

UNIVERZITET U BEOGRADU
MAŠINSKI FAKULTET

Predrag S. Dobratić

**NOSIVOST I STEPEN ISKORIŠĆENJA
CILINDRIČNIH ZUPČASTIH PAROVA
U USLOVIMA VIŠESTRUKKE SPREGE**

doktorska disertacija

Beograd, 2019

UNIVERSITY OF BELGRADE
FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

Predrag S. Dobratić

**LOAD CAPACITY AND DEGREE OF
EFFICIENCY OF CYLINDRICAL GEAR
PAIRS IN MULTIPLE MESH CONDITIONS**

Doctoral Dissertation

Belgrade, 2019

Mentor doktorske disertacije

dr Mileta Ristivojević, redovni profesor
Univerzitet u Beogradu, Mašinski fakultet

Članovi komisije za odbranu doktorske disertacije

dr Božidar Rosić, redovni profesor
Univerzitet u Beogradu, Mašinski fakultet

dr Radivoje Mitrović, redovni profesor
Univerzitet u Beogradu, Mašinski fakultet

dr Milosav Ognjanović, profesor emeritus
Univerzitet u Beogradu, Mašinski fakultet

dr Zoran Stamenić, vanredni profesor
Univerzitet u Beogradu, Mašinski fakultet

dr Slavko Muždeka, vanredni profesor
Univerzitet odbrane u Beogradu, Vojna akademija

Datum odbrane

____.____.2019. godine

PREDGOVOR

Doktorska disertacija „Nosivost i stepen iskorišćenja cilindričnih zupčastih parova u uslovima višestruke sprege“ je urađena na Katedri za opšte mašinske konstrukcije Mašinskog fakulteta Univerziteta u Beogradu i predstavlja rezultat višegodišnjeg naučnog i stručnog usavršavanja.

Na prvom mestu se zahvaljujem mentoru red. prof. dr Mileti Ristivojeviću na ukazanom poverenju, korisnim savetima i velikoj pomoći koju sam imao tokom studiranja i same izrade doktorske disertacije.

Takođe se zahvaljujem članovima komisije za odbranu doktorske disertacije na dobronamernim sugestijama, kao i članovima Katedre za opšte mašinske konstrukcije Mašinskog fakulteta Univerziteta u Beogradu i Katedre vojnomašinskog inženjerstva Vojne akademije Univerziteta odbrane u Beogradu koji su mi na bilo koji način pomogli.

Zahvaljujem se Ministarstvu odbrane Republike Srbije na finansijskoj podršci, koje mi je omogućilo usavršavanje na doktorskim studijama.

Ćerkama Đurđi, Petri i Lenki, sinu Petru i supruzi Jeleni se zahvaljujem na ogromnom strpljenju, svakodnevnom razumevanju i neiscrpnj energiji koju su mi pružili.

NOSIVOST I STEPEN ISKORIŠĆENJA CILINDRIČNIH ZUPČASTIH PAROVA U USLOVIMA VIŠESTRUKÉ SPREGE

REZIME

U domenu prenosa i transformacije snage od pogonske do radne mašine zupčasti parovi zbog kompaktnosti konstrukcije, velike pouzdanosti i nosivosti imaju najveću primenu u poređenju sa drugim prenosnicima snage koji obavljaju istu elementarnu funkciju. Saglasno tome, istraživanja u oblasti zupčastih parova imaju značajan doprinos u razvoju savremenih mašinskih konstrukcija.

Predmet istraživanja ove doktorske disertacije je razvoj preciznijih matematičkih modela raspodele opterećenja na istovremeno spregnute parove zubaca, kada se u toku dodirnog perioda zubaca smenjuju dvostruka i trostruka sprega, kao i razvoj preciznijih matematičkih modela za analizu uticaja raspodele opterećenja na nosivost korena zubaca i energetska efikasnost cilindričnih zupčastih parova.

Sprovedena istraživanja u ovoj doktorskoj disertaciji su dovela do sledećih rezultata:

Razjašnjenje fenomena raspodele opterećenja na istovremeno spregnute parove zubaca u uslovima dvostruke i trostruke sprege, kao i formiranje tačnijih modela za sagledavanje istovremenog uticaja tačnosti izrade, krutosti zubaca i intenziteta opterećenja na karakter raspodele opterećenja.

Definisanje tačnijeg kriterijuma za određivanje napona u korenu zupca merodavnog za proveru radne sposobnosti zubaca sa aspekta zapreminske čvrstoće. Njegovom implementacijom u konvencionalne postupke proračuna ISO/DIN standarda, značajno bi se povećao nivo pouzdanosti podataka o radnim i kritičnim vrednostima napona u korenu zupca.

Razvijanje tačnijih modela za analizu energetske efikasnosti zupčastih parova na osnovu stepena iskorišćenja.

Ključne reči:

Zupčasti parovi, raspodela opterećenja, višestruka sprega, nosivost korena zubaca, energetska efikasnost.

Naučna oblast:

Tehničke nauke, mašinstvo.

Uža naučna oblast:

Opšte mašinske konstrukcije.

UDK:

621.833.1.01:519.673(043.3)

621.833.1.01:004.942(043.3)

LOAD CAPACITY AND DEGREE OF EFFICIENCY OF CYLINDRICAL GEAR PAIRS IN MULTIPLE MESH CONDITIONS

SUMMARY

In the field of transmission and transformation of power from the drive to the working machine, due to the compact construction, high reliability and load capacity, the gear pairs have the greatest application compared to other power transmissions that perform the same elementary function. Accordingly, research in the field of gear pairs has a significant contribution to the development of modern machine constructions.

The research topic of this doctoral dissertation is the development of more precise mathematical models of load distribution in simultaneously meshed teeth pairs, when during the contact period of the teeth the double and triple mesh take turns, as well as the development of more precise mathematical models for analyzing the influence of the load distribution on the teeth root load capacity and the energy efficiency of the cylindrical gear pairs.

The research carried out in this doctoral dissertation led to the following results: Clarification of the load distribution phenomenon in simultaneously meshed teeth pairs in double and triple mesh conditions, as well as the formation of more accurate models for examining the simultaneous effect of the accuracy of production, stiffness of the teeth and load intensity on the load distribution character.

Defining a more precise criterion for determining the tooth root stress relevant for checking the working ability of the teeth rating from the aspect of bending strength. It implementing in the conventional procedures of the ISO/DIN standard calculation, the level of reliability of data on the working and critical values of the tooth root stress would be significantly increased.

Developing more accurate models for the analysis of the energy efficiency of gear pairs based on the degree of efficiency.

Keywords:

Gear pairs, load distribution, multiple mesh, teeth root load capacity, energy efficiency.

Scientific field:

Technical sciences, mechanical engineering.

Narrow scientific field:

General mechanical constructions (general machine design).

UDK:

621.833.1.01:519.673(043.3)

621.833.1.01:004.942(043.3)

SADRŽAJ

1. UVOD	1
2. PREGLED DOSADAŠNJIH ISTRAŽIVANJA	3
3. UTICAJ OBLIKA PROFILA ZUBACA NA STEPEN SPREZANJA ZUBACA	12
3.1. UTICAJ GEOMETRIJE ALATA	13
3.2. UTICAJ GEOMETRIJE ALATA I POMERANJA PROFILA ZUBACA.....	19
3.2.1. Koeficijenti pomeranja profila zubaca $x_1 = 0,3$ i $x_2 = -0,3$	19
3.2.2. Koeficijenti pomeranja profila zubaca $x_1 = -0,3$ i $x_2 = 0,3$	24
4. RASPODELA OPTEREĆENJA NA ISTOVREMENO SPREGNUTE PAROVE ZUBACA	30
4.1. GRANIČNA RASPODELA OPTEREĆENJA.....	30
4.2. MEHANIČKI MODEL STVARNE RASPODELE OPTEREĆENJA.....	31
4.3. ANALITIČKI MODEL STVARNE RASPODELE OPTEREĆENJA.....	40
4.4. KRUTOST SPREGNUTIH ZUBACA	58
5. ANALITIČKI MODEL NAPONA U KORENU ZUPCA U USLOVIMA VIŠESTRUKKE SPREGE ZUBACA	59
5.1. FAKTOR RELATIVNOG NAPONA.....	63
5.1.1. Aproksimativni model faktora relativnog napona.....	64
5.1.2. Uporedna analiza faktora relativnog napona prema tačnom i aproksimativnom modelu	67
5.2. ANALITIČKI MODEL NAPONA U KORENU ZUPCA PRI RAVNOMERNOJ RASPODELI OPTEREĆENJA	76
5.3. ANALITIČKI MODEL NAPONA U KORENU ZUPCA PRI IZRAZITO NERAVNOMERNOJ RASPODELI OPTEREĆENJA	78
6. ISTOVREMENI UTICAJ RASPODELE OPTEREĆENJA I OBLIKA PROFILA ZUBACA NA NAPON U KORENU ZUPCA	81

6.1. RAVNOMERNA RASPODELA OPTEREĆENJA	81
6.2. IZRAZITO NERAVNOMERNA RASPODELA OPTEREĆENJA.....	91
6.3. UPOREDNA ANALIZA NAPONSKOG STANJA U KORENU ZUPCA U USLOVIMA GRANIČNE RASPODELE OPTEREĆENJA.....	101
7. UPOREDNA ANALIZA NAPONSKOG STANJA U KORENU ZUPCA PREMA ANALITIČKOM MODELU I KONVENCIONALNIM METODAMA	103
8. UPOREDNA ANALIZA NAPONSKOG STANJA U KORENU ZUPCA PREMA ANALITIČKOM I NUMERIČKOM MODELU	107
9. ANALITIČKI MODEL ENERGETSKE EFIKASNOSTI CILINDRIČNIH ZUPČASTIH PAROVA	116
9.1. MODEL TRENUTNOG I EFEKTIVNOG STEPENA ISKORIŠĆENJA	117
9.2. NUMERIČKI PRIMER TRENUTNOG STEPENA ISKORIŠĆENJA	127
10. ZAKLJUČAK	133
11. LITERATURA	138
12. PRILOG	143

1. UVOD

Zupčanici, kao mašinski delovi, ne mogu samostalno izvršavati elementarnu funkciju. Međusobno spojeni (spregnuti) formiraju zupčaste parovi koji u mašinskim sistemima izvršavaju elementarnu funkciju prenosa i transformacije snage od pogonske do radne mašine. Ovu elementarnu funkciju zupčasti parovi obavljaju sigurno, pouzdano i sa energetskeg aspekta veoma efikasno. U poređenju sa drugim prenosnicima snage (frikcionim, lančanim i kaišnim parovima) koji obavljaju istu elementarnu funkciju, zupčasti parovi imaju najveću primenu u mašinskim sistemima. Oni značajno utiču na definisanje radnih performansi mašinskih sistema u koje se ugrađuju. Zato se metode proračuna, postupci izrade i kontrole zupčastih parova stalno usavršavaju.

Analitička, numerička i eksperimentalna istraživanja u cilju definisanja radnih i kritičnih stanja mašinskih delova i elemenata su uvek aktuelna. Ona su baza za određivanje njihove radne sposobnosti sa aspekta zapreminske i površinske čvrstoće. Složenost ovih istraživanja dolazi do izražaja naročito kod zupčastih parova zbog izraženog uticaja kinematskih i geometrijskih uslova i tačnosti izrade. Nosivost zupčastih parova je prvenstveno ograničena zapreminskom čvrstoćom korena i površinskom čvrstoćom bokova zubaca. Proračun nosivosti zupčastih parova je zasnovan na teorijskim i eksperimentalnim istraživanjima koja se realizuju u velikom broju tehničkih univerziteta, fakulteta i instituta u svetu. Rezultati ovih istraživanja, posle usaglašavanja, postaju integralni delovi standarda ISO, DIN, GOST, AGMA, itd.

Do danas je razvijen veliki broj matematičkih modela koji opisuju složeno naponsko stanje i složene fenomene koji se generišu u radu zupčastih parova u eksploatacionim uslovima. U razvijenim modelima istraživani su uticaji: raspodele opterećenja na istovremeno spregnute parove zubaca i duž bočne linije zupca, pogonske i radne mašine na rad zupčastih parova, dinamičkih sila, koncentracije napona u korenu zubaca, triboloških uslova na bokovima zubaca, oblika profila spregnutih zubaca na nosivost bokova i korena zubaca. U cilju dobijanja zupčastih parova veće nosivosti i manje mase, zatim pouzdanijih, ekonomičnijih, energetske i ekološke efikasnijih zupčastih parova, razvijeni modeli se stalno usavršavaju. Veća nosivost zubaca se može

ostvariti izborom boljih materijala, tačnijih postupaka izrade, kontrole i proračuna, povećanjem stepena sprezanja zubaca, odnosno angažovanjem većeg broja zubaca u prenošenju ukupnog opterećenja.

Zadatak istraživanja doktorske disertacije je razvoj preciznijih matematičkih modela za analizu radne sposobnosti cilindričnih zupčastih parova sa aspekta nosivosti korena zubaca i energetske efikasnosti u uslovima višestruke sprege zubaca, kada se u toku dodirnog perioda zubaca smenjuju dvostruka i trostruka sprega. Veoma izražen uticaj na nosivost i energetske efikasnost zupčastih parova ima karakter raspodele opterećenja na istovremeno spregnute parove zubaca. Saglasno tome, u doktorskoj disertaciji su prvo formirani tačni modeli raspodele opterećenja na istovremeno spregnute parove zubaca, respektujući tačnost izrade i krutost zubaca, kao i intenzitet opterećenja. Prema konvencijalnim postupcima proračuna uticaj raspodele opterećenja u uslovima dvostruke i trostruke sprege zubaca na radnu sposobnost zubaca se analizira primenom približnih izraza.

Pored raspodele opterećenja, naponsko stanje u korenu zubaca zavisi od oblika profila spregnutih zubaca i položaja tačke dodira spregnutih zubaca u odnosu na kritični presek u korenu zubaca. Analizom istovremenog uticaja raspodele opterećenja i oblika profila zubaca na naponsko stanje u korenu zubaca u doktorskoj disertaciji su razvijeni tačni modeli za identifikciju napona merodavnog za proveru radne sposobnosti zubaca sa aspekta zapreminske čvrstoće. Pored tačnih modela, razvijeni su i aproksimativni (približni) modeli. Razvijenim modelima se može tačnije definisati radna sposobnost zupčastih parova sa aspekta nosivosti korena zubaca.

2. PREGLED DOSADAŠNJIH ISTRAŽIVANJA

U mnogim radovima i literaturi [1-28] se analizira nosivost korena i bokova zubaca cilindričnih zupčastih parova sa pravim i kosim zupcima, a sve u cilju sprečavanja eventualne pojave loma u korenu [29-37] i površinskih oštećenja na bokovima zubaca. Ove analize su češće sprovedene kod cilindričnih zupčastih parova sa spoljašnjim, nego sa unutrašnjim [8,28] ozubljenjem. U odnosu na veličinu stepena sprezanja profila (bokova) zubaca, znatno je veći broj radova kad je stepen sprezanja profila (bokova) zubaca manji, nego kad je veći od dva. Zupčasti parovi kod kojih se analizira nosivost zubaca mogu i ne moraju biti napravljeni od istog materijala [12,18].

U literaturi [3] je razvijen analitički model raspodele opterećenja na istovremeno spregnute parove zubaca, kada se u toku dodirnog perioda zubaca smenjuju jednostruka i dvostruka sprega. Na osnovu razvijenog modela je analiziran uticaj raspodele opterećenja na nosivost korena i bokova zubaca. U ovoj literaturi je pokazano da raspodela opterećenja na istovremeno spregnute parove zubaca primarno zavisi od kompatibilnosti tačnosti izrade zubaca, njihove krutosti i intenziteta opterećenja zupčastog para.

Na osnovu rezultata istraživanja dobijenih u radu [4] je pokazano da geometrijski i kinematski parametri cilindričnih zupčanika značajno utiču na napon u korenu zupca. U cilju sagledavanja ovog uticaja je definisan faktor relativnog napona. Izvedeni su izrazi za tačno i približno određivanje faktora relativnog napona u tačkama profila zubaca u kojima se vrši primopredaja opterećenja kod istovremeno spregnutih parova zubaca. Analiza ovog faktora je pokazala da geometrijski i kinematski parametri imaju veći uticaj na napone u korenu zupca kod pogonskih nego kod gonjenih zupčanika, kada se kontaktne tačke nalaze bliže vrhu zupca (oblast velikih napona u korenu zupca). Kada se kontaktne tačke nalaze bliže korenu zupca (oblast malih napona u korenu zupca), geometrijski i kinematski parametri imaju veći uticaj na napon u korenu zupca kod gonjenih zupčanika. Najveća razlika faktora relativnog napona između pogonskog i gonjenog zupčanika je generisana u tački B, gde dvostruka sprega prelazi u jednostruku. Poznato je da su geometrijski i kinematski parametri u tački B značajni za određivanje merodavnog napona pri proveru nosivosti zupca. U radu je pokazano da vrednosti

”faktora stepena sprezanja”, određenih na osnovu približnog izraza prema ISO standardu [1], odstupaju u odnosu na tačne vrednosti dobijenih pomoću definisanog faktora relativnog napona. Ova odstupanja su veća kod zubaca pogonskog, nego kod gonjenog zupčanika. Pokazano je da je približni izraz za ”faktor stepena sprezanja” prema ISO standardu izveden pod pretpostavkom da se u toku perioda kontakta zubaca linearno menja i da su vrednosti identične za pogonski i gonjeni zupčanik.

U radu [5] je razvijen model za raspodelu opterećenja na istovremeno spregnute parove zubaca standardnih cilindričnih zupčanika sa pravim zupcima, kao i cilindričnih zupčanika sa velikim stepenom sprezanja profila zubaca. Model je dobijen uzimajući u obzir deformacije usled savijanja i smicanja, kao i kontaktne deformacije zubaca. Kod cilindričnih zupčanika sa pravim zupcima i stepenom sprezanja profila zubaca $1 \leq \varepsilon_\alpha \leq 2$ oblik krive raspodele opterećenja je uvek isti, sa vrlo malim varijacijama. Kod cilindričnih zupčanika sa pravim zupcima i velikim stepenom sprezanja profila zubaca $2 \leq \varepsilon_\alpha \leq 3$ oblik krive raspodele opterećenja zavisi od stepena sprezanja profila zubaca i krutosti sprege zubaca. Da bi se olakšao proračun, izbegavajući numeričku integraciju krutosti zubaca, predstavljena je približna jednačina za krutost sprege. Krutost sprege se izražava samo kao funkcija stepena sprezanja profila zubaca.

Cilj istraživanja u radu [6] je formiranje matematičkog modela parova zubaca koji se koristi za definisanje kritičnog stanja u korenu zubaca. U ovom radu se primenjuje model neravnomerne raspodele opterećenja duž linije kontakta cilindričnih zupčanika sa pravim i kosim zupcima, dobijen iz kriterijuma minimalne elastične potencijalne energije, za određivanje kritičnog napona u korenu zupca zupčanika sa velikim stepenom sprezanja profila (bokova) zubaca. Jednačine koje su date u radu, uzimaju u obzir broj zubaca zupčanika, prenosni odnos, ugao nagiba profila zubaca alata, koeficijente pomeranja profila zubaca i koeficijent visine zubaca.

U radu [7] se primenjuje model neravnomerne raspodele opterećenja duž linije kontakta cilindričnih zupčanika sa pravim i kosim zupcima, dobijenog iz kriterijuma minimalne elastične potencijalne energije, za određivanje najvećeg napona u korenu zupca. Studija je ograničena na zupčanike sa malim stepenom sprezanja profila (bokova) zubaca. Prema ovom radu za cilindrične zupčanike sa pravim zupcima, kritični zamorni napon u korenu zupca se javlja u zupcu koji je opterećen ukupnim opterećenjem u spoljašnjoj tački jednostruke sprege zubaca.

U studiji [8] je razvijen model neravnomerne raspodele opterećenja na istovremeno spregnute parove zubaca kod cilindričnih zupčastih parova sa unutrašnjim ozubljenjem. Model je korišćen za određivanje kritičnih opterećenja na savijanje i površinski pritisak, dok je izračunavanje odgovarajućih nominalnih napona u korenu i na boku zupca usklađeno sa ISO standardom [1,2]. Ova studija je ograničena na cilindrične zupčaste parove sa malim stepenom sprezanja profila zubaca. Kod cilindričnih zupčanika sa pravim zupcima kritični napon na savijanje u korenu zupca uvek raste kada ukupno opterećenje deluje na gornjoj granici intervala jednostruke sprege zubaca.

U radu [9] je razmatran model neravnomerne raspodele opterećenja duž linije kontakta cilindričnih zupčanika sa pravim i kosim zupcima, dobijenog iz kriterijuma minimalne elastične potencijalne energije, za zupčaste parova sa stepenom sprezanja profila (bokova) zubaca u opsegu između 2 i 2,5. Analizirani su uslovi opterećenja i nominalni naponi u korenu i na boku zupca. Na osnovu dobijenih rezultata je pokazano da kod cilindričnih zupčanika sa pravim zupcima kritično stanje u korenu zupca odgovara kontaktu u unutrašnjoj tački spoljašnjeg intervala dvostruke sprege zubaca, kada opterećenje iznosi 60% ukupnog opterećenja.

Osnovni nedostatak eksperimentalne tehnike određivanja napona u korenu zupca je greška povezana sa tačnom pozicijom merača, kada se primenjuje u područjima visokog gradijenta napona u zoni koncentracije napona u korenu zubaca zupčanika. U radu [10] je dizajniran i proizveden veliki zubac zupčanika kako bi se ove greške smanjile, tako da se može koristiti za tačno određivanje napona u korenu zupca i uporednu analizu napona dobijenih prema različitim postupcima proračuna, ISO i AGMA standardom i programom ANSYS primenom metode konačnih elemenata (MKE). Prikazani rezultati potvrđuju da se u programu ANSYS primenom metode konačnih elemenata (MKE) može postići najtačnija analiza naponskog stanja u korenu zupca zupčanika. Zbog zanemarivanja tačne lokacije kritičnog preseka u podnožju zupca, poređenjem maksimalnih vrednosti napona dobijenih prema ISO i AGMA standardu je ustanovljeno da je povećanje napona u korenu zupca maksimalno 5,2% do 6,4%. Ove razlike se mogu pripisati činjenici da ISO standard uspostavlja kritični presek na osnovu tangente u tački od 30°, dok AGMA standard usvaja *Lewis*-ovu parabolu.

U radu [11] je ustanovljena precizna jednačina profila cilindričnih evolventnih zupčanika sa pravim zupcima kako bi se formulisao novi analitički model za izračunavanje maksimalnog napona u korenu zupca i određivanje lokacije kritičnog preseka zasnovane na teoriji mehanike. Rezultati pokazuju da je u poređenju sa ISO [1,2] i AGMA 2101-D04 modelima, lokacija kritičnog preseka zupca zupčanika sa različitim parametarskim uslovima u novom modelu najbliži modelu metode konačnih elemenata (MKE).

U studiji [12] je predstavljena metoda za izračunavanje raspodele napona u korenu i na boku zupca duž svake kontaktne linije cilindričnih zupčanika sa pravim i kosim zupcima. Iz rezultata dobijenih u ovoj studiji, sa različitim parametrima kao što su broj zubaca i modul, zaključuje se da za cilindrične zupčanike sa pravim zupcima položaj kontaktne tačke u kojoj se javlja kritični napon u korenu zupca zavisi od prenosnog odnosa zupčastog para, koji se povećava sa povećanjem broja zubaca spregnutih zupčanika.

U radu [13] su primenom metode konačnih elemenata (MKE) analizirani efekti višestruke sprege, tačnosti proizvodnje i oblika zubaca cilindričnih zupčanika sa pravim zupcima na napon u korenu i na boku zupca. Pokazano je da se promenama koeficijenta visine zubaca u sadejstvu sa odgovarajućim vrednostima koeficijenata pomeranja profila zubaca i prenosnog odnosa mogu ostvariti vrednosti stepena sprežanja profila zubaca veće od četiri.

U radu [17] su sprovedena teorijska i eksperimentalna istraživanja uticaja razlike osnovnog koraka na napone u korenu zupca cilindričnih zupčanika sa pravim zupcima. Neki od zupčanika su imali određene razlike osnovnog koraka na jednom ili dva zupca, dok ostali zupci nisu imali razlike osnovnog koraka. Drugi zupčanici su imali slučajne razlike osnovnog koraka na svim zupcima koji su imali slučajnu raspodelu razlike osnovnog koraka kao u tipičnoj proizvodnji zupčanika. Ovi zupčanici su radili na najnižim uslovima u opsegu obrtnog momenta, a naponi u korenu zupca su mereni namenskim mernim sistemom za različite razlike osnovnog koraka. Isti eksperimenti su simulirani upotrebom External 2D. Razvijena je metodologija za povezivanje povećanja napona u korenu zupca kao funkcije veličine razlike osnovnog koraka. Ista metodologija omogućuje određivanje faktora povećanja napona u korenu zupca zbog rasipanja odstupanja osnovnog koraka. Takođe se može sagledati koliko se razlike osnovnog

koraka mogu tolerisati u okviru ograničenja napona u korenu zupca definisana od strane korisnika. Pokazano je da pozitivne i negativne razlike osnovnog koraka različito utiču na naponsko stanje u podnožju zubaca pogonskog i gonjenog zupčanika. Pozitivne razlike osnovnog koraka pogonskog zupčanika su lošije za napon u korenu zupca pogonskog zupčanika, dok su negativne razlike osnovnog koraka pogonskog zupčanika lošije za naponsko stanje u korena zupca gonjenog zupčanika.

U istraživanju [20] se uzima u obzir uticaj odstupanja osnovnog koraka na nosivost cilindričnih zupčanika sa pravim zupcima i velikim stepenom sprezanja profila zubaca. Ispitivani su cilindrični zupčanci sa velikim stepenom sprezanja profila zubaca, jer pružaju bolje performanse nego standardni zupčanci. Glavni nedostatak ovih zupčanika je osetljivost na geometrijske netačnosti koje se javljaju tokom proizvodnje. Obzirom na to da se uticaj odstupanja osnovnog koraka na nosivost cilindričnih zupčanika sa pravim zupcima i velikim stepenom sprezanja profila zubaca u standardnim proračunima zupčanika analizira približnim modelima, predstavljeno je analitičko rešenje za uticaj odstupanja osnovnog koraka na raspodelu opterećenja, a na osnovu toga je predstavljena raspodela napona na bokovima zubaca. Ovde su dati izrazi za analizu napona koji su zasnovani na uslovima postojanja kontakta i jednakosti elastičnih deformacija istovremeno spregnutih zubaca. Iako su korišćeni izrazi iz uslova elastične deformacije za geometrijski precizne zupčanike zasnovani na već uvedenoj teoriji, ovde je data njihova proširena formulacija za zupčanike sa izraženim odstupanjima osnovnog koraka. Oni se primenjuju za zupčanike sa malim i velikim stepenom sprezanja profila zubaca, takođe uzimajući u obzir istovremenu kontrolu postojanja kontakta. Navedeni izrazi uzimaju u obzir broj parova zubaca u istovremenom kontaktu za razmatrani kvalitet tačnosti i shodno tome, vrednosti odstupanja osnovnog koraka duž linije kontakta. Ovi izrazi, zajedno sa datim kontrolama, omogućavaju pojednostavljenje proračuna raspodele opterećenja na istovremeno spregnutim parovima zubaca zupčanika. Da bi se potvrdila analitička procedura za proračun raspodele opterećenja na istovremeno spregnute parove zubaca, eksperimentalna ispitivanja su izvršena primenom metode fotoelastičnosti.

U radu [21] je proučavan uticaj distribucije opterećenja na istovremeno spregnute zupce, geometrije zubaca i tačnost izrade na kontaktni napon bokova zubaca cilindričnih zupčanika. Cilj teorijskog i eksperimentalnog istraživanja, koji je sproveden u radu, je

postizanje preciznijeg modela za analizu nosivosti bokova zubaca, uzimajući u obzir veći broj uticaja na naponsko stanje bokova zubaca. Matematičkim modelom razvijenim u radu se može uspostaviti optimalan odnos između opterećenja, preciznosti izrade i geometrije zubaca kako bi se postigla veća nosivost bokova zubaca. Razvijen je matematički model za napon na boku tokom perioda kontakta, u zavisnosti od vrednosti i znaka razlike osnovnog koraka spregnutih zubaca. U radu je pokazano da znaci razlike osnovnog koraka i položaj kinematskog (trenutnog) pola tokom perioda kontakta imaju veliki uticaj na nosivosti bokova zubaca.

U radu [23] je pokazano kako se izborom odgovarajućeg konstrukcionog rešenja oblika zubaca cilindričnih zupčanika sa pravim zupcima može ostvariti dvostruka sprega zubaca u svim tačkama aktivne dužine dodirnice profila zubaca kada su vrednosti stepena sprezanja profila zubaca manje od dva. Predložen je novi dizajn cilindričnih zupčanika kod kojih je zubac širi u zoni jednostruke, nego u zoni dvostrukog sprege zubaca. Ovim dizajnerskim rešenjem se dobija ravnomerna raspodela opterećenja duž kontaktne linije tokom perioda kontakta zubaca. Smanjuje se habanje kao rezultat ravnomernije raspodele opterećenja na profilu zubaca spregnutih zupčanika.

Radovi različitih istraživača su fokusirani na: razvijanje modela koji se koriste za određivanje debljine sloja ulja [38] za podmazivanje zupčanika, analizu uticaja svojstava ulja na podmazivanje [39] i gubitak snage u sprezi zubaca zupčanika [40], kao i određivanje jednačina koeficijenta trenja [41-43], sila trenja klizanja i kotrljanja koje se javljaju pri kontaktu zubaca zupčanika, itd. U oblasti prenosa snage, jedan od najvažnijih ciljeva je ostvariti zupčanike sa visokim stepenom iskorišćenja, kako bi se smanjili gubici snage, radna temperatura, buka [44,45] i habanje koje nastaje usled trenja pri kontaktu zubaca zupčanika. U cilju povećanja stepena iskorišćenja zupčastih parova u radovima [40,43,45-58] su sprovedena odgovarajuća teorijska i eksperimentalna istraživanja.

Na osnovu rezultata u literaturi [47], kao i u radu [48] je pokazano da se energetska efikasnost zupčastih parova povećava sa povećanjem broja obrtaja, ugla nagiba profila zubaca alata (osnovne zupčaste letve) i sa smanjenjem ugla nagiba zubaca, stepena sprezanja bočnih linija (kod cilindričnih zupčanika sa kosim zupcima), stepena sprezanja profila zubaca (kod cilindričnih zupčanika sa pravim zupcima) i visine neravnina na površinama bokova spregnutih zubaca.

U radu [49] je razvijena metodologija za ispitivanje i merenje energetske efikasnosti cilindričnih zupčanika sa pravim zupcima pri velikim brzinama i promenljivim obrtnim momentom. Eksperimentalni rezultati ukazuju na to da je modul zupčanika najuticajniji parametar energetske efikasnosti sprezanja zupčanika za razmatrane radne uslove velikih brzina i obrtnog momenta, a zatim i hrapavost bokova zubaca.

U literaturi [51] je razvijen odgovarajući matematički model za analizu energetske efikasnosti cilindričnih zupčastih parova sa unutrašnjim ozubljenjem i pravim zupcima za slučaj ravnomerne raspodele opterećenja na istovremeno spregnute parove zubaca, kada se u toku dodirnog perioda zubaca smenjuju jednostruka i dvostruka sprega.

U radu [53] je razvijen odgovarajući matematički model za analizu energetske efikasnosti cilindričnih zupčastih parova sa unutrašnjim ozubljenjem i pravim zupcima, za slučaj ravnomerne raspodele opterećenja na istovremeno spregnute parove zubaca, kada se u toku dodirnog perioda zubaca smenjuju dvostruka i trostruka sprega. Na osnovu razvijenog modela za određivanje stepena iskorišćenja identifikovane su relevantne veličine zupčastog para koje imaju izrazit uticaj na stepen iskorišćenja. U radu je analiziran uticaj ulja i položaj trenutnog (kinematskog) pola u toku dodirnog perioda na stepen iskorišćenja cilindričnih evolventnih zupčastih parova sa unutrašnjim ozubljenjem. Variranjem oblika profila zubaca je menjan položaj trenutnog (kinematskog) pola relativnih brzina u toku dodirnog perioda spregnutih zubaca. Grafička prezentacija dobijenih rezultata u radu pokazuje da promena stepena iskorišćenja prati karakter promene raspodele opterećenja na istovremeno spregnutim parovima zubaca. Na osnovu dobijenih rezultata proizilazi da je trenutna vrednost stepena iskorišćenja maksimalna u trenutnom (kinematskom) polu relativnih brzina. Veće vrednosti stepena iskorišćenja se nalaze u oblasti dvostruke sprege, a manje u oblasti trostruke sprege. Gubici energije nastali usled trenja kotrljanja su znatno manji od gubitaka energije nastalih usled trenja klizanja. U radu je pokazano da kod ulja koje ima manju dinamičku viskoznost i piezo koeficijent viskoznosti razmatrani zupčasti parovi imaju veću energetske efikasnost u odnosu na ulje koje ima veću dinamičku viskoznost i piezo koeficijent viskoznosti u razmatranom opsegu opterećenja i broja obrtaja. Sa povećanjem obrtnog momenta ova razlika u energetske efikasnosti razmatranih ulja se smanjuje, a sa povećanjem broja obrtaja ova razlika se povećava.

Na osnovu rezultata optimizacije koja je urađena u radu [54] je uočeno sledeće: povećanje modula zupčanika rezultira manjim gubitkom snage, povećanje koeficijenta pomeranja profila zubaca gonjenog zupčanika značajno smanjuje gubitak snage u kombinaciji sa pozitivnim koeficijentom pomeranja profila zubaca pogonskog zupčanika, povećanje širine zupčastog para uzrokuje ograničeno smanjenje gubitaka snage, a kao široka smernica može se zaključiti da će izbor manje širine, velikog broja zubaca pogonskog zupčanika i pozitivnih koeficijenata pomeranja profila zubaca smanjiti aktivnu dužinu dodirnice i dati dobre rezultate u pogledu energetske efikasnosti.

U radu [55] su razvijena tri slučaja za procenu uticaja pomeranja profila zubaca na stepen iskorišćenja cilindričnih zupčastih parova sa pravim zupcima. U prva dva slučaja je bio cilj da se proceni efekat samog pomeranja profila zubaca bez promene stepena sprezanja profila zubaca. U trećem slučaju su razmatrani uticaji pomeranja profila zubaca i stepena sprezanja profila zubaca na energetska efikasnost, jer su spoljašnji prečnici pogonskog i gonjenog zupčanika varirani sa koeficijentom pomeranja profila zubaca. Iz prvog i drugog slučaja je ustanovljeno da se energetska efikasnost smanjuje sa povećanjem koeficijenta pomeranja profila zubaca kao rezultat varijacije u raspodeli opterećenja na početku i kraju kontakta. Odstupanje energetske efikasnosti između ova dva pristupa se povećalo kada se povećao koeficijent pomeranja profila zubaca. Iz trećeg slučaja je ustanovljeno da se kombinovanjem pomeranje profila i stepen sprezanja profila zubaca postiže manja energetska efikasnost nego u prva dva slučaja (gde je razmatran samo uticaj pomeranja profila zubaca). U ovom radu je zaključeno da se energetska efikasnost zupčastih parova smanjuje kada se koriste velike vrednosti koeficijenata pomeranja profila zubaca (veći od 0,3), veći obrtni moment i manja ugaona brzina.

U radu [56] je analiziran uticaj izbora koeficijenta trenja na energetska efikasnost cilindričnih zupčanika sa pravim zupcima. U ovom predlogu je trenje uključeno korišćenjem tri jednačine za određivanje koeficijenta trenja: *Niemann-Winter*-ovu [42] i dve jednačine koje je izveo *Xu* [43]. Procenjeno je da izbor jednačine za određivanje koeficijenta trenja značajno utiče na stepen iskorišćenja cilindričnih zupčastih parova. Niže vrednosti se dobijaju kada se primene jednačine *Xu*-a u poređenju sa vrednostima dobijenim korišćenjem *Niemann-Winter*-ove jednačine. Sa promenom radnih uslova se

menja i energetska efikasnost cilindričnih zupčastih parova. Što je veći obrtni moment i što je manja brzina, to su srednje vrednosti koeficijenta trenja veće i zbog toga je niža vrednost stepena iskorišćenja. Pomeranje profila zubaca zupčanika uzrokuje smanjenje srednje vrednosti koeficijenta trenja, a to može dovesti do povećanja stepena iskorišćenja.

U radu [57] je analizira energetska efikasnost cilindričnih zupčastih parova sa pravim zupcima primenom dva različita pristupa za izračunavanje koeficijenta trenja duž aktivne dodirnice profila zubaca. Prvi metod koji je analiziran razmatra lokalnu vrednost koeficijenta trenja prema *Xu*-ovoj studiji [43], a drugi metod razmatra srednji koeficijent trenja prema *Niemann-Winter*-ovoj jednačini [42]. Varijacija energetske efikasnosti u odnosu na koeficijent pomeranja profila zubaca se uzima u obzir za: radne uslove, prenosni odnos i varijaciju sume koeficijenata pomeranja profila zubaca. Energetska efikasnost zupčastih parova se povećava sa povećanjem brzine rotacije i održavanjem konstantnog obrtnog momenta, kada je koeficijent trenja određen po *Niemann-Winter*-ovoj jednačini. Takođe se energetska efikasnost zupčastih parova povećava i sa smanjenjem obrtnog momenta, normalnog opterećenja na zupcu i povećanjem brzine rotacije. Energetska efikasnost zupčastih parova u odnosu na prenosni odnos se povećava sa povećanjem prenosnog odnosa. Pri tome, ovo povećanje dovodi do pomeranja maksimalnog stepena iskorišćenja ka većim vrednostima koeficijenta pomeranja profila zubaca pogonskog zupčanika. Pokazano je da se energetska efikasnost povećava i sa povećanjem broja zubaca, kao i smanjenjem modula zupčanika za dato osno rastojanje. Prema zbiru koeficijenata pomeranja profila zubaca, za povećanje energetske efikasnosti je neophodno povećanje sume koeficijenata pomeranja profila zubaca. Pri tome, se preporučuju veći koeficijenti pomeranja profila zubaca pogonskog u odnosu na gonjeni zupčanik. Na taj način se dolazi do kompromisa između nosivosti i energetske efikasnosti zubaca zupčastih parova.

3. UTICAJ OBLIKA PROFILA ZUBACA NA STEPEN SPREZANJA ZUBACA

Izborom oblika profila spregnutih zubaca se može značajno uticati na radne performanse zupčastih parova u pogledu nosivosti, pouzdanosti, nivoa vibracija i buke [44,45]. Saglasno tome, u mnogim radovima [13-15] je analiziran uticaj oblika profila zubaca na radnu sposobnost zubaca zupčastih parova. Oblik profila zubaca zavisi od geometrije alata za izradu i njegovog položaja u odnosu na zupčanik pri izradi ozubljenja, odnosno od veličine koeficijenta pomeranja profila zubaca. Promenom geometrije alata i koeficijenta pomeranja profila zubaca zupčanika se menja i oblik profila spregnutih zubaca. Promenom oblika profila zubaca se može menjati i broj istovremeno spregnutih parova zubaca koji učestvuju u prenošenju ukupnog opterećenja zupčastog para.

Broj istovremeno spregnutih parova zubaca u toku dodirnog perioda zavisi od veličine stepena sprežanja bokova zubaca (ε_γ). Stepenn sprežanja bokova zubaca je jednak zbiru stepena sprežanja profila zubaca (ε_α) i stepena sprežanja bočnih linija (ε_β):

$$\varepsilon_\gamma = \varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta. \quad (3.1)$$

Kod cilindričnih zupčanika sa pravim zupcima stepenn sprežanja bočnih linija je jednak nuli ($\varepsilon_\beta = 0$). Saglasno tome, kod ovih zupčastih parova su međusobno jednaki stepenn sprežanja bokova zubaca i stepenn sprežanja profila zubaca:

$$\varepsilon_\gamma = \varepsilon_\alpha. \quad (3.2)$$

Stepenn sprežanja profila zubaca je definisan odnosom aktivne dužine dodirnice profila zubaca (l) i koraka na osnovnom krugu (p_b):

$$\varepsilon_\alpha = \frac{l}{p_b} = \frac{l}{m \cdot \pi \cdot \cos \alpha}, \quad (3.3)$$

ili dodirnog luka na podeonom krugu (g_α) i koraka na podeonom krugu (p):

$$\varepsilon_\alpha = \frac{g_\alpha}{p} = \frac{g_\alpha}{m \cdot \pi}, \quad (3.4)$$

gde su:

m – modul u čeonj ravni, koji je kod cilindričnih zupčanika sa pravim zupcima jednak (standardnom) modulu u normalnoj ravni (m_n),

α – ugao nagiba profila zubaca alata (osnovne zupčaste letve).

3.1. UTICAJ GEOMETRIJE ALATA

Za dobijanje željenih performansi zupčastog para u pogledu nosivosti zubaca, sve češće se koriste zupčasti parovi kod kojih se ukupno opterećenje prenosi preko višestruke sprege zubaca, kada se u toku dodirnog perioda zubaca smenjuju dvostruka i trostruka sprega ($2 \leq \varepsilon_\alpha \leq 3$), što je pokazano u radovima [5,6,9,13,20,25,31]. Kod najčešće korišćenih vrednosti parametara alata (osnovne zupčaste letve): ugao nagiba profila zubaca alata $\alpha = 20^\circ$, koeficijent visine zupca $y = 1$, koeficijent visine glave alata $c_{a0} = 0,25$ i koeficijent temenog zazora $c = 0,2$, nije moguće ostvariti dvostruku i trostruku spregu zubaca [14] variranjem samo koeficijenata pomeranja profila zubaca i broja zubaca spregnutih zupčanika. Međutim, u radu [13] je pokazano da se kombinacijom koeficijenta visine zupca i koeficijenata pomeranja profila zubaca može postići višestruka sprega zubaca kada se smenjuju dvostruka i trostruka sprega ($2 \leq \varepsilon_\alpha \leq 3$) pri uglu nagiba profila zubaca alata $\alpha = 20^\circ$.

U ovom poglavlju je prvo razmatran uticaj ugla nagiba profila zubaca alata i broja zubaca spregnutih zupčanika na stepen sprezanja profila zubaca kada su: koeficijenti pomeranja profila zubaca $x_1 = x_2 = 0$, brojevi zubaca pogonskog zupčanika $z_1 = 50 \div 100$ i koeficijent visine zupca $y = 1$.

Uticaj broja zubaca spregnutih zupčanika na relativnu promenu stepena sprezanja profila zubaca je prikazan faktorom relativne promene stepena sprezanja profila zubaca, prema sledećem izrazu:

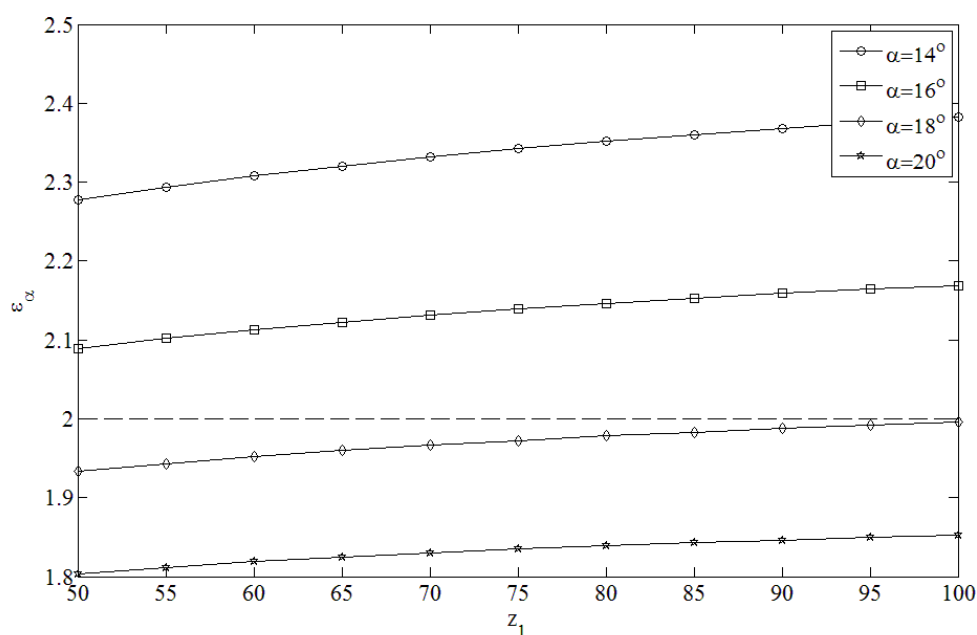
$$\psi = \frac{\varepsilon_{\alpha \text{ maks}} - \varepsilon_{\alpha \text{ min}}}{\varepsilon_{\alpha \text{ min}}}, \quad (3.5)$$

gde su:

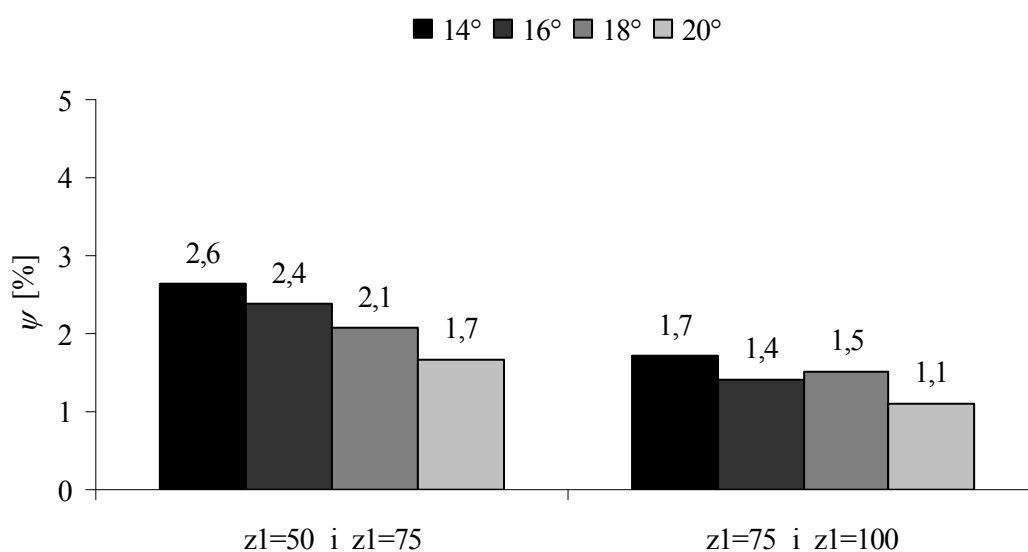
$\varepsilon_{\alpha \text{ min}}, \varepsilon_{\alpha \text{ maks}}$ – najmanja i najveća vrednost stepena sprezanja profila zubaca u oblasti naznačenog broja zubaca pogonskog zupčanika.

Na slici 3.1 je prikazana zavisnost stepena sprezanja profila zubaca od broja zubaca pogonskog zupčanika kad je broj zubaca gonjenog zupčanika $z_2 = 100$, odnosno kad je prenosni odnos $u = 1 \div 2$, za vrednosti ugla nagiba profila zubaca alata $\alpha = 14^\circ$, $\alpha = 16^\circ$, $\alpha = 18^\circ$ i $\alpha = 20^\circ$. Višestruka sprega zubaca kada se smenjuju dvostruka i trostruka sprega ($2 \leq \varepsilon_\alpha \leq 3$) je ostvarena kod zupčastih parova za uglove nagiba profila zubaca alata $\alpha = 14^\circ$ i $\alpha = 16^\circ$, dok za uglove nagiba profila zubaca alata $\alpha = 18^\circ$ i $\alpha = 20^\circ$ višestruka sprega zubaca uopšte nije ostvarena.

Gradijent promene stepena sprezanja profila zubaca je najizraženiji (2,6%) kod manjih vrednosti ugla nagiba profila zubaca alata ($\alpha = 14^\circ$) i u oblasti manjih vrednosti brojeva zubaca pogonskog zupčanika ($z_1 = 50$ i $z_1 = 75$), dok je najmanje izražen (1,1%) kod većih vrednosti ugla nagiba profila zubaca alata ($\alpha = 20^\circ$) i u oblasti većih vrednosti brojeva zubaca pogonskog zupčanika ($z_1 = 75$ i $z_1 = 100$), slika 3.2.



Slika 3.1. Stepen sprezanja profila zubaca za $u = 1 \div 2$ i $x_1 = x_2 = 0$

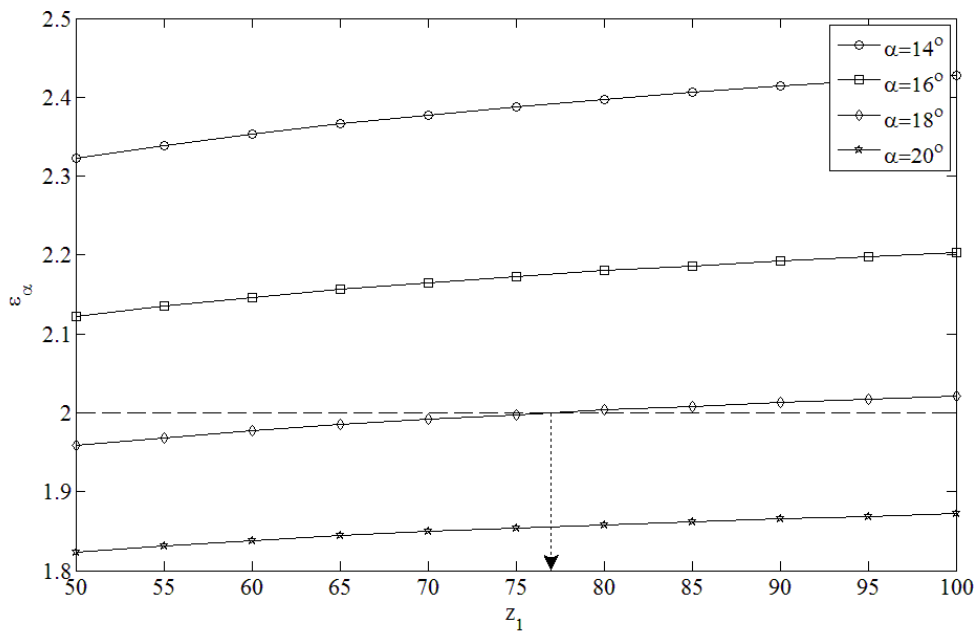


Slika 3.2. Relativna promena stepena sprezanja profila zubaca za
 $u = 1 \div 2$ i $x_1 = x_2 = 0$

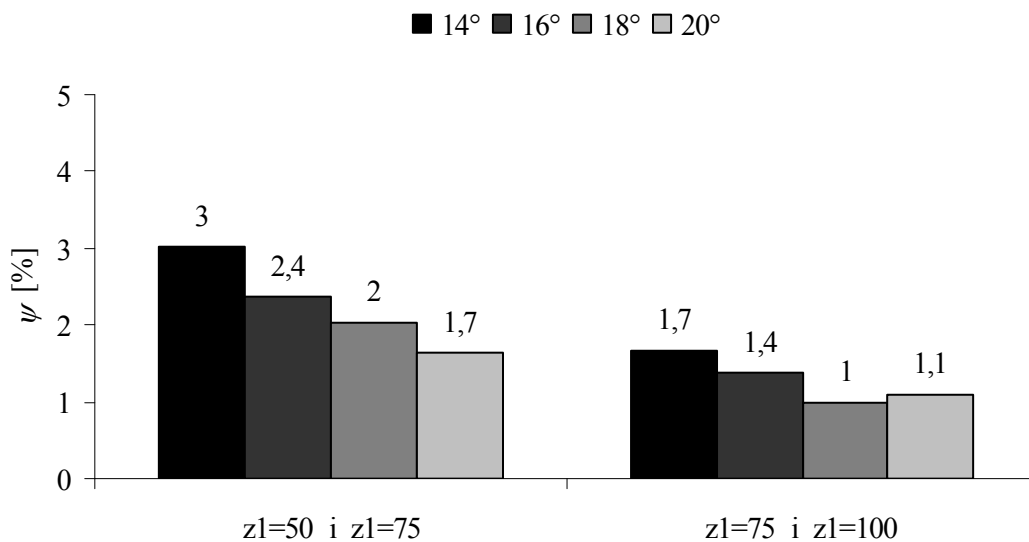
Na slici 3.3 je prikazana zavisnost stepena sprezanja profila zubaca od broja zubaca pogonskog zupčanika kad je broj zubaca gonjenog zupčanika $z_2 = 150$, odnosno kad je prenosni odnos $u = 1,5 \div 3$, za iste vrednosti ugla nagiba profila zubaca alata. Višestruka sprega zubaca kada se smenjuju dvostruka i trostruka sprega ($2 \leq \varepsilon_\alpha \leq 3$) je ostvarena kod zupčastih parova za uglove nagiba profila zubaca alata $\alpha = 14^\circ$ i $\alpha = 16^\circ$, kao i za ugao nagiba profila zubaca alata $\alpha = 18^\circ$ pri broju zubaca pogonskog zupčanika $z_1 \geq 77$. Za ugao nagiba profila zubaca alata $\alpha = 20^\circ$ višestruka sprega zubaca uopšte nije ostvarena.

Gradijent promene stepena sprezanja profila zubaca je najizraženiji (3%) kod manjih vrednosti ugla nagiba profila zubaca alata ($\alpha = 14^\circ$) i u oblasti manjih vrednosti brojeva zubaca pogonskog zupčanika ($z_1 = 50$ i $z_1 = 75$), dok je najmanje izražen (1% i 1,1%) kod većih vrednosti ugla nagiba profila zubaca alata ($\alpha = 18^\circ$ i $\alpha = 20^\circ$) i u oblasti većih vrednosti brojeva zubaca pogonskog zupčanika ($z_1 = 75$ i $z_1 = 100$), slika 3.4. Gradijent promene stepena sprezanja profila zubaca u oblasti manjih vrednosti brojeva zubaca pogonskog zupčanika ($z_1 = 50$ i $z_1 = 75$) je veći za ugao nagiba profila zubaca alata $\alpha = 14^\circ$ kad je prenosni odnos $u = 1,5 \div 3$ u poređenju sa $u = 1 \div 2$. Gradijent promene stepena sprezanja profila zubaca u oblasti većih vrednosti brojeva

zubaca pogonskog zupčanika ($z_1 = 75$ i $z_1 = 100$) je isti za ugao nagiba profila zubaca alata $\alpha = 20^\circ$ kad je prenosni odnos $u = 1,5 \div 3$ i $u = 1 \div 2$.



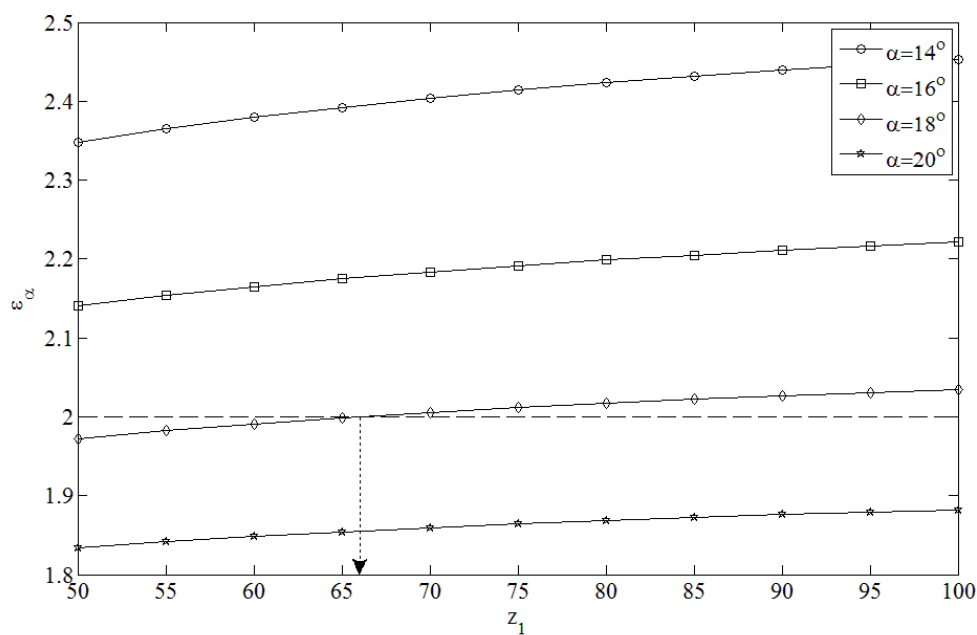
Slika 3.3. Stepennost sprezanja profila zubaca za $u = 1,5 \div 3$ i $x_1 = x_2 = 0$



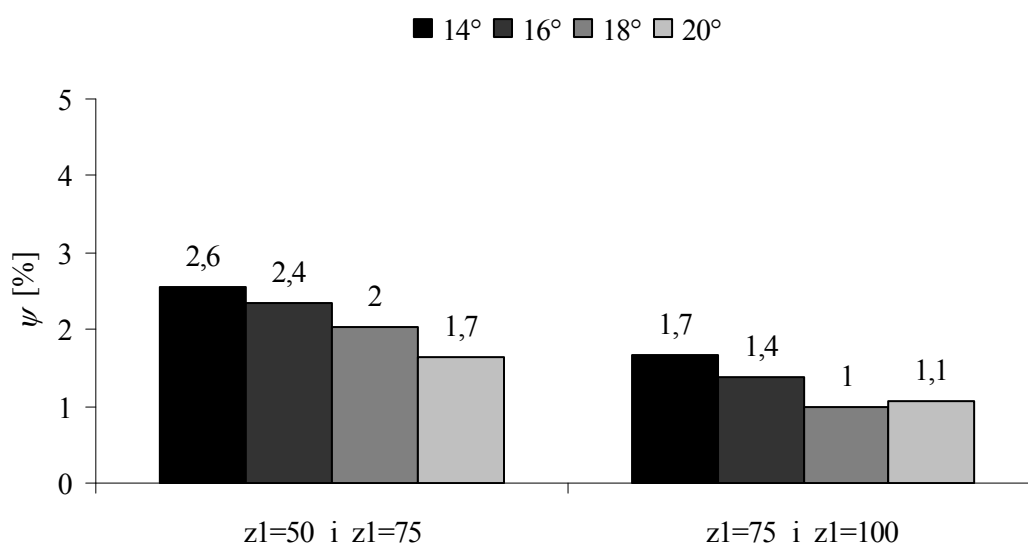
Slika 3.4. Relativna promena stepena sprezanja profila zubaca za $u = 1,5 \div 3$ i $x_1 = x_2 = 0$

Na slici 3.5 je prikazana zavisnost stepena sprezanja profila zubaca od broja zubaca pogonskog zupčanika kad je broj zubaca gonjenog zupčanika $z_2 = 200$, odnosno kad je prenosni odnos $u = 2 \div 4$, za iste vrednosti ugla nagiba profila zubaca alata. Višestruka sprega zubaca kada se smenjuju dvostruka i trostruka sprega ($2 \leq \varepsilon_\alpha \leq 3$) je ostvarena kod zupčastih parova za uglove nagiba profila zubaca alata $\alpha = 14^\circ$ i $\alpha = 16^\circ$, kao i za ugao nagiba profila zubaca alata $\alpha = 18^\circ$ pri broju zubaca pogonskog zupčanika $z_1 \geq 66$. Za ugao nagiba profila zubaca alata $\alpha = 20^\circ$ višestruka sprega zubaca uopšte nije ostvarena.

Gradijent promene stepena sprezanja profila zubaca je najizraženiji (2,6%) kod manjih vrednosti ugla nagiba profila zubaca alata ($\alpha = 14^\circ$) i u oblasti manjih vrednosti brojeva zubaca pogonskog zupčanika ($z_1 = 50$ i $z_1 = 75$), dok je najmanje izražen (1% i 1,1%) kod većih vrednosti ugla nagiba profila zubaca alata ($\alpha = 18^\circ$ i $\alpha = 20^\circ$) i u oblasti većih vrednosti brojeva zubaca pogonskog zupčanika ($z_1 = 75$ i $z_1 = 100$), slika 3.6. Gradijent promene stepena sprezanja profila zubaca u oblasti manjih vrednosti brojeva zubaca pogonskog zupčanika ($z_1 = 50$ i $z_1 = 75$) je isti za ugao nagiba profila zubaca alata $\alpha = 14^\circ$ kad je prenosni odnos $u = 2 \div 4$ i $u = 1 \div 2$, a manji u poređenju sa $u = 1,5 \div 3$. Gradijent promene stepena sprezanja profila zubaca u oblasti većih vrednosti brojeva zubaca pogonskog zupčanika ($z_1 = 75$ i $z_1 = 100$) je isti za ugao nagiba profila zubaca alata $\alpha = 20^\circ$ kad je prenosni odnos $u = 2 \div 4$, $u = 1,5 \div 3$ i $u = 1 \div 2$.



Slika 3.5. Stepen sprezanja profila zubaca za $u = 2 \div 4$ i $x_1 = x_2 = 0$



Slika 3.6. Relativna promena stepena sprezanja profila zubaca za $u = 2 \div 4$ i $x_1 = x_2 = 0$

Gradijent promene stepena sprezanja profila zubaca je veći kod manjih vrednosti brojeva zubaca pogonskog zupčanika (1,7% do 3% za $z_1 = 50$ i $z_1 = 75$) u poređenju sa većim vrednostima brojeva zubaca pogonskog zupčanika (1% do 1,7% za $z_1 = 75$ i $z_1 = 100$) za sve prikazane vrednosti prenosnog odnosa, slike 3.2, 3.4 i 3.6.

3.2. UTICAJ GEOMETRIJE ALATA I POMERANJA PROFILA ZUBACA

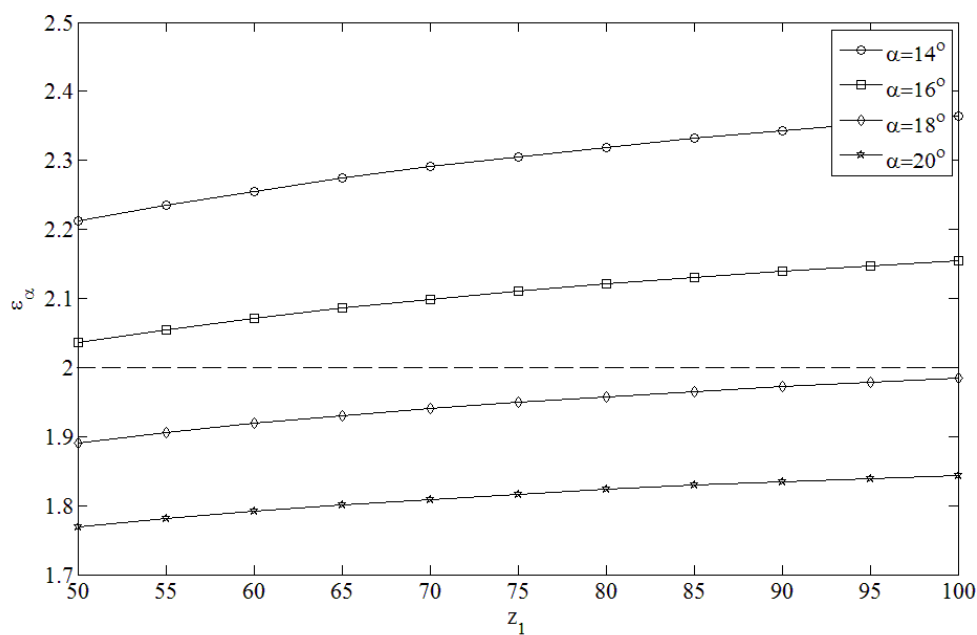
U ovom poglavlju je razmatran istovremeni uticaj ugla nagiba profila zubaca alata, broja zubaca spregnutih zupčanika i koeficijenata pomeranja profila zubaca na stepen sprezanja profila zubaca kada su: brojevi zubaca pogonskog zupčanika $z_1 = 50 \div 100$, koeficijent visine zupca $y = 1$ i osno rastojanje zupčastog para (a) konstantno.

3.2.1. Koeficijenti pomeranja profila zubaca $x_1 = 0,3$ i $x_2 = -0,3$

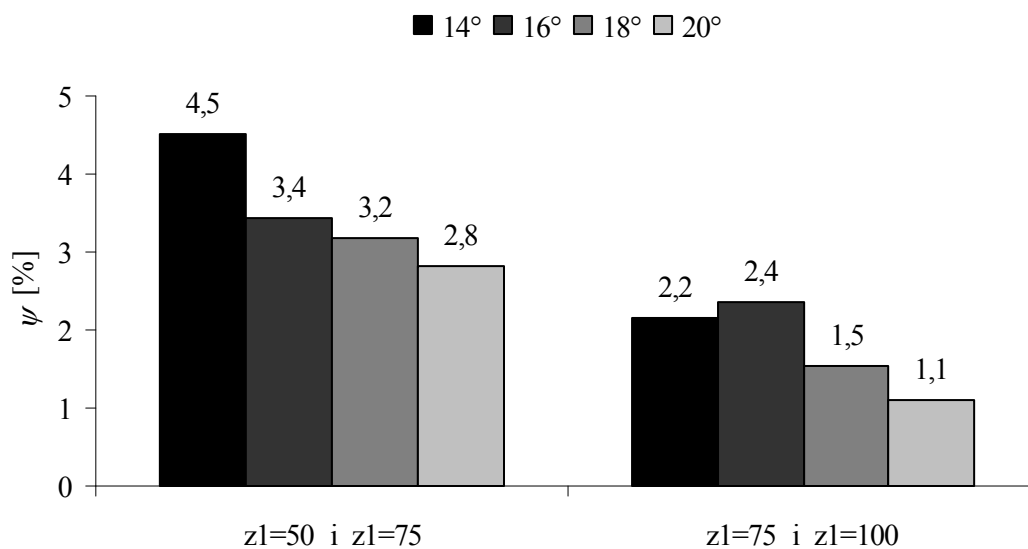
U ovom delu je razmatran uticaj ugla nagiba profila zubaca alata i broja zubaca spregnutih zupčanika na stepen sprezanja profila zubaca kada su koeficijenti pomeranja profila zubaca $x_1 = 0,3$ i $x_2 = -0,3$.

Na slici 3.7 je prikazana zavisnost stepena sprezanja profila zubaca od broja zubaca pogonskog zupčanika kad je broj zubaca gonjenog zupčanika $z_2 = 100$, odnosno kad je prenosni odnos $u = 1 \div 2$, za vrednosti ugla nagiba profila zubaca alata $\alpha = 14^\circ$, $\alpha = 16^\circ$, $\alpha = 18^\circ$ i $\alpha = 20^\circ$. Višestruka sprega zubaca kada se smenjuju dvostruka i trostruka sprega ($2 \leq \varepsilon_\alpha \leq 3$) je ostvarena kod zupčastih parova za uglove nagiba profila zubaca alata $\alpha = 14^\circ$ i $\alpha = 16^\circ$, dok za uglove nagiba profila zubaca alata $\alpha = 18^\circ$ i $\alpha = 20^\circ$ višestruka sprega zubaca uopšte nije ostvarena.

Gradijent promene stepena sprezanja profila zubaca je najizraženiji (4,5%) kod manjih vrednosti ugla nagiba profila zubaca alata ($\alpha = 14^\circ$) i u oblasti manjih vrednosti brojeva zubaca pogonskog zupčanika ($z_1 = 50$ i $z_1 = 75$), dok je najmanje izražen (1,1%) kod većih vrednosti ugla nagiba profila zubaca alata ($\alpha = 20^\circ$) i u oblasti većih vrednosti brojeva zubaca pogonskog zupčanika ($z_1 = 75$ i $z_1 = 100$), slika 3.8.



Slika 3.7. Stepen sprezanja profila zubaca za $u = 1 \div 2$, $x_1 = 0,3$ i $x_2 = -0,3$

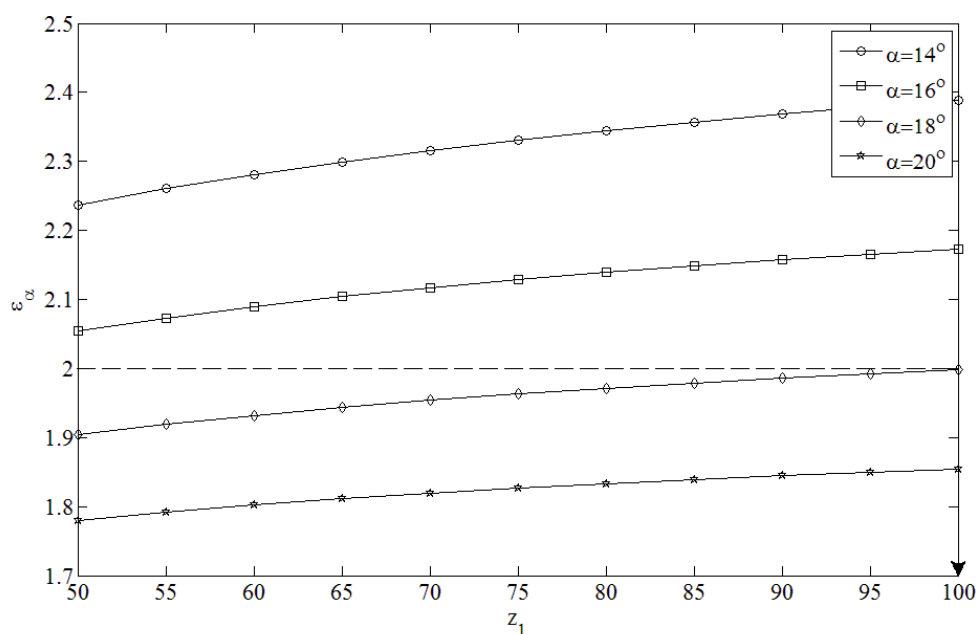


Slika 3.8. Relativna promena stepena sprezanja profila zubaca za $u = 1 \div 2$, $x_1 = 0,3$ i $x_2 = -0,3$

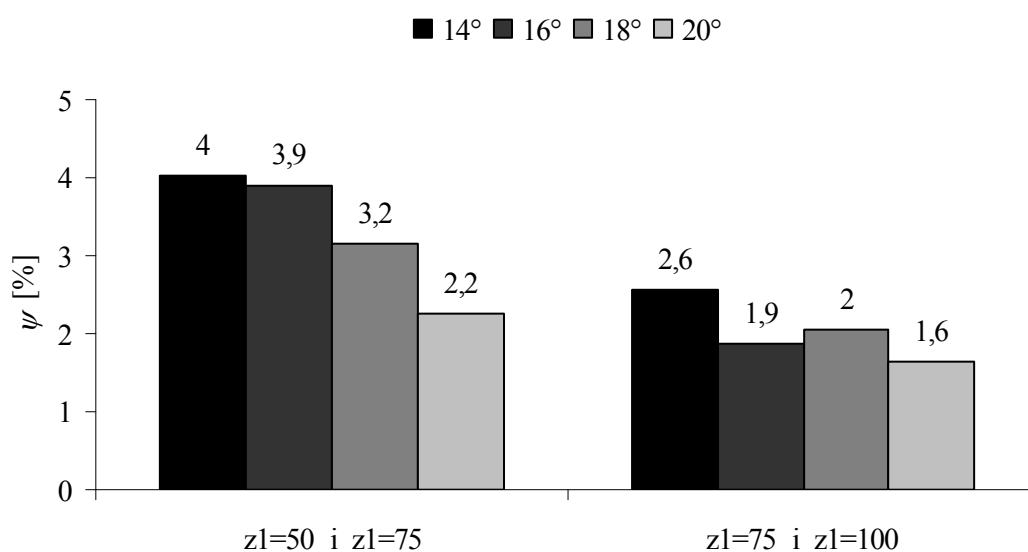
Na slici 3.9 je prikazana zavisnost stepena sprezanja profila zubaca od broja zubaca pogonskog zupčanika kad je broj zubaca gonjenog zupčanika $z_2 = 150$, odnosno kad je prenosni odnos $u = 1,5 \div 3$, za iste vrednosti ugla nagiba profila zubaca alata.

Višestruka sprega zubaca kada se smenjuju dvostruka i trostruka sprega ($2 \leq \varepsilon_\alpha \leq 3$) je ostvarena kod zupčastih parova za uglove nagiba profila zubaca alata $\alpha = 14^\circ$ i $\alpha = 16^\circ$, kao i za ugao nagiba profila zubaca alata $\alpha = 18^\circ$ pri broju zubaca pogonskog zupčanika $z_1 = 100$. Za ugao nagiba profila zubaca alata $\alpha = 20^\circ$ višestruka sprega zubaca uopšte nije ostvarena.

Gradijent promene stepena sprezanja profila zubaca je najizraženiji (4%) kod manjih vrednosti ugla nagiba profila zubaca alata ($\alpha = 14^\circ$) i u oblasti manjih vrednosti brojeva zubaca pogonskog zupčanika ($z_1 = 50$ i $z_1 = 75$), dok je najmanje izražen (1,6%) kod većih vrednosti ugla nagiba profila zubaca alata ($\alpha = 20^\circ$) i u oblasti većih vrednosti brojeva zubaca pogonskog zupčanika ($z_1 = 75$ i $z_1 = 100$), slika 3.10. Gradijent promene stepena sprezanja profila zubaca u oblasti manjih vrednosti brojeva zubaca pogonskog zupčanika ($z_1 = 50$ i $z_1 = 75$) je manji za ugao nagiba profila zubaca alata $\alpha = 14^\circ$ kad je prenosni odnos $u = 1,5 \div 3$ u poređenju sa $u = 1 \div 2$. Gradijent promene stepena sprezanja profila zubaca u oblasti većih vrednosti brojeva zubaca pogonskog zupčanika ($z_1 = 75$ i $z_1 = 100$) je veći za ugao nagiba profila zubaca alata $\alpha = 20^\circ$ kad je prenosni odnos $u = 1,5 \div 3$ u poređenju sa $u = 1 \div 2$.



Slika 3.9. Stepenn sprezanja profila zubaca za $u = 1,5 \div 3$, $x_1 = 0,3$ i $x_2 = -0,3$

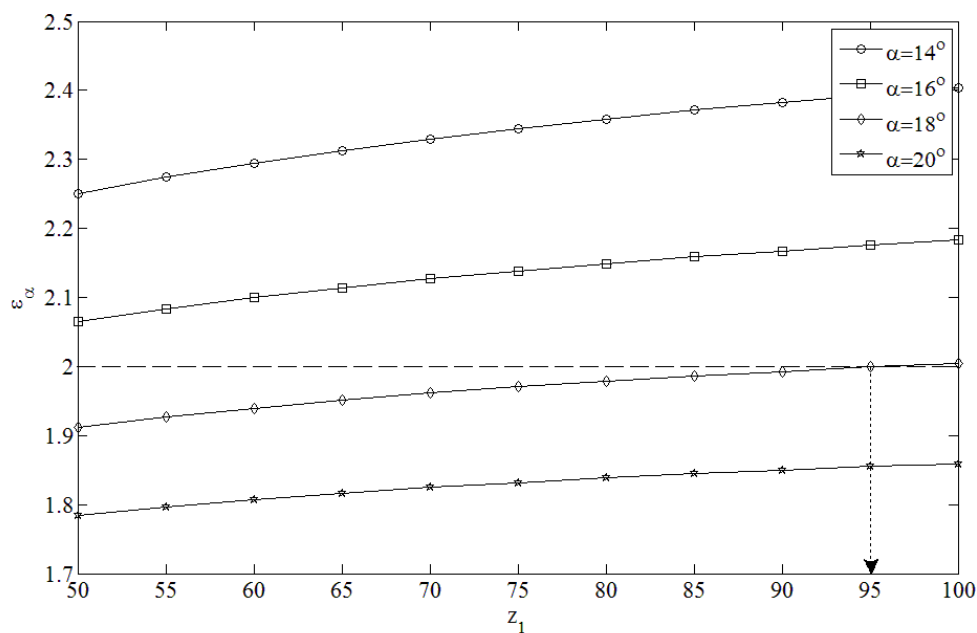


Slika 3.10. Relativna promena stepena sprezanja profila zubaca za
 $u = 1,5 \div 3$, $x_1 = 0,3$ i $x_2 = -0,3$

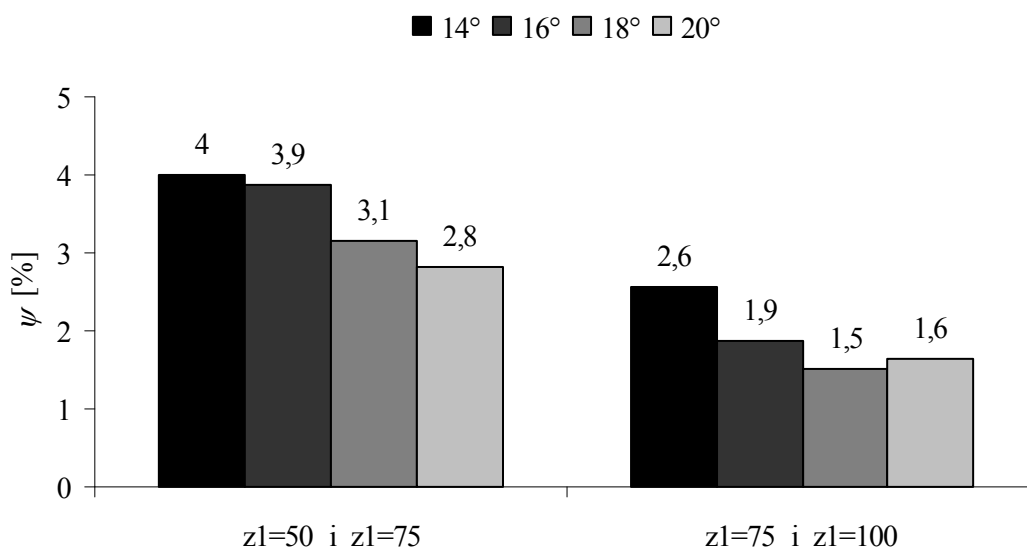
Na slici 3.11 je prikazana zavisnost stepena sprezanja profila zubaca od broja zubaca pogonskog zupčanika kad je broj zubaca gonjenog zupčanika $z_2 = 200$, odnosno kad je prenosni odnos $u = 2 \div 4$, za iste vrednosti ugla nagiba profila zubaca alata. Višestruka sprega zubaca kada se smenjuju dvostruka i trostruka sprega ($2 \leq \varepsilon_\alpha \leq 3$) je ostvarena kod zupčastih parova za uglove nagiba profila zubaca alata $\alpha = 14^\circ$ i $\alpha = 16^\circ$, kao i za ugao nagiba profila zubaca alata $\alpha = 18^\circ$ pri broju zubaca pogonskog zupčanika $z_1 \geq 95$. Za ugao nagiba profila zubaca alata $\alpha = 20^\circ$ višestruka sprega zubaca uopšte nije ostvarena.

Gradijent promene stepena sprezanja profila zubaca je najizraženiji (4%) kod manjih vrednosti ugla nagiba profila zubaca alata ($\alpha = 14^\circ$) i u oblasti manjih vrednosti brojeva zubaca pogonskog zupčanika ($z_1 = 50$ i $z_1 = 75$), dok je najmanje izražen (1,5% i 1,6%) kod većih vrednosti ugla nagiba profila zubaca alata ($\alpha = 18^\circ$ i $\alpha = 20^\circ$) i u oblasti većih vrednosti brojeva zubaca pogonskog zupčanika ($z_1 = 75$ i $z_1 = 100$), slika 3.12. Gradijent promene stepena sprezanja profila zubaca u oblasti manjih vrednosti brojeva zubaca pogonskog zupčanika ($z_1 = 50$ i $z_1 = 75$) je isti za ugao nagiba profila zubaca alata $\alpha = 14^\circ$ kad je prenosni odnos $u = 2 \div 4$ i $u = 1,5 \div 3$, a manji u poređenju sa $u = 1 \div 2$. Gradijent promene stepena sprezanja profila zubaca u

oblasti većih vrednosti brojeva zubaca pogonskog zupčanika ($z_1 = 75$ i $z_1 = 100$) je isti za ugao nagiba profila zubaca alata $\alpha = 20^\circ$ kad je prenosni odnos $u = 2 \div 4$ i $u = 1,5 \div 3$, a veći u poređenju sa $u = 1 \div 2$.



Slika 3.11. Stepen sprezanja profila zubaca za $u = 2 \div 4$, $x_1 = 0,3$ i $x_2 = -0,3$



Slika 3.12. Relativna promena stepena sprezanja profila zubaca za $u = 2 \div 4$, $x_1 = 0,3$ i $x_2 = -0,3$

Gradijent promene stepena sprezanja profila zubaca je veći kod manjih vrednosti brojeva zubaca pogonskog zupčanika (2,2% do 4,5% za $z_1 = 50$ i $z_1 = 75$) u poređenju sa većim vrednostima brojeva zubaca pogonskog zupčanika (1,1% do 2,6% za $z_1 = 75$ i $z_1 = 100$) za sve prikazane vrednosti prenosnog odnosa, slike 3.8, 3.10 i 3.12.

Uticao broj zubaca spregnutih zupčanika na promenu stepena sprezanja profila zubaca je veći kada su koeficijenti pomeranja profila zubaca $x_1 = 0,3$ i $x_2 = -0,3$, nego kada su oba koeficijenta pomeranja profila zubaca $x_1 = x_2 = 0$. Istovremeno je smanjen interval ugla nagiba profila zubaca alata i broja zubaca pogonskog zupčanika kada se ostvaruje višestruka sprega zubaca kada se menjaju dvostruka i trostruka sprega ($2 \leq \varepsilon_\alpha \leq 3$). Kada su koeficijenti pomeranja profila zubaca $x_1 = 0,3$ i $x_2 = -0,3$ gradijent promene stepena sprezanja profila zubaca sa promenom ugla nagiba profila zubaca alata je manje izražen, nego kada su oba koeficijenta pomeranja profila zubaca $x_1 = x_2 = 0$. Takođe su i manje vrednosti stepena sprezanja profila zubaca u odnosu na prethodno navedeni slučaj.

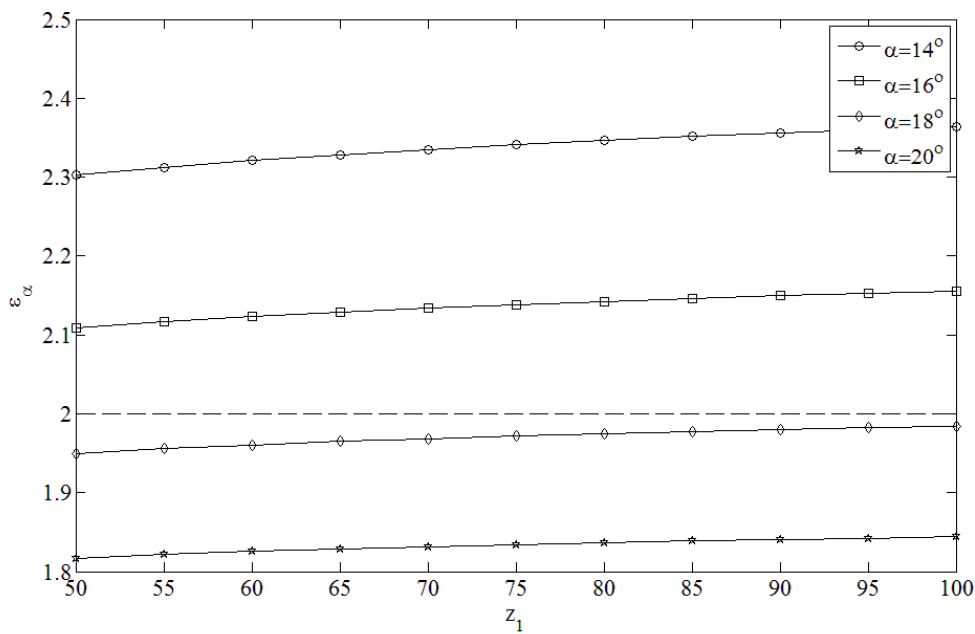
3.2.2. Koeficijenti pomeranja profila zubaca $x_1 = -0,3$ i $x_2 = 0,3$

U ovom delu je razmatran uticaj ugla nagiba profila zubaca alata i broja zubaca spregnutih zupčanika na stepen sprezanja profila zubaca kada su koeficijenti pomeranja profila zubaca $x_1 = -0,3$ i $x_2 = 0,3$.

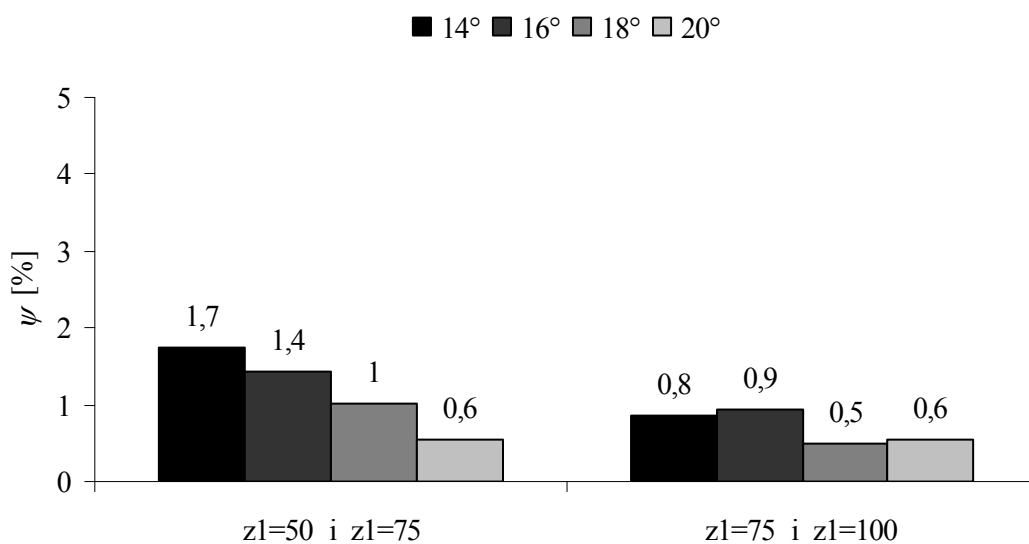
Na slici 3.13 je prikazana zavisnost stepena sprezanja profila zubaca od broja zubaca pogonskog zupčanika kad je broj zubaca gonjenog zupčanika $z_2 = 100$, odnosno kad je prenosni odnos $u = 1 \div 2$, za vrednosti ugla nagiba profila zubaca alata $\alpha = 14^\circ$, $\alpha = 16^\circ$, $\alpha = 18^\circ$ i $\alpha = 20^\circ$. Višestruka sprega zubaca kada se menjaju dvostruka i trostruka sprega ($2 \leq \varepsilon_\alpha \leq 3$) je ostvarena kod zupčastih parova za uglove nagiba profila zubaca alata $\alpha = 14^\circ$ i $\alpha = 16^\circ$, dok za uglove nagiba profila zubaca alata $\alpha = 18^\circ$ i $\alpha = 20^\circ$ višestruka sprega zubaca uopšte nije ostvarena.

Gradijent promene stepena sprezanja profila zubaca je najizraženiji (1,7%) kod manjih vrednosti ugla nagiba profila zubaca alata ($\alpha = 14^\circ$) i u oblasti manjih vrednosti brojeva zubaca pogonskog zupčanika ($z_1 = 50$ i $z_1 = 75$), dok je najmanje izražen

(0,5% i 0,6%) kod većih vrednosti ugla nagiba profila zubaca alata ($\alpha = 18^\circ$ i $\alpha = 20^\circ$) i u oblasti većih vrednosti brojeva zubaca pogonskog zupčanika ($z_1 = 75$ i $z_1 = 100$), slika 3.14.



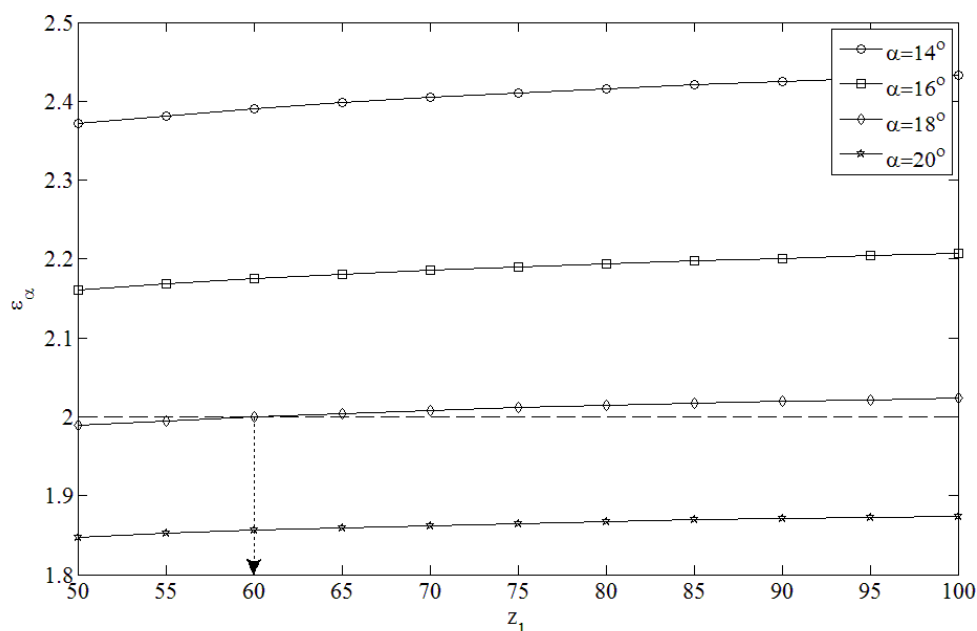
Slika 3.13. Stepen sprezanja profila zubaca za $u = 1 \div 2$, $x_1 = -0,3$ i $x_2 = 0,3$



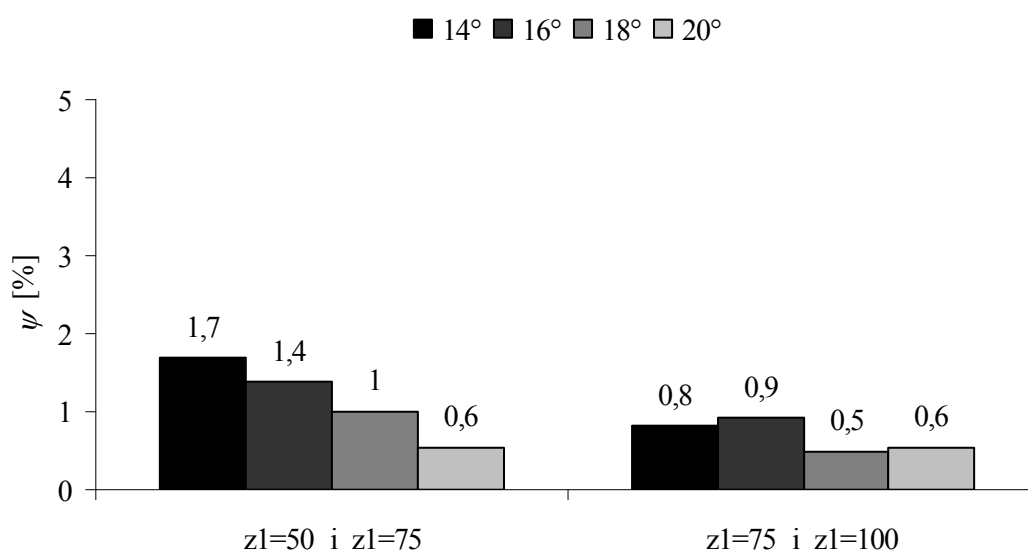
Slika 3.14. Relativna promena stepena sprezanja profila zubaca za $u = 1 \div 2$, $x_1 = -0,3$ i $x_2 = 0,3$

Na slici 3.15 je prikazana zavisnost stepena sprezanja profila zubaca od broja zubaca pogonskog zupčanika kad je broj zubaca gonjenog zupčanika $z_2 = 150$, odnosno kad je prenosni odnos $u = 1,5 \div 3$, za iste vrednosti ugla nagiba profila zubaca alata. Višestruka sprega zubaca kada se smenjuju dvostruka i trostruka sprega ($2 \leq \varepsilon_\alpha \leq 3$) je ostvarena kod zupčastih parova za uglove nagiba profila zubaca alata $\alpha = 14^\circ$ i $\alpha = 16^\circ$, kao i za ugao nagiba profila zubaca alata $\alpha = 18^\circ$ pri broju zubaca pogonskog zupčanika $z_1 \geq 60$. Za ugao nagiba profila zubaca alata $\alpha = 20^\circ$ višestruka sprega zubaca uopšte nije ostvarena.

Gradijent promene stepena sprezanja profila zubaca je najizraženiji (1,7%) kod manjih vrednosti ugla nagiba profila zubaca alata ($\alpha = 14^\circ$) i u oblasti manjih vrednosti brojeva zubaca pogonskog zupčanika ($z_1 = 50$ i $z_1 = 75$), dok je najmanje izražen (0,5% i 0,6%) kod većih vrednosti ugla nagiba profila zubaca alata ($\alpha = 18^\circ$ i $\alpha = 20^\circ$) i u oblasti većih vrednosti brojeva zubaca pogonskog zupčanika ($z_1 = 75$ i $z_1 = 100$), slika 3.16. Gradijent promene stepena sprezanja profila zubaca je isti za sve uglove nagiba profila zubaca alata kad je prenosni odnos $u = 1,5 \div 3$ i $u = 1 \div 2$.



Slika 3.15. Stepen sprezanja profila zubaca za $u = 1,5 \div 3$, $x_1 = -0,3$ i $x_2 = 0,3$

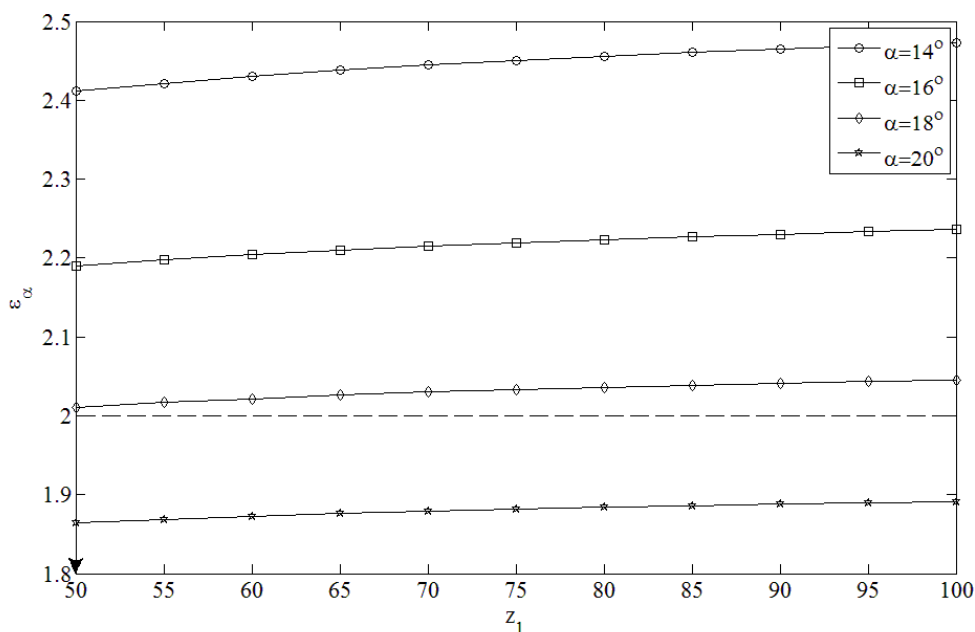


Slika 3.16. Relativna promena stepena sprezanja profila zubaca za
 $u = 1,5 \div 3$, $x_1 = -0,3$ i $x_2 = 0,3$

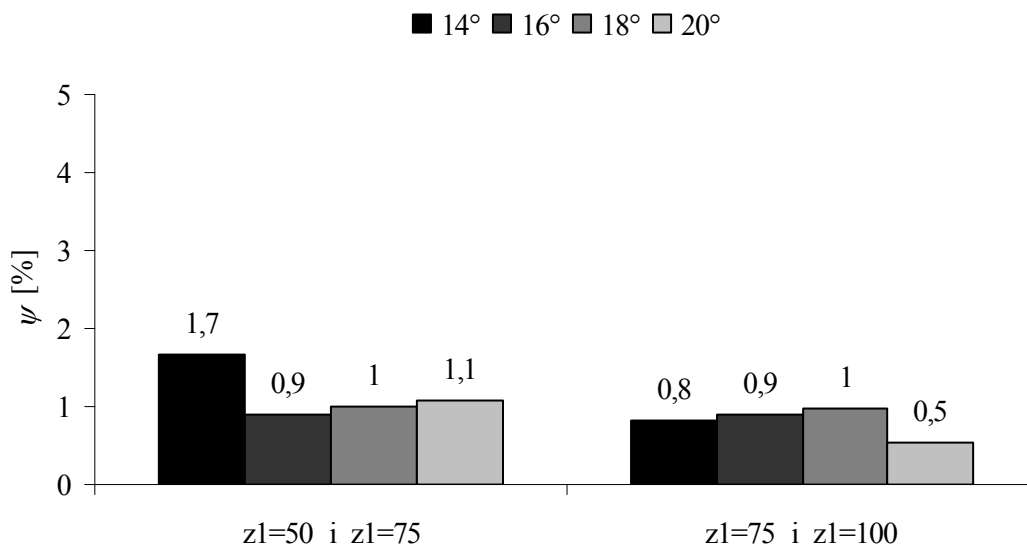
Na slici 3.17 je prikazana zavisnost stepena sprezanja profila zubaca od broja zubaca pogonskog zupčanika kad je broj zubaca gonjenog zupčanika $z_2 = 200$, odnosno kad je prenosni odnos $u = 2 \div 4$, za iste vrednosti ugla nagiba profila zubaca alata. Višestruka sprega zubaca kada se smenjuju dvostruka i trostruka sprega ($2 \leq \varepsilon_\alpha \leq 3$) je ostvarena kod zupčastih parova za uglove nagiba profila zubaca alata $\alpha = 14^\circ$ i $\alpha = 16^\circ$, kao i za ugao nagiba profila zubaca alata $\alpha = 18^\circ$ pri broju zubaca pogonskog zupčanika $z_1 \geq 50$. Za ugao nagiba profila zubaca alata $\alpha = 20^\circ$ višestruka sprega zubaca uopšte nije ostvarena.

Gradijent promene stepena sprezanja profila zubaca je najizraženiji (1,7%) kod manjih vrednosti ugla nagiba profila zubaca alata ($\alpha = 14^\circ$) i u oblasti manjih vrednosti brojeva zubaca pogonskog zupčanika ($z_1 = 50$ i $z_1 = 75$), dok je najmanje izražen (0,5%) kod većih vrednosti ugla nagiba profila zubaca alata ($\alpha = 20^\circ$) i u oblasti većih vrednosti brojeva zubaca pogonskog zupčanika ($z_1 = 75$ i $z_1 = 100$), slika 3.18. Gradijent promene stepena sprezanja profila zubaca u oblasti manjih vrednosti brojeva zubaca pogonskog zupčanika ($z_1 = 50$ i $z_1 = 75$) je isti za ugao nagiba profila zubaca alata $\alpha = 14^\circ$ kad je prenosni odnos $u = 2 \div 4$, $u = 1,5 \div 3$ i $u = 1 \div 2$. Gradijent promene stepena sprezanja profila zubaca u oblasti većih vrednosti brojeva zubaca

pogonskog zupčanika ($z_1 = 75$ i $z_1 = 100$) je manji za ugao nagiba profila zubaca alata $\alpha = 20^\circ$ kad je prenosni odnos $u = 2 \div 4$ u poređenju sa $u = 1,5 \div 3$ i $u = 1 \div 2$.



Slika 3.17. Stepen sprezanja profila zubaca za $u = 2 \div 4$, $x_1 = -0,3$ i $x_2 = 0,3$



Slika 3.18. Relativna promena stepena sprezanja profila zubaca za $u = 2 \div 4$, $x_1 = -0,3$ i $x_2 = 0,3$

Gradijent promene stepena sprezanja profila zubaca je veći kod manjih vrednosti brojeva zubaca pogonskog zupčanika (0,6% do 1,7% za $z_1 = 50$ i $z_1 = 75$) u poređenju sa većim vrednostima brojeva zubaca pogonskog zupčanika (0,5% do 1% za $z_1 = 75$ i $z_1 = 100$) za sve prikazane vrednosti prenosnog odnosa, slike 3.14, 3.16 i 3.18.

Uticao broj zubaca spregnutih zupčanika na promenu stepena sprezanja profila zubaca je manji kada su koeficijenti pomeranja profila zubaca $x_1 = -0,3$ i $x_2 = 0,3$, nego kada su oba koeficijenta pomeranja profila zubaca $x_1 = x_2 = 0$ ili kada su koeficijenti pomeranja profila zubaca $x_1 = 0,3$ i $x_2 = -0,3$. Istovremeno je povećan interval ugla nagiba profila zubaca alata i broja zubaca pogonskog zupčanika kada se ostvaruje višestruka sprega zubaca kada se smenjuju dvostruka i trostruka sprega ($2 \leq \varepsilon_\alpha \leq 3$). Kada su koeficijenti pomeranja profila zubaca $x_1 = -0,3$ i $x_2 = 0,3$ gradijent promene stepena sprezanja profila zubaca sa promenom ugla nagiba profila zubaca alata je više izražen, nego kada su oba koeficijenta pomeranja profila zubaca $x_1 = x_2 = 0$ ili kada su koeficijenti pomeranja profila zubaca $x_1 = 0,3$ i $x_2 = -0,3$. Takođe su i veće vrednosti stepena sprezanja profila zubaca u odnosu na oba prethodno navedena slučaja.

Većim vrednostima stepena sprezanja profila zubaca odgovaraju veće vrednosti broja zubaca spregnutih zupčanika, odnosno veće vrednosti prenosnog odnosa. Nasuprot tome, većim vrednostima stepena sprezanja profila zubaca odgovaraju manje vrednosti ugla nagiba profila zubaca alata. Pri tome, gradijent uticaja broja zubaca zupčastog para i ugla nagib profila zubaca alata na stepen sprezanja profila zubaca zavisi od vrednosti koeficijenata pomeranja profila zubaca [13,14].

Analiza je pokazala da se variranjem broja zubaca zupčastog para, ugla nagiba profila zubaca alata i koeficijenata pomeranja profila zubaca ne mogu ostvariti vrednosti stepena sprezanja profila zubaca veće od tri. To znači da se u toku dodirnog perioda može ostvariti samo višestruka sprega zubaca kada se smenjuju dvostruka i trostruka sprega ($2 \leq \varepsilon_\alpha \leq 3$). Za postizanje višestruke sprege zubaca kada se smenjuju trostruka i četverostruka sprega ($3 \leq \varepsilon_\alpha \leq 4$) je potrebno menjati i koeficijent visine zupca [13,14], a to bi značajno uticalo na kapacitet nosivost korena i bokova zubaca [1-28], odnosno na pojavu loma u korenu [29-37] i površinskih oštećenja na bokovima zubaca.

4. RASPODELA OPTEREĆENJA NA ISTOVREMENO SPREGNUTE PAROVE ZUBACA

Kod zubaca zupčastih parova su poznate dve raspodele opterećenja: duž trenutne linije dodira i na istovremeno spregnute parove zubaca.

Za razmatranje raspodele opterećenja na istovremeno spregnute parove zubaca je definisan faktor raspodele opterećenja [3], koji pokazuje stepen angažovanosti pojedinih istovremeno spregnutih parova zubaca u prenošenju ukupnog opterećenja zupčastog para:

$$K_{oi} = \frac{F_i}{F}, \quad (4.1)$$

gde su:

F – ukupno opterećenje zupčastog para,

F_i – deo opterećenja koje prenosi posmatrani istovremeno spregnuti par zubaca,

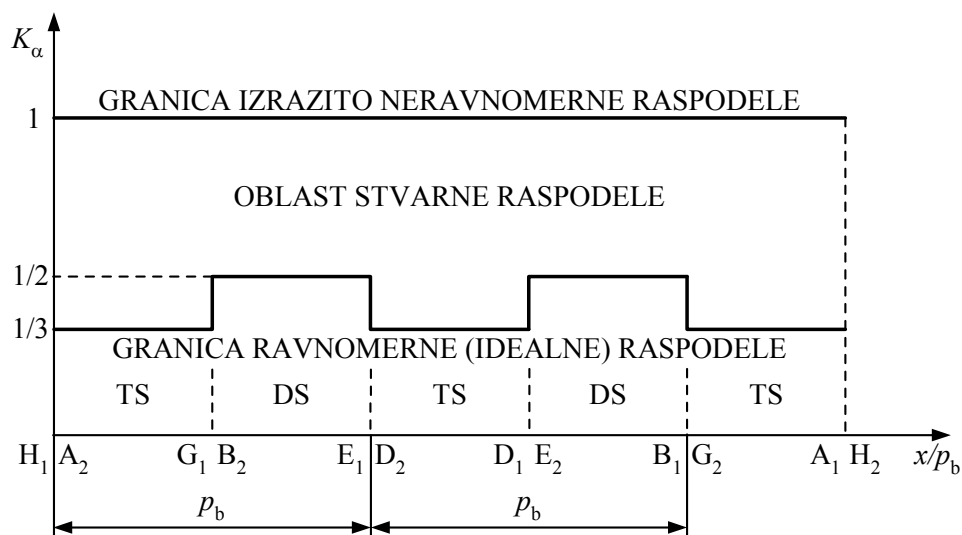
$i = 1, \dots, n$ – broj istovremeno spregnutih parova zubaca.

Raspodela opterećenja [3,5-9,20-23,27,33] na istovremeno spregnute parove zubaca zavisi od velikog broja uticajnih parametara (proizvodni, montažni, eksploatacioni, konstrukcioni, kinematski, geometrijski i radni), koji se ne mogu prikazati jednostavnim matematičkim modelima, pa se zbog toga uvode odgovarajuće aproksimacije. U zavisnosti od ovih uticajnih parametara, raspodela opterećenja može biti granična (ravnomerna ili izrazito neravnomerna) i stvarna, koja se nalazi u oblasti između ravnomerne (idealne) i izrazito neravnomerne.

4.1. GRANIČNA RASPODELA OPTEREĆENJA

Granična raspodela opterećenja na istovremeno spregnute parove zubaca se može pojaviti u dva karakteristična ekstremna slučaja: ravnomerna (idealna) ili izrazito neravnomerna raspodela opterećenja (slika 4.1). Kod ravnomerne (idealne) raspodele opterećenja svi istovremeno spregnuti parovi zubaca podjednako učestvuju u prenošenju ukupnog opterećenja zupčastog para (npr.: $K_{oi} = 1/2$ za dvostruku spregu, $K_{oi} = 1/3$ za trostruku spregu, itd.). Kod izrazito neravnomerne raspodele opterećenja je

karakteristično da se i pri većem broju istovremeno spregnutih parova zubaca ukupno opterećenje prenosi preko jednog para zubaca. U ovom slučaju faktor raspodele opterećenja dostiže gornju ekstremnu (graničnu) vrednost ($K_{\alpha i} = 1$).

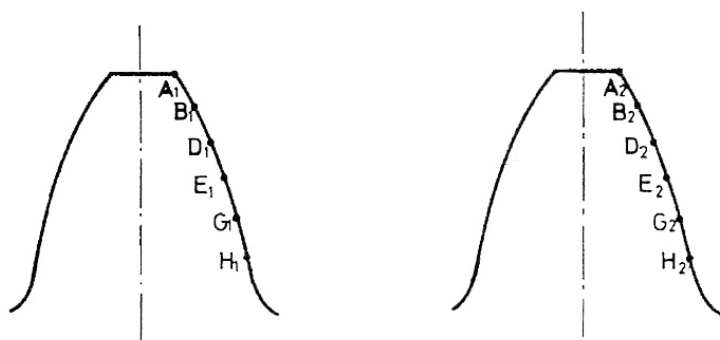


Slika 4.1. Granične i stvarne raspodele opterećenja kod višestruke sprege zubaca (TS – trostruka sprega, DS – dvostruka sprega)

4.2. MEHANIČKI MODEL STVARNE RASPODELE OPTEREĆENJA

Oblast stvarne raspodele opterećenja na istovremeno spregnute parove zubaca je definisana između dva karakteristična ekstremna slučaja granične raspodele opterećenja - ravnomerne (idealne) i izrazito neravnomerne (slika 4.1).

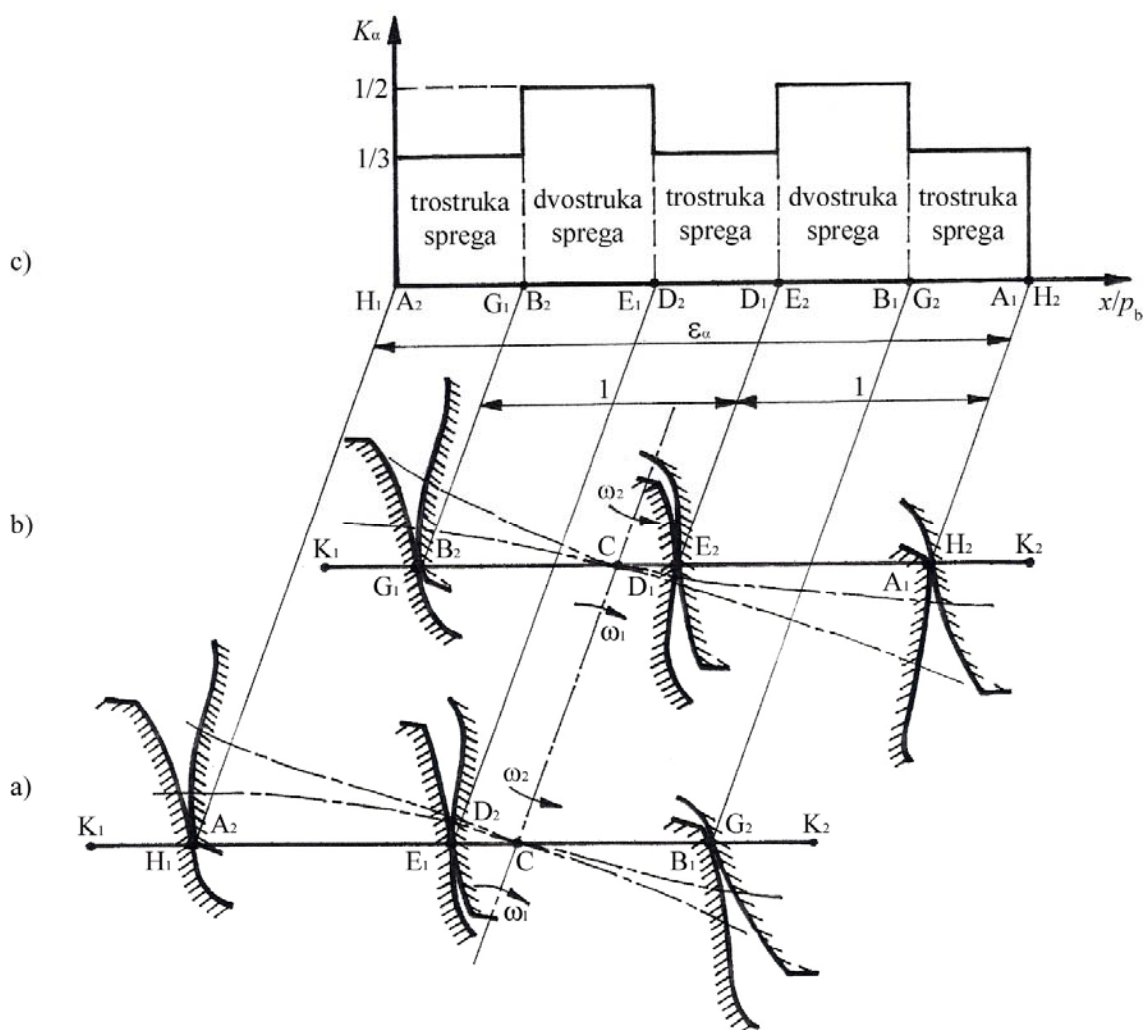
Za analizu raspodele opterećenja na istovremeno spregnute parove zubaca je potrebno definisati tačke dodira na profilima spregnutih zubaca u kojima se vrši primopredaja opterećenja (slika 4.2).



Slika 4.2. Tačke na profilima zubaca pogonskog i gonjenog zupčanika [3]

Da bi se došlo do analitičkih izraza za faktor raspodele opterećenja na istovremeno spregnute parove zubaca kada se ukupno opterećenje zupčanika raspodeljuje na tri para zubaca, posmatran je period trostruke sprege zubaca. Sprezanje zubaca kada se u toku dodirnog perioda smenjuju dvostruka i trostruka sprega je prikazano na slici 4.3. Na slici 4.3a je prikazan trenutak kada dva para zubaca izlaze iz zone dvostruke sprege, a jedan par zubaca započinje sprezanje ulaskom u zonu trostruke sprege (početni trenutak dodira). Na slici 4.3b je prikazan trenutak kada dva para zubaca ulaze u zonu dvostruke sprege, a jedan par zubaca napušta sprezanje izlaskom iz zone trostruke sprege (poslednji trenutak dodira). Oblasti dvostruke i trostruke sprege zubaca u toku dodirnog perioda su prikazane na slici 4.3c. Karakteristične tačke dodira na profilima istovremeno spregnutih parova zubaca su prikazane na slikama 4.1 do 4.3:

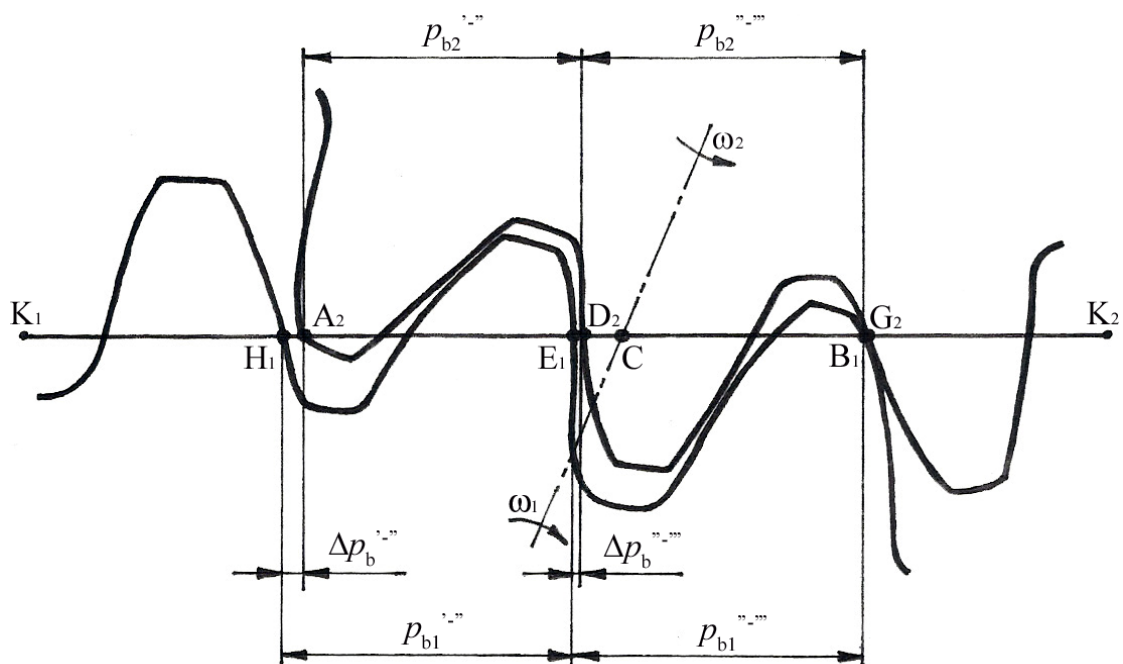
- tačka A (spoljašnja tačka trostruke sprege) odgovara poslednjem trenutku sprezanja zubaca pogonskog (A_1) i prvom trenutku sprezanja zubaca gonjenog (A_2) zupčanika;
- tačka B (spoljašnja tačka dvostruke sprege) odgovara poslednjem trenutku dvostruke sprege zubaca pogonskog (B_1) i prvom trenutku dvostruke sprege zubaca gonjenog (B_2) zupčanika;
- tačka D (srednja spoljašnja tačka dvostruke sprege) odgovara početku drugog trenutka dvostruke sprege zubaca pogonskog (D_1) i završetku prvog trenutka dvostruke sprege zubaca gonjenog (D_2) zupčanika;
- tačka C je trenutni (kinematski) pol relativnih brzina;
- tačka E (srednja unutrašnja tačka dvostruke sprege) odgovara završetku prvog trenutka dvostruke sprege zubaca pogonskog (E_1) i početku drugog trenutka dvostruke sprege zubaca gonjenog (E_2) zupčanika;
- tačka G (unutrašnja tačka dvostruke sprege) odgovara prvom trenutku dvostruke sprege zubaca pogonskog (G_1) i poslednjem trenutku dvostruke sprege zubaca gonjenog (G_2) zupčanika;
- tačka H (unutrašnja tačka trostruke sprege) odgovara prvom trenutku sprezanja zubaca pogonskog (H_1) i poslednjem trenutku sprezanja zubaca gonjenog (H_2) zupčanika;
- tačka K odgovara početku (K_1) i kraju (K_2) aktivne dužine dodirnice profila zubaca (l).



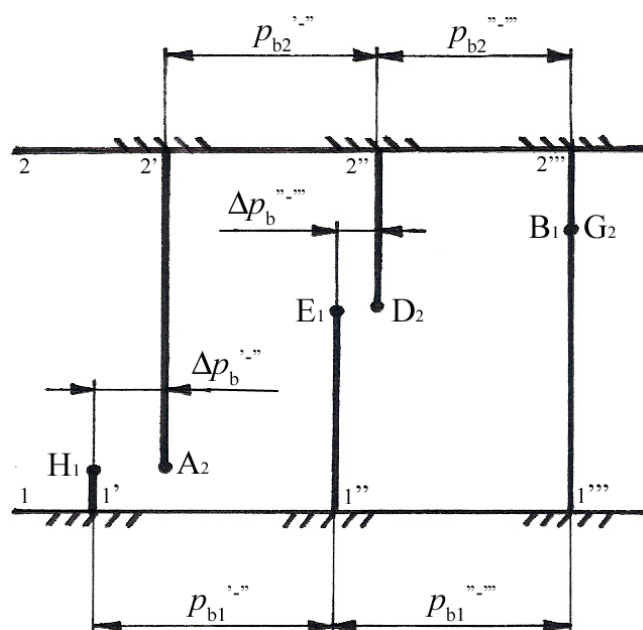
Slika 4.3. Tačke dodira na profilima spregnutih zubaca pogonskog i gonjenog zupčanika

Ako se pretpostavi da su osnovni koraci spregnutih parova zubaca pogonskog i gonjenog zupčanika međusobno jednaki, tada dvostruka sprega treba da se završi u dodirnim tačkama B_1G_2 i E_1D_2 , a trostruka sprega da započne ulaskom sledećeg para zubaca u dodirnim tačkama H_1A_2 . Na slici 4.4 je prikazan početni trenutak dodira neopterećenih zubaca kada prethodni uslov nije ispunjen, odnosno kada postoje razlike osnovnih koraka zubaca pogonskog i gonjenog zupčanika $p_{b1}^{''} > p_{b2}^{''}$ i $p_{b1}^{'''} > p_{b2}^{'''}$ (gde su: ' – prvi par zubaca, '' – drugi par zubaca, ''' – treći par zubaca). Zbog razlike osnovnih koraka, uspostavljanje trostruke sprege nije moguće bez dejstva opterećenja koje treba da deformiše prvo par zubaca koji se dodiruje u tačkama B_1G_2 , a potom i par zubaca koji se dodiruje u tačkama E_1D_2 . Na taj način se poništavaju obe

razlike osnovnih koraka parova zubaca koji se dodiruju u tačkama B_1G_2 , E_1D_2 i H_1A_2 ($\Delta p_b^{''''} = p_{b1}^{''''} - p_{b2}^{''''} = 0$ i $\Delta p_b^{'''} = p_{b1}^{'''} - p_{b2}^{'''} = 0$). Na slici 4.5 je prikazan mehanički model sprezanja neopterećenih zubaca u prvom trenutku trostruke sprege kada postoje razlike osnovnih koraka $p_{b1}^{''} > p_{b2}^{''}$ i $p_{b1}^{''''} > p_{b2}^{''''}$.

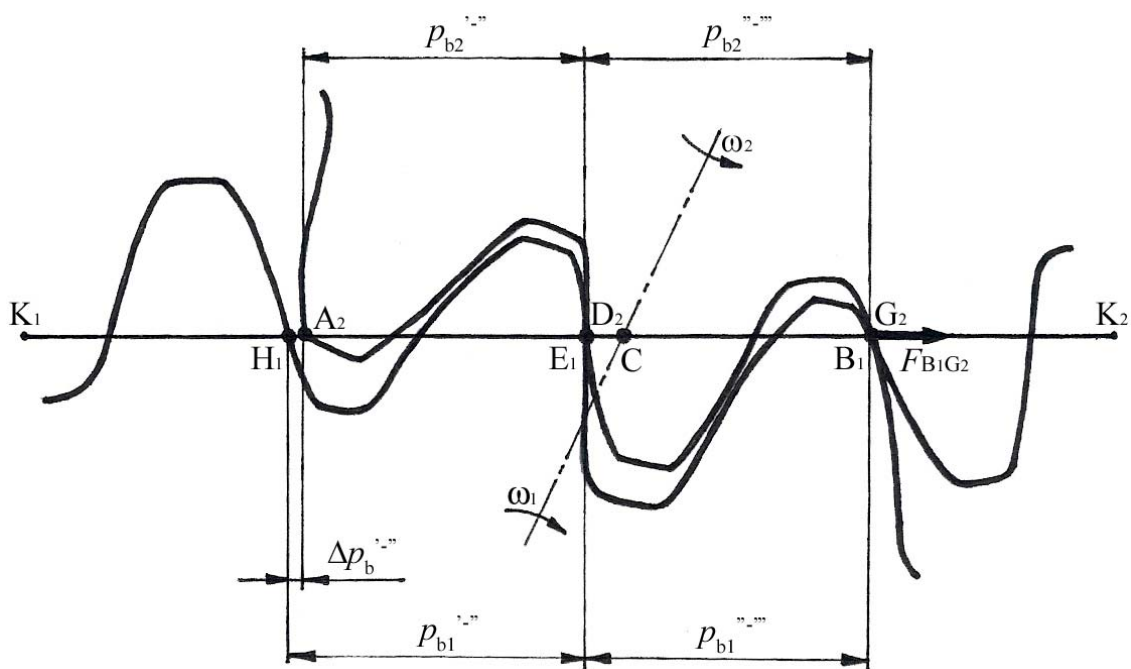


Slika 4.4. Sprezanje neopterećenih zubaca u prvom trenutku trostruke sprege kada postoje razlike osnovnih koraka

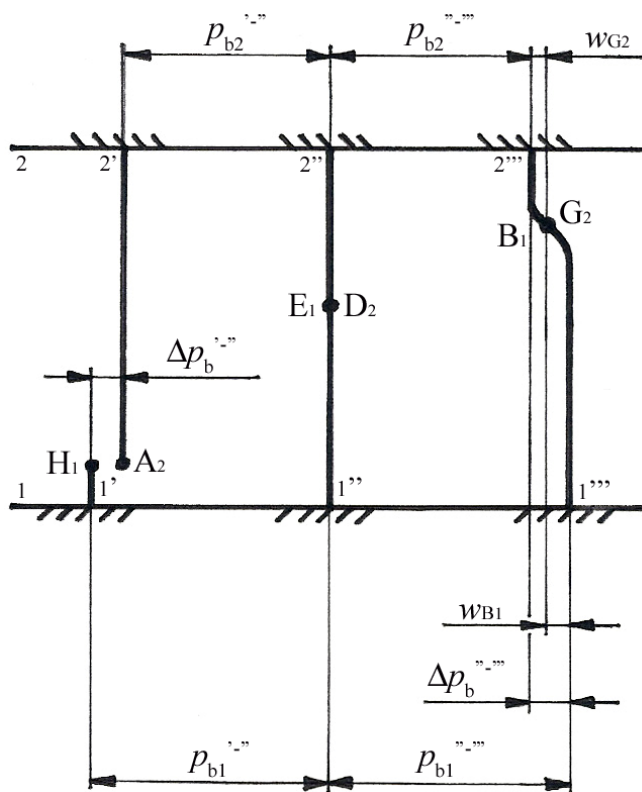


Slika 4.5. Mehanički model sprezanja neopterećenih zubaca u prvom trenutku trostruke sprege kada postoje razlike osnovnih koraka

Na slici 4.6 je prikazan početni trenutak dodira kada je par zubaca koji se dodiruje u tačkama B_1G_2 izložen opterećenju takvog inteziteta ($F_{B_1G_2} > 0$) da njegove elastične deformacije poništavaju samo razliku osnovnih koraka parova zubaca koji se dodiruju u tačkama B_1G_2 i E_1D_2 ($\Delta p_b''-' = p_{b1}''-' - p_{b2}''-' = 0$). Usled nastalih elastičnih deformacija je uspostavljeno samo dodirivanje drugog para zubaca u tačkama E_1D_2 , ali bez opterećenja u ovim tačkama ($F_{E_1D_2} = 0$). Istovremeno kod trećeg para zubaca, koji treba da se dodiruje u tačkama H_1A_2 , nije uspostavljeno dodirivanje. Na slici 4.7 je prikazan mehanički model u prvom trenutku trostruke sprege kada jedan spregnuti par zubaca učestvuje u prenošenju ukupnog opterećenja.

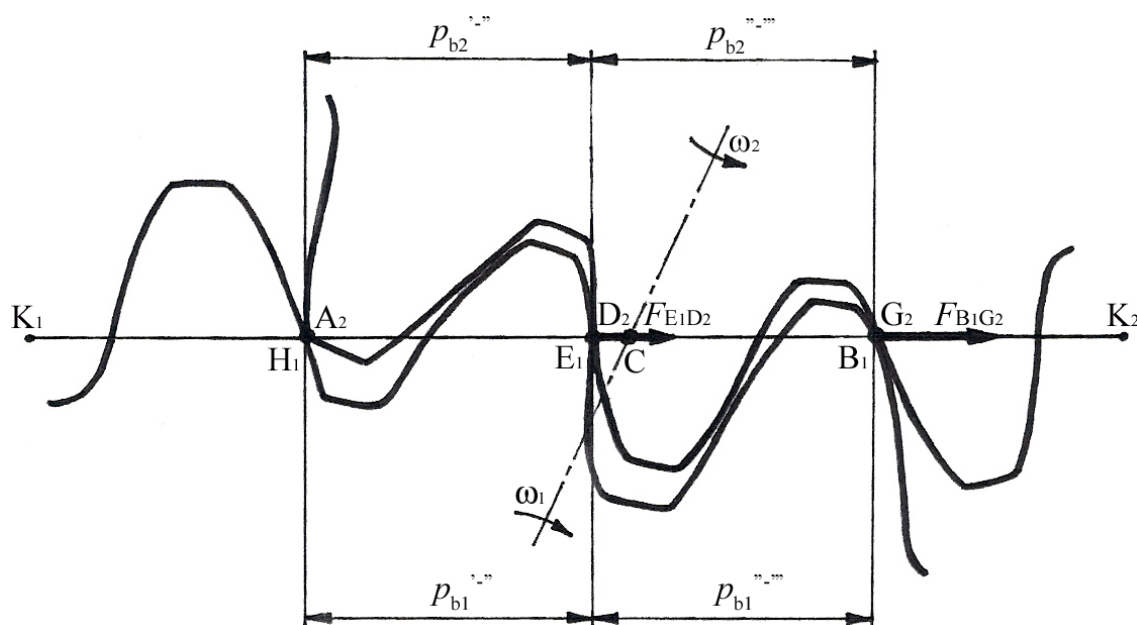


Slika 4.6. Sprezanje zubaca u prvom trenutku trostruke sprege kada jedan spregnuti par zubaca učestvuje u prenošenju ukupnog opterećenja

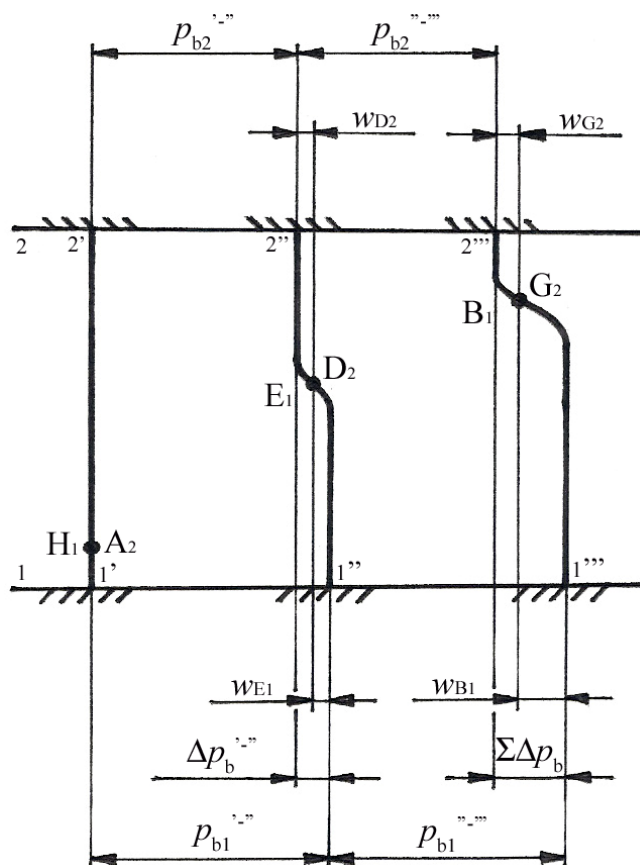


Slika 4.7. Mehanički model sprezanja zubaca u prvom trenutku trostruke sprege kada jedan spregnuti par zubaca učestvuje u prenošenju ukupnog opterećenja

Usled elastičnih deformacija para zubaca koji se dodiruju u tačkama B_1G_2 nastalih daljim povećanjem opterećenja zupčastog para (slika 4.8), ne samo da je poništena razlika osnovnih koraka parova zubaca koji se dodiruju u tačkama B_1G_2 i E_1D_2 ($\Delta p_b^{''''} = p_{b1}^{''''} - p_{b2}^{''''} = 0$), već je u prenošenje ukupnog opterećenja uključen i drugi spregnuti par zubaca koji se dodiruje u tačkama E_1D_2 ($F_{E_1D_2} > 0$). Osim toga, uspostavljeno je dodirivanje i trećeg para zubaca u tačkama H_1A_2 , jer je elastičnim deformacijama parova zubaca koji se dodiruju u tačkama B_1G_2 i E_1D_2 poništena i razlika osnovnih koraka parova zubaca koji se dodiruju u tačkama E_1D_2 i H_1A_2 ($\Delta p_b^{''} = p_{b1}^{''} - p_{b2}^{''} = 0$), ali bez opterećenja u tačkama H_1A_2 ($F_{H_1A_2} = 0$). Učešće drugog para zubaca koji se dodiruje u tačkama E_1D_2 u prenošenju ukupnog opterećenja zavisi od sopstvenih elastičnih deformacija, kao i od elastičnih deformacija već spregnutog para zubaca koji se dodiruju u tačkama B_1G_2 . Na slici 4.9 je prikazan mehanički model u prvom trenutku trostruke sprege kada dva spregnuta para zubaca učestvuju u prenošenju ukupnog opterećenja.

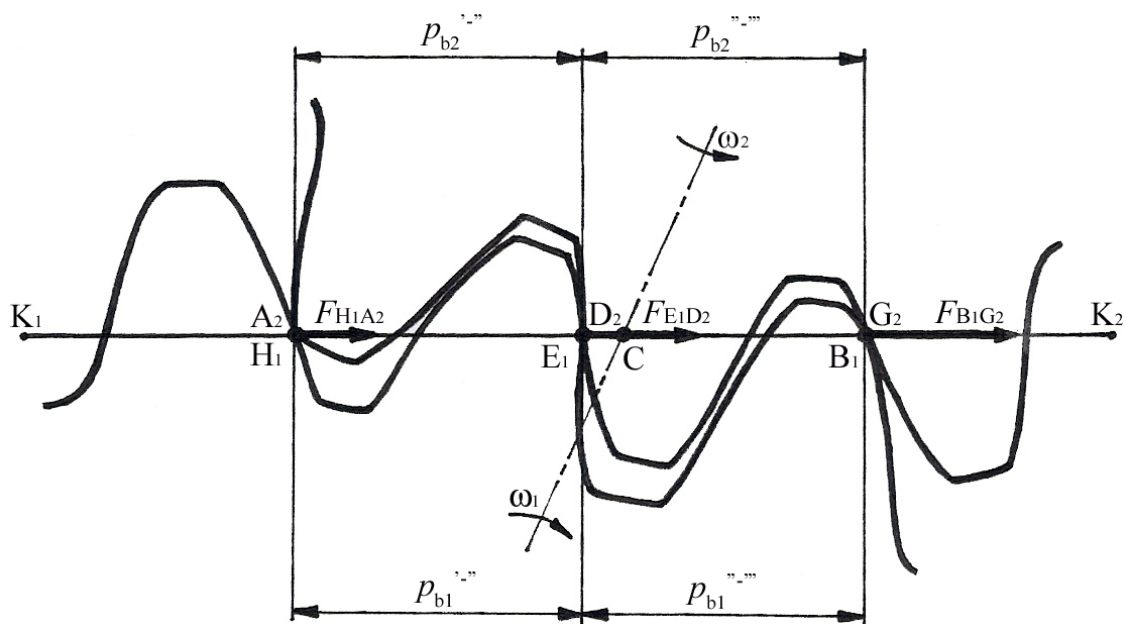


Slika 4.8. Sprezanje zubaca u prvom trenutku trostruke sprege kada dva spregnuta para zubaca učestvuju u prenošenju ukupnog opterećenja

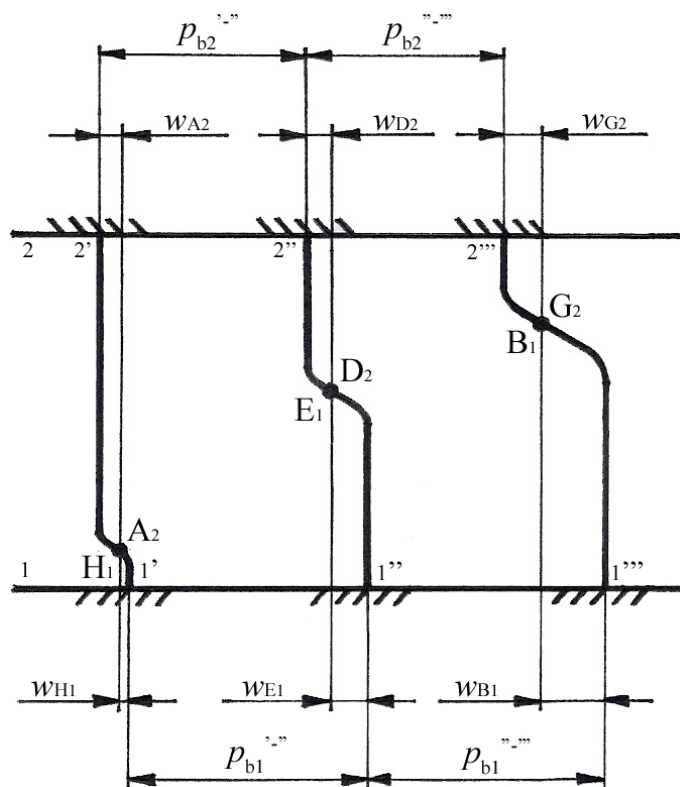


Slika 4.9. Mehanički model sprezanja zubaca u prvom trenutku trostruke sprege kada dva spregnuta para zubaca učestvuju u prenošenju ukupnog opterećenja

Usled elastičnih deformacija parova zubaca koji se dodiruju u tačkama B_1G_2 i E_1D_2 nastalih daljim povećanjem opterećenja zupčastih parova (slika 4.10), ne samo da je poništena razlika osnovnih koraka parova zubaca koji se dodiruju u tačkama E_1D_2 i H_1A_2 ($\Delta p_b^{1-2} = p_{b1}^{1-2} - p_{b2}^{1-2} = 0$), već je u prenošenje ukupnog opterećenja uključen i treći spregnuti par zubaca koji se dodiruje u tačkama H_1A_2 ($F_{H_1A_2} > 0$). Učešće trećeg para zubaca koji se dodiruje u tačkama H_1A_2 u prenošenju ukupnog opterećenja zavisi od sopstvenih elastičnih deformacija, kao i od elastičnih deformacija već spregnutih parova zubaca koji se dodiruju u tačkama B_1G_2 i E_1D_2 . Na slici 4.11 je prikazan statički neodređen mehanički model u prvom trenutku trostruke sprege kada svi istovremeno spregnuti parovi zubaca učestvuju u prenošenju ukupnog opterećenja.



Slika 4.10. Sprezanje zubaca u prvom trenutku trostruke sprege kada tri spregnuta para zubaca učestvuju u prenošenju ukupnog opterećenja



Slika 4.11. Mehanički model sprezanja zubaca u prvom trenutku trostruke sprege kada tri spregnuta para zubaca učestvuju u prenošenju ukupnog opterećenja

4.3. ANALITIČKI MODEL STVARNE RASPODELE OPTEREĆENJA

Na osnovu mehaničkog modela sprezanja zubaca u prvom trenutku trostruke sprege, prikazanog na slici 4.11, se može uspostaviti zavisnost između elastičnih deformacija i odstupanja osnovnih koraka istovremeno spregnutih parova zubaca:

$$(w_{E1} + w_{D2}) - (w_{H1} + w_{A2}) = p_{b1}^{\prime} - p_{b2}^{\prime} = \Delta p_b^{\prime}, \quad (4.2)$$

$$(w_{B1} + w_{G2}) - (w_{E1} + w_{D2}) = p_{b1}^{\prime\prime} - p_{b2}^{\prime\prime} = \Delta p_b^{\prime\prime}, \quad (4.3)$$

gde su:

p_{b1}^{\prime} , $p_{b1}^{\prime\prime}$, p_{b2}^{\prime} , $p_{b2}^{\prime\prime}$ – osnovni koraci zubaca spregnutog zupčastog para,

w_{H1} , w_{A2} , w_{E1} , w_{D2} , w_{B1} , w_{G2} – elastične deformacije zubaca u dodirnim tačkama primopredaje opterećenja H_1A_2 , E_1D_2 i B_1G_2 .

Ako se opterećenja koja prenose parovi zubaca u dodirnim tačkama H_1A_2 , E_1D_2 i B_1G_2 označe sa $F_{H_1A_2}$, $F_{E_1D_2}$ i $F_{B_1G_2}$, ukupno opterećenje zupčastog para F biće:

$$F = F_{H_1A_2} + F_{E_1D_2} + F_{B_1G_2}. \quad (4.4)$$

Potrebno je poznavati krutosti spregnutih zubaca [28-32,34,35] u dodirnim tačkama H_1A_2 , E_1D_2 i B_1G_2 da bi se odredile elastične deformacije zubaca u navedenim dodirnim tačkama. Ako se pretpostavi da su deformacije istovremeno spregnutih zubaca elastične, odnosno da važi *Hooke*-ov zakon, krutost je definisana odnosom promene sile i promene odgovarajuće elastične deformacije:

$$C = \frac{dF}{dw}. \quad (4.5)$$

Krutost zupca se razlikuje u svakoj tački trenutne linije dodira zbog promenljivog popečnog preseka po visini i neravnomerne raspodele opterećenja duž trenutne linije dodira. Odnosom linijskog opterećenja u svakoj tački trenutne linije dodira i odgovarajuće elastične deformacije zupca se definiše krutost zupca u svakoj tački trenutne linije dodira (specifična krutost zupca):

$$c' = \frac{q}{w}. \quad (4.6)$$

Izraz (4.6) se, na osnovu pretpostavke o konstantnom srednjem linijskom opterećenju duž trenutne linije dodira, može napisati u obliku:

$$c = \frac{\bar{q}}{w} = \frac{F}{b \cdot w}, \quad (4.7)$$

gde je:

c – srednja specifična krutost zupca.

Na osnovu izraza (4.7), zbir elastičnih deformacija zubaca u dodirnim tačkama H_1A_2 , E_1D_2 i B_1G_2 , biće:

$$w_{H_1} + w_{A_2} = \frac{F_{H_1A_2}}{b \cdot c_{H_1}} + \frac{F_{H_1A_2}}{b \cdot c_{A_2}} = \frac{F_{H_1A_2}}{b} \cdot \left(\frac{1}{c_{H_1}} + \frac{1}{c_{A_2}} \right), \quad (4.8)$$

$$w_{E_1} + w_{D_2} = \frac{F_{E_1D_2}}{b \cdot c_{E_1}} + \frac{F_{E_1D_2}}{b \cdot c_{D_2}} = \frac{F_{E_1D_2}}{b} \cdot \left(\frac{1}{c_{E_1}} + \frac{1}{c_{D_2}} \right), \quad (4.9)$$

$$w_{B_1} + w_{G_2} = \frac{F_{B_1G_2}}{b \cdot c_{B_1}} + \frac{F_{B_1G_2}}{b \cdot c_{G_2}} = \frac{F_{B_1G_2}}{b} \cdot \left(\frac{1}{c_{B_1}} + \frac{1}{c_{G_2}} \right). \quad (4.10)$$

Kada se uvedu odgovarajuće smene:

$$\frac{1}{c_{H_1A_2}} = \frac{1}{c_{H_1}} + \frac{1}{c_{A_2}}, \quad (4.11)$$

$$\frac{1}{c_{E_1D_2}} = \frac{1}{c_{E_1}} + \frac{1}{c_{D_2}}, \quad (4.12)$$

$$\frac{1}{c_{B_1G_2}} = \frac{1}{c_{B_1}} + \frac{1}{c_{G_2}}, \quad (4.13)$$

izrazi (4.8) do (4.10), za zbir elastičnih deformacija zubaca u dodirnim tačkama H_1A_2 , E_1D_2 i B_1G_2 , biće:

$$w_{H_1} + w_{A_2} = \frac{F_{H_1A_2}}{b \cdot c_{H_1A_2}}, \quad (4.14)$$

$$w_{E_1} + w_{D_2} = \frac{F_{E_1D_2}}{b \cdot c_{E_1D_2}}, \quad (4.15)$$

$$w_{B_1} + w_{G_2} = \frac{F_{B_1G_2}}{b \cdot c_{B_1G_2}}, \quad (4.16)$$

gde su:

$c_{H_1}, c_{A_2}, c_{E_1}, c_{D_2}, c_{B_1}, c_{G_2}$ – srednje specifične krutosti zubaca u tačkama dodira,

$c_{H_1A_2}, c_{E_1D_2}, c_{B_1G_2}$ – ekvivalentne specifične krutosti spregnutih zubaca u dodirnim tačkama primopredaje opterećenja H_1A_2 , E_1D_2 i B_1G_2 .

Na osnovu izraza (4.14) do (4.16) i izraza (4.2) i (4.3), kao i jednakosti (4.4), se mogu dobiti opterećenja koja istovremeno spregnuti parovi zubaca prenose u prvom trenutku trostruke sprege, kada postoje razlike osnovnih koraka kod istovremeno spregnutih parova zubaca zupčastog para $p_{b1}^{'-} > p_{b2}^{'-}$ i $p_{b1}^{''-} > p_{b2}^{''-}$:

$$F_{H1A2} = \frac{F_{E1D2} \cdot c_{H1A2}}{c_{E1D2}} - c_{H1A2} \cdot b \cdot \Delta p_b^{'-}, \quad (4.17)$$

$$F_{E1D2} = \frac{F + c_{H1A2} \cdot b \cdot \Delta p_b^{'-} - c_{B1G2} \cdot b \cdot \Delta p_b^{''-}}{1 + \frac{c_{H1A2} + c_{B1G2}}{c_{E1D2}}}, \quad (4.18)$$

$$F_{B1G2} = \frac{F_{E1D2} \cdot c_{B1G2}}{c_{E1D2}} + c_{B1G2} \cdot b \cdot \Delta p_b^{''-}. \quad (4.19)$$

Izrazi za faktor raspodele opterećenja se, na osnovu definicije (4.1), mogu napisati u sledećem obliku:

$$K_{\alpha H1A2} = \frac{F_{H1A2}}{F}, \quad (4.20)$$

$$K_{\alpha E1D2} = \frac{F_{E1D2}}{F}, \quad (4.21)$$

$$K_{\alpha B1G2} = \frac{F_{B1G2}}{F}. \quad (4.22)$$

Smenom izraza (4.17) do (4.19) u jednakosti (4.20) do (4.22) slede analitički izrazi za faktor raspodele opterećenja za dodir u prvom trenutku trostruke sprege, odnosno u tačkama dodira u kojima se vrši primopredaja opterećenja H_1A_2 , E_1D_2 i B_1G_2 , kada postoje razlike osnovnih koraka zubaca pogonskog i gonjenog zupčanika $p_{b1}^{'-} > p_{b2}^{'-}$ i $p_{b1}^{''-} > p_{b2}^{''-}$:

$$K_{\alpha H1A2} = \frac{1}{1 + \frac{c_{E1D2} + c_{B1G2}}{c_{H1A2}}} \cdot \left[1 - \left(\frac{c_{E1D2} + c_{B1G2}}{F/b} \right) \cdot \Delta p_b^{'-} - \left(\frac{c_{B1G2}}{F/b} \right) \cdot \Delta p_b^{''-} \right], \quad (4.23)$$

$$K_{\alpha E1D2} = \frac{1}{1 + \frac{c_{H1A2} + c_{B1G2}}{c_{E1D2}}} \cdot \left[1 + \left(\frac{c_{H1A2}}{F/b} \right) \cdot \Delta p_b^{'-} - \left(\frac{c_{B1G2}}{F/b} \right) \cdot \Delta p_b^{''-} \right], \quad (4.24)$$

$$K_{\alpha B1G2} = \frac{1}{1 + \frac{c_{H1A2} + c_{E1D2}}{c_{B1G2}}} \cdot \left[1 + \left(\frac{c_{H1A2}}{F/b} \right) \cdot \Delta p_b^{'-} + \left(\frac{c_{E1D2} + c_{H1A2}}{F/b} \right) \cdot \Delta p_b^{''-} \right]. \quad (4.25)$$

Analizom izraza (4.23) do (4.25) sledi da, kada postoje razlike osnovnih koraka zubaca pogonskog i gonjenog zupčanika $p_{b1}^{'-'} > p_{b2}^{'-'} i p_{b1}^{"-"} > p_{b2}^{"-"} , par zubaca koji se nalazi u sprezi u dodirnim tačkama H_1A_2 prenosi manji deo opterećenja nego parovi zubaca koji se nalaze u sprezi u dodirnim tačkama E_1D_2 i B_1G_2 , odnosno $K_{\alpha H1A2} < K_{\alpha E1D2} < K_{\alpha B1G2} .$$

Ako se pretpostavi da su razlike osnovnih koraka kod svih istovremeno spregnutih parova zubaca jednake ($\Delta p_b^{'-'} = \Delta p_b^{"-"} = \Delta p_b$), analitički izrazi (4.23) do (4.25) za faktor raspodele opterećenja za dodir u prvom trenutku trostruke sprege, kada su $p_{b1}^{'-'} > p_{b2}^{'-'} i p_{b1}^{"-"} > p_{b2}^{"-"} , se mogu napisati u obliku:$

$$K_{\alpha H1A2} = \frac{1}{1 + \frac{c_{E1D2} + c_{B1G2}}{c_{H1A2}}} \cdot \left(1 - \frac{c_{E1D2} + 2 \cdot c_{B1G2}}{F/b} \cdot \Delta p_b \right), \quad (4.26)$$

$$K_{\alpha E1D2} = \frac{1}{1 + \frac{c_{H1A2} + c_{B1G2}}{c_{E1D2}}} \cdot \left(1 + \frac{c_{H1A2} - c_{B1G2}}{F/b} \cdot \Delta p_b \right), \quad (4.27)$$

$$K_{\alpha B1G2} = \frac{1}{1 + \frac{c_{H1A2} + c_{E1D2}}{c_{B1G2}}} \cdot \left(1 + \frac{c_{E1D2} + 2 \cdot c_{H1A2}}{F/b} \cdot \Delta p_b \right). \quad (4.28)$$

Na sličan način se može doći do izraza za faktor raspodele opterećenja u prvom trenutku trostruke sprege kada postoje razlike osnovnih koraka zubaca pogonskog i gonjenog zupčanika $p_{b1}^{'-'} < p_{b2}^{'-'} i p_{b1}^{"-"} < p_{b2}^{"-"} :$

$$K_{\alpha H1A2} = \frac{1}{1 + \frac{c_{E1D2} + c_{B1G2}}{c_{H1A2}}} \cdot \left[1 + \left(\frac{c_{E1D2} + c_{B1G2}}{F/b} \right) \cdot \Delta p_b^{'-'} + \left(\frac{c_{B1G2}}{F/b} \right) \cdot \Delta p_b^{"-"} \right], \quad (4.29)$$

$$K_{\alpha E1D2} = \frac{1}{1 + \frac{c_{H1A2} + c_{B1G2}}{c_{E1D2}}} \cdot \left[1 - \left(\frac{c_{H1A2}}{F/b} \right) \cdot \Delta p_b^{'-'} + \left(\frac{c_{B1G2}}{F/b} \right) \cdot \Delta p_b^{"-"} \right], \quad (4.30)$$

$$K_{\alpha B1G2} = \frac{1}{1 + \frac{c_{H1A2} + c_{E1D2}}{c_{B1G2}}} \cdot \left[1 - \left(\frac{c_{H1A2}}{F/b} \right) \cdot \Delta p_b^{'-'} - \left(\frac{c_{E1D2} + c_{H1A2}}{F/b} \right) \cdot \Delta p_b^{"-"} \right]. \quad (4.31)$$

Analizom izraza (4.29) do (4.31) sledi da, kada postoje razlike osnovnih koraka zubaca pogonskog i gonjenog zupčanika $p_{b1}^{\prime} < p_{b2}^{\prime}$ i $p_{b1}^{\prime\prime} < p_{b2}^{\prime\prime}$, par zubaca koji se nalazi u sprezi u dodirnim tačkama H_1A_2 prenosi veći deo opterećenja nego parovi zubaca koji se nalaze u sprezi u dodirnim tačkama E_1D_2 i B_1G_2 , odnosno $K_{\alpha H1A2} > K_{\alpha E1D2} > K_{\alpha B1G2}$.

Ako se pretpostavi da su razlike osnovnih koraka kod svih istovremeno spregnutih parova zubaca jednake ($\Delta p_b^{\prime} = \Delta p_b^{\prime\prime} = \Delta p_b$), analitički izrazi (4.29) do (4.31) za faktor raspodele opterećenja za dodir u prvom trenutku trostruke sprege, kada su $p_{b1}^{\prime} < p_{b2}^{\prime}$ i $p_{b1}^{\prime\prime} < p_{b2}^{\prime\prime}$, se mogu napisati u obliku:

$$K_{\alpha H1A2} = \frac{1}{1 + \frac{c_{E1D2} + c_{B1G2}}{c_{H1A2}}} \cdot \left(1 + \frac{c_{E1D2} + 2 \cdot c_{B1G2}}{F/b} \cdot \Delta p_b \right), \quad (4.32)$$

$$K_{\alpha E1D2} = \frac{1}{1 + \frac{c_{H1A2} + c_{B1G2}}{c_{E1D2}}} \cdot \left(1 - \frac{c_{H1A2} - c_{B1G2}}{F/b} \cdot \Delta p_b \right), \quad (4.33)$$

$$K_{\alpha B1G2} = \frac{1}{1 + \frac{c_{H1A2} + c_{E1D2}}{c_{B1G2}}} \cdot \left(1 - \frac{c_{E1D2} + 2 \cdot c_{H1A2}}{F/b} \cdot \Delta p_b \right). \quad (4.34)$$

Na sličan način se može doći do izraza za faktor raspodele opterećenja u prvom trenutku trostruke sprege kada postoje razlike osnovnih koraka zubaca pogonskog i gonjenog zupčanika $p_{b1}^{\prime} > p_{b2}^{\prime}$ i $p_{b1}^{\prime\prime} < p_{b2}^{\prime\prime}$:

$$K_{\alpha H1A2} = \frac{1}{1 + \frac{c_{E1D2} + c_{B1G2}}{c_{H1A2}}} \cdot \left[1 - \left(\frac{c_{E1D2} + c_{B1G2}}{F/b} \right) \cdot \Delta p_b^{\prime} + \left(\frac{c_{B1G2}}{F/b} \right) \cdot \Delta p_b^{\prime\prime} \right], \quad (4.35)$$

$$K_{\alpha E1D2} = \frac{1}{1 + \frac{c_{H1A2} + c_{B1G2}}{c_{E1D2}}} \cdot \left[1 + \left(\frac{c_{H1A2}}{F/b} \right) \cdot \Delta p_b^{\prime} + \left(\frac{c_{B1G2}}{F/b} \right) \cdot \Delta p_b^{\prime\prime} \right], \quad (4.36)$$

$$K_{\alpha B1G2} = \frac{1}{1 + \frac{c_{H1A2} + c_{E1D2}}{c_{B1G2}}} \cdot \left[1 + \left(\frac{c_{H1A2}}{F/b} \right) \cdot \Delta p_b^{\prime} - \left(\frac{c_{E1D2} + c_{H1A2}}{F/b} \right) \cdot \Delta p_b^{\prime\prime} \right]. \quad (4.37)$$

Analizom izraza (4.35) do (4.37) sledi da, kada postoje razlike osnovnih koraka zubaca pogonskog i gonjenog zupčanika $p_{b1}^{\prime} > p_{b2}^{\prime}$ i $p_{b1}^{\prime\prime} < p_{b2}^{\prime\prime}$, par zubaca koji se nalazi u sprezi u dodirnim tačkama E_1D_2 prenosi veći deo opterećenja nego parovi zubaca koji se nalaze u sprezi u dodirnim tačkama H_1A_2 i B_1G_2 , odnosno $K_{\alpha E1D2} > K_{\alpha H1A2}$ i $K_{\alpha E1D2} > K_{\alpha B1G2}$.

Ako se pretpostavi da su razlike osnovnih koraka kod svih istovremeno spregnutih parova zubaca jednake ($\Delta p_b^{\prime} = \Delta p_b^{\prime\prime} = \Delta p_b$), analitički izrazi (4.35) do (4.37) za faktor raspodele opterećenja za dodir u prvom trenutku trostruke sprege, kada su $p_{b1}^{\prime} > p_{b2}^{\prime}$ i $p_{b1}^{\prime\prime} < p_{b2}^{\prime\prime}$, se mogu napisati u obliku:

$$K_{\alpha H1A2} = \frac{1}{1 + \frac{c_{E1D2} + c_{B1G2}}{c_{H1A2}}} \cdot \left(1 - \frac{c_{E1D2}}{F/b} \cdot \Delta p_b \right), \quad (4.38)$$

$$K_{\alpha E1D2} = \frac{1}{1 + \frac{c_{H1A2} + c_{B1G2}}{c_{E1D2}}} \cdot \left(1 + \frac{c_{H1A2} + c_{B1G2}}{F/b} \cdot \Delta p_b \right), \quad (4.39)$$

$$K_{\alpha B1G2} = \frac{1}{1 + \frac{c_{H1A2} + c_{E1D2}}{c_{B1G2}}} \cdot \left(1 - \frac{c_{E1D2}}{F/b} \cdot \Delta p_b \right). \quad (4.40)$$

Na sličan način se može doći do izraza za faktor raspodele opterećenja u prvom trenutku trostruke sprege kada postoje razlike osnovnih koraka zubaca pogonskog i gonjenog zupčanika $p_{b1}^{\prime} < p_{b2}^{\prime}$ i $p_{b1}^{\prime\prime} > p_{b2}^{\prime\prime}$:

$$K_{\alpha H1A2} = \frac{1}{1 + \frac{c_{E1D2} + c_{B1G2}}{c_{H1A2}}} \cdot \left[1 + \left(\frac{c_{E1D2} + c_{B1G2}}{F/b} \right) \cdot \Delta p_b^{\prime} - \left(\frac{c_{B1G2}}{F/b} \right) \cdot \Delta p_b^{\prime\prime} \right], \quad (4.41)$$

$$K_{\alpha E1D2} = \frac{1}{1 + \frac{c_{H1A2} + c_{B1G2}}{c_{E1D2}}} \cdot \left[1 - \left(\frac{c_{H1A2}}{F/b} \right) \cdot \Delta p_b^{\prime} - \left(\frac{c_{B1G2}}{F/b} \right) \cdot \Delta p_b^{\prime\prime} \right], \quad (4.42)$$

$$K_{\alpha B1G2} = \frac{1}{1 + \frac{c_{H1A2} + c_{E1D2}}{c_{B1G2}}} \cdot \left[1 - \left(\frac{c_{H1A2}}{F/b} \right) \cdot \Delta p_b^{\prime} + \left(\frac{c_{E1D2} + c_{H1A2}}{F/b} \right) \cdot \Delta p_b^{\prime\prime} \right]. \quad (4.43)$$

Analizom izraza (4.41) do (4.43) sledi da, kada postoje razlike osnovnih koraka zubaca pogonskog i gonjenog zupčanika $p_{b1}^{\prime} < p_{b2}^{\prime}$ i $p_{b1}^{\prime\prime} > p_{b2}^{\prime\prime}$, par zubaca koji se nalazi u sprezi u dodirnim tačkama E_1D_2 prenosi manji deo opterećenja nego parovi zubaca koji se nalaze u sprezi u dodirnim tačkama H_1A_2 i B_1G_2 , tj. $K_{\alpha E1D2} < K_{\alpha H1A2}$ i $K_{\alpha E1D2} < K_{\alpha B1G2}$.

Ako se pretpostavi da su razlike osnovnih koraka kod svih istovremeno spregnutih parova zubaca jednake ($\Delta p_b^{\prime} = \Delta p_b^{\prime\prime} = \Delta p_b$), analitički izrazi (4.41) do (4.43) za faktor raspodele opterećenja za dodir u prvom trenutku trostruke sprege, kada su $p_{b1}^{\prime} > p_{b2}^{\prime}$ i $p_{b1}^{\prime\prime} < p_{b2}^{\prime\prime}$, se mogu napisati u obliku:

$$K_{\alpha H1A2} = \frac{1}{1 + \frac{c_{E1D2} + c_{B1G2}}{c_{H1A2}}} \cdot \left(1 + \frac{c_{E1D2}}{F/b} \cdot \Delta p_b \right), \quad (4.44)$$

$$K_{\alpha E1D2} = \frac{1}{1 + \frac{c_{H1A2} + c_{B1G2}}{c_{E1D2}}} \cdot \left(1 - \frac{c_{H1A2} + c_{B1G2}}{F/b} \cdot \Delta p_b \right), \quad (4.45)$$

$$K_{\alpha B1G2} = \frac{1}{1 + \frac{c_{H1A2} + c_{E1D2}}{c_{B1G2}}} \cdot \left(1 + \frac{c_{E1D2}}{F/b} \cdot \Delta p_b \right). \quad (4.46)$$

Na osnovu mehaničkog modela sprezanja zubaca u poslednjem trenutku trostruke sprege, prikazanog na slici 4.12, se može uspostaviti zavisnost između elastičnih deformacija i odstupanja osnovnih koraka istovremeno spregnutih parova zubaca:

$$(w_{G1} + w_{B2}) - (w_{D1} + w_{E2}) = p_{b2}^{\prime} - p_{b1}^{\prime} = \Delta p_b^{\prime}, \quad (4.47)$$

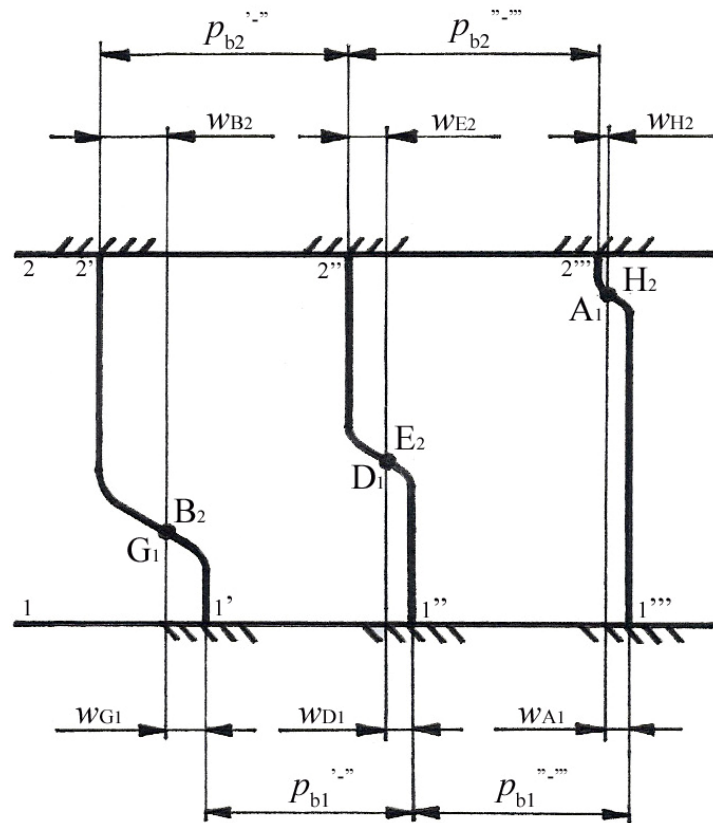
$$(w_{D1} + w_{E2}) - (w_{A1} + w_{H2}) = p_{b2}^{\prime\prime} - p_{b1}^{\prime\prime} = \Delta p_b^{\prime\prime}, \quad (4.48)$$

gde su:

$p_{b1}^{\prime}, p_{b1}^{\prime\prime}, p_{b2}^{\prime}, p_{b2}^{\prime\prime}$ – osnovni koraci zubaca spregnutog zupčastog para,

$w_{G1}, w_{B2}, w_{D1}, w_{E2}, w_{A1}, w_{H2}$ – elastične deformacije zubaca u dodirnim tačkama

primopredaje opterećenja G_1B_2, D_1E_2 i A_1H_2 .



Slika 4.12. Mehanički model spreznja zubaca u posljednjem trenutku trostruke sprege kada tri spregnuta para zubaca učestvuju u prenošenju ukupnog opterećenja

Ako se opterećenja koja prenose parovi zubaca u dodirnim tačkama G_1B_2 , D_1E_2 i A_1H_2 označe sa $F_{G_1B_2}$, $F_{D_1E_2}$ i $F_{A_1H_2}$, ukupno opterećenje zupčastog para F biće:

$$F = F_{G_1B_2} + F_{D_1E_2} + F_{A_1H_2}. \quad (4.49)$$

Na osnovu izraza (4.7), zbir elastičnih deformacija zubaca u dodirnim tačkama G_1B_2 , D_1E_2 i A_1H_2 , biće:

$$w_{G_1} + w_{B_2} = \frac{F_{G_1B_2}}{b \cdot c_{G_1}} + \frac{F_{G_1B_2}}{b \cdot c_{B_2}} = \frac{F_{G_1B_2}}{b} \cdot \left(\frac{1}{c_{G_1}} + \frac{1}{c_{B_2}} \right), \quad (4.50)$$

$$w_{D_1} + w_{E_2} = \frac{F_{D_1E_2}}{b \cdot c_{D_1}} + \frac{F_{D_1E_2}}{b \cdot c_{E_2}} = \frac{F_{D_1E_2}}{b} \cdot \left(\frac{1}{c_{D_1}} + \frac{1}{c_{E_2}} \right), \quad (4.51)$$

$$w_{A_1} + w_{H_2} = \frac{F_{A_1H_2}}{b \cdot c_{A_1}} + \frac{F_{A_1H_2}}{b \cdot c_{H_2}} = \frac{F_{A_1H_2}}{b} \cdot \left(\frac{1}{c_{A_1}} + \frac{1}{c_{H_2}} \right). \quad (4.52)$$

Kada se uvedu odgovarajuće smene:

$$\frac{1}{c_{G1B2}} = \frac{1}{c_{G1}} + \frac{1}{c_{B2}}, \quad (4.53)$$

$$\frac{1}{c_{D1E2}} = \frac{1}{c_{D1}} + \frac{1}{c_{E2}}, \quad (4.54)$$

$$\frac{1}{c_{A1H2}} = \frac{1}{c_{A1}} + \frac{1}{c_{H2}}, \quad (4.55)$$

izrazi (4.50) do (4.52), za zbir elastičnih deformacija zubaca u dodirnim tačkama G_1B_2 , D_1E_2 i A_1H_2 , biće:

$$w_{G1} + w_{B2} = \frac{F_{G1B2}}{b \cdot c_{G1B2}}, \quad (4.56)$$

$$w_{D1} + w_{E2} = \frac{F_{D1E2}}{b \cdot c_{D1E2}}, \quad (4.57)$$

$$w_{A1} + w_{H2} = \frac{F_{A1H2}}{b \cdot c_{A1H2}}, \quad (4.58)$$

gde su:

$c_{G1}, c_{B2}, c_{D1}, c_{E2}, c_{A1}, c_{H2}$ – srednje specifične krutosti zubaca u tačkama dodira,
 $c_{G1B2}, c_{D1E2}, c_{A1H2}$ – ekvivalentne specifične krutosti spregnutih zubaca u dodirnim tačkama primopredaje opterećenja G_1B_2, D_1E_2 i A_1H_2 .

Na osnovu izraza (4.56) do (4.58) i izraza (4.47) i (4.48), kao i jednakosti (4.49), se mogu dobiti opterećenja koja istovremeno spregnuti parovi zubaca prenose u poslednjem trenutku trostruke sprege, kada postoji razlika osnovnih koraka kod istovremeno spregnutih parova zubaca zupčastog para $p_{b1}^{\prime-} < p_{b2}^{\prime-}$ i $p_{b1}^{\prime-} < p_{b2}^{\prime-}$:

$$F_{G1B2} = \frac{F_{D1E2} \cdot c_{G1B2}}{c_{D1E2}} + c_{G1B2} \cdot b \cdot \Delta p_b^{\prime-}, \quad (4.59)$$

$$F_{D1E2} = \frac{F - c_{G1B2} \cdot b \cdot \Delta p_b^{\prime-} + c_{A1H2} \cdot b \cdot \Delta p_b^{\prime-}}{1 + \frac{c_{A1H2} + c_{G1B2}}{c_{D1E2}}}, \quad (4.60)$$

$$F_{A1H2} = \frac{F_{D1E2} \cdot c_{A1H2}}{c_{D1E2}} - c_{A1H2} \cdot b \cdot \Delta p_b^{\prime-}. \quad (4.61)$$

Izrazi za faktor raspodele opterećenja se, na osnovu definicije (4.1), mogu napisati u sledećem obliku:

$$K_{\alpha G1B2} = \frac{F_{G1B2}}{F}, \quad (4.62)$$

$$K_{\alpha D1E2} = \frac{F_{D1E2}}{F}, \quad (4.63)$$

$$K_{\alpha A1H2} = \frac{F_{A1H2}}{F}. \quad (4.64)$$

Smenom izraza (4.59) do (4.61) u jednakosti (4.62) do (4.64) slede analitički izrazi za faktor raspodele opterećenja za dodir u poslednjem trenutku trostruke sprege, odnosno u tačkama dodira u kojima se vrši primopredaja opterećenja G_1B_2 , D_1E_2 i A_1H_2 , kada postoje razlike osnovnih koraka zubaca pogonskog i gonjenog zupčanika $p_{b1}^{\prime} < p_{b2}^{\prime}$ i $p_{b1}^{\prime\prime} < p_{b2}^{\prime\prime}$:

$$K_{\alpha G1B2} = \frac{1}{1 + \frac{c_{A1H2} + c_{D1E2}}{c_{G1B2}}} \cdot \left[1 + \left(\frac{c_{D1E2} + c_{A1H2}}{F/b} \right) \cdot \Delta p_b^{\prime} + \left(\frac{c_{A1H2}}{F/b} \right) \cdot \Delta p_b^{\prime\prime} \right], \quad (4.65)$$

$$K_{\alpha D1E2} = \frac{1}{1 + \frac{c_{A1H2} + c_{G1B2}}{c_{D1E2}}} \cdot \left[1 - \left(\frac{c_{G1B2}}{F/b} \right) \cdot \Delta p_b^{\prime} + \left(\frac{c_{A1H2}}{F/b} \right) \cdot \Delta p_b^{\prime\prime} \right], \quad (4.66)$$

$$K_{\alpha A1H2} = \frac{1}{1 + \frac{c_{D1E2} + c_{G1B2}}{c_{A1H2}}} \cdot \left[1 - \left(\frac{c_{G1B2}}{F/b} \right) \cdot \Delta p_b^{\prime} - \left(\frac{c_{D1E2} + c_{G1B2}}{F/b} \right) \cdot \Delta p_b^{\prime\prime} \right]. \quad (4.67)$$

Analizom izraza (4.65) do (4.67) sledi da, kada postoje razlike osnovnih koraka zubaca pogonskog i gonjenog zupčanika $p_{b1}^{\prime} < p_{b2}^{\prime}$ i $p_{b1}^{\prime\prime} < p_{b2}^{\prime\prime}$, par zubaca koji se nalazi u sprezi u dodirnim tačkama G_1B_2 prenosi veći deo opterećenja nego parovi zubaca koji se nalaze u sprezi u dodirnim tačkama D_1E_2 i A_1H_2 , odnosno $K_{\alpha G1B2} > K_{\alpha D1E2} > K_{\alpha A1H2}$.

Ako se pretpostavi da su razlike osnovnih koraka kod svih istovremeno spregnutih parova zubaca jednake ($\Delta p_b^{\prime} = \Delta p_b^{\prime\prime} = \Delta p_b$), analitički izrazi (4.65) do (4.67) za faktor raspodele opterećenja za dodir u poslednjem trenutku trostruke sprege, kada su $p_{b1}^{\prime} < p_{b2}^{\prime}$ i $p_{b1}^{\prime\prime} < p_{b2}^{\prime\prime}$, se mogu napisati u obliku:

$$K_{\alpha G1B2} = \frac{1}{1 + \frac{c_{A1H2} + c_{D1E2}}{c_{G1B2}}} \cdot \left(1 + \frac{c_{D1E2} + 2 \cdot c_{A1H2}}{F/b} \cdot \Delta p_b \right), \quad (4.68)$$

$$K_{\alpha D1E2} = \frac{1}{1 + \frac{c_{A1H2} + c_{G1B2}}{c_{D1E2}}} \cdot \left(1 - \frac{c_{G1B2} - c_{A1H2}}{F/b} \cdot \Delta p_b \right), \quad (4.69)$$

$$K_{\alpha A1H2} = \frac{1}{1 + \frac{c_{D1E2} + c_{G1B2}}{c_{A1H2}}} \cdot \left(1 - \frac{c_{D1E2} + 2 \cdot c_{G1B2}}{F/b} \cdot \Delta p_b \right). \quad (4.70)$$

Na sličan način se može doći do izraza za faktor raspodele opterećenja u poslednjem trenutku trostruke sprege kada postoje razlike osnovnih koraka zubaca pogonskog i gonjenog zupčanika $p_{b1}^{\prime} > p_{b2}^{\prime}$ i $p_{b1}^{\prime\prime} > p_{b2}^{\prime\prime}$:

$$K_{\alpha G1B2} = \frac{1}{1 + \frac{c_{A1H2} + c_{D1E2}}{c_{G1B2}}} \cdot \left[1 - \left(\frac{c_{D1E2} + c_{A1H2}}{F/b} \right) \cdot \Delta p_b^{\prime} - \left(\frac{c_{A1H2}}{F/b} \right) \cdot \Delta p_b^{\prime\prime} \right], \quad (4.71)$$

$$K_{\alpha D1E2} = \frac{1}{1 + \frac{c_{A1H2} + c_{G1B2}}{c_{D1E2}}} \cdot \left[1 + \left(\frac{c_{G1B2}}{F/b} \right) \cdot \Delta p_b^{\prime} - \left(\frac{c_{A1H2}}{F/b} \right) \cdot \Delta p_b^{\prime\prime} \right], \quad (4.72)$$

$$K_{\alpha A1H2} = \frac{1}{1 + \frac{c_{D1E2} + c_{G1B2}}{c_{A1H2}}} \cdot \left[1 + \left(\frac{c_{G1B2}}{F/b} \right) \cdot \Delta p_b^{\prime} + \left(\frac{c_{D1E2} + c_{G1B2}}{F/b} \right) \cdot \Delta p_b^{\prime\prime} \right]. \quad (4.73)$$

Analizom izraza (4.71) do (4.73) sledi da, kada postoje razlike osnovnih koraka zubaca pogonskog i gonjenog zupčanika $p_{b1}^{\prime} > p_{b2}^{\prime}$ i $p_{b1}^{\prime\prime} > p_{b2}^{\prime\prime}$, par zubaca koji se nalazi u sprezi u dodirnim tačkama G_1B_2 prenosi manji deo opterećenja nego parovi zubaca koji se nalaze u sprezi u dodirnim tačkama D_1E_2 i A_1H_2 , odnosno $K_{\alpha G1B2} < K_{\alpha D1E2} < K_{\alpha A1H2}$.

Ako se pretpostavi da su razlike osnovnih koraka kod svih istovremeno spregnutih parova zubaca jednake ($\Delta p_b^{\prime} = \Delta p_b^{\prime\prime} = \Delta p_b$), analitički izrazi (4.71) do (4.73) za faktor raspodele opterećenja za dodir u poslednjem trenutku trostruke sprege, kada su $p_{b1}^{\prime} > p_{b2}^{\prime}$ i $p_{b1}^{\prime\prime} > p_{b2}^{\prime\prime}$, se mogu napisati u obliku:

$$K_{\alpha G1B2} = \frac{1}{1 + \frac{c_{A1H2} + c_{D1E2}}{c_{G1B2}}} \cdot \left(1 - \frac{c_{D1E2} + 2 \cdot c_{A1H2}}{F/b} \cdot \Delta p_b \right), \quad (4.74)$$

$$K_{\alpha D1E2} = \frac{1}{1 + \frac{c_{A1H2} + c_{G1B2}}{c_{D1E2}}} \cdot \left(1 + \frac{c_{G1B2} - c_{A1H2}}{F/b} \cdot \Delta p_b \right), \quad (4.75)$$

$$K_{\alpha A1H2} = \frac{1}{1 + \frac{c_{D1E2} + c_{G1B2}}{c_{A1H2}}} \cdot \left(1 + \frac{c_{D1E2} + 2 \cdot c_{G1B2}}{F/b} \cdot \Delta p_b \right). \quad (4.76)$$

Na sličan način se može doći do izraza za faktor raspodele opterećenja u poslednjem trenutku trostruke sprege kada postoje razlike osnovnih koraka zubaca pogonskog i gonjenog zupčanika $p_{b1}^{\prime} > p_{b2}^{\prime}$ i $p_{b1}^{\prime\prime} < p_{b2}^{\prime\prime}$:

$$K_{\alpha G1B2} = \frac{1}{1 + \frac{c_{A1H2} + c_{D1E2}}{c_{G1B2}}} \cdot \left[1 - \left(\frac{c_{D1E2} + c_{A1H2}}{F/b} \right) \cdot \Delta p_b^{\prime} + \left(\frac{c_{A1H2}}{F/b} \right) \cdot \Delta p_b^{\prime\prime} \right], \quad (4.77)$$

$$K_{\alpha D1E2} = \frac{1}{1 + \frac{c_{A1H2} + c_{G1B2}}{c_{D1E2}}} \cdot \left[1 + \left(\frac{c_{G1B2}}{F/b} \right) \cdot \Delta p_b^{\prime} + \left(\frac{c_{A1H2}}{F/b} \right) \cdot \Delta p_b^{\prime\prime} \right], \quad (4.78)$$

$$K_{\alpha A1H2} = \frac{1}{1 + \frac{c_{D1E2} + c_{G1B2}}{c_{A1H2}}} \cdot \left[1 + \left(\frac{c_{G1B2}}{F/b} \right) \cdot \Delta p_b^{\prime} - \left(\frac{c_{D1E2} + c_{G1B2}}{F/b} \right) \cdot \Delta p_b^{\prime\prime} \right]. \quad (4.79)$$

Analizom izraza (4.77) do (4.79) sledi da, kada postoje razlike osnovnih koraka zubaca pogonskog i gonjenog zupčanika $p_{b1}^{\prime} > p_{b2}^{\prime}$ i $p_{b1}^{\prime\prime} < p_{b2}^{\prime\prime}$, par zubaca koji se nalazi u sprezi u dodirnim tačkama D_1E_2 prenosi veći deo opterećenja nego parovi zubaca koji se nalaze u sprezi u dodirnim tačkama G_1B_2 i A_1H_2 , odnosno $K_{\alpha D1E2} > K_{\alpha G1B2}$ i $K_{\alpha D1E2} > K_{\alpha A1H2}$.

Ako se pretpostavi da su razlike osnovnih koraka kod svih istovremeno spregnutih parova zubaca jednake ($\Delta p_b^{\prime} = \Delta p_b^{\prime\prime} = \Delta p_b$), analitički izrazi (4.77) do (4.79) za faktor raspodele opterećenja za dodir u poslednjem trenutku trostruke sprege, kada su $p_{b1}^{\prime} > p_{b2}^{\prime}$ i $p_{b1}^{\prime\prime} < p_{b2}^{\prime\prime}$, se mogu napisati u obliku:

$$K_{\alpha G1B2} = \frac{1}{1 + \frac{c_{A1H2} + c_{D1E2}}{c_{G1B2}}} \cdot \left(1 - \frac{c_{D1E2}}{F/b} \cdot \Delta p_b \right), \quad (4.80)$$

$$K_{\alpha D1E2} = \frac{1}{1 + \frac{c_{A1H2} + c_{G1B2}}{c_{D1E2}}} \cdot \left(1 + \frac{c_{G1B2} + c_{A1H2}}{F/b} \cdot \Delta p_b \right), \quad (4.81)$$

$$K_{\alpha A1H2} = \frac{1}{1 + \frac{c_{D1E2} + c_{G1B2}}{c_{A1H2}}} \cdot \left(1 - \frac{c_{D1E2}}{F/b} \cdot \Delta p_b \right). \quad (4.82)$$

Na sličan način se može doći do izraza za faktor raspodele opterećenja u poslednjem trenutku trostruke sprege kada postoje razlike osnovnih koraka zubaca pogonskog i gonjenog zupčanika $p_{b1}^{'-'} < p_{b2}^{'-'} & i & p_{b1}^{"-"} > p_{b2}^{"-"} :$

$$K_{\alpha G1B2} = \frac{1}{1 + \frac{c_{A1H2} + c_{D1E2}}{c_{G1B2}}} \cdot \left[1 + \left(\frac{c_{D1E2} + c_{A1H2}}{F/b} \right) \cdot \Delta p_b^{'-'} - \left(\frac{c_{A1H2}}{F/b} \right) \cdot \Delta p_b^{"-"} \right], \quad (4.83)$$

$$K_{\alpha D1E2} = \frac{1}{1 + \frac{c_{A1H2} + c_{G1B2}}{c_{D1E2}}} \cdot \left[1 - \left(\frac{c_{G1B2}}{F/b} \right) \cdot \Delta p_b^{'-'} - \left(\frac{c_{A1H2}}{F/b} \right) \cdot \Delta p_b^{"-"} \right], \quad (4.84)$$

$$K_{\alpha A1H2} = \frac{1}{1 + \frac{c_{D1E2} + c_{G1B2}}{c_{A1H2}}} \cdot \left[1 - \left(\frac{c_{G1B2}}{F/b} \right) \cdot \Delta p_b^{'-'} + \left(\frac{c_{D1E2} + c_{G1B2}}{F/b} \right) \cdot \Delta p_b^{"-"} \right]. \quad (4.85)$$

Analizom izraza (4.83) do (4.85) sledi da, kada postoje razlike osnovnih koraka zubaca pogonskog i gonjenog zupčanika $p_{b1}^{'-'} < p_{b2}^{'-'} & i & p_{b1}^{"-"} > p_{b2}^{"-"} ,$ par zubaca koji se nalazi u sprezi u dodirnim tačkama D_1E_2 prenosi manji deo opterećenja nego parovi zubaca koji se nalaze u sprezi u dodirnim tačkama G_1B_2 i A_1H_2 , tj. $K_{\alpha D1E2} < K_{\alpha G1B2}$ i $K_{\alpha D1E2} < K_{\alpha A1H2}$.

Ako se pretpostavi da su razlike osnovnih koraka kod svih istovremeno spregnutih parova zubaca jednake ($\Delta p_b^{'-'} = \Delta p_b^{"-"} = \Delta p_b$), analitički izrazi (4.83) do (4.85) za faktor raspodele opterećenja za dodir u poslednjem trenutku trostruke sprege, kada su $p_{b1}^{'-'} < p_{b2}^{'-'} & i & p_{b1}^{"-"} > p_{b2}^{"-"} ,$ se mogu napisati u obliku:

$$K_{\alpha G1B2} = \frac{1}{1 + \frac{c_{A1H2} + c_{D1E2}}{c_{G1B2}}} \cdot \left(1 + \frac{c_{D1E2}}{F/b} \cdot \Delta p_b \right), \quad (4.86)$$

$$K_{\alpha D1E2} = \frac{1}{1 + \frac{c_{A1H2} + c_{G1B2}}{c_{D1E2}}} \cdot \left(1 - \frac{c_{G1B2} + c_{A1H2}}{F/b} \cdot \Delta p_b \right), \quad (4.87)$$

$$K_{\alpha A1H2} = \frac{1}{1 + \frac{c_{D1E2} + c_{G1B2}}{c_{A1H2}}} \cdot \left(1 + \frac{c_{D1E2}}{F/b} \cdot \Delta p_b \right). \quad (4.88)$$

Razvijeni analitički modeli za analizu raspodele opterećenja na istovremeno spregnute parove zubaca treba da zadovolje uslov da je zbir faktora raspodele opterećenja kod svih istovremeno spregnutih parova zubaca, bez obzira da li se radi o prvom ili poslednjem trenutku trostruke sprege i nezavisno od toga kad i koji je osnovni korak veći, uvek jednak jedan:

$$K_{\alpha} = K_{\alpha H1A2} + K_{\alpha E1D2} + K_{\alpha B1G2} = K_{\alpha G1B2} + K_{\alpha D1E2} + K_{\alpha A1H2} = 1. \quad (4.89)$$

Karakter promene faktora raspodele opterećenja u toku dodirnog perioda, pri višestrukoj sprezi zubaca kada se smenjuju dvostruka i trostruka sprega ($2 \leq \varepsilon_{\alpha} \leq 3$), zavisi od: inteziteta opterećenja, odstupanja osnovnog koraka i krutosti para zubaca.

Svi analitički modeli za faktor raspodele opterećenja u prvom i poslednjem trenutku trostruke sprege, kada su razlike osnovnih koraka kod svih istovremeno spregnutih parova zubaca jednake ($\Delta p_b^{''-} = \Delta p_b^{''-} = \Delta p_b$), su prikazani u tabeli 4.1.

Na osnovu razvijenih analitičkih modela za faktor raspodele opterećenja, prikazanih u tabeli 4.1, se može izvršiti detaljnija analiza uticaja: inteziteta opterećenja, tačnosti izrade i krutosti zubaca na raspodelu opterećenja kod istovremeno spregnutih parova zubaca. Na osnovu istih modela se može sagledati uticaj raspodele opterećenja kod istovremeno spregnutih parova zubaca na naponsko stanje korena i bokova zubaca.

Tabela 4.1. Faktor raspodele opterećenja u karakterističnim tačkama dodira

$p_{b1}^{''} > p_{b2}^{''}$ i $p_{b1}^{''''} > p_{b2}^{''''}$		
prvi trenutak trostruke sprege	$K_{\alpha H1A2} = \frac{1}{1 + \frac{c_{E1D2} + c_{B1G2}}{c_{H1A2}}} \cdot \left(1 - \frac{c_{E1D2} + 2 \cdot c_{B1G2}}{F/b} \cdot \Delta p_b \right)$ $K_{\alpha E1D2} = \frac{1}{1 + \frac{c_{H1A2} + c_{B1G2}}{c_{E1D2}}} \cdot \left(1 + \frac{c_{H1A2} - c_{B1G2}}{F/b} \cdot \Delta p_b \right)$ $K_{\alpha B1G2} = \frac{1}{1 + \frac{c_{H1A2} + c_{E1D2}}{c_{B1G2}}} \cdot \left(1 + \frac{c_{E1D2} + 2 \cdot c_{H1A2}}{F/b} \cdot \Delta p_b \right)$	$K_{\alpha H1A2} < K_{\alpha E1D2} < K_{\alpha B1G2}$
poslednji trenutak trostruke sprege	$K_{\alpha G1B2} = \frac{1}{1 + \frac{c_{A1H2} + c_{D1E2}}{c_{G1B2}}} \cdot \left(1 - \frac{c_{D1E2} + 2 \cdot c_{A1H2}}{F/b} \cdot \Delta p_b \right)$ $K_{\alpha D1E2} = \frac{1}{1 + \frac{c_{A1H2} + c_{G1B2}}{c_{D1E2}}} \cdot \left(1 + \frac{c_{G1B2} - c_{A1H2}}{F/b} \cdot \Delta p_b \right)$ $K_{\alpha A1H2} = \frac{1}{1 + \frac{c_{D1E2} + c_{G1B2}}{c_{A1H2}}} \cdot \left(1 + \frac{c_{D1E2} + 2 \cdot c_{G1B2}}{F/b} \cdot \Delta p_b \right)$	$K_{\alpha G1B2} < K_{\alpha D1E2} < K_{\alpha A1H2}$
$p_{b1}^{''} < p_{b2}^{''}$ i $p_{b1}^{''''} < p_{b2}^{''''}$		
prvi trenutak trostruke sprege	$K_{\alpha H1A2} = \frac{1}{1 + \frac{c_{E1D2} + c_{B1G2}}{c_{H1A2}}} \cdot \left(1 + \frac{c_{E1D2} + 2 \cdot c_{B1G2}}{F/b} \cdot \Delta p_b \right)$ $K_{\alpha E1D2} = \frac{1}{1 + \frac{c_{H1A2} + c_{B1G2}}{c_{E1D2}}} \cdot \left(1 - \frac{c_{H1A2} - c_{B1G2}}{F/b} \cdot \Delta p_b \right)$ $K_{\alpha B1G2} = \frac{1}{1 + \frac{c_{H1A2} + c_{E1D2}}{c_{B1G2}}} \cdot \left(1 - \frac{c_{E1D2} + 2 \cdot c_{H1A2}}{F/b} \cdot \Delta p_b \right)$	$K_{\alpha H1A2} > K_{\alpha E1D2} > K_{\alpha B1G2}$
poslednji trenutak trostruke sprege	$K_{\alpha G1B2} = \frac{1}{1 + \frac{c_{A1H2} + c_{D1E2}}{c_{G1B2}}} \cdot \left(1 + \frac{c_{D1E2} + 2 \cdot c_{A1H2}}{F/b} \cdot \Delta p_b \right)$ $K_{\alpha D1E2} = \frac{1}{1 + \frac{c_{A1H2} + c_{G1B2}}{c_{D1E2}}} \cdot \left(1 - \frac{c_{G1B2} - c_{A1H2}}{F/b} \cdot \Delta p_b \right)$ $K_{\alpha A1H2} = \frac{1}{1 + \frac{c_{D1E2} + c_{G1B2}}{c_{A1H2}}} \cdot \left(1 - \frac{c_{D1E2} + 2 \cdot c_{G1B2}}{F/b} \cdot \Delta p_b \right)$	$K_{\alpha G1B2} > K_{\alpha D1E2} > K_{\alpha A1H2}$

Tabela 4.1. Faktor raspodele opterećenja u karakterističnim tačkama dodira (nastavak)

$p_{b1}^{''} > p_{b2}^{''}$ i $p_{b1}^{''''} < p_{b2}^{''''}$		
prvi trenutak trostruke sprege	$K_{\alpha H1A2} = \frac{1}{1 + \frac{c_{E1D2} + c_{B1G2}}{c_{H1A2}}} \cdot \left(1 - \frac{c_{E1D2}}{F/b} \cdot \Delta p_b \right)$ $K_{\alpha E1D2} = \frac{1}{1 + \frac{c_{H1A2} + c_{B1G2}}{c_{E1D2}}} \cdot \left(1 + \frac{c_{H1A2} + c_{B1G2}}{F/b} \cdot \Delta p_b \right)$ $K_{\alpha B1G2} = \frac{1}{1 + \frac{c_{H1A2} + c_{E1D2}}{c_{B1G2}}} \cdot \left(1 - \frac{c_{E1D2}}{F/b} \cdot \Delta p_b \right)$	$K_{\alpha E1D2} > K_{\alpha H1A2}$ i $K_{\alpha E1D2} > K_{\alpha B1G2}$
poslednji trenutak trostruke sprege	$K_{\alpha G1B2} = \frac{1}{1 + \frac{c_{A1H2} + c_{D1E2}}{c_{G1B2}}} \cdot \left(1 - \frac{c_{D1E2}}{F/b} \cdot \Delta p_b \right)$ $K_{\alpha D1E2} = \frac{1}{1 + \frac{c_{A1H2} + c_{G1B2}}{c_{D1E2}}} \cdot \left(1 + \frac{c_{G1B2} + c_{A1H2}}{F/b} \cdot \Delta p_b \right)$ $K_{\alpha A1H2} = \frac{1}{1 + \frac{c_{D1E2} + c_{G1B2}}{c_{A1H2}}} \cdot \left(1 - \frac{c_{D1E2}}{F/b} \cdot \Delta p_b \right)$	$K_{\alpha D1E2} > K_{\alpha G1B2}$ i $K_{\alpha D1E2} > K_{\alpha A1H2}$
$p_{b1}^{''} < p_{b2}^{''}$ i $p_{b1}^{''''} > p_{b2}^{''''}$		
prvi trenutak trostruke sprege	$K_{\alpha H1A2} = \frac{1}{1 + \frac{c_{E1D2} + c_{B1G2}}{c_{H1A2}}} \cdot \left(1 + \frac{c_{E1D2}}{F/b} \cdot \Delta p_b \right)$ $K_{\alpha E1D2} = \frac{1}{1 + \frac{c_{H1A2} + c_{B1G2}}{c_{E1D2}}} \cdot \left(1 - \frac{c_{H1A2} + c_{B1G2}}{F/b} \cdot \Delta p_b \right)$ $K_{\alpha B1G2} = \frac{1}{1 + \frac{c_{H1A2} + c_{E1D2}}{c_{B1G2}}} \cdot \left(1 + \frac{c_{E1D2}}{F/b} \cdot \Delta p_b \right)$	$K_{\alpha E1D2} < K_{\alpha H1A2}$ i $K_{\alpha E1D2} < K_{\alpha B1G2}$
poslednji trenutak trostruke sprege	$K_{\alpha G1B2} = \frac{1}{1 + \frac{c_{A1H2} + c_{D1E2}}{c_{G1B2}}} \cdot \left(1 + \frac{c_{D1E2}}{F/b} \cdot \Delta p_b \right)$ $K_{\alpha D1E2} = \frac{1}{1 + \frac{c_{A1H2} + c_{G1B2}}{c_{D1E2}}} \cdot \left(1 - \frac{c_{G1B2} + c_{A1H2}}{F/b} \cdot \Delta p_b \right)$ $K_{\alpha A1H2} = \frac{1}{1 + \frac{c_{D1E2} + c_{G1B2}}{c_{A1H2}}} \cdot \left(1 + \frac{c_{D1E2}}{F/b} \cdot \Delta p_b \right)$	$K_{\alpha D1E2} < K_{\alpha G1B2}$ i $K_{\alpha D1E2} < K_{\alpha A1H2}$

Na osnovu izraza u tabeli 4.1 se može zaključiti da je za detaljnu analizu raspodele opterećenja na istovremeno spregnute parove zubaca potrebno poznavati: stvarno ukupno opterećenje zupčastog para, ekvivalentne specifične krutosti spregnutih zubaca u karakterističnim tačkama dodira i odstupanja osnovnih koraka istovremeno spregnutih parova zubaca. Zbog velikog broja različitih uticajnih parametara, određivanje ovih veličina je veoma složeno, pa se zbog toga za analizu raspodele opterećenja na istovremeno spregnute parove zubaca uvode sledeće aproksimacije:

- stvarno ukupno opterećenje zupca se zamenjuje merodavnim

$$F \cong F_{mer} = F_{nom} \cdot K_A \cdot K_V \cdot K_\beta,$$

- za ekvivalentne specifične krutosti zubaca u karakterističnim tačkama dodira važi

$$c_{H1A2} \cong c_{A1H2} = c_{AH},$$

$$c_{E1D2} \cong c_{D1E2} = c_{DE},$$

$$c_{B1G2} \cong c_{G1B2} = c_{BG},$$

- za osnovne korake istovremeno spregnutih parova zubaca stvarna razlika se zamenjuje apsolutnom

$$\Delta p_b^{'''} = (p_{b1}^{'''} - p_{b2}^{'''})_{p_{b1}^{'''} > p_{b2}^{'''}} = (p_{b2}^{'''} - p_{b1}^{'''})_{p_{b2}^{'''} > p_{b1}^{'''}} = |p_{b1}^{'''} - p_{b2}^{'''}|,$$

$$\Delta p_b^{''''} = (p_{b1}^{''''} - p_{b2}^{''''})_{p_{b1}^{''''} > p_{b2}^{''''}} = (p_{b2}^{''''} - p_{b1}^{''''})_{p_{b2}^{''''} > p_{b1}^{''''}} = |p_{b1}^{''''} - p_{b2}^{''''}|.$$

Uticaoj tačnosti izrade zubaca na raspodelu opterećenja obuhvaćen je razlikom osnovnih koraka istovremeno spregnutih parova zubaca. Od tačnosti izrade i razrađivanja zubaca zavisi stvarna razlika osnovnih koraka, koja u svakom trenutku spreznjanja ima neku drugu vrednost. Odstupanja oblika profila zubaca se smanjuju u toku perioda razrađivanja, pa se smanjuje i stvarna razlika osnovnih koraka. Smanjenje odstupanja oblika profila zubaca usled razrađivanja se može odrediti samo eksperimentalno i zavisi od propisane tačnosti izrade (kvaliteta tolerancija) zubaca, tvrdoće bokova spregnutih zubaca, obimne brzine, opterećenja i podmazivanja. Stvarna razlika osnovnih koraka se takođe zamenjuje merodavnom:

$$\Delta p_b^{'''} = \Delta p_b^{''''} = \Delta p_b = A_{p_b} - y_\alpha,$$

gde su:

A_{p_b} – odstupanje osnovnog koraka jednog zupčanika,

y_α – korekcija odstupanja osnovnog koraka usled razrađivanja.

Ako se pretpostavi da su osnovni koraci kod svih istovremeno spregnutih parova zubaca jednaki, tada su njihove razlike jednake nuli ($\Delta p_b = 0$), pa se izrazi u tabeli 4.1 za faktor raspodele opterećenja u karakterističnim tačkama dodira, mogu napisati u sledećem obliku:

$$K_{\alpha AH} = \frac{1}{1 + \frac{c_{DE} + c_{BG}}{c_{AH}}}, \quad (4.90)$$

$$K_{\alpha DE} = \frac{1}{1 + \frac{c_{AH} + c_{BG}}{c_{DE}}}, \quad (4.91)$$

$$K_{\alpha BG} = \frac{1}{1 + \frac{c_{AH} + c_{DE}}{c_{BG}}}. \quad (4.92)$$

Na osnovu dobijenih izraza za faktor raspodele opterećenja sledi da, kada je $\Delta p_b = 0$, raspodela opterećenja na istovremeno spregnute parove zubaca zavisi samo od ekvivalentnih specifičnih krutosti spregnutih parova zubaca u karakterističnim tačkama dodira.

Kada je $\Delta p_b = 0$, na osnovu izraza (4.90) do (4.92) sledi da će se kod trostruke sprege zubaca ravnomerna (idealna) raspodela opterećenja na istovremeno spregnute parove zubaca pojaviti samo ako su ispunjeni sledeći uslovi:

$$\frac{c_{DE} + c_{BG}}{c_{AH}} = 2, \quad (4.93)$$

$$\frac{c_{AH} + c_{BG}}{c_{DE}} = 2, \quad (4.94)$$

$$\frac{c_{AH} + c_{DE}}{c_{BG}} = 2. \quad (4.95)$$

Navedeni uslovi će biti ispunjeni samo ako su ekvivalentne specifične krutosti istovremeno spregnutih parova zubaca jednake ($c_{AH} = c_{DE} = c_{BG}$). Pošto ove krutosti nisu i ne mogu biti jednake ($c_{AH} \neq c_{DE} \neq c_{BG}$), može se zaključiti da se ravnomerna (idealna) raspodela opterećenja na istovremeno spregnute parove zubaca ne može pojaviti kada su međusobno jednaki osnovni koraci ($\Delta p_b = 0$) kod svih istovremeno spregnutih parova zubaca.

Da bi se pojavila ravnomerna (idealna) raspodela opterećenja na istovremeno spregnute parove zubaca, potrebno je postići odgovarajuću kompatibilnost između: inteziteta opterećenja, odstupanja osnovnog koraka i krutosti spregnutih zubaca.

4.4. KRUTOST SPREGNUTIH ZUBACA

Za slučaj kada se u toku dodirnog perioda zubaca smenjuju jednostruka i dvostruka sprega ($1 \leq \varepsilon_\gamma \leq 2$), ekvivalentne specifične krutosti istovremeno spregnutih parova zubaca u dodirnim tačkama primopredaje opterećenja AE i BD se prema literaturi [3] mogu odrediti na osnovu izraza:

$$c_{AE} = \frac{4}{11} \cdot c_\gamma, \quad (4.96)$$

$$c_{BD} = \frac{4}{9} \cdot c_\gamma. \quad (4.97)$$

Pri višestrukoj sprezi zubaca kada se smenjuju dvostruka i trostruka sprega ($2 \leq \varepsilon_\gamma \leq 3$), ekvivalentne specifične krutost istovremeno spregnutih parova zubaca u dodirnim tačkama primopredaje opterećenja AH i DE se prema literaturi [3] mogu odrediti na osnovu izraza:

$$c_{AH} = \frac{4}{10 \cdot \varepsilon_\gamma - 9} \cdot \left(\frac{2 \cdot (\varepsilon_\gamma - 1)}{\varepsilon_\gamma} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot c_\gamma, \quad (4.98)$$

$$c_{DE} = \frac{4}{9} \cdot \left(\frac{2 \cdot (\varepsilon_\gamma - 1)}{\varepsilon_\gamma} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot c_\gamma. \quad (4.99)$$

Međutim, pri višestrukoj sprezi zubaca kada se smenjuju dvostruka i trostruka sprega ($2 \leq \varepsilon_\gamma \leq 3$) postoji period kada su istovremeno spregnuta tri para zubaca, a među prethodnim izrazima nije predviđen izraz za određivanje ekvivalentne specifične krutosti trećeg spregnutog para zubaca u dodirnim tačkama primopredaje opterećenja BG.

5. ANALITIČKI MODEL NAPONA U KORENU ZUPCA U USLOVIMA VIŠESTRUKKE SPREGE ZUBACA

Da bi se analiziralo naponsko stanje korena zupca, zubac se obično aproksimira mehaničkim modelom u obliku konzole na čijem kraju deluje opterećenje pod nekim uglom u odnosu na njenu osu. Dimenzije poprečnog preseka zupca nisu male u odnosu na veličinu prepusta konzole kojom se zubac aproksimira, pa je ovaj mehanički model gruba aproksimacija zupca. Tačkom preseka ose simetrije konzole i napadne linije opterećenja je određen vrh konzole kojom se zubac aproksimira. Da bi ovaj mehanički model zupca bio potpuno određen, potrebno je odrediti i položaj uklještenja, odnosno položaj opasnog preseka u korenu zupca. Prema ISO standardu [2] položaj ovog preseka je određen dodirnim tačkama prelaznog dela profila zupca i tangenti koje sa osom simetrije zupca prave ugao od 30°.

Na osnovu analiza u literaturi [3,4], izraz za napon u korenu zupca za bilo koju dodirnu tačku pri istovremenoj sprezi profila zubaca, se može napisati u obliku:

$$\sigma_{FX} = \sigma_0 \cdot K_{\alpha X} \cdot Y_{FX} \cdot Y_{SX}, \quad (5.1)$$

gde su:

$X = A, B, D, E, G$ ili H – tačke dodira na profilima zubaca,

σ_0 – deo napona koji je konstantan u toku dodirnog perioda,

$K_{\alpha X}$ – faktor raspodele opterećenja u posmatranoj tački dodira,

Y_{FX} – faktor oblika zupca u posmatranoj tački dodira,

Y_{SX} – faktor korekcije napona u posmatranoj tački dodira.

Kada se uvrste veličine koje ne zavise od položaja tačke dodira na profilu zupca, dobija se izraz za deo napona koji je konstantan u toku dodirnog perioda:

$$\sigma_0 = \frac{K_A \cdot K_V \cdot K_{F\beta} \cdot F_t \cdot Y_\beta \cdot Y_B \cdot Y_{DT}}{b \cdot m_n}, \quad (5.2)$$

gde su:

K_A – faktor spoljašnjih dinamičkih sila,

K_V – faktor unutrašnjih dinamičkih sila,

$K_{F\beta}$ – faktor neravnomerne raspodele opterećenja duž zubaca u sprezi,

F_t – tangenta komponenta ukupnog opterećenja na podeonom krugu,

b – širina zupčanika,

m_n – standardni modul,

Y_β – faktor nagiba zupca,

Y_B – faktor debljine venca zupčanika,

Y_{DT} – faktor visine zupca.

Pošto se tačka dodira kreće duž dodirnice profila zupca, napon u korenu zupca se menja u toku dodirnog perioda zbog promene opterećenja i geometrije zupca. Da bi se odredio odgovarajući napon za procenu zapreminske čvrstoće korena zupca, potrebno je poznavati zakon njegove promene u toku dodirnog perioda. Prema izrazu (5.1), promena napona u korenu zupca zavisi od karaktera promene faktora raspodele opterećenja, faktora oblika zubaca i faktora korekcije napona u zavisnosti od položaja tačke dodira na profilu zupca.

Faktor oblika zupca u posmatranoj tački dodira se na osnovu izraza u literaturi [2] određuje na sledeći način:

$$Y_{FX} = \frac{6 \cdot \frac{h_{FeX}}{m_n} \cdot \cos \alpha_{FeX}}{\left(\frac{s_{Fn}}{m_n}\right)^2 \cdot \cos \alpha}, \quad (5.3)$$

gde su:

h_{FeX} – krak momenta savijanja u posmatranoj tački dodira,

s_{Fn} – tetivna debljina u merodavnom poprečnom preseku korena zupca,

α_{FeX} – ugao između napadne linije profila i normale na osu simetrije zupca u posmatranoj tački dodira.

Na osnovu izraza u ISO standardu [2] prethodne veličine se mogu odrediti na sledeći način:

$$\frac{h_{FeX}}{m_n} = \frac{1}{2} \left[\left(\cos \gamma_{eX} - \sin \gamma_{eX} \cdot \operatorname{tg} \alpha_{FeX} \right) \cdot \frac{d_{en}}{m_n} - z_n \cdot \cos \left(\frac{\pi}{3} - \theta \right) - \left(\frac{G}{\cos \theta} - \frac{\rho_{fpv}}{m_n} \right) \right],$$

$$\frac{s_{Fn}}{m_n} = z_n \cdot \sin \left(\frac{\pi}{3} - \theta \right) + \sqrt{3} \cdot \left(\frac{G}{\cos \theta} - \frac{\rho_{fpv}}{m_n} \right),$$

gde su:

$$\alpha_{FenX} = \alpha_{enX} - \gamma_{eX},$$

$$\alpha_{enX} = \arccos\left(\frac{d_{bn}}{d_{en}}\right),$$

$$\gamma_{eX} = \frac{0,5 \cdot \pi + 2 \cdot x \cdot \operatorname{tg} \alpha}{z_n} + \operatorname{inv} \alpha - \operatorname{inv} \alpha_{enX},$$

$$G = \frac{\rho_{fpv}}{m_n} - \frac{h_{fp}}{m_n} + x,$$

$$\theta = \frac{2 \cdot G}{z_n} \cdot \operatorname{tg} \theta - H,$$

$$H = \frac{2}{z_n} \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \frac{E}{m_n} \right) - \frac{\pi}{3},$$

$$E = m_n \cdot \frac{\pi}{4} - h_{fp} \cdot \operatorname{tg} \alpha + \frac{s_{pr}}{\cos \alpha} - \frac{\rho_{fp}}{\cos \alpha} \cdot (1 - \sin \alpha),$$

$s_{pr} = 0$ – za zupčanike sa nepodsečenim zupcima,

$$\rho_{fpv} = \rho_{fp},$$

$$d_{en} = 2 \cdot \frac{z}{|z|} \cdot \sqrt{\left[\sqrt{\left(\frac{d_{an}}{2} \right)^2 - \left(\frac{d_{bn}}{2} \right)^2} - \frac{\pi \cdot d \cdot \cos \beta \cdot \cos \alpha}{|z|} \cdot (\varepsilon_{an} - 1) \right]^2 + \left(\frac{d_{bn}}{2} \right)^2},$$

$$d_{an} = d_n + d_a - d,$$

$$d_{bn} = d_n \cdot \cos \alpha,$$

$$d_n = \frac{d}{\cos^2 \beta_b} = m_n \cdot z_n,$$

$$p_{bn} = \pi \cdot m_n \cdot \cos \alpha,$$

$$\varepsilon_{an} = \frac{\varepsilon_\alpha}{\cos^2 \beta_b},$$

$$z_n = \frac{z}{\cos^2 \beta_b \cdot \cos \beta} \approx \frac{z}{\cos^3 \beta},$$

$$\beta_b = \arccos \sqrt{1 - (\sin \beta \cdot \cos \alpha)^2} = \arcsin(\sin \beta \cdot \cos \alpha),$$

$m_n = m$ i $\beta = 0$ – za zupčanike sa pravim zupcima.

Pri rešavanju transcendentne jednačine za veličinu θ , prema ISO standardu [2], kao početnu vrednost treba uzeti $\theta = \pi/6$ za zupčanike sa spoljašnjim ozubljenjem. Generalno, ova jednačina konvergira posle pet iteracija.

Faktor korekcije napona uzima u obzir uticaj koncentracije napona na prelazu aktivnog dela boka zupca ka telu zupčanika, kao i uticaj normalnog napona usled ekscentričnog pritiska i tangentskog napona usled smicanja. Prema tome, ovaj faktor ne zavisi samo od radijusa krivine u opasnom preseku podnožja zupca, već i od položaja tačke dodira na profilu zupca, odnosno od kraka momenta savijanja. Prema ISO standardu [2] faktor korekcije napona je određen izrazom:

$$Y_{SX} = (1,2 + 0,13 \cdot L_X) \cdot q_s^{\left[\frac{1}{1,21 + \frac{2,3}{L_X}} \right]}, \quad (5.4)$$

gde su:

$$L_X = \frac{S_{Fn}}{h_{FeX}},$$

$$q_s = \frac{S_{Fn}}{2 \cdot \rho_F},$$

Prema ISO standardu [2] radijus krivine korena zupca u dodirnim tačkama tangenti određen je izrazom:

$$\frac{\rho_F}{m_n} = \frac{\rho_{Jpv}}{m_n} + \frac{2 \cdot G^2}{\cos \theta \cdot (z_n \cdot \cos^2 \theta - 2 \cdot G)}.$$

Promena napona u korenu zupca u toku dodirnog perioda biće analizirana posmatranjem odnosa napona u nekoj tački dodira i napona pri dodiru u spoljašnjoj tački trostruke sprege (tačka A na slikama 4.1 do 4.3):

$$\frac{\sigma_{FX}}{\sigma_{FA}} = \frac{K_{\alpha X}}{K_{\alpha A}} \cdot \frac{Y_{FX} \cdot Y_{SX}}{Y_{FA} \cdot Y_{SA}}, \quad (5.5)$$

odnosno izraz (5.5) se može napisati i u sledećem obliku:

$$\frac{\sigma_{FX}}{\sigma_{FA}} = \frac{K_{\alpha X}}{K_{\alpha A}} \cdot Y_{eX}, \quad (5.6)$$

gde je:

Y_{eX} – faktor relativnog napona u posmatranoj tački dodira.

5.1. FAKTOR RELATIVNOG NAPONA

Faktor relativnog napona je definisan odnosom faktora oblika zupca i faktora korekcije napona u posmatranoj tački dodira prema istim faktorima pri dodiru u spoljašnjoj tački trostruke sprege (tačka A na slikama 4.1 do 4.3) [3,4]:

$$Y_{\varepsilon X} = \frac{Y_{FX} \cdot Y_{SX}}{Y_{FA} \cdot Y_{SA}}, \quad (5.7)$$

Prema izrazu (5.7), faktor relativnog napona ima najveću vrednost pri kontaktu zupca u spoljašnjoj tački trostruke sprege i iznosi:

$$Y_{\varepsilon A} = \frac{Y_{FA} \cdot Y_{SA}}{Y_{FA} \cdot Y_{SA}} = 1, \quad (5.8)$$

pa ako je $Y_{\varepsilon A} > 1$, onda važi $Y_{\varepsilon A} = 1$ [3,4].

Faktor relativnog napona se posebno određuje za oba istovremeno spregnuta zupca pogonskog i gonjenog zupčanika:

$$Y_{\varepsilon Xi} = \frac{Y_{FXi} \cdot Y_{SXi}}{Y_{FAi} \cdot Y_{SAi}}, \quad (5.9)$$

gde je:

$i = 1$ ili 2 – zubac pogonskog ili gonjenog zupčanika.

Za određivanje faktora relativnog napona, pomoću izraza (5.9), je potrebno poznavati faktor oblika zupca i faktor korekcije napona u proizvoljnom trenutku dodira, kao i iste faktore pri dodiru u spoljašnjoj tački trostruke sprege. Zbog velikog broja uticajnih veličina, ovaj postupak određivanja se primenjuje samo kod metode „A“ ISO standarda [2], odnosno za visokoodgovorne zupčaste parove. Za približne proračune, faktor relativnog napona se može odrediti na osnovu približnih izraza izvedenih na osnovu odgovarajućih aproksimacija.

5.1.1. Aproximativni model faktora relativnog napona

Da bi se odredio karakter promene faktora relativnog napona u toku dodirnog perioda, potrebno je poznavati faktor oblika zupca i faktor korekcije napona u proizvoljnom trenutku dodira, kao i iste faktore pri dodiru u spoljašnjoj tački trostruke sprege. Vrednosti faktora oblika zupca i faktora korekcije napona u spoljašnjoj tački trostruke sprege se nalaze u literaturi u obliku tabela i dijagrama, a za ostale karakteristične tačke dodira vrednosti faktora oblika zupca i faktora korekcije napona se mogu odrediti na osnovu analitičkih izraza u literaturi [2]. Ovaj način određivanja tačnih vrednosti faktora oblika zupca i faktora korekcije napona, a samim tim i tačnih vrednosti faktora relativnog napona, je veoma složen zbog potrebnog rešavanja transcendentne jednačine, koja generalno konvergira posle pet iteracija. Da bi se pojednostavilo određivanje faktora relativnog napona uvodi se pretpostavka njegove linearne promene u toku dodirnog perioda, kao i pretpostavka o jednakosti istog faktora za oba istovremeno spregnuta zupca pogonskog i gonjenog zupčanika. Na osnovu ovih pretpostavki, faktor relativnog napona u toku dodirnog perioda se menja po sledećem zakonu:

$$Y_{\varepsilon X} = 1 + \frac{Y_{\varepsilon H} - 1}{\varepsilon_{\alpha}} \cdot \frac{x}{p_b}, \quad (5.10)$$

gde su:

ε_{α} – stepen sprezanja profila zubaca,

$Y_{\varepsilon H}$ – faktor relativnog napona za unutrašnju tačku trostruke sprege, tačku H,

$\frac{x}{p_b}$ – položaj tačke dodira u odnosu na spoljašnju tačku trostruke sprege, tačku A.

Na osnovu izraza (5.10), faktor relativnog napona se može odrediti za:

- spoljašnju tačku trostruke sprege (tačka A)

$$\frac{x}{p_b} = 0 \quad Y_{\varepsilon A} = Y_{\varepsilon \max} = 1, \quad (5.11)$$

- spoljašnju tačku dvostruke sprege (tačka B)

$$\frac{x}{p_b} = \varepsilon_{\alpha} - 2 \quad Y_{\varepsilon B} = 1 + \frac{Y_{\varepsilon H} - 1}{\varepsilon_{\alpha}} \cdot (\varepsilon_{\alpha} - 2), \quad (5.12)$$

- srednju spoljašnju tačku dvostruke sprege (tačka D)

$$\frac{x}{p_b} = 1 \quad Y_{\varepsilon D} = 1 + \frac{Y_{\varepsilon H} - 1}{\varepsilon_\alpha}, \quad (5.12)$$

- srednju unutrašnju tačku dvostruke sprege (tačka E)

$$\frac{x}{p_b} = \varepsilon_\alpha - 1 \quad Y_{\varepsilon E} = 1 + \frac{Y_{\varepsilon H} - 1}{\varepsilon_\alpha} \cdot (\varepsilon_\alpha - 1), \quad (5.14)$$

- unutrašnju tačku dvostruke sprege (tačka G)

$$\frac{x}{p_b} = 2 \quad Y_{\varepsilon G} = 1 + \frac{Y_{\varepsilon H} - 1}{\varepsilon_\alpha} \cdot 2, \quad (5.15)$$

- unutrašnju tačku trostruke sprege (tačka H)

$$\frac{x}{p_b} = \varepsilon_\alpha \quad Y_{\varepsilon H} = Y_{\varepsilon \min}. \quad (5.16)$$

Ako se pretpostavi da je minimalna vrednost faktora relativnog napona u unutrašnjoj tački trostruke sprege $Y_{\varepsilon H} = 0,25$ (slika 5.1), faktor relativnog napona je na osnovu izraza (5.11) do (5.16) dat za:

- spoljašnju tačku trostruke sprege (tačka A)

$$Y_{\varepsilon A} = Y_{\varepsilon \max} = 1, \quad (5.17)$$

- spoljašnju tačku dvostruke sprege (tačka B)

$$Y_{\varepsilon B} = 0,25 + \frac{1,5}{\varepsilon_\alpha}, \quad (5.18)$$

- srednju spoljašnju tačku dvostruke sprege (tačka D)

$$Y_{\varepsilon D} = \frac{\varepsilon_\alpha - 0,75}{\varepsilon_\alpha}, \quad (5.19)$$

- srednju unutrašnju tačku dvostruke sprege (tačka E)

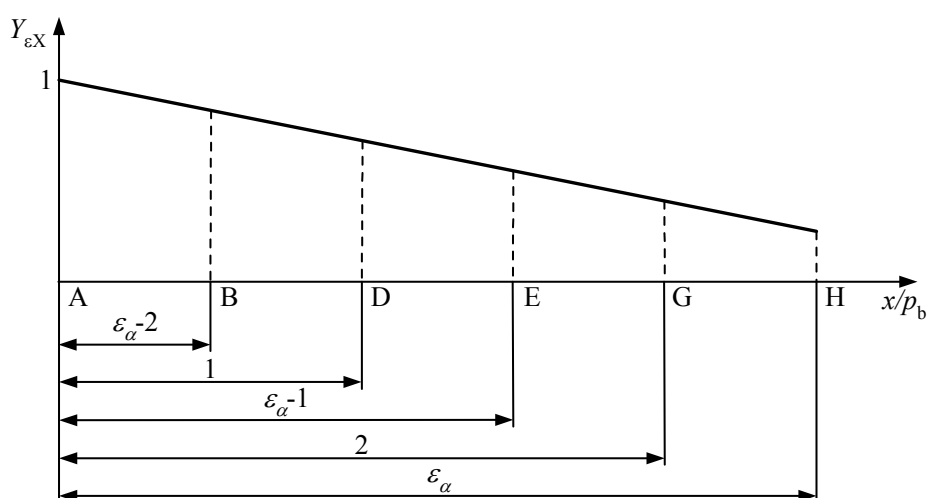
$$Y_{\varepsilon E} = 0,25 + \frac{0,75}{\varepsilon_\alpha}, \quad (5.20)$$

- unutrašnju tačku dvostruke sprege (tačka G)

$$Y_{\varepsilon G} = \frac{\varepsilon_\alpha - 1,5}{\varepsilon_\alpha}, \quad (5.21)$$

- unutrašnju tačku trostruke sprege (tačka H)

$$Y_{\varepsilon H} = Y_{\varepsilon \min} = 0,25. \quad (5.22)$$

Slika 5.1. Faktor relativnog napona za $Y_{\epsilon H} = 0,25$

Ako se pretpostavi da je minimalna vrednost faktora relativnog napona u unutrašnjoj tački trostruke sprege $Y_{\epsilon H} = 0$ (slika 5.2), faktor relativnog napona je na osnovu izraza (5.11) do (5.16) dat za:

- spoljašnju tačku trostruke sprege (tačka A)

$$Y_{\epsilon A} = Y_{\epsilon \max} = 1, \quad (5.23)$$

- spoljašnju tačku dvostruke sprege (tačka B)

$$Y_{\epsilon B} = \frac{2}{\epsilon_{\alpha}}, \quad (5.24)$$

- srednju spoljašnju tačku dvostruke sprege (tačka D)

$$Y_{\epsilon D} = \frac{\epsilon_{\alpha} - 1}{\epsilon_{\alpha}}, \quad (5.25)$$

- srednju unutrašnju tačku dvostruke sprege (tačka E)

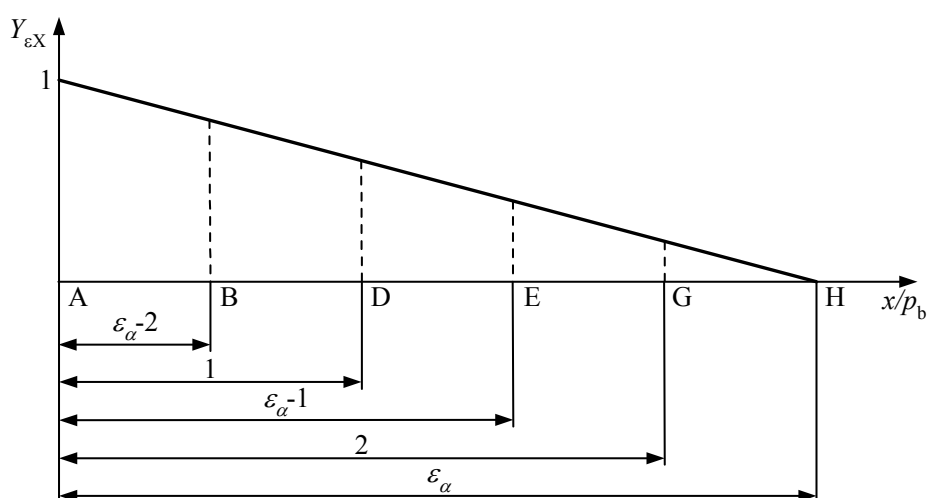
$$Y_{\epsilon E} = \frac{1}{\epsilon_{\alpha}}, \quad (5.26)$$

- unutrašnju tačku dvostruke sprege (tačka G)

$$Y_{\epsilon G} = \frac{\epsilon_{\alpha} - 2}{\epsilon_{\alpha}}, \quad (5.27)$$

- unutrašnju tačku trostruke sprege (tačka H)

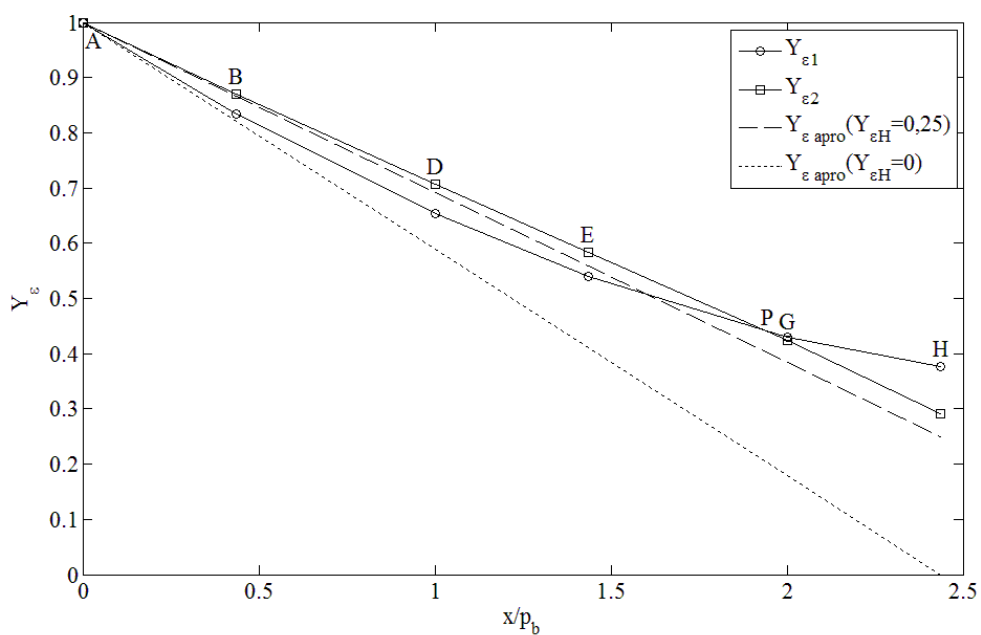
$$Y_{\epsilon H} = Y_{\epsilon \min} = 0. \quad (5.28)$$

Slika 5.2. Faktor relativnog napona za $Y_{\varepsilon H} = 0$

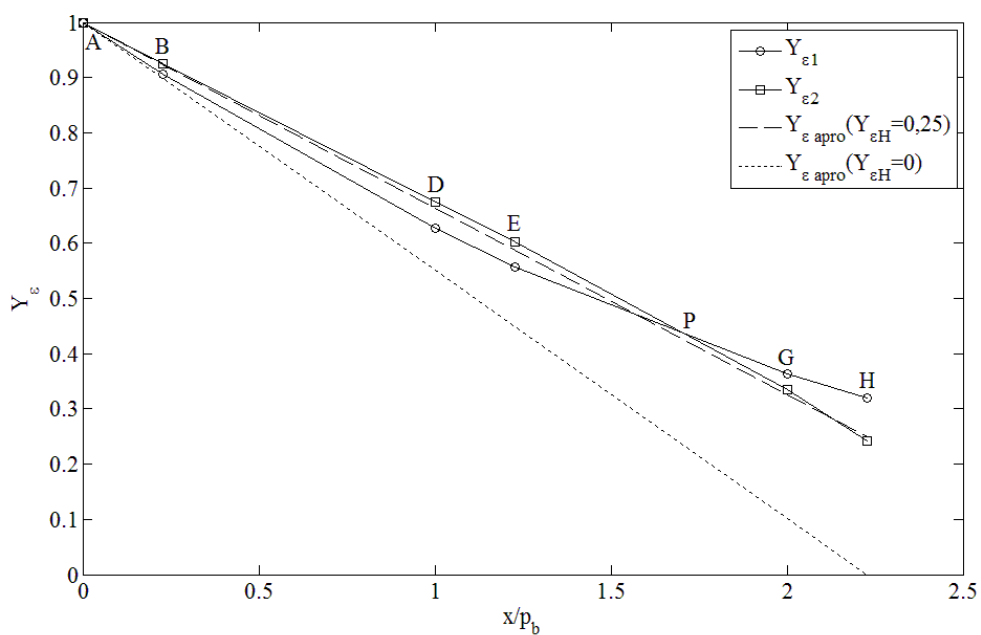
5.1.2. Uporedna analiza faktora relativnog napona prema tačnom i aproksimativnom modelu

Na osnovu tačnih (5.9) i aproksimativnih (5.11) do (5.28) izraza su prikazani dijagrami faktora relativnog napona (slike 5.3 do 5.11) za zupčasti par sa brojem zubaca $z_1 = 52$, $z_2 = 156$, standardnim modulom $m_n = 5$ mm, različitim uglovima nagiba profila zubaca alata i koeficijentima pomeranja profila zubaca.

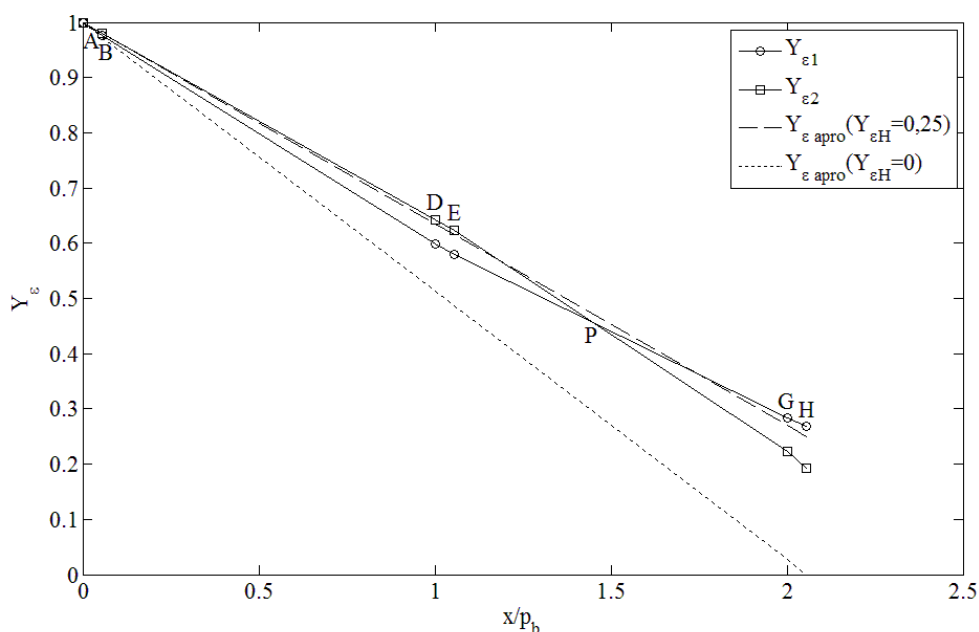
Na slikama 5.3 do 5.5 su prikazani dijagrami faktora relativnog napona prema tačnim i aproksimativnim modelima za zupčasti par sa koeficijentima pomeranja profila zubaca $x_1 = x_2 = 0$. Krive faktora relativnog napona nemaju isti karakter promene za zupce pogonskog i gonjenog zupčanika. Imaju istu vrednost samo u tački P, koja se sa povećanjem ugla nagiba profila zubaca alata, odnosno sa smanjenjem stepena sprežanja profila zubaca, pomera na levu stranu od tačke G ka tački E. U intervalu od tačke A do tačke P faktor relativnog napona zupca gonjenog zupčanika je veći od faktora relativnog napona zupca pogonskog zupčanika, a od tačke P do tačke H je obrnuto. Sa povećanjem ugla nagiba profila zubaca alata, odnosno sa smanjenjem stepena sprežanja profila zubaca, povećava se interval kada je faktor relativnog napona zupca pogonskog zupčanika veći od faktora relativnog napona zupca gonjenog zupčanika, a smanjuje se interval kada je faktor relativnog napona zupca gonjenog zupčanika veći od faktora relativnog napona zupca pogonskog zupčanika.



Slika 5.3. Faktor relativnog napona za $\alpha = 14^\circ$, $\epsilon_\alpha = 2,44$ i $x_1 = x_2 = 0$

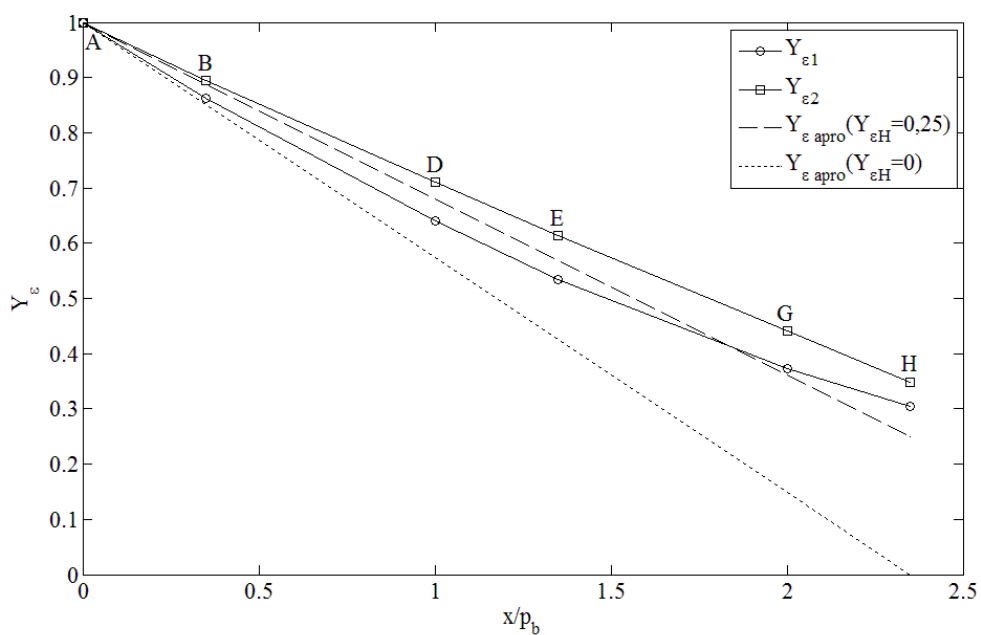


Slika 5.4. Faktor relativnog napona za $\alpha = 16^\circ$, $\epsilon_\alpha = 2,23$ i $x_1 = x_2 = 0$

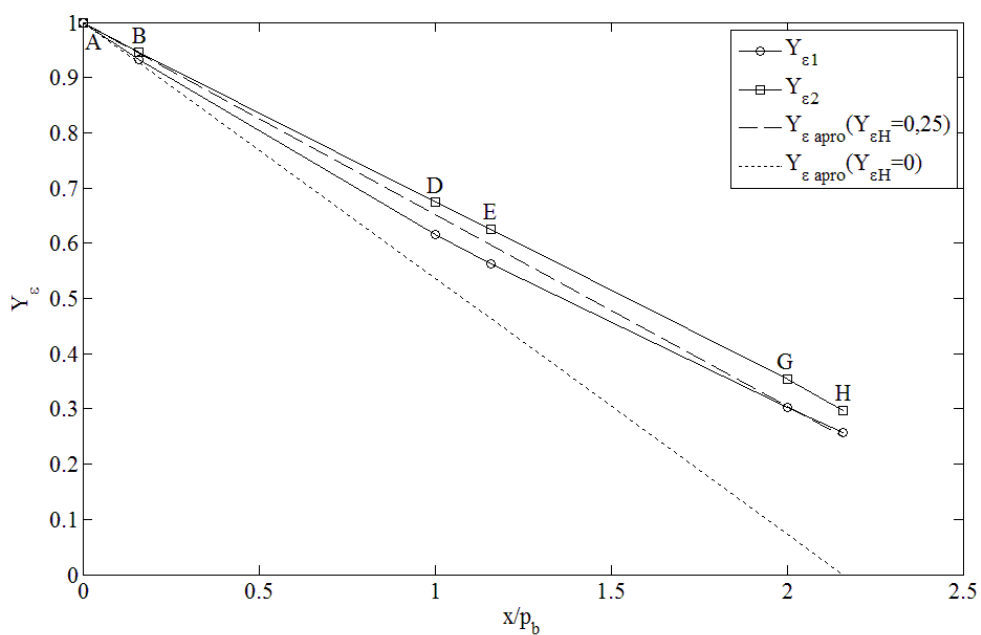


Slika 5.5. Faktor relativnog napona za $\alpha = 18^\circ$, $\varepsilon_\alpha = 2,05$ i $x_1 = x_2 = 0$

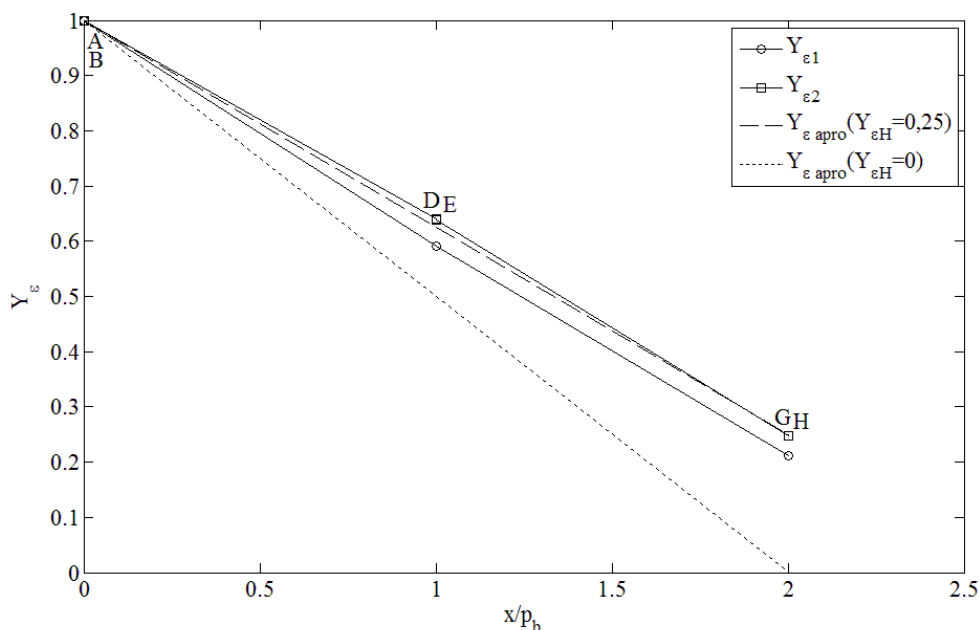
Na slikama 5.6 do 5.8 su prikazani dijagrami faktora relativnog napona prema tačnim i aproksimativnim modelima za zupčasti par sa koeficijentima pomeranja profila zubaca $x_1 = 0,3$ i $x_2 = -0,3$. I u ovom slučaju krive faktora relativnog napona nemaju isti karakter promene za zubac pogonskog i gonjenog zupčanika, a nemaju ni istu vrednost, odnosno tačku P. U intervalu od tačke A do tačke H faktor relativnog napona zupca gonjenog zupčanika je veći od faktora relativnog napona zupca pogonskog zupčanika. Međutim, sa povećanjem ugla nagiba profila zubaca alata, odnosno sa smanjenjem stepena sprezanja profila zubaca, smanjuje se razlika između faktora relativnog napona zubaca pogonskog i gonjenog zupčanika.



Slika 5.6. Faktor relativnog napona za $\alpha = 14^\circ$, $\epsilon_\alpha = 2,35$, $x_1 = 0,3$ i $x_2 = -0,3$

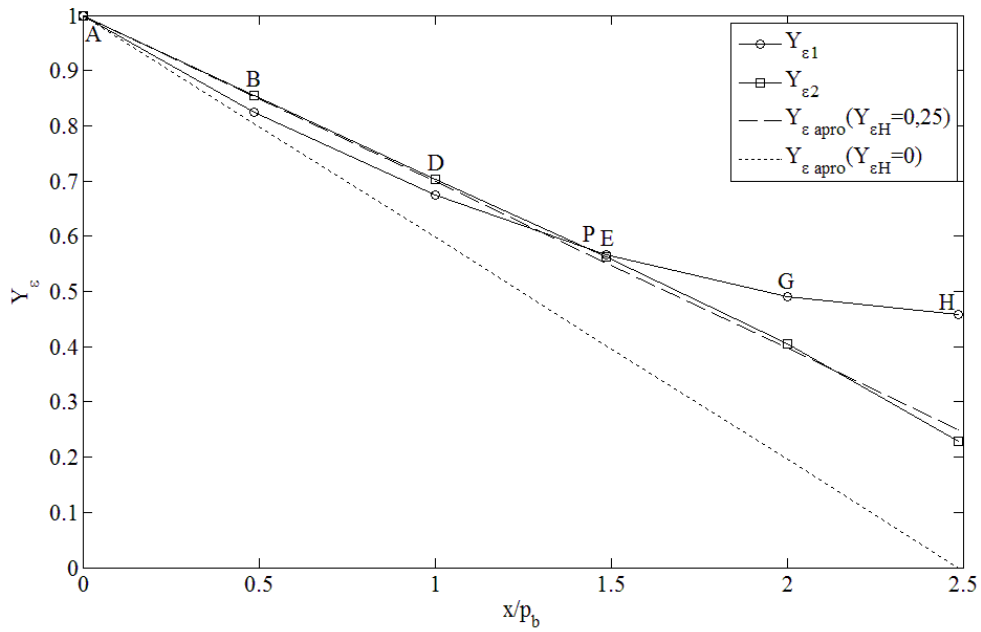


Slika 5.7. Faktor relativnog napona za $\alpha = 16^\circ$, $\epsilon_\alpha = 2,16$, $x_1 = 0,3$ i $x_2 = -0,3$

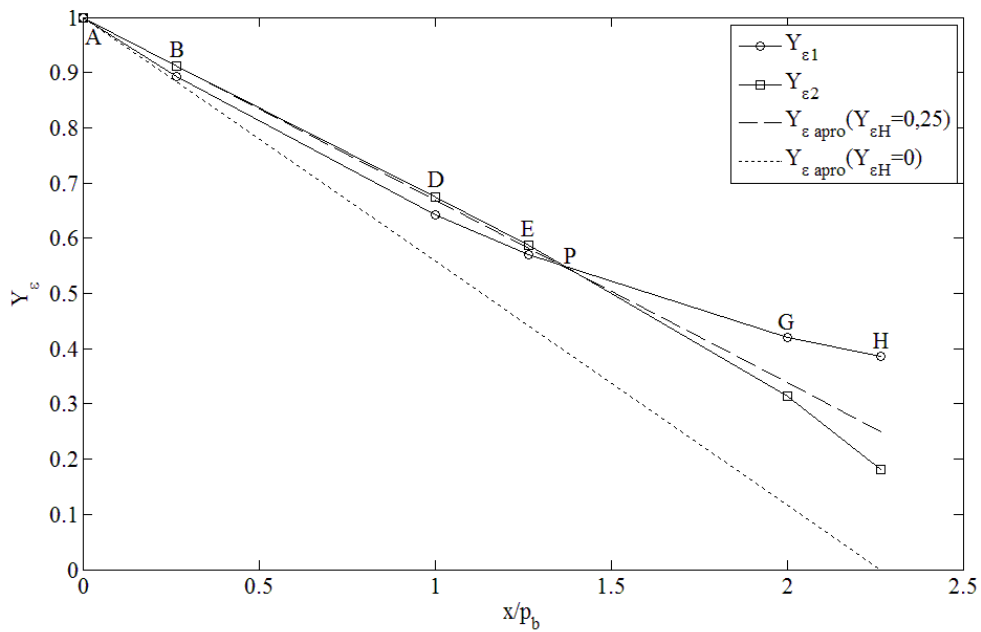


Slika 5.8. Faktor relativnog napona za $\alpha = 18^\circ$, $\varepsilon_\alpha = 2$, $x_1 = 0,3$ i $x_2 = -0,3$

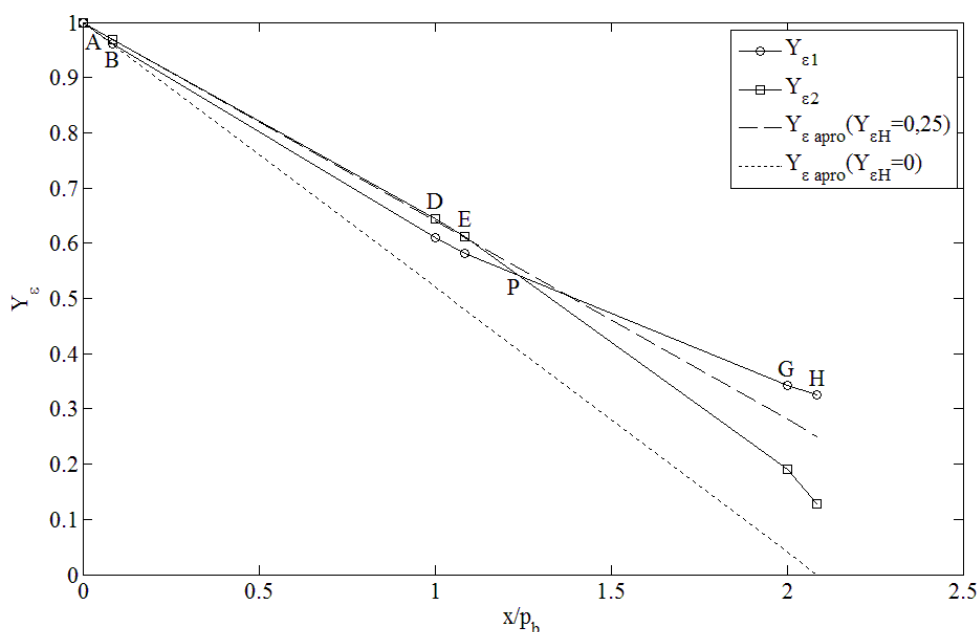
Na slikama 5.9 do 5.11 su prikazani dijagrami faktora relativnog napona prema tačnim i aproksimativnim modelima za zupčasti par sa koeficijentima pomeranja profila zubaca $x_1 = -0,3$ i $x_2 = 0,3$. I u ovom slučaju krive faktora relativnog napona nemaju isti karakter promene za zubac pogonskog i gonjenog zupčanika, ali imaju istu vrednost u tački P. Tačka P se sa povećanjem ugla nagiba profila zubaca alata, odnosno sa smanjenjem stepena sprezanja profila zubaca pomera na desnu stranu od tački D i E ka tački G. U intervalu od tačke A do tačke P faktor relativnog napona zupca gonjenog zupčanika je veći od faktora relativnog napona zupca pogonskog zupčanika, a od tačke P do tačke H je obrnuto. Sa povećanjem ugla nagiba profila zubaca alata, odnosno sa smanjenjem stepena sprezanja profila zubaca, povećava se interval kada je faktor relativnog napona zupca gonjenog zupčanika veći od faktora relativnog napona zupca pogonskog zupčanika, a smanjuje se interval kada je faktor relativnog napona zupca pogonskog zupčanika veći od faktora relativnog napona zupca gonjenog zupčanika.



Slika 5.9. Faktor relativnog napona za $\alpha = 14^\circ$, $\epsilon_\alpha = 2,49$, $x_1 = -0,3$ i $x_2 = 0,3$



Slika 5.10. Faktor relativnog napona za $\alpha = 16^\circ$, $\epsilon_\alpha = 2,27$, $x_1 = -0,3$ i $x_2 = 0,3$



Slika 5.11. Faktor relativnog napona za $\alpha = 18^\circ$, $\varepsilon_\alpha = 2,09$, $x_1 = -0,3$ i $x_2 = 0,3$

Gradijent opadanja faktora relativnog napona (slike 5.3 do 5.11) je izraženiji kod većih vrednosti ugla nagiba profila zubaca alata, odnosno kod manjih vrednosti stepena sprezanja profila zubaca. Sa povećanjem ugla nagiba profila zubaca alata, odnosno sa smanjenjem stepena sprezanja profila zubaca, smanjuje se razlika između faktora relativnog napona zupca pogonskog i gonjenog zupčanika, kao i između faktora relativnog napona zupca pogonskog i/ili gonjenog zupčanika i aproksimacije faktora relativnog napona (5.10) kada je njegova minimalna vrednost u unutrašnjoj tački trostruke sprege $Y_{\varepsilon H} = 0,25$.

Krive faktora relativnog napona za zupac pogonskog i gonjenog zupčanika su dobro opisane aproksimacijom faktora relativnog napona (5.10) kada je njegova minimalna vrednost u unutrašnjoj tački trostruke sprege $Y_{\varepsilon H} = 0,25$, dok se to isto ne može reći i za slučaj kada je njegova minimalna vrednost u unutrašnjoj tački trostruke sprege $Y_{\varepsilon H} = 0$. Primetno je da aproksimacija faktora relativnog napona (5.10) kada je njegova minimalna vrednost u unutrašnjoj tački trostruke sprege $Y_{\varepsilon H} = 0,25$, bolje aproksimira krivu faktora relativnog napona zupca gonjenog zupčanika u svim slučajevima prikazanim na slikama 5.3 do 5.11, što je prikazano i u tabeli 5.1.

U tabeli 5.1 su prikazani odnosi faktora relativnog napona u tački B prema tačnim (5.9) i aproksimativnom (5.18) izrazu. Najveća razlika (4,1%) je između tačnih vrednosti faktora relativnog napona zubaca pogonskog i gonjenog zupčanika sa koeficijentima pomeranja profila zubaca $x_1 = x_2 = 0$, uglom nagiba profila zubaca alata $\alpha = 14^\circ$ i stepenom sprezanja profila zubaca $\varepsilon_\alpha = 2,44$. Najmanje razlike (0% do 0,8%) su dobijene između tačne vrednosti faktora relativnog napona zupca gonjenog zupčanika i aproksimacije faktora relativnog napona (5.18), što je takođe pokazano u radu [4] za slučaj kada se u toku dodirnog perioda zubaca smenjuju jednostruka i dvostruka sprega ($1 \leq \varepsilon_\alpha \leq 2$). Razlike između faktora relativnog napona u tački B opadaju sa povećanjem ugla nagiba profila zubaca alata, odnosno sa smanjenjem stepena sprezanja profila zubaca. Za ugao nagiba profila zubaca alata $\alpha = 18^\circ$ i koeficijente pomeranja profila zubaca $x_1 = 0,3$ i $x_2 = -0,3$ razlike uopšte nema (0%), a ni za kombinaciju koeficijenata pomeranja profila zubaca $x_1 = -0,3$ i $x_2 = 0,3$, kao i $x_1 = x_2 = 0$, ove razlike nisu velike (0% do 0,9% i 0% do 0,5%).

Tabela 5.1. Odnosi faktora relativnog napona u tački B prema izrazima (5.9) i (5.18)

x_1 x_2	α [°]	$\frac{Y_{\varepsilon 2} - Y_{\varepsilon 1}}{Y_{\varepsilon 1}}$ [%]	$\frac{Y_{\varepsilon \text{ apro}} - Y_{\varepsilon 1}}{Y_{\varepsilon 1}}$ [%]	$\frac{Y_{\varepsilon 2} - Y_{\varepsilon \text{ apro}}}{Y_{\varepsilon \text{ apro}}}$ [%]
0 0	14	4,1	3,7	0,4
	16	2,1	1,9	0,1
	18	0,5	0,5	0
0,3 -0,3	14	3,7	2,9	0,8
	16	1,4	1,2	0,2
	18	0	0	0
-0,3 0,3	14	3,5	3,5	0,1
	16	2,2	2,2	0,1
	18	0,9	0,8	0

Na osnovu slika 5.3 do 5.11, kao i podataka u tabeli 5.1 se može zaključiti da kod zupčastih parova kod kojih se ne zahteva veća pouzdanost i odgovornost, tačan način određivanja vrednosti faktora relativnog napona se može uprostiti uvođenjem aproksimacija (5.11) do (5.16), odnosno (5.17) do (5.22), a sve u cilju smanjenja složenosti proračuna pri određivanju faktora relativnog napona. Međutim, kod zupčastih parova kod kojih se zahteva veća pouzdanost i odgovornost, tačan način određivanja

vrednosti faktora relativnog napona je potreban zbog preciznijih istraživanja radnih i kritičnih napona u korenu zupca, a samim tim i optimizacije zupčastih parova.

ISO standard [1] za faktor relativnog napona u spoljašnjoj tački dvostruke sprege (tačka B na slikama 4.1 do 4.3) ne koristi aproksimativni izraz (5.18), već indirektno daje izraz:

$$Y_{\varepsilon B} = 0,25 + \frac{0,75}{\varepsilon_{\alpha}}. \quad (5.29)$$

U tabeli 5.2 su prikazani odnosi faktora relativnog napona u tački B prema tačnim (5.9), aproksimativnom (5.18) i aproksimativnom ISO (5.29) izrazu. Najmanja razlika (49,5%) je između tačne vrednosti faktora relativnog napona zupca pogonskog zupčanika i ISO aproksimacije faktora relativnog napona (5.29) za koeficijente pomeranja profila zubaca $x_1 = -0,3$ i $x_2 = 0,3$, ugao nagiba profila zubaca alata $\alpha = 14^\circ$ i stepen sprezanja profila zubaca $\varepsilon_{\alpha} = 2,49$. Najveće razlike (54,8% do 60%) su dobijene između tačne vrednosti faktora relativnog napona zupca gonjenog zupčanika i ISO aproksimacije faktora relativnog napona (5.29). Razlike između faktora relativnog napona u tački B rastu sa povećanjem ugla nagiba profila zubaca alata, odnosno sa smanjenjem stepena sprezanja profila zubaca. Za ugao nagiba profila zubaca alata $\alpha = 18^\circ$ i koeficijente pomeranja profila zubaca $x_1 = 0,3$ i $x_2 = -0,3$ razlike su najveće (60%), a ni za kombinaciju koeficijenata pomeranja profila zubaca $x_1 = -0,3$ i $x_2 = 0,3$, kao i $x_1 = x_2 = 0$, ove razlike nisu male (57,8% do 59% i 58,6% do 59,4%).

Tabela 5.2. Odnosi faktora relativnog napona u tački B prema izrazima (5.9), (5.18) i (5.29)

x_1 x_2	$\alpha [^\circ]$	$\frac{Y_{\varepsilon 2} - Y_{\varepsilon ISO}}{Y_{\varepsilon ISO}} [\%]$	$\frac{Y_{\varepsilon apro} - Y_{\varepsilon ISO}}{Y_{\varepsilon ISO}} [\%]$	$\frac{Y_{\varepsilon 1} - Y_{\varepsilon ISO}}{Y_{\varepsilon ISO}} [\%]$
0 0	14	55,8	55,2	49,6
	16	57,6	57,4	54,4
	18	59,4	59,4	58,6
0,3 -0,3	14	57,3	56,1	51,6
	16	58,5	58,1	56,3
	18	60	60	60
-0,3 0,3	14	54,8	54,7	49,5
	16	57,1	57	53,6
	18	59	59	57,8

U poglavlju 7 će biti pokazan uticaj indirektnog korišćenja aproksimativnog ISO izraza (5.29) faktora relativnog napona na određivanje napona u korenu zupca.

5.2. ANALITIČKI MODEL NAPONA U KORENU ZUPCA PRI RAVNOMERNOJ RASPODELI OPTEREĆENJA

Kod ravnomerne (idealne) raspodele opterećenja na istovremeno spregnute parove zubaca, vrednosti faktora raspodele opterećenja variraju od $K_{\alpha X} = 1/3$ (za trostruku spregu) do $K_{\alpha X} = 1/2$ (za dvostruku spregu). Smenom graničnih vrednosti faktora raspodele opterećenja u izraz (5.1), su dobijeni analitički izrazi za određivanje napona u korenu zupca u karakterističnim tačkama dodira pri ravnomernoj (idealnoj) raspodeli opterećenja, i to prema tačnom modelu:

$$\sigma_{FX} = \frac{\sigma_0 \cdot Y_{FX} \cdot Y_{SX}}{3} \text{ - za trostruku spregu, } (X = A \text{ ili } H) \quad (5.30)$$

$$\sigma_{FX} = \frac{\sigma_0 \cdot Y_{FX} \cdot Y_{SX}}{2} \text{ - za dvostruku spregu, } (X = B, D, E \text{ ili } G) \quad (5.31)$$

a sređivanjem izraza (5.6), napon u korenu zupca u karakterističnim tačkama dodira pri ravnomernoj (idealnoj) raspodeli opterećenja se može odrediti i na osnovu sledećih izraza, i to prema približnom modelu:

$$\sigma_{FX} = \sigma_{FA} \cdot Y_{\epsilon X} \text{ - za trostruku spregu, } (X = A \text{ ili } H) \quad (5.32)$$

$$\sigma_{FX} = \sigma_{FA} \cdot \frac{3}{2} \cdot Y_{\epsilon X} \text{ - za dvostruku spregu. } (X = B, D, E \text{ ili } G) \quad (5.33)$$

Ako se pretpostavi da je minimalna vrednost faktora relativnog napona u unutrašnjoj tački trostruke sprege $Y_{\epsilon H} = 0,25$, napon u korenu zupca pri ravnomernoj (idealnoj) raspodeli opterećenja je na osnovu izraza (5.17) do (5.22) i izraza (5.32) i (5.33) dat za:

- spoljašnju tačku trostruke sprege (tačka A)

$$\sigma_{FA} = \sigma_{FA} \cdot 1, \quad (5.34)$$

- spoljašnju tačku dvostruke sprege (tačka B)

$$\sigma_{FB} = \sigma_{FA} \cdot \frac{3}{2} \cdot \left(0,25 + \frac{1,5}{\epsilon_\alpha} \right), \quad (5.35)$$

- srednju spoljašnju tačku dvostruke sprege (tačka D)

$$\sigma_{FD} = \sigma_{FA} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{\varepsilon_{\alpha} - 0,75}{\varepsilon_{\alpha}}, \quad (5.36)$$

- srednju unutrašnju tačku dvostruke sprege (tačka E)

$$\sigma_{FE} = \sigma_{FA} \cdot \frac{3}{2} \cdot \left(0,25 + \frac{0,75}{\varepsilon_{\alpha}} \right), \quad (5.37)$$

- unutrašnju tačku dvostruke sprege (tačka G)

$$\sigma_{FG} = \sigma_{FA} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{\varepsilon_{\alpha} - 1,5}{\varepsilon_{\alpha}}, \quad (5.38)$$

- unutrašnju tačku trostruke sprege (tačka H)

$$\sigma_{FH} = \sigma_{FA} \cdot 0,25. \quad (5.39)$$

Kada je minimalna vrednost faktora relativnog napona u unutrašnjoj tački trostruke sprege $Y_{eH} = 0,25$, za napone u korenu zupca pri ravnomernoj (idealnoj) raspodeli opterećenja se na osnovu izraza (5.34) i (5.35) prema približnom modelu može zaključiti da je $\sigma_{FB} > \sigma_{FA}$.

Ako se pretpostavi da je minimalna vrednost faktora relativnog napona u unutrašnjoj tački trostruke sprege $Y_{eH} = 0$, napon u korenu zupca pri ravnomernoj (idealnoj) raspodeli opterećenja je na osnovu izraza (5.23) do (5.28) i izraza (5.32) i (5.33) dat za:

- spoljašnju tačku trostruke sprege (tačka A)

$$\sigma_{FA} = \sigma_{FA} \cdot 1, \quad (5.40)$$

- spoljašnju tačku dvostruke sprege (tačka B)

$$\sigma_{FB} = \sigma_{FA} \cdot \frac{3}{\varepsilon_{\alpha}}, \quad (5.41)$$

- srednju spoljašnju tačku dvostruke sprege (tačka D)

$$\sigma_{FD} = \sigma_{FA} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{\varepsilon_{\alpha} - 1}{\varepsilon_{\alpha}}, \quad (5.42)$$

- srednju unutrašnju tačku dvostruke sprege (tačka E)

$$\sigma_{FE} = \sigma_{FA} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\varepsilon_{\alpha}}, \quad (5.43)$$

- unutrašnju tačku dvostruke sprege (tačka G)

$$\sigma_{FG} = \sigma_{FA} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{\varepsilon_{\alpha} - 2}{\varepsilon_{\alpha}}, \quad (5.44)$$

- unutrašnju tačku trostruke sprege (tačka H)

$$\sigma_{FH} = \sigma_{FA} \cdot 0. \quad (5.45)$$

Kada je minimalna vrednost faktora relativnog napona u unutrašnjoj tački trostruke sprege $Y_{eH} = 0$, za napone u korenu zupca pri ravnomernoj (idealnoj) raspodeli opterećenja se na osnovu izraza (5.40) i (5.41) prema približnom modelu može zaključiti da je i u ovom slučaju $\sigma_{FB} > \sigma_{FA}$.

Napon u korenu zupca pri ravnomernoj (idealnoj) raspodeli opterećenja na istovremeno spregnute parove zubaca je najveći u spoljašnjoj tački dvostruke sprege.

5.3. ANALITIČKI MODEL NAPONA U KORENU ZUPCA PRI IZRAZITO NERAVNOMERNOJ RASPODELI OPTEREĆENJA

Kod izrazito neravnomerne raspodele opterećenja vrednosti faktora raspodele opterećenja variraju od $K_{\alpha X} = 0$ (kad zubac uopšte ne prenosi opterećenje) do $K_{\alpha X} = 1$ (kad zubac prenosi ukupno opterećenje). Smenom samo granične vrednosti faktora raspodele opterećenja $K_{\alpha X} = 1$ u izraz (5.1), je dobijen analitički izraz za određivanje napona u korenu zupca u karakterističnim tačkama dodira pri izrazito neravnomernoj raspodeli opterećenja kada se ukupno opterećenje prenosi preko jednog para zubaca, i to prema tačnom modelu:

$$\sigma_{FX} = \sigma_0 \cdot Y_{FX} \cdot Y_{SX}, \quad (5.46)$$

a sređivanjem izraza (5.6), napon u korenu zupca u karakterističnim tačkama dodira pri izrazito neravnomernoj raspodeli opterećenja kada se ukupno opterećenje prenosi preko jednog para zubaca se može odrediti i na osnovu sledećeg izraza, i to prema približnom modelu:

$$\sigma_{FX} = \sigma_{FA} \cdot Y_{eX}. \quad (5.47)$$

Ako se pretpostavi da je minimalna vrednost faktora relativnog napona u unutrašnjoj tački trostruke sprege $Y_{eH} = 0,25$, napon u korenu zupca kada se ukupno opterećenje prenosi preko jednog para zubaca je na osnovu izraza (5.17) do (5.22) i izraza (5.47) dat za:

- spoljašnju tačku trostruke sprege (tačka A)

$$\sigma_{FA} = \sigma_{FA} \cdot 1, \quad (5.48)$$

- spoljašnju tačku dvostruke sprege (tačka B)

$$\sigma_{FB} = \sigma_{FA} \cdot \left(0,25 + \frac{1,5}{\varepsilon_{\alpha}} \right), \quad (5.49)$$

- srednju spoljašnju tačku dvostruke sprege (tačka D)

$$\sigma_{FD} = \sigma_{FA} \cdot \frac{\varepsilon_{\alpha} - 0,75}{\varepsilon_{\alpha}}, \quad (5.50)$$

- srednju unutrašnju tačku dvostruke sprege (tačka E)

$$\sigma_{FE} = \sigma_{FA} \cdot \left(0,25 + \frac{0,75}{\varepsilon_{\alpha}} \right), \quad (5.51)$$

- unutrašnju tačku dvostruke sprege (tačka G)

$$\sigma_{FG} = \sigma_{FA} \cdot \frac{\varepsilon_{\alpha} - 1,5}{\varepsilon_{\alpha}}, \quad (5.52)$$

- unutrašnju tačku trostruke sprege (tačka H)

$$\sigma_{FH} = \sigma_{FA} \cdot 0,25. \quad (5.53)$$

Kada je minimalna vrednost faktora relativnog napona u unutrašnjoj tački trostruke sprege $Y_{eH} = 0,25$, za napone u korenu zupca kada se ukupno opterećenje prenosi preko jednog para zubaca se na osnovu izraza (5.48) i (5.49) prema približnom modelu može zaključiti da je $\sigma_{FA} > \sigma_{FB}$.

Ako se pretpostavi da je minimalna vrednost faktora relativnog napona u unutrašnjoj tački trostruke sprege $Y_{eH} = 0$, napon u korenu zupca kada se ukupno opterećenje prenosi preko jednog para zubaca je na osnovu izraza (5.23) do (5.28) i izraza (5.47) dat za:

- spoljašnju tačku trostruke sprege (tačka A)

$$\sigma_{FA} = \sigma_{FA} \cdot 1, \quad (5.54)$$

- spoljašnju tačku dvostruke sprege (tačka B)

$$\sigma_{FB} = \sigma_{FA} \cdot \frac{2}{\varepsilon_{\alpha}}, \quad (5.55)$$

- srednju spoljašnju tačku dvostruke sprege (tačka D)

$$\sigma_{FD} = \sigma_{FA} \cdot \frac{\varepsilon_{\alpha} - 1}{\varepsilon_{\alpha}}, \quad (5.56)$$

- srednju unutrašnju tačku dvostruke sprege (tačka E)

$$\sigma_{FE} = \sigma_{FA} \cdot \frac{1}{\varepsilon_{\alpha}}, \quad (5.57)$$

- unutrašnju tačku dvostruke sprege (tačka G)

$$\sigma_{FG} = \sigma_{FA} \cdot \frac{\varepsilon_{\alpha} - 2}{\varepsilon_{\alpha}}, \quad (5.58)$$

- unutrašnju tačku trostruke sprege (tačka H)

$$\sigma_{FH} = \sigma_{FA} \cdot 0. \quad (5.59)$$

Kada je minimalna vrednost faktora relativnog napona u unutrašnjoj tački trostruke sprege $Y_{\varepsilon H} = 0$, za napone u korenu zupca kada se ukupno opterećenje prenosi preko jednog para zubaca se na osnovu izraza (5.54) i (5.55) prema približnom modelu može zaključiti da je i u ovom slučaju $\sigma_{FA} > \sigma_{FB}$.

Napon u korenu zupca pri izrazito neravnomernoj raspodeli opterećenja kada se ukupno opterećenje prenosi preko jednog para zubaca je najveći u spoljašnjoj tački trostruke sprege.

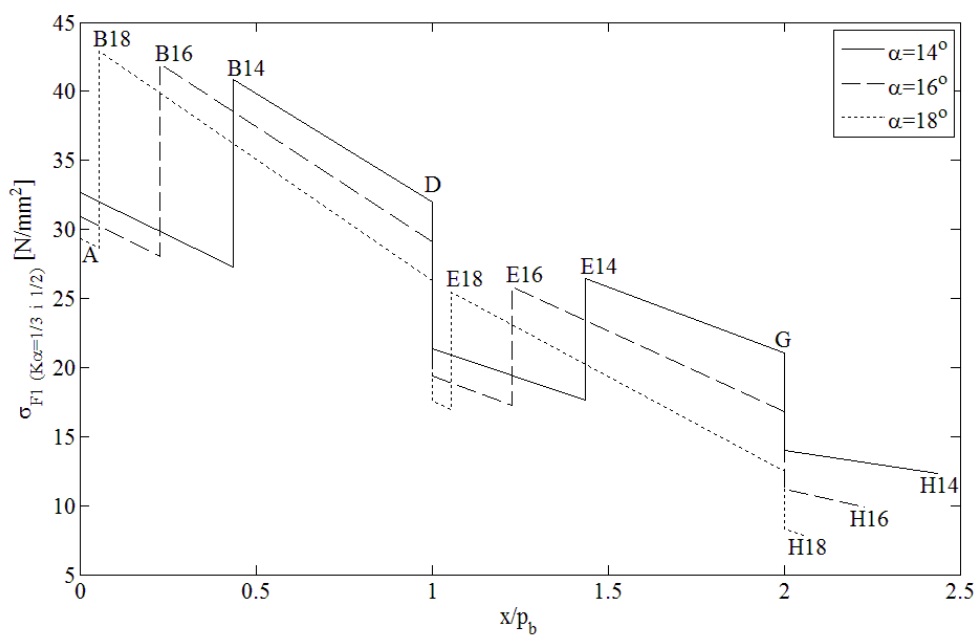
6. ISTOVREMENI UTICAJ RASPODELE OPTEREĆENJA I OBLIKA PROFILA ZUBACA NA NAPON U KORENU ZUPCA

Najveći uticaj na napon u korenu zupca imaju raspodela opterećenja na istovremeno spregnute parove zubaca i oblik profila zubaca. U ovom poglavlju je analiziran njihov istovremeni uticaj. Analiza je sprovedena za granične raspodele opterećenja na zupčastim parovima sa pravim zupcima i sledećim parametrima: broj zubaca $z_1 = 52$, $z_2 = 156$ i standardni modul $m_n = 5$ mm. Uticaj oblika profila zubaca na napon u korenu zupca je analiziran variranjem ugla nagiba profila zubaca alata i koeficijenata pomeranja profila zubaca. Zupčasti parovi su opterećeni sa ukupnim opterećenjem $F = 10$ kN koje deluje u pravcu dodirnice profila zupca. Analiza je sprovedena na osnovu razvijenog analitičkog modela saglasno izrazu (5.1).

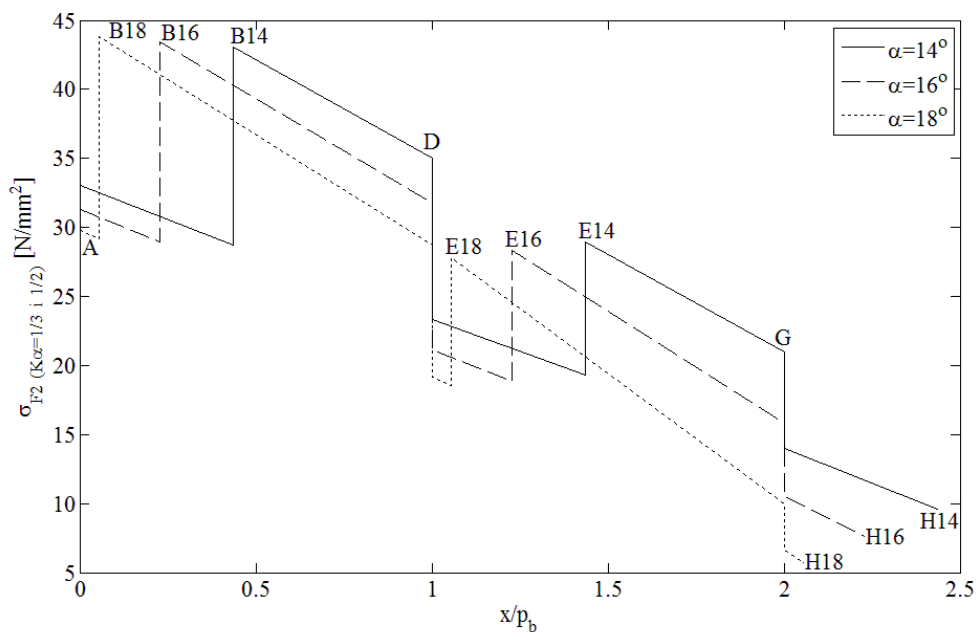
6.1. RAVNOMERNA RASPODELA OPTEREĆENJA

Tok promene napona u korenu zupca u zavisnosti od položaja tačke dodira na profilu zupca pri graničnoj ravnomernoj (idealnoj) raspodeli opterećenja na istovremeno spregnute parove zubaca, kada su vrednosti faktora raspodele opterećenja od $K_{\alpha X} = 1/3$ (za trostruku spregu) do $K_{\alpha X} = 1/2$ (za dvostruku spregu), je prikazan u obliku dijagrama na slikama 6.1 do 6.6, za uglove nagiba profila zubaca alata $\alpha = 14^\circ$, $\alpha = 16^\circ$, $\alpha = 18^\circ$ i različite vrednosti koeficijenata pomeranja profila zubaca.

Naponi u korenu zupca za koeficijente pomeranja profila zubaca $x_1 = x_2 = 0$ zupčastog para su prikazani u obliku dijagrama na slikama 6.1 i 6.2. Najveći napon u korenu zupca je u tački B pri uglu nagiba profila zubaca alata $\alpha = 18^\circ$ za oba zupčanika, odnosno kad stepen sprežanja profila zubaca ima najmanju vrednost $\varepsilon_\alpha = 2,05$, tj. kad je period dvostruke sprege najveći, a trostruke najmanji. Napon u korenu zupca u tački B raste sa porastom ugla nagiba profila zubaca alata, i to kod pogonskog zupčanika 2,8% (za $\alpha = 14^\circ$ i $\alpha = 16^\circ$) i 2,1% (za $\alpha = 16^\circ$ i $\alpha = 18^\circ$) i kod gonjenog zupčanika 1% (za $\alpha = 14^\circ$ i $\alpha = 16^\circ$) i 0,8% (za $\alpha = 16^\circ$ i $\alpha = 18^\circ$). Naponi u korenu zupca u tački B su veći kod gonjenog zupčanika.



Slika 6.1. Naponi σ_{F1} pri ravnomernoj (idealnoj) raspodeli opterećenja za $x_1 = x_2 = 0$ ($\varepsilon_{\alpha 14} = 2,44$, $\varepsilon_{\alpha 16} = 2,23$ i $\varepsilon_{\alpha 18} = 2,05$)



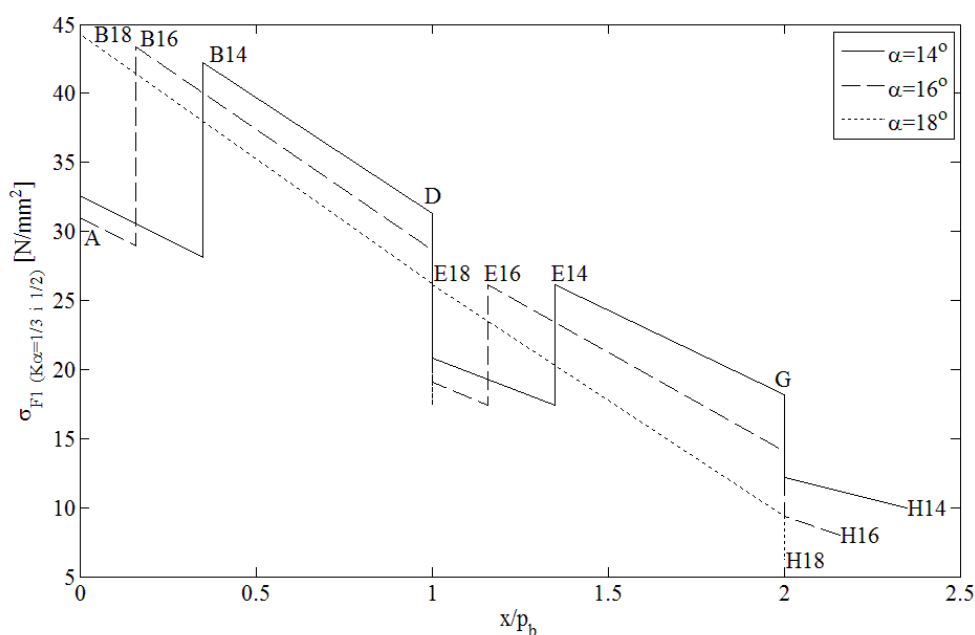
Slika 6.2. Naponi σ_{F2} pri ravnomernoj (idealnoj) raspodeli opterećenja za $x_1 = x_2 = 0$ ($\varepsilon_{\alpha 14} = 2,44$, $\varepsilon_{\alpha 16} = 2,23$ i $\varepsilon_{\alpha 18} = 2,05$)

U tabeli 6.1 su prikazane vrednosti napona u korenu zupca pri ravnomernoj (idealnoj) raspodeli opterećenja kada su zupci zupčastog para urađeni bez promene profila $x_1 = x_2 = 0$. Najveći napon u korenu zupca se generiše pri dodiru spregnutih zubaca u tački B kod zubaca oba zupčanika. Pri tome, veće vrednosti napona se generišu u korenu zupca gonjenog zupčanika (2,1% do 5,3%) u odnosu na napon u korenu zupca pogonskog zupčanika. Na osnovu rezultata prikazanih u tabeli 6.1 se može konstatovati da se naponi u korenu zupca pri dodiru u tački B povećavaju sa povećanjem ugla nagiba profila zubaca alata, odnosno najveći je za ugao $\alpha = 18^\circ$ kad stepen sprežanja profila zubaca ima najmanju vrednost. Najmanja vrednost napona se javlja za ugao $\alpha = 14^\circ$ kad stepen sprežanja profila zubaca ima najveću vrednost. Ovo povećanje je veće kod zubaca pogonskog zupčanika (4,9%), a manje je kod zubaca gonjenog zupčanika (1,7%). Istovremeno se naponi u korenu zupca pri dodiru spregnutih profila zubaca u drugim dodirnim tačkama (A, D, E, G i H) smanjuju sa povećanjem ugla nagiba profila zubaca alata. Kod gonjenog zupčanika napon u korenu zupca u tački D je veći od napon u korenu zupca u tački A za manje uglove nagiba profila zubaca alata i razlika je više izražena za ugao $\alpha = 14^\circ$ (6%), nego za $\alpha = 16^\circ$ (1,3%).

Tabela 6.1. Naponi u korenu zupca zupčastog para pri ravnomernoj (idealnoj) raspodeli opterećenja za $x_1 = x_2 = 0$

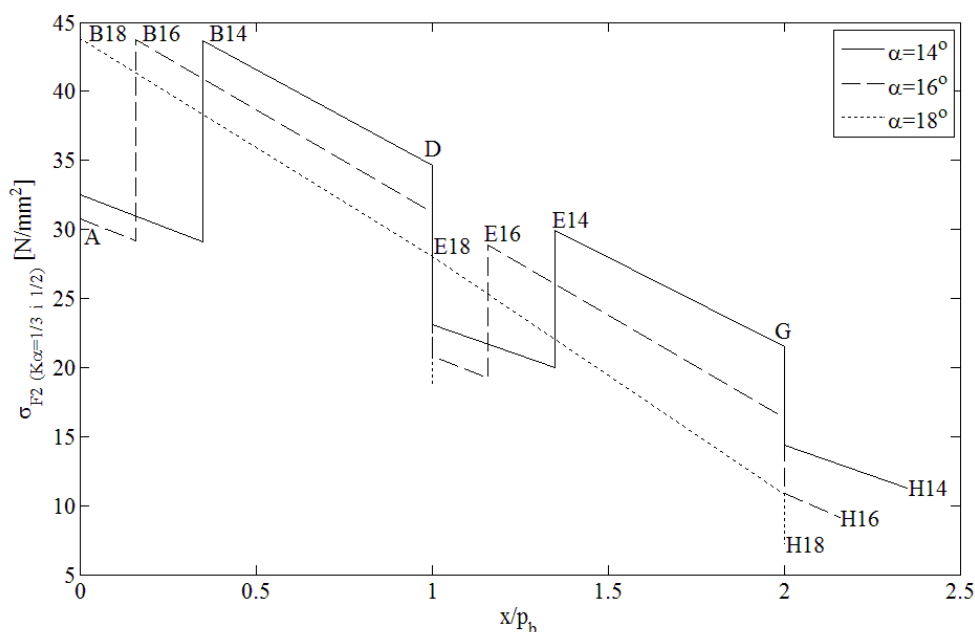
x_1 x_2	$\sigma_F \left[\frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \right]$	$\alpha [^\circ]$		
		14	16	18
0 0	A ₁	32,66	30,92	29,33
	B₁	40,89	42,02	42,91
	D ₁	32,01	29,08	26,32
	E ₁	26,44	25,84	25,47
	G ₁	21,04	16,81	12,47
	H ₁	12,31	9,90	7,88
	A ₂	33,02	31,33	29,79
	B₂	43,05	43,47	43,80
	D ₂	35,00	31,73	28,70
	E ₂	28,93	28,31	27,81
	G ₂	21,00	15,78	9,98
	H ₂	9,59	7,61	5,72

Naponi u korenu zupca za koeficijente pomeranja profila zubaca $x_1 = 0,3$ i $x_2 = -0,3$ zupčastog para su prikazani u obliku dijagrama na slikama 6.3 i 6.4. Najveći napon u korenu zupca je i u ovom slučaju u tački B pri uglu nagiba profila zubaca alata $\alpha = 18^\circ$ za oba zupčanika, odnosno kad stepen sprezanja profila zubaca ima najmanju vrednost $\varepsilon_\alpha = 2$, tj. kad je period dvostruke sprege maksimalan, a trostruke ne postoji. Napon u korenu zupca u tački B raste sa porastom ugla nagiba profila zubaca alata, i to kod pogonskog zupčanika 2,8% (za $\alpha = 14^\circ$ i $\alpha = 16^\circ$) i 1,9% (za $\alpha = 16^\circ$ i $\alpha = 18^\circ$) i kod gonjenog zupčanika 0,2% (za $\alpha = 14^\circ$ i $\alpha = 16^\circ$, kao i za $\alpha = 16^\circ$ i $\alpha = 18^\circ$). Naponi u korenu zupca u tački B su veći kod gonjenog zupčanika za uglove nagiba profila zubaca alata $\alpha = 14^\circ$ i $\alpha = 16^\circ$, a kod pogonskog zupčanika za ugao nagiba profila zubaca alata $\alpha = 18^\circ$.



Slika 6.3. Naponi σ_{F1} pri ravnomernoj (idealnoj) raspodeli opterećenja za

$$x_1 = 0,3 \text{ i } x_2 = -0,3 \text{ (} \varepsilon_{\alpha 14} = 2,35, \varepsilon_{\alpha 16} = 2,16 \text{ i } \varepsilon_{\alpha 18} = 2 \text{)}$$



Slika 6.4. Naponi σ_{F2} pri ravnomernoj (idealnoj) raspodeli opterećenja za

$$x_1 = 0,3 \text{ i } x_2 = -0,3 \text{ (} \varepsilon_{\alpha 14} = 2,35, \varepsilon_{\alpha 16} = 2,16 \text{ i } \varepsilon_{\alpha 18} = 2 \text{)}$$

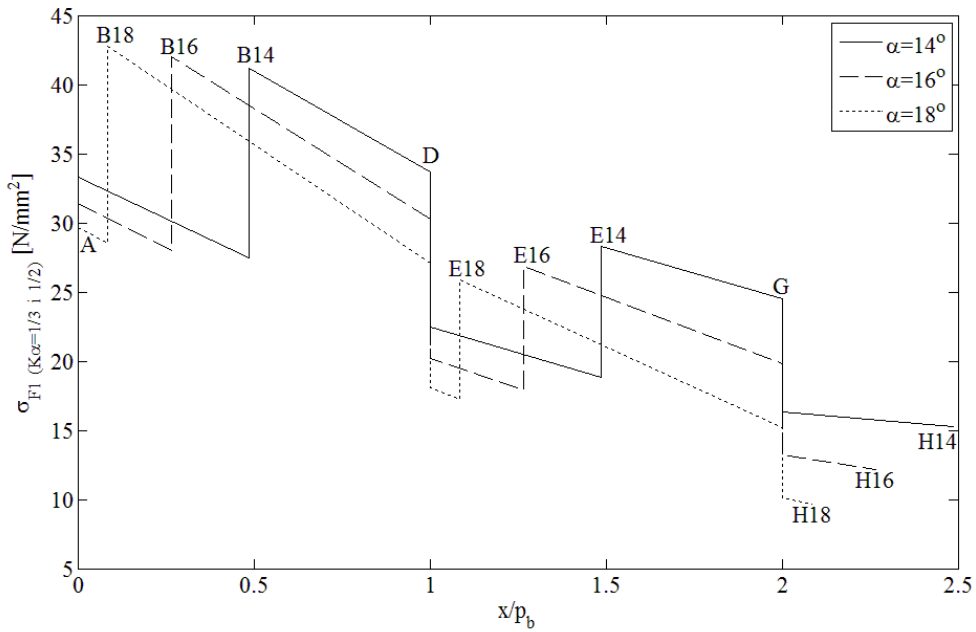
U tabeli 6.2 su prikazane vrednosti napona u korenu zupca pri ravnomernoj (idealnoj) raspodeli opterećenja kada su zupci zupčastog para urađeni sa promenom profila $x_1 = 0,3$ i $x_2 = -0,3$. Najveći napon u korenu zupca se i u ovom slučaju generiše pri dodiru spregnutih zubaca u tački B kod zubaca oba zupčanika. Pri tome, za vrednosti ugla nagiba profila zubaca alata $\alpha = 14^\circ$ i $\alpha = 16^\circ$ veće vrednosti napona se generišu u korenu zupca gonjenog zupčanika (0,7% do 3,4%) u odnosu na napon u korenu zupca pogonskog zupčanika. Za vrednost ugla nagiba profila zubaca alata $\alpha = 18^\circ$ veća vrednost napona se generiše u korenu zupca pogonskog zupčanika (1%) u odnosu na napon u korenu zupca gonjenog zupčanika. Na osnovu rezultata prikazanih u tabeli 6.2 se može konstatovati da se naponi u korenu zupca pri dodiru u tački B povećavaju sa povećanjem ugla nagiba profila zubaca alata, odnosno najveći je za ugao $\alpha = 18^\circ$ kad stepen spreznjanja profila zubaca ima najmanju vrednost. Najmanja vrednost napona se javlja za ugao $\alpha = 14^\circ$ kad stepen spreznjanja profila zubaca ima najveću vrednost. Ovo povećanje je veće kod zubaca pogonskog zupčanika (4,8%), a manje je kod zubaca gonjenog zupčanika (0,3%). Istovremeno se naponi u korenu zupca pri dodiru spregnutih profila zubaca u drugim dodirnim tačkama (A, D, E, G i H) smanjuju sa

povećanjem ugla nagiba profila zubaca alata. Kod gonjenog zupčanika napon u korenu zupca u tački D je veći od napon u korenu zupca u tački A za manje uglove nagiba profila zubaca alata i razlika je više izražena za ugao $\alpha = 14^\circ$ (6,5%), nego za $\alpha = 16^\circ$ (1,3%).

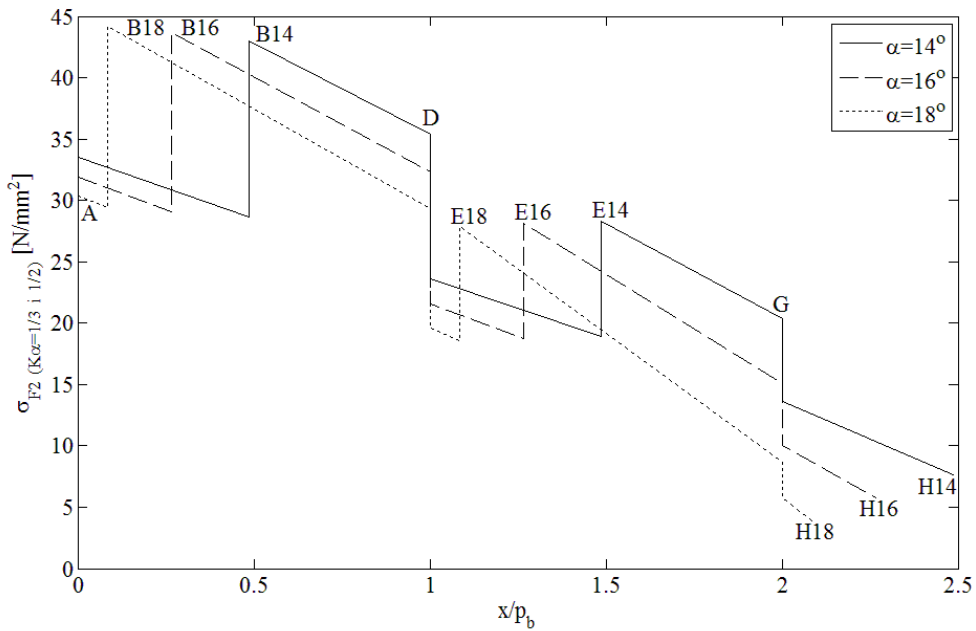
Tabela 6.2. Naponi u korenu zupca zupčastog para pri ravnomernoj (idealnoj) raspodeli opterećenja za $x_1 = 0,3$ i $x_2 = -0,3$

x_1 x_2	$\sigma_F \left[\frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \right]$	$\alpha [^\circ]$		
		14	16	18
0,3 -0,3	A ₁	32,61	30,99	29,51
	B₁	42,20	43,40	44,24
	D ₁	31,29	28,67	26,19
	E ₁	26,16	26,16	26,15
	G ₁	18,20	14,04	9,35
	H ₁	9,94	7,98	6,22
	A ₂	32,52	30,79	29,21
	B₂	43,65	43,72	43,79
	D ₂	34,63	31,19	28,02
	E ₂	29,96	28,86	28,00
	G ₂	21,53	16,31	10,84
	H ₂	11,29	9,15	7,21

Naponi u korenu zupca za koeficijente pomeranja profila zubaca $x_1 = -0,3$ i $x_2 = 0,3$ zupčastog para su prikazani u obliku dijagrama na slikama 6.5 i 6.6. Najveći napon u korenu zupca je i u ovom slučaju u tački B pri uglu nagiba profila zubaca alata $\alpha = 18^\circ$ za oba zupčanika, odnosno kad stepen sprežanja profila zubaca ima najmanju vrednost $\varepsilon_\alpha = 2,09$, tj. kad je period dvostruke sprege najveći, a trostruke najmanji. Napon u korenu zupca u tački B raste sa porastom ugla nagiba profila zubaca alata, i to kod pogonskog zupčanika 1,9% (za $\alpha = 14^\circ$ i $\alpha = 16^\circ$) i 1,7% (za $\alpha = 16^\circ$ i $\alpha = 18^\circ$) i kod gonjenog zupčanika 1,6% (za $\alpha = 14^\circ$ i $\alpha = 16^\circ$) i 1,2% (za $\alpha = 16^\circ$ i $\alpha = 18^\circ$). Naponi u korenu zupca u tački B su veći kod gonjenog zupčanika.



Slika 6.5. Napon σ_{F1} pri ravnomernoj (idealnoj) raspodeli opterećenja za $x_1 = -0,3$ i $x_2 = 0,3$ ($\varepsilon_{\alpha 14} = 2,49$, $\varepsilon_{\alpha 16} = 2,27$ i $\varepsilon_{\alpha 18} = 2,09$)



Slika 6.6. Napon σ_{F2} pri ravnomernoj (idealnoj) raspodeli opterećenja za $x_1 = -0,3$ i $x_2 = 0,3$ ($\varepsilon_{\alpha 14} = 2,49$, $\varepsilon_{\alpha 16} = 2,27$ i $\varepsilon_{\alpha 18} = 2,09$)

U tabeli 6.3 su prikazane vrednosti napona u korenu zupca pri ravnomernoj (idealnoj) raspodeli opterećenja kada su zupci zupčastog para urađeni sa promenom profila $x_1 = -0,3$ i $x_2 = 0,3$. Najveći napon u korenu zupca se i u ovom slučaju generiše pri dodiru spregnutih zubaca u tački B kod zubaca oba zupčanika. Pri tome, veće vrednosti napona se generišu u korenu zupca gonjenog zupčanika (3,4% do 4,3%) u odnosu na napon u korenu zupca pogonskog zupčanika. Na osnovu rezultata prikazanih u tabeli 6.3 se može konstatovati da se naponi u korenu zupca pri dodiru u tački B povećavaju sa povećanjem ugla nagiba profila zubaca alata, odnosno najveći je za ugao $\alpha = 18^\circ$ kad stepen sprežanja profila zubaca ima najmanju vrednost. Najmanja vrednost napona se javlja za ugao $\alpha = 14^\circ$ kad stepen sprežanja profila zubaca ima najveću vrednost. Ovo povećanje je veće kod zubaca pogonskog zupčanika (3,7%), a manje je kod zubaca gonjenog zupčanika (2,8%). Istovremeno se naponi u korenu zupca pri dodiru spregnutih profila zubaca u drugim dodirnim tačkama (A, D, E, G i H) smanjuju sa povećanjem ugla nagiba profila zubaca alata. Kod pogonskog zupčanika napon u korenu zupca u tački D je veći od napon u korenu zupca u tački A za ugao nagiba profila zubaca alata $\alpha = 14^\circ$ (1,1%). Kod gonjenog zupčanika napon u korenu zupca u tački D je veći od napon u korenu zupca u tački A za manje uglove nagiba profila zubaca alata i razlika je više izražena za ugao $\alpha = 14^\circ$ (5,6%), nego za $\alpha = 16^\circ$ (1,2%).

Tabela 6.3. Naponi u korenu zupca zupčastog para pri ravnomernoj (idealnoj) raspodeli opterećenja za $x_1 = -0,3$ i $x_2 = 0,3$

x_1 x_2	$\sigma_F \left[\frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \right]$	$\alpha [^\circ]$		
		14	16	18
-0,3 0,3	A ₁	33,31	31,38	29,62
	B₁	41,21	42,01	42,73
	D ₁	33,69	30,27	27,11
	E ₁	28,30	26,83	25,86
	G ₁	24,51	19,79	15,22
	H ₁	15,25	12,13	9,65
	A ₂	33,55	31,90	30,38
	B₂	42,97	43,66	44,18
	D ₂	35,42	32,29	29,37
	E ₂	28,31	28,10	27,92
	G ₂	20,39	15,04	8,68
	H ₂	7,67	5,79	3,89

Najveći napon u korenu zupca pri ravnomernoj (idealnoj) raspodeli opterećenja je u tački B pri uglu nagiba profila zubaca alata $\alpha = 18^\circ$, odnosno kad stepen sprežanja profila zubaca ima najmanju vrednost ($\varepsilon_\alpha = 2$ do $\varepsilon_\alpha = 2,09$) u zavisnosti od koeficijenta pomeranja profila zubaca. U svim drugim tačkama primopredaje opterećenja pre (A) i posle (D, E, G i H) tačke B je veći napon u korenu zupca za uglove nagiba profila zubaca alata $\alpha = 14^\circ$ i $\alpha = 16^\circ$, nego za $\alpha = 18^\circ$, što je prikazano u tabeli 6.4 za sve razmatrane slučajeve ravnomerne (idealne) raspodele opterećenja.

Najveći srednji (aritmetički) napon u korenu zupca u tački B ima zupčasti par sa koeficijentima pomeranja profila zubaca $x_1 = 0,3$ i $x_2 = -0,3$ (slike 6.3 i 6.4), jer pri uglu nagiba profila zubaca alata $\alpha = 18^\circ$ stepen sprežanja profila zubaca ima najmanju vrednost $\varepsilon_\alpha = 2$, odnosno teži ka konstantnoj dvostrukoj sprezi zubaca.

Veći gradijent opadanja napona u korenu zupca od tačke A do tačke H je više izražen kod gonjenog, nego kod pogonskog zupčanika, a najizraženiji je pri uglu nagiba profila zubaca alata $\alpha = 18^\circ$ za oba zupčanika.

Da bi napon u korenu zupca u najopterećenijoj tački B bio što manji, pri ovoj raspodeli opterećenja ($K_{\alpha X} = 1/3$ za trostruku spregu i $K_{\alpha X} = 1/2$ za dvostruku spregu) na istovremeno spregnute parove zubaca, potrebno je da ugao nagiba profila zubaca alata bude što manji i da u kombinaciji sa odgovarajućim koeficijentima pomeranja profila zubaca daju što veći stepen sprežanja profila zubaca.

Tabela 6.4. Naponi u korenu zupca zupčastog para pri ravnomernoj (idealnoj) raspodeli opterećenja

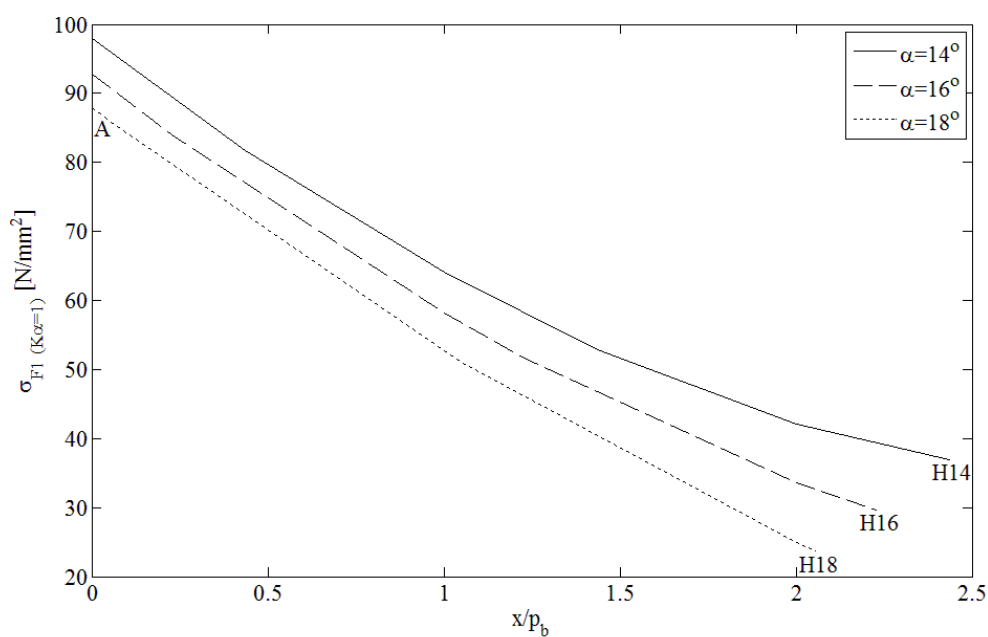
x_1 x_2	$\sigma_F \left[\frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \right]$	$\alpha [^\circ]$		
		14	16	18
0 0	A ₁	32,66	30,92	29,33
	B₁	40,89	42,02	42,91
	D ₁	32,01	29,08	26,32
	E ₁	26,44	25,84	25,47
	G ₁	21,04	16,81	12,47
	H ₁	12,31	9,90	7,88
	A ₂	33,02	31,33	29,79
	B₂	43,05	43,47	43,80
	D ₂	35,00	31,73	28,70
	E ₂	28,93	28,31	27,81
	G ₂	21,00	15,78	9,98
	H ₂	9,59	7,61	5,72
0,3 -0,3	A ₁	32,61	30,99	29,51
	B₁	42,20	43,40	44,24
	D ₁	31,29	28,67	26,19
	E ₁	26,16	26,16	26,15
	G ₁	18,20	14,04	9,35
	H ₁	9,94	7,98	6,22
	A ₂	32,52	30,79	29,21
	B₂	43,65	43,72	43,79
	D ₂	34,63	31,19	28,02
	E ₂	29,96	28,86	28,00
	G ₂	21,53	16,31	10,84
	H ₂	11,29	9,15	7,21
-0,3 0,3	A ₁	33,31	31,38	29,62
	B₁	41,21	42,01	42,73
	D ₁	33,69	30,27	27,11
	E ₁	28,30	26,83	25,86
	G ₁	24,51	19,79	15,22
	H ₁	15,25	12,13	9,65
	A ₂	33,55	31,90	30,38
	B₂	42,97	43,66	44,18
	D ₂	35,42	32,29	29,37
	E ₂	28,31	28,10	27,92
	G ₂	20,39	15,04	8,68
	H ₂	7,67	5,79	3,89

6.2. IZRAZITO NERAVNOMERNA RASPODELA OPTEREĆENJA

Izrazito neravnomerna raspodela opterećenja nastaje kada pri nedovoljnom intezitetu opterećenja elastične deformacije istovremeno spregnutih parova zubaca ne mogu da ponište razlike osnovnih koraka, pa tada faktor raspodele opterećenja ima vrednosti $K_{\alpha X} = 0$ i $K_{\alpha X} = 1$, što je detaljno opisano u poglavlju 5.

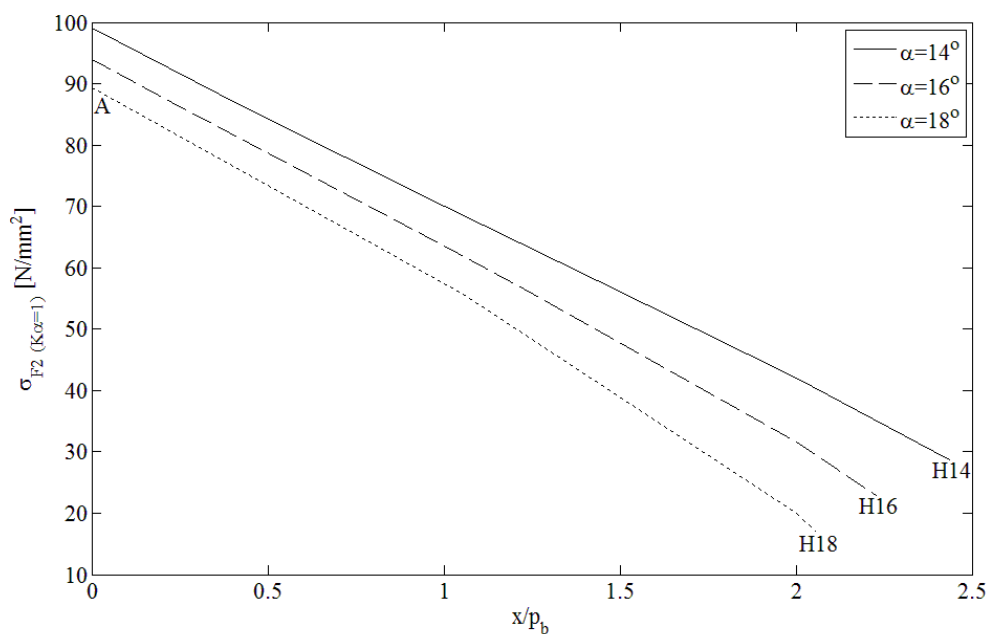
Tok promene napona u korenu zupca u zavisnosti od položaja tačke dodira na profilu zupca pri graničnoj izrazito neravnomernoj raspodeli opterećenja na istovremeno spregnute parove zubaca, kada je vrednost faktora raspodele opterećenja samo $K_{\alpha X} = 1$, odnosno kada se ukupno opterećenje prenosi preko jednog para zubaca, je prikazan u obliku dijagrama na slikama 6.7 do 6.12, za uglove nagiba profila zubaca alata $\alpha = 14^\circ$, $\alpha = 16^\circ$, $\alpha = 18^\circ$ i različite vrednosti koeficijenata pomeranja profila zubaca.

Naponi u korenu zupca za koeficijente pomeranja profila zubaca $x_1 = x_2 = 0$ zupčastog para su prikazani u obliku dijagrama na slikama 6.7 i 6.8. Najveći napon u korenu zupca je u tački A pri uglu nagiba profila zubaca alata $\alpha = 14^\circ$ za oba zupčanika, odnosno kad stepen sprežanja profila zubaca ima najveću vrednost $\varepsilon_\alpha = 2,44$, tj. kad je period trostruke sprege neznatno manji od dvostruke. Napon u korenu zupca u tački A raste sa opadanjem ugla nagiba profila zubaca alata, i to kod pogonskog zupčanika 5,6% (za $\alpha = 14^\circ$ i $\alpha = 16^\circ$) i 5,4% (za $\alpha = 16^\circ$ i $\alpha = 18^\circ$) i kod gonjenog zupčanika 5,4% (za $\alpha = 14^\circ$ i $\alpha = 16^\circ$) i 5,2% (za $\alpha = 16^\circ$ i $\alpha = 18^\circ$). Naponi u korenu zupca u tački A su veći kod gonjenog zupčanika.



Slika 6.7. Naponi σ_{F1} kada se ukupno opterećenje prenosi preko jednog para zubaca

za $x_1 = x_2 = 0$ ($\varepsilon_{\alpha14} = 2,44$, $\varepsilon_{\alpha16} = 2,23$ i $\varepsilon_{\alpha18} = 2,05$)



Slika 6.8. Naponi σ_{F2} kada se ukupno opterećenje prenosi preko jednog para zubaca

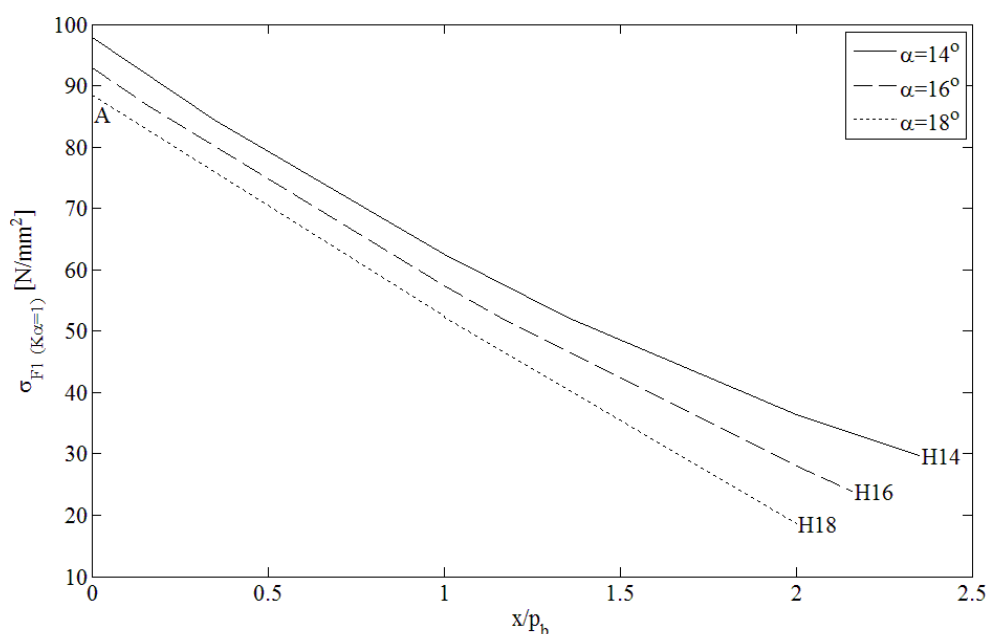
za $x_1 = x_2 = 0$ ($\varepsilon_{\alpha14} = 2,44$, $\varepsilon_{\alpha16} = 2,23$ i $\varepsilon_{\alpha18} = 2,05$)

U tabeli 6.5 su prikazane vrednosti napona u korenu zupca pri izrazito neravnomernoj raspodeli opterećenja kada se ukupno opterećenje prenosi preko jednog para zubaca i kada su zupci zupčastog para urađeni bez promene profila $x_1 = x_2 = 0$. Najveći napon u korenu zupca se generiše pri dodiru spregnutih zubaca u tački A kod zubaca oba zupčanika. Pri tome, veće vrednosti napona se generišu u korenu zupca gonjenog zupčanika (1,1% do 1,6%) u odnosu na napon u korenu zupca pogonskog zupčanika. Na osnovu rezultata prikazanih u tabeli 6.5 se može konstatovati da se naponi u korenu zupca pri dodiru u tački A povećavaju sa smanjenjem ugla nagiba profila zubaca alata, odnosno najveći je za ugao $\alpha = 14^\circ$ kad stepen sprežanja profila zubaca ima najveću vrednost. Najmanja vrednost napona se javlja za ugao $\alpha = 18^\circ$ kad stepen sprežanja profila zubaca ima najmanju vrednost. Ovo povećanje je veće kod zubaca pogonskog zupčanika (11,4%), a manje je kod zubaca gonjenog zupčanika (10,8%). Takođe se naponi u korenu zupca pri dodiru spregnutih profila zubaca u drugim dodirnim tačkama (D, E, G i H) povećavaju sa smanjenjem ugla nagiba profila zubaca alata. Istovremeno se naponi u korenu zupca u tački B povećavaju sa povećanjem ugla nagiba profila zubaca alata.

Tabela 6.5. Naponi u korenu zupca zupčastog para kada se ukupno opterećenje prenosi preko jednog para zubaca za $x_1 = x_2 = 0$

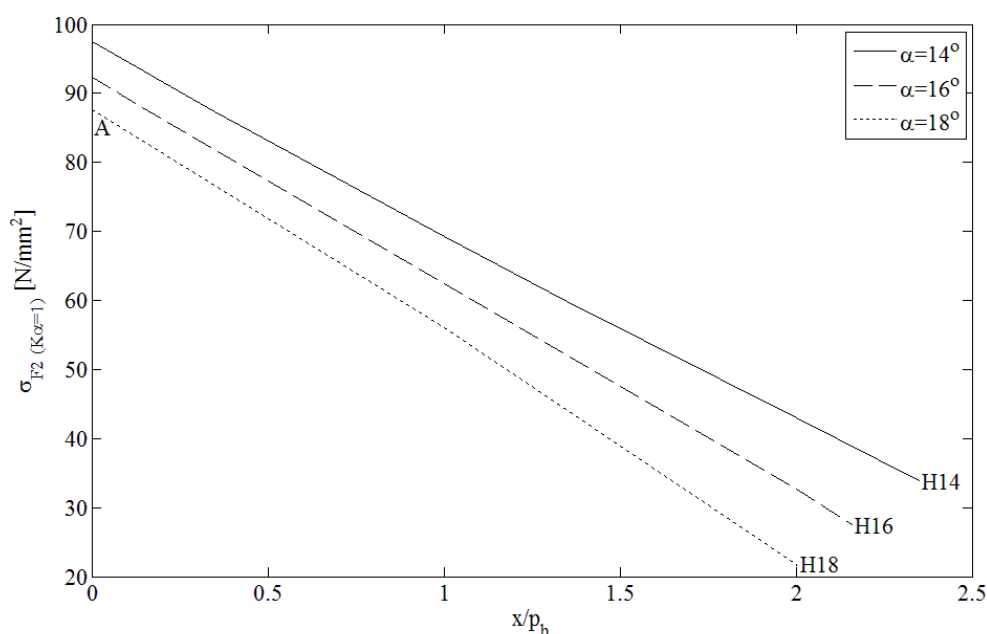
x_1 x_2	$\sigma_F \left[\frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \right]$	$\alpha [^\circ]$		
		14	16	18
0 0	A₁	97,97	92,75	87,98
	B ₁	81,78	84,05	85,83
	D ₁	64,03	58,15	52,64
	E ₁	52,88	51,68	50,94
	G ₁	42,07	33,63	24,94
	H ₁	36,92	29,70	23,65
	A₂	99,05	93,99	89,36
	B ₂	86,11	86,95	87,60
	D ₂	70,01	63,46	57,40
	E ₂	57,87	56,61	55,62
	G ₂	41,99	31,56	19,96
	H ₂	28,78	22,82	17,17

Naponi u korenu zupca za koeficijente pomeranja profila zubaca $x_1 = 0,3$ i $x_2 = -0,3$ zupčastog para su prikazani u obliku dijagrama na slikama 6.9 i 6.10. Najveći napon u korenu zupca je i u ovom slučaju u tački A pri uglu nagiba profila zubaca alata $\alpha = 14^\circ$ za oba zupčanika, odnosno kad stepen sprezanja profila zubaca ima najveću vrednost $\varepsilon_\alpha = 2,35$, tj. kad je period trostruke sprege malo manji od dvostruke. Napon u korenu zupca u tački A raste sa opadanjem ugla nagiba profila zubaca alata, i to kod pogonskog zupčanika 5,2% (za $\alpha = 14^\circ$ i $\alpha = 16^\circ$) i 5% (za $\alpha = 16^\circ$ i $\alpha = 18^\circ$) i kod gonjenog zupčanika 5,6% (za $\alpha = 14^\circ$ i $\alpha = 16^\circ$) i 5,4% (za $\alpha = 16^\circ$ i $\alpha = 18^\circ$). Naponi u korenu zupca u tački A su veći kod pogonskog zupčanika.



Slika 6.9. Naponi σ_{F1} kada se ukupno opterećenje prenosi preko jednog para zubaca

za $x_1 = 0,3$ i $x_2 = -0,3$ ($\varepsilon_{\alpha 14} = 2,35$, $\varepsilon_{\alpha 16} = 2,16$ i $\varepsilon_{\alpha 18} = 2$)



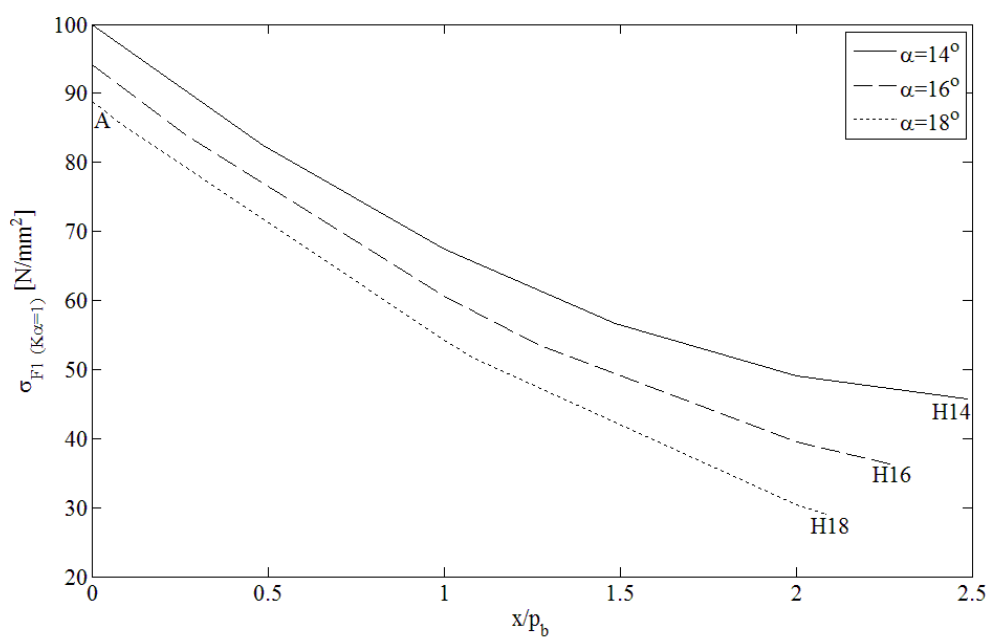
Slika 6.10. Naponi σ_{F2} kada se ukupno opterećenje prenosi preko jednog para zubaca za $x_1 = 0,3$ i $x_2 = -0,3$ ($\varepsilon_{\alpha 14} = 2,35$, $\varepsilon_{\alpha 16} = 2,16$ i $\varepsilon_{\alpha 18} = 2$)

U tabeli 6.6 su prikazane vrednosti napona u korenu zupca pri izrazito neravnomernoj raspodeli opterećenja kada se ukupno opterećenje prenosi preko jednog para zubaca i kada su zupci zupčastog para urađeni sa promenom profila $x_1 = 0,3$ i $x_2 = -0,3$. Najveći napon u korenu zupca se i u ovom slučaju generiše pri dodiru spregnutih zubaca u tački A kod zubaca oba zupčanika. Pri tome, veće vrednosti napona se generišu u korenu zupca pogonskog zupčanika (0,3% do 1%) u odnosu na napon u korenu zupca gonjenog zupčanika. Na osnovu rezultata prikazanih u tabeli 6.6 se može konstatovati da se naponi u korenu zupca pri dodiru u tački A povećavaju sa smanjenjem ugla nagiba profila zubaca alata, odnosno najveći je za ugao $\alpha = 14^\circ$ kad stepen sprežanja profila zubaca ima najveću vrednost. Najmanja vrednost napona se javlja za ugao $\alpha = 18^\circ$ kad stepen sprežanja profila zubaca ima najmanju vrednost. Ovo povećanje je veće kod zubaca gonjenog zupčanika (11,4%), a manje je kod zubaca pogonskog zupčanika (10,5%). Takođe se naponi u korenu zupca pri dodiru spregnutih profila zubaca u drugim dodirnim tačkama (D, E, G i H) povećavaju sa smanjenjem ugla nagiba profila zubaca alata. Istovremeno se naponi u korenu zupca u tački B povećavaju sa povećanjem ugla nagiba profila zubaca alata.

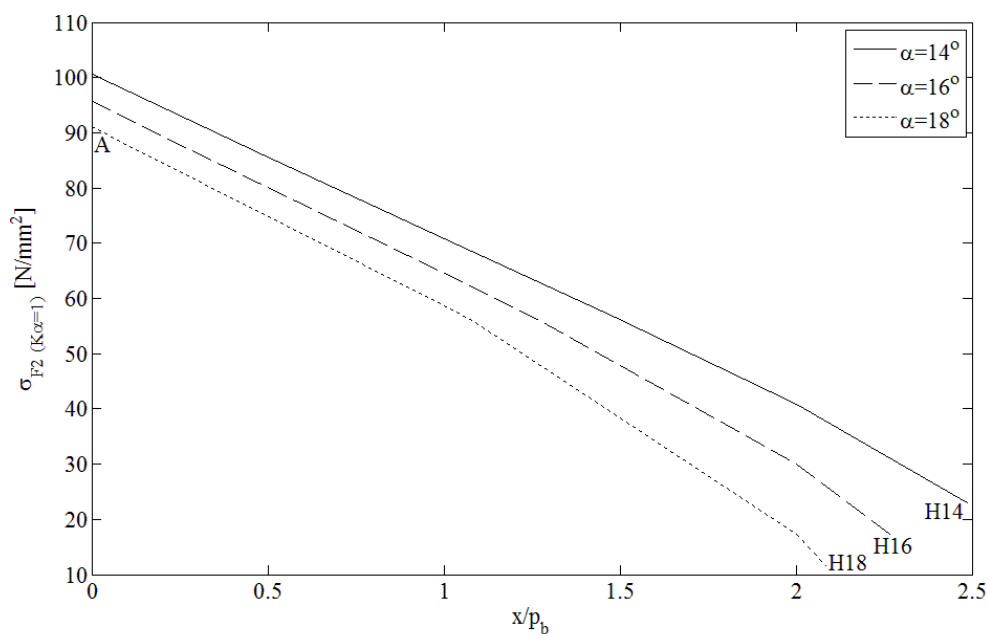
Tabela 6.6. Naponi u korenu zupca zupčastog para kada se ukupno opterećenje prenosi preko jednog para zubaca za $x_1 = 0,3$ i $x_2 = -0,3$

x_1 x_2	$\sigma_F \left[\frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \right]$	$\alpha [^\circ]$		
		14	16	18
0,3 -0,3	A₁	97,84	92,98	88,53
	B ₁	84,41	86,79	88,49
	D ₁	62,57	57,34	52,38
	E ₁	52,32	52,31	52,30
	G ₁	36,41	28,08	18,70
	H ₁	29,81	23,95	18,66
	A₂	97,57	92,36	87,62
	B ₂	87,31	87,45	87,59
	D ₂	69,27	62,37	56,04
	E ₂	59,92	57,73	56,01
	G ₂	43,05	32,62	21,68
	H ₂	33,88	27,46	21,64

Naponi u korenu zupca za koeficijente pomeranja profila zubaca $x_1 = -0,3$ i $x_2 = 0,3$ zupčastog para su prikazani u obliku dijagrama na slikama 6.11 i 6.12. Najveći napon u korenu zupca je i u ovom slučaju u tački A pri uglu nagiba profila zubaca alata $\alpha = 14^\circ$ za oba zupčanika, odnosno kad stepen sprežanja profila zubaca ima najveću vrednost $\varepsilon_\alpha = 2,49$ tj. kad su periodi trostruke i dvostruke sprege skoro isti. Napon u korenu zupca u tački A raste sa opadanjem ugla nagiba profila zubaca alata, i to kod pogonskog zupčanika 6,2% (za $\alpha = 14^\circ$ i $\alpha = 16^\circ$) i 5,9% (za $\alpha = 16^\circ$ i $\alpha = 18^\circ$) i kod gonjenog zupčanika 5,2% (za $\alpha = 14^\circ$ i $\alpha = 16^\circ$) i 5% (za $\alpha = 16^\circ$ i $\alpha = 18^\circ$). Naponi u korenu zupca u tački A su veći kod gonjenog zupčanika.



Slika 6.11. Naponi σ_{F1} kada se ukupno opterećenje prenosi preko jednog para zubaca za $x_1 = -0,3$ i $x_2 = 0,3$ ($\varepsilon_{\alpha 14} = 2,49$, $\varepsilon_{\alpha 16} = 2,27$ i $\varepsilon_{\alpha 18} = 2,09$)



Slika 6.12. Naponi σ_{F2} kada se ukupno opterećenje prenosi preko jednog para zubaca za $x_1 = -0,3$ i $x_2 = 0,3$ ($\varepsilon_{\alpha 14} = 2,49$, $\varepsilon_{\alpha 16} = 2,27$ i $\varepsilon_{\alpha 18} = 2,09$)

U tabeli 6.7 su prikazane vrednosti napona u korenu zupca pri izrazito neravnomernoj raspodeli opterećenja kada se ukupno opterećenje prenosi preko jednog para zubaca i kada su zupci zupčastog para urađeni sa promenom profila $x_1 = -0,3$ i $x_2 = 0,3$. Najveći napon u korenu zupca se i u ovom slučaju generiše pri dodiru spregnutih zubaca u tački A kod zubaca oba zupčanika. Pri tome, veće vrednosti napona se generišu u korenu zupca gonjenog zupčanika (0,7% do 2,6%) u odnosu na napon u korenu zupca pogonskog zupčanika. Na osnovu rezultata prikazanih u tabeli 6.7 se može konstatovati da se naponi u korenu zupca pri dodiru u tački A povećavaju sa smanjenjem ugla nagiba profila zubaca alata, odnosno najveći je za ugao $\alpha = 14^\circ$ kad stepen sprežanja profila zubaca ima najveću vrednost. Najmanja vrednost napona se javlja za ugao $\alpha = 18^\circ$ kad stepen sprežanja profila zubaca ima najmanju vrednost. Ovo povećanje je veće kod zubaca pogonskog zupčanika (12,4%), a manje je kod zubaca gonjenog zupčanika (10,4%). Takođe se naponi u korenu zupca pri dodiru spregnutih profila zubaca u drugim dodirnim tačkama (D, E, G i H) povećavaju sa smanjenjem ugla nagiba profila zubaca alata. Istovremeno se naponi u korenu zupca u tački B povećavaju sa povećanjem ugla nagiba profila zubaca alata.

Tabela 6.7. Naponi u korenu zupca zupčastog para kada se ukupno opterećenje prenosi preko jednog para zubaca za $x_1 = -0,3$ i $x_2 = 0,3$

x_1 x_2	$\sigma_F \left[\frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \right]$	$\alpha [^\circ]$		
		14	16	18
-0,3 0,3	A₁	99,93	94,13	88,87
	B ₁	82,42	84,02	85,47
	D ₁	67,39	60,53	54,28
	E ₁	56,59	53,66	51,73
	G ₁	49,03	39,58	30,44
	H ₁	45,75	36,39	28,96
	A₂	100,64	95,69	91,14
	B ₂	85,94	87,33	88,35
	D ₂	70,84	64,58	58,73
	E ₂	56,62	56,20	55,84
	G ₂	40,78	30,08	17,37
	H ₂	23,02	17,36	11,68

Najveći napon u korenu zupca pri izrazito neravnomernoj raspodeli opterećenja kada se ukupno opterećenje prenosi preko jednog para zubaca je u tački A pri uglu nagiba profila zubaca alata $\alpha = 14^\circ$, odnosno kad stepen sprežanja profila zubaca ima najveću vrednost ($\varepsilon_\alpha = 2,35$ do $\varepsilon_\alpha = 2,49$) u zavisnosti od koeficijenata pomeranja profila zubaca. I u ostalim tačkama (D, E, G i H) primopredaje opterećenja, osim u tački B, je veći napon u korenu zupca za ugao nagiba profila zubaca alata $\alpha = 14^\circ$, nego za $\alpha = 16^\circ$ i $\alpha = 18^\circ$, što je prikazano u tabeli 6.8 za sve razmatrane slučajeve pri izrazito neravnomernoj raspodeli opterećenja kada se ukupno opterećenje prenosi preko jednog para zubaca.

Najveći srednji (aritmetički) napon u korenu zupca u tački A ima zupčasti par sa koeficijentima pomeranja profila zubaca $x_1 = -0,3$ i $x_2 = 0,3$ (slike 6.11 i 6.12), jer pri uglu nagiba profila zubaca alata $\alpha = 14^\circ$ stepen sprežanja profila zubaca ima najveću vrednost $\varepsilon_\alpha = 2,49$, odnosno teži trostrukoj sprezi zubaca.

I ovde je veći gradijent opadanja napona u korenu zupca od tačke A do tačke H više izražen kod gonjenog, nego kod pogonskog zupčanika, i takođe pri uglu nagiba profila zubaca alata $\alpha = 18^\circ$.

Da bi napon u korenu zupca u najopterećenijoj tački A bio što manji, u slučaju izrazito neravnomerne raspodele opterećenja kada se ukupno opterećenje prenosi preko jednog para zubaca ($K_{\alpha X} = 1$), potrebno je da ugao nagiba profila zubaca alata bude što veći i da u kombinaciji sa odgovarajućim koeficijentima pomeranja profila zubaca daju što manji stepen sprežanja profila zubaca.

Tabela 6.8. Naponi u korenu zupca zupčastog para kada se ukupno opterećenje prenosi preko jednog para zubaca

x_1 x_2	$\sigma_F \left[\frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \right]$	$\alpha [^\circ]$		
		14	16	18
0 0	A₁	97,97	92,75	87,98
	B ₁	81,78	84,05	85,83
	D ₁	64,03	58,15	52,64
	E ₁	52,88	51,68	50,94
	G ₁	42,07	33,63	24,94
	H ₁	36,92	29,70	23,65
	A₂	99,05	93,99	89,36
	B ₂	86,11	86,95	87,60
	D ₂	70,01	63,46	57,40
	E ₂	57,87	56,61	55,62
	G ₂	41,99	31,56	19,96
	H ₂	28,78	22,82	17,17
0,3 -0,3	A₁	97,84	92,98	88,53
	B ₁	84,41	86,79	88,49
	D ₁	62,57	57,34	52,38
	E ₁	52,32	52,31	52,30
	G ₁	36,41	28,08	18,70
	H ₁	29,81	23,95	18,66
	A₂	97,57	92,36	87,62
	B ₂	87,31	87,45	87,59
	D ₂	69,27	62,37	56,04
	E ₂	59,92	57,73	56,01
	G ₂	43,05	32,62	21,68
	H ₂	33,88	27,46	21,64
-0,3 0,3	A₁	99,93	94,13	88,87
	B ₁	82,42	84,02	85,47
	D ₁	67,39	60,53	54,28
	E ₁	56,59	53,66	51,73
	G ₁	49,03	39,58	30,44
	H ₁	45,75	36,39	28,96
	A₂	100,64	95,69	91,14
	B ₂	85,94	87,33	88,35
	D ₂	70,84	64,58	58,73
	E ₂	56,62	56,20	55,84
	G ₂	40,78	30,08	17,37
	H ₂	23,02	17,36	11,68

Samo se napon u korenu zupca pri dodiru u tački B povećava sa povećanjem ugla nagiba profila zubaca alata od $\alpha = 14^\circ$ do $\alpha = 18^\circ$. U svim ostalim tačkama dodira napon u korenu zupca se smanjuje sa povećanjem ugla nagiba profila zubaca alata od $\alpha = 14^\circ$ do $\alpha = 18^\circ$. Najveća promena napona u korenu zupca sa promenom ugla nagiba profila zubaca alata od $\alpha = 14^\circ$ do $\alpha = 18^\circ$ nastaje kada se spregnuti profili zubaca dodiruju u tačkama G (61,1% do 134,8%) i H (56,1% do 97,1%).

6.3. UPOREDNA ANALIZA NAPONSKOG STANJA U KORENU ZUPCA U USLOVIMA GRANIČNE RASPODELE OPTEREĆENJA

Na osnovu analiza u prethodnim poglavljima 6.1 i 6.2 je pokazano da se u uslovima granične raspodele opterećenja najveći napon u korenu zupca generiše pri dodiru u tačkama A i B. Saglasno tome razmatran je odnos napona u korenu zupca u tačkama primopredaje opterećenja A i B, kada se manjaju uglovi nagiba profila zubaca alata i koeficijenti pomeranja profila zubaca za svaku navedenu tačku (tabele 6.9 i 6.10).

Razlika napona u korenu zupca je veća između uglova nagiba profila zubaca alata $\alpha = 14^\circ$ i $\alpha = 16^\circ$ (5,2% do 6,2% u tački A i 0,2% do 2,8% u tački B), nego između uglova nagiba profila zubaca alata $\alpha = 16^\circ$ i $\alpha = 18^\circ$ (5% do 5,9% u tački A i 0,2% do 2,1% u tački B). U tački A je mnogo veća razlika između napona u korenu zupca (5% do 12,4%), nego u tački B (0,2% do 4,9%). Prikazani odnos napona u korenu zupca u tačkama primopredaje opterećenja A i B je isti i za ravnomernu (idealnu) raspodelu opterećenja i za izrazito neravnomernu raspodelu opterećenja kada se ukupno opterećenje prenosi preko jednog para zubaca (tabele 6.9 i 6.10).

Tabela 6.9. Odnos napona u korenu zupca u tački A prema uglovima nagiba profila zubaca alata

x_1 x_2	Zupčanik	$\frac{\sigma_{F14} - \sigma_{F16}}{\sigma_{F16}} [\%]$	$\frac{\sigma_{F16} - \sigma_{F18}}{\sigma_{F18}} [\%]$	$\frac{\sigma_{F14} - \sigma_{F18}}{\sigma_{F18}} [\%]$
0	1	5,6	5,4	11,4
0	2	5,4	5,2	10,8
0,3	1	5,2	5	10,5
-0,3	2	5,6	5,4	11,4
-0,3	1	6,2	5,9	12,4
0,3	2	5,2	5	10,4

Tabela 6.10. Odnos napona u korenu zupca u tački B prema uglovima nagiba profila zubaca alata

x_1 x_2	Zupčanik	$\frac{\sigma_{F16} - \sigma_{F14}}{\sigma_{F14}} [\%]$	$\frac{\sigma_{F18} - \sigma_{F16}}{\sigma_{F16}} [\%]$	$\frac{\sigma_{F18} - \sigma_{F14}}{\sigma_{F14}} [\%]$
0	1	2,8	2,1	4,9
0	2	1	0,8	1,7
0,3	1	2,8	1,9	4,8
-0,3	2	0,2	0,2	0,3
-0,3	1	1,9	1,7	3,7
0,3	2	1,6	1,2	2,8

7. UPOREDNA ANALIZA NAPONSKOG STANJA U KORENU ZUPCA PREMA ANALITIČKOM MODELU I KONVENCIONALNIM METODAMA

Konvencionalne metode proračuna nosivosti korena zubaca zupčastih parova razvijene u međunarodnom ISO standardu imaju najveći stepen zastupljenosti. Prema ISO standardu prvo su bile razvijene tri metode „A“, „B“ i „C“. Metoda „C“ je bila približna i primenjivala se u prethodnom proračunu. Kasnije je metoda „C“ izostavljena i sada su u primeni samo dve metode „A“ i „B“ [1,2]. Metoda „A“ je zasnovana na eksperimentalnim rezultatima i primeni metode konačnih elemenata. Veći domen primene ima metoda „B“, za koju ISO standard navodi smernice o toku proračuna. Metoda „B“ je pogodna za opšti proračun, a takođe je pogodna i za programiranje. Prema ovoj metodi opšti izraz za određivanje napona u korenu zupca je izveden za slučaj kada opterećenje deluje u spoljašnjoj tački jednostruke sprege zubaca (tačka B). Prema ovoj metodi napon u korenu zupca se određuje prema izrazu:

$$\sigma_F = \sigma_0 \cdot K_{F\alpha} \cdot Y_{FB} \cdot Y_{SB}, \quad (7.1)$$

gde su:

$K_{F\alpha}$ – poprečni faktor opterećenja,

Y_{FB} – faktor oblika zupca u spoljašnjoj tački jednostruke sprege,

Y_{SB} – faktor korekcije napona u spoljašnjoj tački jednostruke sprege.

Kada se uvrste veličine koje ne zavise od položaja tačke dodira na profilu zupca, dobija se izraz za deo napona koji je konstantan u toku dodirnog perioda:

$$\sigma_0 = K \cdot \frac{F_t}{b \cdot m_n} \cdot Y, \quad (7.2)$$

gde su:

$$K = K_A \cdot K_V \cdot K_{F\beta}, \quad (7.3)$$

$$Y = Y_\beta \cdot Y_B \cdot Y_{DT}. \quad (7.4)$$

Kod višestruke sprege zubaca, kada se u toku dodirnog perioda zubaca smenjuju dvostruka i trostruka sprega ($2 \leq \varepsilon_\alpha \leq 3$), zona jednostruke sprege ne postoji. Izuzetno se može pojaviti kod izrazito neravnomerne raspodele opterećenja ($K_{\alpha X} = 1$).

Za poprečni faktor opterećenja ISO standard u svom predlogu daje iste izraze za određivanje (minimalne i maksimalne) granične vrednosti za slučaj kada se u toku dodirnog perioda zubaca smenjuju jednostruka i dvostruka sprega ($1 \leq \varepsilon_\alpha \leq 2$) i za višestruku spregu zubaca kada se smenjuju dvostruka i trostruka sprega ($2 \leq \varepsilon_\alpha \leq 3$), i to:

$$K_{F\alpha \min} = 1, \quad (7.5)$$

$$K_{F\alpha \max} = \frac{\varepsilon_\alpha}{0,25 \cdot \varepsilon_\alpha + 0,75}. \quad (7.6)$$

U svom predlogu ISO standard ne daje detaljan tok proračuna napona u korenu zupca pri višestrukoj sprezi zubaca kada se smenjuju dvostruka i trostruka sprega, već samo navodi da je kod zupčanika koji imaju stepen sprezanja profila zubaca u opsegu $2 \leq \varepsilon_\alpha < 2,5$ određivanje napona u korenu zupca merodavno opterećenje koje deluje u unutrašnjoj tački trostruke sprege. Pri tome se ne navodi koja tačka tačno predstavlja unutrašnju tačku trostruke sprege. ISO standard u predlogu ne navodi ništa o karakteru raspodele opterećenja, već samo da se radi o zupčanicima sa visokom tačnošću izrade, pa se stiče utisak da se pod tim podrazumeva da je ispunjen uslov za ravnomernu raspodelu opterećenja.

Prema ISO standardu proračun napona u korenu zupca pri višestrukoj sprezi zubaca kada se smenjuju dvostruka i trostruka sprega ($2 \leq \varepsilon_\alpha \leq 3$) se sprovodi saglasno izrazu (7.1). Isti izraz se koristi i za određivanje napona u korenu zupca kao kada se u toku dodirnog perioda zubaca smenjuju jednostruka i dvostruka sprega ($1 \leq \varepsilon_\alpha \leq 2$).

U ovom poglavlju je analizirano naponsko stanje u korenu zupca prema analitičkom tačnom modelu razvijenom u ovoj doktorskoj disertaciji saglasno izrazu (5.1). Takođe su analizirani naponi u korenu zupca prema metodi „B^c ISO standarda na osnovu izraza (7.1), koristeći izraz (7.6) za poprečni faktor opterećenja. Obe analize su sprovedene za izrazito neravnomernu raspodelu opterećenja kada se ukupno opterećenje prenosi preko jednog para zubaca.

Analizirani su naponi u korenu zupca zupčastih parova sa brojem zubaca $z_1 = 52$, $z_2 = 156$, standardnim modulom $m_n = 5$ mm, različitim uglovima nagiba profila zubaca alata i koeficijentima pomeranja profila zubaca, pri ukupnom opterećenju $F = 10$ kN.

Vrednosti napona u korenu zupca prema analitičkom tačnom modelu (5.1) su prikazane u poglavlju 6 u tabeli 6.8.

Vrednosti napona u korenu zupca prema metodi „B^c ISO standarda (7.1), koristeći izraz (7.6) za poprečni faktor opterećenja, su prikazane u tabeli 7.1.

Tabela 7.1. Naponi u korenu zupca prema metodi „B^c ISO standarda (7.1) koristeći izraz (7.6) za poprečni faktor opterećenja

x_1 x_2	$\sigma_F \left[\frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \right]$	$\alpha [^\circ]$		
		14	16	18
0	A ₁	175,60	158,04	143,05
0	A ₂	177,54	160,16	145,30
0,3	A ₁	171,95	155,66	141,68
-0,3	A ₂	171,47	154,62	140,23
-0,3	A ₁	181,15	162,03	145,81
0,3	A ₂	182,44	164,70	149,53

Odnosi napona prema analitičkom tačnom modelu (5.1) i metodi „B^c ISO standarda (7.1) koristeći izraz (7.6) za poprečni faktor opterećenja, su prikazani u tabeli 7.2. U poređenju prema analitičkom tačnom modelu, napon u korenu zupca zupčastih parova prema metodi „B^c ISO standarda je veći, za koeficijente pomeranja profila zubaca:

- $x_1 = x_2 = 0$, od 62,6% (za $\alpha = 18^\circ$ i $\varepsilon_\alpha = 2,05$) do 79,2% (za $\alpha = 14^\circ$ i $\varepsilon_\alpha = 2,44$);
- $x_1 = 0,3$ i $x_2 = -0,3$, od 60% (za $\alpha = 18^\circ$ i $\varepsilon_\alpha = 2$) do 75,7% (za $\alpha = 14^\circ$ i $\varepsilon_\alpha = 2,35$). Ovi zupčasti parovi u odnosu na zupčaste parove sa koeficijentima pomeranja profila zubaca $x_1 = x_2 = 0$ imaju manje razlike između napona u korenu zupca prema analitičkom tačnom modelu i metodi „B^c ISO standarda, jer imaju manje stepene sprežanja profila zubaca za iste uglove nagiba profila zubaca alata;
- $x_1 = -0,3$ i $x_2 = 0,3$, od 64,1% (za $\alpha = 18^\circ$ i $\varepsilon_\alpha = 2,09$) do 81,3% (za $\alpha = 14^\circ$ i $\varepsilon_\alpha = 2,49$). Ovi zupčasti parovi u odnosu na zupčaste parove sa koeficijentima pomeranja profila zubaca $x_1 = 0,3$ i $x_2 = -0,3$, kao i $x_1 = x_2 = 0$ imaju veće razlike između napona u korenu zupca prema analitičkom tačnom modelu i metodi „B^c ISO standarda, jer imaju veće stepene sprežanja profila zubaca za iste uglove nagiba profila zubaca alata.

Zupčasti parovi sa većim stepenom sprezanja profila zubaca imaju veće razlike između napona u korenu zupca prema analitičkom tačnom modelu i metodi „B“ ISO standarda. Tako da je, za kombinaciju koeficijenata pomeranja profila zubaca $x_1 = -0,3$ i $x_2 = 0,3$ i ugla nagiba profila zubaca alata $\alpha = 14^\circ$ kad stepen sprezanja profila zubaca ima najveću vrednost $\varepsilon_\alpha = 2,49$, ova razlika maksimalna (81,3%). Ova razlika je minimalna (60%) za kombinaciju koeficijenata pomeranja profila zubaca $x_1 = 0,3$ i $x_2 = -0,3$ i ugla nagiba profila zubaca alata $\alpha = 18^\circ$ kad stepen sprezanja profila zubaca ima najmanju vrednost $\varepsilon_\alpha = 2$.

Tabela 7.2. Odnosi napona u korenu zupca prema analitičkom tačnom modelu (5.1) i metodi „B“ ISO standarda (7.1) koristeći izraz (7.6) za poprečni faktor opterećenja

x_1 x_2	$\frac{\sigma_{F(7.1)} - \sigma_{F(5.1)}}{\sigma_{F(5.1)}}$	$\alpha [^\circ]$		
		14	16	18
0 0	A ₁	79,2% za $\varepsilon_\alpha = 2,44$	70,4% za $\varepsilon_\alpha = 2,23$	62,6% za $\varepsilon_\alpha = 2,05$
	A ₂			
0,3 -0,3	A ₁	75,7% za $\varepsilon_\alpha = 2,35$	67,4% za $\varepsilon_\alpha = 2,16$	60% za $\varepsilon_\alpha = 2$
	A ₂			
-0,3 0,3	A ₁	81,3% za $\varepsilon_\alpha = 2,49$	72,1% za $\varepsilon_\alpha = 2,27$	64,1% za $\varepsilon_\alpha = 2,09$
	A ₂			

8. UPOREDNA ANALIZA NAPONSKOG STANJA U KORENU ZUPCA PREMA ANALITIČKOM I NUMERIČKOM MODELU

Da bi se potvrdili rezultati analize naponskog stanja u korenu zupca prema razvijenom analitičkom (tačnom i približnom) modelu (ATM i APM), u programu ANSYS je primenom metode konačnih elemenata (MKE) razvijen numerički model (NM) naponskog stanja u korenu zupca. Primeri numeričke analize napona u korenu zupca u tačkama A i B su dati u Prilogu. Prikazani rezultati u radu [10] potvrđuju da se u programu ANSYS primenom MKE može postići najtačnija analiza naponskog stanja u korenu zupca zupčanika. Analiza naponskog stanja u korenu zupca je sprovedena na istom zupčastom paru sa brojem zubaca $z_1 = 52$ i $z_2 = 156$, standardnim modulom $m_n = 5$ mm, različitim koeficijentima pomeranja profila zubaca i uglovima nagiba profila zubaca alata $\alpha = 14^\circ$ i $\alpha = 16^\circ$. Za ugao nagiba profila zubaca alata $\alpha = 18^\circ$ nije razvijen numerički model zbog malog perioda višestruke sprege zubaca, jer u ovom slučaju stepen sprežanja profila zubaca ima najmanju vrednost ($\varepsilon_\alpha = 2$ do $\varepsilon_\alpha = 2,09$).

U poglavlju 7 je sprovedena uporedna analiza naponskog stanja u korenu zupca prema razvijenom analitičkom modelu u ovoj doktorskoj disertaciji i konvencionalnim metodama. Ovde će biti sprovedena uporedna analiza naponskog stanja u korenu zupca prema razvijenom analitičkom i numeričkom modelu.

Dijagrami napona u korenu zupca prema razvijenom analitičkom i numeričkom modelu, kada je zubac u svakoj tački opterećen sa ukupnim opterećenjem $F = 10$ kN, su prikazani na slikama 8.1 do 8.12.

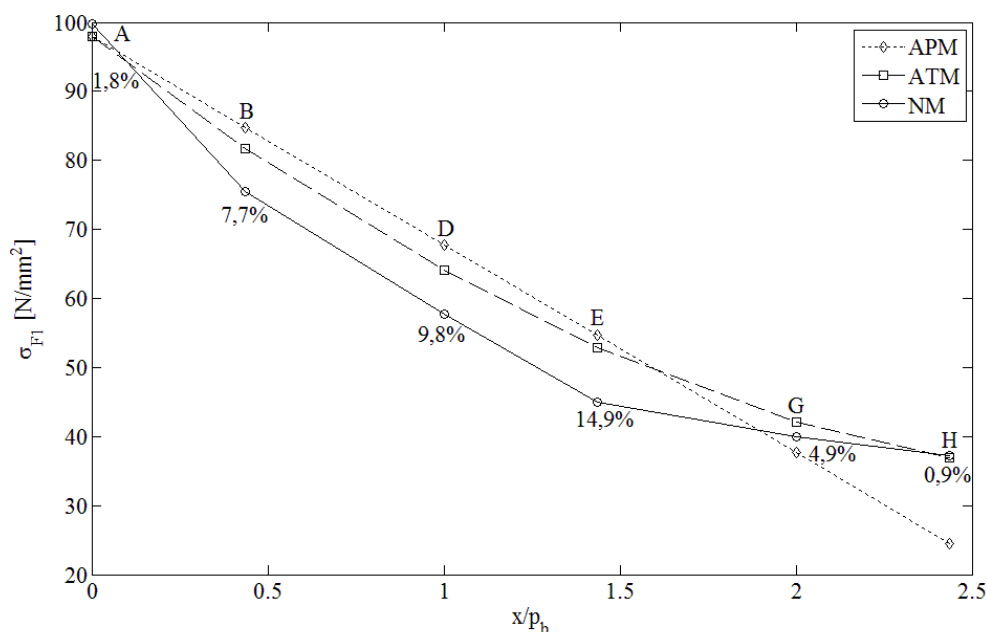
Za proveru nosivosti korena zupca su merodavani naponi koji odgovaraju dodiru spregnutih zubaca u tačkama A i B. Saglasno tome, detaljna analiza je sprovedena samo za tačke primopredaje opterećenja A i B.

Kod zupčastih parova sa koeficijentima pomeranja profila zubaca $x_1 = x_2 = 0$ i uglovima nagiba profila zubaca alata $\alpha = 14^\circ$ i $\alpha = 16^\circ$ (slike 8.1 do 8.4) naponi u korenu zupca prema analitičkom tačnom i numeričkom modelu se razlikuju 1,8% do 9,1% u tački A (slike 8.1 i 8.4) i 5,4% do 10,1% u tački B (slike 8.3 i 8.4). Prosečne razlike između napona u korenu zupca kod ovih zupčastih parova su 6,3% u tački A i 7,9% u tački B.

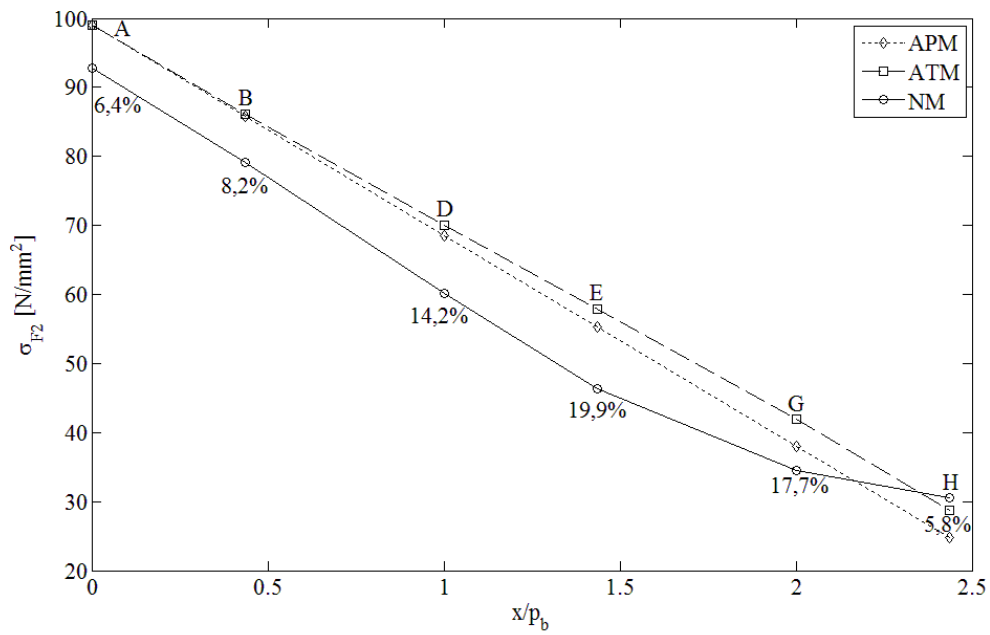
Kod zupčastih parova sa uglom nagiba profila zubaca alata $\alpha = 14^\circ$, naponi u korenu zupca u tački B prema analitičkom tačnom i približnom modelu se razlikuju 3,7% kod pogonskog i 0,5% kod gonjenog zupčanika (slike 8.1 i 8.2).

Kod zupčastih parova sa uglom nagiba profila zubaca alata $\alpha = 16^\circ$, naponi u korenu zupca u tački B prema analitičkom tačnom i približnom modelu se razlikuju 2% kod pogonskog i 0,1% kod gonjenog zupčanika (slike 8.3 i 8.4).

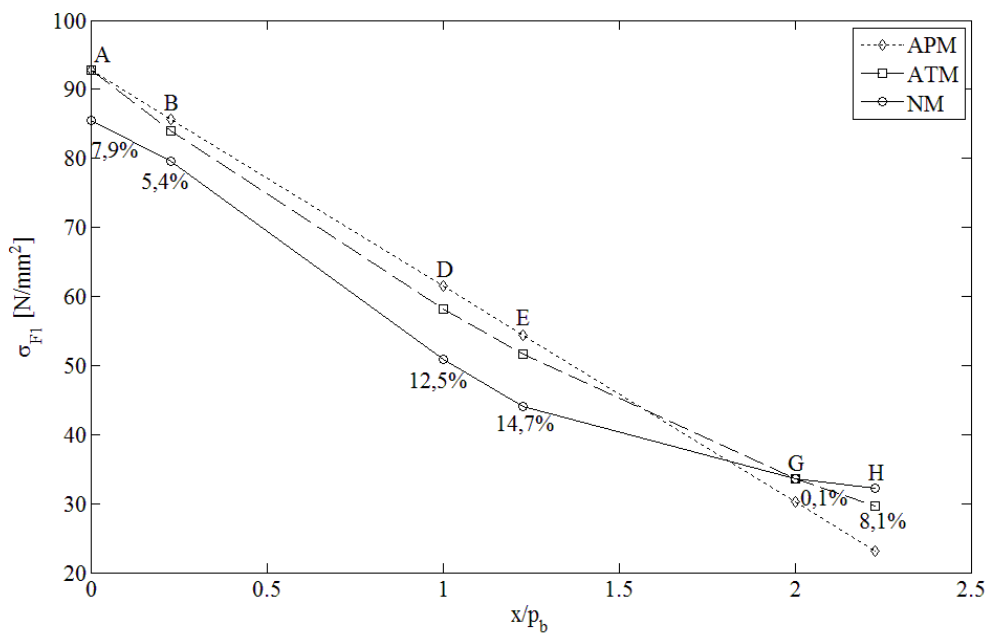
Kod zupčastih parova sa koeficijentima pomeranja profila zubaca $x_1 = x_2 = 0$ razlike napona u korenu zupca u tački B prema analitičkom tačnom i približnom modelu su veće kod pogonskog (2% i 3,7%), nego kod gonjenog (0,1% i 0,5%) zupčanika (slike 8.1 do 8.4). Ove razlike su veće kad je manji ugao nagiba profila zubaca alata. Kod pogonskog zupčanika je veći napon u korenu zupca u tački B prema analitičkom približnom modelu, dok je kod gonjenog zupčanika veći napon u korenu zupca u tački B prema analitičkom tačnom modelu.



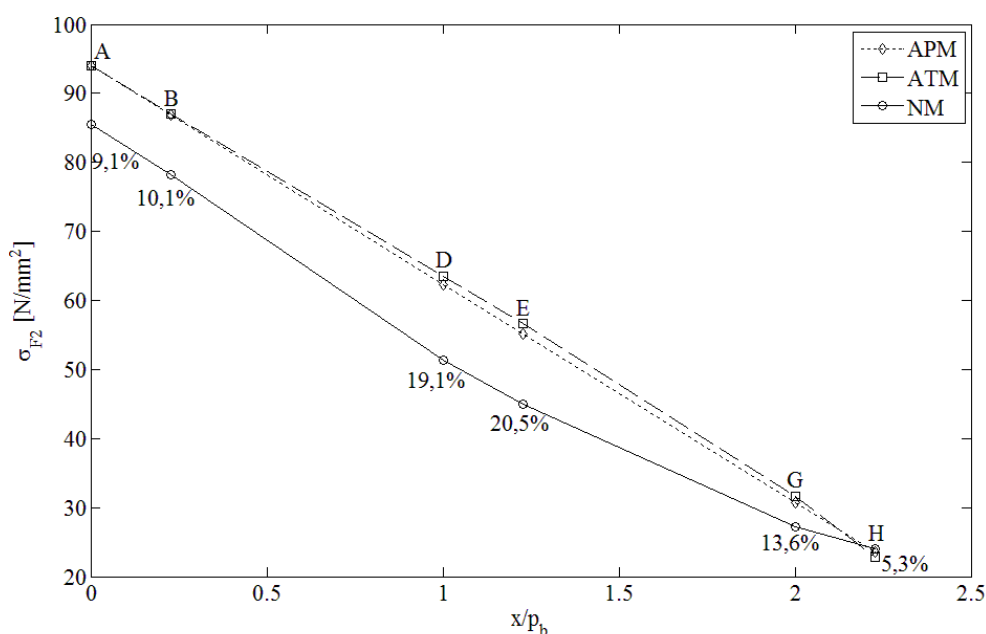
Slika 8.1. Naponi σ_{F1} za $\alpha = 14^\circ$, $\varepsilon_\alpha = 2,44$ i $x_1 = x_2 = 0$



Slika 8.2. Naponi σ_{F2} za $\alpha = 14^\circ$, $\varepsilon_\alpha = 2,44$ i $x_1 = x_2 = 0$



Slika 8.3. Naponi σ_{F1} za $\alpha = 16^\circ$, $\varepsilon_\alpha = 2,23$ i $x_1 = x_2 = 0$



Slika 8.4. Naponi σ_{F2} za $\alpha = 16^\circ$, $\varepsilon_\alpha = 2,23$ i $x_1 = x_2 = 0$

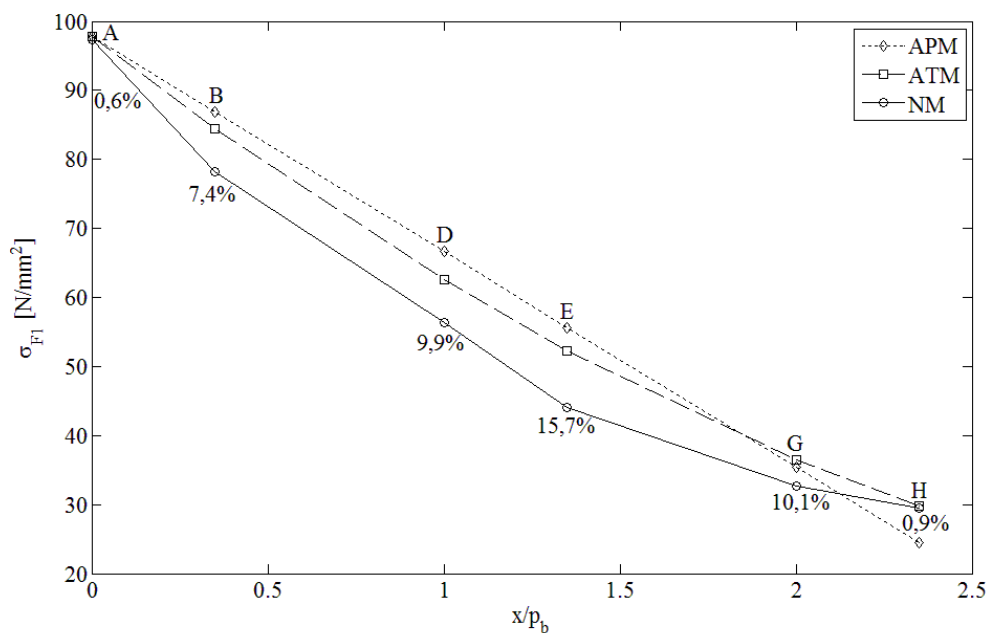
Kod zupčastih parova sa koeficijentima pomeranja profila zubaca $x_1 = 0,3$ i $x_2 = -0,3$ i uglovim nagiba profila zubaca alata $\alpha = 14^\circ$ i $\alpha = 16^\circ$ (slike 8.5 do 8.8) naponi u korenu zupca prema analitičkom tačnom i numeričkom modelu se razlikuju 0,6% do 11,4% u tački A (slike 8.5 i 8.8) i 7,4% do 10,6% u tački B (slike 8.5 i 8.8). Prosečne razlike između napona u korenu zupca kod ovih zupčastih parova su 6,7% u tački A i 9,6% u tački B.

Kod zupčastih parova sa uglom nagiba profila zubaca alata $\alpha = 14^\circ$, naponi u korenu zupca u tački B prema analitičkom tačnom i približnom modelu se razlikuju 2,9% kod pogonskog i 0,6% kod gonjenog zupčanika (slike 8.5 i 8.6).

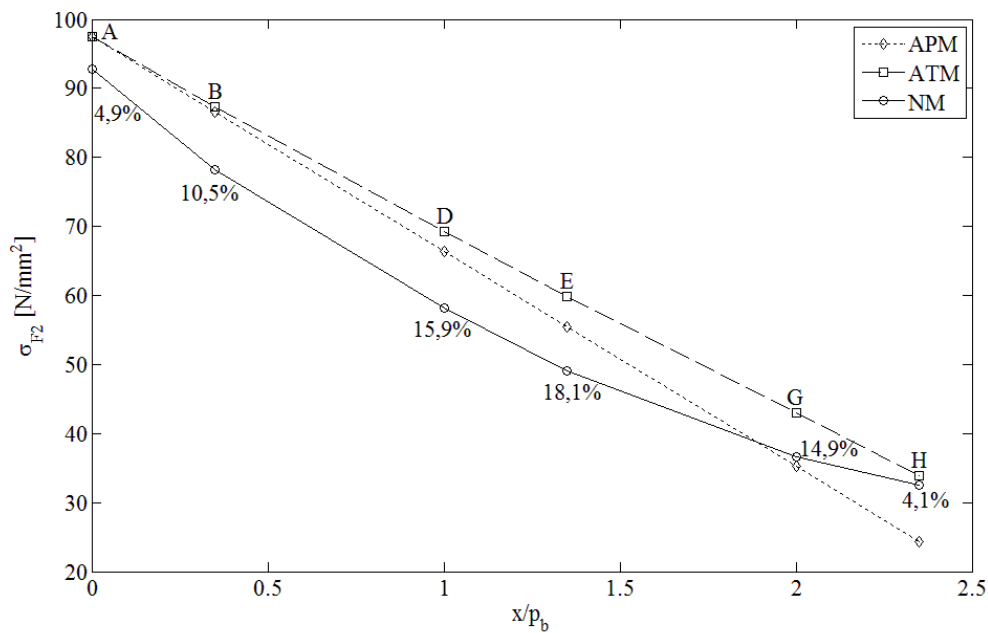
Kod zupčastih parova sa uglom nagiba profila zubaca alata $\alpha = 16^\circ$, naponi u korenu zupca u tački B prema analitičkom tačnom i približnom modelu se razlikuju 0,5% kod pogonskog i 0,2% kod gonjenog zupčanika (slike 8.7 i 8.8).

Kod zupčastih parova sa koeficijentima pomeranja profila zubaca $x_1 = 0,3$ i $x_2 = -0,3$ razlike napona u korenu zupca u tački B prema analitičkom tačnom i približnom modelu su veće kod pogonskog (0,5% i 2,9%), nego kod gonjenog (0,2% i 0,6%) zupčanika (slike 8.5 do 8.8). Ove razlike su veće kad je manji ugao nagiba profila zubaca alata. Kod pogonskog zupčanika je veći napon u korenu zupca u tački B prema

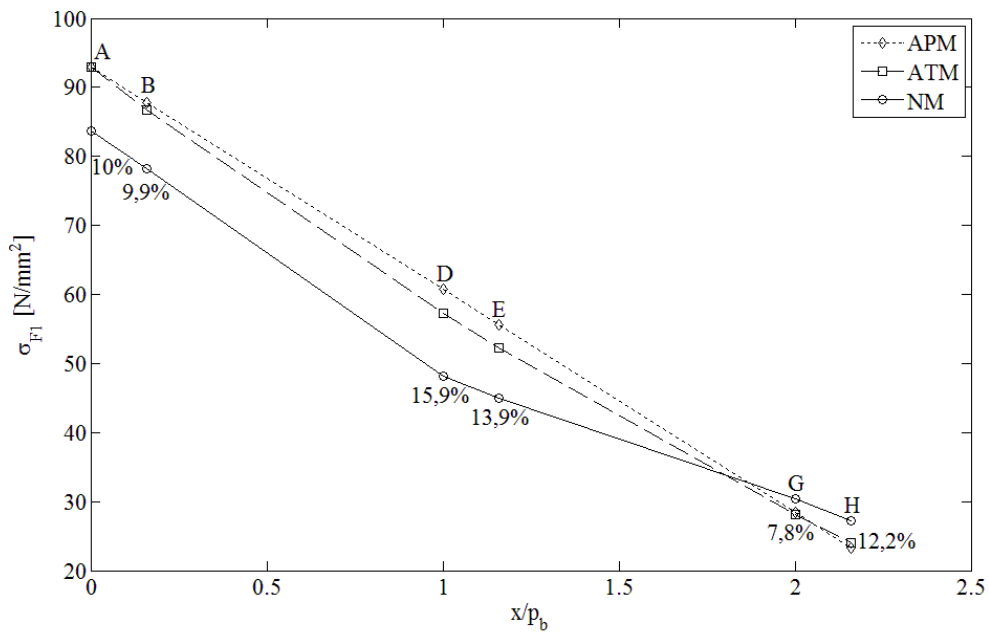
analitičkom približnom modelu, dok je kod gonjenog zupčanika veći napon u korenu zupca u tački B prema analitičkom tačnom modelu.



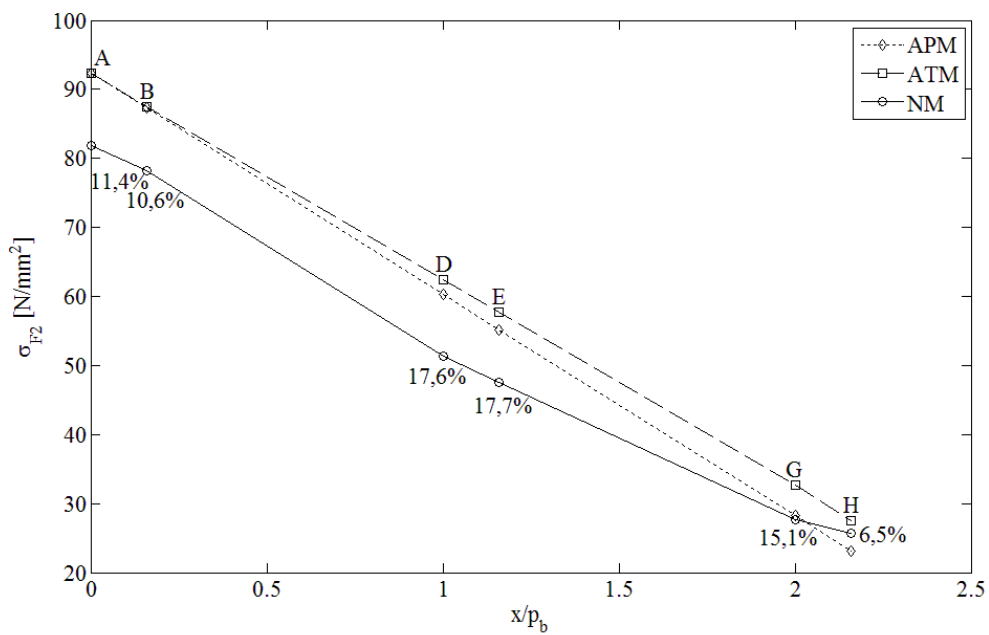
Slika 8.5. Naponi σ_{F1} za $\alpha = 14^\circ$, $\varepsilon_\alpha = 2,35$, $x_1 = 0,3$ i $x_2 = -0,3$



Slika 8.6. Naponi σ_{F2} za $\alpha = 14^\circ$, $\varepsilon_\alpha = 2,35$, $x_1 = 0,3$ i $x_2 = -0,3$



Slika 8.7. Naponi σ_{F1} za $\alpha = 16^\circ$, $\varepsilon_\alpha = 2,16$, $x_1 = 0,3$ i $x_2 = -0,3$



Slika 8.8. Naponi σ_{F2} za $\alpha = 16^\circ$, $\varepsilon_\alpha = 2,16$, $x_1 = 0,3$ i $x_2 = -0,3$

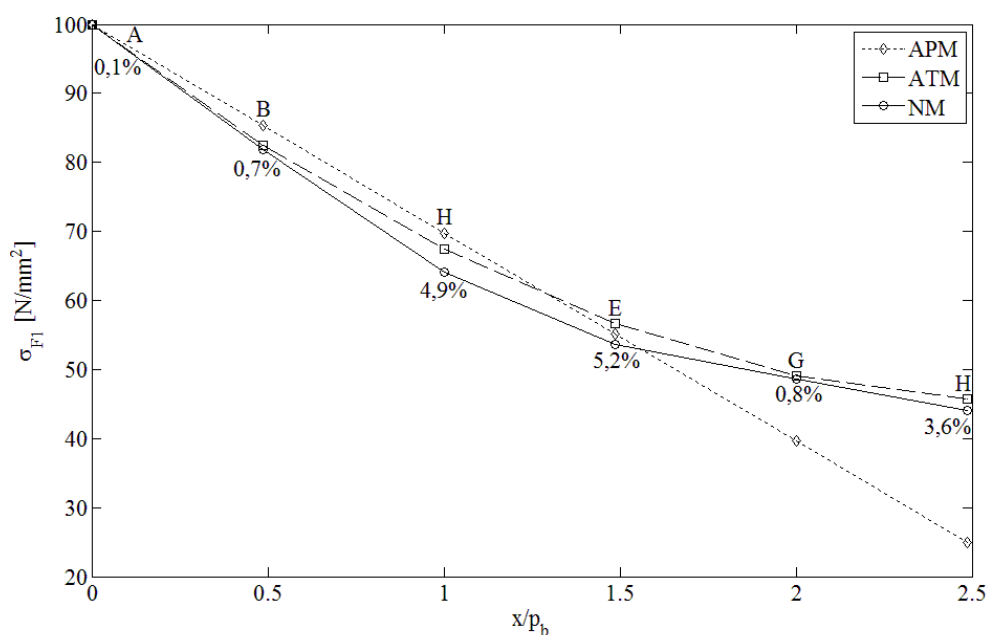
Kod zupčastih parova sa koeficijentima pomeranja profila zubaca $x_1 = -0,3$ i $x_2 = 0,3$ i uglovim nagiba profila zubaca alata $\alpha = 14^\circ$ i $\alpha = 16^\circ$ (slike 8.9 do 8.12)

naponi u korenu zupca prema analitičkom tačnom i numeričkom modelu se razlikuju 0,1% do 10,7% u tački A (slike 8.9 i 8.12) i 0,7% do 13,3% u tački B (slike 8.9 i 8.10). Prosečne razlike između napona u korenu zupca kod ovih zupčastih parova su 6,3% u tački A i 7,6% u tački B.

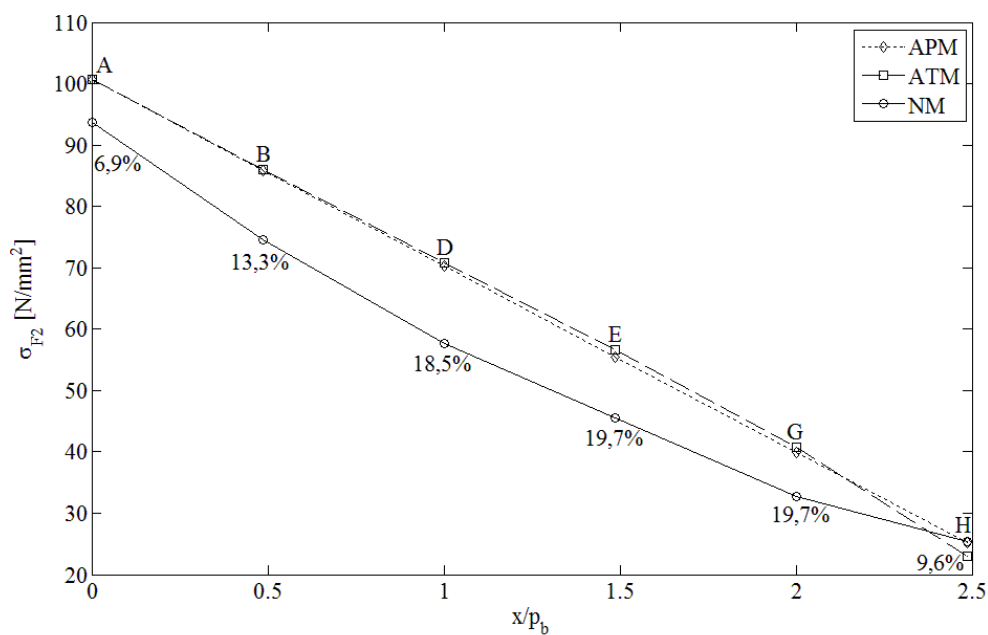
Kod zupčastih parova sa uglom nagiba profila zubaca alata $\alpha = 14^\circ$, naponi u korenu zupca u tački B prema analitičkom tačnom i približnom modelu se razlikuju 3,5% kod pogonskog i 0,1% kod gonjenog zupčanika (slike 8.9 i 8.10).

Kod zupčastih parova sa uglom nagiba profila zubaca alata $\alpha = 16^\circ$, naponi u korenu zupca u tački B prema analitičkom tačnom i približnom modelu se razlikuju 2,2% kod pogonskog i 0,1% kod gonjenog zupčanika (slike 8.11 i 8.12).

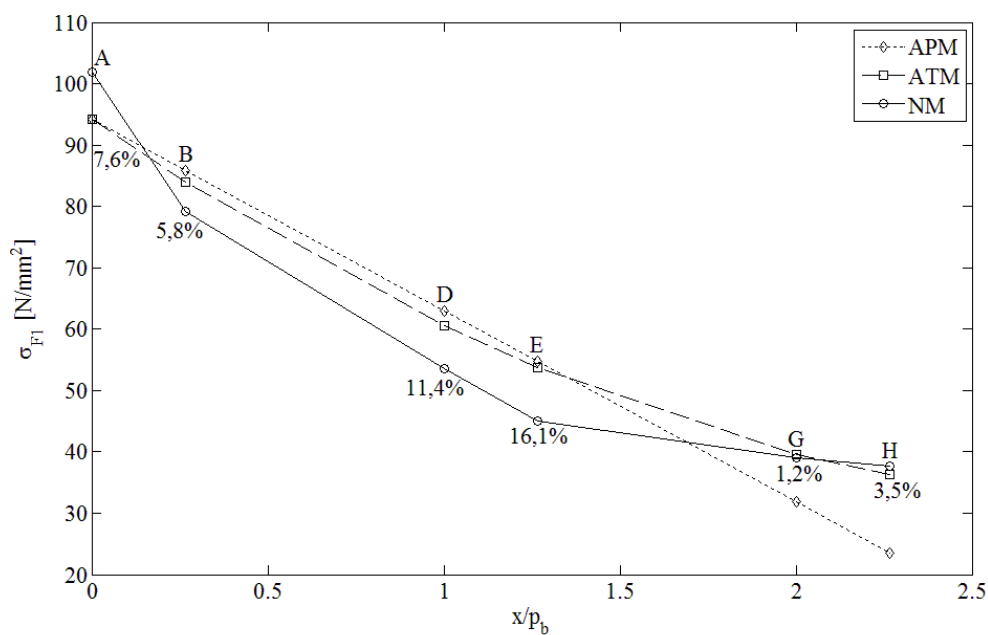
Kod zupčastih parova sa koeficijentima pomeranja profila zubaca $x_1 = -0,3$ i $x_2 = 0,3$ razlike napona u korenu zupca u tački B prema analitičkom tačnom i približnom modelu su veće kod pogonskog (2,2% i 3,5%), nego kod gonjenog (0,1%) zupčanika (slike 8.9 do 8.12). Ove razlike su veće kad je manji ugao nagiba profila zubaca alata. Kod pogonskog zupčanika je veći napon u korenu zupca u tački B prema analitičkom približnom modelu, dok je kod gonjenog zupčanika veći napon u korenu zupca u tački B prema analitičkom tačnom modelu.



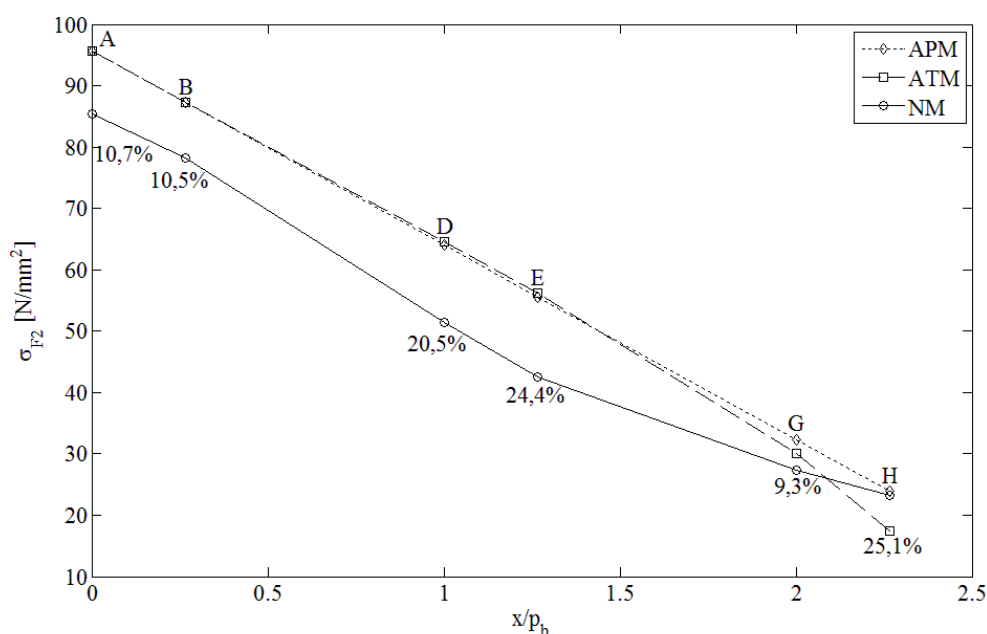
Slika 8.9. Naponi σ_{F1} za $\alpha = 14^\circ$, $\varepsilon_\alpha = 2,49$, $x_1 = -0,3$ i $x_2 = 0,3$



Slika 8.10. Naponi σ_{F2} za $\alpha = 14^\circ$, $\varepsilon_\alpha = 2,49$, $x_1 = -0,3$ i $x_2 = 0,3$



Slika 8.11. Naponi σ_{F1} za $\alpha = 16^\circ$, $\varepsilon_\alpha = 2,27$, $x_1 = -0,3$ i $x_2 = 0,3$



Slika 8.12. Naponi σ_{F2} za $\alpha = 16^\circ$, $\varepsilon_\alpha = 2,27$, $x_1 = -0,3$ i $x_2 = 0,3$

Krive napona u korenu zupca opisane prema analitičkom tačnom i numeričkom modelu su slične (slike 8.1 do 8.12). Imaju manja odstupanja na početku (u tačkama A i B) i kraju (u tačkama G i H), a veća u sredini (u tačkama D i E) dodirnog perioda zubaca. Napon u korenu zupca prema analitičkom tačnom modelu je uglavnom veći od napona u korenu zupca prema numeričkom modelu, osim u dva slučaja na početku (u tački A) i nekoliko slučajeva na kraju (u tačkama G i H) dodirnog perioda zubaca, kad je manji od napona u korenu zupca prema numeričkom modelu.

Prosečne razlike između napona u korenu zupca kod svih razmatranih zupčastih parova (slike 8.1 do 8.12) prema analitičkom tačnom i numeričkom modelu su sledeće: 6,4% u tački A, 8,4% u tački B, 14,2% u tački D, 16,7% u tački E, 9,6% u tački G i 7,1% u tački H, odnosno prosečno 10,4% u svim tačkama primopredaje opterećenja.

Kod zupčastih parova razlike napona u korenu zupca u tački B prema analitičkom tačnom i približnom modelu su veće kod pogonskog, nego kod gonjenog zupčanika (slike 8.1 do 8.12). Linearna promena napona u korenu zupca prema analitičkom približnom modelu bolje aproksimira krivu napona u korenu zupca prema analitičkom tačnom modelu gonjenog, nego pogonskog zupčanika. Razlike napona u korenu zupca u tački B prema analitičkom tačnom i približnom modelu su veoma male.

9. ANALITIČKI MODEL ENERGETSKE EFIKASNOSTI CILINDRIČNIH ZUPČASTIH PAROVA

Sprezanje profila zubaca zupčanika u toku dodirnog perioda je karakterisano kotrljanjem i klizanjem, odnosno trenjem koje se javlja između bokova istovremeno spregnutih zubaca. Trenje kao negativna pojava se ne može potpuno eliminisati, a to za posledicu ima da se jedan deo snage koji se prenosi sa pogonskog na gonjeni zupčanik, troši na njegovo savlađivanje. Gubici snage, a samim tim i energije, koji nastaju u toku sprezanja zubaca, se iskazuju posredstvom stepena iskorišćenja. Uobičajeno je da se energetska efikasnost zupčastih parova kvantifikuje kroz analizu stepena iskorišćenja, jer snaga predstavlja utrošenu energiju (rad) po jedinici vremena. Obzirom na sve strožije zahteve u pogledu uštede energije, stepen iskorišćenja predstavlja veoma značajnu kvalitativno-kuantitativnu karakteristiku pri izboru geometrijskih parametara zupčastih parova i odgovarajućih ulja za njihovo podmazivanje. Energetski gubici, osim kao posledica savladavanja otpora trenja na bokovima istovremeno spregnutih parova zubaca, nastaju i kao posledica savladavanja otpora koji se javlja u samom ulju koje se koristi za njihovo podmazivanje.

U cilju povećanja energetske efikasnosti zupčastih parova u literaturi i radovima [40,43,45-58] su sprovedena odgovarajuća teorijska i eksperimentalna istraživanja. U literaturi [3] je razvijen analitički model raspodele opterećenja na istovremeno spregnute parove zubaca kada se u toku dodirnog perioda zubaca smenjuju jednostruka i dvostruka sprega, a u poglavlju 4 kada se smenjuju dvostruka i trostruka sprega. Na osnovu razvijenog modela se može analizirati uticaj raspodele opterećenja na energetske efikasnosti zupčastih parova. U literaturi [3] i poglavlju 4 je pokazano da raspodela opterećenja na istovremeno spregnute parove zubaca primarno zavisi od kompatibilnosti: tačnosti izrade zubaca, njihove krutosti i intenziteta opterećenja zupčastog para. Za analizu energetske efikasnosti zupčastih prenosnika sa unutrašnjim ozubljenjem i pravim zupcima u literaturi [51] je razvijen matematički model za slučaj ravnomerne raspodele opterećenja na istovremeno spregnute parove zubaca kada se u toku dodirnog perioda zubaca smenjuju jednostruka i dvostruka sprega, a u radu [53] kada se smenjuju dvostruka i trostruka sprega.

U ovom poglavlju je razvijen matematički model za analizu energetske efikasnosti cilindričnih zupčastih parova sa spoljašnjim ozubljenjem i pravim zupcima, za slučaj ravnomerne raspodele opterećenja na istovremeno spregnute parove zubaca, kada se u toku dodirnog perioda zubaca smenjuju dvostruka i trostruka sprega. Na osnovu razvijenog modela za određivanje stepena iskorišćenja, identifikovaće se relevantne veličine zupčastog para koje imaju izrazit uticaj na stepen iskorišćenja. Mogu se analizirati uticaji ulja [39,40,53] i položaja trenutnog (kinematskog) pola relativnih brzina u toku dodirnog perioda na stepen iskorišćenja cilindričnih evolventnih zupčastih parova sa spoljašnjim ozubljenjem. Variranjem oblika profila zubaca [53,57] se može menjati položaj trenutnog (kinematskog) pola relativnih brzina u toku dodirnog perioda spregnutih zubaca.

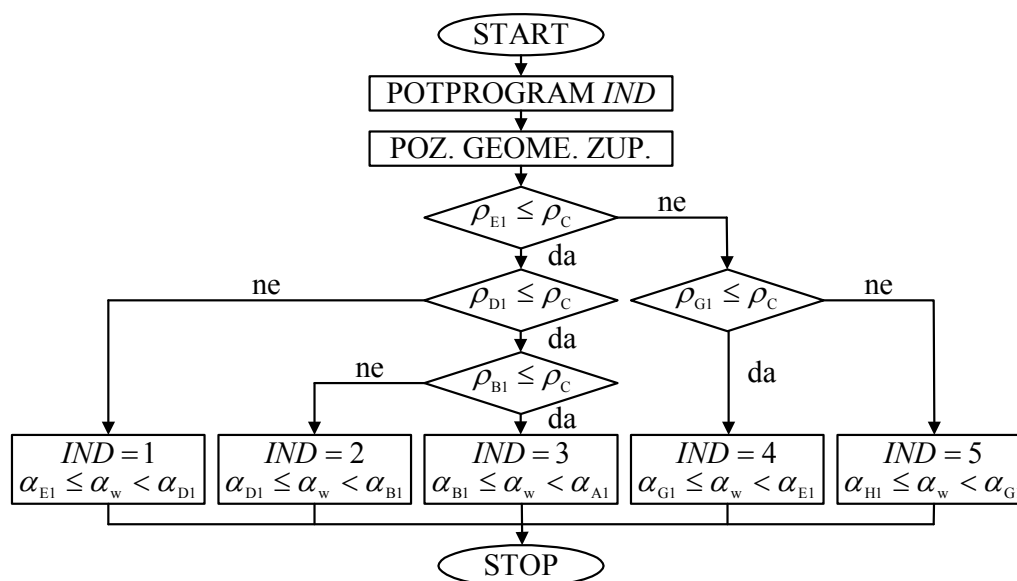
9.1. MODEL TRENUTNOG I EFEKTIVNOG STEPENA ISKORIŠĆENJA

Silom kojom bok zupca pogonskog zupčanika deluje na bok zupca gonjenog zupčanika se ostvaruje prenošenje obrtnog momenta T_1 sa pogonskog na gonjeni zupčanik. Na mestu dodira spregnutih bokova zubaca, osim normalne sile, se javljaju i sile trenja klizanja i kotrljanja. Sile trenja menjaju smerove pri prolasku tačke dodira kroz trenutni (kinematski) pol relativnih brzina, dok njihove napadne linije leže u zajedničkoj tangentnoj ravni spregnutih bokova zubaca.

Trenutni (kinematski) pol relativnih brzina se može nalaziti u oblasti dvostruke ili trostruke sprege, u zavisnosti od geometrijskih parametara posmatranog zupčastog para. Da bi se definisale karakteristične tačke, posmatrano u odnosu na trenutni (kinematski) pol relativnih brzina, u kojima se vrši primopredaja opterećenja kod istovremeno spregnutih parova zubaca, neophodno je uvesti veličinu IND [51]. Algoritam za određivanje položaja trenutnog (kinematskog) pola relativnih brzina na dodirnici profila zubaca je prikazan na slici 9.1. Na prikazanoj slici veličina IND definiše odgovarajuće intervale opterećenja posmatrano u odnosu na trenutni (kinematski) pol relativnih brzina, pa se za:

$IND = 1$ – trenutni (kinematski) pol relativnih brzina nalazi u oblasti trostruke sprege, pri čemu je ugao dodirnice profila zubaca veći ili jednak napadnom uglu u tački E_1 ($\alpha_{E1} \leq \alpha_w$), a manji od napadnog ugla u tački D_1 ($\alpha_{D1} > \alpha_w$),

- $IND = 2$ – trenutni (kinematski) pol relativnih brzina nalazi u oblasti dvostruke sprege, pri čemu je ugao dodirnice profila zubaca veći ili jednak napadnom uglu u tački D_1 ($\alpha_{D1} \leq \alpha_w$), a manji od napadnog ugla u tački B_1 ($\alpha_{B1} > \alpha_w$),
- $IND = 3$ – trenutni (kinematski) pol relativnih brzina nalazi u oblasti trostruke sprege, pri čemu je ugao dodirnice profila zubaca veći ili jednak napadnom uglu u tački B_1 ($\alpha_{B1} \leq \alpha_w$), a manji od napadnog ugla u tački A_1 ($\alpha_{A1} > \alpha_w$),
- $IND = 4$ – trenutni (kinematski) pol relativnih brzina nalazi u oblasti dvostruke sprege, pri čemu je ugao dodirnice profila zubaca veći ili jednak napadnom uglu u tački G_1 ($\alpha_{G1} \leq \alpha_w$), a manji od napadnog ugla u tački E_1 ($\alpha_{E1} > \alpha_w$),
- $IND = 5$ – trenutni (kinematski) pol relativnih brzina nalazi u oblasti trostruke sprege, pri čemu je ugao dodirnice profila zubaca veći ili jednak napadnom uglu u tački H_1 ($\alpha_{H1} \leq \alpha_w$), a manji od napadnog ugla u tački G_1 ($\alpha_{G1} > \alpha_w$).



Slika 9.1. Algoritam za određivanje položaja trenutnog (kinematskog) pola relativnih brzina na dodirnici profila zubaca

Za određivanje stepena iskorišćenja zupčastih parova su usvojene sledeće pretpostavke:

- gubici usled trenja u ležajevima su mali u odnosu na gubitke usled trenja klizanja i kotrljanja na bokovima istovremeno spregnutih zubaca,

- obrtni moment koji deluje na radnu mašinu u toku rada zupčastog prenosnika je konstantan,
- ugaone brzine (učestanosti obrtanja) spregnutih zupčastih parova su takođe konstantne.

Intenzitet sile trenja klizanja, koja deluje na bokove zubaca spregnutih zupčanika u toku dodirog perioda, zavisi od normalne sile i koeficijenta trenja [41,46] u posmatranoj tački dodira:

$$F_{\mu}(\xi) = \mu(\xi) \cdot F_n, \quad (9.1)$$

$$\mu(\xi) = 0,0127 \cdot \log \left(\frac{\frac{29,66}{b} \cdot F_n}{\eta \cdot v_{kl}(\xi) \cdot v_{ko}^2(\xi)} \right), \quad (9.2)$$

gde su:

$\mu(\xi)$ – koeficijent trenja,

b – širina zupčastog para,

η – dinamička viskoznost ulja za podmazivanje,

$v_{kl}(\xi)$ – brzina klizanja profila zupca pogonskog u odnosu na gonjeni zupčanik,

$v_{ko}(\xi)$ – brzina kotrljanja profila zupca pogonskog u odnosu na gonjeni zupčanik.

Intenzitet sile trenja kotrljanja, koja takođe deluje na bokove zubaca spregnutih zupčanika u toku dodirnog perioda, zavisi od debljine uljnog sloja [38] koja razdvaja bokove spregnutih zubaca zupčastog para u nekoj trenutnoj tački dodira:

$$F_r(\xi) = C \cdot h(\xi) \cdot b, \quad (9.3)$$

$$h(\xi) = 1,6 \cdot \alpha_0^{0,6} \cdot (\eta \cdot v_{ko}(\xi))^{0,7} \cdot E^{0,003} \cdot \frac{R^{0,43}}{F_n^{0,13}}, \quad (9.4)$$

gde su:

$C = 9 \cdot 10^7$ – konstanta proporcionalnosti,

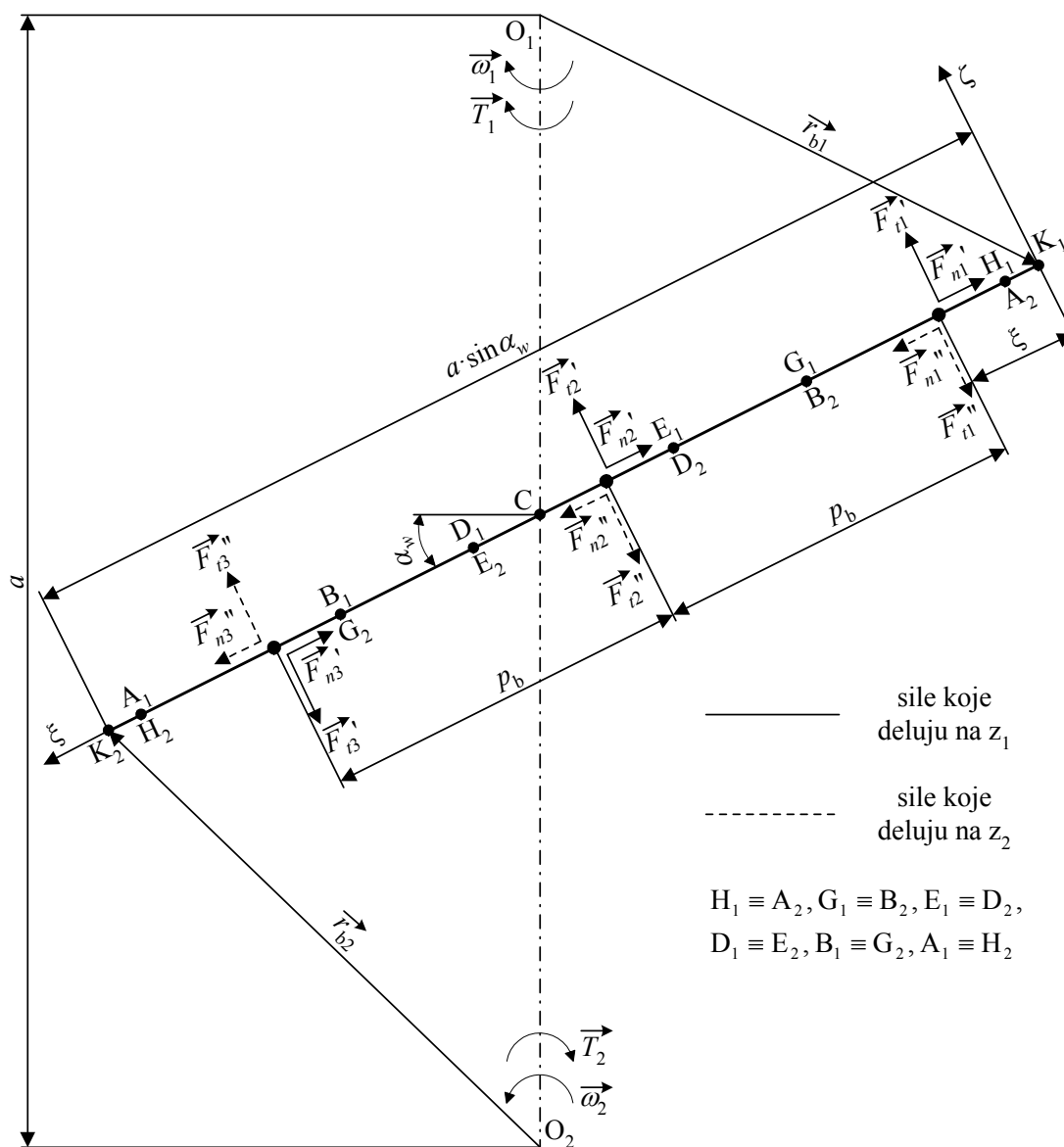
$h(\xi)$ – debljina uljnog sloja,

α_0 – piezo koeficijent viskoznosti ulja za podmazivanje,

R – srednji poluprečnik krivine spregnutih profila zubaca,

E – ekvivalentni modul elastičnosti.

Sile koje deluju na istovremeno spregnute profile zubaca posmatrano u odnosu na nepokretni koordinatni sistem vezan za ose obrtanja zupčastog para sa spoljašnjim ozubljenjem su prikazane na slici 9.2. Parametri razmatranog zupčastog para sa spoljašnjim ozubljenjem su izabrani tako da se trenutni (kinematski) pol relativnih brzina (tačka C na slici 9.2) nalazi u oblasti trostruke sprege između tačaka E_1 i D_1 , odnosno za slučaj kad je $IND = 1$.



Slika 9.2. Opterećenje koje deluje na istovremeno spregnute profile zubaca zupčastog para za slučaj kad je $IND = 1$

Normalna sila, koja deluje na istovremeno spregnute profile zubaca, na mestu dodira ima konstantan pravac u odnosu na koordinatni sistem vezan za ose obrtanja spregnutih zupčanika. Intezitet ove sile se određuje iz uslova da je suma obrtnih momenata za osu O_1 pogonskog zupčanika jednaka nuli:

$$T_1 - K_{\alpha 1} \cdot F_n \cdot \frac{3 \cdot d_{b1}}{2} + F'_{t1} \cdot \xi - F'_{t2} \cdot p_1 - F'_{t3} \cdot p_2 = 0, \quad (9.5)$$

$$F_n = \frac{T_1 - F_{r1} \cdot \xi - F_{r2} \cdot p_1 - F_{r3} \cdot p_2}{K_{\alpha 1} \cdot \frac{3 \cdot d_{b1}}{2} - \mu_1 \cdot K_{\alpha 1} \cdot \xi + \mu_2 \cdot K_{\alpha 2} \cdot p_1 + \mu_3 \cdot K_{\alpha 3} \cdot p_2}, \quad (9.6)$$

gde su:

$\rho_{H1} \leq \xi < \rho_{G1}$ – oblast trostruke sprege,

d_{b1} – prečnik osnovnog kruga pogonskog zupčanika,

p_b – korak na osnovnom krugu (osnovni korak) zupčanika,

$p_1 = \xi + p_b$,

$p_2 = \xi + 2 \cdot p_b$,

$F'_{t1} = \mu_1 \cdot F_{n1} - F_{r1} = \mu_1 \cdot K_{\alpha 1} \cdot F_n - F_{r1}$,

$F''_{t1} = \mu_1 \cdot F_{n1} + F_{r1} = \mu_1 \cdot K_{\alpha 1} \cdot F_n + F_{r1}$,

$F'_{t2} = \mu_2 \cdot F_{n2} + F_{r2} = \mu_2 \cdot K_{\alpha 2} \cdot F_n + F_{r2}$,

$F''_{t2} = \mu_2 \cdot F_{n2} - F_{r2} = \mu_2 \cdot K_{\alpha 2} \cdot F_n - F_{r2}$,

$F'_{t3} = \mu_3 \cdot F_{n3} + F_{r3} = \mu_3 \cdot K_{\alpha 3} \cdot F_n + F_{r3}$,

$F''_{t3} = \mu_3 \cdot F_{n3} - F_{r3} = \mu_3 \cdot K_{\alpha 3} \cdot F_n - F_{r3}$.

Pošto su koeficijent trenja i sila trenja kontroliraju funkcije normalne sile, njen intezitet se ne može odrediti na osnovu izraza (9.6). Potrebno je prethodno pretpostaviti početnu vrednost tog inteziteta. Prema tome, pretpostavlja se da intezitet normalne sile u prvoj iteraciji iznosi:

$$F_{np1} = \frac{2 \cdot T_1}{d_{b1}}. \quad (9.7)$$

Postupak iteracija za određivanje inteziteta normalne sile traje dok se ne ispuni uslov u pogledu zadate tačnosti, koji se može napisati u obliku:

$$\left| \frac{F_{n(y+1)} - F_{n(y)}}{F_{n(y)}} \right| \leq \varepsilon, \quad (9.8)$$

gde su:

$\varepsilon = 0,01$ – zadata tačnost,

y – redni broj iteracije.

Da bi se odredio stepen iskorišćenja posmatranog zupčastog para, potrebno je poznavati obrtni moment T_2 koji deluje na gonjeni zupčanik. Obrtni moment T_2 se određuje iz uslova da je suma obrtnih momenata za osu O_2 gonjenog zupčanika jednaka nuli:

$$T_2 = K_{\alpha_2} \cdot F_n \cdot \frac{3 \cdot d_{b2}}{2} - F_{t1}'' \cdot p_3 + F_{t2}'' \cdot p_4 + F_{t3}'' \cdot p_5, \quad (9.9)$$

gde su:

d_{b2} – prečnik osnovnog kruga gonjenog zupčanika,

a – osno rastojanje zupčastog para,

α_w – ugao dodirnice profila zubaca,

$$p_3 = a \cdot \sin \alpha_w - \xi,$$

$$p_4 = a \cdot \sin \alpha_w - (\xi + p_b),$$

$$p_5 = a \cdot \sin \alpha_w - (\xi + 2 \cdot p_b).$$

Pošto su u posmatranoj tački dodira određeni obrtni momenti koji deluju na dati zupčasti par, mogu se odrediti trenutne vrednosti stepena iskorišćenja pomoću izraza:

$$\eta_\xi = \frac{T_2}{T_1} \cdot \frac{1}{u}, \quad (9.10)$$

gde su:

T_1 – obrtni moment koji deluje na pogonski zupčanik,

T_2 – obrtni moment koji deluje na gonjeni zupčanik,

u – prenosni odnos.

Na analogan način se određuju normalna sila i obrtni moment koji deluju na gonjeni zupčanik u oblasti dvostruke sprege $\rho_{G1} \leq \xi < \rho_{E1}$. Inteziteti normalne sile i obrtnog momenta koji deluju na gonjeni zupčanik su dati izrazima:

$$F_n = \frac{T_1 - F_{r1} \cdot \xi - F_{r2} \cdot p_1}{K_{\alpha 1} \cdot d_{b1} - \mu_1 \cdot K_{\alpha 1} \cdot \xi + \mu_2 \cdot K_{\alpha 2} \cdot p_1}, \quad (9.11)$$

$$T_2 = K_{\alpha 2} \cdot F_n \cdot d_{b2} - F_{t1}'' \cdot p_3 + F_{t2}'' \cdot p_4. \quad (9.12)$$

Na analogan način se određuju normalna sila i obrtni moment koji ponovo deluju na gonjeni zupčanik u oblasti trostruke sprege $\rho_{E1} \leq \xi < \rho_C$. Smerovi brzina klizanja, odnosno sila trenja klizanja se menjaju pri prolasku tačke dodira kroz trenutni (kinematski) pol relativnih brzina, pa se sprezanje profila zubaca prvo razmatra u oblasti pre prolaska tačke dodira kroz trenutni (kinematski) pol relativnih brzina. Inteziteti normalne sile i obrtnog momenta koji deluju na gonjeni zupčanik su dati izrazima:

$$F_n = \frac{T_1 - F_{r1} \cdot p_6 + F_{r2} \cdot \xi - F_{r3} \cdot p_1}{K_{\alpha 1} \cdot \frac{3 \cdot d_{b1}}{2} - \mu_1 \cdot K_{\alpha 1} \cdot p_6 - \mu_2 \cdot K_{\alpha 2} \cdot \xi + \mu_3 \cdot K_{\alpha 3} \cdot p_1}, \quad (9.13)$$

$$T_2 = K_{\alpha 2} \cdot F_n \cdot \frac{3 \cdot d_{b2}}{2} - F_{t1}'' \cdot p_7 - F_{t2}'' \cdot p_3 + F_{t3}'' \cdot p_4, \quad (9.14)$$

gde su:

$$p_6 = \xi - p_b,$$

$$p_7 = a \cdot \sin \alpha_w - (\xi - p_b).$$

Ako se sprezanje profila zubaca razmatra u oblasti posle prolaska tačke dodira spregnutih profila zubaca kroz trenutni (kinematski) pol relativnih brzina $\rho_C \leq \xi < \rho_{D1}$, inteziteti normalne sile i obrtnog momenta koji deluju na gonjeni zupčanik iznose:

$$F_n = \frac{T_1 - F_{r1} \cdot p_6 - F_{r2} \cdot \xi - F_{r3} \cdot p_1}{K_{\alpha 1} \cdot \frac{3 \cdot d_{b1}}{2} - \mu_1 \cdot K_{\alpha 1} \cdot p_6 + \mu_2 \cdot K_{\alpha 2} \cdot \xi + \mu_3 \cdot K_{\alpha 3} \cdot p_1}, \quad (9.15)$$

$$T_2 = K_{\alpha 2} \cdot F_n \cdot \frac{3 \cdot d_{b2}}{2} - F_{t1}'' \cdot p_7 + F_{t2}'' \cdot p_3 + F_{t3}'' \cdot p_4. \quad (9.16)$$

Kada se sprezanje profila zubaca razmatra posle izlaska tačke dodira spregnutih profila zubaca iz oblasti trostruke sprege i ponovnog ulaska u oblast dvostruke sprege $\rho_{D1} \leq \xi < \rho_{B1}$, intenziteti normalne sile i obrtnog momenta koji deluju na gonjeni zupčanik iznose:

$$F_n = \frac{T_1 - F_{r1} \cdot p_6 - F_{r2} \cdot \xi}{K_{\alpha 1} \cdot d_{b1} - \mu_1 \cdot K_{\alpha 1} \cdot p_6 + \mu_2 \cdot K_{\alpha 2} \cdot \xi}, \quad (9.17)$$

$$T_2 = K_{\alpha 2} \cdot F_n \cdot d_{b2} - F_{t1}'' \cdot p_7 + F_{t2}'' \cdot p_3. \quad (9.18)$$

Kada se sprezanje profila zubaca razmatra posle izlaska tačke dodira spregnutih profila zubaca iz oblasti dvostruke sprege i ponovnog ulaska u oblast trostruke sprege $\rho_{B1} \leq \xi < \rho_{A1}$, intenziteti normalne sile i obrtnog momenta koji deluju na gonjeni zupčanik iznose:

$$F_n = \frac{T_1 - F_{r1} \cdot p_8 - F_{r2} \cdot p_6 - F_{r3} \cdot \xi}{K_{\alpha 1} \cdot \frac{3 \cdot d_{b1}}{2} - \mu_1 \cdot K_{\alpha 1} \cdot p_8 + \mu_2 \cdot K_{\alpha 2} \cdot p_6 + \mu_3 \cdot K_{\alpha 3} \cdot \xi}, \quad (9.19)$$

$$T_2 = K_{\alpha 2} \cdot F_n \cdot \frac{3 \cdot d_{b2}}{2} - F_{t1}'' \cdot p_9 + F_{t2}'' \cdot p_7 + F_{t3}'' \cdot p_3, \quad (9.20)$$

gde su:

$$p_8 = \xi - 2 \cdot p_b,$$

$$p_9 = a \cdot \sin \alpha_w - (\xi - 2 \cdot p_b).$$

Na kraju, efektivni stepen iskorišćenja zupčastog para se može odrediti pomoću izraza:

$$\eta_{ef} = \frac{1}{l} \cdot \int_{H_1}^{A_1} \eta_{\xi} \cdot d\xi = \frac{1}{l} \cdot \int_{H_1}^{A_1} \frac{T_2}{T_1} \cdot \frac{1}{u} \cdot d\xi = \frac{1}{l \cdot T_1 \cdot u} \cdot \int_{H_1}^{A_1} T_2 \cdot d\xi, \quad (9.21)$$

gde je:

l – aktivna dužina dodirnice profila zubaca.

Potrebno je razmotriti sledeći slučaj sprezanja zubaca kada su parametri zupčastog para izabrani tako da se trenutni (kinematski) pol relativnih brzina nalazi u oblasti dvostruke sprege između tačaka D_1 i B_1 . Na analogan način, kao za prethodni slučaj, se određuju analitički izrazi za normalnu silu F_n i obrtni moment T_2 za slučaj kad je $IND = 2$. U tabeli 9.1 su dati konačni izrazi za normalnu silu F_n i obrtni moment T_2 za slučaj kad je $IND = 2$.

Tabela 9.1. Normalna sila F_n i obrtni moment T_2 za slučaj kad je $IND = 2$

$IND = 2$		F_n	
		T_2	
oblast sprege	trostruka	$\rho_{H1} \leq \xi < \rho_{G1}$	$\frac{T_1 - F_{r1} \cdot \xi - F_{r2} \cdot p_1 - F_{r3} \cdot p_2}{K_{\alpha 1} \cdot \frac{3 \cdot d_{b1}}{2} - \mu_1 \cdot K_{\alpha 1} \cdot \xi + \mu_2 \cdot K_{\alpha 2} \cdot p_1 + \mu_3 \cdot K_{\alpha 3} \cdot p_2}$
			$K_{\alpha 2} \cdot F_n \cdot \frac{3 \cdot d_{b2}}{2} - F_{i1}'' \cdot p_3 + F_{i2}'' \cdot p_4 + F_{i3}'' \cdot p_5$
	dvostruka	$\rho_{G1} \leq \xi < \rho_{E1}$	$\frac{T_1 - F_{r1} \cdot \xi - F_{r2} \cdot p_1}{K_{\alpha 1} \cdot d_{b1} - \mu_1 \cdot K_{\alpha 1} \cdot \xi + \mu_2 \cdot K_{\alpha 2} \cdot p_1}$
			$K_{\alpha 2} \cdot F_n \cdot d_{b2} - F_{i1}'' \cdot p_3 + F_{i2}'' \cdot p_4$
	trostruka	$\rho_{E1} \leq \xi < \rho_{D1}$	$\frac{T_1 - F_{r1} \cdot p_6 - F_{r2} \cdot \xi - F_{r3} \cdot p_1}{K_{\alpha 1} \cdot \frac{3 \cdot d_{b1}}{2} - \mu_1 \cdot K_{\alpha 1} \cdot p_6 + \mu_2 \cdot K_{\alpha 2} \cdot \xi + \mu_3 \cdot K_{\alpha 3} \cdot p_1}$
			$K_{\alpha 2} \cdot F_n \cdot \frac{3 \cdot d_{b2}}{2} - F_{i1}'' \cdot p_7 + F_{i2}'' \cdot p_3 + F_{i3}'' \cdot p_4$
	dvostruka	$\rho_{D1} \leq \xi < \rho_C$	$\frac{T_1 - F_{r1} \cdot p_6 + F_{r2} \cdot \xi}{K_{\alpha 1} \cdot d_{b1} - \mu_1 \cdot K_{\alpha 1} \cdot p_6 - \mu_2 \cdot K_{\alpha 2} \cdot \xi}$
			$K_{\alpha 2} \cdot F_n \cdot d_{b2} - F_{i1}'' \cdot p_7 - F_{i2}'' \cdot p_3$
		$\rho_C \leq \xi < \rho_{B1}$	$\frac{T_1 - F_{r1} \cdot p_6 - F_{r2} \cdot \xi}{K_{\alpha 1} \cdot d_{b1} - \mu_1 \cdot K_{\alpha 1} \cdot p_6 + \mu_2 \cdot K_{\alpha 2} \cdot \xi}$
			$K_{\alpha 2} \cdot F_n \cdot d_{b2} - F_{i1}'' \cdot p_7 + F_{i2}'' \cdot p_3$
	trostruka	$\rho_{B1} \leq \xi < \rho_{A1}$	$\frac{T_1 - F_{r1} \cdot p_8 - F_{r2} \cdot p_6 - F_{r3} \cdot \xi}{K_{\alpha 1} \cdot \frac{3 \cdot d_{b1}}{2} - \mu_1 \cdot K_{\alpha 1} \cdot p_8 + \mu_2 \cdot K_{\alpha 2} \cdot p_6 + \mu_3 \cdot K_{\alpha 3} \cdot \xi}$
			$K_{\alpha 2} \cdot F_n \cdot \frac{3 \cdot d_{b2}}{2} - F_{i1}'' \cdot p_9 + F_{i2}'' \cdot p_7 + F_{i3}'' \cdot p_3$

Sledeći slučaj služi da se razmotri sprezanje zubaca kada su parametri zupčastog para izabrani tako da se trenutni (kinematski) pol relativnih brzina nalazi u oblasti dvostruke sprege između tačaka G_1 i E_1 . Na analogan način, kao za prethodna dva slučaja, se određuju analitički izrazi za normalanu silu F_n i obrtni moment T_2 za slučaj kad je $IND = 4$. U tabeli 9.2 su dati konačni izrazi za normalnu silu F_n i obrtni moment T_2 za slučaj kad je $IND = 4$.

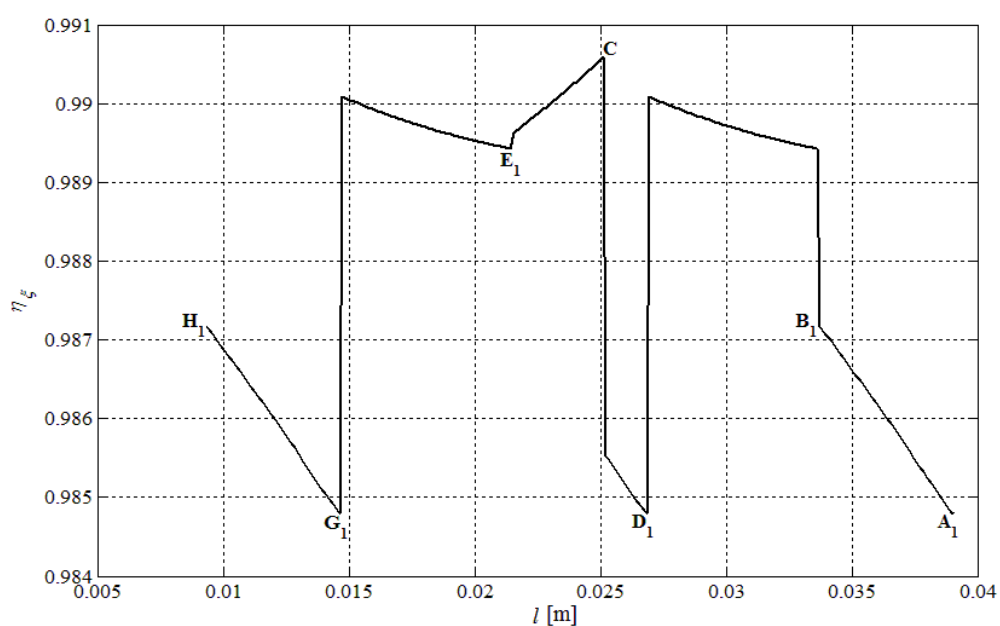
Tabela 9.2. Normalna sila F_n i obrtni moment T_2 za slučaj kad je $IND = 4$

$IND = 4$			F_n
			T_2
oblast sprege	trostruka	$\rho_{H1} \leq \xi < \rho_{G1}$	$\frac{T_1 - F_{r1} \cdot \xi - F_{r2} \cdot p_1 - F_{r3} \cdot p_2}{K_{\alpha1} \cdot \frac{3 \cdot d_{b1}}{2} - \mu_1 \cdot K_{\alpha1} \cdot \xi + \mu_2 \cdot K_{\alpha2} \cdot p_1 + \mu_3 \cdot K_{\alpha3} \cdot p_2}$
			$K_{\alpha2} \cdot F_n \cdot \frac{3 \cdot d_{b2}}{2} - F_{i1}'' \cdot p_3 + F_{i2}'' \cdot p_4 + F_{i3}'' \cdot p_5$
	dvostruka	$\rho_{G1} \leq \xi < \rho_C$	$\frac{T_1 - F_{r1} \cdot \xi - F_{r2} \cdot p_1}{K_{\alpha1} \cdot d_{b1} - \mu_1 \cdot K_{\alpha1} \cdot \xi + \mu_2 \cdot K_{\alpha2} \cdot p_1}$
			$K_{\alpha2} \cdot F_n \cdot d_{b2} - F_{i1}'' \cdot p_3 + F_{i2}'' \cdot p_4$
		$\rho_C \leq \xi < \rho_{E1}$	$\frac{T_1 + F_{r1} \cdot \xi - F_{r2} \cdot p_1}{K_{\alpha1} \cdot d_{b1} + \mu_1 \cdot K_{\alpha1} \cdot \xi + \mu_2 \cdot K_{\alpha2} \cdot p_1}$
			$K_{\alpha2} \cdot F_n \cdot d_{b2} + F_{i1}'' \cdot p_3 + F_{i2}'' \cdot p_4$
	trostruka	$\rho_{E1} \leq \xi < \rho_{D1}$	$\frac{T_1 - F_{r1} \cdot p_6 - F_{r2} \cdot \xi - F_{r3} \cdot p_1}{K_{\alpha1} \cdot \frac{3 \cdot d_{b1}}{2} - \mu_1 \cdot K_{\alpha1} \cdot p_6 + \mu_2 \cdot K_{\alpha2} \cdot \xi + \mu_3 \cdot K_{\alpha3} \cdot p_1}$
			$K_{\alpha2} \cdot F_n \cdot \frac{3 \cdot d_{b2}}{2} - F_{i1}'' \cdot p_7 + F_{i2}'' \cdot p_3 + F_{i3}'' \cdot p_4$
	dvostruka	$\rho_{D1} \leq \xi < \rho_{B1}$	$\frac{T_1 - F_{r1} \cdot p_6 - F_{r2} \cdot \xi}{K_{\alpha1} \cdot d_{b1} - \mu_1 \cdot K_{\alpha1} \cdot p_6 + \mu_2 \cdot K_{\alpha2} \cdot \xi}$
			$K_{\alpha2} \cdot F_n \cdot d_{b2} - F_{i1}'' \cdot p_7 + F_{i2}'' \cdot p_3$
	trostruka	$\rho_{B1} \leq \xi < \rho_{A1}$	$\frac{T_1 - F_{r1} \cdot p_8 - F_{r2} \cdot p_6 - F_{r3} \cdot \xi}{K_{\alpha1} \cdot \frac{3 \cdot d_{b1}}{2} - \mu_1 \cdot K_{\alpha1} \cdot p_8 + \mu_2 \cdot K_{\alpha2} \cdot p_6 + \mu_3 \cdot K_{\alpha3} \cdot \xi}$
			$K_{\alpha2} \cdot F_n \cdot \frac{3 \cdot d_{b2}}{2} - F_{i1}'' \cdot p_9 + F_{i2}'' \cdot p_7 + F_{i3}'' \cdot p_3$

Na analogan način se mogu odrediti analitički izrazi za normalanu silu F_n i obrtni moment T_2 za slučaj sprezanja zubaca kada su parametri zupčastog para izabrani tako da se trenutni (kinematski) pol relativnih brzina nalazi u oblasti trostruke sprege između tačaka B₁ i A₁ (slučaj kad je $IND = 3$) i između tačaka H₁ i G₁ (slučaj kad je $IND = 5$). Ovi slučajevi su teorijski mogući, ali su zbog geometrije spregnutih parova zubaca praktično neostvarivi i nedostupni u praksi, pa se neće detaljnije razmatrati kao što su razmatrani slučajevi $IND = 1$, $IND = 2$ i $IND = 4$.

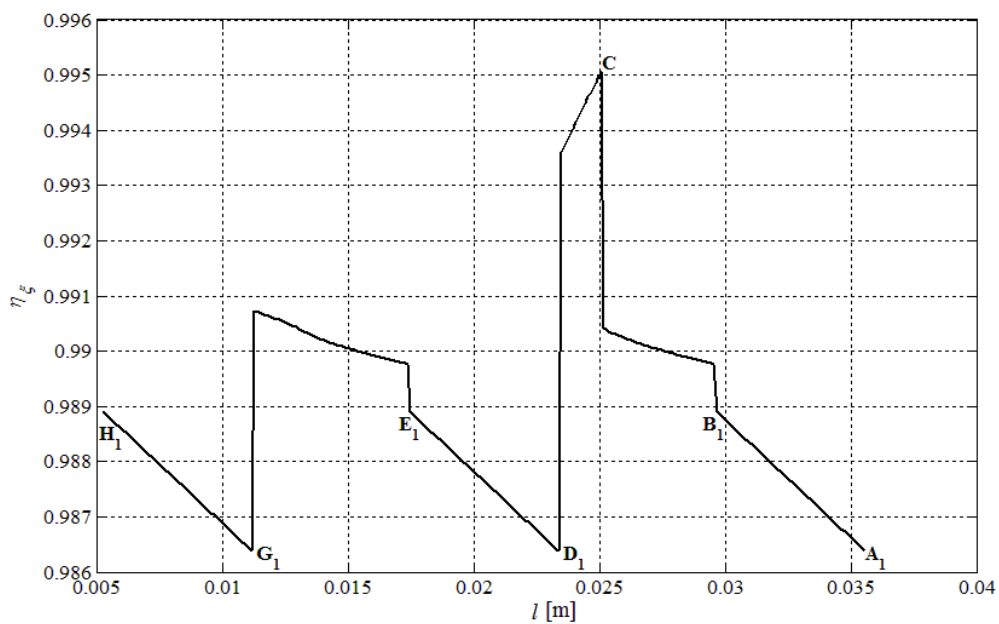
9.2. NUMERIČKI PRIMER TRENUTNOG STEPENA ISKORIŠĆENJA

Na slikama 9.3 do 9.11 je prikazan tok promene trenutnih vrednosti stepena iskorišćenja zupčastih parova sa brojem zubaca $z_1 = 52$, $z_2 = 156$, standardnim modulom $m_n = 5$ mm, širinom zupčanika $b = 50$ mm, brojem obrtaja pogonskog zupčanika $n_1 = 1000 \text{ min}^{-1}$, obrtnim momentom na pogonskom zupčaniku $T_1 = 150 \text{ Nm}$, različitim uglovima nagiba profila zubaca alata i koeficijentima pomeranja profila zubaca. Zupčasti parovi su podmazivani sa uljem [39] dinamičke viskoznosti $\eta = 0,075 \text{ Pas}$ i piezo koeficijentom viskoznosti $\alpha_0 = 2,19 \cdot 10^{-8} \text{ Pa}^{-1}$ pri temperaturi $T_0 = 40 \text{ }^\circ\text{C}$.



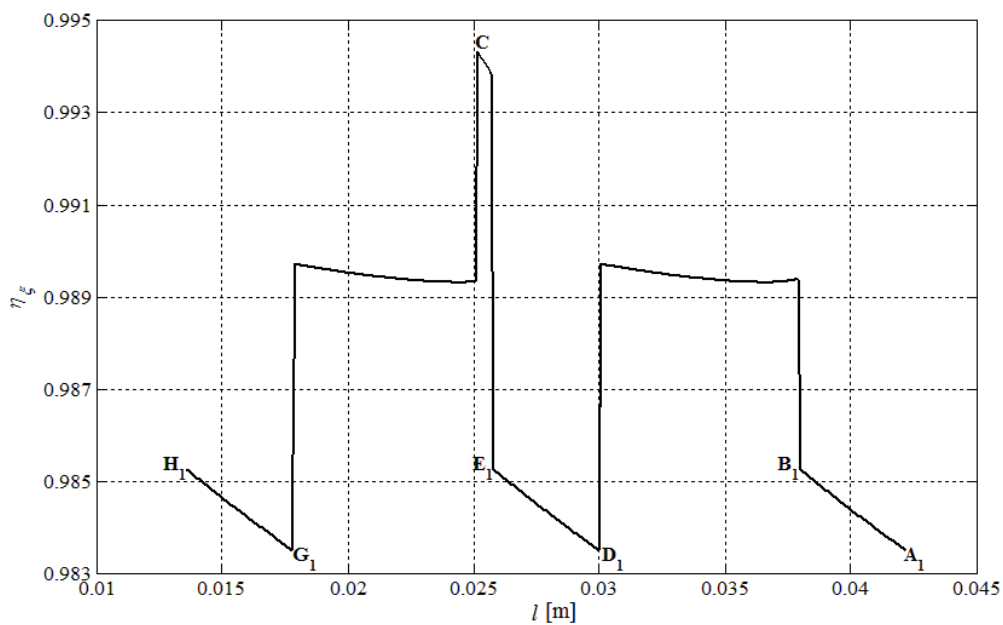
Slika 9.3. Tok promene trenutnih vrednosti stepena iskorišćenja za slučaj kad je

$$IND = 1 \quad (\alpha = 14^\circ, \varepsilon_\alpha = 2,44 \text{ i } x_1 = x_2 = 0)$$



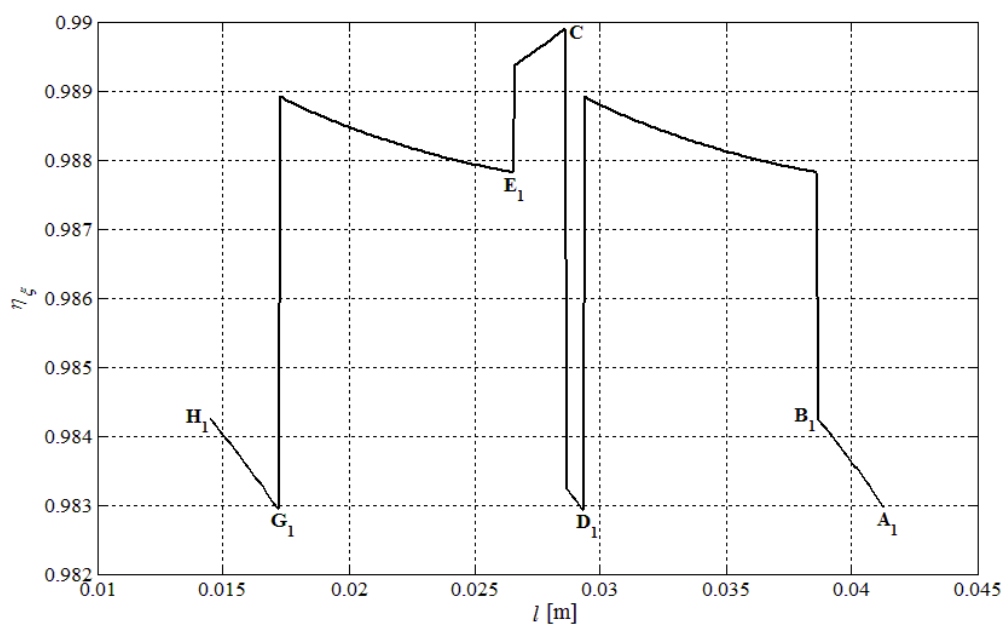
Slika 9.4. Tok promene trenutnih vrednosti stepena iskorišćenja za slučaj kad je

$$IND = 2 (\alpha = 14^\circ, \varepsilon_\alpha = 2,49, x_1 = -0,3 \text{ i } x_2 = 0,3)$$

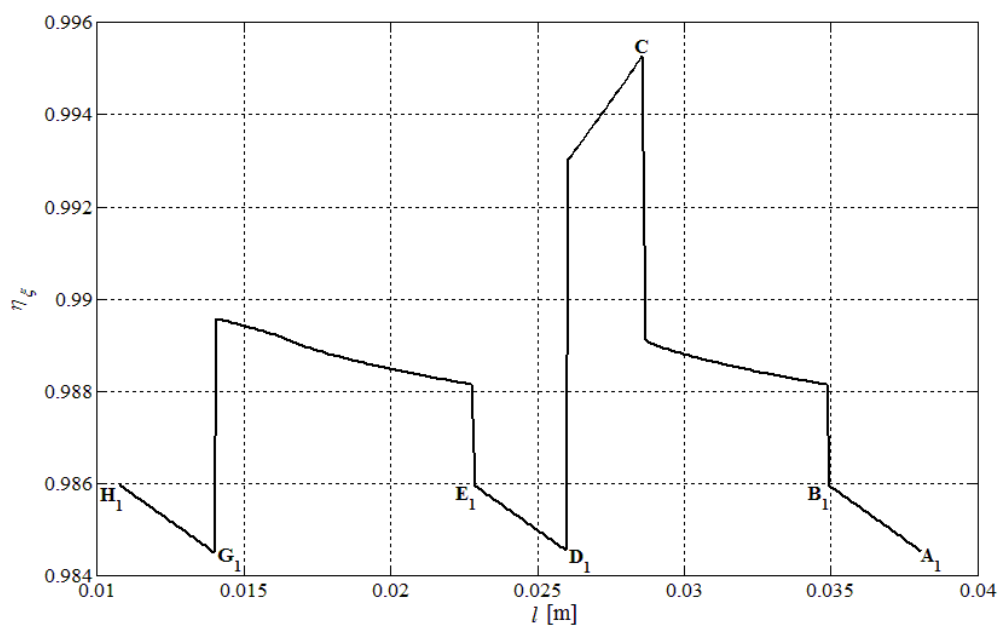


Slika 9.5. Tok promene trenutnih vrednosti stepena iskorišćenja za slučaj kad je

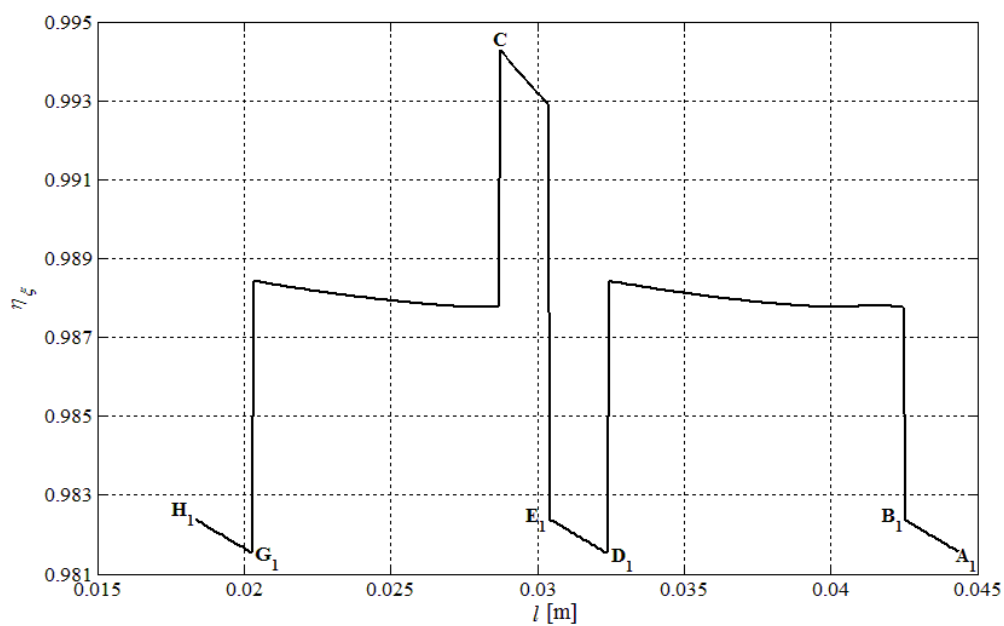
$$IND = 4 (\alpha = 14^\circ, \varepsilon_\alpha = 2,35, x_1 = 0,3 \text{ i } x_2 = -0,3)$$



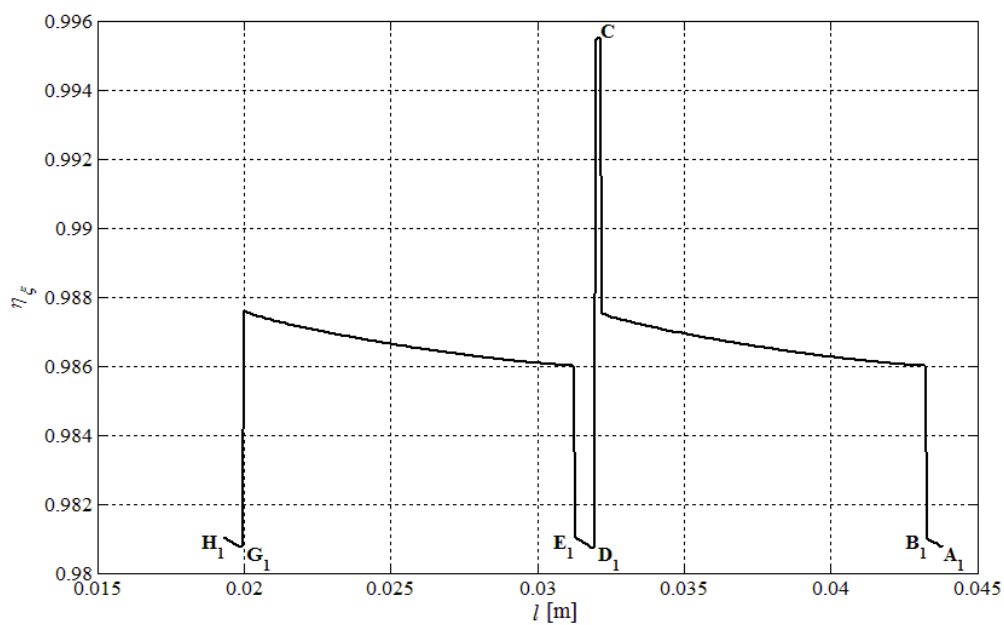
Slika 9.6. Tok promene trenutnih vrednosti stepena iskorišćenja za slučaj kad je $IND = 1$ ($\alpha = 16^\circ$, $\varepsilon_\alpha = 2,23$ i $x_1 = x_2 = 0$)



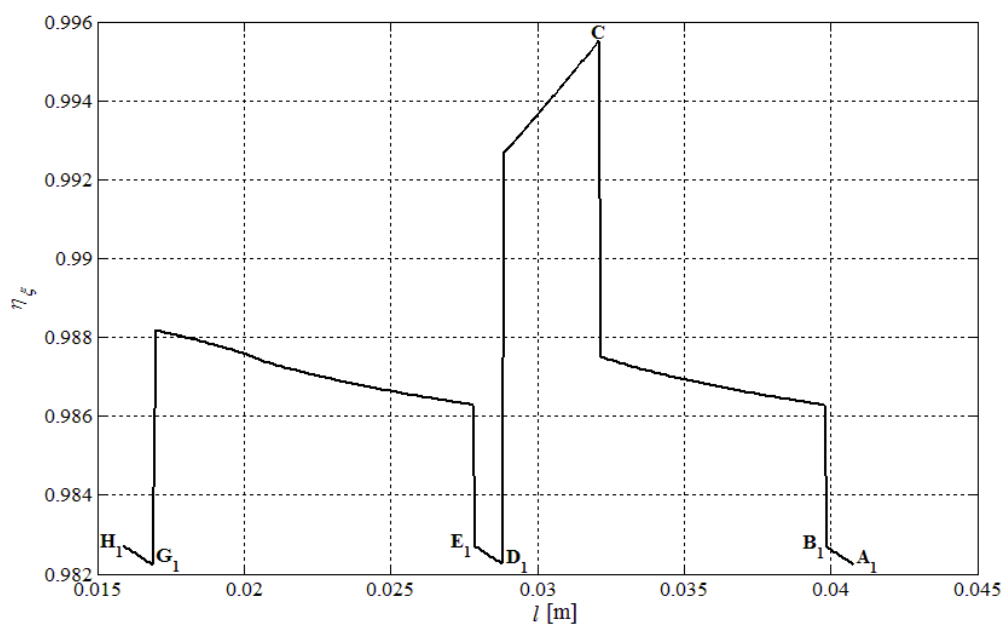
Slika 9.7. Tok promene trenutnih vrednosti stepena iskorišćenja za slučaj kad je $IND = 2$ ($\alpha = 16^\circ$, $\varepsilon_\alpha = 2,27$, $x_1 = -0,3$ i $x_2 = 0,3$)



Slika 9.8. Tok promene trenutnih vrednosti stepena iskorišćenja za slučaj kad je
 $IND = 4$ ($\alpha = 16^\circ$, $\varepsilon_\alpha = 2,16$, $x_1 = 0,3$ i $x_2 = -0,3$)

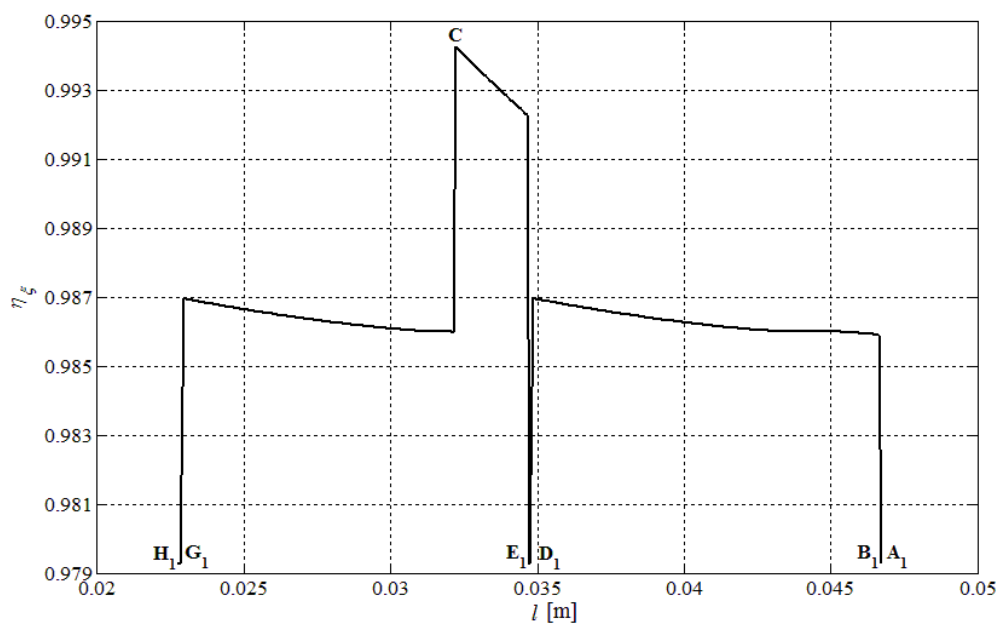


Slika 9.9. Tok promene trenutnih vrednosti stepena iskorišćenja za slučaj kad je
 $IND = 2$ ($\alpha = 18^\circ$, $\varepsilon_\alpha = 2,06$ i $x_1 = x_2 = 0$)



Slika 9.10. Tok promene trenutnih vrednosti stepena iskorišćenja za slučaj kad je

$$IND = 2 (\alpha = 18^\circ, \varepsilon_{\alpha} = 2,09, x_1 = -0,3 \text{ i } x_2 = 0,3)$$



Slika 9.11. Tok promene trenutnih vrednosti stepena iskorišćenja za slučaj kad je

$$IND = 4 (\alpha = 18^\circ, \varepsilon_{\alpha} = 2, x_1 = 0,3 \text{ i } x_2 = -0,3)$$

Grafički prikaz (slike 9.3 do 9.11) toka promene trenutnih vrednosti stepena iskorišćenja pokazuje da promena stepena iskorišćenja prati karakter promene raspodele opterećenja na istovremeno spregnutim parovima zubaca. Na osnovu dobijenih rezultata proizilazi da je trenutna vrednost stepena iskorišćenja maksimalna u trenutnom (kinematskom) polu relativnih brzina, gde je brzina klizanja bokova zubaca jednaka nuli. Gubici energije nastali usled trenja kotrljanja su znatno manji od gubitaka energije nastalih usled trenja klizanja. Manje vrednosti stepena iskorišćenja se nalaze u oblasti trostruke sprege, a veće u oblasti dvostruke sprege. Ovo je posledica većeg broja kontaktnih površina u oblasti trostruke sprege prema broju kontaktnih površina u oblasti dvostruke sprege.

10. ZAKLJUČAK

Sprovedenim istraživanjima u ovoj doktorskoj disertaciji su formirani tačniji modeli raspodele opterećenja na istovremeno spregnute parove zubaca pri višestrukoj sprezi kada se u toku dodirnog perioda zubaca smenjuju dvostruka i trostruka sprega, kao i modeli za analizu nosivosti korena zubaca i energetske efikasnosti cilindričnih zupčastih parova.

U narednim istraživanjima, na osnovu eksperimentalnih i/ili numeričkih metoda i analiza, treba odrediti odgovarajuće korekzione faktore za razvijene analitičke modele i krutosti zubaca u tačkama u kojima se vrši primopredaja opterećenja kod istovremeno spregnutih parova zubaca.

Iz sprovedene analize u ovoj doktorskoj disertaciji se može zaključiti sledeće:

1. Promena geometrije alata i koeficijenata pomeranja profila zubaca zupčanika utiče na promenu oblika profila spregnutih zubaca. Promenom oblika profila zubaca se može menjati i broj istovremeno spregnutih parova zubaca koji učestvuju u prenošenju opterećenja zupčastog para. Većim vrednostima stepena sprezanja profila zubaca odgovaraju veće vrednosti broja zubaca spregnutih zupčanika, odnosno veće vrednosti prenosnog odnosa. Nasuprot tome, većim vrednostima stepena sprezanja profila zubaca odgovaraju manje vrednosti ugla nagiba profila zubaca alata. Pri tome, gradijent uticaja broja zubaca zupčastog para i ugla nagib profila zubaca alata na stepen sprezanja profila zubaca zavisi od vrednosti koeficijenata pomeranja profila zubaca. Analiza je pokazala da se variranjem broja zubaca zupčastog para, ugla nagiba profila zubaca alata i koeficijenata pomeranja profila zubaca ne mogu ostvariti vrednosti stepena sprezanja profila zubaca veće od tri. Prema tome, kod cilindričnih zupčastih parova sa pravim zupcima u toku dodirnog perioda se može ostvariti samo višestruka sprega zubaca kada se smenjuju dvostruka i trostruka sprega. Postizanje višestruke sprege zubaca kada se smenjuju trostruka i četvorostruka sprega zahteva variranje i koeficijenta visine zupca.

2. Raspodela opterećenja na istovremeno spregnute parove zubaca može biti granična (ravnomerna ili izrazito neravnomerna) i stvarna. Kod granične ravnomerne (idealne) raspodele opterećenja svi istovremeno spregnuti parovi zubaca podjednako učestvuju u prenošenju ukupnog opterećenja zupčastog para. Kod granične izrazito

neravnomerne raspodele opterećenja je karakteristično da se i pri većem broju istovremeno spregnutih parova zubaca ukupno opterećenje prenosi preko jednog para zubaca. Oblast stvarne raspodele opterećenja je definisana između dva slučaja granične raspodele opterećenja - ravnomerne (idealne) i izrazito neravnomerne. Pokazatelj stepena angažovanosti pojedinih istovremeno spregnutih parova zubaca u prenošenju ukupnog opterećenja zupčastog para je faktor raspodele opterećenja. Na osnovu razvijenog analitičkog modela za faktor raspodele opterećenja se može zaključiti da je za detaljnu analizu raspodele opterećenja na istovremeno spregnute parove zubaca potrebno poznavati: stvarno ukupno opterećenje zupčastog para, ekvivalentne specifične krutosti spregnutih zubaca u karakterističnim tačkama dodira i odstupanja osnovnih koraka istovremeno spregnutih parova zubaca. Pokazano je da nije dovoljna samo međusobna jednakost osnovnih koraka kod svih istovremeno spregnutih parova zubaca da bi se pojavila ravnomerna (idealna) raspodela opterećenja na istovremeno spregnute parove zubaca. Da bi se pojavila ravnomerna (idealna) raspodela opterećenja na istovremeno spregnute parove zubaca, potrebno je postići kompatibilnost između: inteziteta opterećenja, odstupanja osnovnog koraka i krutosti spregnutih zubaca.

3. Da bi se odredio napon merodavan za procenu zapreminske čvrstoće korena zupca, potrebno je poznavati zakon njegove promene u toku dodirnog perioda. Na osnovu razvijenog analitičkog modela za napon u korenu zupca se može zaključiti da napon u korenu zupca zavisi od karaktera promene faktora raspodele opterećenja, faktora oblika zubaca i faktora korekcije napona u zavisnosti od položaja tačke dodira na profilu zupca. Promena napona u korenu zupca u toku dodirnog perioda je analizirana posmatranjem odnosa napona u nekoj tački dodira i napona pri dodiru u spoljašnjoj tački trostruke sprege, odnosno u tački A. Na osnovu toga je definisan faktor relativnog napona kao odnos faktora oblika zupca i faktora korekcije napona u posmatranoj tački dodira prema istim faktorima pri dodiru u spoljašnjoj tački trostruke sprege, odnosno u tački A. Da bi se pojednostavilo određivanje faktora relativnog napona, uvedena je pretpostavka o njegovoj linearnoj promeni u toku dodirnog perioda zubaca, zatim pretpostavka o jednakosti istog faktora za zupce spregnutih zupčanika, kao i pretpostavka da vrednosti faktora relativnog napona u unutrašnjoj tački trostruke sprege iznose 0,25. Na osnovu ovih pretpostavki su razvijeni modeli za jednostavnije određivanje faktora relativnog napona, pogodnih za inženjersku praksu.

4. Analizirano je naponsko stanje u korenu zubaca cilindričnih zupčastih parova u uslovima granične (ravnomerne i izrazito neravnomerne) raspodele opterećenja na istovremeno spregnute parove zubaca. Pri tome, oblik profila zubaca je variran promenom ugla nagiba profila zubaca alata i koeficijenata pomeranja profila zubaca zupčanika. Sprovedena analiza je pokazala da se u uslovima ravnomerne raspodele opterećenja najveći napon u korenu zupca generiše kada se posmatrani par zubaca pogonskog i gonjenog zupčanika dodiruje u spoljašnjoj tački dvostruke sprege, odnosno u tački B. Takođe je pokazano da se sa povećanjem ugla nagiba profila zubaca alata, odnosno sa smanjenjem stepena sprezanja profila zubaca povećava napon u korenu zupca. U uslovima pozitivnog pomeranja profila zubaca zupčanika, uticaj ugla nagiba profila zubaca alata na napon u korenu zupca je izraženiji. U drugom graničnom slučaju, kod izrazito neravnomerne raspodele opterećenja na istovremeno spregnute parove zubaca, najveći napon u korenu zupca se generiše kada se posmatrani par zubaca pogonskog i gonjenog zupčanika dodiruje u spoljašnjoj tački trostruke sprege, odnosno u tački A. U ovom slučaju raspodele opterećenja se sa povećanjem ugla nagiba profila zubaca alata smanjuje napon u korenu zupca. Kod izrazito neravnomerne raspodele opterećenja, uticaj ugla nagiba profila zubaca alata na promenu napona u korenu zupca je izraženiji nego kad je kod istovremeno spregnutih parova zubaca prisutna ravnomerna raspodela opterećenja.

5. U inženjerskoj praksi proračun nosivosti korena zubaca zupčastih parova se najčešće sprovodi razvijenim metodama „A“ i „B“ u ISO standardu. Za metodu „B“ u ISO standardu su date smernice o toku proračuna. Metoda „A“ je zasnovana na primeni metode konačnih elemenata i eksperimentalnih rezultata, i koristi se za visokoodgovorne zupčaste parove. Analiza naponskog stanja u korenu zupca je sprovedena prema metodi „B“ ISO standarda i razvijenom analitičkom modelu u ovoj doktorskoj disertaciji. Uporedna analiza je pokazala da su vrednosti napona u korenu zupca zupčastih parova prema metodi „B“ ISO standarda znatno veće u poređenju sa vrednostima napona određenim prema razvijenom analitičkom modelu, u uslovima granične raspodele opterećenja na istovremeno spregnute parove zubaca. Takođe je pokazano da kod zupčastih parovi sa većim stepenom sprezanja profila zubaca postoje veće razlike između vrednosti napona u korenu zupca, određene prema metodi „B“ ISO standarda i analitičkom modelu.

6. Potvrda rezultata analize naponskog stanja u korenu zupca prema razvijenom analitičkom tačnom i približnom modelu je urađena razvijanjem numeričkog modela naponskog stanja u korenu zupca u programu ANSYS primenom metode konačnih elemenata. Krive napona u korenu zupca opisane prema analitičkom tačnom i numeričkom modelu su slične. Imaju manja odstupanja na početku (u tačkama A i B) i kraju (u tačkama G i H), a veća u sredini (u tačkama D i E) dodirnog perioda zubaca. Napon u korenu zupca prema analitičkom tačnom modelu je veći od napona u korenu zupca prema numeričkom modelu, osim u dva slučaja na početku (u tački A) i nekoliko slučajeva na kraju (u tačkama G i H) dodirnog perioda zubaca, kad je manji od napona u korenu zupca prema numeričkom modelu. Prosečne razlike između napona u korenu zupca svih razmatranih zupčastih parova prema analitičkom tačnom i numeričkom modelu su sledeće: 6,4% u tački A, 8,4% u tački B, 14,2% u tački D, 16,7% u tački E, 9,6% u tački G i 7,1% u tački H, odnosno prosečno 10,4% u svim navedenim tačkama. Kod zupčastih parova razlike napona u korenu zupca u tački B prema analitičkom tačnom i približnom modelu su veće kod pogonskog, nego kod gonjenog zupčanika. Ove razlike su veće kad je manji ugao nagiba profila zubaca alata. Kod pogonskog zupčanika je veći napon u korenu zupca u tački B prema analitičkom približnom modelu, dok je kod gonjenog zupčanika veći napon u korenu zupca u tački B prema analitičkom tačnom modelu. Linearna promena napona u korenu zupca prema analitičkom približnom modelu bolje aproksimira krivu napona u korenu zupca prema analitičkom tačnom modelu gonjenog, nego pogonskog zupčanika. Razlike napona u korenu zupca u tački B prema analitičkom tačnom i približnom modelu su veoma male.

7. Sprezanje profila zubaca zupčanika u toku dodirnog perioda je karakterisano kotrljanjem i klizanjem, odnosno trenjem koje se javlja između bokova istovremeno spregnutih zubaca. Trenje kao negativna pojava se ne može potpuno eliminisati, a to za posledicu ima da se jedan deo snage koji se prenosi sa pogonskog na gonjeni zupčanik, troši na njegovo savlađivanje. Gubici snage, a samim tim i energije, koji nastaju u toku sprezanja zubaca, se iskazuju posredstvom stepena iskorišćenja. Uobičajeno je da se energetska efikasnost zupčastih parova kvantifikuje kroz analizu stepena iskorišćenja, jer snaga predstavlja utrošenu energiju (rad) po jedinici vremena. Obzirom na sve strožije zahteve u pogledu uštede energije, stepen iskorišćenja predstavlja veoma značajnu kvalitativno-kvantitativnu karakteristiku pri izboru geometrijskih parametara

zupčastih parova i odgovarajućih ulja za njihovo podmazivanje. Grafički prikaz toka promene trenutnih vrednosti stepena iskorišćenja pokazuje da promena stepena iskorišćenja prati karakter promene raspodele opterećenja na istovremeno spregnutim parovima zubaca. Na osnovu dobijenih rezultata proizilazi da je trenutna vrednost stepena iskorišćenja maksimalna u trenutnom (kinematskom) polu relativnih brzina, gde je brzina klizanja bokova zubaca jednaka nuli. Gubici energije nastali usled trenja kotrljanja su znatno manji od gubitaka energije nastalih usled trenja klizanja. Manje vrednosti stepena iskorišćenja se nalaze u području trostruke sprege, a veće u području dvostruke sprege. Ovo je posledica većeg broja kontaktnih površina u području trostruke sprege prema broju kontaktnih površina u području dvostruke sprege. Iako su energetske gubici jednog zupčastog para prilično mali, energetska efikasnost prenosnika snage koji se sastoji od nekoliko zupčastih parova može biti značajna. Ukupna energetska efikasnost prenosnika snage, sastavljenog od nekoliko zupčastih parova, predstavlja proizvod energetske efikasnosti svakog pojedinačnog zupčastog para. Prema tome, svako poboljšanje energetske efikasnosti koje se može postići kod pojedinačnog zupčastog para značajno doprinosi povećanju energetske efikasnosti prenosnika snage.

11. LITERATURA

1. ISO 6336-1, Calculation of load capacity of spur and helical gears – Part 1: Basic principles, introduction and general influence factors; Geneva, Switzerland, 2006.
2. ISO 6336-3, Calculation of load capacity of spur and helical gears – Part 3: Calculation of tooth bending strength; Geneva, Switzerland, 2006.
3. M. R. Ristivojević, R. M. Mitrović: Raspodela opterećenja - zupčasti parovi i kotrljajni ležaji; Mašinski fakultet Univerziteta u Beogradu, Beograd, Srbija, 2002.
4. M. Ristivojević, T. Lazović: Influence of kinematic parameters and tooth geometry on gear tooth root load capacity; Proceedings of the Romanian Academy, Series A 18(2), 174-181, 2017.
5. M. B. Sanchez, M. Pleguezuelos, J. I. Pedrero: Approximate equations for the meshing stiffness and the load sharing ratio of spur gears including hertzian effects; Mechanism and Machine Theory 109, 231-249, 2017.
6. M. B. Sanchez, M. Pleguezuelos, J. I. Pedrero: Tooth-root stress calculation of high transverse contact ratio spur and helical gears; Meccanica 49, 347-364, 2014.
7. M. B. Sanchez, J. I. Pedrero, M. Pleguezuelos: Critical stress and load conditions for bending calculations of involute spur and helical gears; International Journal of Fatigue 48, 28-38, 2013.
8. M. B. Sanchez, M. Pleguezuelos, J. I. Pedrero: Calculation of tooth bending strength and surface durability of internal spur gear drives; Mechanism and Machine Theory 95, 102-113, 2016.
9. J. I. Pedrero, I. I. Vallejo, M. Pleguezuelos: Calculation of tooth bending strength and surface durability of high transverse contact ratio spur and helical gear drives; Journal of Mechanical Design, Transactions of the ASME 129(1), 69-74, 2007.
10. T. J. Lisle, B. A. Shaw, R. C. Frazer: External spur gear root bending stress: A comparison of ISO 6336:2006, AGMA 2101-D04, ANSYS finite element analysis and strain gauge techniques; Mechanism and Machine Theory 111, 1-9, 2017.
11. Q. Wen, Q. Du, X. Zhai: A new analytical model to calculate the maximum tooth root stress and critical section location of spur gear; Mechanism and Machine Theory 128, 275-286, 2018.

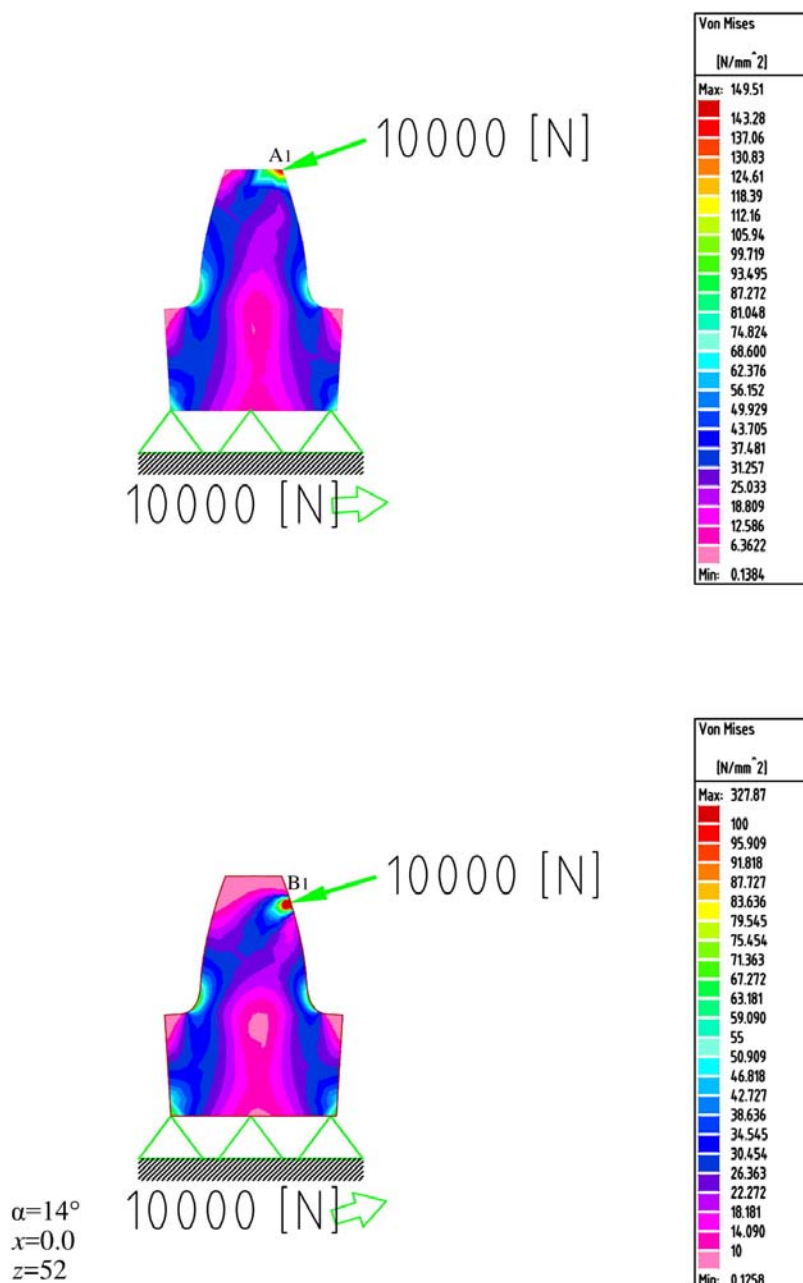
12. T. Jabbour, G. Asmar: Tooth stress calculation of metal spur and helical gears; *Mechanism and Machine Theory* 92, 375-390, 2015.
13. S. Li: Effect of addendum on contact strength, bending strength and basic performance parameters of a pair of spur gears; *Mechanism and Machine Theory* 43(12), 1557-1584, 2008.
14. P. Dobratić, M. Ristivojević: Uticaj parametara cilindričnih zupčastih parova na stepen sprezanja profila zubaca; *Vojnotehnički glasnik* 62(3), 80-100, 2014.
15. K. Marković, Ž. Vrcan: Influence of tip relief profile modification on involute spur gear stress; *Transactions of Famena* 40(2), 59-70, 2016.
16. M. Ristivojević, I. Atanasovska, D. Ristić, P. Dobratić: Influence of the multiple stress concentration on load capacity of tooth root of the cylindrical gear pairs; 5th International Conference on Power Transmissions – BAPT 2016, Ohrid, North Macedonia, 2016.
17. M. J. Handschuh, A. Kahraman, M. R. Milliren: Impact of tooth spacing errors on the root stresses of spur gear pairs; *Journal of Mechanical Design, Transactions of the ASME* 136(6), 061010(1)-061010(10), 2014.
18. C. Hasl, H. Liu, P. Oster, T. Tobie, K. Stahl, Forschungsstelle fuer Zahnraeder und Getriebbau (Gear Research Centre): Method for calculating the tooth root stress of plastic spur gears meshing with steel gears under consideration of deflection-induced load sharing; *Mechanism and Machine Theory* 111, 152-163, 2017.
19. I. Gonzalez-Perez, A. Fuentes-Aznar: Implementation of a finite element model for stress analysis of gear drives based on multi-point constraints; *Mechanism and Machine Theory* 117, 35-47, 2017.
20. M. Franulović, K. Marković, Ž. Vrcan, M. Šoban: Experimental and analytical investigation of the influence of pitch deviations on the loading capacity of HCR spur gears; *Mechanism and Machine Theory* 117, 96-113, 2017.
21. M. Ristivojević, T. Lazović, A. Vencl: Studying the load carrying capacity of spur gear tooth flanks; *Mechanism and Machine Theory* 59(1), 125-137, 2013.
22. A. Dimić, M. Ristivojević, P. Dobratić: The influence of the running-in process of the gear flanks on the load distribution in simultaneously meshed tooth pairs; 14th International Conference on Tribology – SERBIATRIB 2015, Belgrade, Serbia, 2015.

23. H. Imrek: Width modification for gears with low contact ratio; *Meccanica* 44(5), 613-621, 2009.
24. J. I. Pedrero, M. Pleguezuelos, M. Muñoz: Contact stress calculation of undercut spur and helical gear teeth; *Mechanism and Machine Theory* 46(11), 1633-1646, 2011.
25. M. B. Sanchez, J. I. Pedrero, M. Pleguezuelos: Contact stress calculation of high transverse contact ratio spur and helical gear teeth; *Mechanism and Machine Theory* 64, 93-110, 2013.
26. S.-C. Hwang, J.-H. Lee, D.-H. Lee, S.-H. Han, K.-H. Lee: Contact stress analysis for a pair of mating gears; *Mathematical and Computer Modelling* 57(1-2), 40-49, 2013.
27. J. I. Pedrero, M. Pleguezuelos, M. Artes, J. A. Antona: Load distribution model along the line of contact for involute external gears; *Mechanism and Machine Theory* 45(5), 780-794, 2010.
28. P. Marques, R. Martins, J. Seabra: Analytical load sharing and mesh stiffness model for spur/helical and internal/external gears - towards constant mesh stiffness gear design; *Mechanism and Machine Theory* 113, 126-140, 2017.
29. Y. Pandya, A. Parey: Failure path based modified gear mesh stiffness for spur gear pair with tooth root crack; *Engineering Failure Analysis* 27, 286-296, 2013.
30. Y. Pandya, A. Parey: Simulation of crack propagation in spur gear tooth for different gear parameter and its influence on mesh stiffness; *Engineering Failure Analysis* 30, 124-137, 2013.
31. Y. Pandya, A. Parey: Crack behavior in a high contact ratio spur gear tooth and its effect on mesh stiffness; *Engineering Failure Analysis* 34, 69-78, 2013.
32. Y. Pandya, A. Parey: Experimental investigation of spur gear tooth mesh stiffness in the presence of crack using photoelasticity technique; *Engineering Failure Analysis* 34, 488-500, 2013.
33. Z. Li, H. Ma, M. Feng, Y. Zhu, B. Wen: Meshing characteristics of spur gear pair under different crack types; *Engineering Failure Analysis* 80, 123-140, 2017.
34. Z. Chen, W. Zhai, Y. Shao, K. Wang, G. Sun: Analytical model for mesh stiffness calculation of spur gear pair with non-uniformly distributed tooth root crack; *Engineering Failure Analysis* 66, 502-514, 2016.

35. Z. Chen, Y. Shao: Mesh stiffness calculation of a spur gear pair with tooth profile modification and tooth root crack; *Mechanism and Machine Theory* 62, 63-74, 2013.
36. Z. Chen, Y. Shao: Dynamic simulation of spur gear with tooth root crack propagating along tooth width and crack depth; *Engineering Failure Analysis* 18(8), 2149-2164, 2011.
37. A. Belsak, J. Flasker: Detecting cracks in the tooth root of gears; *Engineering Failure Analysis* 14, 1466-1475, 2007.
38. D. Dowson, G. R. Higginson: *Elastohydrodynamic lubrication*; SI Edition, Pergamon Press Ltd., Oxford, England, UK, 1977.
39. Y. Wang, H. Li, J. Tong, P. Yang: Transient thermoelastohydrodynamic lubrication analysis of an involute spur gear; *Tribology International* 37(10), 773-782, 2004.
40. L. Magalhaes, R. Martins, C. Locateli, J. Seabra: Influence of tooth profile and oil formulation on gear power loss; *Tribology International* 43(10), 1861-1871, 2010.
41. G. H. Benedict, B. W. Kelly: Instantaneous coefficients of gear tooth friction; *ASLE Transactions* 4(1), 59-70, 1961.
42. G. Niemann, H. Winter: *Maschinenelemente – Band 2*; Springer-Verlag, Berlin, Germany, 2003.
43. H. Xu: Development of a generalized mechanical efficiency prediction methodology for gear pairs, Ph. D. Thesis; Department of Mechanical Engineering, The Ohio State University, Columbus, Ohio, USA, 2005.
44. M. Ognjanović: *Generisanje buke u mašinskim sistemima*; Mašinski fakultet Univerziteta u Beogradu, Beograd, Srbija, 1995.
45. B. R. Höhn: Improvements on noise reduction and efficiency of gears; *Meccanica* 45(3), 425-437, 2010.
46. N. E. Anderson, S. H. Loewenthal: Efficiency of nonstandard and high contact ratio involute spur gears; *Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design* 108(1), 119-126, 1986.
47. A. Kahraman, D. R. Houser, H. Xu: Development of a generalized mechanical efficiency prediction methodology for gear pairs; Department of Mechanical Engineering, The Ohio State University, Columbus, Ohio, USA, 2005.

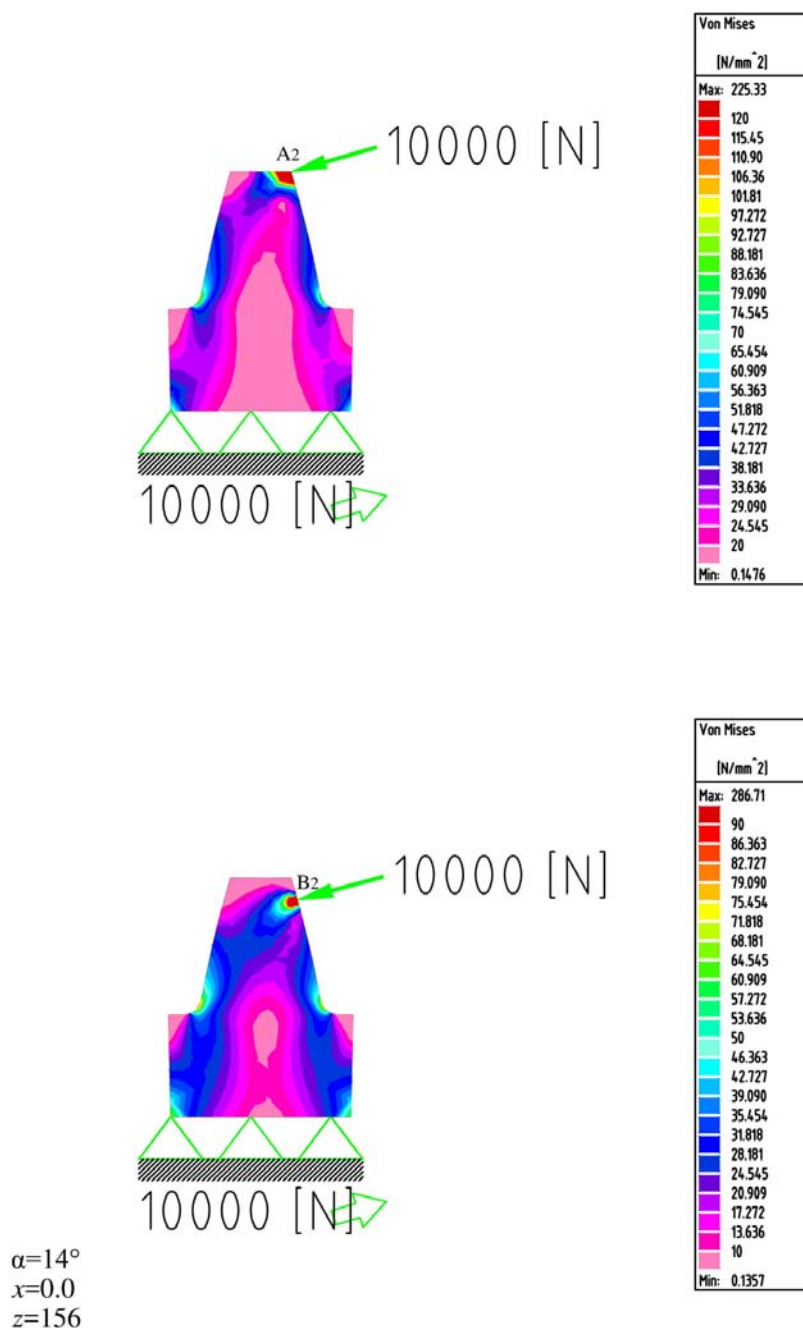
48. H. Xu, A. Kahraman, N. E. Anderson, D. G. Maddock: Prediction of mechanical efficiency of parallel-axis gear pairs; *Journal of Mechanical Design, Transactions of the ASME* 129(1), 58-68, 2007.
49. T. T. Petry-Johnson, A. Kahraman, N. E. Anderson, D. R. Chase: An experimental investigation of spur gear efficiencies; *Journal of Mechanical Design, Transactions of the ASME* 130(6), 062601(1)-62601(10), 2008.
50. P. Velex, F. Ville: An analytical approach to tooth friction losses in spur and helical gears - influence of profile modifications; *Journal of Mechanical Design, Transactions of the ASME* 131(10), 101008(1)-101008(10), 2009.
51. B. B. Rosić: Planetarni prenosnici - unutrašnji cilindrični parovi; *Mašinski fakultet Univerziteta u Beogradu, Beograd, Srbija*, 2003.
52. P. Dobratić, M. Ristivojević, B. Rosić: An analysis of the efficiency of utilization of involute cylindrical gear pairs; 6th International Scientific Conference on Defensive Technologies – OTEH 2014, Belgrade, Serbia, 2014.
53. P. S. Dobratić, M. R. Ristivojević, B. B. Rosić, R. M. Mitrović, D. R. Trifković: Mathematical model of energy efficiency in internal spur gears; *Thermal Science*, <https://doi.org/10.2298/TSCI180118074D>, 2019.
54. D. Miler, D. Žeželj, A. Lončar, K. Vučković: Multi-objective spur gear pair optimization focused on volume and efficiency; *Mechanism and Machine Theory* 125, 185-195, 2018.
55. A. Diez-Ibarbia, A. Fernandez-del-Rincon, M. Iglesias, A. de-Juan, P. Garcia, F. Viadero: Efficiency analysis of spur gears with a shifting profile; *Meccanica* 51(3), 707-723, 2016.
56. A. Diez-Ibarbia, A. Fernandez-del-Rincon, P. Garcia, A. de-Juan, M. Iglesias, F. Viadero: Assessment of load dependent friction coefficients and their influence on spur gears efficiency; *Meccanica* 53(1-2), 425-445, 2018.
57. S. Baglioni, F. Cianetti, L. Landi: Influence of the addendum modification on spur gear efficiency; *Mechanism and Machine Theory* 49, 216-233, 2012.
58. M. Pleguezuelos, J. I. Pedrero, M. B. Sanchez: Analytical expressions of the efficiency of standard and high contact ratio involute spur gears; *Mathematical Problems in Engineering* 2013, 1-14, 2013.

12. PRILOG



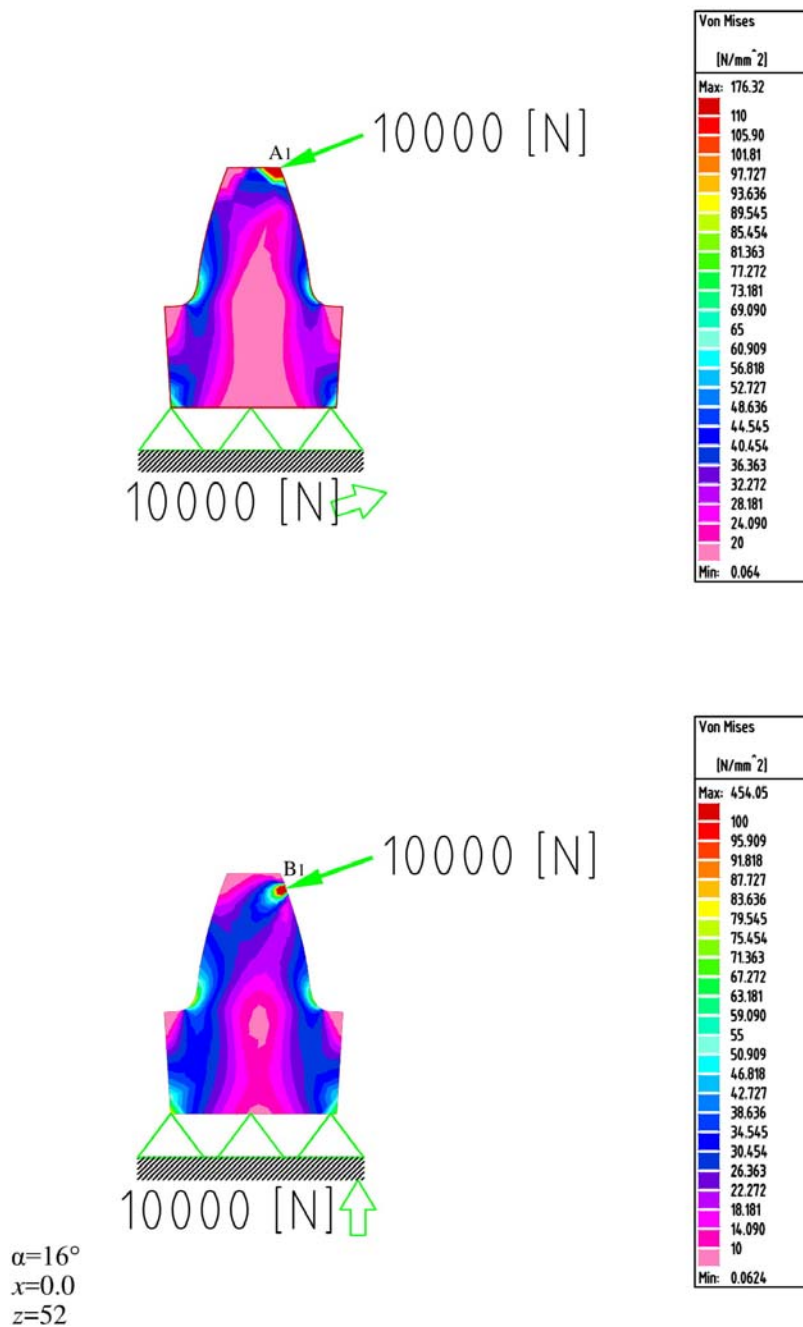
Slika 12.1. Numerički model napona u korenu zupca σ_{F1} u tački A i B

za $\alpha=14^\circ$, $\varepsilon_\alpha=2,44$ i $x_1=x_2=0$



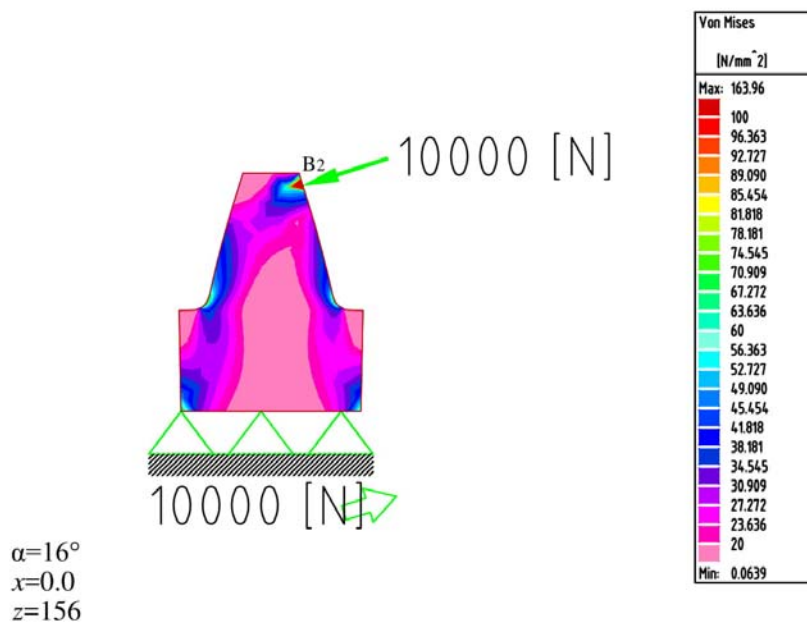
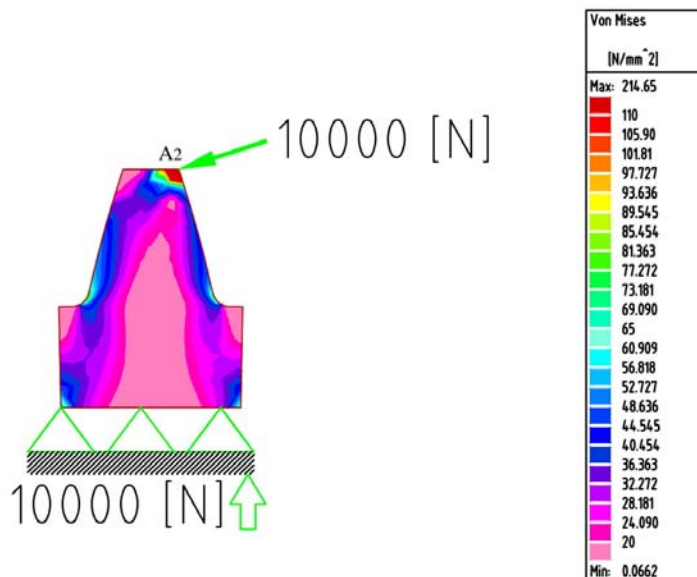
Slika 12.2. Numerički model napona u korenu zupca σ_{F2} u tački A i B

za $\alpha = 14^\circ$, $\varepsilon_\alpha = 2,44$ i $x_1 = x_2 = 0$



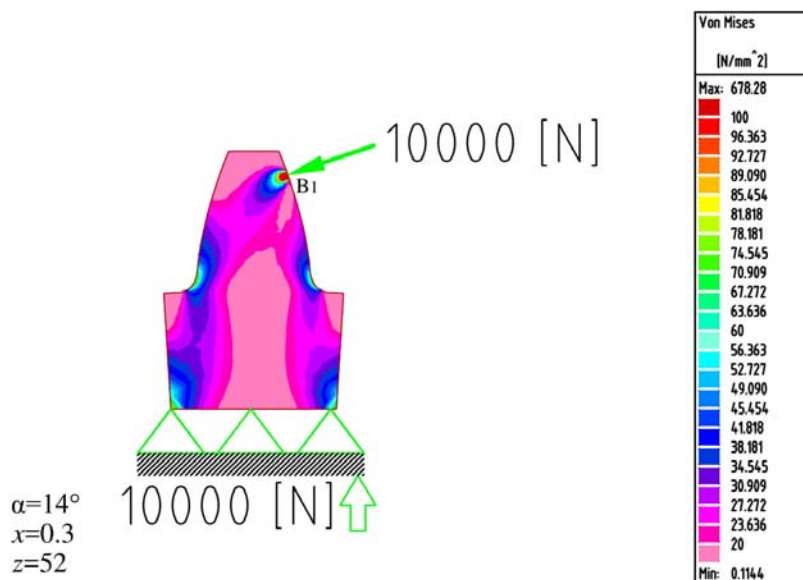
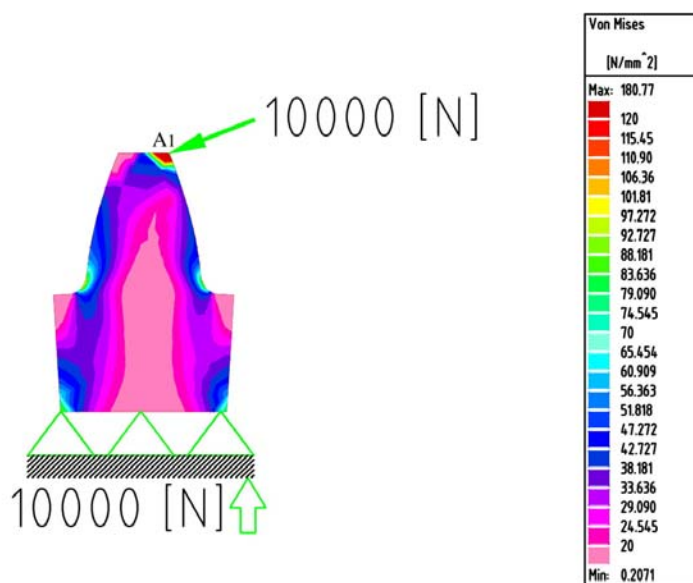
Slika 12.3. Numerički model napona u korenu zupca σ_{F1} u tački A i B

za $\alpha = 16^\circ$, $\varepsilon_\alpha = 2,23$ i $x_1 = x_2 = 0$



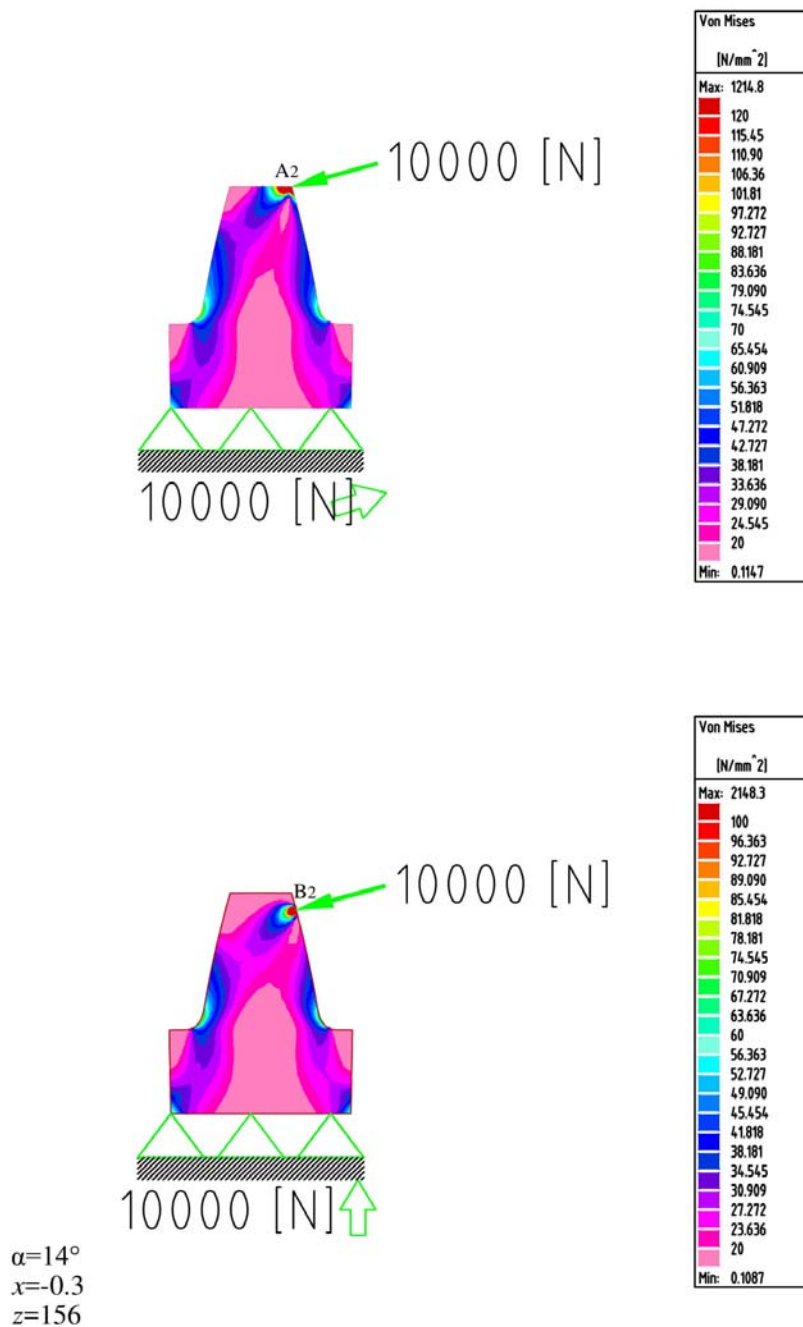
Slika 12.4. Numerički model napona u korenu zupca σ_{F2} u tački A i B

za $\alpha = 16^\circ$, $\varepsilon_\alpha = 2,23$ i $x_1 = x_2 = 0$



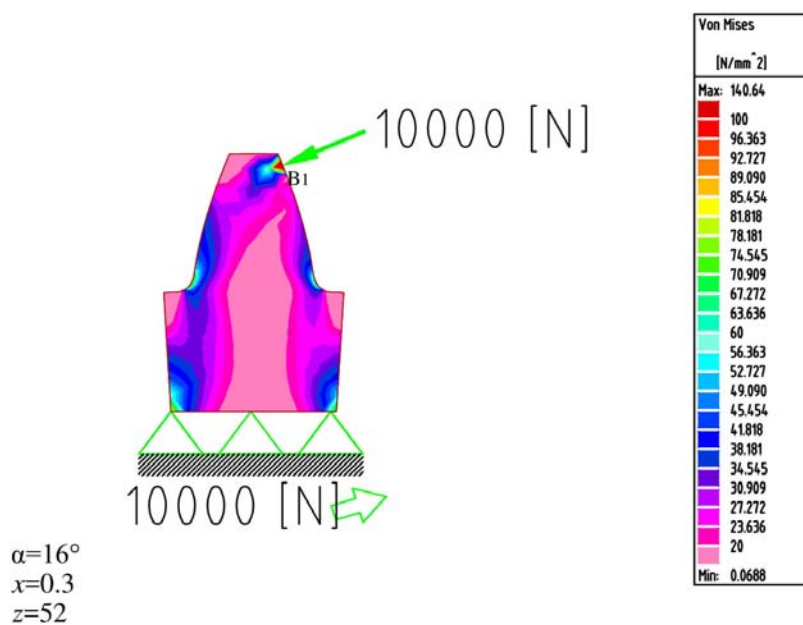
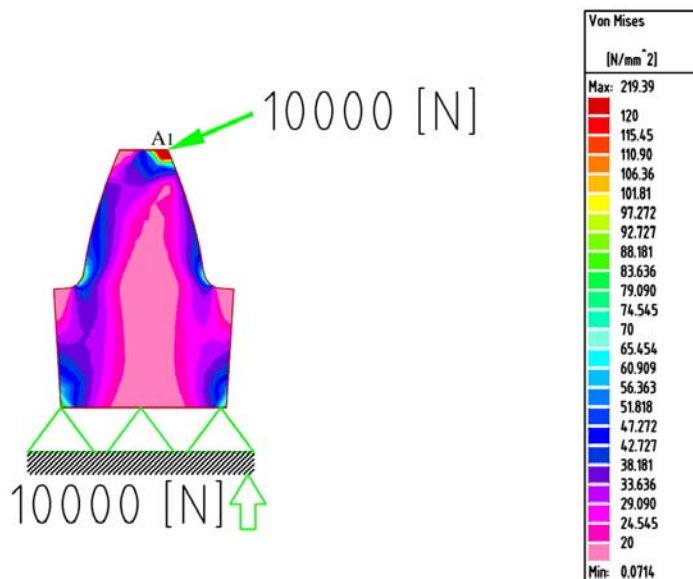
Slika 12.5. Numerički model napona u korenu zupca σ_{F1} u tački A i B

za $\alpha = 14^\circ$, $\varepsilon_\alpha = 2,35$, $x_1 = 0,3$ i $x_2 = -0,3$



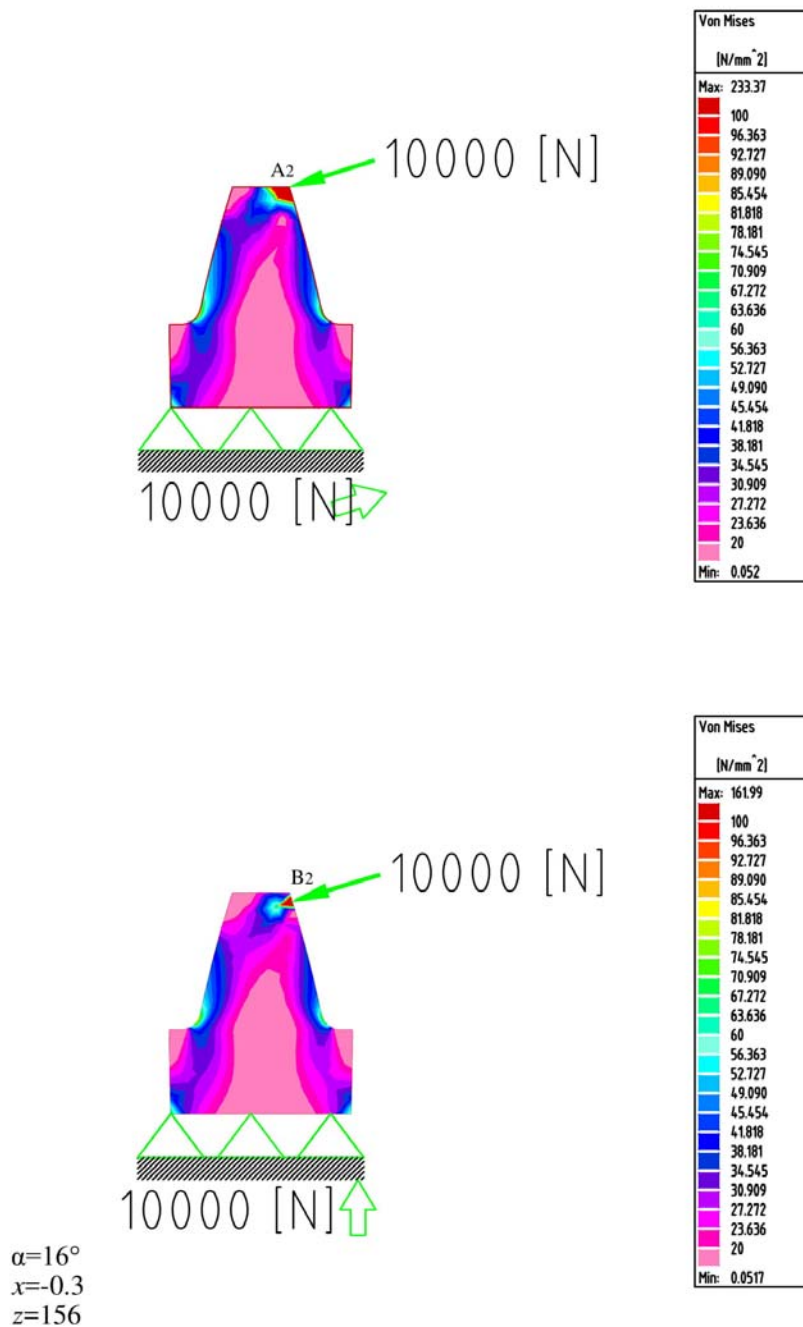
Slika 12.6. Numerički model napona u korenu zupca σ_{F2} u tački A i B

za $\alpha = 14^\circ$, $\varepsilon_\alpha = 2,35$, $x_1 = 0,3$ i $x_2 = -0,3$



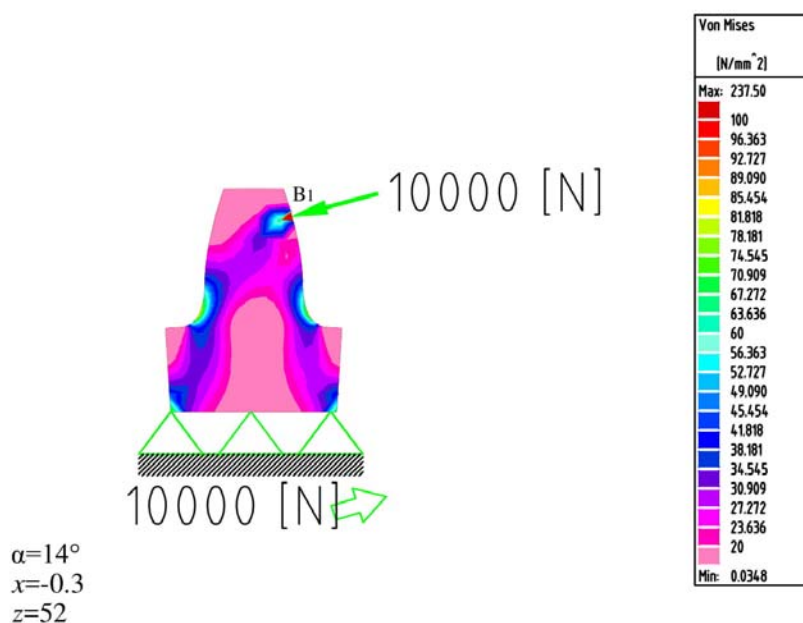
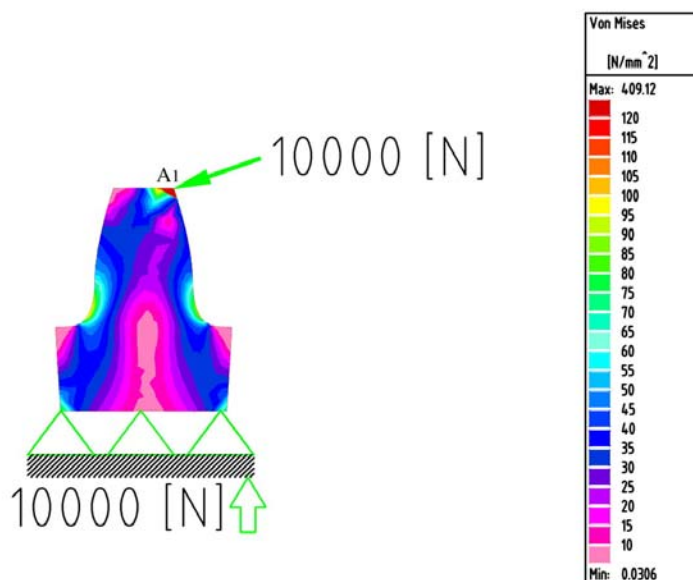
Slika 12.7. Numerički model napona u korenu zupca σ_{F1} u tački A i B

za $\alpha = 16^\circ$, $\varepsilon_\alpha = 2,16$, $x_1 = 0,3$ i $x_2 = -0,3$



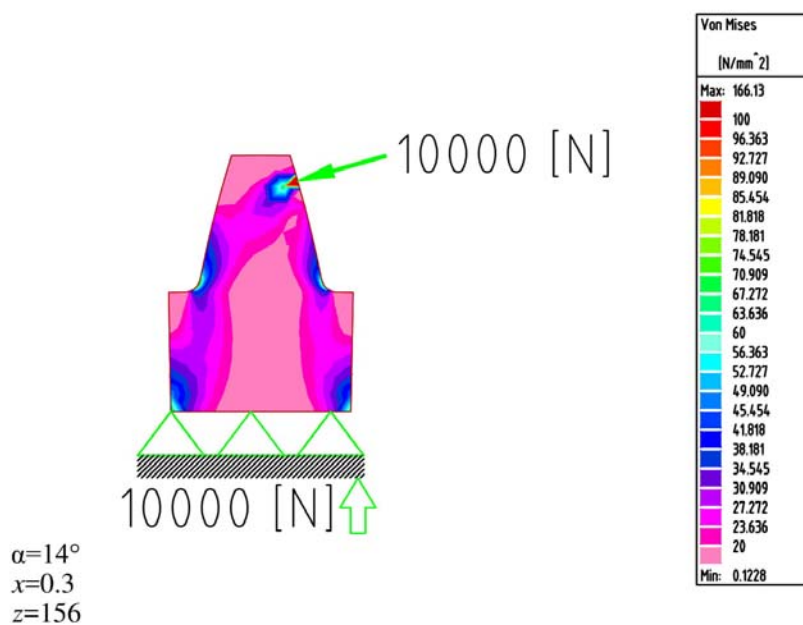
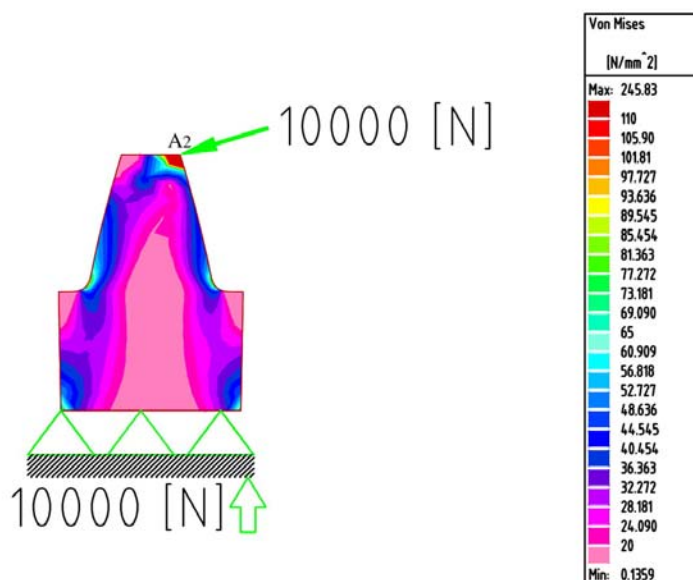
Slika 12.8. Numerički model napona u korenu zupca σ_{F2} u tački A i B

za $\alpha = 16^\circ$, $\varepsilon_\alpha = 2,16$, $x_1 = 0,3$ i $x_2 = -0,3$



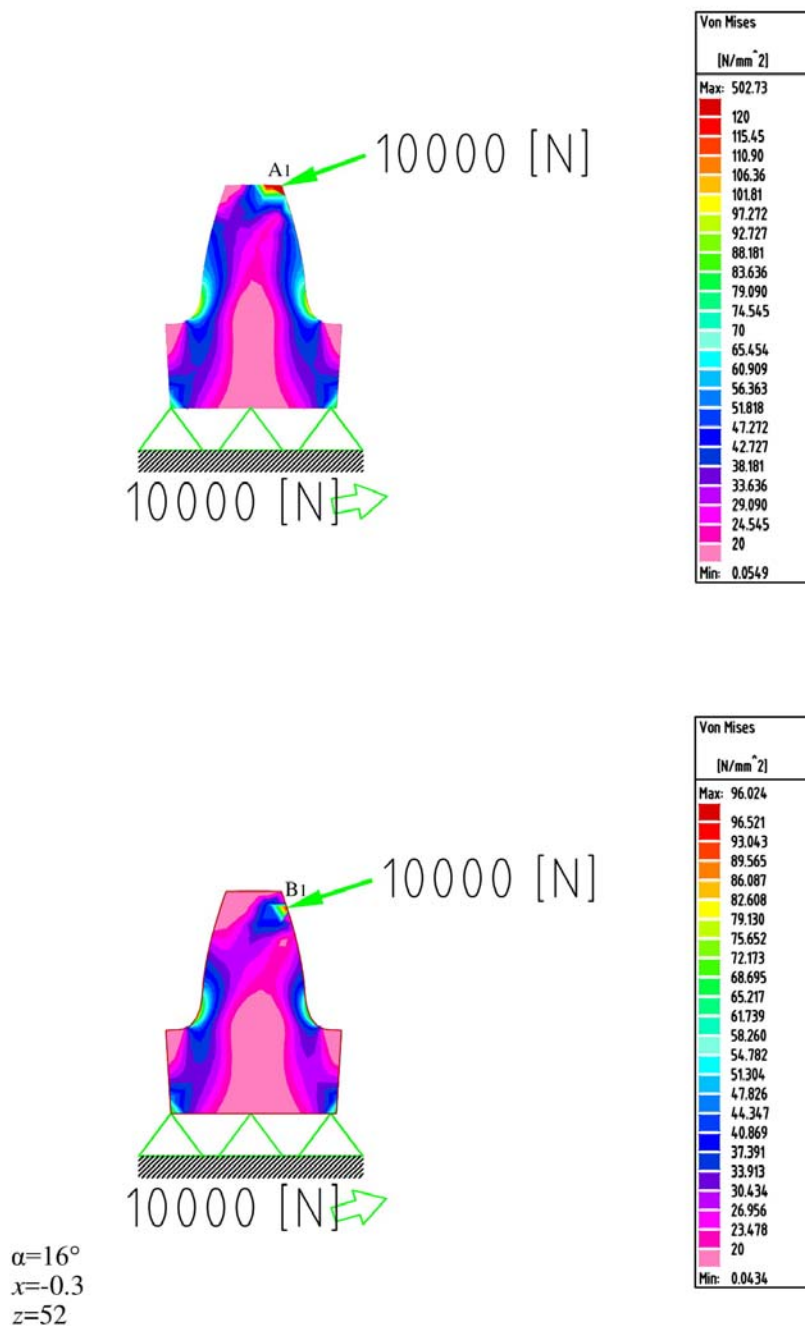
Slika 12.9. Numerički model napona u korenu zupca σ_{F1} u tački A i B

za $\alpha = 14^\circ$, $\varepsilon_\alpha = 2,49$, $x_1 = -0,3$ i $x_2 = 0,3$



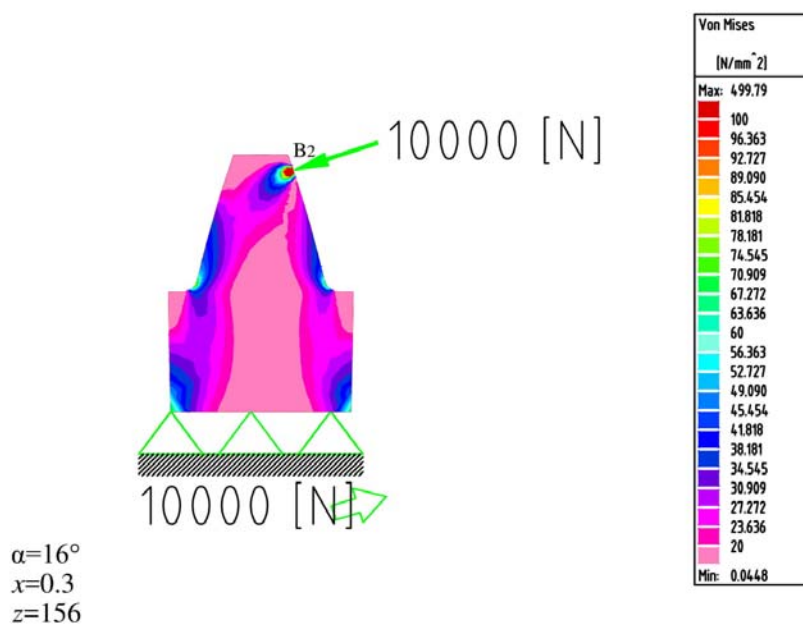
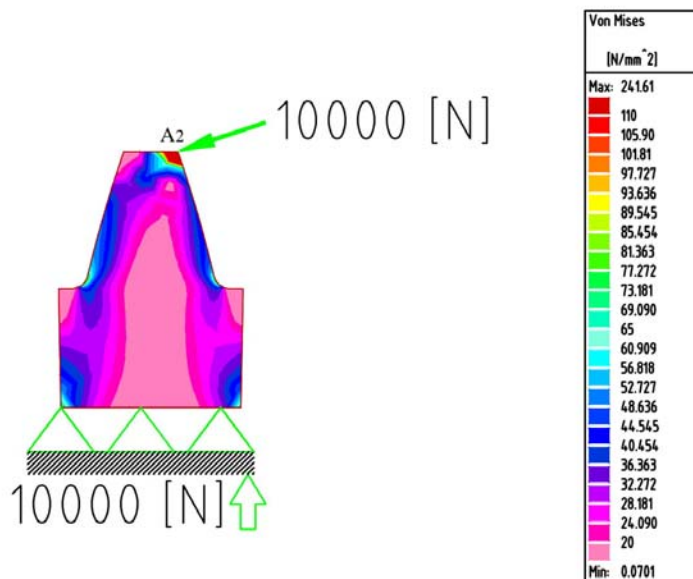
Slika 12.10. Numerički model napona u korenu zupca σ_{F_2} u tački A i B

za $\alpha = 14^\circ$, $\varepsilon_\alpha = 2,49$, $x_1 = -0,3$ i $x_2 = 0,3$



Slika 12.11. Numerički model napona u korenu zupca σ_{F1} u tački A i B

za $\alpha = 16^\circ$, $\varepsilon_\alpha = 2,27$, $x_1 = -0,3$ i $x_2 = 0,3$



Slika 12.12. Numerički model napona u korenu zupca σ_{F_2} u tački A i B

za $\alpha = 16^\circ$, $\varepsilon_\alpha = 2,27$, $x_1 = -0,3$ i $x_2 = 0,3$

BIOGRAFIJA

Predrag Dobratić je rođen 18.08.1980. godine u Jajcu (SR BiH, SFRJ). U Šipovu (SR BiH, SFRJ) je upisao Osnovnu školu „Nemanja Vlatković“ 1987. godine, a u Pančevu je sa odličnim uspehom završio Osnovnu školu „Vasa Živković“ 1995. godine i Mašinsku školu „Pančevo“ 1999. godine.

Vojnotehničku akademiju u Beogradu (smer mornaričkotehničke službe, mašinsko usmerenje, specijalnost brodomašinstvo) je upisao školske 1999/2000. godine, a završio 2004. godine sa opštim uspehom u toku studija 8,73. Na Mašinskom fakultetu Univerziteta u Beogradu je upisao petu godinu studija školske 2007/2008. godine, a završio 2008. godine na Katedri za mašinske konstrukcije i mehanizaciju sa opštim uspehom u toku studija 8,57.

Od 2004. godine je zaposlen na Vojnoj akademiji Univerziteta odbrane u Beogradu, gde je u nastavni proces intezivnije uključen od školske 2006/2007. godine, a od školske 2008/2009. godine izvodi vežbe na osnovnim akademskim studijama iz predmeta Mašinski elementi 1, Mašinski elementi 2 i Osnovi mašinskih elemenata. Na Mašinskom fakultetu Univerziteta u Beogradu je u toku tri školske godine bio uključen u držanje vežbi na osnovnim akademskim studijama iz predmeta Mašinski elementi 1 i Mašinski elementi 2.

Na Vojnoj akademiji Univerziteta odbrane u Beogradu je biran u zvanja asistent-pripravnik (2005. i 2009. godine) i asistent (2014. i 2017. godine). Autor i koautor je jednog dela nastavno-obrazovne literature i nekoliko radova objavljenih na domaćim i međunarodnim konferencijama i u časopisima.

Živi u Pančevu sa suprugom Jelenom, sinom Petrom, ćerkama Lenkom, Petrom i Đurđom.

Изјава о ауторству

Име и презиме аутора _____ Предраг С. Добратић _____

Број индекса _____ Д01/16 _____

Изјављујем

да је докторска дисертација под насловом

НОСИВОСТ И СТЕПЕН ИСКОРИШЋЕЊА ЦИЛИНДРИЧНИХ
ЗУПЧАСТИХ ПАРОВА У УСЛОВИМА ВИШЕСТРУКЕ СПРЕГЕ

- резултат сопственог истраживачког рада;
- да дисертација у целини ни у деловима није била предложена за стицање друге дипломе према студијским програмима других високошколских установа;
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио ауторска права и користио интелектуалну својину других лица.

Потпис аутора

У Београду, 05.08.2019. године

Изјава о истоветности штампане и електронске верзије докторског рада

Име и презиме аутора _____ Предраг С. Добратић _____

Број индекса _____ Д01/16 _____

Студијски програм _____ ОПШТЕ МАШИНСКЕ КОНСТРУКЦИЈЕ _____

Наслов рада НОСИВОСТ И СТЕПЕН ИСКОРИШЋЕЊА ЦИЛИНДРИЧНИХ
ЗУПЧАСТИХ ПАРОВА У УСЛОВИМА ВИШЕСТРУКЕ СПРЕГЕ

Ментор _____ редовни професор др Милета Р. Ристивојевић _____

Изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предао ради похрањена у **Дигиталном репозиторијуму Универзитета у Београду**.

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског назива доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Београду.

Потпис аутора

У Београду, 05.08.2019. године

Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом:

НОСИВОСТ И СТЕПЕН ИСКОРИШЋЕЊА ЦИЛИНДРИЧНИХ
ЗУПЧАСТИХ ПАРОВА У УСЛОВИМА ВИШЕСТРУКЕ СПРЕГЕ

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у Дигиталном репозиторијуму Универзитета у Београду и доступну у отвореном приступу могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио.

1. Ауторство (CC BY)
2. Ауторство – некомерцијално (CC BY-NC)
3. Ауторство – некомерцијално – без прерада (CC BY-NC-ND)
4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима (CC BY-NC-SA)
5. Ауторство – без прерада (CC BY-ND)
6. Ауторство – делити под истим условима (CC BY-SA)

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци.
Кратак опис лиценци је саставни део ове изјаве).

Потпис аутора

У Београду, 05.08.2019. године

1. **Ауторство.** Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце, чак и у комерцијалне сврхе. Ово је најслободнија од свих лиценци.

2. **Ауторство – некомерцијално.** Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела.

3. **Ауторство – некомерцијално – без прерада.** Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела. У односу на све остале лиценце, овом лиценцом се ограничава највећи обим права коришћења дела.

4. **Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима.** Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада.

5. **Ауторство – без прерада.** Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела.

6. **Ауторство – делити под истим условима.** Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада. Слична је софтверским лиценцама, односно лиценцама отвореног кода.