UNIVERZITET U BEOGRADU

FAKULTET ORGANIZACIONIH NAUKA

Selena K. Totić

INTERNI MODELI ZA PROCENU TRŽIŠNOG RIZIKA ZASNOVANI NA USLOVNOM GUBITKU

Doktorska disertacija

Beograd, 2016

UNIVERSITY OF BELGRADE

FACULTY OF ORGANIZATIONAL SCIENCES

Selena K. Totić

INTERNAL MODELS FOR MARKET RISK ASSESSMENT BASED ON EXPECTED SHORTFALL

Doctoral dissertation

Belgrade, 2016

Mentor: dr Milica Bulajić, redovni profesor, Univerzitet u Beogradu, Fakultet organizacionih nauka

Članovi komisije:

dr Vesna Bogojević-Arsić, redovni profesor, Univerzitet u Beogradu, Fakultet organizacionih nauka

dr Miloš Božović, docent, Univerzitet u Beogradu, Ekonomski fakultet

Datum odbrane doktorske disertacije: ___________

INTERNI MODELI ZA PROCENU TRŽIŠNOG RIZIKA ZASNOVANI NA USLOVNOM GUBITKU

Rezime

Upravljanje tržišnim rizicima u finansijskim institucijama se prevashodno zasniva na proceni parametra „vrednost pod rizikom“ (VaR). Za ovakvu praksu je, u najvećoj meri, zaslužna bazelska regulativa koja kreira smernice i preporuke u oblasti upravljanja rizicima, a koje centralne banke većine razvijenih zemalja slede. Pa ipak, svetska finansijska kriza dovela je u pitanje adekvatnost ove mere da predvidi ekstremno rizične događaje, a samim tim i njenu dalju upotrebu u regulatorne svrhe. Kao rešenje nameće se upotreba uslovnog gubitka, relativno nove mere, koja procenjuje očekivani gubitak iznad VaR-a.

Sa tim u vezi je i osnovni cilj ove doktorske disertacije, a to je da obezbedi metodologiju za upravljanje tržišnim rizicima zasnovanu na uslovnom gubitku. To podrazumeva određivanje adekvatnih modela za procenu uslovnog gubitka, modela za testiranje predviđanja, kao i novih kapitalnih zahteva za pokriće tržišnih rizika.

Ključne reči: uslovni gubitak, vrednost pod rizikom, back testiranje, volatilnost, debeli repovi, GARCH, teorija ekstremnih vrednosti, kapitalni zahtevi, simulacija

Naučna oblast: Finansijska ekonomija, matematički i kvantitativni metodi

Uža naučna oblast: Finansijsko predviđanje i simulacija, finansijska ekonometrija

UDK: 330.43:519.2

INTERNAL MODELS FOR MARKET RISK ASSESSMENT BASED ON EXPECTED SHORTFALL

Abstract

Management of market risk in financial institutions is primarily based on the estimation of the “Value-at-Risk” (VaR) parameter. The credit for this practice is largely with the Basel regulation which creates the guidelines and recommendations in the market risk management field, followed by the majority of central banks of the developed countries. However, the world economic crisis has questioned the adequacy of this measure to predict extremely risky events, and thus its further application for regulation purposes. The use of a relatively new measure, the expected shortfall, which estimates the expected loss above VaR, is imposed as a solution.

The main goal of this dissertation is to provide a methodology for managing market risk based on expected shortfall. That implies determination of adequate models for expected shortfall assessment, adequate models for backtesting expected shortfall models, as well as new capital requirements for market risk based on expected shortfall.

Keywords: expected shortfall, Value-at-Risk, backtesting, volatility, fat tails, GARCH, extreme value theory, capital requirements, simulation

Scientific field: Financial economics, Mathematical and Quantitative methods

Scientific subfield: Financial forecasting and simulation, financial econometrics

UDK: 330.43:519.2

SADRŽAJ

1 UVOD

Svetska finansijska kriza 2007-2009 je pokazala svu ranjivost postojećih sistema za upravljanje rizicima. Naime, ovi sistemi nisu uspeli da adekvatno odgovore na izazove koje sa sobom nosi globalizacija tržišta, kao i razvoj kompleksnih finansijskih instrumenata. Velika povezanost tržišta, kao i dostupnost informacija, dovela je do toga se rizici brzo prenose sa jednog tržišta na drugo. Takođe, kompleksnost i velika netransparentnost novih strukturiranih proizvoda, kao što su obezbeđene dužničke hartije (*eng. collateralized debt obligation–CDO),* uslovila je neadekvatnu procenu vrednosti ovih instrumenata, a samim tim i neadekvatnu procenu rizika. Za ovaj period Tett (2009) kaže "Inovacije su postale toliko intenzivne, da su prevazišle razumevanje većine bankara, a da ne pominjemo regulatore". Neadekvatan regulatorni okvir u mnogome je doprineo da maksimizacija profita, bude praćena velikim rastom levridža i preuzimanjem velikog rizika. Tako, na primer, bazelska regulativa propisuje niže kapitalne zahteve za instrumente koji se drže sa svrhom trgovanja, što je podstaklo banke da u svojim trgovinskim portfolijima drže CDO tranše sa visokim rejtingom (Crotty, 2009). Između ostalog, ističu se kritike internih modela za upravljanje tržišnim rizicima, a pre svega njihove zasnovanosti na vrednosti pod rizikom (*eng. Value-at-Risk,* VaR) meri.

Naime, Bazelski komitet za superviziju banaka[1] je 1999. godine doneo odluku, poznatu pod nazivom Bazel II[2] (poslednji put revidirana 2006. godine), kojom su definisane preporuke i

[1] Bazelski komitet za superviziju banaka je komitet osnovan 1974. godine od strane guvernera centralnih banaka Grupe 10 zemalja (Francuska, Nemačka, Italija, Japan, Holandija, Švedska, Švajcarska, Velika Britanija, SAD i Luksemburg) sa ciljem definisanja i usklađivanja standarda i smernica u bankarskoj superviziji zemalja članica.

[2] Pre Bazela II, Bazelski komitet je 1996. godine objavio dokument pod nazivom *Amendment to the Capital Accord to Incorporate Market Risks*, gde se prvi put u kapitalne zahteve za rizik banaka uključuje kapitalni zahtev za tržišne rizike.

pravila za određivanje kapitalnih zahteva ne samo za kreditni rizik, već i za tržišni i operativni rizik banaka. Ovom odlukom se, po prvi put, od banaka zahteva da rezervišu deo kapitala za pokrivanje tržišnog rizika proisteklog iz knjige trgovanja banke. Takođe, ovom odlukom se bankama koje zadovoljavaju određene kvantitativne i kvalitativne standarde, pruža mogućnost da razvijaju sopstvene modele za upravljanje tržišnim rizicima i da ih koriste za procenu kapitalnih zahteva za pokriće tržišnih rizika. U osnovi ovakvog pristupa je motivacija banaka, da adekvatnim praćenjem i merenjem rizika, ostvare niže kapitalne zahteve. Pa ipak, Bazel II kroz upotrebu internih modela za procenu tržišnog rizika promoviše isključivo VaR meru i računanje kapitalnih zahteva na osnovu ove mere.

VaR predstavlja potencijalni gubitak sa određenom verovatnoćom, nastao promenom tržišnih faktora u fiksiranom vremenskom periodu, pod pretpostavkom da su pozicije u portfoliju ostale nepromenjene (Jorion, 1997). Nivo poverenja sa kojim se VaR određuje treba da reflektuje stepen averzije prema riziku banke. Viši stepen averzije prema riziku podrazumeva veću kapitalnu rezervu za pokriće rizika. Sa tim u vezi, Bazel II definiše skup uslova koje VaR mora da zadovolji, kao što su dnevna procena VaR-a sa nivoom poverenja od 99%, period procene VaR-a od deset dana trgovanja i istorijski period od minimum godinu dana na osnovu kojeg se računa VaR. Pa ipak, bankama je ostavljena sloboda u izboru modela, odnosno distribucije prinosa na osnovu koje se VaR određuje. U praksi, najčešće upotrebljavani modeli za procenu VaR-a su analitički metodi i istorijska simulacija. Analitički metodi se zasnivaju na pretpostavci da prinosi portfolija imaju unapred poznatu distribuciju (najčešće normalnu). Imajući u vidu empirijska svojstva prinosa kao što su autokorelacija i heteroskedastičnost, pri modelovanju VaR-a koriste se uslovne distribucije prinosa i ekonometrijski modeli za procenu volatilnosti prinosa. Jedna od osnovnih slabosti ovakvog pristupa je česta pretpostavka o normalnoj raspodeli prinosa. Naime, empirijski rezultati Mandelbrot (1963) pokazuju da normalna raspodela potcenjuje verovatnoće u repovima distribucije prinosa, kojima VaR suštinski pripada. Takođe, McNeil (1997), Da Silva i Mendes (2003), Jondeau i Rockinger (2003) su pokazali da ekstremni događaji nemaju normalnu raspodelu. Sa druge strane, istorijska simulacija procenjuje distribuciju prinosa empirijskom distribucijom prošlih prinosa, izbegavajući pretpostavku o nekoj predefinisanoj distribuciji prinosa. Na taj način ovaj metod nema eksplicitno ugrađen rizik modela, ali može biti neadekvatan prilikom određivanja ekstremnih kvantila, jer ekstrapolacija izvan prošlih opservacija nije moguća (Bekiros i Georgoutsos, 2005).

Iako je VaR, zahvaljujući Bazel II regulativi doživeo pravu ekspanziju u poslednjoj deceniji, postavši industrijski standard u upravljanju rizicima banke, deo akademske javnosti je još i pre svetske finansijske krize upozoravao na određene nedostatke ove mere, kao i kapitalnih zahteva baziranih na VaR-u.

Jedna od najčešćih kritika VaR-a je da ne ispunjava uslove koherentnosti (Artzner et al, 1997) koje dobra mera rizika treba da ispunjava. Uslovi koherentnosti su: monotonost rizika, homogenost rizika, translativna invarijantnost i subaditivnost. Monotonost podrazumeva da ako jedan portfolio daje lošije rezultate od drugog, da je onda rizičniji od drugog. Homogenost podrazumeva da će se, ako promenimo veličinu portfolija za neki faktor λ, pri čemu relativne pozicije instrumenata koji čine portfolio ostanu nepromenjene, rizik multiplikovati λ puta. Translativna invarijantnost podrazumeva da će se, ako dodamo gotovinu u iznosu K u portfolio, rizik portfolija smanjiti za K. Subaditivnost podrazumeva da rizik portfolija koji se sastoji iz više potportfolija ne može biti veći od zbira pojedinačnih rizika potportfolija. VaR ispunjava prva tri uslova, ali ne zadovoljava aksiom subaditivnosti (Acerbi and Tasche 2002). Kod subaditivnih mera rizika diversifikacija portfolija uvek dovodi do smanjenja rizičnosti portfolija, dok kod mera koje ne ispunjavaju ovaj aksiom diversifikacija može dovesti i do veće rizičnosti portfolija, što je u suprotnosti sa osnovnim konceptima merenja rizika. Embrechets, McNeil i Sttraumann (2000) su pokazali da je samo u slučaju eliptičnih distribucija (kao što je normalna distribucija) VaR subaditivna mera.

U kontekstu VaR-a precizna procena verovatnoća ekstremnih promena vrednosti portfolija treba da bude u osnovi procesa upravljanja rizicima. Obzirom da ekstremni događaji po svojoj prirodi pripadaju repovima distribucije prinosa, mnogi autori (Taleb, 2007, Danielsson, 2002) kritikuju pretpostavku o normalnoj distribuciji prinosa, koja se u praksi često koristi prilikom procene VaR-a. Tako najnovije studije o uzrocima svetske finansijske krize često ukazuju na to je da kratak period opservacija zajedno sa pretpostavkom o normalnoj raspodeli u velikoj meri potcenio verovatnoće ekstremnih gubitaka. U prilog tome idu i dnevni padovi svetskih berzanskih indeksa od preko 10% koji su teško predvidivi ukoliko se pretpostavi normalna distribucija prinosa. Takođe, jedna od empirijski dokazanih činjenica prinosa finansijskih instrumenata je spljoštenost veća od normalne (*eng. leptokurtosis*), poznatija pod nazivom “debeli repovi”, koja pokazuje da su verovatnoće ekstremnih događaja (repovi distribucije prinosa) veće nego kod normalne raspodele.

Mnogi autori (Crotty, 2009) ističu da VaR ne daje dovoljno informacija o potencijalnim gubicima, jer predstavlja samo percentil distribucije gubitaka. Acerbi i Tasche (2002) primećuju da, obzirom da predstavlja minimalni gubitak u najgorih x% slučajeva, VaR ne govori ništa o potencijalnim gubicima iznad njegove vrednosti. Tako na primer, ukoliko posmatramo dva portfolija od kojih jedan ima znatno manji VaR, ali znatno veći potencijalni maksimalni gubitak, sa aspekta VaR-a taj portfolio je manje rizičan. Takođe, veliki gubici sa malom verovatnoćom, karakteristični za periode krize, se teško obuhvataju VaR merom. U prilog tome ide i poslednja finansijska kriza koja je pokazala da su promene cena bile takve, da je njihova verovatnoća prema većini modela bila beskonačno mala (Turner, 2009).

Danielsson et al. (2001) ukazuju na to da VaR metodologije tretiraju rizik kao egzogeni proces, u smislu da ove metodologije implicitno pretpostavljaju da su reakcije pojedinačnih tržišnih učesnika na promene tržišnih cena toliko male da nemaju značajan uticaj na tržišnu ravnotežu i da su međusobno nezavisne. Pa ipak volatilnost određuje tržište, i to u velikoj meri kroz ponašanje individualnih učesnika na tržištu. Takođe, neprepoznavanje rizika kao endogenog procesa u mirnim periodima kada se učesnici na tržištu heterogeno ponašaju nema prevelike posledice, ali zato u periodima krize dolazi do značajnog potcenjivanja sistematskog[3] rizika. To se objašnjava time što u periodima krize učesnici na tržištu koristeći slične modele za mitigaciju rizika reaguju na slične načine. Tako na primer u periodu krize prilikom pada cene nekog finansijskog instrumenta, prirodna reakcija tržišnih učesnika je da prodaju taj finansijski instrument, što za posledicu ima dalji pad cena. VaR mere ne samo da ne upozoravaju na rastući rizik, već mogu da budu niske u periodima kada je sistematski rizik visok. To se upravo desilo pred početak svetske finansijske krize kada je prema VaR merama početkom 2007. godine rizik bio nizak, dok je istovremeno sistematski rizik bio visok.

Pored prethodno navedenih nedostataka VaR mera, u stručnoj i akademskoj javnosti česte su kritike kapitalnih zahteva za pokriće tržišnih rizika koji se računaju na osnovu VaR mera. Tako je desetodnevni period za koji se računa VaR-a kritikovan kao previše konzervativan, jer se smatra da se pozicije u knjizi trgovanja mogu u normalnim periodima likvidirati u kraćem periodu. Takođe, Bazel II predlaže da se pri računanju desetodnevnog VaR-a koristi pravilo "kvadratnog korena vremena" (*eng. "square-root-of-time"*), po kojem se desetodnevni VaR dobija kao proizvod jednodnevnog VaR-a i korena iz deset. Ovo pravilo se može koristiti samo ako je ispunjen uslov da prinosi nisu heteroskedastični, što najčešće nije slučaj. Istorijski vremenski period od minimum jedne godine za potrebe računanja VaR-a, takođe je predmet diskusija stručne javnosti. Pa ipak, najviše pažnje i kritika izazvao je multiplikativni faktor i njegova donja granica od tri, jer se smatralo da je njegova vrednost ad hoc ustanovljena, a sama finansijska kriza je dodatno pokazala da tako

[3] Sistematski rizik je rizik da će difolt jedne finansijske institucije dovesti do difolta drugih finansijskih institucija.

dobijeni kapitalni zahtevi nisu bili dovoljni da pokriju nastale gubitke. Turner (2009) u svojoj studiji pokazuje da su kapitalni zahtevi za tržišne rizike u odnosu na ukupne kapitalne zahteve bili procentualno znatno manji u poređenju sa odnosom knjige trgovanja i ukupne aktive banke.

Kao odgovor na prethodne primedbe koje se tiču VaR-a i kapitalnih zahteva za tržišne rizike, a pre svega na svetsku finansijsku krizu, Bazelski komitet 2009, u novom dokumentu "*Revisions to the Basel II market risk framework"*revidira postojeće okvire za praćenje tržišnih rizika. Ova revizija uvodi novu meru rizika – "stres VaR" (*eng. "stressed VaR"*) i shodno tome novi način računanja kapitalnih zahteva. Stres VaR je desetodnevni VaR sa nivoom poverenja od 99% koji se računa na osnovu istorijskih podataka od godinu dana za period u kome su nastali veliki gubici (period stresa). Bazelski komitet naglašava da se dvanaestomesečni period gubitaka nastalih tokom 2007. i 2008. godine može kvalifikovati kao stres period, mada ostavlja opciju da banka sama utvrdi drugi period značajnih gubitaka koji je za njen trgovinski portfolio relevantniji. U skladu sa promenama koje se odnose na dodatnu meru rizika, revizija predviđa novi prošireni kapitalni zahtev koji se sastoji iz zbira starog kapitalnog zahteva i dodatnog kapitalnog zahteva za stres VaR. Kapitalni zahtev za stres VaR je isti kao i kapitalni zahtev za obični VaR (desetodnevni VaR sa nivoom poverenja 99%), s tim da se njegov multiplikativni faktor menja isto kao i multiplikativni faktor za obični VaR, tj. kao rezultat back testiranja običnog VaR-a. Bazelski komitet je nakon objavljenog dokumenta napravio i kvantitativnu studiju koja obuhvata 43 evropske banke sa ciljem da izmeri efekat novih kapitalnih zahteva na potrebnu rezervu kapitala za pokriće tržišnih rizika. Rezultati su pokazali da su se kapitalni zahtevi u najboljem slučaju udvostručili u odnosu na prethodne kapitalne zahteve.

Imajući to u vidu, ali i sve navedene nedostatke VaR-a i kapitalnih zahteva za tržišne rizike zasnovanih na njemu, nameće se pitanje da li u okviru metodologija koje su delom zasnovane na VaR-u, postoje mere koje prevazilaze njegove nedostatke i daju preciznije kapitalne zahteve? Artzner et al. (1997, 1999) predlažu upotrebu uslovnog gubitka (*eng. expected shortfall*). Uslovni gubitak je očekivani gubitak, pod uslovom da je gubitak veći od VaR-a. Praktično uslovni gubitak kao mera rizika govori koliko u proseku možemo izgubiti, ako gubitak pređe vrednost VaR-a. Uslovni gubitak je koherentna mera rizika, jer ispunjava uslov subaditivnosti čime omogućava da se prilikom procene rizika portfolija obuhvati efekat diversifikacije (Tache 2002). Takođe, ova mera daje više informacija o raspodeli repova gubitaka, jer opisuje prosečnu vrednost gubitaka iznad nekog percentila.

U skladu sa opisanim problemima postojećih mera rizika, predmet doktorske disertacije je razvoj internih modela za praćenje tržišnih rizika banaka, koji su zasnovani na konceptu uslovnog gubitka. Sa tim u vezi, analizirano je sedamnaest različitih modela za procenu uslovnog gubitka i testirane su njihove performanse. Takođe, ispitivani su različiti testovi za procenu predviđanja uslovnog gubitka. Konačno, razvijeni su novi kapitalni zahtevi za pokriće tržišnih rizika, koji se baziraju na uslovnom gubitku. Na taj način, dobijen je novi metodološki okvir za razvoj internih modela, zasnovanih na uslovnom gubitku, koji bankama može služiti za procenu internog kapitala. U osnovi je ideja da banke, koje već koriste interne modele za procenu tržišnog rizika, polako prelaze na adekvatniju meru rizika uz neznatne implementacione troškove. Sama disertacija organizovana je po sledećem principu. U poglavlju 2 dat je pregled bazelskog regulatornog okvira za upravljanje tržišnim rizicima. U poglavlju 3 dati su teorijski okvir i metodologije za procenu uslovnog gubitka. U poglavlju 4, predstavljeni su modeli za testiranje predviđanja VaR-a i uslovnog gubitka. U poglavlju 5, uz pomoć modela iz poglavlja 4 izvršena je empirijska analiza performansi sedamnaest prethodno opisanih modela za procenu uslovnog gubitka. Konačno, uz pomoć Monte-Carlo simulacije dobijeni su novi kapitalni zahtevi za tržišne rizike. Poglavlje 6, sadrži zaključna razmatranja.

2 Regulatorni okviri za merenje tržišnih rizika

Prvi koraci u uspostavljanju striktnijeg sistema kontrole i upravljanja rizicima finansijskih institucija su bili definisani od strane Bazelskog komiteta za superviziju banaka 1988. godine u vidu dokumenta "International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards", poznatijeg kao Bazel I. U samom dokumentu navodi se da su dva osnovna cilja Bazela I: jačanje i očuvanje stabilnosti međunarodnog bankarskog sistema, kao i postizanje konzistentnosti u primeni ovog regulatornog okvira od strane banaka u različitim zemljama sa ciljem smanjenja konkurentske nejednakosti. Takođe, svrha ovog dokumenta je da obezbedi osnovne smernice i uslove za komercijalne banke, pre svega u vidu minimalnih standarda za kapitalne zahteve koje treba da ispune zemlje članice (Galatti, 2003). Pa ipak, fokus Bazel-a I je pre svega na kreditnom riziku i ponderisanju rizične aktive. Ponderisanje aktive podrazumeva da se celokupna aktiva banke grupiše u pet kategorija i množi sa ponderima rizika koji odgovaraju različitom nivou kreditnog rizika svake kategorije i variraju od 0% do 100%. Tako rizikom ponderisana aktiva služi za određivanje minimalnih kapitalnih zahteva za pokriće rizika, koji prema Bazelu I, ne smeju da bude ispod 8% aktive pod rizikom. Smernice date kroz Bazel I su vrlo brzo usvojene i implementirane od strane članica G10, ali su ubrzo i naišle na značajne kritike koje se pre svega tiču nemogućnosti adekvatnog merenja i praćenja tržišnih rizika. Jedan od osnovnih problema bio je i taj što prema Bazelu I, sve pozicije aktive se računaju isključivo prema njihovoj knjigovodstvenoj vrednosti, što u slučaju trgovinskih portfolija dovodi do značajnih odstupanja. Takođe, rast aktivnosti trgovanja, globalizacija finansijskih tržišta, ekspanzija derivatnih instrumenata, kao i sekuritizacija finansijske aktive, doprinela je rastu trgovinske izloženosti mnogih banaka, a samim tim i izloženosti tržišnom riziku. Kao posledica različitih pogrešnih odluka i aktivnosti trgovanja, usledila su bankrotstva finansijskih institucija kao što su Barings banka (1995), Sumitomo trgovinska kuća (1995), kao i okrug Orange County

(1994) u Kaliforniji, usled čega je upravljanje tržišnim rizicima dospelo u prvi plan zakonodavstva i tela koje regulišu rad finansijskih institucija.

Kao odgovor na kritike i bankarsku krizu, Bazelski komitet 1999. godine izdaje novi dokument “Amandment to the Capital Accord to Incorporate Market Risks”, koji je 2006. uključen u još sveobuhvatniji dokument “International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards - a Revised Framework”, sa neformalnim nazivom Bazel II. Ovim dokumentom BIS objedinjuje i promoviše četiri osnovne ideje na kojima treba da počiva dobro upravljanje rizicima: identifikaciju svih izvora rizika, procenu rizika koja se zasniva na koherentnom setu pretpostavki, izveštavanje i kontrolu rizika, kao i ublažavanje rizika (eng. *mitigation*). Sa druge strane, cilj dokumenta je da pruži finansijskim institucijama smernice za postizanje optimalne alokacije kapitala za pokriće svih rizika sa kojima se u svom poslovanju suočavaju. Bazel II u mnogome proširuje oblast primene regulatornih zahteva, tako da umesto merenja samo kreditnog rizika, finansijske institucije su po prvi put u obavezi da prate i mere tržišni rizik i operativni rizik. Takođe kvantifikacija svakog od ovih rizika zavisi od tipa podataka, kao i načina merenja rizika. Tako na primer banke se u vidu nižih kapitalnih zahteva podstiču da razvijaju i koriste interne modele u proceni kreditnog, tržišnog i operativnog rizika. Sam dokument koncipiran je po principu “tri stuba”.

Prvi stub, poznatiji pod nazivom “minimalni kapitalni zahtevi” obezbeđuje metodologiju za praćenje i merenje kreditnog, tržišnog i operativnog rizika. Ovim stubom ne samo da je Bazel I proširen za dva nova tipa rizika, već je i pristup merenju kreditnog rizika u mnogome proširen. Naime, u standardizovanom pristupu uvodi se ponderisanje rizične aktive prema rejtinzima autorizovanih rejting agencija. Pa ipak, bankama je omogućeno da ukoliko imaju razvijene sopstvene rejting sisteme za praćenje rizika kreditne aktive, koriste pristup internih rejtinga (*Internal Ratings Based Approach – IRB*). Takođe, u zavisnosti od stepena razvijenosti rejting sistema, banke mogu da koriste osnovni IRB pristup (*Foundation IRB*) ili napredni pristup (*Advanced IRB*). Osnovni IRB pristup podrazumeva da banke uz odobrenje regulatora mogu da koriste interne modele za procenu verovatnoća neizmirenja obaveza (*probability of default*), dok od strane regulatora dobijaju procene gubitaka usled nastanka neizmirenja obaveza (*loss given default – LGD*), kao i faktore konverzije i efektivne ročnosti. Sa druge strane napredni IRB pristup podrazumeva da uz odobrenje regulatora, banke same procenjuju sve prethodno navedene parametre. U oba slučaja banke su suštinski stimulisane da razvijanjem sofisticiranih modela dobijaju preciznije procene verovatnoća neizmirenja obaveza, usled čega će imati niže pondere rizika, a samim tim i niže kapitalne zahteve nego što bi imali standardizovanim pristupom. Sličan princip u određivanju kapitalnih zahteva Bazel II predviđa i za merenje tržišnih i operativnih rizika.

Za razliku od prvog stuba, drugi stub pre svega definiše okvir za internu procenu adekvatnosti kapitala (*Internal Capital Adequacy Assessment Process* – ICAAP), kao i proces supervizije banaka od strane regulatora. U dokumentu se navodi da "proces supervizije nije usmeren samo na obezbeđenje kapitalnih zahteva za pokriće svih rizika, već i na stimulisanje banaka da razvijaju i koriste bolje tehnike upravljanja i kontrole rizika" (Bank for International Settlement, 2006). Banke treba da pokažu da su njihovi interni ciljevi u vezi sa kapitalom u skladu sa celokupnim profilom rizika banke, kao i sa okruženjem u kome posluju. To podrazumeva odgovornost viših menadžera i upravnog odbora za strateško planiranje tekućih i budućih kapitalnih potreba i tolerancija na rizike, zatim uspostavljanje politika i procedura koje obezbeđuju da banka identifikuje, meri i izveštava o svim rizicima, kao i procesa interne kontrole i revizije koji treba da obezbede da se svi procesi upravljanja rizika odvijaju u skladu sa planovima i procedurama. Takođe, od banaka se traži da prate i rizike koji nisu obuhvaćeni prvim stubom, kao što su rizik koncentracije, kamatni rizik bankarske knjige, rizik likvidnosti, strateški i reputacioni rizik. Posebno, u vezi sa tržišnim rizicima, banke koje koriste interne modele za procenu rizika, su u obavezi da sprovode različita stres testiranja, kojima će se potvrditi da su sposobne da zadovolje ne samo minimalne kapitalne zahteve za kapitalom, već i dodatne zahteve koji mogu nastati usled različitih šokova na tržištu. Sa druge strane, od supervizora se traži da redovno vrše reviziju i ocenu internih modela za procenu adekvatnosti kapitala, kao i kvaliteta celokupnog sistema za upravljanje rizicima i sistema interne kontrole. Ukoliko ustanove da banka ne ispunjava sve uslove navedene prvim i drugim stubom, supervizori su dužni da na vreme reaguju i da ukoliko je potrebno traže povećanje kapitalnih zahteva.

Konačno, treći stub se odnosi na "tržišnu disciplinu" i daje smernice koje se pre svega tiču obelodanjivanja podataka široj javnosti, čime se omogućuje da investitori, analitičari, druge banke i rejting agencije same procenjuju kapitalnu adekvatnost određene banke. Na taj način učesnici na tržištu mogu da adekvatno nagrade ili kazne banke u zavisnosti od toga kako upravljaju sopstvenim rizicima, a samim tim i utiču na njihov odnos prema riziku. Od finansijskih institucija se traži da naprave formalne politike, kojima se definiše šta se obelodanjuje od podataka i koliko često. Preporuke su da se izveštava o generalnoj strukturi kapitala, o pokazateljima adekvatnosti kapitala, o rezervama kapitala za pokriće kreditnog, tržišnog i operativnog rizika, kao i o tehnikama i metodama koje banka koristi za identifikaciju, merenje i kontrolu rizika.

Ono što je svakako najveća novina ovog dokumenta je uvođenje praćenja i procena tržišnih i operativnih rizika. Tržišni rizik je definisan kao rizik od gubitaka u bilansnim i vanbilansnim pozicijama usled promena tržišnih faktora, dok je operativni rizik definisan kao rizik od gubitaka usled neadekvatnih i neuspešnih internih procesa, ljudi i sistema ili eksternih događaja (Bank for International Settlement, 2006). Kao glavni izvori tržišnog rizika navode se: promene cena akcija, promene kamatnih stopa i cena na njima baziranih finansijskih instrumenata, promene deviznog kursa i promene cena sirovina. Takođe, kao neophodan preduslov za praćenje tržišnih rizika, Bazel II razdvaja knjigu trgovanja (eng. trading book) i bankarsku knjigu. Tako npr. prema Odluci o Adekvatnosti kapitala[4] (Narodna banka Srbije, 2011) koja je pisana na osnovu Bazel II direktiva stoji: "Banka je dužna da u knjigu trgovanja rasporedi sve pozicije u finansijskim instrumentima i robi koje

---

[4] U ovoj disertaciji je korišćena terminologija definisana ovom odlukom.

se drže sa namerom trgovanja ili radi zaštite od rizika po osnovu pozicija u drugim finansijskim instrumentima iz te knjige, a za koje ne postoje ograničenja da se njima trguje ili štiti od rizika”. Takođe, pod pozicijama u finansijskim instrumentima i robi koje se drže sa namerom trgovanja, suštinski se podrazumevaju one pozicije koje banka zauzima sa namerom da ih u kratkom roku proda i na taj način ostvari dobit. Kapitalni zahtevi za rizik koji proističe iz promena cene akcija i kamatnih stopa (kao i iz njih izvedenih finansijskih instrumenata) se isključivo primenjuju na pozicije iz knjige trgovanja, dok se kapitalni zahtevi za devizni i robni rizik primenjuju na pozicije iz obe knjige. Bazel II predviđa dve metodologije za računanje kapitalnih zahteva za tržišne rizike: standardizovani pristup (eng. *Standardized Approach*) i pristup internih modela (eng. *Internal Model Approach*). Standardizovani pristup podrazumeva primenu konstantnih pondera za rizike, propisanih od strane BIS-a, na različite finansijske instrumente, dok pristup internih modela podrazumeva primenu sofisticiranih modela za procenu dnevne izloženosti tržišnom riziku. Imajući u vidu razlike u kapitalnim zahtevima između ove dve metodologije, banke su praktično stimulisane da razvijaju interne modele za procenu rizika, kako bi dobile odobrenje za primenu IMA pristupa i na taj način ostvarile niže kapitalne zahteve.

2.1 Standardizovani pristup za merenje tržišnih rizika

Standardizovani pristup za merenje tržišnih rizika zasniva se na „blokovskoj“ metodologiji (eng. *“building block”*), prema kojoj se kapitalni zahtevi računaju posebno za svaku poziciju iz knjige trgovanja, u zavisnosti od toga kom tipu tržišnog rizika je izložena. Na taj način se posebno prate i računaju cenovni rizik akcija, rizik promene kamatnih stopa, devizni i robni rizik, i kao posledica toga, kapitalni zahtevi za ukupni tržišni rizik dobijaju se kao zbir kapitalnih zahteva za svaku prethodno navedenu kategoriju tržišnog rizika (videti Tabelu 1).

U osnovi ovakvog metodološkog okvira je ideja da se potencijalni gubitak zasniva na linearnoj vezi između različitih faktora tržišnog rizika i finansijskih instrumenata. Kao takav, potencijalni gubitak se može izraziti kao proizvod: pozicije, senzitivnosti vrednosti pozicije na promenu relevantnih faktora tržišnog rizika i potencijalnih promena tržišnih faktora (Gallati, 2013), što se može predstaviti sledećom jednačinom:

$$\Delta_{\mathrm{v}} = \mathrm{v} \cdot \mathrm{s} \cdot \Delta_{\mathrm{f}} \tag{2.1.1}$$

gde su Δ_{v} - promena vrednosti pozicije, v – vrednost pozicije, s – senzitivnost i Δ_{f} promena relevantnog tržišnog faktora. Takođe, ukoliko su promene tržišnih faktora u istom smeru ovakav koncept podrazumeva da su korelacije između njih +1, dok u slučaju promena u suprotnom smeru podrazumeva da su korelacije -1. Iz prethodno navedenog, može se zaključiti da standardizovani pristup predstavlja značajnu simplifikaciju realnosti, jer u potpunosti zanemaruje efekat diversifikacije, koji proizilazi iz korelacija različitih tržišnih faktora, a samim tim i konzervativniji pristup u merenju tržišnih rizika.

Pozicija	Dekompozicija rizika
Kamatno osetljivi instrumenti	**Opšti cenovni rizik:** 1. Metod dospeća 2. Metod trajanja **Specifični cenovni rizik:** proizvod neto pozicije po izdavaocu i pondera rizika (od 0% do 12%)
Vlasničke hartije od vrednosti	**Opšti cenovni rizik:** 8% neto pozicije po određenom tržištu **Specifični cenovni rizik:** 8% neto pozicije po izdavaocu ili 4% neto pozicije ukoliko je portfolio likvidan i dobro diversifikovan
Devizna imovina	• 10% od neto dugačkih ili neto kratkih pozicija, u zavisnosti koje su veće • za plemenite metale 10% neto pozicija
Roba	**Pojednostavljeni pristup:** 15% neto pozicije (duge ili kratke) za svaki tip robe i 3% bruto (duga+kratka) pozicije za svaki tip robe **Pristup lestvice dospeća:** 15% duge ili kratke pozicije koja je preostala nakon netiranja po različitim vremenskim dospećima

Tabela 1. Kapitalni zahtevi za tržišni rizik - standardizovani pristup

Kao što se iz prethodne tabele vidi tržišni rizik za dužničke i vlasničke hartije od vrednosti obuhvata dve komponente:

- *Specifičan cenovni rizik* – rizik od gubitaka usled promena koje su karakteristične za konkretne hartije od vrednosti, a ne za opšte tržišne uslove i uglavnom je vezan za stanje emitenta date hartije od vrednosti (npr. kao što su promene rejtinga emitenata hartija, ponuda za preuzimanje kompanija, itd.)

- *Opšti cenovni rizik* – rizik od gubitaka usled promena na samom tržištu na kome je hartija kotirana (npr. promene u ročnoj strukturi kamatnih stopa, fluktuacije deviznog kursa, itd.).

Takođe, kritičan korak u primeni standardizovanog pristupa merenju tržišnog rizika je pravilno mapiranje pozicija. Naime sve pozicije u knjizi trgovanja moraju da imaju tekuće tržišne cene koje se dnevno ažuriraju (eng. *mark-to-market*), dok pozicije u derivatima moraju da se dekomponuju na pozicije u hipotetičkim instrumentima na koje se dati derivat odnosi.

2.1.1 Cenovni rizik po osnovu dužničkih hartija od vrednosti

Cenovni rizik po osnovu dužničkih hartija od vrednosti je rizik promena cena ovih hartija usled promene kamatnih stopa (NBS, 2011). Hartije od vrednosti podložne ovom tipu rizika obuhvataju sve dužničke hartije sa promenljivom ili fiksnom kamatnom stopom, obveznice bez kupona, derivate koji se odnose na kamatnu stopu, kao i konvertibilne obveznice, ukoliko se njima trguje kao sa dužničkim hartijama (Crouhy et al., 2006). Kapitalni zahtevi za ovaj tip rizika određuju se kao zbir kapitalnih zahteva za specifični cenovni rizik i opšti cenovni rizik.

Kapitalni zahtev za *specifični cenovni rizik* treba da štiti banku od nepoželjnih promena cena dužničkih instrumenata izazvanih faktorima koji se odnose na emitenta datog instrumenta. Određivanje kapitalnih zahteva za specifični cenovni rizik podrazumeva da banke raspoređuju neto pozicije u dužničkim instrumentima u određene kategorije prema emitentu hartije, rejtingu emitenta i periodu do dospeća, a zatim ih množe odgovarajućim ponderima. Tako npr. prema Bazelu II državne obveznice i kvalifikovane dužničke hartije (hartije čiji je rejting investiciono prihvatljiv - eng. *investment-grade*) u zavisnosti od perioda do dospeća mogu imati pondere od 0% do 1.6%, dok ostale dužničke hartije sa nižim kreditnim rejtingom ili koje nemaju rejting mogu imati pondere od 8% do 12%.

Kapitalni zahtevi za *opšti cenovni rizik* treba da štite banku od promena cena hartija od vrednosti nastalih usled promene opšteg nivoa kamatnih stopa. Prilikom računanja ovih kapitalnih zahteva banka može da izabere ili metod dospeća (eng. *maturity method*) ili metod trajanja (eng. *duration method*). Bez obzira na metod primene kapitalni zahtevi za opšti cenovni rizik se računaju za svaku valutu odvojeno i obuhvataju sledeće korake:

1. Određivanje ponderisane neto kratke ili duge pozicije za svaku klasu dospeća

2. Određivanje manjeg dela usklađenih pozicija u svakoj klasi dospeća/trajanja (vertikalno usklađivanje – eng. *vertical dissallowance*)

3. Određivanje većeg dela usklađenih pozicija između različitih klasa dospeća/trajanja (horizontalno usklađivanje – eng. *horizontal disallowance*)

Metod dospeća podrazumeva da banke sve neto pozicije u dužničkim hartijama raspoređuju u 3 zone i 15 klasa dospeća i to prema preostalom dospeću (ukoliko su u pitanju hartije od vrednosti sa fiksnom kamatnom stopom) ili prema periodu preostalom do određivanja sledeće kamatne stope (ukoliko su u pitanju hartije od vrednosti sa promenljivom kamatnom stopom); i prema kamatnoj (kuponskoj) stopi. Za svaku klasu postoje prethodno definisani ponderi rizika, koji treba da reflektuju osetljivost cena pozicija na pretpostavljenu promenu kamatnih stopa i koji variraju od 0.1% (prva klasa, zona 1) do 12.5% (petnaesta zona sa dospećem preko 20 godina). Nakon ponderisanja neto dugih i kratkih pozicija za svaku klasu dospeća, prelazi se na vertikalno usklađivanje pozicija u okviru istih klasa dospeća, a zatim na horizontalno usklađivanje unutar zona i između zona.

Za razliku od metoda dospeća, metod trajanja podrazumeva da banke uz odobrenje regulatora same računaju za svaku poziciju pondere rizika koji reflektuju osetljivost cena na promenu kamatne stope. Prema Odluci o adekvatnosti kapitala (NBS, 2011) kao mera osetljivosti na promenu kamatnih stopa predlaže se modifikovano trajanje (eng. modified duration). Na osnovu modifikovanog trajanja pozicije se raspoređuju u jednu od 15 klasa sa različitim trajanjem. Nakon toga računaju se pozicije ponderisane trajanjem kao proizvod tržišne vrednosti dužničke hartije od vrednosti, modifikovanog trajanja i pretpostavljene promene kamatne stope. Zatim se pristupa vertikalnom, a kasnije horizontalnom usklađivanju, pri čemu su ponderi za horizontalno usklađivanje isti kao kod metoda dospeća.

2.1.2 Cenovni rizik po osnovu vlasničkih hartija od vrednosti

Kao i kod dužničkih hartija od vrednosti, kapitalni zahtev za cenovni rizik po osnovu vlasničkih hartija od vrednosti se određuje kao zbir kapitalnih zahteva za specifični cenovni rizik i kapitalnih zahteva za opšti cenovni rizik. Pod vlasničkim hartijama od vrednosti podrazumevaju se akcije, konvertibilne hartije od vrednosti koje se ponašaju kao akcije, derivati koji su vezani za akcije, kao i berzanski indeksi.

Specifični cenovni rizik je rizik od promene cene vlasničkih hartija od vrednosti usled različitih faktora koji se tiču emitenta vlasničke hartije, a ne finansijskog tržišta na kome se kotira data hartija. Prilikom određivanja kapitalnih zahteva za ovaj tip rizika, primenjuje se ponder od 8% na bruto[5] poziciju u vlasničkim hartijama od vrednosti, osim u slučaju dobro diversifikovanog i likvidnog portfolija kada taj ponder iznosi 4%.

Sa druge strane, opšti cenovni rizik je rizik od promene cene vlasničke hartije od vrednosti usled promena na finansijskom tržištu na kojem se datom hartijom trguje. Određuje se tako

---

[5] Bruto pozicija se računa kao suma apsolutnih vrednosti svih dugih i kratkih pozicija u vlasničkim instrumentima

što se na neto[6] poziciju u vlasničkim hartijama od vrednosti primenjuje ponder od 8%. Neto pozicije se računaju odvojeno za različita nacionalna tržišta.

2.1.3 Devizni rizik

Devizni rizik je rizik od nastanka negativnih efekata na finansijski rezultat i kapital banke usled promene deviznog kursa, a banka mu je izložena po osnovu pozicija koje se vode u knjizi trgovanja i bankarskoj knjizi. Prvi korak u određivanju kapitalnih zahteva za devizni rizik je računanje neto otvorene devizne pozicije u svakoj valuti i neto otvorene pozicije u zlatu. Neto otvorena pozicija banke predstavlja zbir neto spot pozicija banke, neto forvard pozicija[7], garancija i sličnih vanbilansnih stavki, neto delta ekvivalenta svih valutnih opcija i opcija na zlato, kao i buduće neto prihode/rashode koji nisu još knjigovodstveno evidentirani, ali su u potpunosti zaštićeni. Prilikom računanja neto otvorene pozicije, banke imaju mogućnost da koriste jednostavni pristup (eng. *shorthand* method) koji tretira sve valute na isti način ili uz odobrenje regulatora pristup internih modela koji obuhvata stvaran rizik koji zavisi od kompozicije portfolija banke.

Jednostavan pristup podrazumeva da se ukupna neto otvorena devizna pozicija određuje kao zbir veće od apsolutnih vrednosti ukupne duge devizne pozicije banke (zbir svih neto dugih deviznih pozicija u pojedinim valutama) i ukupne kratke devizne pozicije (zbir svih neto kratkih deviznih pozicija u pojedinim valutama) i apsolutne vrednosti neto pozicije (duge ili kratke) u zlatu. Kapitalni zahtev za devizni rizik je definisan kao 8% ukupne neto otvorene pozicije banke.

---

[6] Neto pozicija računa se kao apsolutna razlika između zbira svih dugih pozicija u vlasničkim instrumentima i zbira svih kratkih pozicija

[7] Neto forvard pozicija predstavlja razliku između svih iznosa koji će biti primljeni i sivh iznosa koji će biti plaćeni po osnovu valutnih forvard ugovora, valutnih fjučers ugovora i hipotetičkih iznosa svop ugovora koji nisu uključeni u spot poziciju

2.1.4 Robni rizik

Standardizovani pristup za merenje robnog rizika pogodan je jedino za finansijske institucije koje nemaju značajne pozicije u robi. Ovo je prevashodno iz razloga što su cene robe mnogo volatilnije i složenije za predviđanje nego što su devizni kurs ili kamatne stope. To je posledica manje likvidnih robnih tržišta, kao i veće zavisnosti cene robe od ponude i potražnje. Tako npr. usled nedovoljne likvidnosti, finansijska institucija može da se nađe u situaciji da ne može da zatvori kratku poziciju. Takođe, banke koje u svojim portfolio strategijama ulažu u pozicije u finansijskim derivatima na robu izložene su pored rizika od promene spot cena robe i baznom riziku (eng. *basis risk*), kamatnom riziku, kao i riziku gepa forvarda (eng. *forward gap risk*). Bazni rizik je rizik da će veza između cena slične robe da se menja tokom vremena, dok je rizik gepa forvarda rizik od promene cene forvarda koji nije potekao od promene kamatnih stopa. Standardizovani pristup podrazumeva dva načina određivanja kapitalnih zahteva za robni rizik: pojednostavljeni pristup (eng. *simplified approach*) i pristup lestvice dospeća (eng. *maturity ladder approach*).

Pojednostavljeni pristup predviđa za svaku pojedinačnu robu računanje neto pozicije (apsolutna vrednost razlike dugih i kratkih pozicija) i računanje bruto pozicije (zbir apsolutnih iznosa dugih i kratkih pozicija). Kapitalni zahtev se dalje računa kao zbir 20% neto pozicije u robi i 3% bruto pozicije.

Pristup lestvice dospeća podrazumeva da se sve pozicije u istoj robi raspoređuju u 7 različitih klasa dospeća, pri čemu zalihe u robi pripadaju prvoj klasi dospeća. Takođe, banka može da izvrši netiranje[8] pozicija u istoj robi i da unese netirane iznose u odgovarajuću klasu dospeća, samo ukoliko te pozicije imaju isti datum dospeća (NBS,

---

[8] Netiranje podrazumeva prebijanje suprotnih pozicija u identičnim haritjama od vrednosti ili robi (NBS, 2011).

2011). Za svaku vremensku zonu suma dugih i kratkih pozicija koje su usklađene množi se sa spot cenom robe i stopom raspona date zone (eng. *spread rate*). Iznos neusklađene duge/kratke pozicije u jednoj klasi dospeća poredi se sa iznosom neusklađene pozicije kratke/duge pozicije u sledećoj klasi dospeća i ukoliko su ti iznosi isti oni čine usklađenu poziciju između zona, dok ukoliko nisu ono što preostane čini neusklađenu poziciju između zona. Na taj način kapitalni zahtev za robni rizik se računa kao zbir:

- usklađenih pozicija za svaku klasu dospeća pomnoženu stopom raspona i tekućom tržišnom cenom robe
- apsolutnog iznosa usklađenih pozicija između dve klase dospeća za svaku klasu dospeća za koju je preneta neusklađena pozicija iz prethodne klase dospeća pomnoženog sa 0.6% i tekućom tržišnom cenom
- apsolutnog iznosa preostale neusklađene pozicije pomnoženog sa 15% i tekućom tržišnom cenom robe.

Imajući u vidu volatilnost i korelaciju cena robe i finansijskih derivata na robu i, sa druge strane, to da oba pristupa koriste iste pondere za različite vrste roba, može se zaključiti da standardizovani pristup robnom riziku predstavlja uprošćen pristup koji nije pogodan za sve finansijske institucije koje imaju veću izloženost ovom tipu rizika.

2.2 Pristup internih modela za merenje tržišnih rizika

Jedan od osnovnih nedostataka standardizovanog pristupa je što se agregiranjem kapitalnih zahteva, koji se računaju posebno za svaki tip tržišnog rizika, efekat diversifikacije portfolija u potpunosti zanemaruje. Pretpostavka o postojanju perfektnih korelacija između različitih tipova tržišnog rizika precenjuje rizik i dovodi do viših kapitalnih zahteva. Takođe, ponderi rizika koji se koriste kod svih tipova rizika su delimično proizvoljno izabrani i ne obuhvataju na pravi način volatilnost određene klase instrumenata.

Kao odgovor na prethodno navedene nedostatke standardizovanog pristupa Bazelski komitet je 1996. u amandmanu na Bazel I doneo odluku kojom se po prvi put omogućava bankama da same razvijaju i koriste svoje modele za procenu rizika, kao i na njima bazirane kapitalne zahteve (Jorion, 2000). Ova odluka je posledica prepoznavanja činjenice da velike banke imaju kapacitete da razvijaju bolje sisteme za upravljanje rizikom nego što je regulator u stanju da predvidi. Takođe, u osnovi ovakvog pristupa je ideja da kapitalne zahteve treba modelovati prema stvarnom riziku kojem su izložene finansijske institucije, a ne prema pristupu koji je isti za sve bez obzira na specifičnosti svake finansijske institucije. Generalno, pristup internih modela (IMA) je konzistentan sa promenom fokusa supervizora od striktno merenja rizika, ka sveobuhvatnijoj proceni celokupnog sistema upravljanja rizicima (Lopez and Saidenberg, 2000).

2.2.1 Kvalitativni i kvantitativni standardi za primenu IMA pristupa

Da bi primenjivale pristup internih modela, banke su obavezi da ispune određene kvalitativne i kvantitativne kriterijume. Kvalitativni kriterijumi treba da pokažu da su banke sposobne da koriste sopstvene modele za procenu tržišnog rizika, kao i da im je sistem upravljanja rizika konceptualno ispravan i implementiran sa integritetom. Kvalitativni kriterijumi obuhvataju:

- *Postojanje nezavisne organizacione jedinice za kontrolu rizika,* koja je odgovorna za kreiranje i implementaciju sistema za upravljanje rizicima, dnevnu procenu rizika, kao i izveštavanje direktno izvršnom odboru banke. Ovakva organizaciona struktura treba da štiti banku od neadekvatnih aktivnosti, pre svega odeljenja za trgovanje, kao što su kršenje trgovinskih limita

- Redovno *back testiranje* (eng. *back*-testing) internog modela za procenu rizika koje podrazumeva ex-post poređenje mera rizika, dobijenih modelom, sa ostvarenim dnevnim promenama portfolija

- *Aktivno učestvovanje upravnog i izvršnog odbora* u procesu kontrole rizika, pri čemu dnevni izveštaji jedinice za kontrolu rizika treba da budu analizirani od strane dela menadžmenta koji ima dovoljno ovlašćenja da smanji ili ograniči pozicije koje zauzima organizaciona jedinica zadužena za ugovaranje tržišnih transakcija, kao i da smanji ili ograniči ukupnu izloženost tržišnim rizicima

- *Integracija internog modela za procenu rizika* u dnevno upravljanje rizicima, kao ključnog faktora u procesu planiranja i kontrole profila rizika banke.

- *Redovno stres testiranje* čije rezultate analizira izvršni odbor banke i u skladu sa kojima interno procenjuje adekvatnost kapitala i, ukoliko je potrebno, menja unutrašnje akte i limite u vezi sa aktivnostima trgovanja. Stres testiranje treba da identifikuje događaje koji mogu imati veliki uticaj na trgovinski portfolio banke, kao i da kroz različita stres scenarija izmeri potencijalne efekte na pozicije banke

- *Postojanje procedura* za praćenje i obezbeđenje usklađenosti sa unutrašnjim aktima i kontrolnim mehanizmima, koji se tiču funkcionisanja sistema za upravljanje rizicima. Takođe, od banaka se očekuje da imaju dobro dokumentovan sistem za upravljanje rizicima.

- *Interna revizija* banke koja najmanje jednom godišnje treba da vrši procenu procesa upravljanja tržišnim rizicima, u okviru koje, pored analiziranja aktivnosti jedinice za upravljanje rizicima, analizira i aktivnosti jedinice za ugovaranje tržišnih transakcija.

Pored kvalitativnih standarda, za banku je važno da internim modelom za procenu rizika obuhvati odgovarajuće faktore rizika koji utiču na vrednost pozicija portfolija banke. To podrazumeva da se za svaku kategoriju tržišnog rizika – kamatni rizik, devizni rizik, cenovni rizik, robni rizik, odrede neophodni faktori rizika koji mogu značajno uticati na promenu vrednosti bilansnih i vanbilansnih pozicija nastalih u aktivnostima trgovanja.

Iako imaju fleksibilnost u izboru internog modela za procenu rizika, banke su u obavezi da ispune i minimum kvantitativnih standarda prilikom izračunavanja kapitalnih zahteva. Kvantitativni standardi podrazumevaju (BIS, 2006):

- Procene rizika zasnovane na *vrednost-pod-rizikom* –VaR metodologiji, gde VaR predstavlja maksimalni gubitak u vrednosti trgovinskog portfolija usled nepoželjnih promena na tržištu u određenom vremenskom periodu i sa određenim nivoom poverenja
- Procene VaR-a zasnovane na jednostranom intervalu poverenja od 99%
- Procene VaR-a koje se određuju na dnevnom nivou, dok je period držanja (eng. *holding period*), tj. period za koji se pretpostavlja da se kompozicija portfolija neće menjati uvek 10 dana
- Period posmatranja na osnovu kojeg se VaR računa ne može biti manji od godinu dana
- Vremenske serije podataka na osnovu kojih se VaR računa treba da se ažuriraju bar jednom mesečno.

Banke mogu same da izaberu metodologiju po kojoj računaju VaR, sve dok ta metodologija obuhvata sve značajne faktore tržišnog rizika. Takođe, banke same računaju empirijske korelacije u okviru svake kategorije tržišnog rizika, kao i između različitih kategorija.

Banke koje zadovoljavaju sve prethodno navedene standarde, u obavezi su da svakodnevno računaju kapitalne zahteve za tržišni rizik koji su jednaki većoj od sledeće dve vrednosti:

- VaR-u izračunatom na kraju prethodnog dana, u skladu sa prethodno navedenim kvantitativnim standardima

- Prosečnom VaR-u izračunatom za period od prethodnih 60 radnih dana pomnoženom sa skalirajućim faktorom

Kapitalni zahtevi su dati sledećom formulom:

$$\boldsymbol{MRC_t = max((3+k)\cdot \frac{1}{60}\sum_{i=1}^{60} VaR_{t-i}, VaR_{t-1}) + SRC_t} \qquad (2.2.1)$$

gde je MRC kapitalni zahtev za tržišni rizik u trenutku t, $(3+k)$ multiplikativni faktor kod kojeg se k menja u skladu sa zahtevima koji su postavili supervizori, a koji treba da odražavaju rezultate *back* testiranja i samim tim performansi korišćenog internog modela. SRC je kapitalni zahtev za specifični rizik u trenutku t.

Kao što je već pomenuto, specifični cenovni rizik vlasničkih i dužničkih hartija od vrednosti se odnosi pre svega na rizik koji potiče od emitenta hartije od vrednosti. Banke koje koriste VaR modele, koji zadovoljavaju sve prethodno navedene kvalitativne i kvantitativne kriterijume opšteg rizika, moraju da pokažu da njihovi modeli obuhvataju i praćenje specifičnog rizika, odnosno da njihov model obuhvata sve značajne komponente cenovnog rizika. To podrazumeva da VaR modeli još dodatno moraju da:

- objasne istorijsku volatilnost cena u portfoliju, tj. u kojoj meri faktori rizika obuhvaćeni modelom objašnjavaju varijacije cena

- obuhvate koncentracije u portfoliju, tako da portfolija sa povećanom koncentracijom u određenim sektorima ili kompanijama imaju veće kapitalne zahteve

- budu robustni na nepovoljne promena u okruženju, tj. da mogu da signaliziraju rastući rizik usled nastanka nepovoljnih efekata

- obuhvate rizik događaja, kao što su npr. rizik kreditne migracije kod dužničkih hartija od vrednosti ili veliki skokovi u cenama prouzrokovani akvizicijama

- budu validirani kroz *back* testiranje koje treba da utvrdi da li su opšti i specifični rizik adekvatno obuhvaćeni.

Ukoliko modeli koje banke koriste ne obuhvataju sve prethodno navedene kriterijume, onda se za specifični cenovni rizik kapitalni zahtev računa kao kod standardizovanog pristupa.

2.2.2 *Back* testiranje internih modela

Imajući u vidu širok spektar VaR metodologija koje su danas na raspolaganju finansijskim institucija, ključni kriterijum u izboru odgovarajuće metodologije je njena prediktivna sposobnost. Stoga, jedan od osnovnih kriterijuma koje finansijske institucije koje koriste pristup internih modela moraju da ispune je da poseduju adekvatne, tačne, dokumentovane i interno proverene procedure za *back* testiranje odgovarajuće VaR metodologije (Gallati, 2003). Osnovni cilj *back* testiranja je pružanje povratnih informacija o kvalitetu i preciznosti sistema za merenje rizika. Suštinski, *back* testiranje predstavlja poređenje ostvarenih dnevnih gubitaka/dobitaka sa gubicima/dobicima koji su modelom predviđeni. Ukoliko razlika između poređenih rezultata nije velika, može se zaključiti da model ima dobru moć predviđanja. Drugim rečima, *back* testiranje predstavlja formalni statistički okvir koji treba da ispita da li su realizovani gubici u skladu sa VaR procenama (Jorion, 2003).

U praksi *back* testiranje se svodi na dnevno poređenje i evidentiranje da li je realizovana dnevna promena vrednosti portfolija bila u skladu sa procenom dnevnog VaR-a. Ukoliko je vrednost portfolija niža od VaR-om procenjene, evidentira se prekoračenje. Kao rezultat *back* testiranja dobija se broj prekoračenja za određeni vremenski period, i ako je VaR model dobar, broj prekoračenja treba da se poklopi sa intervalom poverenja za koji se računa VaR. Tako npr. ukoliko je nivo poverenja 99%, očekuje se da se broj gubitaka manjih od VaR-a neće javiti u više od 1% slučajeva (ako je period posmatranja 100 dana, VaR ne bi trebalo da bude prekoračen u više od jednog slučaja).

S obzirom da, sa regulatornog aspekta, VaR služi za određivanje kapitalnih zahteva za pokriće tržišnog rizika, Bazel II definiše određene kriterijume u vezi sa *back* testiranjem, koji podrazumevaju da:

- Banke porede procene jednodnevnog VaR-a sa nivoom poverenja od 99% sa dnevnom promenom vrednosti portfolija, iako se kapitalni zahtevi računaju za desetodnevni VaR. Ovaj uslov je neophodan jer period od deset dana, za koliko se računa VaR, je za razvijena finansijska tržišta i velike banke relativno dugačak, što dovodi u pitanje realnost pretpostavke da se pozicije u portfoliju ne menjaju u tom periodu.
- Banke su u obavezi da na dnevnom nivou vrše *back* testiranje
- Od banaka se očekuje da obavljaju *back* testiranje sa podacima o stvarnim[9] dnevnim gubicima/dobicima portfolija, kao i hipotetičkim[10] dnevnim gubicima/dobicima
- Za *back* testiranje treba da se koriste podaci koji obuhvataju poslednjih godinu dana (250 radnih dana) i da se na kvartalnom nivou prijavljuje broj prekoračenja
- Nacionalni supervisor ima pravo da koristi ostvareni broj prekoračenja kao osnovu za odlučivanje o adekvatnosti internog modela za procenu rizika.

---

[9] Stvarni dnevni gubitak/dobitak portfolija predstavlja stvarni prinos u toku jednog dana koji uključuje i trgovinsku proviziju kao i efekte trgovanja u toku dana

[10] Hipotetički dnevni gubitak/dobitak portfolija podrazumeva da su pozicije u portfoliju fiksne i da se primenjuju na stvarne, realizovane prinose svake hartije od vrednosti u portfoliju (podrazumeva prinose od cena na zatvaranju do cene na zatvaranju sledećeg dana)

Sa statističkog aspekta brojanje prekoračenja kao osnov *back* testiranja je prilično jednostavan pristup koji se zasniva na empirijski nerealnoj osnovnoj hipotezi da su prekoračenja međusobno nezavisna. Imajući u vidu ograničenja u prediktivnoj sposobnosti ovakvog načina testiranja VaR modela, Bazel II definiše okvir koji treba da pomogne supervizoru u interpretaciji rezultata *back* testiranja. Ovaj okvir podrazumeva da se broj prekoračenja VaR-a raspoređuje u jednu od tri moguće zone: zelenu, žutu ili crvenu, usled čega se i sam pristup naziva "pristup semafora" (eng. "traffic-light approach"). Granice između zona određene su tako da odražavaju binomne verovatnoće potencijalnog broja VaR prekoračenja, kao i da adekvatno balansiraju dva tipa statističkih grešaka. Statistička greška prve vrste predstavlja verovatnoću da će dobar model rizika na osnovu *back* testiranja biti klasifikovan kao neprecizan, dok statistička greška druge vrste predstavlja verovatnoću da će model koji nema dobre performanse biti na osnovu *back* testiranja klasifikovan kao adekvatan. U Tabeli 2. su date binomne[11] verovatnoće za odgovarajući broj prekoračenja VaR- sa nivoom poverenja od 99% na uzorku koji sadrži 250 nezavisnih opservacija. Takođe, u koloni "Verovatnoća greške prve vrste" date su verovatnoće da će izbor datog broja prekoračenja, kao praga za odbacivanje tačnosti modela, dovesti do pogrešnog odbacivanja tačnog modela.

[11] Za VaR model sa nivoom poverenja od 99%, binomna verovatnoća da će se u periodu od 250 dana ostvariti X izuzetaka je sledećeg oblika:

$$P(X) = \binom{250}{X} 0.01^{X} \cdot 0.99^{250-X}$$

ZONA	Broj prekoračenja	Uvećanje multiplikativnog faktora	Odgovarajuća verovatnoća	Verovatnoća greške I vrste
ZELENA	**0**	0	8.11%	100%
	1	0	20.47%	91.89%
	2	0	25.74%	71.42%
	3	0	21.49%	45.68%
	4	0	12.41%	21.19%
ŽUTA	**5**	0.4	6.66%	10.78%
	6	0.5	2.75%	4.12%
	7	0.65	0.97%	1.37%
	8	0.75	0.30%	0.40%
	9	0.85	0.08%	0.11%
CRVENA	**10 i više**	1	0.02%	0.03%

Tabela 2. Zone za *back* testiranje definisane dokumentom Bazel II

Tako npr. ukoliko je granica za odbacivanje modela postavljena na 6 i više prekoračenja, iz Tabele 2. se može videti da je 4.12% verovatnoća greške I vrste, tj. verovatnoća da će se model pogrešno odbaciti, iako je tačan. Na osnovu broja prekoračenja i pripadnosti jednoj od gore predstavljenih zona, određuje se visina multiplikativnog faktora prilikom utvrđivanja kapitalnog zahteva za tržišni rizik (videti jednačinu 2.2.1). Iz Tabele 2. se može uočiti da je broj izuzetaka manji od 5, sa aspekta regulatora prihvatljiv i da, u tom slučaju, model pripada zelenoj zoni i ne dolazi do uvećanja multiplikativnog faktora.

Rast broja prekoračenja dovodi do uvećanja multiplikativnog faktora, što se već vidi na primeru žute zone, koja obuhvata raspon izuzetaka od 5 do 9, kao i uvećanje multiplikativnog faktora od 0.4 do 0.85. Pa ipak, uvećanje multiplikativnog faktora se ne odvija automatski, jer postoje slučajevi kada je model suštinski validan, iako ima broj prekoračenja koji odgovara žutoj zoni. Iz tih razloga Bazel II (BIS, 2006) razlikuje sledeće uzroke za broj prekoračenja u žutoj zoni:

- Osnovni integritet modela - model neadekvatno obuhvata rizik pozicija u portfoliju (pozicije nisu tačno prijavljene, korelacije i volatilnosti nisu tačno izračunate), što predstavlja ozbiljan propust koji dovodi do uvećanja multiplikativnog faktora, a u nekim slučajevima i do većih promena u samom modelu

- Tačnost modela treba da se poboljša. Na primer, ukoliko se često javlja problem da model ne procenjuje rizik nekih instrumenata dovoljno precizno, treba da se primene penali u vidu uvećanja multiplikativnog faktora.

- Loša sreća – ukoliko je do prekoračenja došlo usled nepovoljnih, neočekivanih i teško predvidljivih promena na tržištu. Ovakav tip prekoračenja je očekivan za bilo koji tip VaR modela i ne iziskuje penal od strane regulatora.

- Dnevno trgovanje usled kojeg je došlo do velikih gubitaka ili nekog drugog događaja koji se desio između kraja dana (kada je procenjen VaR) i sledećeg dana trgovanja. U ovakvim slučajevima treba da se razmotri uvećanje kapitalnih zahteva.

Za razliku od žute zone, gde regulator ima diskreciono pravo da, u zavisnosti od uzroka prekoračenja, primeni ili ne primeni penale za prekoračenje, uvećanje multiplikativnog faktora se automatski primenjuje za sva prekoračenja u crvenoj zoni.

Kao što se iz prethodnog može videti, Bazel II direktiva penalizuje samo modele koji potcenjuju vrednost VaR-a. Kao posledica toga, model koji je sa aspekta Bazel II korektan, za banku može biti previše konzervativan jer precenjuje rizik, a samim tim dovodi do većih kapitalnih zahteva. Christoffersen (1998) predlaže da se pri određivanju tačnosti modela za procenu VaR-a pored frekvencije prekoračenja VaR-a, uzima u obzir i nezavisnost prekoračenja. Takođe, imajući u vidu da se *back* testiranje pre svega zasniva na određivanju frekvencije prekoračenja VaR-a koja je nedovoljna za adekvatnu procenu VaR modela, Bazel II predviđa redovno stres testiranje modela.

2.2.3 Stres testiranje internih modela

Jedan od osnovnih kvalitativnih kriterijuma koje banke moraju da zadovolje kako bi primenjivale pristup internih modela za merenje tržišnih rizika je postojanje i redovna primena pouzdanih, sveobuhvatnih, dokumentovanih i interno testiranih procedura za stres testiranje. Prema Jorionu (2003), stres testiranje se može definisati kao proces identifikacije i upravljanja situacijama koje mogu izazvati neočekivano velike gubitke. Prema tome, osnovna svrha stres testiranja je da otkrije događaje koje mogu imati veliki uticaj na poziciju banke, a koji nisu obuhvaćeni VaR modelom, citirajući Scholes-a (2000) "planiranje za slučaj krize je mnogo važnije od VaR analize". Sa aspekta regulatora, glavni cilj stres testiranja je da proceni kapacitet banke za apsorbovanje velikih potencijalnih gubitaka.

Jedan od osnovnih vidova stres testiranja je scenario analiza koja u ovom slučaju podrazumeva procenu vrednosti portfolija za različita scenarija. Scenarija treba da obuhvate promene svih tržišnih faktora koji mogu da izazovu velike gubitke, kao i da otežaju kontrolu rizika, i njihov potencijalni uticaj na vrednost portfolija. Prema Bazel-u II, regulatori od banaka mogu da traže informacije o stres testiranju iz sledeće tri kategorije:

- *Supervizorska scenarija koja ne traže simulaciju od strane banaka*. Ovakav pristup podrazumeva analizu velikih gubitaka iz poslednjeg perioda izveštavanja i ima za cilj da se bolje shvate slabosti banke

- *Supervizorska scenarija koja traže simulaciju od strane banaka*. Banke u ovom slučaju simuliraju različita stres scenarija i njihov uticaj na vrednost portfolija. Stres scenarija mogu da obuhvate testiranje portfolija na različite krizne periode iz prošlosti, kao što su krahovi berzi, gde je došlo do velikih pomeranja cena i nedostatka likvidnosti. Drugi tip stres scenarija podrazumeva testiranje osetljivosti portfolija na promene u pretpostavkama o volatilnosti i korelacijama (tako npr. u periodu krize, hartije od vrednosti na finansijskom tržištu pokazuju tendenciju da se kreću u istom smeru, usled čega su korelacije više nego u normalnim uslovima)

- *Scenarija koja su razvijana od strane banke*. Banke su dužne da razvijaju sopstvena stres scenarija, koja treba na najbolji način da obuhvate rizike kojima su izloženi njihovi portfoliji (rizik koncentracije, rizik zemlje u kojoj se trguje, …).

Stres testiranje je neophodan korak u proceni profila rizika jedne banke, za razliku od procene VaR-a, značajno je subjektivniji proces. To je, pre svega, posedica posledica toga što ne postoji nijedan sistematičan metod za utvrđivanje scenarija koja će se koristiti. Drugo, s obzirom da se prilikom stres testiranja ne određuju verovatnoće velikih gubitaka, tumačenje rezultata, a samim tim i zaštita od rizika je subjektivnog karaktera.

2.2.4 Nedostaci internih modela za procenu tržišnog rizika

Pristup internih modela u merenju tržišnog rizika predstavlja veliki korak u regulaciji tržišnih rizika. Bankama je po prvi put dozvoljeno da koriste sopstvene modele za procenu rizika u računanju kapitalnih zahteva za pokriće tih rizika. Na taj način im je omogućeno da razvijanjem i upotrebom što preciznijih modela imaju niže kapitalne zahteve, čime su praktično stimulisane da unapređuju sopstvene modele za procenu rizika. Pa ipak, i pored prethodno navedenog, postoje česte kritike na račun nekonzistentnosti *back* testiranja i računanja kapitalnih zahteva. Naime, *back* testiranjem se upoređuju jednodnevni VaR i realizovani prinos, dok se kapitalni zahtevi računaju za desetodnevni VaR. Takođe, pri proceni desetodnevnog VaR-a podrazumeva se da pozicije u portfoliju ostaju nepromenjene, što u realnosti nije slučaj. Goorbergh and Vlaar (1999) su pokazali da kapitalni zahtevi prema pristupu internih modela u stvari predstavljaju kompromis između baze za računanje kapitalnih zahteva i penala u vidu „plus“ faktora koji se dodaju na multiplikativni faktor 3. Tako npr. ukoliko model potcenjuje tržišni rizik, baza za kapitalni zahtev tj. VaR biće niža, dok će multiplikator biti veći. Sa druge strane, ukoliko je vrednost VaR-a veća, kapitalni zahtev može biti znatno veći bez obzira na niski multiplikator. Sa druge strane, International Swaps and Derivatives Association (1996) je pokazala da je arbitrarno izabran multiplikativni faktor 3 nepotrebno veliki i opterećujući za banke i da multiplikativni faktor 1 obezbeđuje dovoljno kapitala za pokriće gubitaka za scenarija kao što su krah berze iz 1987, ERM krize 1992 i pada tržišta obveznica 1994.

Finansijska kriza doprinela je da brojni nedostaci regulatornog okvira za upravljanje tržišnim rizicima budu u fokusu šire finansijske javnosti. Oni se pre svega tiču samog dizajna regulatornog okvira i metodologija za merenje tržišnih rizika koje se koriste pri računanju kapitalnih zahteva.

Jedan od često pominjanih problema u vezi sa regulatornim okvirom je način razdvajanja bankarske knjige i knjige trgovanja. Naime i jedna i druga mogu imati iste instrumente, ali se razdvajaju prema svrsi. Tako, prema Bazelu II: “Knjiga trgovanja se sastoji od finansijskih instrumenata i robe koje banka drži sa namerom trgovanja ili za hedžing drugih instrumenata knjige trgovanja. Finansijski instrumenti, da bi bili kvalifikovani za tretman prema kapitalnim zahtevima iz knjige trgovanja, moraju bili oslobođeni od svih ograničenja za trgovinu istim ili moraju biti kompletno hedžovani”. Takođe, smatra se da se pozicija iz knjige trgovanja banka može osloboditi u kratkom periodu, što implicitno podrazumeva da su pozicije u ovoj knjizi likvidne, dok bankarska knjiga podrazumeva instrumente koji se drže do dospeća. Kao posledica toga, jedan isti portfolio, npr. obveznica, ukoliko bi se našao u bankarskoj knjizi, imao bi često više kapitalne zahteve za kreditni rizik (zasnovane na jednogodišnjem vremenskom periodu), dok bi u knjizi trgovanja imao niže kapitalne zahteve za opšti i specifični kamatni rizik. Niži kapitalni zahtevi u knjizi trgovanja za kreditne izloženosti u odnosu na bankarsku knjigu, pružali su dodatni podsticaj za sekuritizaciju kredita i njihovo držanje u knjizi trgovanja, bez obzira na likvidnost datih pozicija (Johnson, 2011). Ovakvo razdvajanje knjige trgovanja i bankarske knjige pružilo je bankama arbitražne mogućnosti prebacivanja pozicija iz jedne u drugu knjigu radi ostvarivanja nižih kapitalnih zahteva, a, sa druge strane, regulatorima je zadalo probleme u praćenju i otkrivanju takvih slučajeva. Ovome u prilog ide i sledeća tabela, koja prikazuje odnos između veličine kapitalnih zahteva za tržišni rizik i ukupnih kapitalnih zahteva, kao i odnos aktive iz knjige trgovanja prema ukupnoj aktivi na primeru četiri anonimne banke koje je BIS analizirao.

	Kapitalni zahtev za tržišni rizik kao % aktive trgovanja	Aktiva trgovanja kao % ukupne aktive	Kapitalni zahtev za tržišni rizik kao % ukupnih kapitalnih zahteva
Banka 1	0.40%	34%	11%
Banka 2	0.40%	28%	7%
Banka 3	0.10%	57%	4%
Banka 4	1.10%	27%	7%

Izvor: BIS-ove procene iz godišnjih izveštaja banaka

Tabela 3. Aktiva knjige trgovanja i kapital – primeri iz 2007. godine

Iz tabele se jasno vidi da su kapitalni zahtevi za tržišne rizike bili isuviše niski u odnosu na obim aktive trgovanja, koja je u skoro svim slučajevima iznosila trećinu ukupne aktive banke, dok su sami kapitalni zahtevi za tržišne rizike iznosili jedva 10% od ukupnih kapitalnih zahteva.

Još jedna od čestih primedbi, tiče se razlika u kapitalnim zahtevima između standardizovanog pristupa i pristupa internih modela, koje su se često pokazale kao velike i značajne. U osnovi pristupa internih modela bila je ideja da se bankama koje imaju značajne aktivnosti trgovanja, daju podsticaji u vidu uslovno nižih kapitalnih zahteva kako bi razvijale što bolje i sofisticiranije interne modele za procenu tržišnog rizika. Sa druge strane, standardizovani pristup je predviđen kako konzervativniji pristup, pogodan za banke sa malim obimom aktivnosti trgovanja i malom izloženošću tržišnom riziku. Sa tim u vezi, finansijska kriza je pokazala da su iskustva u primeni modela na različitim tržištima vrlo različita. Tako npr. na vrlo volatilnim tržištima se dešavalo da standardizovani pristup daje niže kapitalne zahteve u odnosu na pristup internih modela, usled čega se banke ustežu od prelaska na interne modele praćenja tržišnog rizika. Sa druge strane, kao još jedan problem javio se nedostatak adekvatnog načina za oduzimanje dozvole za korišćenje pristupa internih modela, jer se pokazalo da u periodima stresa većina modela nije davala dobre rezultate, ali je istovremeno bilo teško bankama da nađu novi kapital.

Možda su najveći teret kritika u postkriznom periodu pretrpele metodologije za praćenje rizika, a posebno VaR metodologija. Pokazalo se da desetodnevni VaR sa 99% nivoom poverenja nije mogao adekvatno da izmeri kreditni rizik pozicija iz knjige trgovanja. Ogroman rast sekuritizovanih kreditnih proizvoda koji su usled sekuritizacije prešli iz bankarske knjige u knjigu trgovanja učinio je da postojeći modeli za praćenje tržišnih rizika nisu bili dobri za dodatno merenje i kreditnog rizika ovih pozicija. UK Financial Service Authority (2010) je u svojoj studiji o aktivnostima trgovanja za vreme krize pokazao, na primeru 10 velikih međunarodnih banaka, da je u periodu krize od 2007-2009 godine njihov ukupan gubitak[12] bio 240 milijardi dolara, od čega je 144 milijardi dolara gubitaka poteklo iz knjige trgovanja, od kojih je 85% bilo povezano sa različitim sekuritizovanim kreditnim pozicijama. Banke su, naime, često podrazumevale da modelovanje kreditnog rizika može biti zasnovano na volatilnosti odgovarajućih indeksa posmatranih u kratkoročnom vremenskom periodu, zanemarujući mogućnost opadanja kreditnog kvaliteta ili rizik „default“-a kreditnog dužnika.

Pa ipak, najveća zamerka VaR metodologija je nemogućnost VaR modela da obuhvati ekstremne rizike u repovima distribucije prinosa koji se pre svega tiču veličine i frekvencije gubitaka iznad procenjenog VaR-a. Naime, pre krize broj VaR izuzetaka je uglavnom bio u

---

[12] U studiji su posmatrali samo „značajne“ gubitke koji su prešli prag od 100 miliona dolara

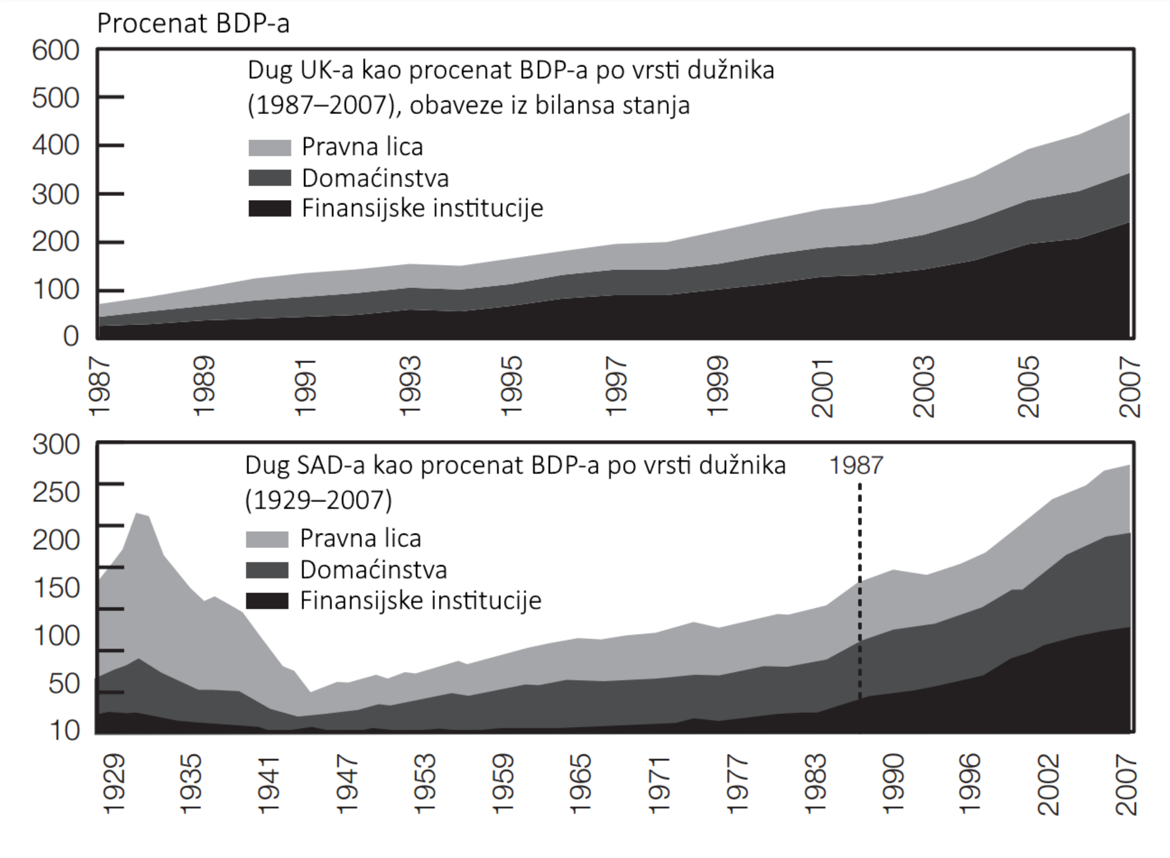
opsegu predviđenom modelom, ali za vreme krize broj VaR izuzetaka je bio znatno veći od očekivanog, pri čemu su dnevni gubici često bili nekoliko puta veći od procenjenih vrednosti VaR-a. Jedan od razloga za tako loše rezultate je taj što su VaR modeli kalibrisani na relativno kratkom istorijskom periodu (najčešće godinu dana), koji nije sadržavao tako ekstremne promene, a posebno ne tržišnu nelikvidnost. Dalje, sama VaR metodologija ne može da predvidi veličinu gubitaka iznad VaR-a jer daje samo verovatnoću gubitaka iznad VaR-a, što se pokazalo kao veliki nedostatak u stresnim periodima. Prema Constantinosu (1996) VaR se fokusira samo na verovatnoću gubitaka većih od određenog iznosa, a u potpunosti ignoriše koliki ti gubici mogu biti ukoliko se jave. Danielsson et al. (2001) smatraju da je VaR nedovoljno dobra mera, posebno u slučajevima kada prinosi nemaju normalnu distribuciju, jer ne meri rizik u repu raspodele, već se koncentriše na isključivo jedan percentil te raspodele. Ovo se posebno pokazalo tačnim u periodu krize. Dodatno, činjenica da VaR nije subaditivna mera u mnogome može da umanji efekte diversifikacije i samim tim učini kapitalne zahteve većim. Takođe, VaR metodologija podrazumeva da je svaka banka individualni agent čiji akcije ne utiču na tržište, međutim za vreme krize jasno se pokazalo da smanjenje pojedinačnih rizika može uticati na povećanje ukupnog rizika celokupnog sistema. Kapitalni zahtevi zasnovani na VaR metodologiji su pokazali procikličnost pošto su doprineli da banke preuzimaju više rizika u ciklusu rasta tržišta, a da isto tako pojačavaju šokove u kriznom periodu. Tako npr. banke koje koriste VaR za računanje kapitalnih zahteva ili postavljanje limita trgovanja, ukoliko dođe do povećanja VaR-a, smanjuju pozicije u određenim finansijskim instrumentima koji su najviše doprineli rastu VaR-a (Youngman, 2009). Na taj način one smanjuju sopstveni rizik u periodima povišene volatilnosti. Međutim, problem nastaje što često većina učesnika na tržištu na isti način vidi povišenu volatilnost i reaguje slično zatvarajući pozicije. Ovo za rezultat ima pad cena finansijskih instrumenata, a samim tim i povećanje VaR-a i posledično nastanak gubitaka iznad VaR-a, usled čega institucije dalje nastavljaju sa zatvaranjem pozicija i još više utiču na pad cena i rast volatilnosti.

Problem likvidnosti, koji je naročito došao do izražaja tokom poslednje finansijske krize, je još jedna od kritičnih stavki VaR modela. Naime, za vreme krize banke su usled nelikvidnosti često imale probleme da izađu iz određenih pozicija ili da zaštite postojeće pozicije. Takođe, niska likvidnost uticala je na to da u jeku krize, premije na likvidnost skoče usled čega su se banke suočavale sa velikim gubicima na određenim pozicijama (pre svega pozicijama u strukturnim kreditnim proizvodima), koje VaR metodologije nisu mogle da predvide.

2.3 Bazel III

Svetska finansijska kriza iz 2007. godine donela je samo potvrdu prethodnih manjkavosti postojećeg regulatornog okvira, kao i nedostataka bankarskih sistema za upravljanje rizicima. Tako npr. Financial Service Authority (2009), istražujući uzroke i posledice finansijske krize, smatra da je jedan od glavnih razloga krize bila prekomerna upotreba duga kako u bilansnim, tako i u vanbilansnim pozicijama banaka, što je bilo praćeno opadanjem nivoa i kvaliteta regulatornog kapitala u celokupnom bankarskom sistemu. Evolucija sekuritizacije omogućila je da se krediti pakuju i prodaju krajnjim investitorima, sa idejom da se na taj način umanji i transferiše kreditni rizik, a samim tim i kapitalni zahtevi. Ovo je dovelo do eksplozivnog rasta, kako obima, tako i kompleksnosti strukturiranih kreditnih instrumenata i kreditnih derivata. Verovalo se da je "cepanjem" i struktuiranjem kredita moguće kreirati vrednost, usled čega su se investitorima nudile različite kombinacije prinosa, rizika i likvidnosti, koje su bile naizgled povoljnije od kupovine same kreditne izloženosti. Međutim, kada je kriza buknula, pokazalo se da se većina izloženosti u sekuritizovanim kreditima nalazila u rukama banaka i finansijskih institucija, usled čega primarni cilj sekuritizacije - transfer rizika na krajnje investitore (koji bi trebalo da drže kreditne izloženosti do dospeća) nije ispunjen. Naime, ispostavilo se da su sekuritizovani krediti u velikoj meri bili kupovani od strane drugih banaka, i/ili da su ih banke prodajom uklanjale iz bilansa, ali da su deo rizika zadržale u vanbilansu kroz kreditne derivate, zatim da su ih banke često ponovno sekuritizovale u još kompleksnije instrumente, ili da su ih koristile kao kolateral za obezbeđivanje kratkoročne likvidnosti. Sve ovo dovelo je do velikog rasta duga, a posebno u finansijskom sektoru, što se najbolje može videti na Grafiku 1, gde je prikazano kako je raspodeljen dug Engleske i SAD, izražen u procentima bruto društvenog proizvoda, prema različitim sektorima (stanovništvo, korporativni i finansijski sektor). Naravno po nastanku krize, upravljanje likvidnošću se pokazalo kao jedna od ključnih problema u upravljanju rizicima.

Takođe, postavilo se pitanje adekvatnosti postojećih kapitalnih zahteva za pokriće rizika, kao i korišćenje VaR-a kao osnovne mere tržišnog rizika.



Grafik 1. Rast duga izraženog u % BDP-a na tržištima Engleske i SAD (Turner, 2009)

Kao odgovor na krizu, kritike i preporuke finansijske javnosti Bazelski komitet 2009. godine, prvo izdaje set novih smernica koje se tiču tržišnog rizika u vidu dokumenta „Revisions to the Bssel II market risk framework“ (poznatiji kao Bazel 2.5) kojim se značajno menja i uvećava kapitalni zahtev za tržišne rizike. Takođe, 2010. godine Bazelski komitet izdaje dokument (revidiran juna 2011) „Basel III: Global regulatory framework for more resilient banks and banking systems“, a kasnije 2013. godine izdaje dodatni dokument kojim se reguliše likvidnost banaka „Basel III: The liquidity coverage ratio and liquidity risk monitoring tools“. Oba dokumenta zajedno čine Bazel III regulatorni okvir, koji ima za cilj da poboljša sposobnost banaka da apsorbuje šokove u periodima ekonomske krize, bez obzira na uzroke. Bazel III čine reforme koje predstavljaju nadgradnju Bazel II regulatornog okvira i u najvećoj meri se odnose na:

- Podizanje kvaliteta, konzistentnosti i transparentnosti kapitalne baze. Ovo se pre svega odnosi na izmene u odnosu osnovnog, dopunskog I i dopunskog II kapitala, kako bi rizične pozicije banaka bile pokrivene adekvatnim i kvalitetnim kapitalom.

- Poboljšanje pokrivenosti rizika, koja obuhvata reviziju i povećanje kapitalnih zahteva za pokriće tržišnih rizika i kompleksnih pozicija nastalih sekuritizacijom. Najveće izmene u odnosu na Bazel II predstavljaju novi kapitalni zahtevi za tržišne rizike koji podrazumevaju uvođenje stres VaR mere koja je bazirana na VaR-u u izabranom kriznom periodu od 12 meseci kontinuiranog finansijskog stresa. Takođe, uvode se dodatne mere za jačanje kapitalnih zahteva za rizik druge ugovorne strane koji potiče iz pozicija u derivatima, repo transakcijama, kao i aktivnosti finansiranja hartija od vrednosti.

- Uvođenje dva nova racija za pokriće likvidnosti – racio pokrića likvidnosti (*eng. liquidity coverage ratio*) i racio neto stabilnog finansiranja (*eng. net stable funding ratio*). U osnovi racija pokrića likvidnosti je ideja da banke treba da obezbede dovoljno visoko kvalitetne likvidne aktive koja nije opterećena drugim obavezama i koja se može brzo i lako konvertovati u novac i na taj način zadovoljiti potrebe banaka u periodu od 30 dana u slučaju da se realizuje neki od stres scenarija likvidnosti. Sa druge strane, racio neto stabilnog finansiranja treba da obezbedi minimalni iznos stabilnih izvora finansiranja u odnosu na profil likvidnosti aktive, kao i na potencijalne potrebe za likvidnošću koje potiču iz vanbilansnih pozicija banke za period od godinu dana.

- Uvođenje racija levridža, kao dodatka kapitalnim zahtevima za pokriće rizika. Uvođenje ovog racija ima za cilj da ograniči zaduživanje u bankarskom sektoru, a samim tim i da smanji rizik od destabilišućih procesa razduživanja (*eng. deleveraging*), koji su se desili za vreme poslednje finansijske krize.

- Smanjenje procikličnosti i uvođenje kontracikličnih mera. Imajući u vidu da je tokom poslednje krize jedan od ključnih problema bilo prociklično pojačavanje finansijskih šokova kroz finansijska tržišta i bankarske sisteme, Bazel III predlaže mere kojima će banke ponovo postati faktor stabilnosti privrede. U tom smislu, ove mere imaju za cilj da banke postignu bolji balans između osetljivosti na rizike i stabilnosti kapitalnih zahteva; da sačuvaju dovoljno kapitala u vidu „bafer-a“, koje bi banke koristile u periodima stresa, kao i da sačuvaju bankarski sektor od prekomernog kreditnog rasta.

- Regulisanje sistemskog rizika i međusobne povezanosti banaka, jer se pokazalo da je prekomerna povezanost sistemski važnih banaka tokom krize u velikoj meri uticala na prenošenje finansijskih šokova. Tako su banke sa sličnim izloženostima pokazivale tendenciju kretanja solventnosti u istom smeru, što je u trenucima krize dovodilo do lančanih reakcija na tržištu. Naime, Bazelski komitet smatra da sistemski važne banke treba da imaju kapacitet za prevazilaženje gubitaka iznad minimalnih kapitalnih zahteva. Analiza sistemskog rizika još je detaljnije i sveobuhvatnije predstavljena u BIS-ovom dokumentu (2011) „Global systematically important banks: assessment methodology and the additional loss absorbency requirement“.

2.3.1 Bazel 2.5 i kapitalni zahtevi za upravljanje tržišnim rizicima

Kao odgovor na deo kritika, Bazelski komitet je 2009. godine doneo novi dokument poznatiji kao Bazel 2.5, koji ima za cilj da smanji procikličnost postojećeg okvira za tržišni rizik i da poveća ukupni nivo kapitala za zaštitu od tržišnih rizika, sa posebnim fokusom na instrumente koji su izloženi i kreditnom riziku. Izmene u standardizovanom pristupu tiču se uvođenja novog tipa portfolija – korelacionog trgovinskog portfolija (*eng. correlation trading portfolio*), koji obuhvata sekuritizovane pozicije i “n-th-to-default”[13] kreditne derivate. Za ovako definisani portfolio, specifični rizik se, za razliku od ostalih dužničkih instrumenata, izračunava kao manja od vrednosti kapitalnih zahteva za specifični rizik neto dugih pozicija u korelacionom portfoliju i za specifični rizik neto kratkih pozicija u korelacionom portfoliju. Takođe, specifični rizik za sekuritizovane pozicije iz knjige trgovanja se određuje prema metodu koji se koristi za iste pozicije u bankarskoj knjizi. Za akcije je takođe došlo do izmena u ponderima za opšti i specifični rizik, koji su sada 8% bez obzira na stepen diversifikacije portfolija.

U odnosu na standardizovani pristup, novim Bazel 2.5 dokumentom interni modeli za upravljanje tržišnim rizikom su pretrpeli znatno veće izmene. Tako, određivanje kapitalnih zahteva se oslanja na novu meru „stres VaR“ koja treba da replicira VaR koji bi bio izračunat sa postojećim pozicijama trgovinskog portfolija, ali za slučaj da su relevantni tržišni faktori u periodu stresa. Stres VaR takođe treba da bude zasnovan na 99% jednostranom intervalu poverenja i računat za period od 10 dana, pri čemu ulazni podaci za

[13] „n-th-to default“ kreditni derivati su derivati kod kojih se kreditni događaj definiše kao difolt n-tog entiteta ili kao n-ti u nizu difolt istog entiteta.

njegovo računanje treba da budu kalibrisani prema istorijskim podacima koji obuhvataju period od 12 meseci finansijskog stresa koji je bio relevantan za portfolio banke. Model koji se koristi za procenu VaR-a može biti korišćen i za procenu stres VaR-a, samo što će biti izmenjen u odnosu na podatke koji se koriste. Tako npr. banke, pri računanju stres VaR-a, mogu da koriste istorijske promene cena ili pak apsolutne istorijske volatilnosti, sa tim da izabrani istorijski period mora biti odobren od strane supervizora, i redovno revidiran. Za razliku od običnog VaR-a, stres VaR je dovoljno računati jednom nedeljno, a back testiranje se ne vrši, već se koriste rezultati back testiranja običnog VaR modela. Bazelski komitet za primer adekvatnog istorijskog perioda daje period internet "balona" 2000 godine, kao i period finansijske krize 2007/2008, kada su mnoge banke pretrpele velike gubitke. Evropska bankarska uprava je 2012. godine izdala smernice, u kojima se objašnjava da biranje istorijskog perioda za kalibraciju stres VaR-a može biti zasnovano ili na kvalitativnoj proceni banke ili na proceni zasnovanoj na formulama (eng. *formulaic approach*). Prvi tip procene podrazumeva kvalitativnu analizu svih faktora rizika karakterističnih za dati portfolio, kao i perioda u kojima su ti faktori bili izloženi najvećem stresu. Drugi tip procene podrazumeva ili kvantitativnu analizu kojom se identifikuju najvažniji faktori rizika koji služe kao „reper" za promenu vrednosti portfolija i zatim se analiziraju periodi njihovog najvećeg stresa; ili se koristi VaR pristup kojim se određuje istorijski period u kojem je, u odnosu na trenutne pozicije trgovinskog portfolija, VaR imao najveću vrednost.

Novi kapitalni zahtev za tržišne rizike, koji uključuje stres VaR, predstavljen je sledećom formulom:

$$c = max\{VaR_{t-1}; m_c \cdot VaR_{avg}\} + max\{sVaR_{t-1}; m_s \cdot sVaR_{avg}\} \tag{2.3.1}$$

gde su m_c i m_s multiplikativni faktori za VaR i stres VaR respektivno, čija je minimalna vrednost 3, a u zavisnosti od performansi VaR modela mogu imati maksimalnu vrednost 4. Dodatak minimalnoj vrednosti oba multiplikativna faktora zavisi od rezultata *back* testiranja samo VaR modela (ne uzima se u obzir *back* testiranje stres VaR modela). Takođe, pored gore pomenutih kapitalnih zahteva, banke koje koriste interne modele za upravljanje tržišnim rizicima moraju računati i kapitalne zahteve za specifični rizik za akcije i pozicije koje zavise od promena kamatnih stopa.

Sam tretman specifičnog rizika pretrpeo je veliku izmenu prema novoj Bazel 2.5 metodologiji. Naime, u novom dokumentu prošireni su kriterijumi koje banke moraju da zadovolje kako bi dobile priznanje od regulatora da njihov model dobro procenjuje specifični rizik, usled čega nisu u obavezi da računaju kapitalne zahteve za specifični rizik prema standardizovanom principu. Takođe, uveden je dodatni kapitalni zahtev – zahtev za inkrementalni rizik kapitala - IRC (*eng. incremental risk capital charge*) za sve pozicije koje su izložene specifičnom riziku promene kamatnih stopa, izuzev sekuritizovanih pozicija. Kapitalni zahtevi za specifični rizik kod sekuritizovanih instrumenata, ukoliko nisu deo korelacionog trgovinskog portfolija, se računaju prema standardizovanom pristupu za iste instrumente u bankarskoj knjizi. Sa druge strane, sekuritizovani instrumenti koji su deo korelacionog trgovinskog portfolija, umesto zahteva za inkrementalni rizik, imaju složeni zahtev za pokriće rizika kapitala (*eng. comprehensive risk capital* charge). Kapitalni zahtev za inkrementalni rizik predstavlja procenu rizika difolta[14] i rizika migracija[15] kreditnih rejtinga za nesekuritizovane kreditne proizvode za jednogodišnji period, sa nivoom poverenja od 99.9% (BIS, 2009). Ova mera treba da uzme u obzir periode likvidnosti kako individualnih pozicija, tako i skupa pozicija, pri čemu se bankama ostavlja sloboda u izboru i razvoju modela koji će najbolje meriti ovaj tip rizika. Period likvidnosti podrazumeva vreme potrebno za izlazak iz pozicije ili za zaštitu svih materijalnih rizika pokrivenih zahtevom za inkrementalni rizik u uslovima stresa na tržištu. Dužina ovog

[14]Difolt rizik podrazumeva rizik gubitka usled neizmirenja obaveza emitenta dužničkog instrumenta ili dužnika, kao i potencijalni indirektni gubitak kao posledica prethodno opisanog događaja.

[15]Rizik migracija kreditnih rejtinga podrazumeva rizik od gubitaka nastalih usled internog ili eksternog povećanja ili snižavanja kreditnih rejtinga, kao i indirektnih gubitaka nastalih usled migracija rejtinga.

perioda treba da bude, prema konzervativnim procenama, dovoljno duga da izlazak iz pozicija ne utiče značajno na tržišne cene, a nikako kraća od 3 meseca. Uopšte, novi kapitalni zahtevi za specifični tržišni rizik prema Bazel 2.5 metodologiji, sumarno su prikazani sledećom Tabelom 4.

	Kapitalni zahtevi za specifični rizik	
Tip instrumenta	**Standardizovani pristup**	**Pristup internih modela**
Akcije i instrumenti zasnovani na njima	8% bruto pozicija banke u akcijama	99%, 10 dnevni VaR za specifični rizik * multiplikativni faktor **plus** 99%, 10 dnevni stres VaR za specifični rizik * multiplikativni faktor
Nesekuritizovani kreditni proizvodi koji nisu uključeni u korelacioni trgovinski portfolio	Zahtevi su ostali isti kao i u Bazel II metodologiji	99%, 10 dnevni VaR za specifični rizik * multiplikativni faktor **plus** 99%, 10 dnevni stres VaR za specifični rizik * multiplikativni faktor **plus** kapitalni zahtev za inkrementalni rizik
Sekuritizovani proizvodi definisani paragrafima 538-542 Bazel II dokumenta	Novi kapitalni zahtevi koji se računaju prema standardizovanom pristupu bez, obzira da li banka koristi standardizovani pristup ili pristup internih modela za upravljanje tržišnim rizicima	

Proizvodi koji su uključeni u korelacioni trgovinski portfolio	Maksimum od: I) ukupnog kapitalnog zahteva za specifični rizik koji bi se primenio samo na neto duge pozicije II) ukupnog kapitalnog zahteva za specifični rizik koji bi se primenio samo na neto kratke pozicije	99%, 10 dnevni VaR za specifični rizik * multiplikativni faktor **plus** 99%, 10 dnevni stres VaR za specifični rizik * multiplikativni faktor **plus** složeni kapitalni zahtev za pokriće rizika

Tabela 4. Kapitalni zahtevi za specifični rizik

Zahtevi za inkrementalni rizik kapitala određuju se kao maksimalan iznos prosečne mere za inkrementalni rizik za poslednjih 12 nedelja (mera za inkrementalni rizik se određuje jednom nedeljno) i poslednje izračunate mere za inkrementalni rizik. Slično tome, složeni kapitalni zahtev za pokriće rizika iz korelacionog trgovinskog portfolija određuje se kao maksimum iznosa prosečne mere za rizik pozicija u korelacionom trgovinskom portfoliju za poslednjih 12 nedelja (ova mera se računa jednom nedeljno) i poslednje izračunate mere.

Kvantitativni uticaj novih kapitalnih zahteva za tržišni rizik na postojeći regulatorni okvir najbolje se vidi iz studije koju je sproveo Bazelski komitet uoči izdavanja Bazel 2.5 dokumenta (BIS, 2009). Ovom detaljnom studijom analizirane su 43 banke iz 10 različitih zemalja i ispitivan je uticaj kapitalnih zahteva za inkrementalni rizik, kapitalnih zahteva za stres VaR, kao i kapitalnih zahteva za resekuritizovane pozicije iz knjige trgovanja. Dobijeni rezultati prikazani su u sledećoj tabeli.

	Uticaj pojedinačnih zahteva na ukupni kapitalni zahtev (izražen kao % ukupnog kapitalnog zahteva)				Ukupan uticaj
	Stres VaR	Specifični rizik za akcije	Inkrementalni rizik*	Zahtev za resekuritizovane instrumente	
Aritmetička sredina	4.6	0.2	6.2	5.4	11.5
Medijana	2.7	0.1	3.6	0.1	3.2
	Uticaj pojedinačnih zahteva na ukupni kapitalni zahtev za tržišne rizike (izražen kao % ukupnog kapitalnog zahteva za tržišne rizike)				**Ukupan uticaj**
	Stres VaR	Specifični rizik za akcije	Inkrementalni rizik	Zahtev za resekuritizovane instrumente	
Aritmetička sredina	110.8	4.9	102.7	92.7	223.7
Medijana	63.2	1.9	60.4	1.8	102

Kapitalni zahtev za inkrementalni rizik je baziran na podacima za period likvidnosti od 3 meseca

Tabela 5. Uticaj novih kapitalnih zahteva za specifične rizike na ukupan kapitalni zahtev i na ukupan kapitalni zahtev za tržišne rizike[16]

Uvođenjem nove metodologije za interne modele upravljanja tržišnim rizikom, ukupni kapitalni zahtevi za pokriće svih rizika bi se povećali za 11.5%, dok bi se sam kapitalni zahtev za upravljanje tržišnim rizicima udvostručio (povećao za 223.7%). Takođe, iz tabele se može videti da na rast ukupnih kapitalnih zahteva najviše utiče zahtev za inkrementalni rizik kapitala (udeo u rastu je 6.2%), dok su na drugom mestu standardizovani kapitalni zahtevi za specifični rizik resekuritizovanih pozicija (udeo u rastu je 5.4%). Sa druge strane, na rast kapitalnih zahteva za pokriće tržišnih rizika najviše utiče stres VaR (udeo u rastu je 110.8%), dok je na drugom mestu zahtev za inkrementalni rizik kapitala (udeo u rastu je 102.7%). Zahtevi za inkrementalni rizik kapitala računati su za periode likvidnosti

[16] Zbog vremenskog trenutka u kome je rađena studija (početkom 2009. godine pre izdavanja Bazel 2.5 smernica) kapitalni zahtevi za sekuritizovane hartije nisu uključeni u studiju, već su uključeni samo kapitalni zahtevi za resekuritizovane instrumente. Kao posledica toga, rast ukupnih kapitalnih zahteva i zahteva za tržišne rizike je manji.

od jedan, tri i šest meseci. Rezultati su pokazali da se sa povećanjem perioda likvidnosti sa jedan na šest meseci, zahtevi povećavaju u proseku za 20%. Takođe, analizom stres VaR-a utvrđeno je da za iste portfolio pozicije stres VaR ima 2.6 puta veću vrednost od normalnog VaR-a.

Iako su Bazel 2.5 metodologijom znatno povećani i unapređeni mehanizmi za upravljanje tržišnim rizicima, što se iz prethodne studije može videti, određeni nedostaci i dalje postoje. Navedeni problemi, koji se tiču načina razdvajanja bankarske i knjige trgovanja, nisu rešeni ni ovim regulatornim okvirom. Takođe, rizik likvidnosti knjige trgovanja je delimično rešen uvođenjem različitih horizonta likvidnosti za inkrementalni rizik i složeni rizik, ali deo problema leži u tome što ove dve mere prevashodno mere rizika neizmirenja (eng. *default risk*) i migracija kreditnih rejtinga za kreditne instrumente u knjizi trgovanja.

Drugi deo kritika odnosi se na uvođenje stres VaR-a kao mere koja se dodaje na postojeću VaR meru usled čega može doći do preklapanja kapitalnih zahteva. Takođe, dovodi se u pitanje proizvoljnost izbora istorijskog perioda na osnovu kojeg se računa stres VaR, jer različiti faktori rizika imaju različite istorijske periode u kojima su bili izloženi značajnom finansijskom stresu. S obzirom da se stres VaR računa za period od 10 dana, to implicitno podrazumeva da banke mogu izaći iz pozicija ili se zaštiti u tom vremenskom periodu, što se pokazalo kao malo verovatno u kriznim periodima. Još jedan problem koji se javlja pri računanju stres VaR-a za portfolio je određivanje korelacione matrice za periode finansijskog stresa, jer je empirijski dokazano da su korelacije znatno uvećane u kriznim periodima (BIS, 2011). Imajući u vidu da stres VaR treba da obezbedi zaštitu od rizika ekstremnih događaja u budućnosti, bilo bi logički ispravnije koristiti integralni pristup koji će koristiti teoriju ekstremnih vrednosti prilikom određivanja ekstremnih gubitaka tj. VaR-a.

Pa ipak, najveći deo kritika stručne i akademske javnosti odnosi se na parametre VaR modela i na samo korišćenje VaR-a kao glavne mere tržišnog rizika. Imajući u vidu, da se i IRC računa kao 99.9% VaR za period od godinu dana za nesekuritizovane kreditne proizvode u knjizi trgovanja, Finger (2009) smatra da ne postoji konceptualni i statistički okvir koji opravdava računanje kapitalnih zahteva kao zbir desetodnevnog VaR-a i IRC-a za period od godinu dana i da samim tim ovako definisan kapitalni zahtev nije ništa više od najobičnijeg recepta. Mnogi autori smatraju da broj dana za koji se VaR računa treba da zavisi od ekonomske svrhe računanja VaR-a, tako npr. Smithson i Minton (1996) tvrde da većina menadžera rizika smatra da je jednodnevni VaR dobra mera sa aspekta trgovanja, ali da sa aspekta obezbeđenja dodatnog kapitala ne postoji konsenzus. Takođe, Danielsson (2002) i McNeil et al. (2005) ukazuju da korišćenje kvadratnog korena vremena za dobijanje desetodnevnog VaR-a je moguće samo pod vrlo restriktivnim uslovima[17], koje faktori rizika retko kad ispunjavaju. Ipak kao najveći nedostatak VaR-a pretpostavlja se to što je kvantilna mera koja meri gubitke za određeni kvantil distribucije prinosa, a u potpunosti ignoriše gubitke iznad tog kvantila. Zbog toga menadžeri rizika koji se isključivo oslanjaju na VaR meru mogu da imaju pozicije u granicama VaR-a, a da preuzimaju znatno veći rizik u krajnjim repovima raspodele. Suštinski VaR ne može da meri veličinu gubitka iznad određenog kvantila, što se u kriznim periodima pokazalo kao vrlo značajan nedostatak. Takođe, VaR nije koherentna mera rizika, jer ne ispunjava aksiom subaditivnosti (Artzner et al (1999)).

Imajući u vidu prethodno navedena ograničenja VaR-a, mnogi autori (Artzner et al (1999), Acerbi i Tasche (2002), Yamai i Yoshiba (2005), Inui i Kijima (2004)) predlažu upotrebu uslovnog gubitka kao osnovne mere rizika. Za razliku od VaR-a, uslovni gubitak meri rizik finansijskog instrumenta uzimajući u obzir i veličinu i verovatnoću gubitka iznad određenog praga. Takođe, uslovni gubitak je koherentna mera rizika i samim tim obuhvata efekat diversifikacije portfolija. Iako još nije uključena u regulativu, ova mera ublažava uticaj izbora određenog nivoa poverenja na odluke u vezi sa upravljanjem rizika, jer u potpunosti obuhvata rizik repa distribucije prinosa, za bilo koji nivo poverenja.

[17] Faktori rizika moraju imati normalnu raspodelu sa matematičkim očekivanjem 0 i moraju biti nezavisni i identično raspodeljeni

Prethodno navedene prednosti uslovnog gubitka, zajedno sa efektima finansijske krize i ograničenjima VaR metodologija, uslovile su da se konačno i Bazelski komitet, kao najmerodavnije regulatorno telo u oblasti rizika, u svom dokumentu "Fundamental review of the trading book" (BIS, 2012) odredi ka prelasku sa VaR metodologija na metodologiju uslovnog gubitka. Tako u ovom dokumentu: "Komitet predlaže upotrebu uslovnog gubitka za pristup internih modela i takođe planira da, u skladu sa metodologijom uslovnog gubitka, odredi pondere rizika za standardizovani pristup merenju tržišnih rizika".

3 Uslovni gubitak

Iako sa novom regulativom uslovni gubitak, kao mera rizika, tek sada dobija na punom značaju, u akademskoj i stručnoj javnosti ova mera je dugo prisutna kao koherentna alternativa VaR-u. Naime, još 1997. Artzner et al. u svom radu "Thinking coherently", a kasnije 1999. u radu "Coherent measures of risk" definišu prvi *aksiome koherentnosti*, tj. svojstva koja mera rizika mora da zadovolji da bi bila prihvaćena. Ovi članci na neki način predstavljaju prekretnicu, jer po prvi put kompleksnu realnost u upravljanju rizicima prevode u matematički okvir, definišući pravila koja izdvajaju adekvatne mere rizika iz skupa mera koje se upotrebljavaju u te svrhe. Takođe, ovi autori pokazuju da VaR kao mera rizika ne zadovoljava sve aksiome koherentnosti, tj. subaditivnost i po prvi put predlažu novu meru rizika – uslovno očekivanje repa (*eng. tail conditional expectation ili TailVaR*) koja je danas poznatija kao uslovni gubitak (*eng. expected shortfall)*.

I pored velikog značaja ovih članaka, stručna javnost je i dalje na aksiome koherentnosti gledala kao na svojstva koja su više opcionog karaktera, usled čega se upotreba VaR-a i dalje nije dovodila u pitanje. Sa druge strane, deo akademske javnosti je nastavio istraživanja u ovom domenu. Tako npr. Acerbi et al. (2001), a kasnije Acerbi i Tasche (2002) daju matematičku definiciju uslovnog gubitka i dokazuju da je uslovni gubitak koherentna mera rizika, a takođe i univerzalna, tj. da se može primeniti za bilo koji finansijski instrument i za bilo koji izvor rizika. Rockafellar i Uryasev (2000) su pokazali neka poželjna svojstva uslovnog gubitka kada se koristi za portfolio optimizaciju. Inui i Kijima (2005) dokazuju da uslovni gubitak optimalna mera rizika u smislu da uzima minimalnu vrednost u odnosu na sve ostale koherentne mere rizika. Ovi autori predlažu metod ekstrapolacije za određivanje vrednosti uslovnog gubitka.

Uopšte, sama procena uslovnog gubitka zavisi, kao i kod VaR-a, pre svega od pretpostavljene distribucije prinosa, što je osnova svih parametarskih pristupa. Sa druge strane, neki autori razvijaju neparametarske pristupe za ocenu uslovnog gubitka. Tako npr. Chen (2008) razmatra dva neparametarska načina za procenu uslovnog gubitka - od kojih je prvi prosečna vrednost svih gubitaka iznad VaR, a drugi je jezgrom izglađena (*eng. kernel smoothed*) verzija prvog načina procene, i pokazuje da drugi način ne proizvodi precizniju ocenu uslovnog gubitka. Cai i Wang (2008) predlažu novi neparametarski pristup koji se bazira na proceni uslovnog gubitka invertovanjem ponderisanog dvostruko jezgrovitog lokalno linearnog estimatora (*eng. weighted double kernel local linear estimate*) uslovne distribucije. Jidhav et al. (2009) razvijaju dva nova neparametarska estimatora robustna na ekstremne vrednosti i back testiranjem pokazuju da ovi estimatori daju bolje procene uslovnog gubitka od istorijskog metoda za procenu uslovnog gubitka. Sa druge strane, Gourieroux i Liu (2012) detaljno proučavaju vezu između uslovnog gubitka i VaR-a i karakterišu raspodele prinosa kod kojih je veza između ove dve mere linearna.

Sa aspekta regulatora, osnovni koraci u određivanju kapitalnih zahteva zavise od izbora metoda za procenu rizika, procedure za back testiranje i multiplikativnog faktora koji zavisi od rezultata back testiranja. Sa tim u vezi, jedna od često pominjanih problema uslovnog gubitka je nedostatak odgovarajućih procedura za back testiranje. McNeil and Frey (2000) koriste *bootstrap* test koji predlažu Efron and Tibshirani (1993) za back testiranje uslovnog gubitka. Kerkhof i Melenberg (2003) taj problem rešavaju metodom funkcionalnog delta (*eng. functional delta method*) back testiranja, u odnosu na koji čak i definišu nove kapitalne zahteve. Wong (2008) predlaže tehniku “prevojne tačke” (*eng. saddlepoint* *technique*) za back testiranje komercijalnih banaka, koja će kasnije u radu biti detaljno objašnjena.

3.1 Aksiomi koherentnosti

Kao što je već pomenuto, aksiomi koherentnosti predstavljaju ključne karakteristike za definisanje mera rizika. Formulisane od strane Artzner at al. (1997), a uobličene od strane Acerbi i Tasche (2001) aksiome koherentnosti su date sledećom definicijom:

Definicija 1. Ako je skup V skup slučajnih promenljivih realnih vrednosti, tada je funkcija $\boldsymbol{\rho} : \boldsymbol{V} \rightarrow \boldsymbol{R}$ mera rizika ako je:

(i) Monotona: X,YϵV, Y≥X=>$\boldsymbol{\rho}$(Y)≤$\boldsymbol{\rho}$(X)

(ii) Subaditivna: X,Y, X+Y ϵ V = >$\boldsymbol{\rho}$(X+Y) ≤ $\boldsymbol{\rho}$(X) +$\boldsymbol{\rho}$(Y)

(iii)Pozitivno homogena: X ϵ V, h>0, hX ϵ V = >$\boldsymbol{\rho}$(hX) = h$\boldsymbol{\rho}$(X)

(iv)Translaciono invarijantna: X ϵ V, a ϵ R = >$\boldsymbol{\rho}$(X+a) = $\boldsymbol{\rho}$(X) – a

Aksiom o monotonosti je vrlo jednostavan i podrazumeva da, ukoliko pozicija vodi većem gubitku u svakom stanju realnosti, ona će zahtevati veći kapitalni zahtev za pokriće rizika. Takođe, može se tumačiti za slučaj dva portfolija da ukoliko jedan od njih za sva scenarija ima bolje performanse od drugog, tada će njegov rizik biti manji od rizika drugog portfolija. Pozitivna homogenost podrazumeva da, onoliko puta koliko povećamo vrednost portfolija, toliko puta ćemo povećati i njegov rizik. Translaciona invarijantnost podrazumeva da, ukoliko se doda siguran prinos a portfoliju X, njegov rizik se smanjuje za a. Subaditivnost obezbeđuje da rizik portfolija koji se sastoji iz dva potportfolija može maksimalno biti jednak sumi rizika ta dva potportfolija i to samo ukoliko su ti potportfoliji potpuno pozitivno korelisani, dok će u svim ostalim slučajevima rizik biti manji. Ovaj aksiom u potpunosti opisuje suštinu diversifikacije rizika portfolija, definišući kako mera rizika treba da se ponaša u slučaju dodavanja novih pozicija u portfolio. Za subaditivnu meru, diversifikacija uvek dovodi do smanjenja rizika portfolija, dok kod mera koje krše ovo svojstvo diversifikacija može dovesti do povećanja vrednosti mere rizika.

Subaditivnost je posebno važna u bankarskoj superviziji prilikom određivanja zahteva za adekvatnost kapitala. Naime, većina banaka određuje vrednost VaR-a ili prema tipu rizika kojem su izložene (npr. kamatni VaR, devizni VaR,...) ili prema različitim ograncima banke, usled čega se postavlja pitanje kako se može proceniti ukupan rizik banke kada VaR nije subaditivna mera? VaR je jedino subaditivan ukoliko prinosi imaju normalnu raspodelu, u ostalim slučajevima može dovesti do neadekvatnog tretiranja diversifikacije portfolija, usled čega i većih kapitalnih zahteva. Takođe, nedostatak subaditivnosti povećava kompleksnost određivanja VaR-a. Tako npr. ukoliko portfolio zavisi od više faktora rizika, VaR se ne može izračunati kao zbir pojedinačnih VaR-ova za svaki tip rizika. Za razliku od VaR, uslovni gubitak je, bez obzira na distribuciju prinosa, uvek subaditivan (matematički dokaz daju Acerbi et al. (2001)) i, kao takav, bolja je mera za određivanje rizika kompleksnih portfolija, a, samim tim, i kapitalnih zahteva.

3.2 Uslovni gubitak i VaR

Istorijski gledano, kada se pojavio, VaR je predstavljao veliki iskorak u praksi upravljanja rizicima u odnosu na postojeće tradicionalne mere bazirane na osetljivosti tržišnih instrumenata. Za razliku od mera osetljivosti (poznatije kao *eng. Greeks*) koje su izražavane u različitim mernim jedinicama, što otežava poređenje različitih tipova portfolija, VaR je, kao potencijalni gubitak, izražen u novcu i može se primeniti na bilo koji finansijski instrument. Takođe, VaR daje procenu budućeg gubitka sa određenom verovatnoćom, za razliku od mera osetljivosti koje su zasnovane na „šta-ako“ analizi koja ne uzima u obzir verovatnoću potencijalnih događaja. Sa aspekta informativnosti, veliki broj podataka koje mere osetljivosti daju na dnevnom nivou je veoma koristan za dilere koji trguju sa određenim delom portfolija, ali za viši menadžment ima ograničenu korist jer ne sumira ukupan rizik kojem je finansijska institucija izložena (Hull, 2006).

Teorijske osnove VaR-a dali su Jorion (1997) i Duffie and Pan (1997), definišući ga kao maksimalni potencijalni gubitak u vrednosti portfolija koji će se ostvariti sa određenom verovatnoćom za određeni vremenski period. U osnovi, VaR je kvantilna mera, koja se odnosi na najveći gubitak za fiksirani vremenski horizont koji neće biti premašen sa datim nivoom poverenja. Statistički gledano, ako je α nivo poverenja, onda VaR odgovara 1-α nivou levog repa raspodele prinosa. Štaviše, VaR sa 99 procentnim nivoom poverenja predstavlja vrednost koja bi trebalo da bude premašena1% od ukupnog broja posmatranih opservacija puta. Tako na primer, ako je period opservacija tačno jedna godina (250 radnih dana), onda bi VaR trebalo da bude premašen ne više od 2.5 dana u toku godine.

Ako sa P_t obeležimo cenu neke hartije u vremenu t, onda se dnevni dobitak/gubitak u trenutku t (P/L_t) može posmatrati kao razlika između cena neke hartije u vremenskom periodu t i cene hartije u prethodnom vremenskom periodu (t-1):

$$P/L_t = P_t - P_{t-1} = \Delta P_t \tag{3.1}$$

Ako je ΔP_t pozitivan, onda je ostvaren profit, dok negativna vrednost ΔP_t–a označava gubitak. Pod pretpostavkom da je dnevni VaR maksimalni potencijalni gubitak u toku jednodnevnog vremenskog horizonta, sa nivoom poverenja1-α∈ (0,1), dnevni VaR za period t+1 može se izraziti na sledeći način:

$$\Pr(\Delta P_{t+1} \leq -VaR_{t.\alpha}) = \alpha, \tag{3.2}$$

što je ekvivalentno:

$$\Pr(\Delta P_{t+1} > -VaR_{t.\alpha}) = 1- \alpha , \tag{3.3}$$

Matematički, McNeil i dr. (2005) definišu VaR u apsolutnoj vrednosti i sa nivoom poverenja$1-\alpha\in(0,1)$ kao najmanji broj l, takav da verovatnoća da je gubitak L (u prethodnom primeru ΔP_{t+1}) veći od l nije veća od $1-\alpha$:

$$VaR_{\alpha} = \inf\{l|P[L>l]\leq\alpha\}=\inf\{l|F_L(l)\geq 1-\alpha\}, \tag{3.4}$$

Štaviše, VaR se može izvesti iz funkcije raspodele verovatnoća dobitaka-gubitaka predstavljajući budući gubitak uz dati nivo pouzdanosti α:

$$VaR_{\alpha}= -F^{-1}(\alpha) = -\int_{-\infty}^{-VaR} f(l)dl = -q(\alpha), \tag{3.5}$$

U prethodnoj formuli VaR u osnovi predstavlja *kvantil* raspodele dobitaka/gubitaka. U praksi se obično uzima raspodela verovatnoća prinosa hartija umesto raspodele verovatnoće dobitka/gubitka (P/L).

Kao što je već navedeno, jedan od najvećih nedostataka VaR-a je to što zanemaruje sve potencijalne gubitke ispod njegove vrednosti, samim tim potcenjujući rizik repa raspodele prinosa (*eng. tailtail risk*). Štaviše, u slovima krize, pokazalo se da VaR nije dovoljno pouzdana mera, jer prilikom velikih fluktuacija cena i velike korelacije između finansijskih instrumenata, uglavnom potcenjuje rizik. Takođe, VaR nije koherentna mera rizika, jer ne ispunjava aksiom subaditivnosti. Kako bi prevazišli prethodno pomenute nedostatke VaR-a, Artzner i dr. (1997) predlažu uslovni gubitak kao njegovu najbolju alternativu. Uslovni gubitak je očekivani gubitak pod uslovom da je gubitak veći od VaR-a i matematički se može predstaviti kao:

$$ES_{\alpha}(L) = E[L/L \geq VaR_{\alpha}(L)] = -E(L/L < q(\alpha)) \tag{3.6}$$

gde je $1-\alpha\in(0,1)$ nivo poverenja, ES – uslovni gubitak, L – gubitak. Suštinski uslovni gubitak je prosečan gubitak iznad VaR-a i Acerbi i Tasche(2001) ga definišu na sledeći način:

Neka je L dobitak/gubitak portfolija za određeni vremenski horizont T i neka j je α=A%∈(0,1 određena verovatnoća, tada je uslovni A% gubitak portfolija definisan sa:

$$ES^{(\alpha)}(L) = -\frac{1}{\alpha}\left(E\left[L\,1_{\{L\le q(\alpha)\}}\right] - l^{\alpha}(P[L \le q(\alpha)] - \alpha)\right) \tag{3.7}$$

$q(\alpha)$ je α kvantil distribucije dobitaka/gubitaka, $1_{\{L\le q(\alpha)\}} = \begin{cases} 1, & \text{ako je } L \le q(\alpha) \\ 0, & \text{u suprotnom} \end{cases}$. Ukoliko je distribucija prinosa neprekidna slučajna promenljiva, tada je $P[L \le q(\alpha)] = \alpha$, usled čega desni deo jednakosti postaje 0, i uslovni gubitak možemože da se izrazi kao:

$$ES^{(\alpha)}(L) = -\frac{1}{\alpha}E\left[L\,1_{\{L\le q(\alpha)\}}\right] = -\frac{1}{\alpha}\int_{-\infty}^{q} lf(l)dl \tag{3.8}$$

Ovako definisani uslovni gubitak u potpunosti zadovoljava sva četiri uslova koherentnosti, što pokazuju i Acerbi i Tasche (2002).Takođe, da bi videli koja statistika na uzorku najbolje ocenjuje uslovni gubitak$ES^{(\alpha)}$, posmatrajmo n prinosa $\{X_i\}_{i=1,\dots,n}$ i sortirajmo ih u neopadajući redosled tako da $X_1 \le X_2 \le \cdots \le X_n$. Za aproksimaciju α kvantila koristimo $w = [n\alpha] = max\{m/m \le n\alpha, m \in N\}$ najmanjih prinosa, tj. $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$, odakle je kvantil$q(\alpha) = X_w$. Na osnovu prethodnog dobijamo uzoračku ocenu uslovnog gubitka kao prosečnu vrednost *w* najmanjih prinosa:

$$ES^{(\alpha)}(X) = -\frac{\sum_{i=1}^{w} X_i}{w} \tag{3.9}$$

Iz prethodno navedenih definicija uslovnog gubitka i VaR-a, očigledno je da će predviđanje ovih mera najviše zavisiti od sledeća tri faktora: raspodele verovatnoća dobitka/gubitka, intervala poverenja i vremenskog perioda za koji se izračunava VaR i/ili uslovni gubitak.

Raspodela verovatnoća dobitka/gubitka (P/L). Procena uslovnog gubitka i VaR-a portfolija prvenstveno zahteva poznavanje raspodele prinosa portfolija. Najčešći pristupi za modelovanje raspodele dobitaka/gubitaka (P&L) baziraju se ili na metodu istorijske simulacije ili neparametarskim metodima koji obično pretpostavljaju normalnu raspodelu i kombinuju se sa nekim ekonometrijskim modelom za volatilnost, kao što su EWMA, ARCH, GARCH. Procena distribucije prinosa je najzahtevniji aspekt u proceni uslovnog gubitka i VaR-a i uključuje značajan rizik modela. Novije studije pokazale su da je rizik modela glavni problem u proceni uslovnog gubitka i VaR-a. Veći deo identifikovanog rizika modela nastaje zbog netačne *specifikacije modela* – loše definisani stohastički procesi, ispušteni faktori rizika, pogrešno ustanovljene veze, ignorisani troškovi transakcija i faktora likvidnosti i *kalibracije parametara* – parametri mogu biti procenjeni sa greškom, mogu biti zastareli, procenjivani tokom neodgovarajućih perioda, itd.

Interval poverenja. Statistički gledano, interval poverenja se koristiti da opiše koliko su pouzdani dobijeni rezultati. Sa aspekta VaR-a to je verovatnoća da će ostvarena promena u portfoliju biti manja od one predviđene VaR-om, dok sa aspekta uslovnog gubitka omogućava određivanje kvantila iznad kog se određuje očekivani gubitak. Što je viši nivo pouzdanosti, veći su uslovni gubitak i VaR. Izborom visokog α, banka ostvaruje veći stepen zaštite u smislu da je verovatnoća javljanja ekstremnih gubitaka smanjena. U proceni uslovnog gubitka i VaR-a izbor nivoa poverenja treba da odražava stepen averzije prema riziku kompanije. Veća averzija prema riziku znači veću kapitalnu rezervu za pokrivanje rizika i time uključivanje višeg nivoa poverenja. Uobičajena je preporuka da se izabere nivo pouzdanosti koji nije previsok, kao što je 95% do 99%.

Vremenski period za koji se izračunava VaR, a samim tim i uslovni gubitak. Banke većinom biraju vremenski period u zavisnosti od toga kako koriste VaR. Ako se VaR koristi za poređenje rizika na različitim tržištima, izbor vremenskog perioda je proizvoljan, sve dok se održava postojanost. U slučaju VaR-a, korišćenog za izračunavanje kapitalnih zahteva za slučaj bankrota banke, preporučljiv je duži horizont (obično 10-dnevni horizont). S druge strane, ako je VaR korišćen za procenu potencijalnog gubitka koji bi banka mogla snositi, priroda portfolija treba da odredi vremenski period. U poslednjem slučaju postoje dve različite interpretacije izbora vremenskog perioda. Prva kaže da vremenski period treba da zavisi od aktivnosti trgovanja, kao i perioda likvidacije različitih instrumenata u portfoliju banke (Khindanova and Rachev, 2000). Na primer, komercijalne banke obično prijavljuju dnevni VaR, zbog visoke likvidnosti i čestih promena njihovih trgovinskih portfolija, dok penzioni fondovi, koji generalno investiraju u manje likvidne hartije, biraju duži vremenski period (Jorion, 2002). Drugo i potpuno suprotno gledište jeste da period za koji se računa VaR predstavlja period vremena u kome sastav portfolija ostaje relativno konstantan. Ovo tumačenje ima smisla za kraće vremenske periode, ali postepeno gubi značaj kako se horizont produžava. Ipak, uslovni gubitak i VaR se povećavaju sa dužim vremenskim periodom.

Postoji mnogo različitih metodologija za izračunavanje VaR-a i uslovnog gubitka, ali ono što je karakteristično za sve je da slede opštu strukturu (Managnelli i Engle, 2001) koja podrazumeva:

1. Vrednovanje portfolija po trenutnoj tržišnoj vrednosti finansijskih instrumenata koji ga čine,
2. Procena raspodele prinosa portfolija,
3. Izračunavanje VaR-a ili uslovnog gubitka portfolija.

Iz prethodno navedenog može se uočiti da je procena raspodele prinosa ključan korak u proceni VaR-a, a samim tim i uslovnog gubitka. Takođe, imajući u vidu karakteristike finansijskih prinosa ovo je ujedno i najizazovniji korak u proceni parametara rizika. Danielsson i drugi (1998) razlikuju tri osnovna pristupa u proceni distribucije prinosa:

Neparametarski pristup koji izbegava bilo koje pretpostavke o raspodeli prinosa, već koristi empirijsku raspodelu prinosa – metod istorijske simulacije. U osnovi ovakvog pristupa je ideja da prošli podaci treba da govore sami za sebe i da je prošlost dobar pokazatelj za buduće događaje. Iako jednostavan, ovaj pristup ima i značajne nedostatke koji se ogledaju u tome što procene VaR-a i uslovnog gubitka zavise od specifičnosti i dužine vremenskog perioda iz kojeg potiču opservacije, a takođe i diskretnosti opservacija (posebno u repu raspodele). Tako na primer, sa aspekta robustnosti,robustnosti poželjno je koristiti duži istorijski vremenski period, ali sa druge strane to implicira da događaji koji su se desili davno u prošlosti imaju isti uticaj na procenu budućih događaja kao i ovi iz bliže prošlosti. Takođe, ovi modeli ne mogu da predvide događaje izvan okvira posmatranog vremenskog perioda u prošlosti.

Parametarski pristup pretpostavlja neku unapred definisanu raspodelu prinosa, koja je najčešće normalna ili studentova i na osnovu koje se procenjuju VaR i uslovni gubitak. Sa obzirom da prinosi često ispoljavaju značajnu autokorelaciju i heteroskedastičnost, tipično se modeluje uslovna distribucija prinosa EWMA ili nekim od GARCH modela. Nedostatak ovog pristupa je što je procena parametara modela vezana za telo raspodele, dok VaR i uslovni gubitak predstavljaju ekstreme, tj. repove raspodele, što u slučaju često korišćene normalne raspodele dovodi do potcenjivanja njihovih vrednosti.

Poluparametarski pristup podrazumeva najčešće kombinaciju neparametarskog i parametarskog pristupa. Tako npr. Danielsson i de Vries (1997, 2000) primenjuju semiparametarski pristup teorije ekstremnih vrednosti, gde za telo raspodele prinosa koriste istorijsku simulaciju, dok za repove raspodele koriste granične distribucije teorije ekstremnih vrednosti. Imajući u vidu da VaR i uslovni gubitak pripadaju repovima raspodele prinosa, pristup teorije ekstremnih vrednosti koja proučava i modeluje distribucije ekstremnih opservacija pod određenim pretpostavkama, ima mnogo više smisla od klasičnih parametarskih pristupa koji pretpostavljaju celokupnu distribuciju prinosa.

3.3 Prinosi finansijskih instrumenata

Stopa promena cena instrumenta ili dobitak/gubitak (P/L) su u osnovi bilo koje mere rizika. Uglavnom, u proceni VaR-a i uslovnog gubitka usredsređujemo se na stopu prinosa finansijskog instrumenta, pošto ona ima povoljnije statističke osobine od promena cena. Stopa prinosa nekog instrumenta r_t definisana je kao promena cene tog instrumenta u toku datog vremenskog perioda u odnosu na cenu tog instrumenta na početku datog vremenskog perioda. Ako sa P_t obeležimo ocenu u nekoj tački u vremenu t, onda se prinosi mogu izračunati na sledeća dva načina:

1. **Aritmetička stopa prinosa r_t** definisana je kao odnos zbira kapitalnog dobitka i plaćanja izvršenih u tom vremenskom periodu – D_t (dividenda ili kupon) i cene u vremenu t.

$$r_t = \frac{P_t + D_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} \tag{3.10}$$

   Radi jednostavnosti, pretpostavićemo da su privremena plaćanja nula[18], prema tome stopa prinosa je:

$$r_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} = \frac{\Delta P_t}{P_{t-1}} \tag{3.11}$$

   U slučaju portfolija sastavljenog od n hartija sa portfolio ponderima w_i, aritmetički prinos $r_{p,t}$ je:

$$r_{p,t} = \frac{P_{p,t} - P_{p,t-1}}{P_{p,t}} = \sum_{i=1}^{n} w_i\, r_i \tag{3.12}$$

2. **Geometrijska stopa prinosa R_t** definisana je kao promena prirodnih logaritama cena instrumenata u sukcesivnim periodima:

$$R_t = lnP_t - lnP_{t-1} = ln\frac{P_t}{P_{t-1}} \tag{3.13}$$

   U slučaju da se portfolio sastoji od n hartija sa ponderima portfolija w_i, prinos portfolija $R_{p,t}$ biće sledeći:

[18]Ovo je često istinito za kratkoročne vremenske horizonte za koje se izračunava VaR.

$$P_{p,t} = \sum_{i=1}^{n} w_i P_{p,t-1} e^{R_i} \tag{3.14}$$

Deljenjem prethodne formule sa $P_{p,t-1}$ i pronalaženjem njenog prirodnog algoritma, dobijamo:

$$R_{p,t} = ln \sum_{i=1}^{n} w_i e^{R_i} \tag{3.15}$$

Upotreba geometrijskih stopa prinosa ima dve glavne prednosti. Prva je ta što ako su geometrijski prinosi normalno raspodeljeni, onda takva raspodela nikad ne bi mogla voditi ka ceni koja je negativna. To je zbog toga što se levi rep raspodele $\ln(P_t/P_{t-1}) \rightarrow -\infty$ dobija kad je $(Pt/P_{t-1}) \rightarrow 0$, ili $P_t \rightarrow 0$ (Jorion, 2002). Druga prednost je što se geometrijski prinos za k sukcesivnih perioda može lako raščlaniti na sledeći način:

$$R_{t,k} = ln \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-k}} = ln \frac{P_t}{P_{t-1}} + ln \frac{P_{t-1}}{P_{t-2}} + \cdots + ln \frac{P_{t-k+1}}{P_{t-k}} = \sum_{i=1}^{k} R_{t-i+1} \tag{3.16}$$

To nije slučaj sa aritmetičkim prinosima, jer aritmetički prinos za k – sukcesivnih perioda je definisan na sledeći način:

$$r_{t,k} = \frac{P_t - P_{t-k}}{P_{t-k}} = \frac{P_t}{P_{t-k}} - 1$$

$$=> 1 + r_{t,k} = \frac{P_t}{P_{t-k}} = \frac{P_t}{P_{t-1}} \cdot \frac{P_{t-1}}{P_{t-2}} \cdot \ldots \cdot \frac{P_{t-k+1}}{P_{t-k}} = \prod_{i=1}^{k} (1 + r_{t-i+1}) \tag{3.17}$$

Kada je aritmetički prinos nizak, razlika između ova dva prinosa je zanemarljiva. To proizilazi iz sledećeg:

$$R_t = ln \frac{P_t}{P_{t-1}} = \ln(1 + r_t) \tag{3.18}$$

Kada je r_t nizak, Teylor-ov razvoj R_t daje $R_t = r_t - \frac{r_t^2}{2} + \frac{r_t^3}{3} + \ldots \approx r_t$, prema tome, biće mala razlika između kontinualnih i diskretnih prinosa.

Ono što je karakteristično i empirijski dokazano za dnevne finansijske prinose je to da oni nisu nezavisni i identično raspodeljeni (mada im je autokorelacija relativno mala), kao i da im je uslovna očekivana vrednost blizu nule.

3.4 Volatilnost finansijskih prinosa

Imajući u vidu da je u finansijama vrednost budućih prinosa nepoznata i neizvesna, prinosi se mogu tretirati kao slučajne promenljive, čije se ponašanje može modelovati različitim funkcijama raspodele. Štaviše, pošto uslovni gubitak predstavlja očekivani gubitak ukoliko prinosi pređu VaR, a pošto VaR predstavlja potencijalni gubitak koji neće biti premašen sa određenom verovatnoćom, adekvatno modelovanje distribucije prinosa je od ekstremnog značaja za procenu rizika. U ove svrhe, u praksi se najčešće koriste normalna distribucija i studentova distribucija prinosa, što sa sobom nosi značajan rizik modela o kome će u nastavku biti više reči.

Pored modelovanja distribucije prinosa, drugi veoma važan i izazovan zadatak u predviđanju prinosa finansijskih instrumenata je modelovanje volatilnosti. Volatilnost meri neizvesnost promene cene za određeni investicioni horizont. Suštinski gledano ona meri "širinu" distribucije prinosa. Ono što je karakteristično za volatilnost i što otežava njeno modelovanje je to što nije jasno uočljiva na tržištu. Na primer, ukoliko se cene finansijskih instrumenata dosta menjaju, može se pretpostaviti da je volatilnost velika, ali ne i koliko je ona zapravo. Iz tih razloga svi modeli volatilnosti se mogu podeliti u dve osnovne grupe:

1. Modeli konstantne volatilnosti

2. Modeli vremenski promenljive volatilnosti

Modeli konstantne volatilnosti se odnose samo na bezuslovnu volatilnost prinosa finansijskih instrumenata. Bezuslovna volatilnost se može definisati kao kvadratni koren varijanse bezuslovne distribucije stacionarne[19] vremenske serije prinosa, usled čega je ona konstantna i ista za sve prinose te serije.

Modeli promenljive volatilnosti odnose se na uslovnu volatilnost finansijskih prinosa. Uslovna volatilnost se procenjuje kao kvadratni koren varijanse uslovne distribucije prinosa u trenutku t. Uopšteno govoreći, uslovna distribucija je bilo koja distribucija koja je uslovljena skupom poznatih vrednosti nekih varijabli, tj. informacionim skupom (Alexander, 2005). Za razliku od modela konstantne volatilnosti, modeli promenljive volatilnosti mogu da podrže sledeće empirijske činjenice o volatilnosti:

1. Klasterovanje volatilnosti – tendencija volatilnosti na finansijskim tržištima da se javlja u klasterima, gde su mirniji periodi sa nižim prinosima ispresecani sa vrlo volatilnim periodima velikih prinosa oba znaka (i pozitivnih i negativnih). Drugim rečima, za velike promene cena finansijskih instrumenata se očekuje da budu praćene velikim promenama, dok se za male promene očekuje da budu praćene malim promenama. Suštinski, trenutni nivo volatilnosti prinosa je pozitivno korelisan sa volatilnošću sledećeg uzastopnog perioda, što ukazuje na postojanje serijske korelacije finansijskih prinosa.

2. Volatilnost kontinualno evoluira tokom vremena, usled čega su skokovi u volatilnosti retki (Tsay, 2002).

3. Efekat levridža – tendencija volatilnosti da više raste prateći veliki pad cena nego prateći isti obim rasta cena, odnosno negativna iznenađenja na tržištu teže da više povećaju volatilnost nego pozitivna iznenađenja. Ekonomsku pozadinu ove stilizovane činjenice

[19] Za vremensku seriju se kaže da je strogo stacionarna ako je zajednička distribucija za $(r_{t_1}, r_{t_2} r_{t_2}, \dots, r_{t_k})$ identična distribuciji $(r_{t_1+t}, r_{t_2+t}, \dots, r_{t_k+t})$ za svako t, gde je k proizvoljan pozitivni broj (Tsay, 2002). Vremenska serija$\{r_t\}$ je slabo stacionarna ako ima konačnu varijansu, konstantnu očekivanu vrednost i ako kovarijansa između r_t i r_l, zavisi samo od $t - l$, a ne od samih perioda t i l.

objašnjava Black (1976) povezujući volatilnost akcija sa strukturom kapitala firme. Ukratko, za firmu koja emituje akcije i obveznice, njen odnos duga i akcijskog kapitala se menja kada se pomera cena akcije. Tako, na primer, negativni prinos kroz smanjenu tržišnu vrednost firme, podrazumeva proporcionalno veći dug (veći racio duga/akcijski capital), što vodi ka povišenoj volatilnosti. Sa druge strane, kada cena akcija raste, povećava se vrednost akcijskog kapitala, dok se njen racio dug/akcijski kapital smanjuje, usled čega je firma manje rizična, što za rezultat ima pad u volatilnosti.

4. Volatilnost varira u nekom fiksnom opsegu, tj. volatilnost je obično stacionarna.

Iz prethodnog se može zaključiti da kompleksnost u ponašanju volatilnosti, a samim tim i njen uticaj na procenu VaR-a, čini izbor metoda za njenu procenu vrlo izazovnim zadatkom.

3.5 Asimetričnost i spljoštenost finansijskih prinosa

Kao što volatilnost finansijskih prinosa pokazuje određena empirijska svojstva, tako i raspodele prinosa pokazuju određene devijacije u vidu specifične spljoštenosti i asimetrije. Usled toga adekvatno modelovanje asimetrije i spljoštenosti postaje vrlo bitan cilj kod izbora raspodele prinosa.

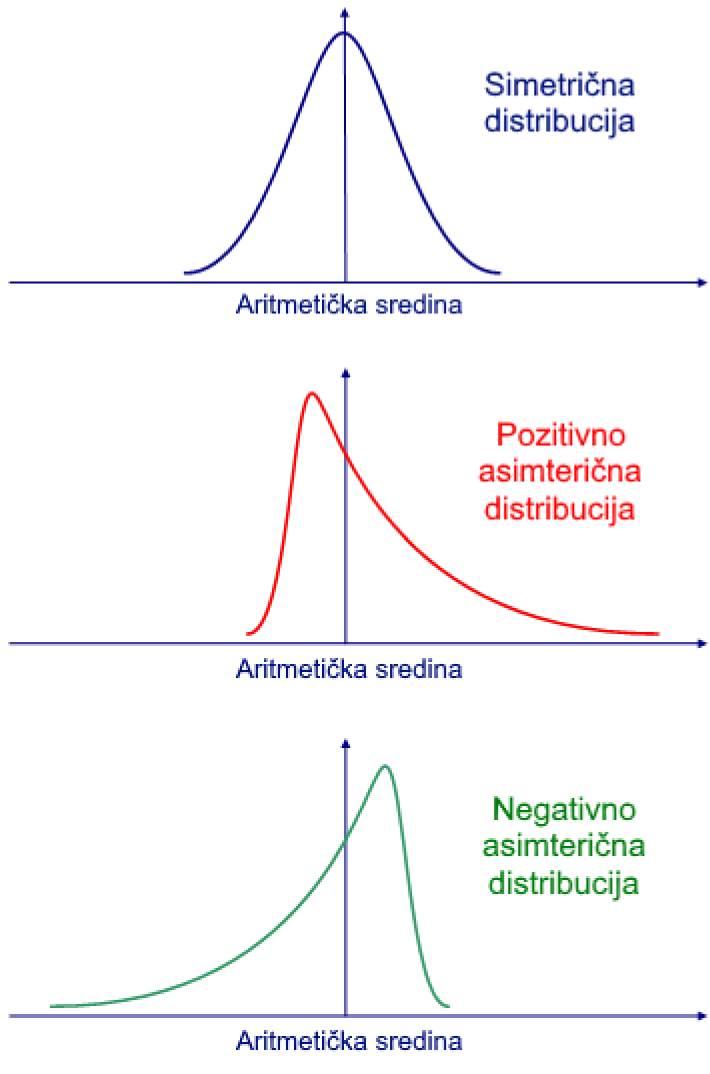
Asimetrija pokazuje da li je raspodela prinosa asimetrična u levo (pozitivna asimetrija) ili u desno (negativna asimetrija) u odnosu na očekivanu vrednost ili je zapravo simetrična (asimetrija je 0). Asimetrija se meri kroz koeficijent asimetrije koji je funkcija trećeg centralnog momenta:

$$CS = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{E(x-\mu)^3}{\sigma^3} \qquad (3.19)$$

i može se oceniti na osnovu uzorka kao:

$$CS = \frac{\frac{1}{T-1}\sum_{i=1}^{T}(x_i-\mu)^3}{\left(\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{T}(x_i-\mu)^2}{T-1}}\right)^3} \tag{3.20}$$

Uticaj asimetrije na oblik raspodele najbolje se može videti na sledećem grafiku:



Grafik 2. Koeficijenti asimetrije i oblik distribucija

Koeficijent asimetrije jednak nuli znači da je raspodela simetrična i da se mere centralne tendencije - očekivanje, modus (ako je unimodalna raspodela) i medijana podudaraju. Ako je CS >0, onda je raspodela asimetrična ulevo i ima dugačak rep udesno, dok modus i medijana imaju vrednosti manje od očekivane vrednosti. Ako je CS<0, onda je raspodela asimetrična udesno i ima dugačak rep ulevo dok modus i medijana imaju vrednosti veće od očekivane vrednosti. Asimetrične raspodele su ponekad izazvane dugotrajnim pomeranjem cene nekog dobitka u jednom smeru – uporna pomeranja nagore ili nadole (Best, 2000). Štaviše, asimetričnost se može koristiti za procenu pozitivnog aspekta - potencijala i negativnog aspekta - rizika. Pozitivna asimetričnost označava da raspodela verovatnoće ima više opservacija iznad modusa, što upućuje na pozitivni potencijal – veću verovatnoću visokih prinosa. S druge strane, negativna asimetrija označava da raspodela verovatnoća ima više opservacija ispod modusa, tako upućujući na rizik – veću verovatnoću niskih prinosa (Lee, 2000). Iz prethodnog sledi da će investitori, ukoliko znaju oblik prinosa portfolija, biti u mogućnosti da bolje odlučuju - shodno svojim preferencijama u odnosu na rizik. Sa tim u vezi, Lai (1991) i Chunhachinda i dr. (1997) su analizirali problem selekcije portfolija u odnosu na asimetričnost prinosa. Chunhachinda i dr. (1997) nalaze da je asimetričnost vrlo važna, toliko da "uključivanje asimetričnosti u odlučivanje investitora u vezi sa selekcijom portfolija dovodi do velikih promena u konstrukciji portfolija". Takođe, empirijski rezultati pokazuju da je asimetričnost finansijskih prinosa uglavnom negativna. Imajući to u vidu, uobičajene pretpostavke o normalnoj ili studentovoj raspodeli koje podrazumevaju simetriju prinosa nisu validne.

Spljoštenost (*eng. kurtosis*) meri zašiljenost distribucije prinosa. Veća spljoštenost podrazumeva da je veći deo varijanse rezultat nefrekventnih ekstremnih odstupanja. Od dve distribucije koje imaju istu varijansu, ona sa većom spljoštenošću ima više opservacija koncentrisanih blizu srednje vrednosti, a takođe i u repovima raspodele. Spljoštenost se procenjuje koeficijentom spljoštenosti CK koji je funkcija četvrtog centralnog momenta:

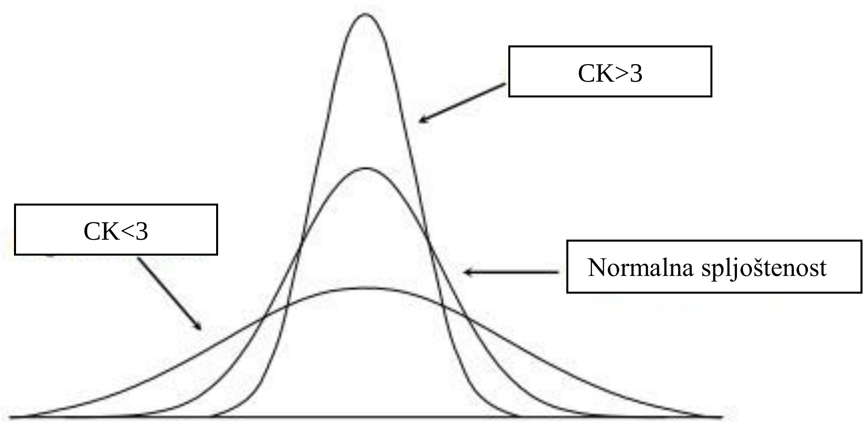
$$CK = \frac{\mu_4}{\sigma^4} = \frac{E(x-\mu)^4}{\sigma^4} \tag{3.22}$$

i može biti ocenjena na osnovu uzorka sa:

$$CS = \frac{\frac{1}{T-1}\sum_{i=1}^{T}(x_i-\mu)^4}{\left(\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{T}(x_i-\mu)^2}{T-1}}\right)^4} \qquad (3.23)$$

Ako je CK=3, raspodela ima normalnu spljoštenost (*eng. mesokurtic*) i ima oblik standardizovane normalne raspodele. Ako je CK< 3, smatra se da raspodela ima spljoštenost manju od normalne (*eng. platykurtic*), i da samim tim ima pljosnatiji oblik od standardizovane normalne raspodele. Ako je CK>3, smatra se da raspodela ima spljoštenost veću od normalne (*eng.* leptokurtic) i da ima više vrhove nego normalna raspodela, kao i više opservacija u repovima usled čega se kaže da je debelih repova.

Oblik raspodele sa različitim koeficijentima spljoštenosti može se videti na sledećem grafikonu.



Grafik 3. Koeficijenti spljoštenosti i primeri distribucija

Mandelbrot (1963) je bio prvi koji je sistematski proučavao spljoštenost veću od normalne u finansijskim podacima i primetio da je raspodela promene cena obično bila zašiljenija i sa debljim repovima u odnosu na uzorke iz normalne distribucije. Danas je ovo empirijski poznata i često citirana činjenica da raspodele prinosa hartija od vrednosti obično imaju debele repove. Jedan od uzroka ove osobine jeste periodičan skok cene hartije. To je često slučaj na tržištima sa diskontinualnim trgovanjem i objašnjava se vremenskom dostupnošću informacija. Na primer, informacija koja je objavljena kad je tržište zatvoreno imaće uticaj na cene kad se tržište ponovo otvori, na taj način uzrokujući skok cena. Ovaj skok cena će za posledicu imati veće frekvencije visokih negativnih ili pozitivnih prinosa nego što je to očekivano za tržišta koja trguju neprekidno (Alexander i Sheedy, 2004). Postojanje debelih repova u raspodeli finansijskih prinosa je takođe jedan od razloga zašto normalna distribucija u proceni VaR-a i uslovnog gubitka nailazi na stalnu kritiku.

3.6 Neparametarski pristup proceni uslovnog gubitka - metod istorijske simulacije

Metod istorijske simulacije u proceni VaR-a i uslovnog gubitka predstavlja jedan od najjednostavnijih metoda, a samim tim i u praksi najčešće korišćenih metoda za procenu rizika. Ovaj metod pripada grupi neparametarskih metoda, jer ne pretpostavlja nikakvu prethodno definisanu raspodelu prinosa, a samim tim omogućava da svojstva kao što su asimetrija i debeli repovi finansijskih prinosa budu obuhvaćena u proceni mera rizika. Ovaj metod podrazumeva korišćenje istorijskih podataka kao osnovu za predviđanje budućih događaja, bazirajući se na osnovnoj pretpostavci da će bliska budućnost biti dovoljno slična bliskoj prošlost, tako da se podaci iz nedavne prošlosti mogu koristiti za procenu rizika u bliskoj budućnosti. Praktično, metod istorijske simulacije dopušta da podaci što više govore sami za sebe, bez dodatnih pretpostavki o analitičkom obliku raspodele, parametrima raspodele ili tipovima međuzavisnosti faktora rizika (Alexander, 2001).

Osnovna ideja istorijske simulacije je krajnje jednostavna i podrazumeva korišćenje stvarnih istorijskih podataka na osnovu kojih se određuje empirijska raspodela prinosa portfolija. Samim tim ovaj metod nije izložen nikakvom riziku modela i omogućava da se neke željene karakteristike kao što su empirijska asimetrija i spljoštenost zadrže u podacima (Pallotta i Zenti, 2000). Osnovni cilj metoda istorijske simulacije je da se nađe veliki broj potencijalnih scenarija za sutrašnju cenu finansijskog instrumenta, ako je poznata cena danas (Cintioli i Marchioro, 2005).

Kao što se iz prethodnog može zaključiti, da bi se primenio metod istorijske simulacije, neophodna je vremenska serija istorijskih prinosa, pri čemu su to najčešće dnevni prinosi. Prilikom obračuna kapitalnih zahteva za pokriće tržišnih rizika u finansijskim institucijama koje primenjuju interne modele za merenje tržišnog rizika, regulatorni organi insistiraju na uključivanju dnevnih podataka za period ne kraći od godinu dana. Ovako dobijeni podaci se zatim koriste za izračunavanje vrednosti portfolija za svaki dan kroz istoriju, pri čemu su ponderi portfolija konstanti i jednaki ponderima tekućeg portfolija.

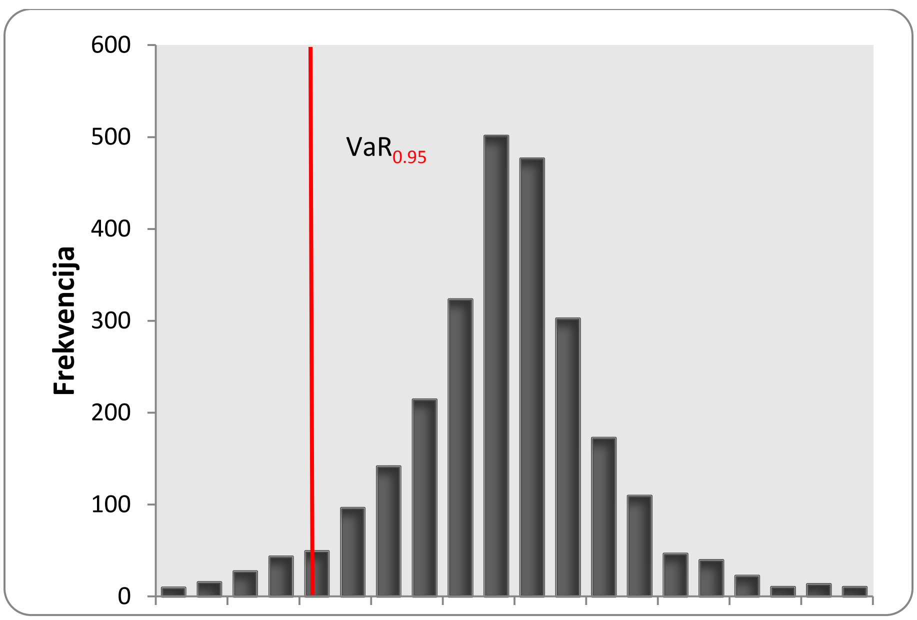
Prvi korak u implementaciji istorijske simulacije je deljenje uzoračke vremenske serije na podserije jednake dužine koje se međusobno preklapaju, tzv. prozore. Sam metod prati logiku “kotrljajućih prozora” (*eng. rolling window*) koja podrazumeva da, ako je veličina uzorka T, a veličina prozora n, možemo konstruisati $T-n+1$ kotrljajućih prozora, tako da dva uzastopna kotrljajuća prozora imaju sve iste podatke osim najstarijih. Otuda, da bi se u trenutku t dobila procena VaR-a i uslovnog gubitka za sledeći dan, koristi se prinos portfolija u vremenu t i n − 1 prethodnih prinosa, koji se sortiraju u rastućem redosledu. Odatle se VaR dobija kao percentil tako sortiranog kotrljajućeg prozora, dok se uslovni gubitak dobija kao srednja vrednost sortiranih prinosa iznad VaR-a.

U slučaju portfolija, istorijska simulacija podrazumeva da se prvo konstruišu hipotetički prinosi portfolija za odgovarajući vremenski prozor, na osnovu uzoračke vremenske serije. Ukoliko je dužina vremenskog prozora 250 dana, a računa se VaR i uslovni gubitak za sledeći dan ($t+1$), određivanje hipotetičkih prinosa portfolija podrazumeva primenu pondera $w_{i,t}$ trenutnog portfolija (u trenutku t) na prošle prinose:

$$R_{p,k} = \sum_{i=1}^{n} w_{i,t} r_{i,k} \quad k=1,2,\ \dots,\ t \tag{3.24}$$

gde je *n* broj hartija koje čine portfolio u trenutku *t*. Na prethodno opisan način, od vremenskih serija prinosa hartija, dobijaju se vremenske serije prinosa portfolija, odnosno grupisanjem i sortiranjem percentila portfolio prinosa dobija se i simulirana empirijska distribucija portfolija. Bitno je naglasiti da su ponderi portfolija konstantni i jednaki ponderima u posmatranom trenutku *t*, usled čega dobijeni prinosi portfolija nisu stvarni već hipotetički. Sam VaR i uslovni gubitak dobijaju se kao odgovarajući percentil distribucije portfolio prinosa, odnosno kao aritmetička sredina prinosa iznad VaR-a.

U slučaju prinosa samo jednog finansijskog instrumenta, postupak je još jednostavniji. Da bi se dobila empirijska raspodela dobitaka i gubitka za h-dana, određuje se veličina kotrljajućeg prozora i koristi se istorija promena cene $\Delta P_t = P_{t+h} - P_t$ za svako t iz prozora. Zatim izradom histograma dobitka/gubitka (P&L) za h dana, q percentil će predstavljati VaR h-dana.



Slika 1 Empirijska gustina i VaR

Neka je F_n empirijska raspodela praćenih gubitaka $\Delta P_1, \Delta P_2, \dots, \Delta P_n$, odnosno:

$$F_n(t) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I(\Delta P_i \leq t) \tag{3.25}$$

gde je I( ) indikator funkcija, korišćenjem empirijske procene kvantila sledi da je VaR_α:

$$VaR_\alpha = F^{-1}(\alpha) = \Delta P_{n(i)}, \quad \alpha \in \left(\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right) \tag{3.26}$$

gde su $\Delta P_1 \leq \Delta P_2 \leq \cdots \leq \Delta P_n$ statistike gubitaka uređene u neopadajući niz. Uslovni gubitak će tada biti sledećeg oblika:

$$ES = E(\Delta P/\Delta P > VaR) = \textstyle\sum_{i=[n\alpha]}^{n} \Delta P_{n(i)}/(n-[n\alpha])^{20} \tag{3.27}$$

Na primer, ako se 1000 opservacija upotrebi da se formira empirijska funkcija raspodele, a nivo pouzdanosti za VaR je 95%, donjih 5% repa će sadržati 50 najvećih gubitaka, a VaR bi bio najmanji od njih, dok će uslovni gubitak biti prosečna vrednost tih 50 najvećih gubitaka. Međutim, ako izaberemo drugu veličinu prozora, VaR može biti značajno drugačiji, što znači da ovaj metod ne daje veoma robustne procene za kratke periode. Osim toga, istorijska simulacija stavlja iste pondere na sve opservacije u odabranom prozoru, samim tim dodeljujući podjednak značaj događajima koji su se desili u davnoj prošlosti i događajima koji su se desili u bliskoj prošlosti. Ovakav način ponderisanja sa aspekta promene cena predstavlja značajan nedostatak, jer su promene cena najviše pod uticajem tekućih tržišnih faktora i bliske prošlosti. Kao način prevazilaženja prethodnog problema, Boudoukh, Richardson i Whitelaw (1998) predstavljaju hibridni metod ili takozvani metod ponderisane istorijske simulacije (*eng. weighted historical simulation* – *WHS*) koji koristi eksponencijalno opadajuće pondere na taj način dajući prednost podacima iz vremenski bliže istorije.

[20]$[n\alpha]$ podrazumeva najveći celi broj manji ili jednak $n\alpha$.

Dowd (1999) navodi sledeće karakteristike kao ključne nedostatke metoda istorijske simulacije: zavisnost od određenog istorijskog perioda, smanjena prediktivna sposobnost, veličina prozora, diskretnost prinosa, kao i broj podataka koji se znatno uvećava prilikom računanja VaR-a i uslovnog gubitka za period duži od jednog dana.

Zavisnost od određenog istorijskog perioda iz kog potiču podaci. Glavna pretpostavka u osnovi ovog metoda jeste da je prošlost dovoljno bliska budućnosti, tj. da se rizici kojima će hartija biti izložena u budućnosti neće mnogo razlikovati od rizika kojima je bila izložena u prošlosti. Dok je za periode sa normalnom volatilnošću ovakva pretpostavka prilično razumna, u nekim drugim slučajevima može dovesti do pogrešnih procena. Uzrok može biti činjenica da istorijski podaci za taj određeni period nisu tipični. Tako na primer, ukoliko je posmatrani kotrljajući prozor sadržao izrazito miran period, postoji opasnost da će izračunati VaR i uslovni gubitak potceniti rizik određene hartije ili portfolija. Sa druge strane, ukoliko je period bio vrlo volatilan, može se desiti da VaR i uslovni gubitak precene rizik budućih događaja. Osim toga, period procene može da sadrži neke ekstremne događaje na tržištu (npr. berzanski krah) koji nisu obavezno relevantni za tekuće tržišne uslove. U tom slučaju verovatno je da će procenjeni VaR i uslovni gubitak biti suviše visok i da će ostati visok sve dok događaj koji je u pitanju ne izađe iz perioda procene. Takođe, nakon što ekstremni događaj izađe iz vremenskog prozora posmatranja obično dolazi do naglog pada vrednosti VaR-a i uslovnog gubitka, što može biti pogrešan signal za značajno smanjenje rizika date hartije/portfolija. Ovaj problem može biti rešen filtriranjem ekstremnih događaja iz istorijskih podataka čime bi se dobili VaR i uslovni gubitak pod normalnim tržišnim okolnostima (Alexander, 2005). Ipak, ovakav način "grubog" filtriranja ima smisla jedino ukoliko se specifični događaj dogodio u dalekoj prošlosti i pretpostavlja se da je malo verovatno da će se slične okolnosti ponoviti u narednom periodu.

Smanjena prediktivna sposobnost. VaR i uslovni gubitak dobijeni istorijskom simulacijom ne mogu obuhvatiti događaje koji bi se mogli dogoditi u budućnosti, ali se nisu dogodili u odabranom periodu iz kojeg potiču empirijski podaci. Praktično, ovaj metod tretira samo rizike koji se ogledaju u odgovarajućem posmatranom vremenskom periodu koji obuhvati kotrljajući prozor.

Veličina prozora. Pošto VaR i uslovni gubitak pripadaju donjim percentilima raspodele, da bi se dobile pouzdane procene potreban je veći broj podataka, a samim tim i dovoljno dugačak vremenski prozor. Takođe, sa aspekta robustnosti poželjno je koristiti veoma duge vremenske serije istorijskih podataka. Sa druge strane, dug istorijski period podrazumeva da će opservacije iz daleke prošlosti imati isti uticaj u proceni ovih parametara kao i skorašnje opservacije, što dovodi do toga da procene VaR-a i uslovnog gubitka postanu neosetljive na nove informacije. Kao posledica toga, dužina prozora mora da zadovolji dva kontradiktorna svojstva: mora biti dovoljno velika da bi statističko zaključivanje učinila značajnim, a opet ne sme biti ni suviše velika da bi se izbegao rizik od obuhvatanja opservacija koje ne pripadaju tekućem klasteru volatilnosti (Manganelli & Engle, 2001).

Diskretnost prinosa. Rezultat metode istorijske simulacije jeste diskretna empirijska raspodela prinosa čije je telo raspodele gusto opservacijama (susedne opservacije su veoma blizu jedna drugoj). Sa druge strane, što se više ide ka repovima raspodele, opservacije postaju sve ređe i intervali između susednih sve duži. Samim tim, u zavisnosti od izbora tačke koja će predstavljati percentil raspodele, VaR može biti ili potcenjen ili precenjen, a samim tim i uslovni gubitak (Danielsson & De Vries, 2000)

Broj podataka koji se znatno povećava prilikom računanja VaR-a i uslovnog gubitka za više od jednog dana. Tako, na primer, prilikom procene desetodnevnog VaR-a, trebalo bi koristiti desetodnevne prinose koji se ne preklapaju, što bi značilo da ukoliko bismo hteli da imamo istu preciznost kao i prilikom procene jednodnevnog VaR-a, da bismo morali da uključimo deset puta više podataka. Imajući u vidu da istorijska simulacija ne pretpostavlja nikakvu teorijsku raspodelu, ne postoji nijedan teorijski ispravan način za ekstrapolaciju desetodnevnog VaR-a iz jednodnevnog.

Pa ipak, i pored prethodno navedenih nedostataka, istorijska simulacija i dalje predstavlja jedan od najčešće korišćenih načina za procenu VaR-a i uslovnog gubitka. Tako na primer, istraživanje Perignon i Smith (2010), koje je obuhvatilo 60 najvećih internacionalnih banaka u periodu od 1996-2005, je pokazalo da čak 73% banaka koristi istorijsku simulaciju za procenu VaR-a. Razlozi za tako široku upotrebu ovog metoda su uglavnom sledeći:

- Jednostavan je i lak za implementaciju, kao i izveštavanje. Ovakav način procene ne zahteva složene i skupe softverske pakete, jer nije računski zahtevan.
- Ne zahteva nikakve pretpostavke o distribuciji prinosa, kao i nezavisnosti prinosa, samim tim omogućava da se zadrže neka empirijska svojstva prinosa kao što su debeli repovi i asimetrija.
- S obzirom da je neparametarski prirode, ovaj metod ne zahteva procenu volatilnosti i korelacija, već koristi istorijske volatilnosti i korelacije sadržane u podacima. Takođe, može se primeniti za bilo koji tip instrumenta i tržišnih rizika jer dopušta nelinearnost prinosa, što je posebno pogodno za finansijske derivate.

3.7 Parametarski pristupi u proceni uslovnog gubitka

Parametarski pristupi proceni VaR-a i uslovnog gubitka se zasnivaju na vrlo snažnoj pretpostavci o teoretskoj distribuciji prinosa. Naime, izbor distribucije treba da bude takav da najbolje odgovara postojećim empirijskim podacima, što u slučaju kompleksnih portfolija predstavlja dodatni rizik. Sa druge strane, pretpostavka o teoretski poznatoj distribuciji prinosa olakšava procenu različitih parametara rizika. Imajući u vidu način tretiranja volatilnosti/varijanse prinosa, parametarski pristupi obuhvataju dve osnovne grupe modela (Goorbergh i Vlaar, 1999):

Statički modeli – ovi modeli pretpostavljaju kompletnu distribuciju prinosa i vremenski nepromenljivu varijansu. U ovu grupu modela spadaju jednostavni analitički metodi sa pretpostavkama o različitim distribucijama prinosa (normalna distribucija, studentova distribucija, …)

Dinamički modeli – koji pretpostavljaju vremensku promenljivost varijanse i koji modeluju uslovnu volatilnost, na taj način uzimajući u obzir i empirijsko svojstvo klasterovanja volatilnosti. U ove modele spadaju model eksponencijalno ponderisanih pokretnih proseka (eng. exponentially weighted moving average model – EWMA), kao i različiti modeli iz grupe generalizovanih autoregresionih uslovno heteroskedastičnih modela (eng. generalized autoregressive conditional heteroscedasticity model – GARCH).

3.7.1 Analitički model za procenu uslovnog gubitka

Kao što je prethodno pomenuto, analitički model za procenu uslovnog gubitka spada u grupu parametarskih modela, pošto pretpostavlja da raspodela verovatnoća prinosa finansijskog instrumenta pripada poznatoj familiji raspodela. Ovaj model se oslanja na centralnu graničnu teoremu[21] koja kaže da za dovoljno velike slučajne uzorke aritmetička sredina uzorka asimptotski teži normalnoj raspodeli. Praktično, ova teorema tvrdi da, bez obzira na distribuciju iz koje potiče, sredina uzorka teži normalnoj distribuciji. Zbog ovog svojstva, jedna od najčešćih pretpostavki je da je raspodela prinosa hartija od vrednosti normalna:

$$r \sim N(\mu, \sigma^2) \tag{3.28}$$

Pri čemu je funkcija gustine normalne raspodele sledećeg oblika:

---

[21]**Centralna granična teorema –**Ako su $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ nezavisne slučajne promenljive sa istom raspodelom, sa matematičkim očekivanjem m i konačnom varijansom σ^2, tada slučajna promenljiva $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ konverigra normalnoj raspodeli $N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$, kada n neograničeno raste.

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \tag{3.29}$$

Parametri modela su uzoračka aritmetička sredina i uzoračka varijansa za posmatrani vremenski period T (T, u osnovi, predstavlja broj prinosa u uzorku) i računaju se prema sledećim formulama:

$$\mu = \bar{r} = \frac{1}{T}\sum_{i=1}^{T} r_i \tag{3.30}$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{T-1}\sum_{i=1}^{T}(r_i - \mu)^2 \tag{3.31}$$

Ako je aktuelna cena neke hartije P, VaR-a pri nivou poverenja (1-α) 100% dat je sa:

$$VaR_\alpha = -r_\alpha P \tag{3.32}$$

gde je $r_\alpha$donji α –percentil raspodele prinosa $N(\mu, \sigma^2)$. Uglavnom, r_α je prinos takav da je P{r<r_α}=α.

Pogodniji način za izračunavanje VaR-a, a samim tim i uslovnog gubitka, je da se prvo normalna raspodela $N(\mu, \sigma^2)$ translira u standardnu normalnu raspodelu $N(0{,}1)$, a zatim nađe VaR. To se može uraditi standardizovanjem prinosa na sledeći način:

$$r^* = \frac{r-\mu}{\sigma} \tag{3.33}$$

Gde je r^*standardizovani prinos sa $N(0{,}1)$. Odatle se VaR jednostavno određuje iz sledeće formule:

$$P\left\{\frac{r-\mu}{\sigma} \leq \frac{\frac{-VaR_\propto}{P} - \mu}{\sigma}\right\} = \alpha \tag{3.34}$$

Konačno, rešavanjem prethodne formule dobija se jednostavna analitička formula za VaR:

$$\frac{\frac{-VaR_{h,\propto}}{P} - \mu}{\sigma} = Z_\alpha \tag{3.35}$$

$$=> VaR_\alpha = -(\mu + Z_\alpha \sigma)P \tag{3.36}$$

gde je$Z_\alpha = F^{-1}(\alpha)$ niži α percentil standardne normalne raspodele i obično se nalazi kao $Z_\alpha = -Z_{1-\alpha}$. Odavde se lako izvodi analitička formula za uslovni gubitak (McNeil i al., 2005), koja je sledećeg oblika:

$$ES_\alpha = \mu + \sigma \frac{f(F^{-1}(\alpha))}{1-\alpha} = \mu + \sigma \frac{f(Z_\alpha)}{1-\alpha} \tag{3.37}$$

U praksi, često se pretpostavlja da raspodela prinosa ima srednju vrednost nula, što je prihvatljivo, jer je očekivani prinos u toku kratkog perioda držanja skoro uvek blizu nule. Štaviše, empirijske studije su pokazale da najbolje predviđanje budućeg prinosa nije istorijska srednja vrednost prinosa već nulta vrednost. Prema tome, često korišćena formula za izračunavanje VaR-a je:

$$VaR_\alpha = Z_{1-\alpha} \sigma P \tag{3.38}$$

Imajući u vidu da je uslovni gubitak definisan kao:

$$ES = E(X/X > VaR) = E(X/X > Z_\alpha \sigma) = \sigma \frac{f(Z_\alpha)}{1-\alpha} \tag{3.39}$$

gde je *f(x)* funkcija gustine, a *F(x)* funkcija raspodele standardizovane normalne distribucije.

Kao što se iz prethodnog može videti, procena uslovnog gubitka analitičkim modelom sa pretpostavkom o normalnoj distribuciji je veoma jednostavna. Međutim, ovakav način uprošćenog modelovanja ponašanja finansijskih instrumenata sadrži značajne nedostatke. Prvo, empirijske činjenice govore u prilog tome da prinosi finansijskih instrumenata često imaju debele repove, usled čega pretpostavka o normalnoj raspodeli dovodi do toga da će VaR i uslovni gubitak na nižim nivoima poverenja biti precenjeni, dok će na višim nivoima poverenja biti potcenjeni (Alexander i Sheedy, 2004). Drugi nedostatak ovog modela jeste, što pretpostavlja da je volatilnost konstantna tokom vremena i što dodeljuje jednake težine svakom dnevnom prinosu. Samim tim, ovaj model ne uzima u obzir klasterovanje volatilnosti finansijskih prinosa. Konačno, analitički model sa pretpostavkom o normalnoj distribuciji nije adekvatan posebno kada su u pitanju derivati čija prinosi nisu linearna funkcija cene instrumenata na koji se odnose.

Jedan od način rešavanja problema debelih repova, je da se umesto normalne raspodele pretpostavlja neka teorijska raspodela čija je spljoštenost veća od normalne. Iz tih razloga, u praksi se najčešće koristi studentova t raspodela. Studentova raspodela pripada familiji raspodela čiji je oblik u potpunosti određen jednim parametrom – brojem stepeni slobode *v.* Funkcija gustine ne-centrirane studentove raspodele koju obeležavamo sa $t(\mu, \sigma^2, v)$, data je sledećom formulom:

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\sqrt{\pi(\nu-2)}\sigma}(1+\frac{(x-\mu)^2}{(\nu-2)\sigma^2})^{-\frac{\nu+1}{2}} \tag{3.40}$$

Gde je μ očekivana vrednost, σ^2 parametar skaliranja (*eng. scale* parameter), a Γ funkcija:

$$\Gamma(\nu) = \int_0^{+\infty} x^{\nu-1}e^{-x}dx \tag{3.41}$$

Drugi centralni moment,varijansa, ove funkcije je:

$$\mu_2 = E(x-\mu)^2 = \frac{\sigma^2\nu}{\nu-2} \tag{3.42}$$

Specijalni slučaj studentove distribucije je standardizovana t distribucija $t(v)$ koja pretpostavlja μ=0 i $\sigma^2=\frac{\nu}{\nu-2}$. Transformacija slučajne promenljive sa studentovom $t\ (\mu, \sigma^2, v)$

raspodelom u slučajnu promenljivu sa standardizovanom studentovom raspodelom *t(v)* je slična standardizaciji slučajne promenljive sa normalnom raspodelom i odvija se na sledeći način:

$$t(\nu) = \frac{\mathrm{t}\,(\mu, \sigma^2, \nu) - \mu}{\sigma} \tag{3.43}$$

čija je funkcija gustine sledećeg oblika:

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\sqrt{\pi\nu}}(1 + \frac{x^2}{\nu})^{-\frac{\nu+1}{2}} \tag{3.44}$$

Broj stepeni slobode, a prema tome i oblik Student-ove raspodele, se najčešće aproksimira metodom maksimalne verodostojnosti, koji, u beskonačnosti, konvergira ka normalnoj raspodeli.

Štaviše, parameter skaliranja σ^2 dobija se iz varijanse uzorka $\hat{\sigma}^2$ kao:

$$\sigma^2 = \frac{\nu - 2}{\nu}\hat{\sigma}^2 \tag{3.44}$$

Sada, izraz za VaR sa Student-ovom raspodelom t(ν,μ,σ^2) i nivoom poverenja 1-α ($VaR_{t,\alpha}$) može biti izveden zamenom α kvantila normalne raspodele (jednačina 3.37) sa α kvantilom standardizovane Student-ove raspodele $t_{\alpha,\nu}$ sa ν stepeni slobode:

$$VaR_{t,\alpha} = -(\mu + t_{\alpha,\nu}\sigma)P = -\left(\mu + t_{\alpha,\nu}\sqrt{\frac{\nu-2}{\nu}}\hat{\sigma}\right)P \tag{3.45}$$

Ako pretpostavimo da je srednja vrednost nula, dobićemo:

$$VaR_{t,\alpha} = -t_{\alpha,\nu}\sigma P = -t_{\alpha,\nu}\sqrt{\frac{\nu-2}{\nu}}\hat{\sigma}P \tag{3.46}$$

$\sqrt{\frac{\nu-2}{\nu}}$ je korektivni faktor za uzoračku standardnu devijaciju $\hat{\sigma}$ koja je bez ovog faktora pristrasna ocena σ.

Na sličan način procenjuje se i uslovni gubitak (McNeil i al., 2005):

$$ES_{\alpha}(\mathrm{t}\,(\mu,\sigma^2,\nu)) = \mu + \sigma\frac{f(\mathrm{F}^{-1}(\alpha))}{1-\alpha}\cdot\frac{\nu+(\mathrm{F}^{-1}(\alpha))^2}{\nu-1} \tag{3.47}$$

gde su *f* funkcija gustine i F funkcija raspodele standardizovane studentove raspodele.

Jednostavan analitički model VaR-a i uslovnog gubitka sa Student-ovom raspodelom bolje procenjuje prinose u slučaju spljoštenosti veće od normalne, ali i dalje pati od drugih nedostataka analitičkih modela sa normalnom raspodelom – pretpostavke o unapred definisanoj teoretskoj raspodeli, kao i konstantnoj volatilnosti prinosa hartija od vrednosti.

3.7.2 Model eksponencijalno ponderisanih pokretnih proseka (EWMA)

Kao što je već pomenuto, jedan od glavnih problema analitičkih modela za procenu VaR-a i uslovnog gubitka je što ne vode računa o empirijskim svojstvima volatilnosti kao što su vremenska promenljivost, klasterovanje volatilnosti i levridž efekat. Za razliku od njih, model eksponencijalno ponderisanih pokretnih proseka (EWMA) je jedan od u praksi najčešće primenjivanih modela za predviđanje vremenski promenljivih i zavisnih varijansi, odnosno volatilnosti prinosa od hartija od vrednosti. Ovaj model spada u jedne od prvih modela uslovne volatilnosti, koji je popularisao JP Morgan kroz publikaciju o standardima za upravljanje tržišnim rizicima - RiskMetrics™ Technical Document (J.P.Morgan, 1996).

Modeli uslovne volatilnosti baziraju se na proceni uslovne varijanse[22] prinosa, odnosno, varijanse koja uključuje uticaj svih raspoloživih prethodnih informacija.

Dinamika cena hartije za modele uslovne volatilnosti obično se opisuje modelom slučajnog hoda (*eng. random walk*), koji je sledećeg oblika:

$$r_t = \mu + \sigma\varepsilon_t \quad i \quad E(\varepsilon_t) = 0 \ , \quad E({\varepsilon_t}^2) = 1 \tag{3.48}$$

Gde je r prinos, a ε je identično i nezavisno raspodeljen (i.i.d. sa pretpostavljenom raspodelom D) rezidual. EWMA pretpostavlja da je srednja vrednost μ jednaka nuli i da reziduali imaju normalnu raspodelu $\varepsilon: N(0,1)$.

Model eksponencijalno ponderisanih pokretnih proseka je u osnovi nadgradnja prostog modela pokretnog proseka (SMA)[23] za procenu volatilnosti, koja omogućava da novije opservacije imaju jači uticaj na predviđanje volatilnosti nego starije opservacije. Prema EWMA specifikaciji, najnovija opservacija nosi najveću težinu, dok težine prethodnih opservacija vremenom eksponencijalno opadaju. Ovaj model ima dve glavne prednosti u odnosu na model prostog pokretnog proseka. Kao prvo, na volatilnost u praksi mnogo više utiču nedavni događaji koji, prema EWMA metodologiji, nose veće pondere nego događaji iz dalje prošlosti. Kao posledica toga, EWMA volatilnost reaguje brže na tržišne šokove nego SMA volatilnost. Osim toga, kod procene SMA volatilnosti javlja se problem izbora dužine vremenskog perioda na osnovu kojeg se volatilnost računa. Na primer, ukoliko se izabere duži istorijski period za procenu volatilnosti, onda će volatilnost reagovati sporo na

[22] Uslovna varijansa u vremenu t je varijansa uslovne raspodele u vremenskom trenutku t. Uslovna raspodela, u širem smislu, je bilo koja raspodela koja je uslovljena na skupu poznatih vrednosti neke varijable, odnosno na skupu informacija. U modelima vremenskih serija, skup informacija u vremenu - I_t najčešće čine sve prethodne vrednosti koje su ostvarene u procesu.

[23] Prost model pokretnog proseka pretpostavlja da je srednja vrednost prinosa nula, a da je volatilnost opisana sledećom fromulom:

$$\sigma_t^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} {r_{t-i}}^2$$

gde je r_t prinos u danu t, a n je broj dana, odnosno veličina uzorka.

iznenadni tržišni šok. Drugo, uticaj na volatilnost jedne date opservacije eksponencijalno opada u skladu sa opadanjem pondera pridruženim nedavnim opservacijama (Brooks, 2002). Nasuprot tome, upotreba prostog pokretnog proseka vodi ka relativno naglim promenama u standardnoj devijaciji (volatilnosti), jednom kada šok ispadne iz vremenskog prozora. Štaviše, ako je šok uključen u relativno dug vremenski period na osnovu kog se procenjuje volatilnost, onda će procena volatilnosti ostati na veštački visokom nivou.

Prema EWMA modelu, današnja procena varijanse je:

$$\sigma_t^2 = \frac{\lambda^0 {r_{t-1}}^2 + \lambda^1 {r_{t-2}}^2 + \cdots + \lambda^{n-1} {r_{t-n}}^2}{1 + \lambda^1 + \lambda^2 + \cdots + \lambda^{n-1}} = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} \lambda^i {r_{t-1-i}}^2}{\sum_{i=0}^{n-1} \lambda^i} \tag{3.49}$$

Gde je r_t prinos hartije, n period iz kog potiče prinos, a λ je faktor opadanja (*eng. decay factor)* koji određuje pondere opservacija. Pošto su $0< \lambda <1$ i $\lambda^n \to 0$ kad je $n\to\infty$, model eksponencijalno ponderisanih pokretnih proseka neće uopšte dodeljivati pondere opservacijama iz daleke prošlosti. Štaviše, pošto imenilac konvergira ka $\frac{1}{1-\lambda}$ kada $n\to\infty$, za dovoljno veliki uzorak n, ili dovoljno malo λ, ocena volatilnosti je sledećeg oblika:

$$\sigma_t^2 = \frac{1-\lambda}{1-\lambda^n} \sum_{i=0}^{n-1} \lambda^i {r_{t-1-i}}^2 \cong (1-\lambda) \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i {r_{t-1-i}}^2 = (1-\lambda)(r_{t-1}^2 + \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^i {r_{t-1-i}}^2 =$$
$$(1-\lambda) r_{t-1}^2 + \lambda(1-\lambda) \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{i-1} {r_{t-1-i}}^2 = (1-\lambda) r_{t-1}^2 + \lambda \sigma_{t-1}^2 \tag{3.50}$$

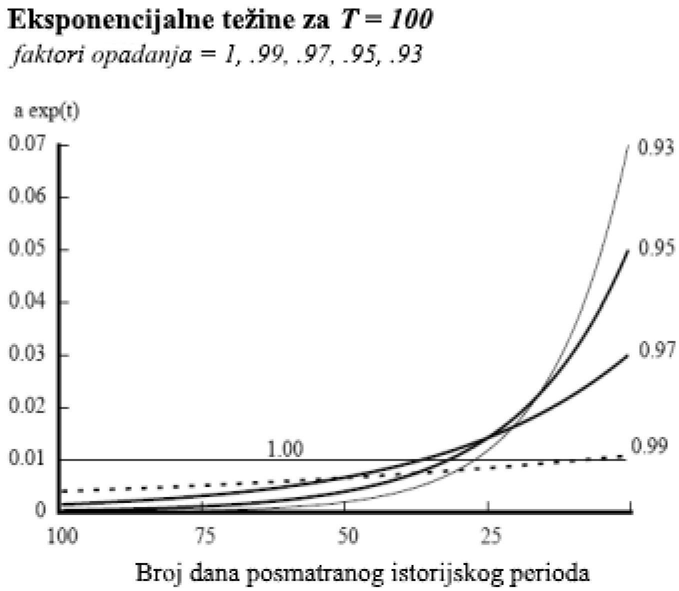
Iz prethodne formule se lako može uočiti da je današnja varijansa ponderisani prosek kvadrata jučerašnjih prinosa i varijanse, kao i da EWMA model sadrži samo jedan nepoznati parametar. λ.

Tumačenje λ može biti dvojako. Prvi član gornje formule $(1-\lambda) r_{t-1}^2$ određuje intenzitet reakcije volatilnosti na događaje na tržištu – što je manje λ, veća je reakcija volatilnosti na informacije o kretanju tržišta koje sadrži jučerašnji prinos. Drugi član, $\lambda \sigma_{t-1}^2$ određuje postojanost volatilnosti – ako je volatilnost bila visoka juče biće još uvek visoka i danas, bez obzira na događanja na tržištu. Tako, visoka vrednost parametra λ uslovljava slabu reakciju na aktuelne događaje na tržištu, ali daje veliku postojanost u volatilnosti, dok niska vrednost λ daje visoko reaktivnu volatilnost (Alexander, 2005). Međutim, u oba slučaja, pošto je vrednost λ pozitivna, današnja varijansa će biti pozitivno korelisana sa jučerašnjom, usled čega je efekat grupisanja volatilnosti ovim modelom uzet u obzir.

Glavna prednost i glavni nedostatak EWMA modela je faktor opadanja λ, koji je isti za sve hartije. S jedne strane, EWMA se lako implementira pošto korisnik jednostavno pretpostavlja neku vrednost faktora opadanja, ali s druge strane, izbor parametra λ se ne zasniva na čvrstim statističkim temeljima (ne postoji odgovarajući statistički postupak za procenu vrednosti λ). Vrednost faktora opadanja λ uglavnom varira između 0.75 (mala postojanost volatilnosti i visoka reaktivnost) i 0.98 (vrlo postojana volatilnost i slaba reaktivnost). Niže vrednosti λ su pogodnije za kratkoročne procene volatilnosti, dok su više vrednosti pogodnije za dugoročne procene volatilnosti. Tako, na primer, JP Morgan Risk Metrics pri proceni rizika uzima faktor opadanja od 0.94 za procenu dnevne volatilnosti i 0.97 za procenu mesečne volatilnosti. Na osnovu EWMA pondera može se uočiti da faktor opadanja od 0.94 efektivno koristi period opservacija od 30 dana (nakon uključivanja 30 – kvadrata dnevnih prinosa, kumulativni ponder je 0.844, na taj način uključeno je 84.4 % pondera). Sa faktorom opadanja od 0.97, dužina efektivnog perioda opservacija je bliža 100 dana. Ukupan broj dana podataka potrebnih za dati nivo tačnosti (Best, 1999) za EWMA dat je sa:

Traženi broj tačaka na grafikonu = log (tražena tačnost)/log (faktor opadanja)

Šema pondera može se videti iz sledećeg grafikona:



Slika 7. EWMA faktor opadanja

Odgovarajuća formula za VaR procenjen sa EWMA modelom, a pod pretpostavkom normalne raspodele ima sledeći obrazac:

$$VaR_{t,\alpha} = z_{1-\alpha}\sigma_t P_t \tag{3.51}$$

gde je Z_α niži α percentil standardne normalne raspodele, a P_t je cena hartije u periodu t. Odatle odgovarajuća formula za uslovni gubitak je sledećeg oblika:

$$ES_{t,\alpha} = E(X/X > VaR_{t,\alpha}) = E(X/X > Z_\alpha \sigma_t) = \sigma_t \frac{f(Z_\alpha)}{1-\alpha} \tag{3.52}$$

Imajući u vidu empirijsku činjenicu o postojanju debelih repova u finansijskim prinosima, često se umesto pretpostavke o normalnoj raspodeli uzima pretpostavka o studentovoj raspodeli reziduala, usled čega formula (3.51) postaje:

$$VaR_{t,\alpha} = t_{1-\alpha,\nu}\sigma_t \sqrt{\nu - 2/\nu} P_t \tag{3.53}$$

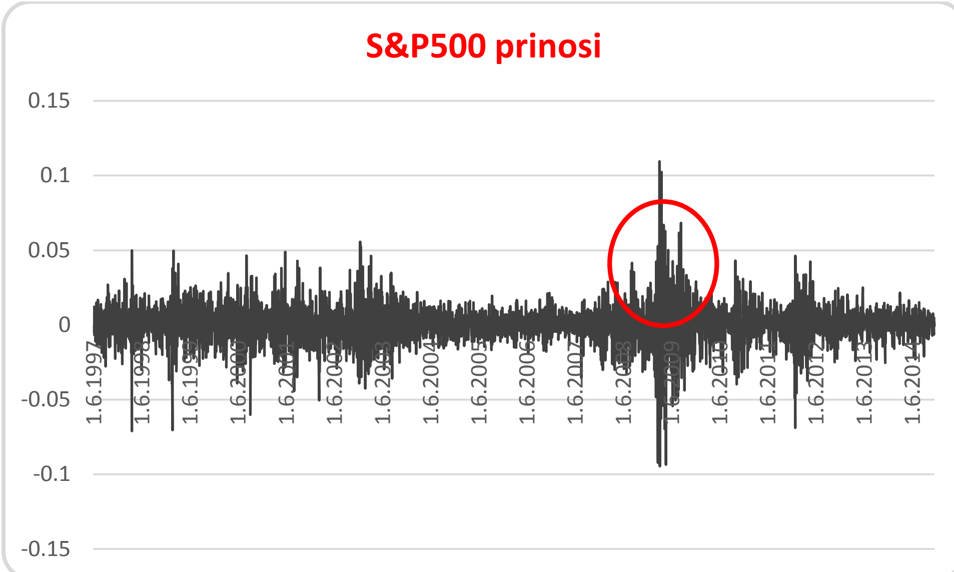
gde je $t_{1-\alpha,\nu}$ niži α percentil studentove raspodele, ν broj stepeni slobode, a P_t cena hartije u trenutku t. Na osnovu prethodne formule, uslovni gubitak možemo odrediti preko sledećeg obrasca:

$$ES_{t,\alpha} = \sigma_t \frac{f(F^{-1}(\alpha))}{1-\alpha} \cdot \frac{\nu + (F^{-1}(\alpha))^2}{\nu - 1} \tag{3.54}$$

Iz prethodnog, se jasno može zaključiti da je jedna od velikih prednosti EWMA modela to što ne zahteva veliki broj podataka, štaviše to su samo faktor opadanja, jučerašnji prinos i varijansa. Pa ipak, arbitraran način određivanja faktora opadanja, kao i to što se pretpostavlja isti faktor opadanja i za različite tipove instrumenata u portfoliju, predstavlja jedno od velikih ograničenja ovog modela.

3.7.3 Generalizovani autoregresioni model uslovne heteroskedastičnosti (GARCH)

Glavna pretpostavka većine modela, koji opisuju ponašanje finansijskih prinosa, je da su prinosi nezavisni i identično raspoređeni. Identična raspodela prinosa podrazumeva da su parametri raspodele – srednja vrednost i varijansa konstantne u vremenu, što empirijske činjenice demantuju, jer je varijansa vremenski promenljiva (Alexander i Sheedy, 2004). Sa druge strane, nezavisnost prinosa podrazumeva da jučerašnji prinos neće imati uticaja na današnji prinos. Međutim, empirijske činjenice pokazuju da vrednost jučerašnjeg prinosa ima značajan uticaj na današnji prinos - visoki prinos će verovatno biti praćen drugim visokim prinosom u bilo kom smeru (Mandlebrot, 1963). Naročito, visoko frekventni prinosi pokazuju znake značajne autokorelacije. S druge strane, prinosi niže frekvencije ne moraju biti autokorelisani, ali zato kvadrati njihovih reziduala često pokazuju autokorelaciju. Pozitivna autokorelacija kvadrata prinosa je znak postojanja klastera volatilnosti, usled kojih su mirni periodi niskih prinosa prekidani periodima visokih prinosa (Slika8).



Slika 8. Klasteri volatilnosti

Na berzanskim tržištima, često se može uočiti da je volatilnost viša kada je tržištu "u padu" nego kada tržište raste – levridž efekat. Ova osobina[24] volatilnosti, u kombinaciji sa prethodno pomenutim klasterima volatilnosti, vrlo uspešno se procenjuje generalizovanim autoregresionim uslovno[25] heteroskedastičnim[26] - GARCH modelima. Generalizovano – se odnosi na poseban tip modela koji je uveo Bollersev (1986) i predstavlja generalizaciju ARCH modela koji je uveo Engle (1982). ARCH (autoregresioni uslovno heteroskedastični) model podrazumeva da se uslovna varijansa menja tokom vremena, kao funkcija prošlih grešaka, dok je bezuslovna varijansa konstantna. Bollerseov-a generalizacija ARCH modela podrazumeva da uslovna varijansa ne zavisi samo od prošlih grešaka, već i od prošlih uslovnih varijansi. Štaviše, GARCH modeli su generalizovani u smislu da se mogu menjati tako da uzimaju u obzir faktore specifične za različita tržišta.

[24] Levridž efekat je adekvatno procenjen specijalnim tipovima GARCH modela kao što su prag GARCH (*eng. threshold GARCH-TGARCH*) i eksponencijalni GARCH (EGARCH).

[25] Termin uslovno u modelu podrazumeva da se dobijena predviđanja baziraju na informacijama raspoloživim u prethodnom periodu.

[26] Heteroskedastičnost označava vremenski promenljivu varijansu.

GARCH modeli sastoje se od dve formule – formule uslovne srednje vrednosti i formule uslovne varijanse. Ako pretpostavimo da su reziduali uslovno normalno raspoređeni, specifikacija GARCH (p,q) modela imaće sledeći obrazac:

$$r_t = \mu_t + a_t \tag{3.55}$$

$$a_t = \sigma_t \varepsilon_t i \varepsilon_t \sim N(0,1) \quad => a_t \sim N(0, \sigma_t^2)$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \, a_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{q} \beta_j \, \sigma_{t-j}^2 \tag{3.56}$$

gde je $\alpha_0 > 0$, $\alpha_i \geq 0, \forall i = 1, \dots, p$ a $\beta_j \geq 0, \forall j = 1, \dots, q$ i $\sum_{i=1}^{\max(p,q)} (\alpha_i + \beta_i) < 1$ [27]. U formuli r_t predstavlja prinos u vremenu t koji je sastavljen od očekivanog prinosa u vremenu t -μ_t i slučajnog rezidualnog člana a_t (ε_t je nezavisna i identično distribuirana – iid. slučajna varijabla). σ_t^2 predstavlja uslovnu varijansu a_t koja je vremenski promenjiva i zavisna od informacija u trenutku t-1. Visoka vrednost GARCH koeficijenta β_j označava da šokovima koji utiču na uslovnu varijansu treba dosta vremena da nestanu, tj. da je volatilnost postojana, dok visoka vrednost GARCH koeficijenta greške α_i označava da volatilnost jako reaguje na tržišne promene (Alexander, 2005).

Procena bezuslovne varijanse prema GARCH(p,q) modelu određuje se prema sledećem obrascu:

$$\sigma^2 = \frac{\alpha_0}{1 - \sum_{i=1}^{\max(p,q)} (\alpha_i + \beta_i)} \tag{3.57}$$

pod uslovom da je imenilac razlomka pozitivan. Zbog toga, prethodno pomenuti uslov $\sum_{i=1}^{\max(p,q)} (\alpha_i + \beta_i) < 1$ obezbeđuje da bezuslovna varijansa ima konačnu vrednost.

---

[27] Pretpostavlja se da je $\alpha_i = 0$ kad je $i > p$, a $\beta_j = 0$ kad je $j > q$

U praksi, najčešće korišćeni GARCH model je GARCH (1,1), pošto je za procenu volatilnosti retko kad potrebno korišćenje više od jedne promenljive greške i više od jedne promenljive varijanse. GARCH (1,1) model ima istu formulu za srednju vrednost kao i GARCH (p,q) model, ali formula uslovne varijanse, pod pretpostavkom uslovno normalnih reziduala, data je sledećom formulom:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 \tag{3.58}$$

gde je $\alpha_0 > 0$, $\alpha_1 > 0$, $\beta_1 > 0$ i $\alpha_1 + \beta_1 < 1$. Ovakva specifikacija pretpostavlja da je najbolje predviđanje uslovne varijanse za određeni period, ponderisani prosek procena tri različite varijanse. Jedna je konstantna varijansa koja odgovara dugoročnoj prosečnoj varijansi, druga je nova informacija koja nije bila dostupna kad je pravljena prethodna procena, a treća je predviđanje varijanse prethodnog perioda (Engle, 2004). Ponderi za ova tri predviđanja određuju koliko brzo se varijansa menja sa novom informacijom i koliko brzo se vraća na svoju dugoročnu srednju vrednost. Suma dva parametra α_1, β_1, takođe nazvana i postojanost, određuje koliko dugo će promena pojedine cene uticati na buduće procene volatilnosti. Što je veća postojanost, duže će promena cene uticati na buduće procene volatilnosti (Best, 1999). Štaviše, iz formule se može videti da će veliko a_{t-1}^2, biti praćeno sa drugim velikim a_t^2, što opisuje efekat klastera volatilnosti (Tsay, 2002). Formula uslovne varijanse je takođe veoma slična formuli EWMA varijanse gde α_1 zamenjuje (1-λ), β_1 zamenjuje λ, ali bez uslova da je $\alpha_1 + \beta_1$ jednako jedan. Suštinski, EWMA je specijalni slučaj integrisanog GARCH modela – IGARCH (1)[28], kod kojeg je predefinisan faktor opadanja λ i $\alpha_0 = 0$. Ako je $\alpha_1 + \beta_1$<1, onda se za volatilnost kaže da osciluje oko srednje vrednosti (*eng, mean reverting*), a brzina oscilovanja oko srednje

[28] Specifikacija uslovne varijanse I-GARC(1) modela je sledećeg oblika:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + (1 - \beta_1) a_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2$$

vrednosti[29] je inverzno povezana sa ovom sumom. Osim toga, u poređenju sa EWMA, GARCH model agresivnije reaguje na promenu cena.

Parametri modela $\alpha_0, \alpha_1 \ i \ \beta_1$ dobijaju se metodom maksimalne verodostojnosti (MLE) za pretpostavljenu raspodelu, koja uključuje numeričku optimizaciju. Ako pretpostavimo normalnu raspodelu reziduala, logaritam funkcije verodostojnosti je:

$$\max F(\alpha_0, \alpha_1, \beta_1 / a) = \sum_{i=1}^{T} \ln \ f(a_t/\sigma_t{}^2) = \sum_{i=1}^{T} (\ln \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_t}} \ - \frac{a_t{}^2}{2\sigma_t{}^2}) \tag{3.59}$$

gde je f funkcija gustine normalne raspodele.

Ako pretpostavimo da reziduali imaju Student-ovu t raspodelu sa ν stepeni slobode, logaritam funkcije verodostojnosti je:

$$l_t = T ln \frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\sqrt{(\nu-2)\pi}\Gamma(\frac{\nu}{2})} - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^{T} \left[ln\sigma_t^2 + (\nu+1) \ln \left(1 + \frac{a_t^2}{(\nu-2)\sigma_t^2}\right) \right] \tag{3.60}$$

Predviđanje volatilnosti za mnogo perioda unapred sa GARCH(1,1) modelom konvergira u bezuslovnu varijansu a_t, ako se horizont predviđanja beskonačno povećava. Bezuslovna varijansa ima sledeći obrazac:

$$\sigma^2 = \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1-\beta_1} \tag{3.61}$$

pod uslovom da je $\alpha_1 + \beta_1 < 1$. Drugim rečima, u odsustvu šokova, varijansa reziduala će težiti ka svom dugoročnom prosečnom nivou – bezuslovnoj varijansi.

Formula za VaR sa volatilnošću σ_t^2 dobijenom GARCH(1,1) modelom koji pretpostavlja normalnu raspodelu reziduala, data je sa:

---

[29]Oscilacija oko srednje vrednosti dnosi se na svojstvo da vrednost neke finansijske aktive varira oko svoje dugoročne vrednosti.

$$VaR_{t,\alpha} = Z_{1-\alpha}\sigma_t P_t \tag{3.62}$$

dok je formula za uslovni gubitak sledeća:

$$ES_{t,\alpha} = \sigma_t \frac{f(Z_\alpha)}{1-\alpha} \tag{3.63}$$

gde je Z_α niži α percentil standardizovane normalne raspodele, a f funkcija gustine standardizovane normalne raspodele.

Iako efikasno procenjuje volatilnost, GARCH model sa pretpostavkom o normalnoj raspodeli kao i EWMA model potcenjuje debele repove prinosa. Iz tih razloga, umesto normalne raspodele reziduala, pretpostavlja se studentova raspodelu, usled čega je formula za VaR sledeća:

$$VaR_{t,\alpha} = t_{1-\alpha,\nu}\sigma_t\sqrt{\nu - 2/\nu}P_t \tag{3.64}$$

a za uslovni gubitak:

$$ES_{t,\alpha} = \sigma_t \frac{f(F^{-1}(\alpha))}{1-\alpha} \cdot \frac{\nu + (F^{-1}(\alpha))^2}{\nu - 1} \tag{3.65}$$

GARCH (1,1) model je najčešća specifikacija za GARCH modele volatilnosti, jer nije previše komplikovan za procenu, a opet daje dovoljno robustne koeficijente koji se lako interpretiraju u vidu dugoročne volatilnosti i kratkoročne dinamike. Međutim, modeli GARCH tipa obično funkcionišu lošije kada se dogodi ekstreman događaj pošto bezuslovni modeli bolje strukturiraju portfolio protiv ekstremnih šokova, dok GARCH to čini samo kada prepozna da je portfolio dosegao režim visoke volatilnosti (Danielsson i De Vreis, 2000). S druge strane, kada se adaptira novonastaloj situaciji, GARCH funkcioniše bolje u smislu daljih procena volatilnosti u visokom režimu.

Dodatan nedostatak GARCH (1,1) modela je što podrazumeva simetričnu reakciju volatilnosti na pozitivne i negativne šokove. Osnovni razlog za to je što je u jednačini uslovne varijanse rezidual a_t kvadriran, usled čega ne postoji razlika između pozitivnih i negativnih vesti. Kao posledica toga, ovaj model ne može da opiše levridž efekat finansijskih prinosa. Postoji veći broj unapređenih verzija GARCH modela koje obuhvataju prethodno opisanu asimetriju u volatilnosti, pa ipak najčešće korišćeni su eksponencijalni GARCH model (EGARCH) koji je razvio Nelson (1991), prag GARCH (*eng. Threshold GARCH- TGARCH*) koji je razvio Zakoian (1994) i GJR GARCH model koji je dobio ime po svojim autorima Glosten, Jagannathan i Runkie (1993).

3.7.3.1 Eksponencijalni GARCH (EGARCH)

Da bi prevazišao nedostatak običnog GARCH modela, koji ne uzima u obzir činjenicu da volatilnost asimetrično reaguje na pozitivne i negativne šokove istog opsega, Nelson je razvio eksponencijalni GARCH model koji opisuje ovaj efekat. EGARCH specifikacija jednačine uslovne varijanse je sledećeg oblika:

$$ln(\sigma_t^2) = \alpha_t + \sum_{k=1}^{+\infty} \beta_k g(\varepsilon_{t-k}) \tag{3.66}$$

gde su α_t i $\beta_k$realni koeficijenti, a $g(\varepsilon_t)$ ponderisana inovacija sledećeg oblika:

$$g(\varepsilon_t) = \theta\varepsilon_t + \gamma[|\varepsilon_t| - E(|\varepsilon_t|)] \tag{3.67}$$

gde su θ i γ realne konstante, a ε_t i $|\varepsilon_t| - E(|\varepsilon_t|)$ iid. promenljive sa očekivanjem 0, usled čega je $E[g(\varepsilon_t)] = 0$. Ako pretpostavimo da je $\gamma > 0$ i $\theta = 0$, tada će inovacija izražena sa $ln\sigma_t^2$ biti pozitivna (negativna), ukoliko je rezidual ε_t veći (manji) od njegove očekivane vrednosti. Slično, važi i za slučaj kada je $\theta < 0$ i $\gamma = 0$. Asimetrija u volatilnosti se najbolje vidi u slučajevima kada su $\theta>0$ i $\gamma<0$, jer je tada $g(\varepsilon_t)$ značajno veće u slučaju negativnih šokova.

Ako pretpostavimo da ε_t ima standardizovanu normalnu raspodelu, onda je$E(|\varepsilon_t|) = \sqrt{2/\pi}$, dok je u slučaju standardizovane studentove raspodele:

$$E(|\varepsilon_t|) = \frac{2\sqrt{\nu-2}\Gamma((\nu+1)/2)}{(\nu-1)\Gamma(\nu/2)\sqrt{\pi}} \tag{3.68}$$

Konačno EGARCH model reda *(m,s)* može biti zapisan (Tsay, 2002) kao:

$$ln(\sigma_t^2) = \alpha_0 + \frac{1+\beta_1 B+\cdots+\beta_s B^s}{1-\alpha_1 B-\cdots-\alpha_m B^m} g(\varepsilon_{t-1}) \tag{3.69}$$

gde je α_0 konstanta, B leg operator za koji važi $B\, g(\varepsilon_t)= g(\varepsilon_{t-1})$, a $1+\beta_1 B+\cdots+\beta_s B^s$ i $1-\alpha_1 B-\cdots-\alpha_m B^m$ polinomi čije su apsolutne vrednosti nula veće od jedinice. Najjednostavniji EGARCH model je reda (1,0) sa pretpostavkom o standardizovanoj normalnoj raspodeli reziduala i za njega je:

$$ln(\sigma_t^2) = (1-\alpha_1)\alpha_0 + \alpha_1 ln(\sigma_{t-1}^2) + g(\varepsilon_{t-1}) \tag{3.70}$$

Odakle, stepenovanjem, sledi da je:

$$\sigma_t^2 = \sigma_{t-1}^{2\alpha_1} e^{(1-\alpha_1)\alpha_0} e^{g(\varepsilon_{t-1})} \tag{3.71}$$

gde je $g(\varepsilon_{t-1}) = \theta\varepsilon_{t-1} + \gamma\left[|\varepsilon_{t-1}| - \sqrt{2/\pi}\right]$.

Pored toga što opisuje levridž efekat finansijskih prinosa, EGARCH ima još jednu prednost u odnosu na GARCH, a to je što koristi logaritam uslovne varijanse, usled čega nisu potrebna ograničenja za parametre modela.

3.7.3.2 GJR GARCH model

GJR GARCH model su razvili Glosten, Jagannathan i Runkle (1993), proširivanjem GARCH modela dodavanjem činioca koji opisuje asimetriju volatilnosti u jednačini za varijansu. Uslovna varijansa GJR GARCH (p,q) modela je sledećeg oblika:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i\, a_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{q} \beta_j \sigma_{t-j}^2 + \sum_{i=1}^{p} \gamma_i I_{t-i} a_{t-i}^2 \tag{3.72}$$

gde je:

$$I_{t-i} = \begin{cases} 1, & \text{ako je } a_{t-i} < 0 \\ 0, & \text{u suprotnom} \end{cases} \tag{3.73}$$

Osnovna pretpostavka ovog modela je da je uticaj $a_{t-i}{}^2$ na uslovnu varijansu drugačiji kada je a_{t-i} pozitivno (tada je pomoćna varijabla I_{t-1} = 1), nego kada je a_{t-i} negativno (tada je pomoćna varijabla I_{t-1}= 0). Efekat levridža je prisutan kada je $\gamma>0$, a uslovna volatilnost je pozitivna i stacionarna kada su parametri $\alpha_0\geq 0$, $\alpha_i\geq 0$, $\beta_j\geq 0$ i$\alpha_i+\gamma_i\geq 0$, $\sum_{i=1}^{p}\alpha_i + \sum_{j=1}^{q}\beta_j + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{p}\gamma_i < 1$.

3.7.3.3 Prag GACRH (TGARCH)

TGARCH model je razvio Zakoian 1994 godine. Ovaj model se zasniva na činjenici da u slučaju distribucija koje ne pripadaju normalnim distribucijama, apsolutni reziduali daju efikasnije procene od kvadrata reziduala. Iz tih razloga, umesto procene uslovne varijanse, ovaj model procenjuje uslovnu volatilnost na sledeći način:

$$\sigma_t = \alpha_0 + \alpha_1|a_{t-1}| + \gamma I_{t-1}|a_{t-1}| + \beta_1\sigma_{t-1} \qquad (3.74)$$

gde je

$$I_{t-i} = \begin{cases} 1, & \text{ako je } a_{t-i} < 0 \\ 0, & \text{u suprotnom} \end{cases} \qquad (3.75)$$

Uslovna volatilnost je pozitivna kada su $\alpha_0\geq 0$, $\alpha_1\geq 0$, $\beta_1\geq 0$ i $\alpha_1+\gamma\geq 0$.

3.8 Poluparametarski pristupi u proceni uslovnog gubitka

Kao što je već pomenuto, osnovni nedostatak parametarskih pristupa u modelovanju VaR-a i uslovnog gubitka je pretpostavka o raspodeli finansijskih prinosa, što dovodi do zanemarivanja empirijskih činjenica koje se pre svega tiču oblika empirijske raspodele prinosa. Sa druge strane neparametarski pristupi, kao što je model istorijske simulacije, ne pretpostavljaju nikakvu teorijsku raspodelu, već koriste empirijsku raspodelu prošlih finansijskih prinosa za procenu budućih prinosa. Međutim, ovakav pristup podrazumeva konstantnu volatilnost, što ne odgovara empirijskim činjenicama. Poluparametarski pristup pokušava da iskoristi prednosti, odnosno da umanji nedostatke prethodno opisanih pristupa, tako što delom koristi empirijsku distribuciju prinosa, a delom koristi teorijske pretpostavke o njenim parametrima. U ovu grupu modela spadaju filtrirana istorijska simulacija (*eng. Filtered Historical Simulation – FHS*), kao i metodologija teorije ekstremnih vrednosti (*eng. Extreme Value Theory – EVT*).

3.8.1 Filtrirana istorijska simulacija

Model filtrirane istorijske simulacije razvili su Barone-Adesi, Giannopoulos i Vosper (1998,1999) sa idejom da iskoriste prednosti modela istorijske simulacije, kao što su empirijska distribucija prinosa, ali i da prevaziđu nedostatke koje se tiču pretpostavke o stacionarnosti distribucije prinosa. U osnovi ovog modela je „filtriranje" istorijskih prinosa, na način koji će najbolje reflektovati trenutne informacije o riziku finansijskog instrumenta. Praktično, to podrazumeva fitovanje nekog od modela uslovne volatilnosti na istorijske prinose, čime se relaksira pretpostavka o konstantnoj volatilnosti. Sam proces filtriranja istorijskih prinosa obuhvata tri koraka.

Prvi korak u proceni jednodnevnog VaR-a i uslovnog gubitka podrazumeva fitovanje GARCH (1,1) modela na istorijske prinose:

$$r_t = \mu + a_t \tag{3.76}$$

$$a_t = \sigma_t \varepsilon_t \;\; i \;\; \varepsilon_t \sim f(0,1)$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 \tag{3.77}$$

gde je $\alpha_0 > 0,\; \alpha_1 > 0,\; \beta_1 > 0$ i $\alpha_1 + \beta_1 < 1$. a_t je rezidual sa očekivanjem 0 i varijansom σ_t^2 koja prati GARCH (1,1) proces.

Drugi korak podrazumeva, da se dobijeni model primeni na istorijske prinose kako bi se dobile procene volatilnosti za svaki dan u uzoračkom periodu. Zatim se realizovani prinosi standardizuju odgovarajućim volatilnostima, što za rezultat daje prošle standardizovane reziduale koji bi trebalo da budu nezavisni i identično distribuirani. Tako ako je uzorački period dužine T, prošli standardizovani reziduali će biti oblika:

$$\hat{\varepsilon}_{t-i} = \frac{a_{t-i}}{\hat{\sigma}_{t-i}} \quad \text{za} \quad i=1,2,\ \dots,\ T \tag{3.78}$$

Treći korak podrazumeva veliki broj[30] slučajnih izvlačenja *bootstrap* tehnikom $\hat{\varepsilon}_i$ iz skupa standardizovanih prošlih reziduala. Svaki od reziduala ε_i se skalira sa GARCH(1,1) procenom sutrašnje volatilnosti$\hat{\sigma}_{T+1}$:

$$\hat{a}_{i,T+1} = \hat{\varepsilon}_i \cdot \hat{\sigma}_{T+1} \tag{3.79}$$

Konačno, kao rezultat trećeg koraka, dobija se distribucija budućih prinosa za period od jednog dana. Ako je broj izvlačenja bio N i ako pretpostavimo da je prosečan prinos iz jednačine (3.76) $\mu=0$, tada ćemo imati distribuciju prinosa:

$$\hat{r}_{1,T+1} = \hat{a}_{1,T+1}, \quad \hat{r}_{2,T+1} = \hat{a}_{2,T+1}, \quad \dots \quad ,\hat{r}_{N,T+1} = \hat{a}_{N,T+1} \tag{3.80}$$

Odatle se VaR i uslovni gubitak lako dobijaju – prvi kao željeni percentil dobijene distribucije prinosa, a drugi kao aritmetička sredina svih vrednosti distribucije prinosa čije su vrednosti manje od VaR-a.

Iz prethodno opisane metodologije filtrirane istorijske simulacije se može uočiti da ovakav model dobro kombinuje neparametarski pristup istorijske simulacije, čime se zadržavaju svojstva empirijske distribucije (spljoštenost i asimetrija), dok istovremeno modeluje klasterovanje volatilnosti GARCH modelom. Takođe, ovaj metod omogućava generisanje vrednosti budućih prinosa koji se nisu javili u posmatranom istorijskom vremenskom

[30] Ukoliko uzmemo *n* izvlačenja, to znači da ćemo imati *n* simuliranih stanadrdizovanih reziduala.

prozoru, usled čega mu se prediktivna moć značajno povećava u odnosu na istorijsku simulaciju. Konačno, lako se primenjuje na različite vrste derivata, pri čemu je sama simulacija brza čak i za velike portfolije.

3.8.2 Teorija ekstremnih vrednosti

Kao posledica poslednje svetske finansijske krize, javila su se mnoga pitanja i kritike koje se tiču adekvatnosti različitih metodologija za procenu rizika, a samim tim i VaR-a kao mere rizika. Jedna od najčešćih kritika metodologija za procenu VaR-a je zanemarivanje "debelih repova" distribucije prinosa, odnosno činjenica da su modeli sistematično potcenjivali događaje koji imaju malu verovatnoću, ali velike posledice (Turner, 2009).

Kao što je već pomenuto, najčešći pristupi za procenu VaR-a baziraju se ili na istorijskoj simulaciji ili na parametarskim metodama koje kombinuju neki od ekonometrijskih modela za volatilnost, kao što su EWMA, ARCH, GARCH. Ono što je zajedničko za oba metoda je to što koriste celu distribuciju prinosa za procenu VaR-a i uslovnog gubitka. Imajući u vidu da VaR i uslovni gubitak pripadaju ekstremnim događajima, a samim tim i repovima distribucije prinosa, postavlja se pitanje svrsishodnosti modelovanja celokupne distribucije prinosa. Sa tim u vezi, teorija ekstremnih vrednosti nudi rešenje u vidu modelovanja ponašanja ekstremnih opservacija (tj. repova distribucije) nekom asimptotskom raspodelom.

Teorija ekstremnih vrednosti je deo teorije verovatnoće koji obezbeđuje formalni okvir za proučavanje distribucije ekstremnih opservacija pod određenim uslovima. Osnove ove teorije postavili su Fisher i Tippett (1928) i Gnedenko (1943), koji su pokazali da distribucija ekstremnih vrednosti nezavisno i identično distribuiranih opservacija, kada se adekvatno skaliraju, pripada jednoj od sledećih distribucija – Gumbel-ovoj, Weibull-ovoj ili Fréchet-ovoj distribuciji. U tom kontekstu, teorija ekstremnih vrednosti je slična centralnoj graničnoj teoremi, jer opisuje asimptotsko ponašanje u repovima raspodele, bez obzira na inicijalnu raspodelu slučajnih promenljivih. Sa aspekta upravljanja rizicima, ovo je od suštinske važnosti, jer premošćuje već objašnjene probleme pretpostavki o raspodelama prinosa, zadržavajući pritom empirijska svojstva prinosa, kao što su asimetrija i spljoštenost veća od normalne.

U okviru EVT metodologije postoje tri osnovna metoda u modelovanju ekstremnih događaja. Prvi obuhvata najstariju grupu modela - blok maksimum (*eng. block maximum*) modeli koji modeluju ponašanje najvećih opservacija uzetih iz uzorka koji sadrži nezavisno i identično distribuirane opservacije. Drugi metod se bazira na takozvanoj metodi vrhova iznad praga (*eng. peaks over threshold - POT),* koja modeluje raspodelu opservacija čije vrednosti prelaze određeni prag. U praksi, POT metode se smatraju korisnijim zbog efikasnije upotrebe podataka o ekstremnim vrednostima, koji su, sa aspekta dostupnosti, često ograničeni. Obe metode su poluparametarske, pošto pretpostavljaju da ekstremni prinosi asimptotski teže poznatoj raspodeli ekstrema – u prvom slučaju familiji distribucija generalizovanih ekstremnih vrednosti (*eng. generalized extreme value –GEV*), odnosno u drugom slučaju generalizovanoj Pareto distribuciji (*eng. generalized Pareto distribution-GPD*), i kao takve, metodom maksimalne verodostojnosti, modeluju repove raspodele poznatom distribucijom. Treći metod je neparametarski i zasniva se na ocenama – Pickands estimatora i Hill estimatora za indeks repa, koje ne pretpostavljaju unapred poznatu distribuciju ekstremnih opservacija. Ove ocene se baziraju na statistikama rangiranih prinosa.

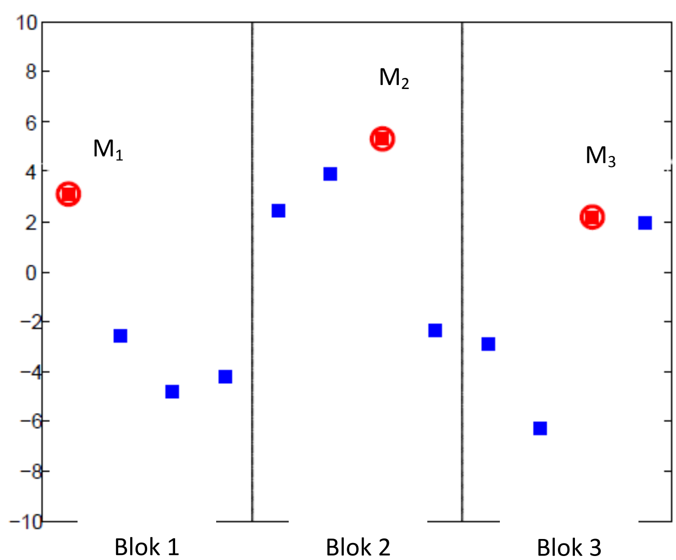
Iako ima relativno dugu istoriju, primena teorije ekstremnih vrednosti u upravljanju tržišnim rizicima je još u povoju. Među prvim autorima, koji su EVT primenili za modelovanje ekstremnih događaja u finansijama bili su Embrechet, Mikosch i Kluppelberg (1997), dok su za primenu EVT u modelovanju VaR-a najzaslužniji McNeil (1997, 1998), a kasnije i Frey, i Danielsson i de Vries (1997). U jednom od svojih prvih članaka, McNeil (1999) koristi EVT metodologiju koja se bazira na graničnim teoremama za blok maksimume, dok Danielsson i de Vries (1997) koriste metod koji se bazira na Hill-ovom estimatoru. Imajući u vidu da je jedna od osnovnih pretpostavki teorije ekstremnih vrednosti da su prinosi nezavisni i identično distribuirani, McNeil i Frey (2000) predlažu okvir za uslovnu teoriju ekstremnih vrednosti – metod koji se sastoji iz dva koraka i koji podrazumeva da se GPD distribucija primenjuje na reziduale dobijene GARCH modelom. Dalje, Nystrom i Skoglund (2002) proučavaju efikasnost metoda maksimalne verodostojnosti i Hill estimatora i pokazuju da metod maksimalne verodostojnosti daje bolje rezultate za sve kvantile iznad 95%. Štaviše, oni dokazuju da je metod maksimalne verodostojnosti skoro invarijantan u odnosu na izbor praga. Skorije studije u ovoj oblasti, uglavnom se fokusiraju na poređenje različitih VaR modela. Tako na primer, Longin (2000), među prvima, poredi procene VaR-a za duge i kratke pozicije dobijene sa EVT sa procenama VaR-a dobijenim: istorijskom simulacijom, analitički sa pretpostavkom o normalnoj distribuciji, EWMA modelom i GARCH modelom. Kasnije, Gancay i Selcuk (2004) ispituju, na devet tržišta u razvoju, različite VaR modele i pokazuju da VaR dobijen EVT metodologijom daje najbolje rezultate. Do sličnog zaključka dolaze i Da Silva i Mendez (2003), koji ispituju deset tržišta u Aziji. Harmantzis i dr. (2006) su takođe ispitivali prediktivne sposobnosti različitih modela u proceni VaR-a i uslovnog gubitka na primerima indeksa najvećih svetskih berzi i valuta i pokazali da POT metod daje najbolje rezultate. Allen i dr. (2013) i Singh i dr. (2013), pokazali su da EVT uspešno procenjuje VaR i uslovni gubitak svetskih indeksa kao što su S&P500, FTSE100 i australijski ASX. Kuester i dr. (2006) su analizirali preko petnaest VaR modela na uzorku od 30 godina NASDAQ prinosa i takođe dokazali da EVT VaR u kombinaciji sa GARCH modelom ima najbolju prediktivnu sposobnost. De Jesus i Ortis (2013) ispituju performanse EVT metoda na tržištima akcija Brazila i Meksika, dok Mudakkar (2014) sprovodi slično istraživanje na primeru Pakistana. Jondeau i Rockinger (2003) i Ergen (2010, 2014) ispituju rizik u repvima distribucije prinosa tržišta u razvoju. Totić i Božović (2015) pokazuju da na tržištima u razvoju jugoistočne Evrope, da za različite vremenske periode (pre, za vreme i posle finansijske krize), uslovni EVT metod dalje najbolje rezultate. Hsu i dr. (2012) i Ayusuk i Sriboonchita (2014) kombinuju kopule sa EVT u proceni VaR-a azijskih tržišta u razvoju. Jedan broj autora, kao npr. Lai i Wu (2010), ispitivalo je adekvatnost EVT meotda za procenu VaR-a različitih klasa aktive. Božovic (2010) pokazuje uspešnost EVT u proceni rizika deviznih kurseva evra, jena, funte i švajcarskog franka u odnosu na dolar, Wang i dr. (2010) isto pokazuju za kineski juan, a Kim (2015) za ostale azijske valute.

3.8.2.1 Metod blok maksimuma

Metod blok maksimuma EVT statistički modeluje ponašanje najmanjih i najvećih vrednosti slučajnih promenljivih. Ovaj model tretira najveće/najmanje vrednosti slučajnih promenljivih, uzetih iz sukcesivnih perioda (kao što su, na primer, meseci ili godine), pri čemu tako odabrane opservacije čine takozvane blok (ili period) maksimume. Ako je dat uzorak veličine N, metodom blok maksimuma ovaj uzorak se deli na m manjih uzoraka – blokova, koji sadrže n nezavisnih i jednako raspodeljenih opservacija $X_1, X_2, \dots, X_n$, sa funkcijom raspodele F gde je M_i $(i = 1,2, \dots, m)$ njihov maksimum:

$$M_i = \max(X_1, X_2, \dots, X_n) \tag{3.81}$$

Uprošćen prikaz blok maksimuma se najbolje može videti na slici 9.



Slika 9. Metod blok maksimuma

Pošto VaR i uslovni gubitak pripadaju levom repu distribucije prinosa, za njihovu procenu od posebnog značaja je modelovanje minimalnih opservacija. Međutim, s obzirom da su teoretski rezultati metoda blok maksimuma dati samo za maksimum, minimum se može odrediti na sledeći način:

$$m_i = -\max(-X_1, -X_2, \dots, -X_n) \tag{3.82}$$

Imajući u vidu da su promenljive $X_1, X_2, \dots, X_n$ nezavisne i identično distribuirane sa funkcijom raspodele *F*, raspodela maksimuma $M_i$se može izvesti na sledeći način:

$$P(M_i < z) = P(X_1 < z, \dots, X_n < z) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i < z) = (F(z))^n \tag{3.83}$$

Međutim, osnovni problem ovako definisane raspodele za M_i je to što funkcija raspodele *F* nije poznata. Alternativni pristup, podrazumeva pronalaženje familija distribucija koje će na osnovu ekstremnih opservacija aproksimirati $F(z)^n$. Rešenje ovog problema daju Fisher-a i Tippett-a (1928)[31], najpre standardizujući maksimum[32] M_i lokacijskim parametrom b_n i disperzionim parametrom $(a_n > 0)$, a zatim aproksimirajući raspodelu za tako dobijeno M_i^*. Formalan zapis je dat sledećom teoremom.

Teorema 1. *Ako je (X_n) niz n nezavisnih i jednako raspodeljenih slučajnih promenljivih sa funkcijom raspodele F i ako postoje konstante* $(a_n > 0)$ *i* (b_n) *takve da za neku nedegenerisanu graničnu raspodelu G:*

$$P\left(\frac{M_n - b_n}{a_n} \le z\right) \to G(z)\ kad \qquad n \to \infty$$

tada G pripada jednoj od sledećih familija distribucija ekstremnih vrednosti:

---

[31] Prvi kompletan dokaz Fisher-Tippett-ove teoreme dat je u Gnedenko (1943).

[32] Standardizacija maksimuma se sprovodi zato što, ukoliko bi se dierktno tražila granična vrednost funkcije $F(z)^n$, dobila bi se degenerisana funkcija raspodele:

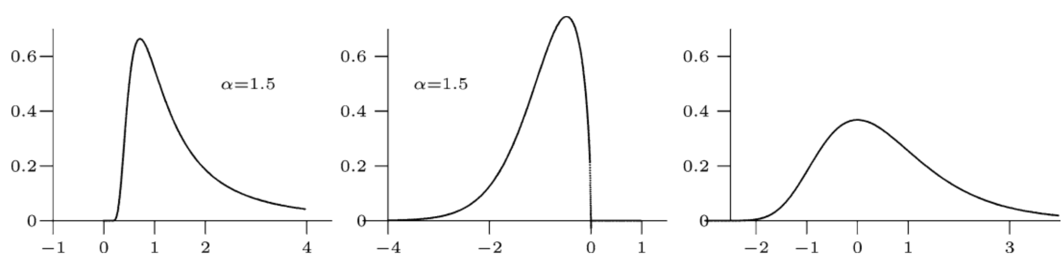
$$\lim_{n \to +\infty} F^n(x) = \begin{cases} 1, & \text{ako je} \quad F(x) = 1 \\ 0, & \text{ako je} \quad F(x) < 1 \end{cases}$$

Gumbel: $$G(z) = \Lambda(z) = e^{-e^{-(\frac{z-b}{a})}}, \quad z \in R$$

Fréchet: $$G(z) = \Phi_\alpha(z) = \begin{cases} 0, & z \leq b \\ e^{-(\frac{z-b}{a})^{-\alpha}}, & z > b, \alpha > 0 \end{cases}$$

Weibull: $$G(z) = \Psi_\alpha(z) = \begin{cases} e^{-(-(\frac{z-b}{a}))^{\alpha}}, & z \leq b, \ \alpha > 0 \\ 1, & z > b. \end{cases}$$

Navedena teorema daje jedan od ključnih rezultata teorije ekstremnih vrednosti, a to je da, bez obzira na originalnu raspodelu praćenih podataka, asimptotska raspodela standardizovanog maksimuma pripada jednoj od tri navedene raspodele. Ove tri raspodele nazivaju se raspodelama ekstremnih vrednosti i opisane su lokacijskim parametrom b i parametrom disperzije a, dok raspodele Fréchet-a i Weibull-a imaju dodatni parametar oblika α. Njihovi oblici najbolje se vide na sledećem grafiku:



Slika 10 Funkcije gustine za Fréchet, Weibull i Gumbel distribucije (Gilli i Këllezi, 2006)

Početna praksa u primeni teorije ekstremnih vrednosti podrazumevala je izbor jedne od tri familije distribucija, a zatim procenu odgovarajućih parametara. Na taj način, ostavljena je mogućnost proizvoljnog izbora distribucije, a samim tim i rizik da se napravi greška u tom procesu (Coles, 2001). Jenkinson (1955) i von Mises (1936) u velikoj meri pojednostavljuju ovaj problem sledećom teoremom:

Teorema 2. *Ako je (X_n) niz od n nezavisnih i jednako raspodeljenih slučajnih promenljivih sa funkcijom raspodele F i ako postoje konstante* $(a_n > 0)$ *i* (b_n) *takve da za neku nedegenerisanu graničnu raspodelu G:*

$$P\left(\frac{M_n - b_n}{a_n} \leq z\right) \to G(z) \quad kada \quad n \to \infty$$

onda je G član familije distribucija ***generalizovanih ekstremnih vrednosti (GEV distribucija)****:*

$$G(z) = \begin{cases} \exp\left[-\left(1 + \xi \dfrac{z-\mu}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\xi}}\right], & \xi \neq 0 \\ \exp\left(-\exp\left(-\dfrac{z-\mu}{\sigma}\right)\right), & \xi = 0 \end{cases}$$

definisane za $\{z: 1 + \xi(z-\mu)/\sigma > 0\}$ *gde je* $-\infty < \mu < \infty, \sigma > 0$ *i* $-\infty < \xi < \infty$.

Iz prethodne teoreme se može zaključiti da je GEV familija distribucija u potpunosti opisana sa tri parametra: lokacijskim parametrom - μ, parametarom disperzije - σ i parametrom oblika - ξ. Parametar $\alpha = 1/\xi$ predstavlja indeks repa i on direktno karakteriše oblik repa raspodele *F*. Štaviše, vrednost parametra ξ određuje kom tipu od prethodno opisanih raspodela ekstremnih vrednosti pripada rep raspodele. Ako je $\xi = 0$, raspodela je Gumbel sa eksponencijalno opadajućim levim i desnim repom. Ovoj familiji distribucija, pored Gumbelove, pripadaju normalna, eksponencijalna, gamma i log-normalna distribucija. Ako je $\xi < 0$, raspodela je Weibull i ima gronju granicu. U ovu klasu spadaju distribucije ograničene sa desne strane kao što je beta distribucija. Konačno, ako je $\xi > 0$, raspodela je Fréchet i ima donju granicu; karakteristično za distribucije prinosa sa debelim repovima, stoga ovaj tip distribucija ima najveću primenu u finansijama. U ovu klasu raspodela spadaju Student-ova, Pareto, log-gama i Cauchy[33] raspodela. Takođe indeks repa je usko povezan sa najvišim postojećim momentom - k odgovarajuće raspodele (Longin, 2005). Tako za pozitivno ξ, $k=1/\xi$ odakle sledi da kada je $\xi = 0$ (slučaj Gumbel klase raspodela) raspodela ima definisane sve momente jer je $k=+\infty$ (slučaj, na primer, normalne raspodele).

Teorema 2. obezbeđuje još jedno važno svojstvo, a to je da ukoliko se raspodela M_i^* može aproksimirati nekom raspodelom iz familije GEV raspodela, onda se i sama raspodela M_i može aproksimirati nekim drugim članom te iste familije[34] (Coles, 2004).

Parametri GEV raspodele se najčešće procenjuju metodom maksimalne verodostojnosti. Tako, ako pretpostavimo da su Z_1, $Z_2, \ldots,$ Z_n nezavisni maksimumi sa GEV raspodelom, funkcija verodostojnosti će imati sledeći oblik:

$$L(\mu,\sigma,\xi) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma} \left(1 + \xi \frac{z_i-\mu}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\xi}-1} \exp\left[-\left(1 + \xi \frac{z_i-\mu}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\xi}}\right] \qquad (3.84)$$

Zbog toga je logaritam funkcije verodostojnosti sledećeg oblika:

$$l(\mu,\sigma,\xi) = -nlog\sigma - \left(1 + \frac{1}{\xi}\right) \sum_{i=1}^{n} log\left(1 + \xi \frac{z_i-\mu}{\sigma}\right) - \sum_{i=1}^{n} \left(1 + \xi \frac{z_i-\mu}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\xi}} \qquad (3.85)$$

pod uslovom da $1 + \xi \frac{z_i-\mu}{\sigma} > 0$, za $i=1,\ldots,n$. Iako ne postoji analitičko rešenje, parametri (μ,σ,ξ) se dobijaju maksimizacijom poslednje formule, uz pomoć numeričke optimizacije. Potencijalni problemi u optimizaciji mogu se javiti u blizini $\xi = 0$, što se lako može rešiti korišćenjem Gumbel raspodele umesto GEV raspodele.

---

[33] Cauchy raspodela odgovara specijalnom slučaju gde je $(\xi = 1)$.

[34] Ako pretpostavimo da $P\left(\frac{M_n-b_n}{a_n} \le z\right) \to G(z)$ kad $n \to \infty$, to je ekvivalentno sa $(M_n \le z) \approx G\left(\frac{z-b_n}{a_n}\right) = G^*(z)$, gde su $G(z)$ i $G^*(z)$ različiti članovi GEV familija distribucija

Nakon što su metodom maksimalne verodostojnosti procenjeni parametri GEV raspodele, VaR i uslovni gubitak se lako određuju. Podaci se najpre grupišu u blokove opservacija dužine *n*, a zatim se određuju maksimumi za svaki blok $M_{n1}, M_{n2}, \ldots, M_{nm}$. Blokovi se obično biraju da odgovaraju vremenskom periodu dužine jedne godine, i u tom slučaju *n* je broj opservacija u datoj godini, blok maksimumi su godišnji maksimumi. Procene ekstremnih kvantila, a samim tim i VaR-a, dobijaju se invertovanjem GEV raspodele maksimalnih prinosa:

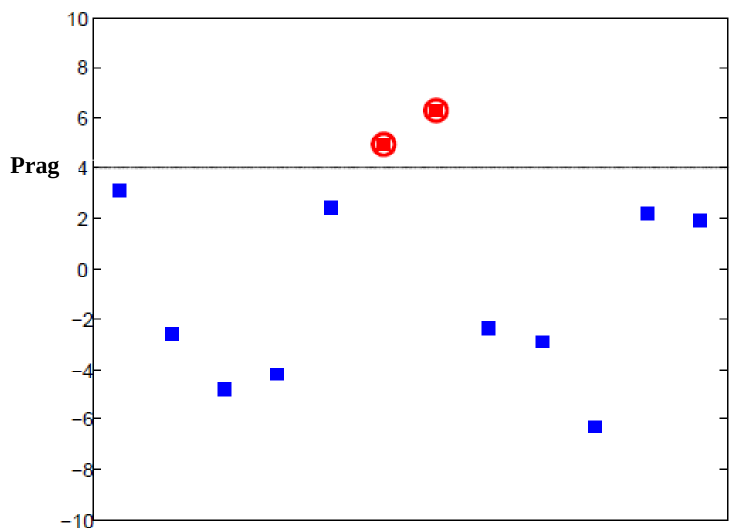
$$z_{n,k} = \begin{cases} \mu - \frac{\sigma}{\xi}\left[1 - (-\log(1 - \frac{1}{\mathrm{k}}))^{-\xi}\right], & \xi \neq 0 \\ \mu - \sigma \log\left(-\log\left(1 - \frac{1}{k}\right)\right), & \xi = 0 \end{cases} \tag{3.86}$$

gde je $G(z_{n,k})=1-1/k$ *i* $z_{n,k}$ nivo prinosa za koji očekujemo da će biti premašen u jednom bloku veličine n na svakih k blokova veličine n, odnosno jednom u k perioda. Praktično, $z_{n,k}$ je VaR za nivo poverenja *1-1/k*, dok za raspodelu M_n odgovara $(1 - \frac{1}{k})^{1/n}$-tom kvantilu marginalne raspodele X_i. Ako, na primer, pretpostavimo model za godišnje (261 dan) maksimume, onda prinos za koji očekujemo da bude premašen jednom u svakih 20 godina odgovara (0.95)(1/261) = 0.9998 kvantilu.

Kao što se iz prethodnog može videti, metod blok maksimuma podrazumeva grupisanje podataka u blokove jednake dužine, zatim pronalaženja maksimuma svakog bloka i konačno modelovanje ponašanja maksimuma GEV distribucijom. Kritična strana ovog metoda jeste izbor veličine bloka. Ovaj izbor često predstavlja balansiranje između pristrasnosti i varijanse. Mala veličina bloka daje veći broj blok maksimuma za metod maksimalne verodostojnosti, usled čega će varijansa parameter biti manja, ali, sa druge strane, uslovi iz GEV teoreme neće biti ispunjeni. Sa druge strane, veliki blokovi generišu nekoliko blok maksimuma, ali zato ispunjavaju uslove iz GEV teoreme, usled čega će ocene parametara biti manje pristrasne. Uopšte, jedan od osnovnih problema metoda blok maksimuma je nedostatak podataka sa ekstremnim vrednostima, zbog čega se u praksi mnogo češće koristi metod vrhova iznad praga.

3.8.2.2 Metod vrhova iznad praga

Alternativni način za dobijanje ekstremnih vrednosti u uzorku je postavljanje odgovarajućeg praga, pri čemu se ekstremnom vrednošću smatra svaka opservacija čija vrednost prekoračuje taj prag (slika 11). Upravo na ovoj ideji se zasniva metod vrhova iznad praga (*eng. peak over threshold - POT*), koji aproksimira asimptotsku distribuciju vrednosti opservacija koje prekoračuju prag. Ovakav tretman ekstremnih vrednosti omogućava efikasniju upotrebu podataka, odnosno daje veći broj ekstremnih vrednosti u odnosu na metod blok maksimuma.



Slika 11Vrhovi iznad praga

Ako sa $X_1, X_2, \ldots, X_n$označimo niz nezavisnih i jednako raspodeljenih slučajnih promenljivih sa funkcijom raspodele F, do prekoračenja praga u dolazi kada je $X_t > u$ za bilo koje $t=1,\ldots,n$. Ako prekoračenje praga označimo sa $Y_i=X_i - u$, odatle proizlazi da je njegova distribucija u stvari uslovna verovatnoća F_u, koja se može opisati sledećim izrazom:

$$F_u(y) = P(X - u < y/X > u) = \frac{P(X<y+u, X>u)}{P(Xx>u)} = \frac{F(y+u)-F(u)}{1-F(u)} \qquad (3.87)$$

za svako prekoračenje praga za koje važi $0 \leq y < x - u$. Iz prethodne jednačine, zamenom $x = y + u$ za $X > u$, možemo dobiti funkciju raspodele F kao:

$$F(x) = F_u(y)\big(1 - F(u)\big) + F(u) \qquad (3.88)$$

Imajući u vidu da je vrlo malo opservacija u oblasti prekoračenja praga, uslovnu raspodelu *Fu* je teško proceniti i tu teorija ekstremnih vrednosti daje veoma korisno rešenje koje je sadržano u sledećoj teoremi.

Teorema 3. *(Pickands (1975), Balkema i de Haan (1974)) Neka je (X_n) niz od n nezavisnih i jednako raspodeljenih slučajnih promenljivih sa zajedničkom funkcijom raspodele F i neka je x_F kraj gornjeg repa od F, verovatno pozitivna beskonačnost. Ako je F takva da postoji granična vrednost data Teoremom 1, tada postoje konstante ξ, β>0 takve da se $F_u(y)$,za dovoljno veliki prag, dobro aproksimira sa:*

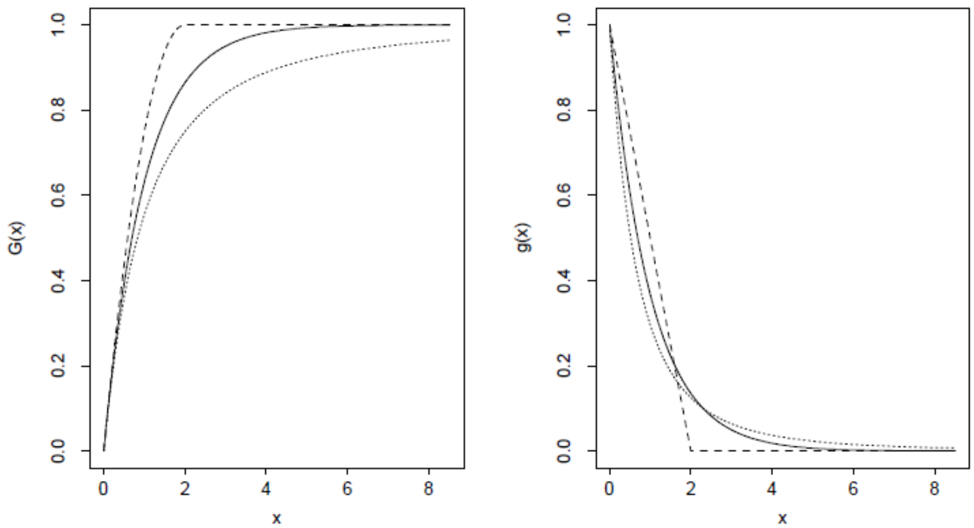
$$\lim_{u \to x_F} \sup_{0<y<x_F-u} \left| F_u(y) - G_{\xi,\beta}(y) \right| = 0$$

gde je

$$G_{\xi,\beta}(y) = \begin{cases} 1 - (1 + \frac{\xi y}{\beta})^{-\frac{1}{\xi}}, & \xi \neq 0 \\ 1 - e^{-\frac{y}{\beta}}, & \xi = 0 \end{cases}$$

$G_{\xi,\beta}$*je takozvana* ***generalizovana Pareto raspodela (GPD)***.

Parametri $\beta > 0$ i ξ su parametri disperzije i oblika, respektivno. Prethodna teorema praktično tvrdi da se, za dovoljno veliki prag *u*, raspodela prekoračenja iznad ovog praga može aproksimirati sa GPD za neke ξ i β. Štaviše, to podrazumeva da ako se blok maksimumi mogu aproksimirati GEV raspodelom, onda se prekoračenja praga mogu aproksimirati odgovarajućom raspodelom u okviru GPD familije. Takođe, parametri GPD raspodele su jedinstveno određeni parametrima odgovarajuće GEV raspodele, pri čemu je parametar repa ξ isti. Sledeći grafikon ilustruje oblik raspodele GPD (slika 12 levo) i oblik funkcije gustine (slika12 desno) kada je ξ=-0.5 negativno (isprekidana linija), kada je $\xi = 0$ (puna linija) i kada je $\xi = 0.5$ pozitivno (tačkasta linija), a disperzioni parametar β je jednak jedinici.



Slika 12 Oblik generalizovane Pareto raspodele

Takođe, teorema 3 daje vezu između GEV i GPD raspodele koja se možda najbolje može videti iz sledećeg dokaza. Ako X ima funkciju raspodele *F*, onda, prema tvrđenju Teoreme 2., za dovoljno veliko *n* i za neke parametre $\mu, \sigma > 0$ i ξ:

$$F^n(z) \approx \exp\left[-\left(1+\xi\,\frac{z-\mu}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\xi}}\right] \;=>\; n\log F(z) \approx -\left(1+\xi\,\frac{z-\mu}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\xi}} \qquad (3.89)$$

Imajući u vidu Taylor-ov razvoj, koji podrazumeva da je za velike vrednosti *z*, $\log F(z) \approx -\big(1-F(z)\big)$, zamenom *z* u prethodnoj formuli sa pragom *u* i sa *u+y*, dobijamo:

$$1-F(u)\approx\frac{1}{n}\left(1+\xi\frac{u-\mu}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\xi}} i 1-F(u+y)\approx\frac{1}{n}\left(1+\xi\frac{u+y-\mu}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\xi}} \tag{3.90}$$

Zatim $F_u(y)$ iz jednačine (3.87) možemo da izrazimo kao:

$$F_u(y)=1-P(X>y+u/X>u) \tag{3.91}$$

Zamenom jednakosti iz (3.90) u (3.91) dobijamo:

$$F_u(y)\approx 1-\frac{\frac{1}{n}\left(1+\xi\frac{u+y-\mu}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\xi}}}{\frac{1}{n}\left(1+\xi\frac{u-\mu}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\xi}}}=1-(1+\frac{\xi\frac{u+y-\mu}{\sigma}}{1+\xi\frac{u-\mu}{\sigma}})^{-\frac{1}{\xi}} \tag{3.92}$$

gde za $\beta=\sigma+\ \xi(u-\mu)$ dobijamo GPD raspodelu. Kao što je već objašnjeno, izbor veličine bloka - n utiče na vrednosti GEV parametara, ali ne i na odgovarajuće GPD parametre, pošto je ξ nepromenjiv u odnosu na veličinu bloka, dok su promene σ i μ samo-kompenzirajuće, usled čega β ostaje isto. Štaviše, pošto ima isti indeks repa ξ, sve osobine parametra ξ koje su pomenute u metodu blok maksimuma, vrede za GPD familiju.

GPD procena uključuje dva koraka: izbor praga i procenu parametra. Kao i kod metoda blok maksimuma, parametri GPD raspodele se najčešće ocenjuju metodom maksimalne verodostojnosti. U prilog tome ide i istraživanje Nyström-a i Skoglund-a (2002), koji su izveli Monte-Carlo eksperiment sa ciljem ispitivanja uticaja veličine uzorka i vrednosti praga na osetljivost procena dobijenih metodom maksimalne verodostojnosti i Hill estimatora. Njihovi rezultati su pokazali da procene dobijene metodom maksimalne verodostojnosti daju bolje ocene parametara u smislu pristrasnosti relativne varijanse, i da su skoro invarijantni na izbor praga. Takođe, Smith (1987) je pokazao da su ocene β iξ konzistentne i asimptotski normalne, kada broj prekoračenja teži beskonačnosti i kada je $\xi>-\frac{1}{2}$.

Ako je N_u broj prekoračenja izabranog praga u, a y_i vrednost prekoračenja preko praga u, funkcija verodostojnosti ima sledeći oblik:

$$L(\beta,\xi) = \begin{cases} \prod_{i=1}^{N_u} \frac{1}{\beta} \cdot (1 + \frac{\xi y_i}{\beta})^{-(\frac{1}{\xi}+1)}, & ako\ \xi \neq 0 \\ \prod_{\mathrm{i}=}^{N_u} \frac{1}{\beta} e^{-\frac{y_i}{\beta}}, & ako\ \xi = 0 \end{cases} \tag{3.93}$$

Odatle, logaritmovanjem, dobijamo sledeću funkciju:

$$l(\beta,\xi) = \begin{cases} -N_u \log \beta - (\frac{1}{\xi} + 1) \sum_{i=1}^{N_u} log(1 + \frac{\xi y_i}{\beta}), & ako\xi \neq 0 \\ -N_u \ln \beta - \frac{1}{\beta} \sum_{i=1}^{N_u} log y_i, & ako\xi = 0 \end{cases} \tag{3.94}$$

gde je $\beta > 0$ i $1 + \xi\, y_i/\beta > 0$ za svako *i=1,…, N_u*. Maksimizacijom ove funkcije u odnosu na β i ξ dobijaju se željeni parametri.

Nakon što su dobijeni parametri GPD raspodele, sledeći korak je primena GPD raspodele procenu kvantila u repu raspodele F slučajne promenljive X_i. Kako je $x=y+u$ za svako $x > u$, iz jednačine (3.88) vidimo da je funkcija raspodele $F(x) = F_u(y)\big(1 - F(u)\big) + F(u)$. Imajući u vidu da, prema Pickands (1975), Balkema i de Haan (1974) teoremi, $F_u(y)$ pripada GPD familiji, čije smo parametre ocenili metodom maksimalne verodostojnosti, jedino što preostaje je da se odredi ocena za $F(u)$. Ako je broj prekoračenja preko praga N_u, a ukupan broj opservacija *n,* metod istorijske simulacije daje procenu $F(u)$ kao $(n-N_u)/n$. Zamenom *F(u)* sa $(n- N_u)/n$ u jednačinu (3.88) i korišćenjem procenjenih GPD parametara, dobijamo funkciju raspodele repa:

$$\hat{F}(x) = 1 - \frac{N_u}{n}(1 + \hat{\xi}\frac{x-u}{\hat{\beta}})^{-\frac{1}{\hat{\xi}}} \tag{3.95}$$

koja važi samo za $x > u$. Alternativno, možemo dodeliti *F(u)* neki unapred definisani nivo (na primer 0.99), a zatim, iz veličine uzorka (na primer 1000), odrediti odgovarajuće N_u (u ovom primeru to bi bilo 10). Odatle, prag se može naći kao n-N_u opservacija X_{n-N_u}, ako su sve opservacije poređane od najniže do najviše.

Invertovanjem prethodne formule za datu verovatnoću $q > F(u)$, dobijen je VaR:

$$\widehat{VaR_q} = u + \frac{\hat{\beta}}{\hat{\xi}}\left(\left(\frac{n}{N_u}(1-q)\right)^{-\hat{\xi}} - 1\right) \tag{3.96}$$

U određivanju uslovnog gubitka, sledeća lema daje neophodne uslove za dobijanje analitičkog rešenja.

Lema 1. Ako pretpostavimo da je *F* distribucija sa konačnom desnom stranom u x_F i ako za neki dovoljno visok prag *u*, važi da je $F_u(x) = G_{\xi,\beta}(x)$, gde je$0 \leq x \leq x_F - u$ i $\xi \in R$ i *β>0,* tada je $F_v(x) = G_{\xi,\beta+\xi(v-u)}(x)$ za bilo koji prag *v≥u.*

Iz ove leme praktično sledi da distribucija prekoračenja za bilo koji drugi prag veći od *u* ostaje GPD sa istim parametrom repa ξ, ali sa različitim parametrom disperzije. Odavde se za slučaj kada je $\xi < 1$, može dobiti očekivana vrednost prekoračenja (*eng. mean excess function*) kao:

$$e(v) = E(v - u/v > u) = \frac{\beta+\xi(v-u)}{1-\xi} = \frac{\xi v}{1-\xi} + \frac{\beta-\xi u}{1-\xi} \tag{3.97}$$

Imajući u vidu da uslovni gubitak možemo da nađemo i kao:

$$\widehat{ES}_q = \widehat{VaR}_q + E(X - \widehat{VaR}_q / X > \widehat{VaR}_q) \tag{3.98}$$

Spajanjem prethodne dve jednačine u jednu, dobija se konačna formula za uslovni gubitak:

$$\widehat{ES}_q = \widehat{VaR}_q + \frac{\hat{\beta}+\hat{\xi}(\widehat{VaR}_q - u)}{1-\hat{\xi}} = \frac{\widehat{VaR}_q}{1-\hat{\xi}} + \frac{\hat{\beta}-\hat{\xi}u}{1-\hat{\xi}} \tag{3.99}$$

Iz prethodne dve jednačine može se dobiti i odnos VaR-a i uslovnog gubitka za velike vrednosti verovatnoće q (McNeil i dr., 2005):

$$\lim_{q\to 1} \frac{ES_q}{VaR_q} = \begin{cases} (1-\xi)^{-1}, \xi \geq 0, \\ 1, \quad \xi < 0 \end{cases} \tag{3.100}$$

Odatle suštinski sledi da parametar ξ određuje odnos ove dve mere, što je bitno sa aspekta modelovanja kapitalnih zahteva na osnovu uslovnog gubitka.

Izbor praga je jedan od ključnih koraka u proceni parametara GPD distribucije i suštinski je analogan izboru veličine bloka u metodu blok maksimuma. U osnovi, on je kompromis između izbora nižeg praga koji daje dovoljno opservacija za procenu parametra (neke opservacije mogu doći iz centra raspodele), usled čega je varijansa niža, ali pristrasnost ocene parametra viša, i izbora višeg praga tako da asimptotska teorema važi, ali koji generiše manji broj prekoračenja, što dovodi do manje pristrasnih, ali volatilnijih ocena parametara. Postoji nekoliko metoda za određivanje praga. Jedan od jednostavnijih metoda za određivanje praga je grafički način koji podrazumeva crtanje uzoračke očekivane vrednosti funkcije prekoračenja (*eng. sample mean excess function*). Uzoračka ocena očekivane vrednosti funkcije prekoračenja data je sledećom formulom:

$$e_n(u) = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - u)1_{(X_i > u)}}{\sum_{i=1}^{n} 1_{(X_i > u)}} \tag{3.101}$$

i izražava prosečnu vrednost prekoračenja praga u, a njen grafik čini uređeni parovi tačaka $\{(X_{i,n}, e_n(X_{i,n})): i = 2, .., n\}$. Ako rezultujući grafik pokazuje linearnost za više vrednosti praga u, to govori u prilog činjenici da prekoračenja praga imaju GPD raspodelu, dok sam nagib funkcije govori o znaku parametra repa ξ. Ukoliko je rastući linerani trend u ptanju, to će značiti da je ξ>0, odnosno da raspodela prekoračenja spada u domen Frechet-ove familije raspodela. Horizontalna linija odgovara slučaju kada je ξ=0, dok opadajući grafik opisuje slučaj kada je $\xi < 0$. Grafik srednje vrednosti funkcije prekoračenja je u praksi retko kada perfektno linearan, tako da izabrani prag treba da bude u delu u kome počinje linearan trend.

Alternativni i matematički precizniji način je Monte-Carlo simulacija i minimizacija srednje kvadratne greške $E(\hat{\theta} - \theta)^2 = (E(\hat{\theta} - \theta))^2 + var(\hat{\theta})$, koja predstvalja dekompoziciju srednje kvadratne greške ocene parametara na kvadrat pristrasnosti i varijansu ocene parametra. Monte-Carlo eksperiment podrazumeva generisanje uzorka od *N* nezavisnih i identično raspoređenih opservacija. Najčešća pretpostavka je da promenljive imaju studentovu raspodelu sa brojem stepeni slobode između 4 i 6, pošto ovakve raspodele pripadaju raspodelama sa debelim repovima. Osnovna ideja je da se vidi kako promena praga, odnosno broja opservacija koje prekoračuju praga N_u, utiče na srednju kvadratnu grešku ocene ξ. Na ovaj način su McNeil i Frey (2000) došli do zaključka da je za prag najbolje uzeti vrednost koja odseca najvećih 10% realizovanih gubitaka, jer je za taj slučaj najmanja srednje kvadratna greška. Neftçi (2000) dolazi do sličnog zaključka, tako što za vrednost praga uzima $u=1.176\sigma_n$, gde je σ_n standardna devijacija, a $1.176=F_t^{-1}(0.10) = 1.44\sqrt{\nu - 2/\nu}$, pri čemu je F_t Studentova raspodela sa $\nu = 6$ stepeni slobode.

3.8.2.3 Hill-ov metod

Hill (1975) je razvio jednostavan metod za ocenu repa distribucija koje imaju spljoštenost veću od normalne (debele repove) i koje su u domenu Fréchet-ove familije raspodela. Ovaj metod pretpostavlja nezavisne i identično distribuirane opservacije, uređene tako da $X_{1,n} \geq X_{2,n} \geq \cdots \geq X_{n,n}$, kao i to da je rep raspodele oblika (u domenu Fréchet-ove familije raspodela):

$$\bar{F}(x) = L(x)x^{-\alpha} \tag{3.102}$$

gde je $L(x)$ sporo varirajuća[35] funkcija i α>0. Hill-ov metod, za razliku od GPD metoda, procenjuje indeks repa α, koji je recipročna vrednost od ξ i standardni oblik njegove ocene je:

$$\hat{\alpha}_{k,n}^{H} = \left(\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} lnX_{j,n} - lnX_{k,n}\right)^{-1}, \qquad 2 \leq k \leq n \tag{3.103}$$

gde je k broj ekstremnih vrednosti, odnosno $X_{k,n}$vrednost koja razdvaja opservacije iz centra i repa raspodele. Kao i kod BMM i POT metoda, ključni problem Hill-ovog metoda

[35] Pozitivna, Lebesgue merljiva funkcija L na intervalu *(0, +c)* je sporo varirajuća u +∞, ako je $\lim_{x\to+\infty} \frac{L(tx)}{L(x)} = 1, \quad t < 0$. Sporo varirajuće funkcije su funkcije koje se, u odnosu na stepene funkcije, menjaju relativno sporo za veliko x, npr. *L(x)=ln(x).*

je izbor odgovarajućeg k, koji je kompromis između veće pristrasnosti i varijanse ocene $\hat{\alpha}_{k,n}^{H}$ parametra repa. Jedan od jednostavnijih, a samim tim i manje preciznih, načina za određivanje k je Hill-ov grafik, čije tačke čine uređeni parovi $\left\{\left(k, \hat{\alpha}_{k,n}^{H}\right): \quad k = 2, \ldots, n\right\}$. Izbor odgovarajućeg k se svodi na one vrednosti koje daju relativno slične ocene parametara. Alternativni način podrazumeva Monte-Carlo simulaciju i izbor k koje minimizira srednje kvadratnu grešku ocene parametra.

Konačno, ako pretpostavimo da je rep raspodele oblika $\bar{F}(x) = Cx^{-\alpha}$, za $x \geq u > o$, gde je C konstanta, a u dovoljno veliki prag (koji suštinski može biti zamenjen i sa $X_{k,n}$), tada konstantu C možemo izraziti kao $C = u^{\alpha}\bar{F}(u)$, pri čemu $\bar{F}(u)$ možemo oceniti na osnovu empirijske raspodele kao k/n ($\hat{C}_{k,n} = \frac{k}{n} X_{k,n}{}^{\hat{\alpha}_{k,n}^{H}}$). Odavde se lako izvodi Hill-ova ocena repa raspodele koja je oblika:

$$\hat{F}(x) = \frac{k}{n}\left(\frac{x}{X_{k,n}}\right)^{-\hat{\alpha}_{k,n}^{H}} \tag{3.104}$$

dok se q kvantil dobija kao:

$$\hat{x}_q = \left(\frac{n}{k}(1-q)\right)^{-1/\hat{\alpha}_{k,n}^{H}} \cdot X_{k,n} \tag{3.105}$$

Hill-ov estimator repa, ukoliko je (X_n) vremenska serija nezavisnih i jednako distribuiranih slučajnih promenljivih, ima poželjna statistička svojstva kao što su (Embrechet i dr., 1997): slaba konzistentnost[36] $\hat{\alpha}^{H} \to \alpha$, jaka konzistentnost[37] i asimptotska normalnost $\sqrt{k}(\hat{\alpha}^{H} - \alpha)$ $\xrightarrow{d} N(0, \alpha^2)$ pod dodatnim uslovima. Pa ipak, jedan od glavnih nedostataka ovog metoda je

---

[36]Dodatni uslovi za slabu konzistentnost u ovom slučaju su da su (X_n) slabo zavisne i da je (X_n) linearan proces, gde $k \to \infty$ i $\frac{k}{n} \to 0$ za $n \to \infty$.

[37] Dodatni uslovi za slabu konzistentnost su i $\frac{k}{n} \to 0$, $\frac{k}{ln\, lnn} \to \infty$ za $n \to \infty$.

što se može primeniti samo na distribucije koje pripadaju Fréchet-ovoj familiji, jer ne aproksimira disperzioni parametar β. Takođe, Hill-ov estimator je vrlo osetljiv ukoliko postoji zavisnost u podacima.

McNeil i Frey (2000) su sproveli Monte Carlo eksperiment u kojem su generisali 1000 nezavisnih i identično distribuiranih opservacija (pretpostavljena je studentova raspodela sa 4 stepena slobode), kako bi odredili najpogodnije nivoe pragova – *Nu* za metod vrhova iznad praga, odnosno k za Hill-ov metod, istovremeno poredeći ova dva metoda pomoću srednje kvadratne greške. Rezultati su pokazali da GPD metod ima najmanju srednju kvadratnu grešku za prag *Nu* =100 i da je ona vrlo robustna na izbor praga, jer pristrasnost vrlo sporo raste sa *Nu*. Sa druge strane, Hill-ov metod ima najbolje performanse za prag k između 20 i 75 i daje negativno pristrasnu ocenu repa ξ za male vrednosti k, međutim, pristrasnost vrlo brzo raste za velike vrednosti k, usled čega ovi autori smatraju da je GPD metod bolji metod za procenu repa raspodele.

3.8.2.4 Kombinovani metod – GARCH i vrhovi iznad praga

Svi prethodno opisani metodi teorije ekstremnih vrednosti podrazumevaju da su prinosi nezavisni i identično distribuirani, tj. spadaju u bezuslovne metode koji ne uzimaju u obzir zavisnost ovih slučajnih promenljivih. Ovakvi metodi daju dobre rezultate ukoliko se tretiraju manje frekventni podaci, jer je kod njih efekat stohastičke prirode volatilnosti manje prisutan nego kod dnevnih podataka (Rocco, 2011). Međutim, kao što je već pomenuto, prinosi finansijskih instrumenata često pokazuju značajnu autokorelaciju i heteroskedastičnost, usled čega je neophodno modelovati i uslovnu volatilnost. Imajući u vidu da nijedan od EVT metoda ne odražava na odgovarajući način stohastičku pozadinu volatilnosti, McNeil i Frey (2000) predlažu kombinovanje nekog od parametarskih metoda za modelovanje uslovne volatilnosti (GARCH ili nekog iz te familije modela) i metoda vrhova iznad praga za modelovanje repova prinosa. Sa obzirom da statistički testovi pokazuju da su reziduali GARCH modela nezavisni i identično raspoređeni, kao i da imaju debele repove, ovi autori predlažu korišćenje istorijske simulacije za centralni deo raspodele prinosa i primenu POT metoda na repove modela raspodele reziduala dobijenih GARCH modelom. Predloženi metod podrazumeva sledeća dva koraka:

1. Primenu GARCH modela na finansijske prinose i procenu parametara modela metodom maksimalne verodostojnosti. Rezultat prvog koraka su procena sutrašnje varijanse i očekivanog prinosa, kao i standardizovanih reziduala.

2. Pretpostavljajući da su reziduali realizacija procesa belog šuma[38], modelovanje repova reziduala sa generalizovanom Pareto raspodelom, što za rezultat ima procenu kvantila raspodele, tj. VaR-a, a onda i uslovnog gubitka.

Jedan od često pretpostavljanih GARCH modela je GARCH(1,1) model sa konstantnom srednjom vrednošću, koji ima sledeći obrazac:

$$r_t = C + a_t \tag{3.106}$$

$$a_t = \sigma_t \varepsilon_t \quad i \quad \varepsilon_t \sim N(0,1) \;\; => a_t \sim N(0, \sigma_t^2)$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \propto_1 a_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2$$

gde je $\alpha_0 > 0,\ \alpha_1 \geq 0, \beta_1 \geq 0$ i $\alpha_1 + \beta_1 \leq 1$.

Prinosi, r_t, se sastoje od konstante i belog šuma a_t, i ovakva formulacija je često dovoljna za opisivanje uslovne srednje vrednosti vremenske serije finansijskih prinosa. Uslovna varijansa σ_t^2, je praktično ponderisani prosek varijanse prethodnog perioda i kvadrata reziduala prethodnog perioda. Parametri modela $\alpha_0 > 0,\ \alpha_1 \geq 0, \beta_1 \geq 0$ i $\alpha_1 + \beta_1 \leq 1$

---

[38] Vremenska serija a_t se naziva procesom belog šuma ako je $\{a_t\}$ niz nezavisnih i identično raspoređenih slučajnih varijabli sa konačnim očekivanjem i varijansom. U specijalnom slučaju, ako a_t ima normalnu raspodelu sa očekivanom vrdnosti nula i varijansom σ_t^2, niz se zove Gausov beli šum.

dobijaju se metodom maksimalne verodostojnosti, nakon čega je moguće predvideti varijansu za sledeći period:

$$\hat{\sigma}_{t+1}^{2} = \hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 \, a_t^2 + \hat{\beta}_1 \sigma_t^2 \tag{3.107}$$

Sledeća faza počinje analizom nezavisnosti i identične distribuiranosti reziduala, kao i testiranje na prisustvo debelih repova. Ukoliko su potvrđena prethodno navedena svojstva, određuje se prag u, pod pretpostavkom da prekoračenja reziduala preko praga imaju generalizovanu Pareto raspodelu. U praksi, prag se često određuje tako što se broj podataka u repu fiksira da bude N_u, odakle se kao prag uzima (N_u+1)-ti uređeni rezidual. Ako $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \cdots \geq \varepsilon_n$ predstavlja uređene reziduale, a prag $u = \varepsilon_{N_u+1}$, onda se prekoračenja praga $(\varepsilon_1 - \varepsilon_{N_u+1}, \dots, \varepsilon_{N_u} - \varepsilon_{N_u+1})$ modeluju generalizovanom Pareto raspodelom sa parametrima ξ i β i tada je funkcija raspodele repa sledećeg oblika:

$$\hat{F}(\varepsilon) = 1 - \frac{N_u}{n}(1 + \hat{\xi}\frac{\varepsilon - u}{\hat{\beta}})^{-\frac{1}{\hat{\xi}}} \tag{3.108}$$

Za $q > 1 - \frac{N_u}{n}$, invertovanjem prethodne formule, dobija se VaR reziduala:

$$\widehat{VaR}(\varepsilon)_q = \varepsilon_{N_u+1} + \frac{\hat{\beta}}{\hat{\xi}}(\left(\frac{n}{N_u}(1-q)\right)^{-\hat{\xi}} - 1\Big) \tag{3.109}$$

koja je q-ti kvantil reziduala. Odatle koristeći uslovnu volatilnost dobijenu iz jednačine (3.107) dobija se ocena VaR-a kao:

$$\widehat{VaR}_q = \sigma_{t+1}\widehat{VaR}(\varepsilon)_q \tag{3.110}$$

Sa druge strane, uslovni gubitak reziduala na osnovu jednačine (3.99) je sledećeg oblika:

$$\widehat{ES}(\varepsilon)_q = \widehat{VaR}(\varepsilon)_q + \frac{\hat{\beta} + \hat{\xi}\widehat{VaR}(\varepsilon)_q - \varepsilon_{N_u+1})}{1-\hat{\xi}} = \frac{\widehat{VaR(\varepsilon)}_q}{1-\hat{\xi}} + \frac{\hat{\beta} - \hat{\xi}\varepsilon_{N_u+1}}{1-\hat{\xi}} \tag{3.111}$$

odakle dobijamo uslovni gubitak prinosa kao:

$$\widehat{ES}_q = \sigma_{t+1}\widehat{ES}(\varepsilon)_q \tag{3.112}$$

Kao što je već pomenuto, mnogi autori su sprovodili komparativnu analizu procena VaR-a i uslovnog gubitka dobijenih EVT metodologijama u odnosu na procene dobijene standardnim parametarskim pristupima, kao što su EWMA, GARCH i slični. Tako, na primer, Kuester i dr. (2006) su pokazali da bezuslovni modeli EVT za procenu VaR-a, kao što su POT i GEV, daju dobre procene za nivoe poverenja iznad 99%, dok za niže nivoe poverenja ne daju zadovoljavajuće rezultate. Ovo je prevashodno iz razloga što niži nivoi poverenja obuhvataju opservacije koje nisu dovoljno u repu raspodele, tj. nisu dovoljno ekstremne da bi EVT efikasno radila. Pa ipak, prediktivna sposobnost EVT se značajno poboljšava ukoliko se kombinuje sa nekim od modela za procenu uslovne volatilnosti. Na taj način se koriste prednosti oba pristupa – adekvatno modelovanje klastera volatilnosti nekim od modela za uslovnu volatilnost i adekvatno modelovanje debelih repova i asimetrije EVT metodologijom.

4 Testiranje predviđanja

U prethodnom poglavlju detaljno su analizirani različiti modeli za procenu VaR-a i uslovnog gubitka i teorijski su razmatrane njihove prednosti i ograničenja. Imajući u vidu veliki broj modela, kao i to da nijedan nije idealan, za finansijsku instituciju je od velike važnosti izbor odgovarajućeg modela koji je u skladu sa sopstvenim potrebama. Pored kvalitativne analize modela, ključan korak u izboru modela je adekvatno testiranje predviđanja dobijenih modelom, odnosno back testiranje. Glavna svrha back testiranja je da omogući povratne informacije o kvalitetu i preciznosti sistema za merenje rizika. U osnovi, back testiranje daje statistički okvir za poređenje stvarnih rezultata sa modelom predviđenim parametrima rizika. Ukoliko su razlike između modela i ostvarenih rezultata male, to znači da model dobro procenjuje rizik.

Sa regulatornog aspekta, finansijske institucije koje koriste interne modele za procenu rizika su u obavezi da redovno sprovode back testiranje. Na taj način, nadzorni organi su u mogućnosti da ocene adekvatnost modela za procenu rizika koje banke koriste i, u odnosu na to, odrede adekvatne kapitalne zahteve za pokriće tržišnih rizika. Što su rezultati back testiranja bolji, to banke imaju manja kapitalna izdvajanja, usled čega su stimulisane da razvijaju i koriste najadekvatnije modele za procenu rizika. Način određivanja kapitalnih izdvajanja, kao i sam proces regulatornog back testiranja internih modela, detaljno je opisan u odeljku 2.2.3 i svodi se na poređenje procenjenih dnevnih vrednosti VaR modela i ostvarenih dobitaka/gubitaka, brojanje realizovanih prekoračenja VaR-a i u odnosu na njih određivanje kapitalnih zahteva prema "semafor" principu. Najveća mana ovakvog pristupa back testiranju je što penalizuje samo modele koji potcenjuju vrednost VaR-a. Kao posledica toga, model koji je sa aspekta Bazel II korektan, za banku može biti previše konzervativan jer precenjuje rizik, a samim tim dovodi do većih kapitalnih zahteva.

U svom najjednostavnijem obliku, back testiranje podrazumeva brojanje frekvencija prekoračenja VaR-a, odnosno određivanje koliko puta su aktuelni prinosi portfolija premašili VaR procenu i poređenja tog broja sa korišćenim nivoom poverenja. Na primer, ako je nivo poverenja 95%, treba da očekujemo prekoračenja VaR-a u 5% opservacija, odnosno 5 dana od 100 dana trgovanja. Iako je teorija u back testiranju značajno napredovala, tako da danas postoji veliki broj modela koji pored frekvencija, posmatraju i njihovu zavisnost i veličinu proboja VaR-a, u praksi se i dalje najviše koriste modeli zasnovani na frekvencijama kao što su Kupiec-ov test bezuslovne pokrivenosti i Christfferson-ov test uslovne pokrivenosti, koji će u nastavku biti detaljno objašnjeni.

Za razliku od back testiranja VaR-a, back testiranje uslovnog gubitka je daleko manje razvijeno, usled čega delimično predstavlja prepreku široj upotrebi uslovnog gubitka, pre svega u regulatorne svrhe. Osnovni problem je što za razliku od VaR-a koji je kvantil raspodele - usled čega je njegova frekvencija prekoračenja poznata, uslovni gubitak nema poznatu frekvenciju prekoračenja. Naime, on predstavlja očekivanu vrednost iznad VaR-a, a verovatnoća takvog događaja nije unapred uvek poznata, što otežava formulisanje hipoteza u back testiranju. Imajući u vidu da pri proceni uslovnog gubitka se uvek prvo procenjuje vrednost VaR-a, mnoge finansijske institucije sprovode back testiranje VaR-a, pretpostavljajući da ukoliko model dobro procenjuje VaR, da samim tim dobro procenjuje i uslovni gubitak. U osnovi ovakve prakse je ideja da ako je model odbačen pri back testiranju VaR-a, teško da može biti korektan za procenu uslovnog gubitka koji je dalje u repu raspodele.

Jedan od prvih modela za back-testiranje uslovnog gubitka razvio je Berkowitz (2001), oslanjajući se na rezultate Diebolda i dr. (1998). Ovaj test spada u grupu testova racija verodostojnosti (*eng. likelihood ratio*) i poredi predviđenu gustinu u repu raspodele sa ostvarenom empirijskom gustinom u repu. Osnova za odbacivanje uslovnog gubitka je veliko odstupanje između predviđenih i realizovanih gustina repova prinosa. Nedostatak ovakvog načina testiranja predviđanja je to što ne testira direktno procenu uslovnog gubitka, već celog repa raspodele. Kerkhof i Melenberg (2004) se oslanjaju na Berkowitzev model i razvijaju delta funkcionalni metod, koji daje statistike koje direktno back testiraju uslovni gubitak i VaR. Prediktivne mogućnosti ovog modela još uvek u praksi nisu testirane, pa se sa sigurnošću ne može govoriti o prednostima ili nedostacima ovog modela. Sa druge strane, Embrechet i dr. (2005) predlažu model za back testiranje koji se zasniva na prosečnoj vrednosti odstupanja procenjenih vrednosti uslovnog gubitka i prekoračenja VaR-a. Ovaj model pretpostavlja da će prosečna vrednost odstupanja biti blizu nule, ukoliko je primenjen adekvatan metod procene uslovnog gubitka. Međutim, osnovna mana ovakvog pristupa je što je deskriptivnog karaktera, jer nema odgovarajuću statistiku kojom bi se mogla prihvatiti ili odbaciti teza o adekvatnosti modela za procenu uslovnog gubitka. Wong (2008) razvija statistiku za back testiranje normalno distribuiranih gubitaka, koja se pokazala dobrom za male uzorke prekoračenja VaR-a. Takođe, Wong pokazuje da u odnosu na Kerkhof i Malenbergov delta funkcionalni metod, kao i u odnosu na Berkowitzev cenzurisani Gauss pristup, njegov pristup back testiranja ima veću moć testa. Pa ipak, i Wong-ov test se pokazao osetljivim na veličinu uzorka u smislu da njegova preciznost opada sa veličinom uzorka. McNeil i Frey (2000) koriste “bootstrap” test koji su razvili Efron i Tibshirani (1993) i koji ne zavisi ni od jedne pretpostavljene raspodele prinosa, te je stoga lako primenljiv.

U ovom radu za testiranje predviđanja uslovnog gubitka i VaR-a korišćeni su Kupiec-ov test bezuslovne pokrivenosti, Christofferson-ov test uslovne pokrivenosti, Wong-ov test i bootstrap test.

4.1 Kupiec-ov test bezuslovne pokrivenosti

Jedan od prvih testova za proveru tačnosti modela za procenu VaR-a je Kupiec-ov (1995) test koji se bazira na učestalosti gubitaka u repu raspodele. Pošto je VaR_α definisan kao α kvantil raspodele prinosa, ovaj test ispituje da li je procenjeni VaR prekoračen više od α procenata vremena. Ukoliko se broj prekoračenja statistički značajno razlikuje od αx100 procenata uzorka, onda je tačnost modela za procenu rizika dovedena u pitanje.

Postupak Kupiec-ovog back testiranja podrazumeva uvođenje funkcije I_t koja pokazuje da li je stvarni prinos u trenutku t - x_t prekoračio VaR procenjen u trenutku t - 1 sa nivoom pouzdanosti 1-α ($VaR_{t-1,\alpha}$), pri čemu je osnovna pretpostavka da je verovatnoća prekoračenja ista za svako t ($P(I_t=1)=p$). Ako je funkcija I_t definisana sa:

$$I_t(\alpha) = \begin{cases} 1 & ako x_t \leq -VaR_{t-1,\alpha} \\ 0 & ako x_t \geq -VaR_{t-1,\alpha} \end{cases} \tag{4.1}$$

onda je ukupan broj prekoračenja u uzorku veličine T, $I(\alpha) = \sum_{t=1}^{T} I_t(\alpha)$ slučajna promenjiva koja ima binomnu raspodelu:

$$P\left(\frac{I(\alpha)}{T}, p\right) = \binom{T}{I(\alpha)} p^{I(\alpha)} (1-p)^{T-I(\alpha)} \tag{4.2}$$

Ukoliko je VaR model tačan, verovatnoća prekoračenja p bi trebalo da se slaže sa unapred definisanim α. Sa obzirom da se metodom maksimalne verodostojnosti za binomnu distribuciju i uzorak veličine T dobija procena verovatnoće p kao $\widehat{p} = \hat{\alpha} = \frac{I(\alpha)}{T}$, za terstiranje tačnosti modela koristimo sledeće dve hipoteze:

H_0: $\hat{\alpha} = \alpha$ (model je tačan)

H_1: $\hat{\alpha} \neq \alpha$ (model nije tačan)

Za testiranje ove dve hipoteze, Kupiec predlaže POF[39]statistiku sledećeg oblika:

$$POF = 2\ln\left(\left(\frac{1-\hat{\alpha}}{1-\alpha}\right)^{T-I(\alpha)}\left(\frac{\hat{\alpha}}{\alpha}\right)^{I(\alpha)}\right) \tag{4.3}$$

Ova statistika asimptotski konvergira Hi-kvadrat distribuciji sa jednim stepenom slobode. Samo testiranje podrazumeva da ukoliko je procenat prekoračenja VaR-a $\hat{\alpha}$, tačno jednak α (H_0 hipoteza) onda je vrednost POF statistike nula, što pokazuje da model dobro procenjuje VaR. Sa druge strane, ukoliko se $\hat{\alpha}$ značajno razlikuje od α POF statistika raste, pokazujući da model VaR-a ili sistematski potcenjuje ili precenjuje rizik.

Iako je u praksi široko rasprostranjena upotreba Kupiec-ovog testa bezuslovne pokrivenosti, neophodno je imati u vidu i njegove nedostatke. Prvi nedostatak je to što ovaj test ne može da prepozna VaR modele koje sistematski precenjuju rizik. Kao posledica toga, banke mogu da rezervišu više kapitala za pokriće rizika nego što im je zaista potrebno. Drugi nedostatak potiče iz činjenice da ovaj test ne ispituje nezavisnost VaR prekoračenja, kao ni njihovu veličinu, što potencijalno, može biti veoma opasno za finansijsku instituciju. Ovo se posebno odnosi na periode krize u kojima se javljaju veliki neočekivani gubici, koji su najčešće korelisani. Takođe, sa statističke tačke gledišta, ovaj test ima malu moć za veličine uzorka u skladu sa tekućim regulatornim okvirom od godinu dana.

[39] Naziv je dobila od *eng. proportion of failure* odnosno proporcija neuspeha.

4.2 Test uslovne pokrivenosti (Christoffersen-ov Test)

Kao što je već napomenuto, Kupiecov test se fokusira samo na frekvenciju prekoračenja VaR-a, ignorišući njihovu vremensku zavisnost. Ovo predstavlja problem jer većina modela pretpostavlja da su prekoračenja VaR-a nezavisno raspoređena tokom vremena. Jedan od prvih testova koji istovremeno ispituje učestalost i zavisnost prekoračenja VaR-a je Christoffersen-ov (1998) test. Ovaj test koristi Markovljev lanac u ispitivanju zavisnosti prekoračenja VaR-a u odnosu na to da li je VaR prekoračen prethodnog dana. Takođe, koristi test bezuslovne pokrivenosti za ispitivanje odgovarajuće frekvencije prekoračenja.

Christoffersen-ov test uslovne pokrivenosti sažima ove dve hipoteze u jednu koja ispituje da li je funkcija I_t, definisana jednačinom 4.1, nezavisna i identično distribuirana sa Bernoulli raspodelom:

$$H_0: I_t \sim i.i.d Bernoulli\ (\alpha)$$

Alternativna hipoteza je sledećeg oblika:

$$H_1: I_t \sim i.i.d Bernoulli\ (\pi)$$

Odgovarajuća hipoteza za bezuslovnu pokrivenosti je:

$$H_{0,bp}: \pi = \alpha$$

i ona implicitno pretpostavlja da su prekoračenja nezavisna. Za testiranje bezuslovne pokrivenosti Chrisotffersen koristi funkciju verodostojnosti $L(I, p)$za nezavisnu i identično distribuiranu slučajnu promenljivu I koja ima Bernuli raspodelu i nepoznatu verovatnoću π sledećeg oblika:

$$L(I, p) = \pi^{n_1}(1-\pi)^{N-n_1} \tag{4.4}$$

gde je N obim uzorka, a n_1 broj koji pokazuje koliko put je funkcija I uzela vrednost 1. Kao rezultat metoda maksimalne verodostojnosti dobijamo ocenu nepoznatog parametra verovatnoće π:

$$\hat{\pi} = \frac{n_1}{N} \tag{4.5}$$

Odatle dobijamo test odnosa verodostojnosti (*eng. likelihood ratio test*) za bezuslovnu pokrivenost oblika:

$$LR_{bp} = 2(\ln \mathrm{L}(\mathrm{I}, \hat{\pi}) - \ln \mathrm{L}(\mathrm{I}, \alpha)) = 2 \ln \left(\left(\frac{1-\hat{\pi}}{1-\alpha} \right)^{N-n_1} \left(\frac{\hat{\pi}}{\alpha} \right)^{n_1} \right) \tag{4.6}$$

koji konvergira Hi-kvadrat distribuciji sa jednim stepenom slobode.

Da bi testirao nezavisnost, Christoffersen pretpostavlja da je I_t binarni Markovljev proces prvog reda sa sledećom matricom verovatnoća tranzicije:

$$\Pi_1 = \begin{bmatrix} 1 - \pi_{01} & \pi_{01} \\ 1 - \pi_{11} & \pi_{11} \end{bmatrix} \tag{4.7}$$

gde je $\pi_{ij} = P(I_t = j / I_{t-1} = i)$. Osnovno svojstvo Markovljevog procesa je postojanje zavisnosti između vremenski susednih perioda, što podrazumeva da je današnji ishod jedini relevantan za sutrašnji ishod. Međutim, imajući u vidu pretpostavku o nezavisnosti prekoračenja VaR-a, ova dva ishoda bi trebalo da budu nezavisna, odakle nulta hipoteza za nezavisnost dobija sledeći oblik:

$$H_{0,nez}: \pi_{01} = \pi_{11}$$

Da bi testirao da li su dobijeni podaci opisani datom matricom verovatnoća tranzicije, što odgovara alternativnoj hipotezi o nezavisnosti, Christoffersen koristi sledeću funkciju verodostojnosti:

$$L(I, \pi_{01}, \pi_{11}) = (1 - \pi_{01})^{n_{00}} {\pi_{01}}^{n_{01}} (1 - \pi_{11})^{n_{10}} {\pi_{11}}^{n_{11}} \tag{4.8}$$

gde je n_{ij}[40] broj opservacija kod kojih funkcija I uzima vrednost j koja prati i. Odatle, metodom maksimalne verodostojnosti, dobijamo sledeće procene verovatnoća tranzicije:

$$\hat{\pi}_{01} = \frac{n_{01}}{n_{00}+n_{01}} \tag{4.9}$$

$$\hat{\pi}_{11} = \frac{n_{11}}{n_{10}+n_{11}} \tag{4.10}$$

Statistika testa odnosa logaritamske verodostojnosti za nezavisnost, odatle, ima sledeći oblik:

$$LR_{nez} = 2(\ln \mathrm{L}(\mathrm{I}, \hat{\pi}_{01}, \hat{\pi}_{11}) - \ln \mathrm{L}(\mathrm{I}, \hat{\pi}))$$

$$= 2(\mathrm{n}_{00} \ln\left(\frac{1-\hat{\pi}_{01}}{1-\hat{\pi}}\right) + \mathrm{n}_{01} \ln\left(\frac{\hat{\pi}_{01}}{\hat{\pi}}\right) + \mathrm{n}_{10} \ln\left(\frac{1-\hat{\pi}_{11}}{1-\hat{\pi}}\right) + \mathrm{n}_{11} \ln\left(\frac{1-\hat{\pi}_{11}}{1-\hat{\pi}}\right) \tag{4.11}$$

i konvergira Hi kvadrat raspodeli sa jednim stepenom slobode.

Konačno, spajanjem hipoteze o bezuslovnoj pokrivenosti i hipoteze o nezavisnosti, dobijamo preformulisanu hipotezu uslovne pokrivenosti:

$$H_{0,cc}: \pi_{01} = \pi_{11} = \alpha$$

prema kojoj je matrica verovatnoća tranzicije sledećeg oblika:

$$\Pi_0 = \begin{bmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ 1-\alpha & \alpha \end{bmatrix} \tag{4.12}$$

Odatle, i iz jednačina 4.6 i 4.11, dobijamo statistiku testa uslovne pokrivenosti:

$$LR_{up} = 2(\ln \mathrm{L}(\mathrm{I}, \hat{\pi}_{01}, \hat{\pi}_{11}) - \ln \mathrm{L}(\mathrm{I}, \alpha))$$

$$= 2(\mathrm{n}_{00} \ln\left(\frac{1-\hat{\pi}_{01}}{1-\alpha}\right) + \mathrm{n}_{01} \ln\left(\frac{\hat{\pi}_{01}}{\alpha}\right) + \mathrm{n}_{10} \ln\left(\frac{1-\hat{\pi}_{11}}{1-\alpha}\right) + \mathrm{n}_{11} \ln\left(\frac{1-\hat{\pi}_{11}}{1-\alpha}\right) \tag{4.13}$$

[40] Na primer n_{00} se svaki put uvećava kad *I(i)=0 i I(j)=0*, gde su *i* i *j* dva susedna perioda.

čija raspodela konvergira Hi kvadrat raspodeli sa dva stepena slobode. Stoga, ukoliko se vrednost testa nađe između nule i kritične vrednosti χ^2 raspodele sa dva stepena slobode, možemo zaključiti da VaR model generiše tačnu frekvenciju gubitaka u repu raspodele, kao i da su ti gubici nezavisni.

4.3 Wongov metod back testiranja uslovnog gubitka

Iako je, za razliku od VaR-a, uslovni gubitak koherentna mera rizika, njegova upotreba u proceni rizika je još uvek nedovoljno zastupljena. Kao jedan od osnovnih razloga za to, Kerkhof i Malenberg (2004), navode problem back testiranja koje je, u slučaju uslovnog gubitka, znatno komplikovanije. Berkowitz i O'Brien (2002) ispitujući tržišni rizik komercijalnih banaka dolaze do zaključka da su interni modeli za procenu VaR-a često previše konzervativni, a opet nedovoljno dobri u slučaju iznenadnih velikih gubitaka.

Wongov metod back testiranja zasnovan je na tehnici prevojne tačke *(eng. saddlepoint technique)* koja za rezultat ima određivanje *p* vrednosti za testiranje predviđanja uslovnog gubitka, koja zavisi od broja prekoračenja VaR-a, a ne od veličine uzorka. Takođe, Monte Carlo simulacijom Wong pokazuje da za bilo koji broj prekoračenja veći od nule, tehnika prevojne tačke daje preciznu procenu *p* vrednosti.

Ako sa R označimo prinos portfolija koji ima standardizovanu normalnu raspodelu – *N(0,1)*, a sa ϕ *i* Φ funkciju gustine i raspodele standardizovane normalne raspodele respektivno, tada α kvantil raspodele *N(0,1)* možemo označiti sa $q = \Phi^{-1}(\alpha)$. Takođe, ako sa X označimo prinos portfolija, uslovljen sa $R<q$:

$$P(X \leq x) = P(R \leq x/R < q) = P(R \leq x)/P(R < q) = \frac{\Phi(x)}{\alpha} \tag{4.14}$$

tada će teoretski uslovni gubitak za R sa nivoom poverenja 1- α biti $-E(X)$. Ukoliko imamo uzorak od n prekoračenja VaR-a, uzorački uslovni gubitak će biti:

$$ES = -\bar{X} = -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \tag{4.15}$$

Da bi dobio verovatnoću uzoračke sredine repa raspodele, tj. uslovnog gubitka, Wong koristi Lugannani i Rice-ovu (1980) formula razvijenu tehnikom prevojne tačke, koja je definisana sledećom teoremom.

Teorema 4. Ako je dat nezavisan i identično distribuiran uzorak koji ima standardizovanu normalnu raspodelu $R_1, \ldots, R_T$ sa n prekoračenja, konstruišimo uzorak $X_1, \ldots, X_n$ prema jednačini 4.14. Ako je w prevojna tačka takva da je$K'(w) = \bar{x}$, definišimo $\eta = w\sqrt{nK''(w)}$ i $\varsigma = sgn(w)\sqrt{2n(w\bar{x} - K(w))}$, gde *sgn(s)*=0, kada je *s=0*, ili uzima vrednost 1 (-1), kada je s<0 (s>0). Odatle je verovatnoća da je slučajna promenljiva u repu manja ili jednaka uzoračkoj sredini repa $\bar{x} \neq \mu_x$[41] data sledećim izrazom:

$$P(\bar{X} \leq \bar{x}) = \begin{cases} \Phi(\varsigma) - \phi(\varsigma) \cdot (\frac{1}{\eta} - \frac{1}{\varsigma} + O(n^{-\frac{3}{2}})) & za\ \bar{x} < q \\ 1 & za\ \bar{x} \geq q \end{cases} \tag{4.16}$$

Prevojnu tačku *w* dobijamo rešenjem sledeće jednačine:

$$K'(w) = \frac{M'(w)}{M(w)} = w - \frac{\phi(q-w)}{\Phi(q-w)} = \bar{x} \tag{4.17}$$

gde je *K(w)=ln(M(w))*, a *M(w)* funkcija generatrise koja zadovoljava sledeću propoziciju.

Propozicija 1. Ako je X slučajna promenljiva sa funkcijom gustine$f(x) = \frac{\phi(x)}{\alpha}$, $x\epsilon(-\infty, q)$, funkcija generatrise momenata za X je:

$$M(t) = \frac{1}{\alpha} \cdot e^{\frac{t^2}{2}} \cdot \Phi(q - t) \tag{4.18}$$

---

[41] μ_x je teoretski uslovni gubitak $\mu_x = E(x) = -\frac{\phi(q)}{\alpha} = -\frac{e^{-\frac{q^2}{2}}}{\alpha\sqrt{2\pi}}$

njeni izvodi u odnosu na t su sledeći:

$$M'(t) = t \cdot M(t) - e^{qt} \cdot \frac{1}{\alpha}\phi(q) \quad (4.19)$$

$$M''(t) = t \cdot M'(t) + M(t) - e^{qt} \cdot q\frac{1}{\alpha}\phi(q) \quad (4.20)$$

Osnovna hipoteza Wong-ovog testa je da je uzorački uslovni dobitak (dobijen kao aritmetička sredina prekoračenja VaR-a) jednak teoretskom uslovnom gubitku $-\mu_x$, koji npr. za standardnu normalnu raspodelu i kvantil *α=0.01* iznosi 2.6652, dok je alternativna hipoteza da je uslovni gubitak veći od teoretskog. *P* vrednost ovog testa je data Lugannani i Rice-ovom formulom $p\ vrednost\ = P(\bar{X} \leq \bar{x})$ (videti jednačinu 4.16).

Jedan od osnovnih nedostataka Wong-ovog testa je što pretpostavlja normalnu raspodelu prinosa. Takođe, empirijski rezultati u ovom radu pokazali su da ovaj test ima problem sa *p* - vrednošću jer generiše ili *p* – vrednosti blizu 1 ili *p* – vrednosti blizu 0, tako da je njegova primena vrlo ograničena.

4.4 *Bootstrap* metod back testiranja uslovnog gubitka

Kao što je već pomenuto, većina modela za back testiranje podrazumeva neku predefinisanu raspodelu prinosa, što je često u praksi ograničavajući faktor. Za razliku od ovakvih modela, McNeil i Frey (2000) predlažu bootstrap metod za back testiranje koji se može primeniti na sve prinose $r_{t,}$ koji se mogu pretstaviti kao $r_t = \mu_t + \sigma_t\varepsilon_t$, gde je ε_t nezavisno i identično distribuiran rezidual sa očekivanjem 0 i jediničnom varijansom. Da bi testirao tačnost uslovnog gubitka, ovaj metod poredi vrednost prinosa sledećeg dana r_{t+1}sa procenjenim uslovnim gubitkom u trenutku t (ES_q^t), pod uslovom da se desilo prekoračenje VaR_q^t-a ($r_{t+1} > VaR_q^t$). Ako definišemo reziduale u slučaju prekoračenja VaR-a ($r_{t+1} > VaR_q^t$) sa:

$$Z_{t+1} = \frac{r_{t+1} - ES_q^t(r_{t+1})}{\sigma_{t+1}} = \frac{\mu_{t+1} + \sigma_{t+1}\varepsilon_{t+1} - (\mu_{t+1} + \sigma_{t+1}ES_q^t(\varepsilon))}{\sigma_{t+1}}$$

$$=> Z_{t+1} = \varepsilon_{t+1} - E(\varepsilon/\varepsilon_q) \quad (4.21)$$

tada će Z_t biti identične i nezavisno distribuirane promenljive sa očekivanom vrednošću nula. Tako, back testiranjem za period od T dana, možemo dobiti empirijske reziduale za dane kada je prekoračen VaR:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \left\{\varepsilon_{t+1};\ \text{za koje je}\ r_{t+1} > VaR_q^t\right\}\ \text{gde je}\ \varepsilon_{t+1} = \frac{r_{t+1} - \widehat{ES}_q^t(r_{t+1})}{\hat{\sigma}_{t+1}} \quad (4.22)$$

i koje zovemo “reziduali prekoračenja”. Kao što je pokazano u jednačini 4.21, ovako dobijeni reziduali bi trebalo da budu nezavisni i identično distribuirani sa očekivanjem nula. Odatle osnovna hipoteza ovog metoda back testiranja podrazumeva da je očekivanje reziduala prekoračenja nula, dok je alternativna da je očekivanje veće od nula što podrazumeva da je uslovni gubitak sistematski potcenjen.

Za testiranje hipoteze da je očekivanje reziduala prekoračenja $\mu_0 = 0$, koristi se neparametarski bootstrap test (Efron i Tibshirani, 1993) koji ne pravi nikakvu pretpostavku o distribuciji reziduala. Sam test obuhvata sledeće korake. Najpre se formira statistika T:

$$T = t(\varepsilon) = \frac{\bar{\varepsilon} - \mu_0}{\frac{\bar{\sigma}}{\sqrt{m}}}, \quad \text{gde su} \quad (4.23)$$

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\varepsilon_i \quad \text{i} \quad \bar{\sigma}^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(\varepsilon_i - \bar{\varepsilon})^2 \quad (4.24)$$

i gde je m broj prekoračenja VaR-a na posmatranom uzorku. Da bi empirijska distribucija reziduala prekoračenja imala očekivanje μ_0, transliraju se rezidali prekoračenja za $\bar{\varepsilon}$ i dobijaju se translirani reziduali:

$$\tilde{\varepsilon}_i = \varepsilon_i - \bar{\varepsilon} + \mu_0, \quad \text{i=1,2, …, m} \quad (4.25)$$

Ovako dobijeni reziduali se ponovo uzorkuju i dobijaju se $\tilde{\varepsilon}_1^*, \tilde{\varepsilon}_2^*, \dots, \tilde{\varepsilon}_m^*$ i za svaki tako bootstrap-ovani uzorak j (ukupno ih ima Nr) računa se statistika:

$$T_j^* = t(\tilde{\varepsilon}_j^*) = \frac{\bar{\bar{\varepsilon}}^* - \mu_0}{\frac{\bar{\bar{\sigma}}}{\sqrt{m}}} \tag{4.26}$$

Odatle se p-vrednost za nultu hipotezu dobija kao:

$$p - \text{vrednost} = \frac{1 + \sum_{j=1}^{N_r} 1_{\{T_j^* > T\}}}{1 + N_r} \tag{4.27}$$

gde je $1_{\{\cdot\}}$ indikator funkcija koja uzima vrednost 1 kada je iskaz u zagradi tačan i 0 kada je netačan. Modeli koji imaju veliku p-vrednost adekvatno procenjuju uslovni gubitak.

Za razliku od Wong-ovog back testa, ovaj test značajno bolje diskriminiše manje efikasne modele u proceni uslovnog gubitka, ali nije dovoljno efikasan u rangiranju modela koji dobro procenjuju uslovni gubitak. Zbog toga, u ovom radu se predlaže njegova primena isključivo zajedno sa V_1 merom koju predlaže Embrechet et al. (2005). Naime, Embrechet et al. (2005) uvode V_1 meru za testiranje i rangiranje performansi modela za procenu uslovnog gubitka. Ova mera je logički vrlo intuitivna, jer predstavlja prosečno odstupanje ostvarenih prinosa od uslovnog gubitka u slučajevima kada su prinosi prekoračili VaR. Što je model bolji, to je vrednost prosečnog odstupanja od uslovnog gubitka bliža nuli. Sama mera V_1 data je sledećom formulom:

$$V_1 = \frac{\sum_{t=1}^{T} (r_t - (-\widehat{ES}_t) 1_{(r_t < -\widehat{VaR}_t)}}{\sum_{t=1}^{T} 1_{(r_t < -\widehat{VaR}_t)}} \tag{4.28}$$

gde su r_t prinosi koji su prekoračili procenjeni VaR i ima ih ukupno T. Osnovni problem ove mere je što ne uzima na adekvatan način frekvenciju prekoračenja VaR-a, jer, matematički gledano, za veliki broj prekoračenja, ova mera teži 0. Iz tih razloga ova mera se može koristiti isključivo za rangiranje modela za procenu uslovnog gubitka koji su prethodno prošli neki od modela za back testiranje VaR-a ili uslovnog gubitka.

4.5 Normalizovan uslovni gubitak

Kao što se back testiranje VaR modela zasniva, u najvećoj meri, na broju prekoračenja VaR-a, Danielsson (2011) predlaže sličnu metodologiju koja se zasniva na određivanju normalizovanog uslovnog gubitka NS. Ovakav uslovni gubitak, zapravo, predstavlja odnos prinosa r_t u slučaju prekoračenja VaR-a i modelovanog uslovnog gubitka ES_t:

$$NS_t = \frac{r_t \cdot 1_{(r_t < -\widehat{VaR}_t)}}{ES_t} \tag{4.29}$$

Iz definicije uslovnog gubitka sledi da očekivana vrednost normalizovanog gubitka za period t+1, u zavisnosti od informacija u prethodnom trenutku t, treba da bude 1. To se najbolje može videti iz sledećeg odnosa (Totić, Božović, 2015):

$$\mathbb{E}_t(\mathrm{NS}_{t+1,q}) = \mathbb{E}_t\left(\frac{r_{t+1}\mathbf{1}_{\{r_{t+1}<-\mathrm{VaR}_{t+1,q}\}}}{\mathrm{ES}_{t+1,q}}\right) = \frac{\mathbb{E}_t(r_{t+1}|r_{t+1} \leq -\mathrm{VaR}_{t+1,q})}{\mathrm{ES}_{t+1,q}} = 1 \tag{4.30}$$

Odatle sledi da prosečan normalizovan gubitak dobijen back testiranjem $\overline{NS}$ treba da bude 1.

5 Empirijska analiza

Empirijska analiza obuhvata komparativnu analizu različitih metodologija za procenu VaR-a i uslovnog gubitka. Metodologije koje se koriste za procenu VaR-a i uslovnog gubitka su sa teorijskog aspekta detaljno objašnjene u prethodnim poglavljima i obuhvataju sledeće:

1. Jednostavni analitički model sa normalnom raspodelom (AN model)
2. Istorijska simulacija (HS model)
3. Filtrirana istorijska simulacija (FHS model)

4. Model eksponencijalno ponderisanih pokretnih proseka sa normalno distribuiranim rezidualima (EWMAn)
5. GARCH (1,1) model sa normalno distribuiranim rezidualima (GARCHn)
6. GARCH (1,1) model sa t-distribuiranim rezidualima (GARCHt)
7. GARCH (1,1) model sa normalno distribuiranim rezidualima i autoregresionim uslovnim očekivanjem AR(1) (AR1GARCHn)
8. GARCH (1,1) model sa t distribuiranim rezidualima i autoregresionim uslovnim očekivanjem AR(1) (AR1GARCHt)
9. GJR GARCH model sa normalno distribuiranim rezidualima (GJRn)
10. GJR GARCH model sa t-distribuiranim rezidualima (GJRt)
11. GJR GARCH model sa normalno distribuiranim rezidualima i autoregresionim uslovnim očekivanjem AR(1) (AR1GJRn)
12. GJR GARCH model sa t distribuiranim rezidualima i autoregresionim uslovnim očekivanjem AR(1) (AR1GJRt)
13. Eksponencijalni GARCH (1,1) sa normalno distribuiranim rezidualima (EGARCHn)
14. Eksponencijalni GARCH (1,1) model sa t-distribuiranim rezidualima (EGARCHt)
15. Eksponencijalni GARCH (1,1) model sa normalno distribuiranim rezidualima i autoregresionim uslovnim očekivanjem AR(1) (AR1EGARCHn)
16. Eksponencijalni GARCH (1,1) model sa t distribuiranim rezidualima i autoregresionim uslovnim očekivanjem AR(1) (AR1EGARCHt)
17. GARCH (1,1) sa normalno distribuiranim rezidualima i repom modelovanim Generalizovanom Pareto distribucijom (GPDGARCHn)

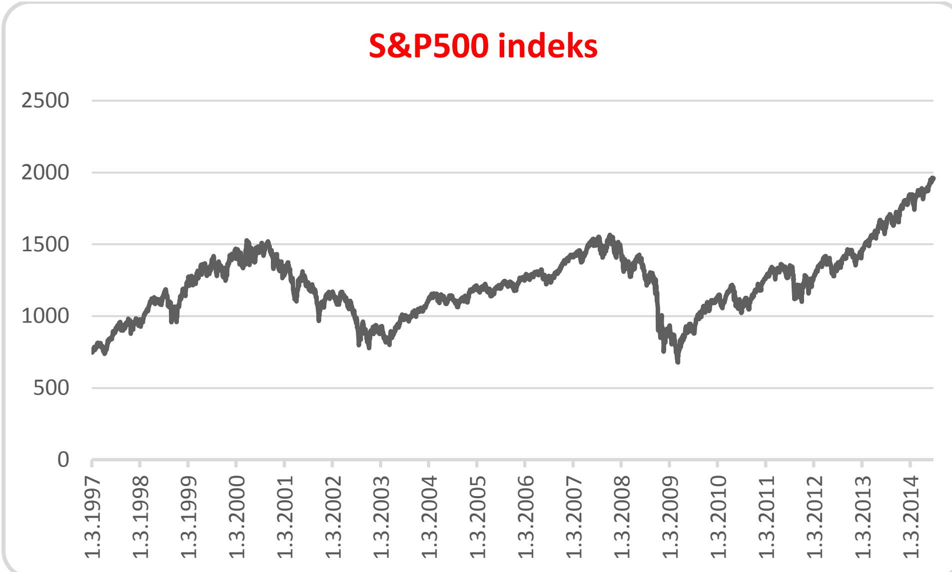
Metodologije za procenu VaR-a testirane su Kupiec i Christoffersson testom, dok je za procenu uslovnog gubitka korišćen Wong-ov test, bootstrap metod back testiranja, V1 test i normalizovani uslovni gubitak. Na osnovu rezultata back testiranja utvrđeno je koje su najbolje metodologije za procenu VaR-a i uslovnog gubitka, kao i koji metodi back testiranja daju najadekvatnije rezultate u proceni uslovnog gubitka. Ovo poslednje je od posebnog značaja, imajući u vidu da je back testiranje uslovnog gubitka još nedovoljno empirijski istraženo.

Rezultati back testiranja su dalje korišćeni prilikom određivanja odnosa VaR-a i uslovnog gubitka, kako bi se odredio novi kapitalni zahtev za tržišni rizik zasnovan na uslovnom gubitku. U tom procesu je korišćena Monte Carlo simulacija, o kojoj će u nastavku biti više reči.

5.1 Preliminarna analiza podataka

Empirijska analiza podataka sprovedena je na podacima za Standard & Poors 500 Indeks (S&P500) u periodu 3.1.1997.-30.6.2014. Podaci su dobijeni sa finance.yahoo.com. S&P500 indeks obuhvata 500 vodećih američkih kompanija sa kapitalizacijom većom od 5.3 milijarde dolara i, kao takav, on obuhvata oko 80%[42] ukupne kapitalizacije tržišta SAD. Ponderi indeksa su određeni u odnosu na udeo u ukupnoj kapitalizaciji, te tako, na primer, prvih deset najvećih kompanija čini 17.5%[43] vrednosti indeksa. Imajući u vidu da je tržište SAD i dalje najrazvijenije svetsko tržište, a da kompanije iz S&P500 indeksa čine 80% ovog tržišta, može se zaključiti da ovaj indeks najbolje reprezentuje američko tržište i da je, zbog toga, dobar reper za tržišni portfolio. Sam period posmatranja je tako izabran da pokriva i periode smanjene volatilnosti, kao i periode ekstremne volatilnosti, kao što su pucanje “dot-com” balona i svetska finansijska kriza, što omogućava i testiranje robustnosti modela. Kretanje vrednosti S&P500 indeksa prikazano je na sledećoj slici.

[42]Tržišna kapitalizacija S&P500 indeksa iznosi 19,301,714 miliona USD.
[43]Apple Inc.,. kao najveća kompanija, čini 3.5% S&P500 indeksa.



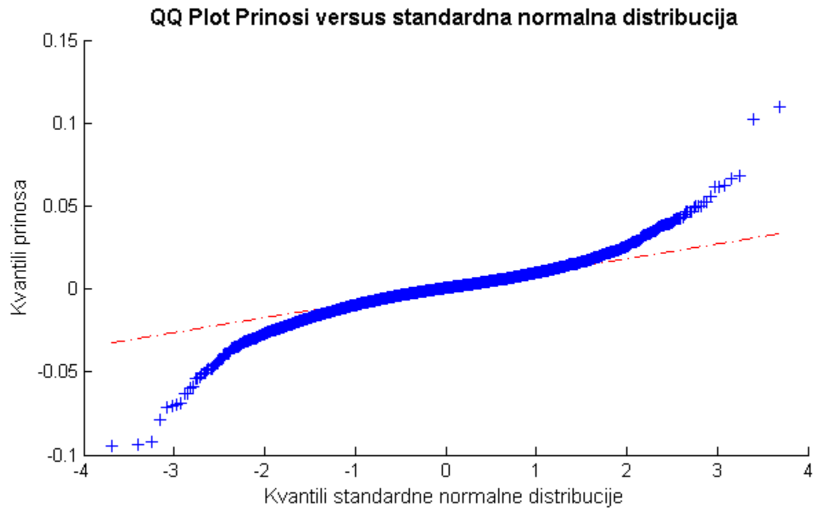
Slika 13. Istorijsko kretanje cena S&P500 indeksa

Za procenu VaR-a i uslovnog gubitka korišćeni su logaritamski dnevni prinosi oblika:

$$r_t = \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right) \tag{5.1}$$

gde je r_t prinos indeksa na dan t, a P_t i P_{t-1} su cene na zatvaranju na dan t, odnosno dan t-1.

Kao što je već pomenuto, jedna od čestih pretpostavki modela za procenu VaR-a i uslovnog gubitka je normalna raspodela prinosa. Vizuelan prikaz koji pomaže u testiranju ove pretpostavke je QQ dijagram dat na slici 14.



Slika 14. QQ dijagram prinosa S&P500 indeksa

Na QQ dijagram su predstavljeni kvantili empirijske distribucije prinosa naspram kvantila standardizovane normalne distribucije. U slučaju da prinosi imaju standardizovanu normalnu distribuciju, empirijski podaci bi trebalo linearno da prate crvenu liniju normalne distribucije. U slučaju S&P500 indeksa, sa slike 14. se jasno vidi da repovi empirijske distribucije značajno odstupaju od normalne distribucije, odnosno da empirijska distribucija prinosa ima "debele repove".

Odstupanje empirijske distribucije od normalne potvrđeno je i primenom Jarque-Berra statistike:

$$JB = \frac{N}{6}\left(S^2 + \frac{1}{4}(K-3)^2\right) \tag{5.2}$$

gde je N veličina uzorka, S koeficijent asimetrije i K koeficijent spljoštenosti. Ova statistika asimptotski teži Hi-kvadrat raspodeli sa 2 stepena slobode. Vrednost Jarque-Berra statistike za gore pomenuti period posmatranja (4400 dana) iznosi 10114 (*p-vrednost* je 0.00), što potvrđuje tvrdnju da empirijska raspodela prinosa nema normalnu distribuciju.

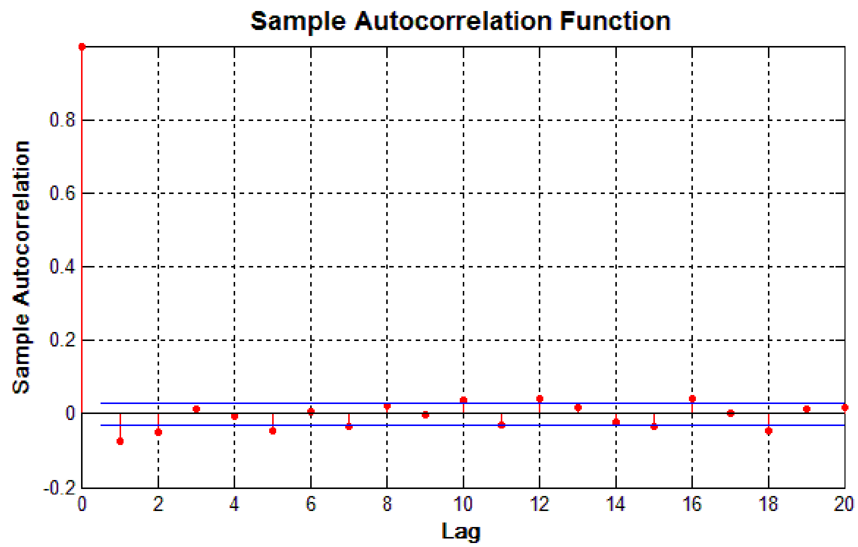
Osnovna svojstva prinosa S&P500 indeksa najbolje se mogu videti iz sledeće tabele.

Prinosi na S&P 500	
Ukupan broj opservacija	4400
Aritmetička sredina	0.0002
Medijana	0.0007
Maksimum	0.1096
Minimum	-0.0947
Standardna devijacija	0.0128
Koeficijent asimetrije	-0.2219
Koeficijent spljoštenosti	10.4146

Tabela 6. Deskriptivna statistika za prinose S&P500 indeksa

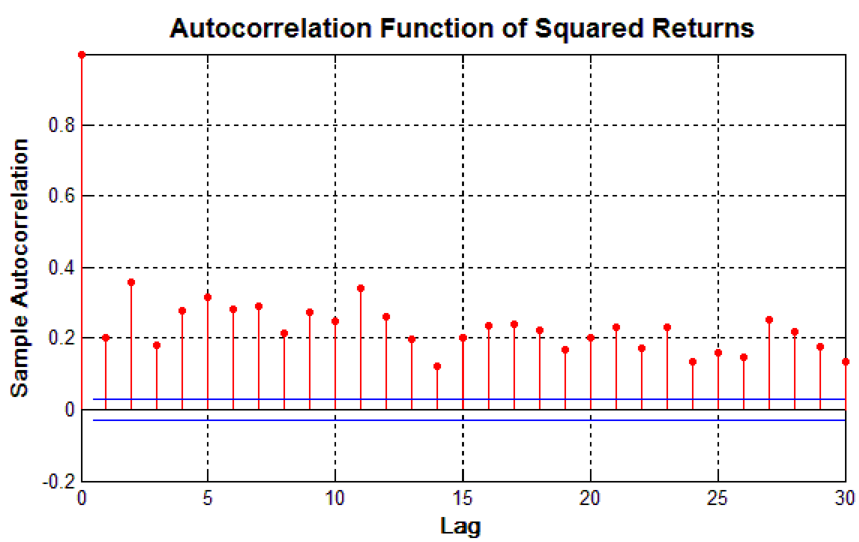
Iz tabele se jasno vidi da je prosečan prinos S&P500 indeksa skoro 0, čime se još jednom potvrđuje empirijska činjenica da prinosi osciliraju oko nule. Takođe, koeficijent asimetrije je negativan, što govori da je empirijska raspodela asimetrična u desno. Ovakav koefcijent asimetrije, zajedno sa koeficijentom spljoštenosti značajno većim od 3, govori u prilog tome da imamo deblji levi rep raspodele, a samim tim i veću verovatnoću negativnih prinosa.

Pored prethodno navedenih karakteristika, prinosi S&P500 indeksa su testirani na prisustvo autokorelcije i heteroskedastičnosti. Postojanje autokorelacije u prinosima S&P500 indeksa može se vizuelno odrediti pomoću grafika autokorelacione funkcije koji je predstavljen na sledećoj slici.



Slika 15. Autokorelacija prinosa

Sa grafika se može uočiti da postoji značajna korelacija na prvom legu, dok je na ostalim legovima treba statistički proveriti. Na sličan način, vizuelno se može proveriti i heteroskedastičnost, pri čemu se posmatra autokorelaciona funkcija kvadriranih prinosa – slika 16.



Slika 16. Autokorelaciona funkcija kvadriranih prinosa

Sa grafika se lako može videti postojanje heteroskedastičnosti u prinosima S&P500 indeksa, jer je autokorelacija značajna na svim legovima.

Za statističko testiranje autokorelacije korišćena je Ljung-Box Q statistika:

$$Q = N(N+2)\sum_{i=1}^{L}\frac{\rho_i^2}{(N-i)} \tag{5.3}$$

gde je N veličina uzorka, L broj legova za koje se računa autokorelacija, a ρ_i^2 je kvadrirani uzorački koeficijent autokorelacije za leg i. Ova statistika asimptotski teži Hi-kvadrat raspodeli sa i stepeni slobode. Osnovna hipoteza Ljung-Box Q statistike je odsustvo autokorelacije. Kritična vrednost statistike za 20 legova i rizikom greške prve vrste od 5% je 30.143. Prilikom ispitivanja autokorelacije prinosa dobijena vrednost Ljung-Box Q statistike je 97.96, što potvrđuje prisustvo autokorelacije u prinosima S&P500 indeksa. Takođe, vrednost Ljung-Box Q statistike za kadrirane prinose iznosi 5481.4 što pokazuje postojanje značajne heteroskedastičnosti u prinosima S&P500 indeksa.

5.2 Empirijsko back testiranje VaR-a i uslovnog gubitka

Za procenu VaR-a i uslovnog gubitka korišćeno je 17 različitih modela koji su navedeni u uvodu ovog poglavlja. Svi modeli za procenu, kao i odgovarajući modeli za back testiranje su implementirani u softverskom paketu MATLAB, verzija R2010b.

VaR i uslovni gubitak procenjeni su sa nivoima poverenja 0.95, 0.99 i 0.995. Takođe, VaR i uslovni gubitak procenjeni su za oba repa raspodele prinosa. Na taj način se, pored procene rizika za dugu poziciju, uzeo u obzir i rizik ulaska u kratku poziciju.

Prilikom procene VaR-a i uslovnog gubitka za svaki model, korišćen je koncept "kotrljajućeg" prozora (*eng. rolling window*). Ovaj koncept podrazumeva da se najpre odredi veličina prozora, odnosno broj opservacija koji čini prozor, i da se, na osnovu tih opservacija, proceni odgovarajući parametar. U ovom radu je za sve modele veličina prozora bila ista i iznosila je 1000 opservacija, odnosno 1000 dnevnih prinosa. Tako su na primer, prvi kotrljajući prozor činile sve obzevacije od 1-ve do 1000-ite, a VaR i uslovni gubitak su procejivani za 1001-vu opservaciju. Nakon toga, prozor se pomerao za jedan dan, pa je drugi prozor obuhvatao opservacije od 2-ge do 1001-ve. Imajući u vidu da je sam uzorak u periodu od 3.1.1997. do 30.6.2014. obuhvatao 4400 dnevnih prinosa S&P500 indeksa, za svaki model i za svaki nivo poverenja i za svaki rep distribucije procenjeno je 3400 VaR vrednosti i 3400 vrednosti uslovnog gubitka. Praktično, za kompleksnije modele kao što su GARCH (1,1) sa normalno distribuiranim rezidualima i repom modelovanim Generalizovanom Pareto distribucijom, procena VaR-a i uslovnog gubitka, podrazumevala je procenu većeg broja parametara – $\hat{\mu}, \hat{\alpha}_0, \hat{\alpha}_1$ i $\hat{\beta}_1$ iz GARCH modela i $\hat{\beta}$ i $\hat{\xi}$ na osnovu jednog kotrljajućeg prozora.

Nakon što su dobijene vrednosti VaR-a i uslovnog gubitka za sve metodologije, pristupilo se testiranju dobijenih vrednosti i komparativnoj analizi modela. Tako su za procenu VaR-a korišćeni:

- Kupiec test
- Christoffersen test

dok su za procenu uslovnog gubitka korišćeni:

- Wong-ov test
- Bootstrap metod back testiranja
- V1 test
- Normalizovani uslovni gubitak

Pre samog back testiranja modela, analizirani su broj proboja VaR-a i uslovnog gubitka za sve modele, za sve nivoe poverenja i za oba repa distribucije prinosa. U Tabeli 7. dat je broj proboja VaR-a i uslovnog gubitka za donji rep distribucije prinosa.

	Broj prekoračenja VaR-a			Broj prekoračenja ES-a		
Nivo poverenja	0.95	0.99	0.995	0.95	0.99	0.995
Očekivane vrednosti	170	34	17			
AN	166	76	**62**	97	**56**	**47**
HS	177	54	36	80	28	14
FHS	167	39	21	68	13	5
EWMAn	**217**	**80**	50	**126**	44	29
GARCHn	196	71	45	99	32	19
AR1GARCHn	195	71	44	97	30	19
GARCHt	205	48	22	34	4	2
AR1GARCHt	208	49	23	39	5	2
GJRn	183	69	44	99	30	21
AR1GJRn	189	70	41	101	32	22
GJRt	195	43	23	44	5	4
AR1GJRt	196	44	23	46	6	3
EGARCHn	202	66	49	108	40	27
AR1EGARCHn	201	69	48	107	41	27
EGARCHt	210	52	28	56	9	5
AR1EGARCHt	214	52	30	56	9	5
GPDGARCHn	154	28	14	66	10	5

Tabela 7. Broj prekoračenja za donji rep raspodele prinosa

Iz tabele se lako može uočiti da EWMA model sa normalno distribuiranim prinosima ima najveći broj prekoračenja VaR-a na nivou poverenja od 95% i 99%, a da jednostavni analitički VaR ima najveći broj prekoračenja na nivou poverenja od 99.5%. Takođe, ova dva modela imaju i najveći broj prekoračenja uslovnog gubitka. Sa druge strane, GPDGARCH sa normalno distribuiranim rezidualima i FHS model imaju broj prekoračenja VaR-a najbliži očekivanom.

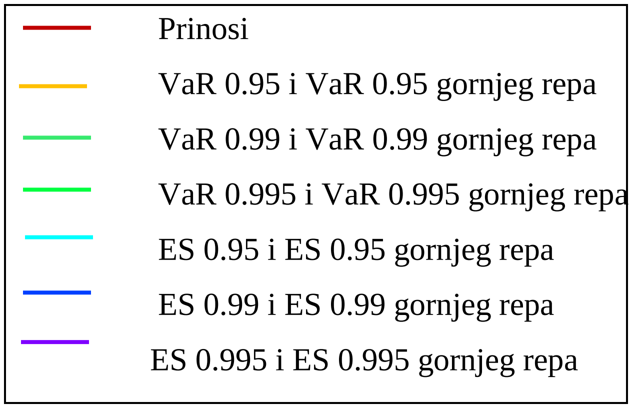
Kada je u pitanju gornji rep distribucije prinosa, broj prekoračenja je dat sledećom tabelom:

	Broj prekoračenja VaR-a			Broj prekoračenja ES-a		
Nivo poverenja	0.95	0.99	0.995	0.95	0.99	0.995
Očekivane vrednosti	170	34	17			
AN	132	**60**	**50**	76	**42**	**32**
HS	152	41	27	67	22	16
FHS	**170**	**34**	20	66	19	10
EWMAn	**197**	51	27	**86**	19	11
GARCHn	139	30	**16**	60	12	8
AR1GARCHn	133	30	**16**	56	13	7
GARCHt	138	20	6	21	2	1
AR1GARCHt	137	19	6	20	2	1
GJRn	150	26	15	56	13	6
AR1GJRn	147	26	14	55	13	7
GJRt	150	18	8	28	2	0
AR1GJRt	147	19	7	28	2	0
EGARCHn	160	30	14	55	11	5
AR1EGARCHn	158	29	14	57	12	5
EGARCHt	158	21	7	28	2	0
AR1EGARCHt	160	20	7	27	3	0
GPDGARCHn	163	35	21	73	20	13

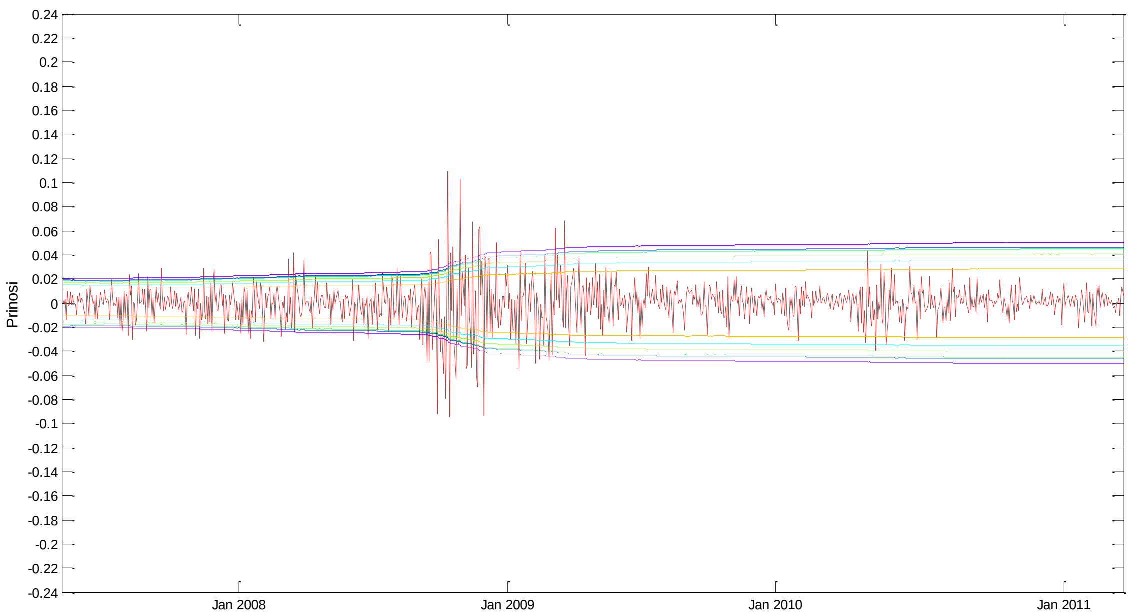
Tabela 8. Broj prekoračenja za gornji rep raspodele prinosa

Najveći broj prekoračenja i u gornjem repu imaju EWMA model sa normalno raspoređenim rezidualima i jednostavni analitički model sa normalnom raspodelom. Sa druge strane, FHS model za nivo poverenja 95% i 99% ima broj prekoračenja u potpunosti jednak očekivanom.

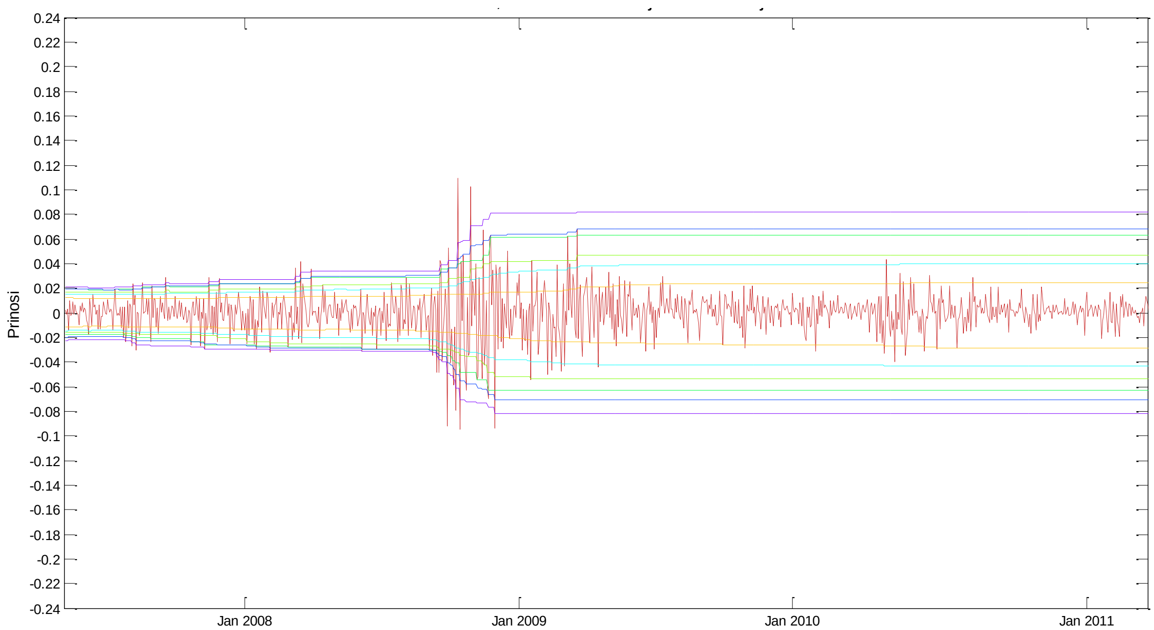
Pa ipak, odnos prinosa, VaR-a i uslovnog gubitka za različite nivoe poverenja i za različite metodologije, se najbolje može videti sa sledećih grafika (legenda za sve grafike je ista, videti sliku 17.).



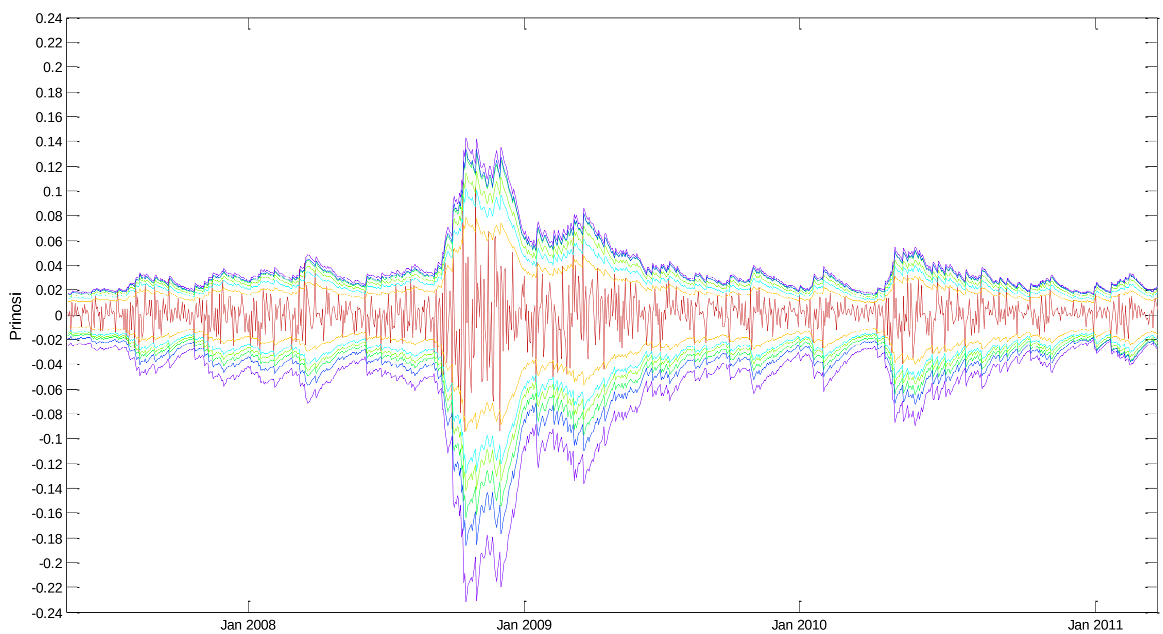
Slika 17. Legenda za grafike



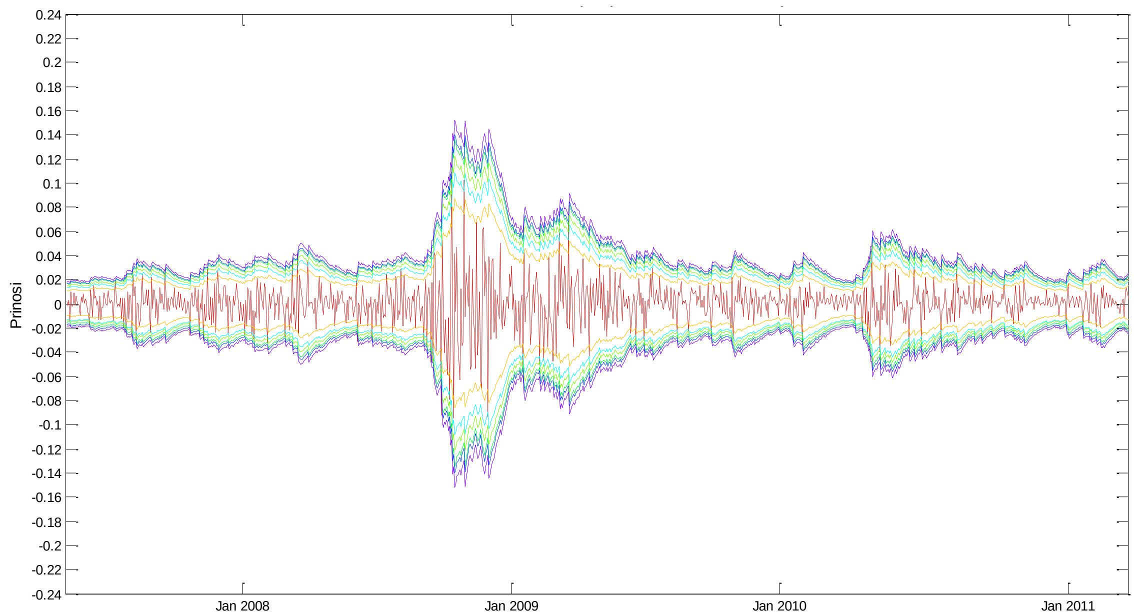
Slika 18. Prinosi, VaR i uslovni gubitak – analitički model



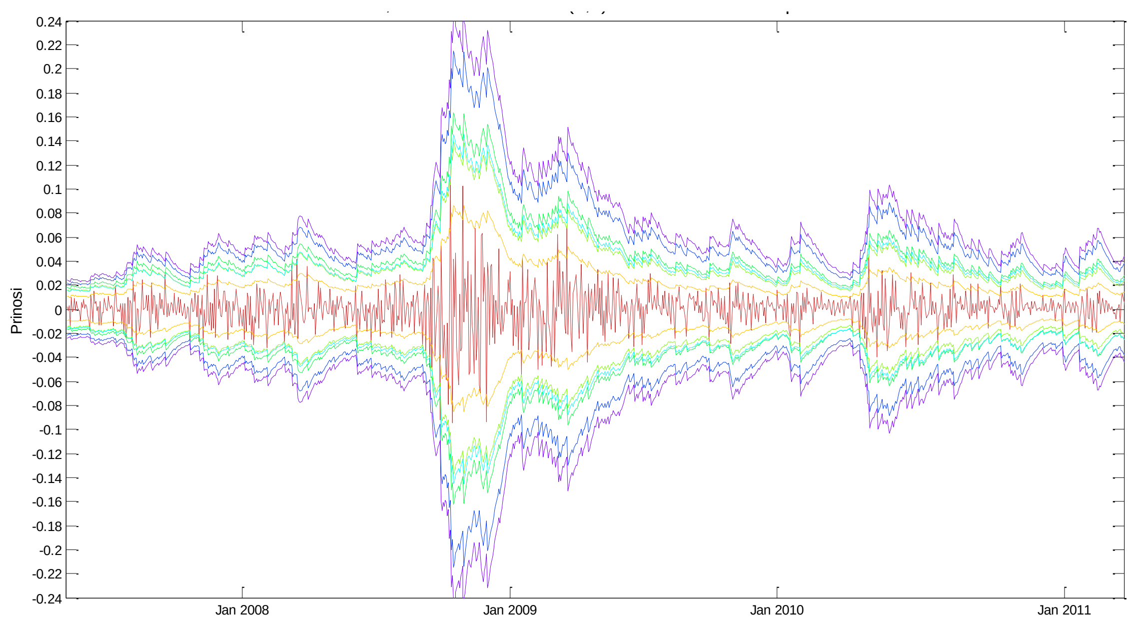
Slika 19. Prinosi, VaR i uslovni gubitak – istorijska simulacija



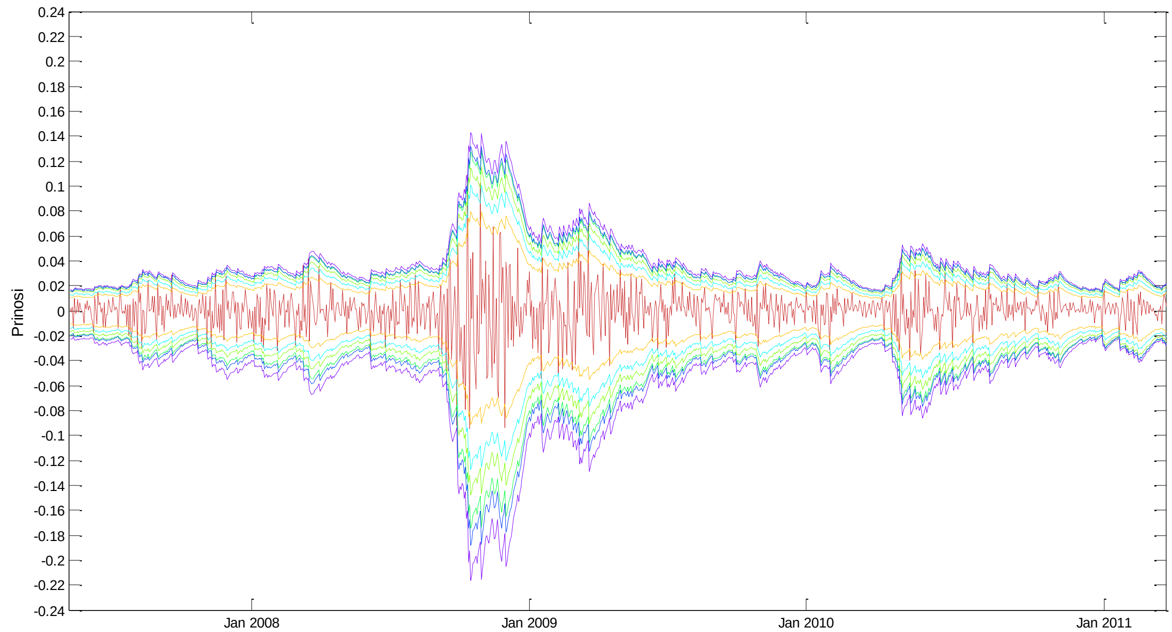
Slika 20. Prinosi, VaR i uslovni gubitak – filtrirana istorijska simulacija



Slika 21. Prinosi, VaR i uslovni gubitak – GARCH(1,1) sa normalnom raspodelom



Slika 22. Prinosi, VaR i uslovni gubitak – GARCH(1,1) sa studentovom raspodelom



Slika 23. Prinosi, VaR i uslovni gubitak – GPDGARCH sa normalnom raspodelom

Sa grafika se jasno može uočiti postojanje dve osnovne kategorije modela za procenu VaR-a i uslovnog gubitka. U prvu kategoriju spadaju jednostavni analitički model sa pretpostavkom o normalnoj distribuciji prinosa i model istorijske simulacije. Ono što je karakteristično za njih je da se vrednosti VaR-a i uslovnog gubitka vrlo sporo menjaju i nisu adaptivne na šokove. To se jako dobro vidi sa početkom finansijske krize, kada, tek nakon prekoračenja VaR-a, dolazi do adaptiranja na režim visoke volatilnosti. Dodatni problem ovih modela je i to što, kad jednom uđu u režim visoke volatilnosti, teško izlaze iz tog režima, odnosno izlaze tek kada podaci iz perioda visoke volatilnosti izađu iz kotrljajućeg prozora.

Drugu kategoriju, čine modeli uslovne volatilnosti kao što su različite tipovi GARCH modela, kao i modeli koji kombinuju uslovnu volatilnost i modelovanje repa distribucije prinosa kao što su GPD GARCH i filtrirana istorijska simulacija. Kod ovih modela se lako može videti da se procene VaR-a i uslovnog gubitka na dnevnom nivou menjaju u zavisnosti od volatilnosti prethodnog dana. Takođe, ove procene vrlo brzo reaguju na promenu volatilnosti i ulazak u režim visoke volatilnosti, karakterističan za period finansijske krize. Filtrirana istorijska simulacija i GPD GARCH dodatno imaju prednost što posebno modeluju repove distribucije prinosa, tako da prate asimetriju prinosa, za razliku od GARCH modela sa studentovom ili normalnom raspodelom koji su simetrični. Takođe, može se videti da modeli sa studentovom distribucijom reziduala imaju najveće vrednosti VaR-a i uslovnog gubitka za različite nivoe poverenja.

Prvi test koji je korišćen za statističku proveru tačnosti različitih modela za procenu VaR-a i uslovnog gubitka je Kupiec test. U sledeće dve tabele date su vrednosti Kupiec-ove statistike verodostojnosti, kao i odgovarajuće *p* vrednosti za svaki VaR model i za različite nivoe poverenja: 95%, 99% i 99.5%. U tabeli 9. date su vrednosti testa za donji rep distribucije prinosa, a u tabeli 10. za gornji rep distribucije prinosa.

	Kritične vrednosti			***p* vrednosti (0.05)**		
Nivo poverenja	0.95	0.99	0.995	0.95	0.99	0.995
Očekivane vrednosti	3.8415	3.8415	3.8415			
AN	0.0998	38.7909	71.0475	**0.7521**	0.0000	0.0000
HS	0.2995	10.0824	16.1289	**0.5842**	0.0015	0.0001
FHS	0.0560	0.7091	0.8797	**0.8129**	**0.3997**	**0.3483**
EWMAn	12.6262	45.5381	42.2039	0.0004	0.0000	0.0000
GARCHn	3.9978	30.9656	31.8428	0.0456	0.0000	0.0000
AR1GARCHn	3.7024	30.9656	29.9020	0.0543	0.0000	0.0000
GARCHt	7.1374	5.1630	1.3519	0.0075	0.0231	**0.2450**
AR1GARCHt	8.3725	5.8820	1.9156	0.0038	0.0153	**0.1663**
GJRn	1.0221	28.0341	29.9020	**0.3120**	0.0000	0.0000
AR1GJRn	2.1605	29.4853	24.3601	**0.1416**	0.0000	0.0000
GJRt	3.7024	2.2203	1.9156	**0.0543**	**0.1362**	**0.1663**
AR1GJRt	3.9978	2.7187	1.9156	0.0456	**0.0992**	**0.1663**
EGARCHn	5.9957	23.8600	40.0471	0.0143	0.0000	0.0000
AR1EGARCHn	5.6361	28.0341	37.9318	0.0176	0.0000	0.0000
EGARCHt	9.2472	8.2843	5.9793	0.0024	0.0040	0.0145
AR1EGARCHt	11.1181	8.2843	8.1291	0.0009	0.0040	0.0044
GPDGARCHn	1.6346	1.1380	0.5663	**0.2011**	**0.2861**	**0.4517**

Tabela 9. Kupiec test – donji rep distribucije prinosa

	Kritične vrednosti			*p* vrednosti (0.05)		
Nivo poverenja	0.95	0.99	0.995	0.95	0.99	0.995
Očekivane vrednosti	3.8415	3.8415	3.8415			
AN	9.6542	16.3594	42.2039	0.0019	0.0001	0.0000
HS	2.0771	1.3659	5.0113	**0.1495**	**0.2425**	0.0252
FHS	0.0000	0.0000	0.5034	**1.0000**	**1.0000**	**0.4780**
EWMAn	4.3040	7.4434	5.0113	0.0380	0.0064	0.0252
GARCHn	6.3284	0.4950	0.0603	0.0119	**0.4817**	**0.8060**
AR1GARCHn	9.1327	0.4950	0.0603	0.0025	**0.4817**	**0.8060**
GARCHt	6.7576	6.8330	9.5383	0.0093	0.0089	0.0020
AR1GARCHt	7.2020	7.9537	9.5383	0.0073	0.0048	0.0020
GJRn	2.5746	2.0693	0.2463	**0.1086**	**0.1503**	**0.6197**
AR1GJRn	3.4258	2.0693	0.5663	**0.0642**	**0.1503**	**0.4517**
GJRt	2.5746	9.1803	5.9636	**0.1086**	0.0024	0.0146
AR1GJRt	3.4258	7.9537	7.6073	**0.0642**	0.0048	0.0058
EGARCHn	0.6310	0.4950	0.5663	**0.4270**	**0.4817**	**0.4517**
AR1EGARCHn	0.9123	0.7817	0.5663	**0.3395**	**0.3766**	**0.4517**
EGARCHt	0.9123	5.8129	7.6073	**0.3395**	0.0159	0.0058
AR1EGARCHt	0.6310	6.8330	7.6073	**0.4270**	0.0089	0.0058
GPDGARCHn	0.3074	0.0294	0.8797	**0.5793**	**0.8638**	**0.3483**

Tabela 10. Kupiec test – gornji rep distribucije prinosa

Kupiec-ov test bezuslovne pokrivenosti za donji rep distribucije prinosa pokazuje da jedino filtrirana istorijska simulacija, GJR i AR1 GJR modeli sa t distribuiranim rezidualima, kao i GPDGARCH model daju dobre procene VaR-a za sve nivoe poverenja. Što se tiče gornjeg repa distribucije prinosa, pored filtrirane istorijske simulacije i GPDGARCH modela, GJR i AR1 GJR model sa normalno distribuiranim rezidualima, kao i EGARCH i AR1 EGARCH sa normalno distribuiranim rezidualima daju statistički dobre procene VaR-a. Takođe, na višim nivoima poverenja GARCH i AR1 GARCH sa normalno distribuiranim rezidualima daju adekvatne ocene. Imajući u vidu da Kupiec test ne ispituje nezavisnost probijanja VaR-a, u analizi modela za procenu VaR-a primenjen je i Christoffersen test uslovne pokrivenosti. U tabelama 11. i 12. dati su kritične vrednosti i *p* vrednosti za statistika Cristoffersen-ovog testa.

	Kritične vrednosti			*P* vrednosti (0.05)		
Nivo poverenja	0.95	0.99	0.995	0.95	0.99	0.995
Očekivane vrednosti	5.9914	5.9914	5.9914			
AN	12.4601	47.3495	76.2438	0.0020	0.0000	0.0000
HS	15.1579	15.7152	19.6823	0.0005	0.0004	0.0001
FHS	0.1911	1.6175	1.1432	**0.9089**	**0.4454**	**0.5646**
EWMAn	12.4180	46.0859	43.7166	0.0020	0.0000	0.0000
GARCHn	3.8784	29.6775	33.0670	**0.1438**	0.0000	0.0000
AR1GARCHn	3.5660	31.1577	31.0721	**0.1681**	0.0000	0.0000
GARCHt	6.7761	6.5465	1.6415	0.0338	0.0379	**0.4401**
AR1GARCHt	7.9834	7.3244	2.2325	0.0185	0.0257	**0.3275**
GJRn	4.0211	28.1873	31.0721	**0.1339**	0.0000	0.0000
AR1GJRn	2.6501	29.6642	25.3755	**0.2658**	0.0000	0.0000
GJRt	6.5711	3.3276	2.2325	0.0374	**0.1894**	**0.3275**
AR1GJRt	3.8784	3.8788	2.2325	**0.1438**	**0.1438**	**0.3275**
EGARCHn	9.6639	26.4932	41.4996	0.0080	0.0000	0.0000
AR1EGARCHn	5.6401	30.9147	39.3253	**0.0596**	0.0000	0.0000
EGARCHt	9.6639	9.9108	6.4510	0.0080	0.0070	0.0397
AR1EGARCHt	10.8365	9.9108	8.6711	0.0044	0.0070	0.0131
GPDGARCHn	2.4619	1.5995	0.6803	**0.2920**	**0.4494**	**0.7117**

Tabela 11. Christoffersson test – donji rep

	Kritične vrednosti			*P* vrednosti (0.05)		
Nivo poverenja	0.95	0.99	0.995	0.95	0.99	0.995
Očekivane vrednosti	5.9914	5.9914	5.9914			
AN	12.2585	21.4251	43.7619	0.0022	0.0000	0.0000
HS	4.5021	4.0622	10.6214	**0.1053**	**0.1312**	0.0049
FHS	3.2278	0.6870	0.7419	**0.1991**	**0.7092**	**0.6900**
EWMAn	11.3688	9.0074	5.4496	0.0034	0.0111	**0.0656**
GARCHn	6.9099	1.0269	0.2111	0.0316	**0.5984**	**0.8998**
AR1GARCHn	9.1187	1.0269	0.2111	0.0105	**0.5984**	**0.8998**
GARCHt	8.2995	7.0615	9.5530	0.0158	0.0293	0.0084
AR1GARCHt	7.2369	8.1584	9.5530	0.0268	0.0169	0.0084
GJRn	3.8689	2.4654	0.3781	**0.1445**	**0.2915**	**0.8278**
AR1GJRn	4.5003	2.4654	0.6803	**0.1054**	**0.2915**	**0.7117**
GJRt	3.8689	9.3625	5.9960	**0.1445**	0.0093	0.0499
AR1GJRt	5.7831	8.1584	7.6303	**0.0555**	0.0169	0.0220
EGARCHn	6.7908	1.0269	0.6803	0.0335	**0.5984**	**0.7117**
AR1EGARCHn	4.4761	1.2778	0.6803	0.1067	**0.5279**	**0.7117**
EGARCHt	6.7747	6.0663	7.6303	0.0338	0.0482	0.0220
AR1EGARCHt	4.4385	7.0615	7.6303	**0.1087**	0.0293	0.0220
GPDGARCHn	2.7677	0.7583	1.1432	**0.2506**	**0.6844**	**0.5646**

Tabela 12. Christoffersen test – gornji rep

Christoffersen test za donji rep daje vrlo slične rezultate kao i Kupiec test. Tako, prema ovom testu, filtrirana istorijska simulacija, AR1 GJR sa t distribuiranim rezidualima i GPD GACRH daju najbolje rezultate za sva tri nivoa poverenja. Sa druge strane, jednostavni analitički model, istorijska simulacija, EWMA sa normalno distribuiranim rezidualima, kao i EGARCH sa t i EGARCH sa normalno distribuiranim rezidualima ne daju adekvatne procene VaR-a ni na jednom nivou poverenja. Preostale varijacije GARCH modela sa normalno distribuiranim rezidualima daju dobre procene samo na nivou poverenja od 0.95. Ovo ide u prilog empirijskim činjenicama o postojanju debelih repova prinosa, usled čega modeli koji se zasnivaju na pretpostavkama o normalnoj raspodeli prinosa potcenjuju vrednosti VaR-a. Što se tiče gornjeg repa distribucije prinosa, rezultati Christoferssen testa pokazuju da filtrirana istorijska simulacija, GJR i AR1 GJR sa normalno distribuiranim rezidualima i GPDGARCH daju adekvatne procene VaR-a za svaki nivo poverenja. Pored njih, GARCH i AR1 GARCH sa normalno distribuiranim rezidualima, kao i EGACRH i AR1 EGACRH sa normalno distribuiranim rezidualima daju dobre procene VaR-a za nivoe poverenja od 0.99 i 0.995. Iz ovoga možemo zaključiti da postoji asimetrija u repovima prinosa i to takva da je gornji rep distribucije prinosa tanji od donjeg, usled čega za njegovo modelovanje su adekvatni modeli koji pretpostavljaju normalnu distribuciju prinosa. Takođe, postojanje asimetrije u repovima prinosa zahteva modele za procenu koji posebno tretiraju rep raspodele, a ne modele simetričnih raspodela kao što su normalna i studentova.

Za razliku od testova koji su primenjeni u proceni VaR predviđanja i koji su dali adekvatne rezultate, testovi koji su korišćeni za back testiranje uslovnog gubitka su dali prilično neočekivane rezultate. Prvi test koji je korišćen za procenu predviđanja uslovnog gubitka je Wong-ov test. Ovaj test je do sada bio primenjivan samo na simuliranim podacima, gde je dao dobre rezultate i ovo mu je prva primena na empirijskim podacima. Osnovna pretpostavka ovog testa je da prinosi imaju normalnu raspodelu, usled čega je ovaj test primenjen samo na modele koji pretpostavljaju normalnu raspodelu prinosa, ili normalnu raspodelu reziduala (tabela 13). Takođe, period back testiranja je iznosio godinu dana, tako da broj prekoračenja u tabeli 13. predstavlja broj prekoračenja za period od godinu dana (250 radnih dana). Polje prosečan ES iz tabele 13. predstavlja uslovni gubitak koji je dobijen kao prosek prekoračenja vrednosti VaR-a u periodu od godinu dana. Rezultati back testiranja za donji rep dati su u tabeli 13.

GARCHn	0.95	Broj prekoračenja	16	17	6	10	10	12	21	26	16	15	17	11
		p-vrednost	0.000	0.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.000	0.000	0.000	0.000	1.000
		prosečan ES	-2.155	-2.098	-1.914	-1.082	-0.933	-1.034	-1.742	-2.889	-2.727	-2.180	-2.090	-1.471
	0.99	Broj prekoračenja	5	4	0	1	3	4	12	11	6	8	6	4
		p-vrednost	0.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.000	0.000	1.000	0.000	1.000
		prosečan ES	-2.810	-2.515	-2.326	-1.542	-1.061	-1.315	-2.122	-2.720	-3.141	-2.448	-2.919	-1.710
	0.995	Broj prekoračenja	2	2	0	0	0	3	9	9	2	5	6	3
		p-vrednost	0.000	0.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.000	1.000	0.000	1.000
		prosečan ES	-3.549	-2.993	-2.576	-2.576	-2.576	-1.415	-2.345	-2.815	-3.801	-2.200	-2.919	-1.765
AR1GARCHn	0.95	Broj prekoračenja	15	16	6	10	10	13	22	26	15	14	18	11
		p-vrednost	0.000	0.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.000	0.000	0.000	0.000	1.000
		prosečan ES	-2.193	-2.125	-1.916	-1.083	-0.935	-1.040	-1.738	-3.053	-2.744	-2.248	-2.161	-1.419
	0.99	Broj prekoračenja	4	3	0	1	3	4	12	11	6	9	6	4
		p-vrednost	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.000	0.000	1.000	0.000	1.000
		prosečan ES	-2.950	-2.356	-2.326	-1.546	-1.064	-1.316	-2.126	-2.728	-2.935	-2.310	-2.910	-1.711
	0.995	Broj prekoračenja	2	2	0	0	1	3	9	8	2	4	6	3
		p-vrednost	0.000	0.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.000	0.000	1.000	0.000	1.000
		prosečan ES	-3.555	-2.991	-2.326	-2.326	-1.153	-1.416	-2.350	-2.972	-3.809	-2.427	-2.910	-1.764
GJRn	0.95	Broj prekoračenja	15	14	6	9	9	12	20	25	18	14	15	8
		p-vrednost	0.000	1.000	0.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.000	0.000	0.000	0.000	1.000
		prosečan ES	-2.129	-2.061	-2.085	-1.111	-1.050	-1.154	-1.788	-2.884	-2.594	-2.387	-2.352	-1.598
	0.99	Broj prekoračenja	4	3	2	0	1	4	12	12	8	7	7	5
		p-vrednost	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.000	0.000	1.000	0.000	1.000
		prosečan ES	-2.654	-2.514	-2.148	-2.326	-1.462	-1.552	-2.200	-2.975	-3.083	-2.293	-2.889	-1.756
	0.995	Broj prekoračenja	2	2	2	0	0	4	9	8	4	5	5	1
		p-vrednost	1.000	0.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.000	1.000	0.000	1.000

		prosečan ES	-2.877	-3.167	-2.148	-2.576	-2.576	-1.552	-2.325	-2.782	-2.919	-2.243	-2.938	-2.210
AR1GJR	0.95	Broj prekoračenja	15	14	6	11	9	13	20	26	17	15	16	9
		p-vrednost	0.000	0.001	0.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.000	0.000	0.000	0.000	1.000
		prosečan ES	-2.135	-2.066	-2.097	-1.100	-1.051	-1.157	-1.797	-3.047	-2.582	-2.308	-2.368	-1.525
	0.99	Broj prekoračenja	4	3	2	0	1	4	12	11	8	9	7	5
		p-vrednost	0.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.000	1.000	1.000	1.000
		prosečan ES	-2.667	-2.511	-2.153	-2.326	-1.475	-1.555	-2.214	-2.536	-2.981	-2.410	-2.632	-1.760
	0.995	Broj prekoračenja	2	2	2	0	0	3	7	8	4	4	5	2
		p-vrednost	0.999	0.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.000	1.000	0.000	1.000
		prosečan ES	-2.888	-3.162	-2.153	-2.576	-2.576	-1.594	-2.365	-2.803	-2.940	-2.095	-2.921	-1.495
EGARCHn	0.95	Broj prekoračenja	14	15	7	11	10	14	21	31	21	17	16	8
		p-vrednost	0.000	0.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.000	0.000	0.000	0.000	1.000
		prosečan ES	-2.124	-2.130	-1.881	-1.035	-1.024	-1.098	-1.694	-3.157	-2.562	-2.138	-2.271	-1.563
	0.99	Broj prekoračenja	3	2	2	0	0	5	14	13	8	7	6	2
		p-vrednost	0.000	0.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.000	0.000	1.000	0.000	1.000
		prosečan ES	-2.713	-3.075	-2.193	-2.326	-2.326	-1.497	-1.969	-3.352	-2.853	-2.311	-2.891	-1.557
	0.995	Broj prekoračenja	2	2	2	0	0	3	13	12	4	4	5	1
		p-vrednost	1.000	0.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.000	1.000	1.000	1.000	1.000
		prosečan ES	-2.875	-3.075	-2.193	-2.576	-2.576	-1.564	-2.033	-3.464	-2.815	-2.216	-2.690	-2.226
AR1EGARCHn	0.95	Broj prekoračenja	14	15	7	12	8	13	22	33	19	16	17	8
		p-vrednost	0.000	0.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.000	0.000	0.000	0.000	1.000
		prosečan ES	-2.125	-2.133	-1.892	-1.062	-1.039	-1.131	-1.643	-3.437	-2.597	-2.201	-2.286	-1.565
	0.99	Broj prekoračenja	3	2	2	1	0	5	14	13	9	8	6	2
		p-vrednost	0.000	0.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.000	0.000	0.000	0.000	1.000
		prosečan ES	-2.719	-3.062	-2.206	-1.457	-2.326	-1.495	-1.977	-3.372	-2.747	-2.229	-2.887	-1.556
	0.995	Broj prekoračenja	2	2	2	0	0	4	12	11	5	3	4	1

		p-vrednost	1.000	0.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.000	1.000	1.000	0.000	1.000
		prosečan ES	-2.877	-3.062	-2.206	-2.576	-2.576	-1.536	-2.109	-3.210	-2.426	-2.042	-2.914	-2.232
GPDGARCH	0.95	Broj prekoračenja	12	16	7	7	10	10	18	23	13	13	8	6
		p-vrednost	0.000	0.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.000	0.000	0.000	0.000	1.000
		prosečan ES	-2.319	-2.123	-1.960	-1.069	-0.933	-1.123	-1.870	-3.068	-2.796	-2.314	-2.810	-1.654
	0.99	Broj prekoračenja	2	2	0	1	1	3	9	4	0	1	4	0
		p-vrednost	0.000	0.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.000	0.000	1.000	1.000	0.000	1.000
		prosečan ES	-3.549	-2.993	-2.326	-1.542	-1.147	-1.415	-2.345	-3.746	-2.326	-2.219	-3.277	-2.326
	0.995	Broj prekoračenja	2	1	0	0	0	3	3	3	0	0	2	0
		p-vrednost	0.000	0.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.000	1.000	1.000	0.000	1.000
		prosečan ES	-3.549	-3.437	-2.576	-2.576	-2.576	-1.415	-2.415	-4.211	-2.576	-2.576	-5.263	-2.576

Tabela 13. Wongow test za donji rep raspodele prinosa

	Nivo poverenja	250 dana
Očekivani ES	0.95	-2.0627
	0.99	-2.6652
	0.995	-2.8919

Tabela 14. Uslovni gubitak za normalnu raspodelu

Iz tabele se može primetiti da ovaj test za sve modele daje samo dve *p* vrednosti i to 0 ili 1, što je u praksi redak slučaj. Na osnovu detaljne analize formule iz Teoreme 4, došlo se do zaključka da je *p* vrednost pod jakim uticajem veličine uzorka i vrednosti uslovnog gubitka, a da, zbog toga, broj prekoračenja praktično uopšte ne utiče na *p* vrednost. To se takođe može videti iz tabele 13. gde na svim mestima gde je prosečan uslovni gubitak manji od očekivanog uslovnog gubitka (vrednosti su date u tabeli14.), *p* vrednost je 1, bez obzira na broj prekoračenja. Sa druge strane, svuda gde je uslovni gubitak veći od očekivanog, *p* vrednost je 0. Rezultati Wong-ovog back testiranja pokazuju da ovaj test nema moć da adekvatno razdvoji modele za procenu predviđanja uslovnog gubitka.

Sledeći test koji je primenjen za testiranje uslovnog gubitka je *bootstrap* test. Rezultati *bootstrap* back testiranja za donji rep dati su u tabeli 15., dok su za gornji rep dati u tabeli 16.

	***p*-vrednosti**		
Nivo poverenja	0.95	0.99	0.995
Očekivane vrednosti	0.05	0.05	0.05
AN	0.0001	0.0001	0.0001
FHS	**0.1396**	**0.4947**	**0.6803**
EWMAn	0.0001	0.0001	0.0005
GARCHn	0.0014	**0.0782**	**0.0888**
AR1GARCHn	0.0027	**0.1347**	**0.0759**
GARCHt	**1.0000**	**1.0000**	**0.9725**
AR1GARCHt	**1.0000**	**1.0000**	**0.9796**
GJRn	0.0001	0.0142	**0.0611**
AR1GJRn	0.0001	0.0253	0.0231
GJRt	**1.0000**	**0.9953**	**0.9110**
AR1GJRt	**1.0000**	**0.9968**	**0.9278**
EGARCHn	0.0001	0.0001	0.0002
AR1EGARCHn	0.0001	0.0001	0.0002
EGARCHt	**1.0000**	**0.9979**	**0.9162**
AR1EGARCHt	**1.0000**	**0.9975**	**0.9660**
GPDGARCHn	**0.1311**	**0.2105**	**0.3381**

Tabela 15. Bootstrap metod back testiranja – donji rep

		p-vrednosti	
Nivo poverenja	0.95	0.99	0.995
Očekivane vrednosti	0.05	0.05	0.05
AN	0.0001	0.0001	0.0000
FHS	**0.5472**	**0.1562**	**0.0768**
EWMAn	**0.1902**	**0.2932**	**0.2836**
GARCHn	**0.3261**	**0.3566**	**0.7217**
AR1GARCHn	**0.2258**	**0.3912**	**0.7876**
GARCHt	**1.0000**	**1.0000**	**0.9644**
AR1GARCHt	**1.0000**	**1.0000**	**0.9845**
GJRn	**0.5873**	**0.2609**	**0.5209**
AR1GJRn	**0.5539**	**0.2839**	**0.4162**
GJRt	**1.0000**	**1.0000**	**0.9974**
AR1GJRt	**1.0000**	**1.0000**	**0.9974**
EGARCHn	**0.6636**	**0.4721**	**0.2148**
AR1EGARCHn	**0.5890**	**0.3903**	**0.2767**
EGARCHt	**1.0000**	**1.0000**	**0.9966**
AR1EGARCHt	**1.0000**	**0.9999**	**0.9969**
GPDGARCHn	0.0320	0.0166	0.0138

Tabela 16. Bootstrap metod back testiranja – gornji rep

Rezultati iz tabele 15. pokazuju da za sve nivoe poverenja filtrirana istorijska simulacija, GPD GARCH, kao i sve varijacije GARCH modela sa t-distribuiranim rezidualima daju dobre procene uslovnog gubitka. Takođe, ovi rezultati su u saglasnosti sa brojem prekoračenja uslovnog gubitka datim u tabeli 7. i to na način da su sve metodologije koje su imale mali broj prekoračenja uslovnog gubitka ovim testom prihvaćene. Međutim, postavlja se pitanje da li su metodologije koje koriste studentovu raspodelu sa debelim repovima možda suviše konzervativne? Mali broj prekoračenja uslovnog gubitka ne implicira bezuslovno da je metodologija za procenu uslovnog gubitka dobra, već može da znači da model daje suviše široke granice za VaR i uslovni gubitak. Upravo ovo tvrđenje bootstrap test ne može adekvatno da testira. Ovaj test jednostavno ne daje dobru diferencijaciju različitih metodologija za procenu uslovnog gubitka, što se odlično vidi iz Tabele 16. gde je većina modela prihvaćena kao adekvatna, a što nije bio slučaj kad smo te iste modele testirali nekim od testova za VaR.

Imajući u vidu da Wong-ov test ne daje dobre rezultate, jer ne uzima dovoljno u obzir frekvenciju prekoračenja VaR-a, a da sa druge strane bootstrap test previše uzima u obzir frekvenciju prekoračenja VaR-a, kao treći test primenjen je Embrechet-ov V1 test.

		V1 test	
Nivo poverenja	0.95	0.99	0.995
AN	-0.0065	-0.0162	-0.0187
HS	-0.0018	-0.0162	-0.0206
FHS	-0.0001	-0.0081	-0.0110
EWMAn	0.0021	0.0023	0.0032
GARCHn	0.0012	0.0009	0.0012
AR1GARCHn	0.0012	0.0010	0.0015
GARCHt	-0.0054	-0.0076	-0.0086
AR1GARCHt	-0.0056	-0.0076	-0.0080
GJRn	0.0021	0.0010	0.0011
AR1GJRn	0.0017	0.0011	0.0014
GJRt	-0.0038	-0.0057	-0.0062
AR1GJRt	-0.0037	-0.0057	-0.0072
EGARCHn	0.0020	0.0029	0.0024
AR1EGARCHn	0.0018	0.0027	0.0028
EGARCHt	-0.0039	-0.0062	-0.0053
AR1EGARCHt	-0.0046	-0.0056	-0.0053
GPDGARCHn	**0.0000**	**0.0007**	**-0.0010**

Tabela17. V1 test – donji rep

	V1/broj prekoračenja VaR-a		
Nivo poverenja	0.95	0.99	0.995
AN	0.0063	0.0089	0.0087
HS	0.0021	0.0032	0.0010
FHS	**0.0001**	0.0004	0.0008
EWMAn	0.0006	-0.0001	-0.0002
GARCHn	0.0004	**0.0000**	-0.0009
AR1GARCHn	0.0006	-0.0002	-0.0007
GARCHt	-0.0054	-0.0115	-0.0075
AR1GARCHt	-0.0055	-0.0097	-0.0076
GJRn	**0.0001**	0.0004	**0.0000**
AR1GJRn	**0.0001**	0.0003	0.0002
GJRt	-0.0047	-0.0066	-0.0089
AR1GJRt	-0.0047	-0.0065	-0.0058
EGARCHn	**-0.0001**	-0.0006	0.0008
AR1EGARCHn	**0.0001**	-0.0001	0.0004
EGARCHt	-0.0046	-0.0058	-0.0080
AR1EGARCHt	-0.0047	-0.0059	-0.0080
GPDGARCHn	0.0007	0.0011	0.0011

Tabela18. V1 test – gornji rep

V1 test posmatra prosečno odstupanje svih prinosa koji su premašili VaR od procenjenog uslovnog gubitka i podrazumeva da, što je model za procenu uslovnog gubitka bolji, prosečno odstupanje će biti bliže nuli. Za donji rep iz tabele 17. se može videti da GPD GARCH model ima prosečno odstupanje najbliže 0 na svim nivoima poverenja. Sa druge strane, tabela 18. za gornji rep pokazuje da je odstupanje najbliže 0 za varijacije GARCH modela sa normalno distribuiranim rezidualima i za filtriranu istorijsku simulaciju, što se delimično slaže sa rezultatima Christoffersen-ovog testa. Pa ipak, postoje dva osnovna problema Embrechet-ovog V1 testa. Prvi je što je ovim testom data samo statistika, ali ne i njena raspodela usled čega nije moguće definisati kritičnu oblast za odbacivanje testa, tj. nije moguće statistički testirati hipotezu. Drugi problem, je taj što, sa velikim brojem prekoračenja VaR-a, vrednost ove statistike prirodno konvergira nuli, tako da se može desiti da model koji ima najveći broj prekoračenja ima vrednost statistike najbližu nuli. Ovaj problem se može izbeći tako što se posmatra prosta statistika koja obuhvata samo sumu odstupanja prinosa od uslovnog gubitka kada je VaR prekoračen:

$$S = \sum_{t=1}^{T}(r_t - (-\widehat{ES}_t)1_{(r_t<-\widehat{VaR}_t)} \tag{5.3}$$

Što je statistika S bliža nuli, to je model bolji. Takođe, ukoliko su dva modela po apsolutnoj vrednosti jednaka, prednost ima model čija je vrednost statistike S negativna.

		S	
Nivo poverenja	0.95	0.99	0.995
AN	-1.0816	-1.2318	-1.1608
HS	-0.3227	-0.8762	-0.7432
FHS	**-0.0138**	-0.3146	-0.2315
EWMAn	0.4654	0.1868	0.1617
GARCHn	0.2432	0.0657	0.0538
AR1GARCHn	0.2248	0.0691	0.0642
GARCHt	-1.1159	-0.3646	-0.1895
AR1GARCHt	-1.1715	-0.3735	-0.1840
GJRn	0.3763	0.0702	0.0476
AR1GJRn	0.3166	0.0745	0.0573
GJRt	-0.7467	-0.2456	-0.1415
AR1GJRt	-0.7198	-0.2496	-0.1653
EGARCHn	0.4044	0.1937	0.1183
AR1EGARCHn	0.3575	0.1880	0.1322
EGARCHt	-0.8206	-0.3206	-0.1491
AR1EGARCHt	-0.9847	-0.2935	-0.1579
GPDGARCHn	**-0.0003**	**0.0200**	**-0.0136**

Tabela 19. Suma odstupanja prekoračenja VaR-a od uslovnog gubitka-donji rep

		S	
Nivo poverenja	0.95	0.99	0.995
AN	0.8369	0.5347	0.4357
HS	0.3144	0.1314	0.0258
FHS	0.0176	0.0122	0.0166
EWMAn	0.1198	-0.0027	**-0.0059**
GARCHn	0.0509	**-0.0004**	-0.0142
AR1GARCHn	0.0789	**-0.0062**	**-0.0107**
GARCHt	-0.7411	-0.2299	-0.0450
AR1GARCHt	-0.7556	-0.1834	-0.0459
GJRn	**0.0089**	0.0111	**0.0005**
AR1GJRn	**0.0119**	**0.0090**	**0.0023**
GJRt	-0.7059	-0.1193	-0.0712
AR1GJRt	-0.6906	-0.12355	-0.04047
EGARCHn	-0.0225	-0.0165	0.0105
AR1EGARCHn	**0.0104**	**-0.0039**	**0.0062**
EGARCHt	-0.7334	-0.1214	-0.0561
AR1EGARCHt	-0.7522	-0.1177	-0.0562
GPDGARCHn	0.1138	0.0390	0.0225

Tabela 20. Suma odstupanja prekoračenja VaR-a od uslovnog gubitka-gornji rep

Rezultati S testa za donji rep pokazuju da GPD GARCH na svim nivoima poverenja ima sumu najbližu nuli. Sa druge strane, za gornji rep rezultati S testa pokazuju da je minimalna suma odstupanja prekoračenja VaR-a od uslovnog gubitka kod AR1GARCHn, AR1GJRn i AR1EGARCHn modela.

Konačno, kao najbolji test za rangiranje modela za procenu uslovnog gubitka, određen je normalizovani uslovni gubitak za sve modele i za oba repa raspodele i dobijeni su sledeći rezultati.

	Normalizovani uslovni gubitak		
Nivo poverenja	0.95	0.99	0.995
Očekivane vrednosti	1	1	1
AN	1.299	1.343	1.326
HS	1.098	1.055	1.015
FHS	**1.022**	**1.003**	**0.971**
EWMAn	1.124	1.111	1.133
GARCHn	1.053	1.033	1.038
AR1GARCHn	1.054	1.030	1.045
GARCHt	0.833	0.812	0.834
AR1GARCHt	0.830	0.809	0.834
GJRn	1.099	1.051	1.048
AR1GJRn	1.087	1.046	1.060
GJRt	0.887	0.865	0.882
AR1GJRt	0.890	0.863	0.875
EGARCHn	1.105	1.120	1.101
AR1EGARCHn	1.106	1.110	1.106
EGARCHt	0.895	0.883	0.905
AR1EGARCHt	0.889	0.888	0.890
GPDGARCHn	1.023	1.039	1.045

Tabela 21. Normalizovani uslovni gubitak za donji rep raspodele

	Normalizovani uslovni gubitak		
Nivo poverenja	0.95	0.99	0.995
Očekivane vrednosti	1	1	1
AN	1.274	1.305	1.274
HS	1.111	1.099	1.050
FHS	**0.999**	1.019	1.023
EWMAn	1.018	1.004	1.002
GARCHn	1.007	1.006	0.991
AR1GARCHn	1.011	1.004	0.987
GARCHt	0.831	0.809	0.836
AR1GARCHt	0.827	0.815	0.829
GJRn	0.996	1.012	**0.999**
AR1GJRn	0.997	1.010	1.002
GJRt	0.848	0.852	0.821
AR1GJRt	0.849	0.847	0.833
EGARCHn	0.994	**1.001**	1.024
AR1EGARCHn	0.997	1.005	1.014
EGARCHt	0.855	0.856	0.834
AR1EGARCHt	0.847	0.861	0.840
GPDGARCHn	1.028	1.042	1.039

Tabela 22. Normalizovani uslovni gubitak za gornji rep raspodele

Iz tabele 21. jasno se vidi, da za donji rep raspodele prinosa, srednji normalizovani uslovni gubitak najbliži jedinici ima FHS model i to za sve modele. Sa druge strane, GARCHn i AR1GARCHn, pored GPDGARCHn takođe pokazuju dobro rezultate, što je u slučaju prva dva modela u suprotnosti sa rezultatima Christofferson-ovog testa. Takođe, jasno se vidi da modeli koji pretpostavljaju studentovu raspodelu precenjuju vrednost uslovnog gubitka. Rezultati za gornji rep raspodele se razlikuju za različite nivoe poverenja. Tako npr. za nivo poverenja od 95% najbolji rezultat ima FHS model, za nivo poverenja od 99% najbolji rezultat ima EGARCHn, dok za 0.995% najbolji rezultat ima GJRn model. Za razliku od donjeg repa raspodele, ovde dosta modela (uglavnom oni koji pretpostavljaju normalnu raspodelu) pokazuje dobre rezultate, što se slaže sa rezultatima Christoffersen-ovog testa i što ukazuje na postojanje asimetrije u repovima.

Imajući u vidu da normalizovani gubitak nema poznatu raspodelu, na osnovu koje bismo mogli da odbacimo ili prihvatimo neki od modela za procenu uslovnog gubitka, kao i da testovi za uslovni gubitak ne daju dobre rezultate, nova metodologija za back testiranje uslovnog gubitka bi trebalo da obuhvati sledeća dva koraka:

1. Christoffersen-ov back test za VaR, koji bi bio preliminarni test, na osnovu kojeg bi se model prihvatio ili odbacio

2. Normalizovani uslovni gubitak, na osnovu kojeg bi se različiti modeli koji su prošli prvi korak rangirali, kako bi se izabrao najbolji model.

Sumarni rezultat ova dva koraka za donji rep raspodele prinosa S&P500 dat je u sledećoj tabeli.

	Christoffersen test *p* vrednosti			Normalizovani uslovni gubitak		
Nivo poverenja	0.95	0.99	0.995	0.95	0.99	0.995
AN	0.0020	0.0000	0.0000	1.299	1.343	1.326
HS	0.0005	0.0004	0.0001	1.098	1.055	1.015
FHS	**0.9089**	**0.4454**	**0.5646**	**1.022**	**1.003**	**0.971**
EWMAn	0.0020	0.0000	0.0000	1.124	1.111	1.133
GARCHn	**0.1438**	0.0000	0.0000	1.053	1.033	1.038
AR1GARCHn	**0.1681**	0.0000	0.0000	1.054	1.030	1.045
GARCHt	0.0338	0.0379	**0.4401**	0.833	0.812	0.834
AR1GARCHt	0.0185	0.0257	**0.3275**	0.830	0.809	0.834
GJRn	**0.1339**	0.0000	0.0000	1.099	1.051	1.048
AR1GJRn	**0.2658**	0.0000	0.0000	1.087	1.046	1.060
GJRt	0.0374	**0.1894**	**0.3275**	0.887	0.865	0.882
AR1GJRt	**0.1438**	**0.1438**	**0.3275**	0.890	0.863	0.875
EGARCHn	0.0080	0.0000	0.0000	1.105	1.120	1.101
AR1EGARCHn	**0.0596**	0.0000	0.0000	1.106	1.110	1.106
EGARCHt	0.0080	0.0070	0.0397	0.895	0.883	0.905
AR1EGARCHt	0.0044	0.0070	0.0131	0.889	0.888	0.890
GPDGARCHn	**0.2920**	**0.4494**	**0.7117**	**1.023**	**1.039**	**1.045**

Tabela 23. Sumarno back testiranje uslovnog gubitka za donji rep raspodele

Iz prethodne tabele se jasno vidi da FHS model daje i najbolju procenu VaR-a i najbolju procenu ES na svim nivoima poverenja, dok je sledeći model koji daje dobre rezultate u oba slučaja GPDGARCHn model. Sa druge strane, GARCH modeli koji se baziraju na studentovoj raspodeli i za koje Christoffersen-ov test daje povoljan ishod, za normalizovani uslovni gubitak daju rezultate značajno manje od 1, što znači da precenjuju vrednost uslovnog gubitka. Sumarni rezultati back testiranja iz dva koraka za gornji rep raspodele prinosa (tabela 23), pokazuju značajne razlike.

	Christoffersen test *p* vrednosti			Normalizovani uslovni gubitak		
Nivo poverenja	0.95	0.99	0.995	0.95	0.99	0.995
AN	0.0022	0.0000	0.0000	1.274	1.305	1.274
HS	**0.1053**	**0.1312**	0.0049	1.111	1.099	1.050
FHS	**0.1991**	**0.7092**	**0.6900**	**0.999**	1.019	1.023
EWMAn	0.0034	0.0111	**0.0656**	1.018	1.004	1.002
GARCHn	0.0316	**0.5984**	**0.8998**	1.007	1.006	0.991
AR1GARCHn	0.0105	**0.5984**	**0.8998**	1.011	1.004	0.987
GARCHt	0.0158	0.0293	0.0084	0.831	0.809	0.836
AR1GARCHt	0.0268	0.0169	0.0084	0.827	0.815	0.829
GJRn	**0.1445**	**0.2915**	**0.8278**	0.996	1.012	**0.999**
AR1GJRn	**0.1054**	**0.2915**	**0.7117**	0.997	1.010	1.002
GJRt	**0.1445**	0.0093	0.0499	0.848	0.852	0.821
AR1GJRt	**0.0555**	0.0169	0.0220	0.849	0.847	0.833
EGARCHn	0.0335	**0.5984**	**0.7117**	0.994	**1.001**	1.024
AR1EGARCHn	0.1067	**0.5279**	**0.7117**	0.997	1.005	1.014
EGARCHt	0.0338	0.0482	0.0220	0.855	0.856	0.834
AR1EGARCHt	**0.1087**	0.0293	0.0220	0.847	0.861	0.840
GPDGARCHn	**0.2506**	**0.6844**	**0.5646**	1.028	1.042	1.039

Tabela 24. Sumarni back testiranje uslovnog gubitka za gornji rep raspodele

Rezultati za gornji rep, po osnovu oba testa, pokazuju da različite varijacije autoregresionih GARCH modela sa normalno distribuiranim rezidualima daju najbolje procene uslovnog gubitka. Ovo je, pre svega, posledica postojanja asimetrije u raspodeli prinosa, pri čemu je donji rep deblji od gornjeg repa.

Iz prethodne empirijske analize može se zaključiti da je, za modelovanje VaR-a i uslovnog gubitka, od presudnog značaja adekvatno modelovanje volatilnosti prinosa. Takođe, u slučaju postojanja debelih repova i asimetrije, neophodno je koristiti modele koji to na adekvatan način uzimaju u obzir, kao što su modeli zasnovani na teoriji ekstremnih vrednosti i filtrirana istorijska simulacija. Ova dva zaključka poslužila sa kao osnova za

Monte-Carlo simulaciju, koja je upotrebljena za modelovanje kapitalnih zahteva za tržišne rizike baziranih na uslovnom gubitku.

5.3 Kapitalni zahtevi za tržišne rizike bazirani na uslovnom gubitku

Osnovni problem koji se javlja prilikom prevođenja kapitalnih zahteva za tržišne rizike zasnovanih na VaR metodologiji u kapitalne zahteve za tržišne rizike zasnovane na metodologiji uslovnog gubitka, je odnos između vrednosti jednodnevnog VaR-a i uslovnog gubitka. Ukoliko postoji pretpostavka o normalnoj raspodeli prinosa, ovaj odnos se može jednostavo analitički odrediti pomoću sledeće formule (Kerkhof i Melenberg, 2004):

$$-ES(x/x < -VaR) = \frac{f(-VaR)}{F(-VaR)} \tag{5.4}$$

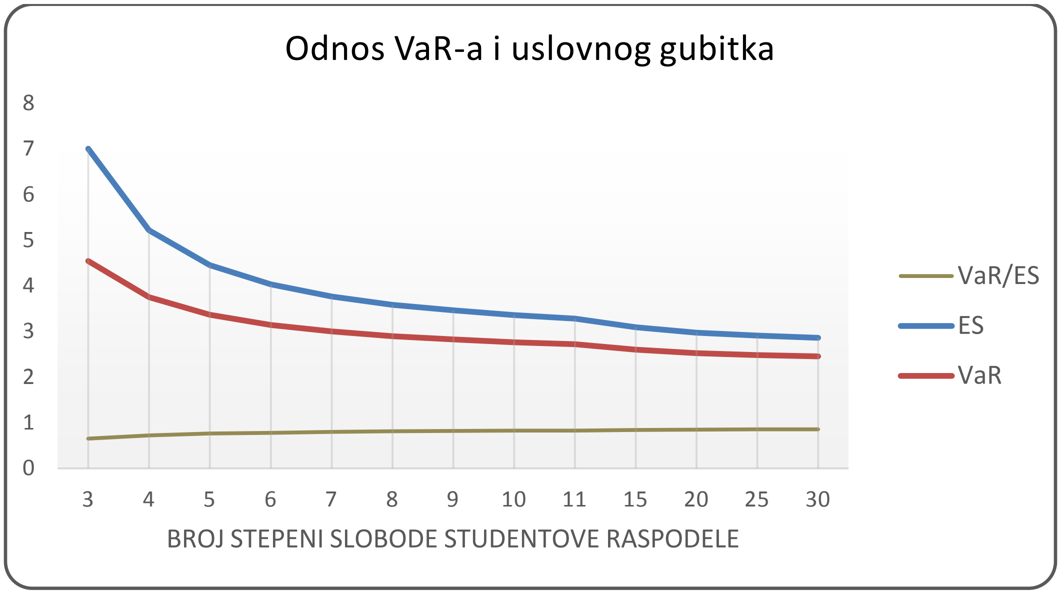
gde su x prinosi, a f i F funkcija gustine i funkcija raspodele standardizovane normalne raspodele, respektivno. Tako na primer, ukoliko posmatramo VaR na nivou poverenja od 99% i ako podrazumevamo da prinosi imaju normalnu distribuciju, VaR, kao kvantil normalne distribucije, iznosiće 2.33, dok će, na osnovu formule 5.4, uslovni gubitak biti 2.66. U ovom pojednostavljenom primeru, jednodnevni VaR bi iznosio 87% jednodnevnog uslovnog gubitka. Međutim, kao što je već objašnjeno, empirijske činjenice govore u prilog tome da normalna raspodela, koja podrazumeva konstantnu volatilnost, nije dobra za modelovanje prinosa. Takođe, rezultati empirijske analize različitih modela za procenu VaR-a i uslovnog gubitka su pokazali da samo modeli koji adekvatno modeluju volatilnost i repove raspodele daju dobre procene ovih parametara.

Imajući to u vidu, urađene su Monte Carlo simulacije koje volatilnost modeluju GARCH modelom, a debele repove studentovom distribucijom i, na osnovu njih, određen je odnos VaR-a i uslovnog gubitka. Takođe, urađene su simulacije odnosa VaR-a i uslovnog gubitka za samu studentovu raspodelu sa različitim brojem stepeni slobode.

Monte Carlo simulacija je statistički metod koji se koristi za „pravljenje” distribucija verovatnoća kroz generisanje velikog broja „pseudo” slučajnih uzoraka iz pretpostavljene raspodele (Esch et al., 2005). U praksi upravljanja rizicima, Monte Carlo simulacija se najčešće koristi za modelovanje distribucija prinosa/portfolija, a, na osnovu njih, i mera rizika cena kompleksnih finansijskih instrumenata. Sam postupak podrazumeva da se prvo definišu relevantni faktori rizika, odnosno modeli koji opisuju ponašanje tih faktora. Sledeći korak podrazumeva definisanje određene raspodele koja će najbolje opisati ponašanje budućih promena faktora rizika. U praksi se za modelovanje promena cena portfolija često koristi normalna distribucija, ili distribucija dobijena iz prošlih podataka.

U ovoj disertaciji Monte Carlo simulacija upotrebljena je za modelovanje jednodnevnog VaR-a i uslovnog gubitka na nivou poverenja 99%. Suštinski, simulacijom je dobijena jednodnevna volatilnost, pri čemu je pretpostavljeno da je ona GARCH (1,1), a da reziduali imaju normalnu distribuciju ili studentovu distribuciju. Takođe, celokupna vremenska serija prinosa S&P500 indeksa poslužila je kao uzorak (eng. „presample“) na osnovu kojeg su dobijeni parametri za simulaciju GARCH (1,1) modela sa normalno raspoređenim rezidualima. To isto, ponovljeno je i za studentovu raspodelu reziduala.

Za svaki od pretpostavljenih GARCH modela simulirano je 5000 putanja sa po 10000 opservacija, na osnovu kojih je dobijeno 5000 GARCH volatilnosti, a pomoću njih i 5000 VaR vrednosti i 5000 uslovnih gubitaka. Osnovni cilj ovako dobijenih VaR vrednosti i uslovnih gubitaka je da se ustanovi odnos između VaR-a i uslovnog gubitka za različite distribucije. Sam odnos VaR-a i uslovnog gubitka za različiti broj stepeni slobode studentove raspodele, najbolje se može videti sa sledeće slike.



Slika 24. Odnos VaR-a i uslovnog gubitka

Sa slike 24. se može videti da, što su deblji repovi posmatrane distribucije (studentova distribucija sa 3, 4, 5, 6, 7 stepeni slobode), to su veće razlike između VaR-a i uslovnog gubitka. Za broj stepeni slobode između 20 i 30 vrednosti VaR-a i uslovnog gubitka su najbliže. Kolike su tačno razlike u te dve mere rizika, najbolje se može videti iz sledeće tabele.

Simulirani modeli	Odnos VaR/ES
Presample GARCH(1,1) sa Normalnom raspodelom	0.84
Presample GARCH(1,1) sa t raspodelom	0.65
Normalna raspodela	0.87
t_3 raspodela	0.65
t_4 raspodela	0.72
t_5 raspodela	**0.76**
t_6 raspodela	0.78
t_7 raspodela	**0.80**
t_8 raspodela	0.81
t_9 raspodela	**0.82**
t_{10} raspodela	0.82
t_{11} raspodela	**0.83**
t_{15} raspodela	0.84
t_{20} raspodela	**0.85**
t_{25} raspodela	0.86
t_{30} raspodela	0.86

Tabela 26. Odnos VaR-a i uslovnog gubitka

Iz prethodne tabele se može videti da odnos VaR-a i uslovnog gubitka varira između vrednosti 0.65 i 0.87[44]. Dodatno, može se videti da su rezultati simulacija za GARCH sa normalnom raspodelom i rezultati simulacija za studentovu raspodelu za broj stepeni slobode veći od 15 bliski vrednosti dobijenoj analitičkim oblikom (datim jednačinom 5.4), a prema kojoj je odnos jednodnevnog VaR-a i jednodnevnog uslovnog gubitka sa nivoom poverenja od 99% 0.87, tj. VaR=0.87·ES. Osnovna svrha ovako dobijenih odnosa VaR-a i uslovnog gubitka je da omogući modelovanje novih kapitalnih zahteva, koji će se bazirati na uslovnom gubitku.

Sa obzirom da se kapitalni zahtev prema Bazelu 2.5 bazira na proceni VaR-a i stres VaR-a za period krize, određivanje novog kapitalnog zahteva zasnovanog na uslovnom gubitku,

[44] Ova vrednost dobijena je analitički za normalnu raspdelu i nivo poverenja od 99% (videti jednačinu 5.4).

podrazumeva određivanje odnosa VaR-a i uslovnog gubitka ES, kao i odnosa između stres VaR-a i stres uslovnog gubitka. Imajući u vidu, da je u praksi i dalje najčešće korišćena raspodela za procenu VaR-a i uslovnog gubitka – normalna raspodela, kao i da rezultati za studentovu raspodelu iznad 15 stepeni slobode daju sličan odnos VaR-a i uslovnog gubitka kao i za normalnu, multiplikativni faktor uz jednodnevni uslovni gubitak dobijen je iz odnosa VaR=0.87·ES i iznosi:

$$m_c = 0.87 \cdot (3 + k) = 2.6 + 0.87k \tag{5.5}$$

gde je k uvećanje multiplikativnog faktora, koje se određuje na osnovu broja prekoračenja VaR-a, a koje je dato u tabeli 2.

Sa druge strane, ako se uzme u obzir da se prema Bazelu 2.5, stres VaR određuje na osnovu izabranog jednogodišnjeg kriznog perioda[45] - za njegovu procenu modeli bazirani na normalnoj raspodeli potcenjuju njegovu vrednost, usled čega treba izabrati model koji adekvatno opisuje debele repove. Pošto studentova raspodela za broj stepeni slobode do 10 spada u modele raspodela sa debelim repovima, za procenu odnosa stres VaR-a i stres uslovnog gubitka uzeta je srednja vrednost pondera datih u tabeli 22 (od 4 do 10 stepeni slobode) i dobijen odnos stres VaR=0.79·stres ES. Na osnovu ovog odnosa dobijen je multiplikativni faktor za stres uslovni gubitak:

$$m_s = 0.79 \cdot (3 + k) = 2.4 + 0.79k \tag{5.6}$$

U prilog izbora ovakvog pondera idu i empirijski rezultati dobijeni prilikom procene VaR-a i ES indeksa S&P500 GARCH modelom sa studentovom raspodelom, koji su pokazali da je u periodima krize broj stepeni slobode varirao između 5 i 8. Na osnovu ovako dobijenih multiplikativnih faktora, novi kapitalni zahtev za tržišne rizike možemo izraziti kao:

[45] Period krize ili period stresa podrazmeva da ponašanje prinosa karakterišu ekstremni događaji, tj. događaji koji pripadaju repu raspodele, usled čega se oni bolje modeluju raspodelama sa debelim repovima.

$$MRC_t = m_c \cdot max(ES_{t-1}, \frac{1}{60}\sum_{i=1}^{60} ES_{t-i}) + m_s \cdot max(sES_{t-1}, \frac{1}{60}\sum_{i=1}^{60} sES_{t-i}) \quad (5.7)$$

Gde je MRC kapitalni zahtev za tržišni rizik u trenutku t, ES_{t-1} jednodnevni uslovni gubitak za prethodni dan, sES_{t-1} stres jednodnevni uslovni gubitak za t-1 dan izabranog perioda stresa, m_c multiplikativni faktor uz jednodnevni uslovni gubitak ES_{t-i} koji iznosi (2.6+0.87k), m_s multiplikativni faktor uz jednodnevni stres uslovni gubitak sES_{t-i} koji iznosi (2.4+0.79k), a k je uvećanje multiplikativnog faktora, koje se u oba slučaja menja u skladu sa zahtevima koji su postavili supervizori, a koje odražava rezultate back testiranja i samim tim performansi korišćenog internog modela (Tabela 2).

Za razliku od Bazel 2.5 standarda, u ovako definisanom kapitalnom zahtevu za tržišne rizike, javlja se isključivo jednodnevni uslovni gubitak iz razloga što se samo back testiranje sprovodi poređenjem jednodnevnih prinosa sa procenjenim jednodnevnim VaR-om. Na taj način se izbegava nedoslednost u kapitalnim zahtevima definisanim Bazel-om koji uključuju destodnevni VaR, a njegovu preciznost testiraju jednodnevnim VaR-om. Takođe, mišljenja sam da se Bazelski multiplikativni faktor, koji iznosi 3+k, implicitno zasniva na pravilu kvadratnog korena vremena (*eng. square root of time),* koje omogućava da se pod pretpostavkama o normalnoj raspodeli prinosa i iid. svojstvu, desetodnevni VaR dobija kao $\sqrt{10}\cdot$jednodnevni VaR. Samim tim, vrednost novog kapitalnog zahteva nije ugrožena (u smislu njenog potencijalnog smanjena), jer uz jednodnevni uslovni gubitak i dalje stoji ponder, koji je dobijen modifikacijom Bazelskog na gore opisan način.

Ovako definisani kapitalni zahtevi mogu značajno da pomognu finansijskim institucijama prilikom određivanja ekonomskog kapitala, odnosno interne procene kapitala neophodnog za pokriće rizika, propisane drugim stubom Bazela, jer se baziraju na realnijim pretpostavkama. Pre svega, kapitalna izdvajanja se zasnivaju na uslovnom gubitku, koji je za razliku od VaR-a koherentna mera rizika. Takođe, ovako definisan kapitalni zahtev omogućava korišćenje različitih modela za periode stresa i stabilne periode, što se vidi kroz različito definisane multiplikativne faktore. Konačno, pokazuje doslednost u smislu back testiranja i vrednosti samog kapitalnog zahteva, jer se u oba slučaja koristi jednodnevna mera rizika.

Na kraju, moram da napomenem, da je Bazelski komitet u decembru 2014. (BIS, 2014) godine izdao novi predlog za računanje kapitalnih zahteva baziranih na uslovnom gubitku, a koji je usvojen u januaru 2016. godine u vidu novog dokumenta pod nazivom „Minimalni kapitalni zahtevi za upravljenje tržišnim rizikom“ (BIS, 2016). Ovaj dokument u mnogome menja postojeće kapitalne zahteve, a i samo određivanje uslovnog gubitka. Sam uslovni gubitak se određuje kao zbir skaliranih uslovnih gubitaka za različite horizonte likvidnosti, pri čemu je desetodnevni uslovni gubitak osnov za dalje skaliranje. Sami horizonti likvidnosti su definisani za svaku klasu aktive posebno. Za obračun kapitalnih zahteva, uslovni gubitak se određuje kao proizvod uslovnog gubitka izračunatog na osnovu perioda stresa (od 12 meseci) i redukovanog skupa faktora rizika i uslovnog gubitka izarčunatog na osnovu poslednjih 12 meseci i svih faktora rizika. Ovaj proizvod se dalje skalira uslovnim gubitkom izarčunatim na osnovu poslednjih 12 meseci i redukovanog skupa faktora rizika. Takođe, umesto nivoa poverenja od 99%, uslovni gubitak se računa na osnovu nivoa poverenja od 97.5%. Intuicija za ovakav prelazak je to što su 99% VaR i 97.5% uslovni gubitak jednaki ukoliko prinosi imaju normalnu raspodelu. Back testiranje validnosti modela i dalje podrazumeva back testiranje VaR-a samo sada na dva nivoa poverenja - 97.5% i 99%, pri čemu broj prekoračenja VaR-a sa nivoom poverenja od 99% služi kao osnov za povećanje kapitalnih zahteva.

6 Zaključak

Dosadašnja praksa u upravljanju tržišnim rizicima u finansijskim institucijama se prevashodno zasniva na proceni VaR parametra. Velikoj popularnosti ove mere doprineli su njena jednostavnost, kao i regulatorni zahtevi narodnih banaka koji slede Bazelske standarde, a koji su do sada propisivali izdvajanje kapitala za pokriće tržišnih rizika zasnovano na ovoj meri. Pa ipak, svetska ekonomska kriza je dovela do značajnog preispitivanja adekvatnosti ove mere i uopšte njene mogućnosti da predvidi ekstremno rizične događaje. Nakon toga, pod pritiskom akademske i stručne javnosti, Bazelski komitet je doneo nove smernice (BIS, 2011, 2012), koje preporučuju upotrebu uslovnog gubitka umesto VaR-a za procenu tržišnog rizika. Kao i do sad, ove smernice predstavljaju samo okvir u kojem se izražava tendencija prelaska na novu meru rizika, ali ne i način na koji to treba da se desi. Osnovni cilj ove doktorske disertacije bio je upravo da omogući prelazak sa metodologije zasnovane na VaR meri na metodologiju zasnovanu na uslovnom gubitku. Sa tim u vezi urađena je analiza postojeće regulative, kao i teorijska analiza modela za procenu uslovnog gubitka. Nakon toga, svi modeli (njih 17) su primenjeni na empirijsku seriju prinosa S&P500 indeksa, koji je uzet kao dobar primer za tržišni portfolio. Performanse različitih modela su testirane i back testovima za VaR i back testovima za uslovni gubitak. Rezultati back testiranja VaR-a, ukazuju na to da je za modelovanje VaR-a na višim nivoima poverenja, neophodno uzeti u obzir i klasterovanje volatilnosti i debele repove prinosa. Modeli koji najčešće daju dobre rezultate pri back testiranju su filtrirana istorijska simulacija, GPD modeli sa GARCH modelovanim rezidualima, i GARCH modeli sa pretpostavkom o studentovoj raspodeli prinosa. Za razliku od modela za back testiranje VaR-a, analizirani modeli za back testiranje uslovnog gubitka nisu u stanju da adekvatno rangiraju performanse različitih modela za procenu uslovnog gubitka. Među modelima za back test uslovnog gubitka, po prvi put je na realnim podacima primenjen Wongov[46] (2008) test za back testiranje i pokazalo se da ne daje ni približno dobre rezultate da bi mogao da se primeni u praksi. Kao zaključak, nameće se činjenica da back testiranje uslovnog gubitka, ne može da se posmatra odvojeno od back testiranja VaR-a, tj. da je neophodno sprovesti i jedan i drugi test da bi se došlo do odgovarajućeg modela.

Konačno, da bi se dobili novi kapitalni zahtevi zasnovani na uslovnom gubitku, urađene su Monte Carlo simulacije za normalnu i studentovu raspodelu sa različitim brojem stepeni slobode. Na osnovu njih je definisan odnos uslovnog gubitka i VaR-a koji je uključen u nove multiplikativne faktore za nove kapitalne zahteve za tržišne rizike. Takođe, sami kapitalni zahtevi su konstruisani tako da prave razliku između perioda krize i relativno stabilnih perioda, kao i da budu dosledni u smislu korišćenja jednodnevne mere rizika za procenu i jednodnevne mere rizika za back testiranje.

Rezultat ove disertacije je metodološki okvir koji predlaže najadekvatnije modele za procenu uslovnog gubitka, najadekvatniji model za back testiranje uslovnog gubitka i, konačno, sam kapitalni zahtev za upravljanje tržišnim rizikom finansijskih institucija. Njime je bankama, praktično, trasiran pun tranzicije od VaR-a ka uslovnom gubitku.

---

[46] Ovo je jedan od retkih testova koji Bazelski komitet eksplicitno pominje za back testiranje uslovnog gubitka u dokumentu „*Messages from the academic literature on risk measurement for the trading book*“.

7 Literatura

1. Acerbi, C., Nordio, C., Sirtori, C., Expected Shortfall as a Tool for Financial Risk Management, http://arxiv.org/pdf/cond-mat/0102304v1.pdf, 2001.
2. Acerbi, C., Tassche, D., Expected Shortfall: A Natural Coherent Alternative to Value at Risk, Economic Notes 31 (2): 379-388, 2002.
3. Acerbi, C., Tassche, D., On the coherence of expected shortfall, Journal of Banking and Finance 26 (7):1487-1503, 2002.
4. Allen, D. E., Singh, A. K., and Powell, R. J., EVT and tail-risk modelling: Evidence from market indices and volatility series. The North American Journal of Economics and Finance 26, 355–69, 2013.
5. Alexander, C., Market Models, John Wiley & Sons Ltd, Chichester, 2005.
6. Alexander, C., & Sheedy, E., *Volume III: Risk Management Practices.* PRMIA, 2004.
7. Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J.M. and Heath, D., Thinking coherently, Risk 10: 68-71, 1997.
8. Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J.M. and Heath, D., Coherent Measures of Risk, Mathematical Finance 9 (3): 203-228, 1999.
9. Ayusuk, A., and Sriboonchitta, S.,Risk Analysis in Asian Emerging Markets using Canonical Vine Copula and Extreme Value Theory. Thai Journal of Mathematics, Special Issue on Copula Mathematics and Econometrics, 59–72, 2014.
10. Boudoukh, J., Richardson, M., and Whitelaw, R., The Best of Both Worlds, Risk 11, (May): 64-67, 1998.
11. Balkema, A.A., De Haan, L., Residual life time at great age, Annals of Probability 2, 792-804, 1974.

12. Bank for International Settlement (BIS), Basel Committee on Banking Supervision, Amendment to the Capital Accord to Incorporate Market Risks, 1996.
13. Bank for International Settlement (BIS), Basel Committee on Banking Supervision, Analysis of the trading book quantitative impact study, 2009.
14. Bank for International Settlements (BIS), Consultative Document: Fundamental Review of the Trading Book: Outstanding Issues, December 2014.
15. Bank for International Settlement (BIS), Basel Committee on Banking Supervision, Fundamental review of the trading book, 2012.
16. Bank for International Settlement (BIS), Basel Committee on Banking Supervision, Basel III: Global regulatory framework for more resilient banks and banking systems, 2010.
17. Bank for International Settlement (BIS), Basel Committee on Banking Supervision, Guidelines for computing capital for incremental risk in the trading book , 2009.
18. Bank for International Settlement (BIS), Basel Committee on Banking Supervision, Global systematically important banks: assessment methodology and the additional loss absorbency requirement, 2011.
19. Bank for International Settlement (BIS), Basel Committee on Banking Supervision, International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards, 1988.
20. Bank for International Settlement (BIS), Basel Committee on Banking Supervision, International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards: A Revised Framework, 2006.
21. Bank for International Settlement (BIS), Basel Committee on Banking Supervision, Messages from the academic literature on risk measurement for the trading book, 2011.

22. Bank for International Settlement (BIS), Basel Committee on Banking Supervision, Standards: Minimum capital requirements for market risk, 2016.
23. Bank for International Settlement (BIS), Basel Committee on Banking Supervision, Revisions to the Basel II market risk framework, 2009.
24. Bank for International Settlement (BIS), Basel Committee on Banking Supervision, Basel III: The liquidity coverage ratio and liquidity risk monitoring tools, 2013.
25. Barone-Adesi, G., Giannopoulos, K., Vosper, L., Don’t look back, Risk, 11, 100-104, 1998.
26. Barone-Adesi, G., Giannopoulos, K., Vosper, L., VaR without Correlations for Portfolios of Derivative Securities, The Journal of Futures Markets, 19, 583-602, 1999.
27. Bekiros, S.D. and Georgoutsos, D.A., Estimation of Value-at-Risk by extreme value and conventional methods: a comparative evaluation of their predictive performance, Journal of International Financial Markets, Institutions and Money 15: 209-228, 2005.
28. 11. Berkowitz, J. and J. O’Brien, How accurate are value-at-risk models at commercial banks?, Journal of Finance, 57, 1093-1111, 2002.
29. Berkowitz, J., Testing Density Forecasts With Applications to Risk Management, Journal of Business and Economic Statistics, 19, 465-474, 2001.
30. Best, P., Implementing Value at Risk, John Wiley & Sons Ltd, 1999.
31. Black, F., Studies in stock price volatility changes, Proceedings of the 1976 Meeting of the Business and Economic Statistics Section, American Statistical Association, 177-181.
32. Bogojević Arsić, V., Upravljanje finansijskim rizikom, Beograd, 2009.
33. Bollerslev, T., Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity, Journal of Econometrics 31(3): 307–27, 1986.

34. Božović, M., An efficient method for market risk management under multivariate extreme value theory approach, working paper, Universitat Pompeu Fabra, 2010. Available at http://www.econ.upf.edu/~bozovic/papers/MBozovic-mvEVT.pdf
35. Brooks, C., Introductory Econometrics for Finance, Cambridge University Press, 2002.
36. Cai, Z., Wang, X., Nonparametric estimation of conditional VaR and expected shortfall, Journal of Econometrics, 147, 120-130, 2008.
37. Chen, S.X., Nonparametric Estimation of Expected Shortfall, Journal of Financial Econometrics, 6(1), 87-107, 2008.
38. Christoffersen, P., Evaluating Interval Forecasts, International Economic Review, 39(4), 841-862, 1998.
39. Chunhachinda, P., Dandapani, K., Hamid, S., Prakash, A.J., Portfolio selection and skewness: Evidence from international stock markets. Journal of Banking and Finance 21, 143-167, 1997.
40. Cintioli, D., and Marchioro, M., Historical-simulation method, Risk International, 2005.
41. Coles, S., An Introduction to Statistical Modeling of Extreme Values, Springer, 2001.
42. Crotty, J., Structural causes of the global financial crises: a critical assessment of the 'new financial architecture', Cambridge Journal of Economics, 33, 563-580, 2009.
43. Crouhy, M., D. Galai and R. Mark, The Essentials of Risk Management, The McGraw-Hill Companies Inc, 2006.
44. Da Silva, L. C. A., and B. V. de Melo Mendez, Value-at-Risk and Extreme Returns in Asian Stock Markets, International Journal of Business, 8(1), 17-40, 2003.
45. Daníelsson, J.. Financial Risk Forecasting. Chichester, UK: Wiley, 2011.

46. Danielsson, J., and de Vries, C. G., Value at Risk and Extreme Returns, London School of Economics, Financial Markets Group, Discussion Paper no. 273, 1997.
47. Danielsson, J., and C. de Vries, Value at Risk and Extreme Returns, Annales d'economie et de statistique 60,2000.
48. Danielsson, J., De Vries, C.G., Jorgensen, B.N., The Value of Value at Risk: Statistical, Financial, and Regulatory Considerations, Economic Policy Review, Oct (), 107-108, Federal Reserve Bank of New York.
49. Danıelsson, J., Embrechts, P., Goodhart, C., Keating, C., Muennich, F., Renault, O., Shin, H.S., 2001a. An academic response to Basel II, LSE Financial Markets Group and ESRC Research Centre, Sepcial Paper Series, 2001.
50. Danielsson, J., The emperor has no clothes: Limits to risk modeling, Journal of Banking and Finance 26: 1273-1296, 2002.
51. De Jesús, R. and Ortiz, E., Risk in Emerging Stock Markets from Brazil and Mexico: Extreme Value Theory and Alternative Value at Risk Models, Frontiers in Finance and Economics 8 (2), 49–88, 2013.
52. Diebold, F.X., Gunther, T., and Tay, A., Evaluating Density Forecasts with Applications to Financial Risk Management, International Economic Review, 39, 863-883, 1998.
53. Dowd, K., Beyond Value-at-Risk, John Wiley & Sons Ltd, Chichester, 1999.
54. Duffie D., and Pan J., An overview of Value-at-Risk, Journal of Derivatives, 7, 7 –49, 1997
55. Efron, B., Tibshirani, R., An Introduction to the Bootstrap,p:224,London: Chapman and Hall, 1993.
56. Embrechts, P., Kaufmann, R., Patie, P., Strategic long-term financial risks: Single risk factors, Computational Optimization and Applications, Vol. 32 (1–2), 61–90, 2005.
57. Embrechts, P., Kluppelberg, C. and Mikosch, T., Modeling Extremal Events for Insurance and Finance,Springer, Berlin, 1997.

58. Embrechts, P., McNeil, A., Straumann, D., Correlation and dependency in risk management: properties and pitfalls. In Dempster, M., Moffat, H.K. (Eds.), Risk Management: Value at Risk and Beyond. Cambridge University Press, 2001.
59. Embrechts, P., Kauffman, R., Patie, P., Strategic Long-Term Financial Risks:Single Risk Factors, Computational Optimization and Applications, 32, 61-90, 2005.
60. Engle, R. F., Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of united kingdom inflation, Econometrica, 50 (4), 987–1007, 1982.
61. Engle, R., Risk and Volatility: Econometric Models and Financial Practice, The American Economic Review, Vol. 94, No. 3: 405-420, 2004.
62. Ergen, I., VaR Prediction for Emerging Stock Markets: GARCH Filtered Skewed t Distribution and GARCH Filtered EVT Method, working paper, Universitat Pompeu Fabra, 2010. Available at: https://www.richmondfed.org/~/media/richmondfedorg/banking/economists/pdf/ie_var_prediction.pdf
63. Ergen, I., Tail dependence and diversification benefits in emerging market stocks: an extreme value theory approach, Applied Economics 46 (19), 2215–27, 2014.
64. Esch, L., Kieffer, R. and Lopez, T., Asset and Risk Management, John Willey & Sons Ltd, Chichester, 2005.
65. Financial Service Authority, The Prudential Regime for Trading Activities: A Fundamental Review, 2010.
66. Financial Service Authority, The Turner Review: a regulatory response to the global banking crisis, 2009.
67. Finger, C, IRC Comments, RskMetrics Group Research Monthly, February, 2009.
68. Fisher, R.A., Tippet, L.H.C.m Limiting forms of the frequency distribution of largest and smallest member of a sample, Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 24, 180-190, 1928.

69. Gallati, R., Risk Management and Capital Adequacy, The McGraw-Hill Companies Inc, 2003.
70. Gençay, R and Selçuk, F., Extreme Value Theory and Value-at-Risk: Relative performance in emerging markets, International Journal of Forecasting20: 287–303, 2004.
71. Gilli, M., and Këllezi, E., An application of extreme value theory for measuring financial risk, Computational Economics27(1), 1-23, 2006.
72. Glosten, L.R., Jagannathan, R and Runkle D. E., On the Relation between the Expected Value and the Volatility of the Nominal Excess Return on Stocks, The Journal of Finance, 48, 1779-1801, 1993.
73. Gnedenko, B. V., Sur la distribution limite du terme maximum d'une serie aleatoire. Annals of Mathematics, 44, 423–53, 1943.
74. Goorbergh, R. V., Vlaar, P., Value-at-Risk Analysis of Stock Returns Historical Simulation, Variance Techniques or Tail Index Estimation?, 1999, http://www.dnb.nl/binaries/sr040_tcm46-146818.pdf
75. Gourieroux, C., Liu, W., Converting Tail-VaR to VaR: An Econometric Study,Journal of Financial Econometrics, 10(2), 233–264, 2012.
76. Harmantzis, F.C., Miao, L. and Chien, Y., Empirical study of value-at-risk and expected shortfall models with heavy tails, The Journal of Risk Finance 7: 117 – 135, 2006.
77. Hsu, C.P., Huang, C.W., and Chiou, W.J.P., Effectiveness of copula-extreme value theory in estimating value-at-risk: empirical evidence from Asian emerging markets, Review of Quantitative Finance and Accounting 39 (4), 447–68, 2012.
78. Hill, B. M. , A simple general approach to inference about the tail of a distribution, The Annals of Statistics 3, 1163–l174, 1975
79. Hull, J., Options, Futures, and Other Derivatives, 6th Ed., Pearson Education, Inc., New Jersey, 2006

80. Innui, K., Kijima, M., On the significance of expected shortfall as a coherent risk measure, Journal of Banking and Finance 29, 853–864, 2005.
81. Jadhav, D., Ramanthan, T.V., Naik-Nimbalkar, U.V., Modified Estimators of the Expected Shortfall, Journal of Emerging Market Finance, 8 (2), 87-107, 2009.
82. Jenkinson, A.F., The frequency distribution of the annual maximum (or minimum) values of meteorological events, Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society 81:158-172, 1955.
83. Jondeau, E. and Rockinger, M., Testing for differences in the tails of stock-market return, Journal of Empirical Finance, 10(5), 559 – 581, 2003.
84. Johnson, G., A Fundamental Review of Capital Charges Associated with Trading Activities, Bank of Canada, Financial System Review, 43-49, 2011.
85. Jorion, P., Value at Risk: The New Benchmark for Controlling Market Risk, McGraw-Hill Inc., Chicago, 1997.
86. Kerkhof, J., Melenberg, B., Backtesting for risk-based regulatory capital, Journal of Banking and Finance, 28, 1845-1865, 2004.
87. Khindanova, I., Rachev, S. T., Value at Risk: Recent Advances, Handbook on Analytic-Computational Methods in Applied Mathematics, CRC Press LLC, 801-858, 2000.
88. Kim, J., Heavy tails in foreign exchange markets: Evidence from Asian countries, Journal of Finance and Economics 3 (1), 1–14, 2015.
89. Kuester, K., Mitnik, S., Paolella, M.S., Value-at-Risk Prediction: A Comparison of Alternative Strategies. Journal of Financial Econometrics, 4(1), 53-89, 2006.
90. Kupiec, P., Techniques for verifying the accuracy of risk management models, Journal of Derivatives, 3: 73-84, 1995.
91. Lai, L.H., and P.H. Wu, Risk Analysis of Rice Losses Caused by Typhoon for Taiwan. Contemporary Management Research, 6 (2): 141–158, 2010.
92. Lai, T.Y., Portfolio selection with skewness: A multiple-objective approach. Review of Quantitative Finance and Accounting 1, 293-305, 1991.

93. Lee, D. X. and H. J. Turtle, Semiparametric ARCH models: an estimating function approach, Journal of Business and Economic Statistics, 18, 174-86, 2000.
94. Longin, F. M.,From Value-at-Risk to stress testing: The extreme value approach, Journal of Banking & Finance, 24:1097–1130, 2000.
95. Longin, F., The choice of the distribution of asset returns: How extreme value theory can help?, Journal of Banking and Finance 29: 1017-1035, 2005.
96. Lugannani, R., Rice, S.O., Saddlepoint approximation for the distribution of the sum of independent random variables, Advanced Applied Probability 12, 475–490, 1980.
97. Mandelbrot, B., The variation of certain speculative prices, Journal of Business, 63, 383-408, 1963.
98. Manganelli, S., Engle, R., Value-at-risk models in finance, European Central Bank: Working paper no.75, 2001.
99. McNeil, A.J., Estimating the Tails of Loss Severity Distribution Using Extreme Value Theory, Astin Bulletine, 27(1), 1117 –1137, 1997.
100. McNeil, A.J., Extreme value theory for risk managers, Internal Modeling CAD II, Risk Books: 93-113, 1999.
101. McNeil, A., and Frey, R., Estimation of Tail Related Risk Measure for Heteroscedastic Financial Time Series: An Extreme Value Approach, Journal of Empirical Finance, 7, 271-300, 2000.
102. McNeil, A. J., Frey, R., and Embrechts, P. Quantitative Risk Management Concepts,Techniques and Tools, Princeton University Press, Princeton, 2005.
103. Narodna banka Srbije, Odluka o adekvatnosti kapitala, Službeni glasnik RS, br. 46/2011, 6-2013 i 51/2014.
104. Neftçi, S., “Value-at-Risk Calculations, Extreme Events and Tail Estimation”, Journal of Derivatives, 7, 23-38, 2000.

105. Nelson, D. B., Conditional heteroskedasticity in asset returns: A new approach, *Econometrica*59, 347-370, 1991.

106. Nyström, K., and Skoglund, J., A Framework for Scenario-Based Risk Management, Working Paper, Swedbank, 2002.

107. Nyström, K., and Skoglund, J., Univariate Extreme Value Theory, GARCH and Measures of Risk, Working Paper, Swedbank, 2002.

108. Pallotta, M., Zenti, R., Risk Analysis For Asset Managers: Historical Simulation, The Bootstrap Approach And Value At Risk Calculation, 2000.

109. Perignon, C., Smith, D.R., The Level and Quality of Value-at-Risk Disclosure by Commercial Banks, Journal of Banking and Finance, 34, 362-377, 2010.

110. Pickands, J., Statistical inference using extreme order statistics, Annals of Statistics 3, 119-131, 1975.

111. RiskMetrics Group, RiskMetrics™ Technical Document, 1996.

112. Rocco, M., Extreme value theory for finance: a survey, Questioni di Economia e Finanza, Banca d'Italia, 99, 2011.

113. Rockafellar, R.T., Uryasev, S., Optimization of conditional Value-at-Risk, Journal of Risk, 2, 21–41, 2000.

114. Smith, R., Estimating tails of probability distributions, The Annals of Statistics 15, 1174–1207, 1987.

115. Smithson, C. and Minthon, L., Value-at-Risk, Risk, 38-39, September, 2006.

116. Taleb, N. N., The Black Swan – The Impact of the Highly Improbable, Penguin Books, Ltd., England, 2007.

117. Tasche, D., Expected Shortfall and Beyond, Journal of Banking and Finance, 26, 1519-1533, 2002.

118. Tett, G.,Lost through destructive creation, Financial Times, 10 March, 2009.

119. Totić, S., Božović, M., Tail risk in emerging markets of Southeastern Europe, Applied Economics, 48, 1785-1798, 2015.

120. Tsay, R., Analysis of Financial Time Series, John Wiley & Sons, Inc, New York, 2002.

121. Uppal, J. Y., and Mudakkar,S. R., Challenges in the Application of Extreme Value Theory in Emerging Markets: A Case Study of Pakistan. In Risk Management Post Financial Crisis: A Period of Monetary Easing (Contemporary Studies in Economic and Financial Analysis, Volume 96), edited by J. A. Batten and N. F.Wagner, 417–437. Bingley: Emerald Group Publishing Limited, 2014.

122. Von Mises, R. La distribution de la plus grande de n valeurs, in Selected Papers, volume II, 271-294, American Mathematical Society, Providence, 1936

123. Wong, W.K., Backtesting trading risk of commercial banks using expected shortfall, Journal of Banking and Finance, 32, 1404-1415, 2008.

124. Wang, Z., Wu, W., Chen,C., and Zhou., Y. ,The Exchange Rate Risk of Chinese Yuan: Using VaR and ES Based on Extreme Value Theory. Journal of Applied Statistics 37 (2), 265–282, 2010.

125. Yamai, Y., Yoshiba, T., On the validity of value-at-risk: Comparative analysis with expected shortfall, Monetary and Economic Studies 20 (1), 57–86 (Bank of Japan), 2002.

126. Yamai, Y., Yoshiba, T., Value-at-risk versus expected shortfall: A practical perspective, Jorunal of Banking and Finance, 29 (4), 997-1015, 2005.

127. Youngman, P., Procyclicality and Value at Risk, Financial System Review, Bank of Canada, 2009.

128. Zakoian, J.M., Threshold heterscedastic functions, Journal of Economic Dynamics and Control, 18, 931-955, 1994.

Biografija kandidatkinje

Kandidatkinja Selena Totić je rođena 8. Marta 1979. godine u Beogradu, gde je završila osnovnu školu i III beogradsku gimnaziju. Diplomirala je 2004. godine na Fakultetu organizacionih nauka Univerziteta u Beogradu, na smeru Informacioni sistemi i tehnologije, sa prosečnom ocenom 9.05 i ocenom 10 na diplomskom radu.

Magistarske studije upisala je 2005. godine na Ekonomskom fakultetu Univerziteta u Beogradu, na međunarodnom poslediplomskom kursu iz kvantitativnih finansija pod nazivom "International Master in Quantitative Finance", gde je do kraja 2006. godine položila sve ispite sa prosečnom ocenom od 8.77. Magistarsku tezu pod nazivom "Value-at-Risk and Extreme Value Theory" radila je na engleskom jeziku pod mentorstvom profesora dr Dejana Šoškića i odbranila je 2010. godine, čime je stekla zvanje Magistra ekonomskih nauka.

Godine 2011. upisala je na EDHEC Business School u Nici (Francuska) master studije pod nazivom "Master in Financial Markets", gde je do kraja 2012. godine položila sve ispite. Iste godine, odbranila je master tezu pod nazivom "Hedge fund management companies from the prospective of databank transparency" pod mentorstvom profesora dr Charles Lumbers-a.

Pored završenih magistarskih studija, kandidatkinja je pohađala i dodatne kurseve, među kojima treba pomenuti kurs "The Econometrics of Risk and Return", letnje škole ekonometrije i finansija CEMFI u Madridu, 2007 godine.

Od decembra 2004. godine, zaposlena je na Fakultetu organizacionih nauka kao asistent pripravnik, odnosno, po odbranjenoj magistarskoj tezi, kao asistent na katedri za Operaciona istraživanja i statistiku. U okviru radnog odnosa, angažovana je na izvođenju vežbi iz predmeta *Teorija verovatnoće* i *Statistika* na osnovnim akademskim studijama, gde je u dosadašnjem radu dobijala odlične ocene studenata za održanu nastavu. Bila je uključena u izvođenje vežbi iz predmeta *Kvantitativno modeliranje u društvenim naukama* na master akademskim studijama *Računarstvo u društvenim naukama,* studijskog programa Univerziteta u Beogradu. Takođe, tokom 2008 godine, kandidatkinja je u više navrata angažovana kao predavač na kursu za sticanje brokerske licence, koji organizuje Komisija za hartije od vrednosti pri Ekonomskom fakultetu u Beogradu. Pored rada na Fakultetu organizacionih nauka, kandidatkinja je radila i kao analitičar za rizike u Intesa banci tokom 2007. godine. Paralelno sa radom na Fakultetu, u periodu od tri godine, kandidatkinja je radila kao konsultant za implementaciju Bazel II standarda u srpskom bankarskom sistemu u Centru za investicije i finansije.

Spisak objavljenih radova:

Totić, S., Božović, M., Tail risk in emerging markets of Southeastern Europe, Applied Economics, 48, 1785-1798, 2015. DOI:10.1080/00036846.2015.1109037.

Totić, S., Uslovni pristup teorije ekstremnih vrednosti u proceni Vrednosti-pod-rizikom: dokazi sa tržišta jugoistočne Evrope i SAD, Industrija, Ekonomski institut, Beograd, 43 (4), 7-23, 2016. DOI :10.5937/industrija43-8036.

Jeremic, V., Dobrota, M., Jovanovic-MIlenkovic, M., **Totic, S.,** Towards a framework for ranking of universities in subject categories: the posthoc I-distance approach, Review of Business Research, 15(2), 39-44, 2015. http://dx.doi.org/10.18374/RBR-15-2.5.

Totić, S., Božović, M., Forecasting Extreme Risk: Evidence from the Markets of Southeastern Europe, Management Inernational Conference (MIC), Portorož, May 2015.

Totić, S., Đoković, A., Milenković, N., Hedge fund management companies and databank transparency, XIV International symposium SYMORG, Symposium proceedings “New business models and sustainable competitiveness”, Faculty of Organizational Sciences, 642-649, 2014.

Poledica A., Horvat A., **Totic S.**, Logical Aggregation in Decision Making: Applications and Perspectives, 20th of the International Federation of Operational Research Societies (IFORS), Barcelona , July 2014.

Milenković, N., Đoković, A., **Totić, S.**, Bruto društveni proizvod i bruto nacionalni dohodak kao indikatori ekonomskog razvoja, XLI SYM-OP-IS, Zbornik radova, Divčibare, Septembar 2014.

Totić, S., Đoković, A., Milenković, N., Conditional extreme value theory approach in value-at-risk assessment, BALCOR 2013, XI Balkan Conference on Operational Research, Conference proceedings, 716-723, 2013, Belgrade/Zlatibor, September 2013. ISBN 978-86-7680-285-2.

Totic, S., Bulajic, M., Vlastelica, T., Empirical comparison of conventional methods and extreme value theory approach in Value-at-Risk assessment, African Journal of Business Managment, 5(33), 12810-12818, 2011. DOI: 10.5897/AJBM11.1265.

Totic, S., Advanced models in Value-at-Risk assessment, monografija, Zadužbina Andrejević, 2011, ISBN 10: 8672449908 / ISBN 13: 9788672449907.

Totic, S., Peaks over threshold method in estimation of Value-at-Risk, XII International symposium SYMORG, Symposium proceedings “Organizational sciences and knowledge management”, Zlatibor, June 2010.

Totic, S., Bulajić M., “Extreme Value Theory: a new tendency in market risk management?”, XXIV European conference on operational research, Lisabon, July 2010.

Прилог 1.

Изјава о ауторству

Потписани-а Селена Тотић

број индекса

Изјављујем

да је докторска дисертација под насловом

„Интерни модели за процену тржишног ризика засновани на условном губитку“

- резултат сопственог истраживачког рада,
- да предложена дисертација у целини ни у деловима није била предложена за добијање било које дипломе према студијским програмима других високошколских установа,
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио/ла ауторска права и користио интелектуалну својину других лица.

Потпис докторанда

У Београду, 17.04.2016.

Selena Totić

Прилог 2.

Изјава о истоветности штампане и електронске верзије докторског рада

Име и презиме аутора ____________Селена Тотић____

Број индекса ____

Студијски програм ____

Наслов рада _Интерни модели за процену тржишног ризика засновани на условном губитку

Ментор _________др Милица Булајић, редовни професор______________________________

Selena Totić

Потписани/а____

Изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предао/ла за објављивање на порталу **Дигиталног репозиторијума Универзитета у Београду.**

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Београду.

Потпис докторанда

У Београду, 17.04.2016.

Selena Totić

____

Прилог 3.

Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом:

Интерни модели за процену тржишног ризика засновани на условном губитку

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство

2. Ауторство - некомерцијално

3. Ауторство – некомерцијално – без прераде

4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима

5. Ауторство – без прераде

6. Ауторство – делити под истим условима

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци, кратак опис лиценци дат је на полеђини листа).

Потпис докторанда

У Београду, 17.04.2016.

Selena Totić