek, Optimization of PID controller with higher-order noise filter, *J. Process Control.* 24 (2013) 694–700. doi:10.1016/j.jprocont.2013.10.009.
- [70] O. Garpinger, T. Hägglund, K.J. Åström, Performance and robustness trade-offs in PID control, *J. Process Control.* 24 (2014) 568–577. doi:10.1016/j.jprocont.2014.02.020.
- [71] F. Padula, A. Visioli, Tuning rules for optimal PID and fractional-order PID controllers, *J. Process Control.* 21 (2011) 69–81. doi:10.1016/j.jprocont.2010.10.006.
- [72] Y. Chen, T. Bhaskaran, D. Xue, Practical Tuning Rule Development for Fractional Order Proportional and Integral Controllers, *J. Comput. Nonlinear Dyn.* 3 (2008) 21403–21408. doi:10.1115/1.2833934.
- [73] A. Oustaloup, X. Moreau, M. Nouillant, The crone suspension, *Control Eng. Pract.* 4 (1996) 1101–1108. doi:10.1016/0967-0661(96)00109-8.
- [74] M. Salehtavazoei, M. Tavakoli-Kakhki, Compensation by fractional-order phase-lead/lag compensators, *IET Control Theory Appl.* 8 (2014) 319–329. doi:10.1049/iet-cta.2013.0138.
- [75] I. Podlubny, Fractional-order systems and PI/sup /spl lambda//D/sup /spl mu//-controllers, *IEEE Trans. Automat. Contr.* 44 (1999) 208–214. doi:10.1109/9.739144.
- [76] I. Petráš, Tuning and implementation methods for fractional-order controllers, *Fract. Calc. Appl. Anal.* 15 (2012) 282. doi:10.2478/s13540-012-0021-4.
- [77] В.В. Учайкин, Метод дробных производных, Артишок, 2008.
- [78] K. Oldham, J. Spanier, *The fractional calculus. Theory and applications of*

differentiation and integration to arbitrary order, 2006.

- [79] S.G. Samko, A.A. Kilbas, O.I. Marichev, *Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications*, Gordon and Breach, 1993.
- [80] M. Pavišić, Z. Golubović, Z. Mitrović, *Mehanika Dinamika sistema*, Mašinski fakultet Univerziteta u Beogradu, 2011.
- [81] N.S. Mladenović, N.R. Trišović, *Dinamika*, Mašinski fakultet Univerziteta u Beogradu, 2015.
- [82] A.I. Lurie, *Analytical Mechanics*, Springer, 2002.
- [83] C.C. de Wit, H. Olsson, K.J. Astrom, P. Lischinsky, A New Model of Control Systems with Friction, *IEEE Trans. Automat. Contr.* 40 (1995) 419–425.
- [84] J.R. Rice, A.L. Ruina, Stability of Steady Frictional Slipping, *J. Appl. Mech.* 50 (2009) 343. doi:10.1115/1.3167042.
- [85] P.-A. Bliman, M. Sorine, Friction modeling by hysteresis operators: Application to Dahl, sticktion and Stribeck effects, *Model. Hysteresis.* 286 (1991) 10–19.
- [86] Z.A. Khan, V. Chacko, H. Nazir, A review of friction models in interacting joints for durability design, *Friction.* 5 (2017) 1–22. doi:10.1007/s40544-017-0143-0.
- [87] F. Al-Bender, V. Lampaert, J. Swevers, The generalized Maxwell-slip model: a novel model for friction Simulation and compensation, *IEEE Trans. Automat. Contr.* 50 (2005) 1883–1887. doi:10.1109/TAC.2005.858676.
- [88] B. Armstrong-Hélouvry, A. Soom, *Control of Machines with Friction*, Kluwer, Boston, 2008. doi:10.1115/1.2920929.
- [89] P.R. Dahl, "A Solid Friction Model, *Aerosp. Corp.* 158 (1968).
- [90] B. Armstrong-Hélouvry, P. Dupont, C.C. De Wit, A survey of models, analysis tools and compensation methods for the control of machines with friction, *Automatica.* 30 (1994) 1083–1138. doi:10.1016/0005-1098(94)90209-7.
- [91] J. Swevers, F. Al-Bender, C.G. Ganseman, T. Projogo, An integrated friction

- model structure with improved presliding behavior for accurate friction compensation, *IEEE Trans. Automat. Contr.* 45 (2000) 675–686. doi:10.1109/9.847103.
- [92] K.J. Astrom, C. Canudas-de-Wit, Revisiting the LuGre friction model, *IEEE Control Syst. Mag.* 28 (2008) 101–114. doi:10.1109/MCS.2008.929425.
- [93] F. Al-Bender, V. Lampaert, J. Swevers, A Novel Generic Model at Asperity Level for Dry Friction Force Dynamics, *Tribol. Lett.* 16 (2004) 81–93. doi:10.1023/B:TRIL.0000009718.60501.74.
- [94] F. Al-Bender, J. Swevers, Characterization of friction force dynamics, *IEEE Control Syst. Mag.* 28 (2008) 64–81. doi:10.1109/MCS.2008.929279.
- [95] V. Lampaert, J. Swevers, F. Al-Bender, Modification of the Leuven integrated friction model structure, *IEEE Trans. Automat. Contr.* 47 (2002) 683–687. doi:10.1109/9.995050.
- [96] G.W.S. Blair, B.C. Veinoglou, J.E. Caffyn, Limitations of the Newtonian time scale in relation to non-equilibrium rheological states and a theory of quasi-properties, *Proc. R. Soc. Lond. A.* 189 (1947). doi:10.1098/rspa.1947.0029.
- [97] G.W.S. Blair, Analytical and Integrative Aspects of the Stress-Strain-Time Problem, *J. Sci. Instrum.* 21 (1944) 80–84. doi:10.1088/0950-7671/21/5/302.
- [98] W. Khalil, E. Dombre, *Modeling, Identification and Control of Robots*, Butterworth-Heinemann, 2004. doi:10.1016/B978-1-903996-66-9.X5000-3.
- [99] R. Hilfer, P.L. Butzer, U. Westphal, An Introduction To Fractional Calculus, in: *Appl. Fract. Calc. Phys.*, World Scientific, 2010: pp. 1–85. doi:10.1142/9789812817747\_0001.
- [100] O.P. Agrawal, Formulation of Euler-Lagrange equations for fractional variational problems, *J. Math. Anal. Appl.* 272 (2002) 368–379. doi:10.1016/S0022-247X(02)00180-4.
- [101] F. Riewe, Mechanics with fractional derivatives, *Phys. Rev. E - Stat. Physics, Plasmas, Fluids, Relat. Interdiscip. Top.* 55 (1997) 3581–3592.

doi:10.1103/PhysRevE.55.3581.

- [102] F. Riewe, Nonconservative Lagrangian and Hamiltonian mechanics, *Phys. Rev. E.* 53 (1996) 1890–1899. doi:10.1103/PhysRevE.53.1890.
- [103] A. Agila, D. Baleanu, R. Eid, B. Irfanoglu, Applications of the extended fractional Euler-Lagrange equations model to freely oscillating dynamical systems, *Rom. J. Phys.* 61 (2016) 350–359.
- [104] T.M. Atanackovic, S. Pilipovic, B. Stankovic, D. Zorica, *Fractional Calculus with Applications in Mechanics: Wave Propagation, Impact and Variational Principles*, 2014. doi:10.1002/9781118909065.
- [105] M. Cajić, M.P. Lazarević, Fractional order spring/spring-pot/actuator element in a multibody system: Application of an expansion formula, *Mech. Res. Commun.* 62 (2014) 44–56. doi:10.1016/j.mechrescom.2014.08.009.
- [106] P.D. Mandić, M.P. Lazarević, A fractional order viscous friction model in robotic joints, in: *Proc. 7th Int. Congr. Serbian Soc. Mech., Serbian Society of Mechanics, Sremski Karlovci, Serbia, 2019*: pp. 1-2 (C1d).
- [107] M. Sjöberg, L. Kari, Nonlinear Isolator Dynamics at Finite Deformations: An Effective Hyperelastic, Fractional Derivative, Generalized Friction Model, *Nonlinear Dyn.* 33 (2003) 323–336. doi:10.1023/A:1026037703124.
- [108] P. Krause, O. Wasynczuk, S. Pekarek, *Electromechanical Motion Devices*, John Wiley & Sons, New Jersey, 2012. doi:10.1002/9781118316887.
- [109] D.L. Debeljković, V.S. Mulić, *Sinteza Linearnih Sistema*, Čigoja Štampa, Beograd, 2002.
- [110] T.B. Šekara, *Frakcioni Sistemi Upravljanja*, ETF Istočno Sarajevo, 2011.
- [111] P.D. Mandić, M.P. Lazarević, T.B. Šekara, An Algorithm for Stabilization of Linear Control Systems Using Fractional Ordered PID Controllers, in: *4th Math. Conf. Repub. Srp., Fakultet za proizvodnju i menadžment Trebinje Univerzitet u Istočnom Sarajevu*, 2014.
- [112] M. Stojić, *Kontinualni sistemi automatskog upravljanja*, Nauka, Beograd, 1996.

- [113] P.D. Mandic, M.P. Lazarevic, T.B. Sekara, M. Cajic, L. Bucanovic, Stabilization of double inverted pendulum system by using a fractional differential compensator, in: Proc. 29th Chinese Control Decis. Conf. CCDC 2017, 2017: pp. 1911–1916. doi:10.1109/CCDC.2017.7978829.
- [114] J.Á. Acosta, Furuta's Pendulum: A Conservative Nonlinear Model for Theory and Practise, Math. Probl. Eng. 2010 (2010) 1–29. doi:10.1155/2010/742894.
- [115] K. Furuta, M. Yamakita, S. Kobayashi, Swing-up Control of Inverted Pendulum Using Pseudo-State Feedback, Proc. Inst. Mech. Eng. Part I J. Syst. Control Eng. 206 (1992) 263–269. doi:10.1243/PIME\_PROC\_1992\_206\_341\_02.
- [116] H. Khalil, Nonlinear Systems, Prentice Hall, Upper Saddle River, 2002.
- [117] P.D. Mandić, M.P. Lazarević, T.B. Šekara, D-decomposition technique for stabilization of Furuta pendulum: fractional approach, Bull. Polish Acad. Sci. Tech. Sci. 64 (2016) 189–196. doi:10.1515/bpasts-2016-0021.
- [118] M.P. Lazarević, P.D. Mandić, L. Bučanović, Napredni sistemi upravljanja dinamičkim sistemima: frakcioni pristup, Mašinski fakultet Univerziteta u Beogradu, 2017.
- [119] P. Mandic, M.P. Lazarevic, T.B. Sekara, Fractional order PD control of Furuta pendulum: D-decomposition approach, in: 2014 Int. Conf. Fract. Differ. Its Appl. ICFDA 2014, 2014: pp. 1–7. doi:10.1109/ICFDA.2014.6967422.
- [120] P.D. Mandić, M.P. Lazarević, Tomislav B. Šekara, D-decomposition method for stabilization of inverted pendulum using fractional order PD controller, in: Conf. Int. Conf. Electr. Electron. Comput. Eng., Vrnjačka Banja, 2014: pp. 1–6.
- [121] L. Brancik, Numerical Inverse Laplace Transforms for Electrical Engineering Simulation, in: MATLAB Eng. - Appl. Control. Electr. Eng. IT Robot., IntechOpen, Rijeka, 2012: p. Ch. 3. doi:10.5772/19824.
- [122] P.D. Mandić, M.P. Lazarević, T.B. Šekara, Stabilization of cart pendulum

- system by using fractional order PD controller, in: 5th Int. Congr. Serbian Soc. Mech., Serbian Society of Mechanics, Arandjelovac, Serbia, 2015.
- [123] P.D. Mandić, M.P. Lazarević, T.B. Šekara, Stabilization of inverted pendulum by fractional order PD controller with experimental validation: D-decomposition approach, in: A. Rodić, T. Borangiu (Eds.), *Adv. Intell. Syst. Comput.*, Springer International Publishing, Cham, 2017: pp. 29–37. doi:10.1007/978-3-319-49058-8\_4.
- [124] P.D. Mandić, M.P. Lazarević, T.B. Šekara, R.Ž. Jovanović, Stabilization of the cart pendulum system by fractional order control with experimental realization, in: *Int. Conf. Fract. Differ. Its Appl.*, Novi Sad, Serbia, 2016.
- [125] T.B. Šekara, M.R. Rapaić, M.P. Lazarević, An efficient method for approximation of non-rational transfer functions, 2013. doi:10.7251/ELS1317030R.
- [126] K.J. Astrom, R.M. Murray, *Feedback systems: an introduction for scientists and engineers*, 2013. doi:10.5860/choice.46-2107.
- [127] F.G. Shinskey, *Process Control Systems: Application, Design, and Tuning*, McGraw-Hill, New York, 1996.
- [128] M.S. Tavazoei, Notes on integral performance indices in fractional-order control systems, *J. Process Control.* 20 (2010) 285–291. doi:10.1016/j.jprocont.2009.09.005.
- [129] P.D. Mandić, T.B. Šekara, M.P. Lazarević, M. Bošković, Dominant pole placement with fractional order PID controllers: D-decomposition approach, *ISA Trans.* 67 (2017) 76–86. doi:10.1016/j.isatra.2016.11.013.
- [130] E.N. Gryazina, The D-decomposition theory, *Autom. Remote Control.* 65 (2004) 1872–1884. doi:10.1023/B:AURC.0000049874.93222.2c.
- [131] T.N.L. Vu, M. Lee, Analytical design of fractional-order proportional-integral controllers for time-delay processes, *ISA Trans.* 52 (2013) 583–591. doi:10.1016/j.isatra.2013.06.003.
- [132] T.B. Šekara, M.R. Mataušek, Revisiting the Ziegler-Nichols process dynamics

- characterization, *J. Process Control.* 20 (2010) 360–363. doi:10.1016/j.jprocont.2009.08.004.
- [133] M.R. Mataušek, T.B. Šekara, PID controller frequency-domain tuning for stable, integrating and unstable processes, including dead-time, *J. Process Control.* 21 (2011) 17–27. doi:10.1016/j.jprocont.2010.09.007.
- [134] T. Bhaskaran, Y. Chen, G. Bohannan, Practical Tuning of Fractional Order Proportional and Integral Controller (II): Experiments, (2009) 1371–1384. doi:10.1115/detc2007-34910.
- [135] B. Cvetković, V. Nešić, M. Lazarević, P. Mandić, P. Marić, M. Dragović, Advanced hardware control for seven DOFs robotic arm-neuro arm, *IOP Conf. Ser. Mater. Sci. Eng.* 393 (2018) 12110. doi:10.1088/1757-899X/393/1/012110.
- [136] P.D. Mandić, M.P. Lazarević, Z. Stokić, T.B. Šekara, Dynamic modeling and control design of seven degrees of freedom robotic arm, in: *Proc. 6th Int. Congr. Serbian Soc. Mech., Tara, Serbia, 2017.*
- [137] P.D. Mandić, M.P. Lazarević, T.B. Šekara, B. Cvetković, Robust PID control for robot manipulators with parametric uncertainties, in: *Proc. 5th Int. Conf. Electr. Electron. Comput. Eng., ETRAN Society, Palić, Serbia, 2018: pp. 1054–1059.*
- [138] H.F. Raynaud, A. Zergainoh, State-space representation for fractional order controllers, 2000. doi:10.1016/S0005-1098(00)00011-X.
- [139] P.D. Mandić, M.P. Lazarević, T.B. Šekara, M. Bošković, G. Maione, Robust control of robot manipulators using fractional order lag compensator, in: *Proc. 7th Int. Congr. Serbian Soc. Mech., Serbian Society of Mechanics, Sremski Karlovci, Serbia, 2019: pp. 1-10 (C1c).*
- [140] T. Šekara, Modern methods of design, analysis, optimization and implementation of conventional control algorithms for processes with finite and infinite degrees of freedom, 2017. doi:10.7251/ijeec1701011s.
- [141] M. Bošković, T. Šekara, M. Radulovic, B. Cvetković, A Novel method for



optimization of PID/PIDC controller under constraints on phase margin and sensitivity to measurement noise based on non-symmetrical optimum method, 2016.

- [142] M. Bosković, M.R. Rapaić, T.B. Šekara, V. Govedarica, Non-symmetrical Optimum Design Method of Fractional-order PID Controller, 2019. doi:10.1109/INDEL.2018.8637616.
- [143] L. Loron, Tuning of PID controllers by the non-symmetrical optimum method, *Automatica*. 33 (1997) 103–107. doi:10.1016/S0005-1098(96)00135-5.
- [144] K.G. Papadopoulos, N.I. Margaritis, Extending the Symmetrical Optimum criterion to the design of PID type-p control loops, *J. Process Control*. 22 (2012) 11–25. doi:10.1016/j.jprocont.2011.10.014.
- [145] T.B. Šekara, G. Vuković, B. Blanuša, M.R. Rapaić, B. Jakovljević, A novel method for optimization of PI/PID regulators based on symmetrical optimum method, in: *Proc. Infoteh Conf., Jahorina, Bosnia and Herzegovina, 2015*: pp. 804–807.
- [146] C. Kessler, Das symmetrische optimum, *Regelungstechnik*. 6 (1958) 432–436.
- [147] J.W. Umland, M. Safiuddin, Magnitude and Symmetric Optimum Criterion for the Design of Linear Control Systems: What Is It and How Does It Compare with the Others?, *IEEE Trans. Ind. Appl.* 26 (1990) 489–497. doi:10.1109/28.55967.
- [148] G. Maione, P. Lino, New tuning rules for fractional  $PI\alpha$  controllers, *Nonlinear Dyn.* 49 (2007) 251–257. doi:10.1007/s11071-006-9125-x.
- [149] M. Bošković, M.R. Rapaić, T.B. Šekara, P.D. Mandić, M.P. Lazarević, B. Cvetković, et al., On the rational representation of fractional order lead compensator using Padé approximation, in: *2018 7th Mediterr. Conf. Embed. Comput. MECO 2018 - Incl. ECYPS 2018, 2018*: pp. 1–4.

## Биографија

Кандидат, Петар Д. Мандић, дипломирани инжењер машинства и студент Докторских студија на Машинском факултету Универзитета у Београду, рођен је 06.11.1984 године у Котору, Република Црна Гора. Основну школу и гимназију (природно-математички смер) завршио је у Херцег Новом. Машински факултет Универзитета у Београду уписао је школске 2003/2004. године. Дипломирао је 2011. године са просечном оценом 8.89 (осам и 89/100) и оценом 10 на дипломском испиту из предмета Механика робота. Дипломске студије завршио је по старом наставном плану и програму.

Докторске студије уписао је школске 2011/2012. године на Машинском факултету Универзитета у Београду. Од 19.12.2011. до 05.03.2014. године био је запослен на Машинском факултету Универзитета у Београду као истраживач сарадник, на научном пројекту ТР 33047 Министарства за науку и технолошки развој Републике Србије под називом "Интелигентни системи управљања климатизације у циљу постизања енергетски ефикасних режима у сложеним условима експлоатације". Од 06.03.2014. запослен је на Машинском факултету Универзитета у Београду као асистент на катедри за механику. Држао је аудиторне и лабораторијске вежбе на Основним и Мастер академским студијама, и то из следећих предмета: Механика робота, Механика 1, Механика 2, Механика 3, Механика М, Биомеханика ткива и органа, Биомеханика локомоторног система. Учесник је научно-билатералног пројекта између Републике Србије и НР Кине, бр. пројекта 3-12 (2016-2017) као и текућег билатералног пројекта између Републике Србије и Италије, *ADFOCMEDER*, (2019-2021).

Поседује знање енглеског језика на конверзацијском нивоу, италијанског на средњем и немачког језика на основном нивоу. Познаје програмске језике и пакете *Matlab*, *C* програмски језик, *AutoCad*, *Solid Works*, *MS Office*, *TIA Portal*. Члан је Српског друштва за механику, и међународне *IUTAM* организације.

Прилог 1.

## Изјава о ауторству

Потписани Петар Д. Мандић

број индекса Д20/11

### Изјављујем

да је докторска дисертација под насловом

**Напредно моделовање сложених роботских система и механизма и**

---

**примена модерних закона управљања**

---

- резултат сопственог истраживачког рада,
- да предложена дисертација у целини ни у деловима није била предложена за добијање било које дипломе према студијским програмима других високошколских установа,
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио ауторска права и користио интелектуалну својину других лица.

**Потпис докторанда**

У Београду, 05.07.2019.

\_\_\_\_\_

Прилог 2.

## Изјава о истоветности штампане и електронске верзије докторског рада

Име и презиме аутора \_\_\_\_Петар Д. Мандић\_\_\_\_\_

Број индекса \_\_\_\_\_Д20/11\_\_\_\_\_

Студијски програм \_\_\_\_\_Докторске академске студије\_\_\_\_\_

Наслов рада **Напредно моделовање сложених роботских система и  
механизама и примена модерних закона управљања**

Ментор \_\_\_\_\_проф. др Михаило Лазаревић\_\_\_\_\_

Потписани \_\_\_\_Петар Д. Мандић\_\_\_\_\_

Изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предао за објављивање на порталу **Дигиталног репозиторијума Универзитета у Београду**.

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Београду.

**Потпис докторанда**

У Београду, 05.07.2019.

---

Прилог 3.

## Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом:

**Напредно моделовање сложених роботских система и механизма и**

---

**примена модерних закона управљања**

---

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио.

1. Ауторство

2. Ауторство - некомерцијално

3. Ауторство – некомерцијално – без прераде

4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима

5. Ауторство – без прераде

6. Ауторство – делити под истим условима

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци, кратак опис лиценци дат је на полеђини листа).

**Потпис докторанда**

У Београду, 05.07.2019.

\_\_\_\_\_

1. Ауторство - Дозвољавање умножавања, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце, чак и у комерцијалне сврхе. Ово је најслободнија од свих лиценци.

2. Ауторство – некомерцијално. Дозвољавање умножавања, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела.

3. Ауторство - некомерцијално – без прераде. Дозвољавање умножавања, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела. У односу на све остале лиценце, овом лиценцом се ограничава највећи обим права коришћења дела.

4. Ауторство - некомерцијално – делити под истим условима. Дозвољавање умножавања, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада.

5. Ауторство – без прераде. Дозвољавање умножавања, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела.

6. Ауторство - делити под истим условима. Дозвољавање умножавања, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада. Слична је софтверским лиценцама, односно лиценцама отвореног кода.