

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ  
МАШИНСКИ ФАКУЛТЕТ

Никола С. Мирков

**Нумеричка симулација турбулентних  
струјања над реалним комплексним  
теренима**

докторска дисертација

Београд, 2015

UNIVERSITY OF BELGRADE  
FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

Nikola S. Mirkov

**Numerical Simulation of Turbulent Flows  
over Real Complex Terrains**

Doctoral Dissertation

Belgrade, 2015

## Подаци о ментору и члановима комисије:

Ментор:

проф. Др. Бошко Раћуо  
редовни професор, Машински факултет, Универзитета у Београду

Чланови комисије:

проф. Др. Бошко Раћуо  
редовни професор, Машински факултет, Универзитета у Београду

проф. Др. Алескандар Бенгин  
ванредни професор, Машински факултет, Универзитета у Београду

Др. Мирко Динуловић  
доцент, Машински факултет, Универзитета у Београду

проф. Др. Жарко Стевановић  
научни саветник, Институт за нуклеарне науке "Винча", Универзитет у Београду

Др. Вукман Бакић  
виши научни сарадник, Институт за нуклеарне науке "Винча", Универзитет у Београду

Датум одбране:

## Захвалница

На првом месту бих желео бих да се захвалим свом ментору Проф. Др. Бошку Рашуо за вођење током докторских студија, током ког је показао велико стрпљење и разумевање. Наша сарадња је почела још током израде дипломског рада, када је разумео и подржао моју склоност за бављење научним радом.

Свим својим колегама из Лабораторије за термотехнику и енергетику, Института за нуклеарне науке "Винча", захваљујем за подршку у раду током израде тезе. На првом месту бих желео да се захвалим руководиоцима пројекта, Др. Жарку Стевановићу који ме је увео у област компјутерске симулације флуида и проблематику струјања у атмосферском граничном слоју, затим Др. Вукману Бакићу који је својим трудом омогућио радне услове набавком рачунара потребних за захтевне проблеме које сам обрађивао.

Захвалност за веома значајну улогу у мом професионалном усавршавању имам према проф. Др. Саши Кењерешу са Техничког универзитета Делфт у Холандији, који је у два наврата био домаћин током мог гостовања у Холандији преко НРС-Euro2 пројекта, и за стално надгледање мог рада које још увек траје.

Напокон велику захвалност би хтео да изразим својој породици, родитељима Светозару и Славенки, сестри Соњи и својој супрузи Ивани за неизмерну животну подршку.



## Наслов:

# НУМЕРИЧКА СИМУЛАЦИЈА ТУРБУЛЕНТНИХ СТРУЈАЊА НАД РЕАЛНИМ КОМПЛЕКСНИМ ТЕРЕНИМА

## Резиме

У дисертацији је представљена нова и унапређена прорачунска процедура базирана на методи коначних запремина, која је развијена за потребе симулације турбулентних ваздушних струјања над реалним комплексним теренима. У дисертацији су разматране ефикасна апроксимација ковекције, дифузних чланова, реконструкција хелијски-центрираних градијената, спревање поља притиска и брзине преко SIMPLE алгоритма са вишеструком решавањем једначине за корекцију притиска у секвенци корака неортогоналних корекција. Од постојећих компоненти алгоритма биране су оне које су показале способност за унапређени третман неортогоналности на хелијском нивоу, унутар прорачунске мреже, а на местима на којима је сматрано потребно уведене су оригиналне формулације како би се тачност прорачуна и нумеричка ефикасност унапредиле за дати тип струјања и представљају оригинални научни допринос ове дисертације. Посебно су обрађене следеће теме: i) процедура реконструкције хелијски центрираних градијената, укључујући и третман градијената притиска, ii) нови генерализивани приступ апроксимацији дифузионог члана, примењивог у присуству изражених деформација прорачунске мреже.

Више нумеричких експеримената је приказано да би се демонстрирала прорачунска прецизност и ефикасност предложене методе. Верификација нумеричког алгоритма је извршена на примерима различитог нивоа комплексности и намене. Почиње се реконструкцијом једноставних синтетичких функција, осмишљених да истакну одређене недостатке постојећих алгоритама за струјања у изразито неортогоналним геометријама. Тестови су такође извршени на аналитичким решењима Навије-Стоксових једначина, затим су приказани резултати поређења са другим нумеричким симулацијама, изведених са сличним алгоритмима, вршена су поређења са резултатима испитивања у аеротунелима, и напослетку вршена су поређења симулација са мерењима над реалним комплексним брдовитим теренима у реалном, атмосферском окружењу.

Нумерички експерименти показују да су постигнута значајна унапређења са предложеном нумеричком процедуром, у односу на конвенционалне нумеричке процедуре. Тестови апроксимације хелијски центрираних градијената користећи синтетичка решења су показали да је предложени приступ способан да оствари поклапање на нивоу рачунарске прецизности, чак и на изузетно деформисаним мрежама. У тестовима који укључују струјања са аналитичким решењима, метод је показао очекивани други ред тачности на униформним праволинијским мрежама. На деформисаним мрежама, нове шеме за дискретизацију дифузије су показале значајно побољшање како у прецизности прорачуна, тако и у брзини конвергенције, у по-

ређењу са другим приступима који су такође укључивали корекције неортогоналности. Резултати су показали да није довољно узети у обзир само искошеност прорачунских ћелија унутар мреже, већ да је потребно узети у обзир појам отклона тачке пресека, који је дефинисан у овој дисертацији, уколико постоји потреба за већом прецизношћу прорачуна. Једно од најзначајнијих достигнућа је везано за могућност да се тачно представи поље притиска, у случајевима наглих деформација, какве се често виђају на мрежама које представљају реалне комплексне топографије.

Резултати приказани у дисертацији су од практичног значаја у случају симулације ветра над комплексним топографијама у атмосферском окружењу, са посебном применом у енергији ветра.

**Кључне речи:**

Прорачунска механика флуида, метода коначних запремина, атмосферски гранични слој, симулација турбуленције, неортогоналне мреже

**Научна област:**

Техничке науке

**Ужа научна област:**

Машинство

**UDK број:**

532.517.4:519.6(043.3)

## **Title:**

**NUMERICAL SIMULATION OF TURBULENT FLOWS OVER REAL COMPLEX TERRAINS)**

## **Abstract**

This dissertation presents a new and substantially improved finite volume procedure for simulation of incompressible flows on non-orthogonal grids. Cell-centered least-squares gradients are obtained in a robust and highly accurate way. A new discretization of the diffusive terms is employed, which is based on extension of the original cell-face gradient interpolation and is more suitable for complex grid distortions. A flexible flux-limited interpolation of dependent variables on distorted computational grids is introduced. An efficient preconditioner for Krylov method solution of linear systems is proposed, which substantially improves the solution of Poisson equation for pressure correction. The pressure-correction algorithm is adapted for efficient convergence on highly complex grids using a sequence of non-orthogonal corrector solutions and its effect on iteration convergence is analyzed. The non-orthogonalities treated by current procedure are more accustomed to numerical grids generated from a real complex terrain elevation data. The main focus is on the simulation of atmospheric micro-scale flows pertinent to wind energy application.

### **Keywords:**

finite volume method, unsteady incompressible flow, cell-centered approach, pressure-correction, preconditioner, non-orthogonal grids, complex terrain

### **Scientific field:**

Technical sciences

### **Specific scientific field:**

Mechanical Engineering

### **UDC number:**

532.517.4:519.6(043.3)

# Садржај

Резиме . . . . .	iii
Abstract . . . . .	v
<b>1 Увод</b>	<b>1</b>
1.1 Оквир истраживања и мотивација . . . . .	1
1.2 Циљеви истраживања . . . . .	15
1.3 Структура тезе . . . . .	19
<b>2 Теоријске основе математичког модела</b>	<b>21</b>
2.1 Увод . . . . .	21
2.2 Рејнолдсови усредњени Навије-Стокс модели . . . . .	22
2.3 Двоједначински $k - \epsilon$ модел . . . . .	24
2.3.1 Корекције $k - \epsilon$ модела . . . . .	24
2.4 RNG $k - \epsilon$ модел . . . . .	26
2.5 Двоједначински $k - \epsilon$ модел са ограничењима остваривости . . . . .	27
2.6 Двоједначински $k - \omega$ SST модел . . . . .	29
2.7 $k - \omega$ модел са експлицитно алгебарски израчунатим Рејнолдсовим напонима . . . . .	32
2.8 Аутоматски третман зидних услова за моделе базиране на једначини за специфичну дисипацију - $\omega$ . . . . .	36
<b>3 Нумерички метод за симулацију ваздушних струјања над комплексним теренима</b>	<b>38</b>
3.1 Увод . . . . .	38
3.2 Реконструкција ћелијски центрираних градијената . . . . .	41
3.3 Конвективни члан . . . . .	43
3.3.1 Ограничавање флуксева . . . . .	45
3.4 Дифузиони чланови . . . . .	49
3.4.1 Израчунавање градијената на центроиду странице - Релаксација параметризована са степеном $\cos(\theta)$ . . . . .	51
3.5 Изворни чланови . . . . .	54
3.6 Нестационарни чланови . . . . .	54
3.7 Контурни услови . . . . .	55
3.8 Финална форма апроксимираних једначина . . . . .	56
3.9 Алгоритам спрезања поља притиска и брзине . . . . .	56
3.10 Итеративно решавање линеарних система једначина . . . . .	59
3.11 Нумеричка ефикасност . . . . .	62

<b>4</b>	<b>Верификација нумеричког алгоритма - прорачунске грешке и прецизност нумеричке апроксимације</b>	<b>64</b>
4.1	Увод . . . . .	64
4.2	Ваљаност апроксимације хелијски центрираних градијената .	66
4.3	Прорачун вртлога Тејлора и Грина . . . . .	68
4.4	Ламинарно струјање у каналу са систематски деформисаним прорачунским мрежама . . . . .	78
<b>5</b>	<b>Валидација математичког модела при струјањима над идеализованим конфигурацијама</b>	<b>84</b>
5.1	Ламинарно струјање над глатким брдом . . . . .	84
5.2	Струјање над дводимензионалним троугаоним брдом положеним унутар турбулентног граничног слоја . . . . .	86
<b>6</b>	<b>Валидација математичких модела при турбулентним струјањима над реалним комплексним конфигурацијама</b>	<b>91</b>
6.1	Случај брда Аскервеин ( <i>енг. Askervein hill</i> ) . . . . .	91
6.2	Случај брда Болунд ( <i>енг. Bolund hill</i> ) . . . . .	97
<b>7</b>	<b>Закључак и препоруке</b>	<b>106</b>
	<b>Библиографија</b>	<b>108</b>
	<b>Додатак А</b>	<b>121</b>
	<b>Додатак Б</b>	<b>132</b>

# Слике

1.1	Процењени капацитет ветро-енергетских инсталација у Европској Унији до 2020., и нови нижи, централни и виши сценарио (извор EWEA). . . . .	2
1.2	Процењени капацитет ветро-енергетских инсталација у Европској Унији у погледу удела у тржишту до 2020., и нови нижи, централни и виши сценарио (извор EWEA). . . . .	2
3.1	Типични изглед прорачунских ћелија у неортогоналним прорачунским мрежама. . . . .	40
3.2	Упоређење квалитета учинка више конвективних шема, помоћу анализе основних компоненти - PCA анализа. 1-FOU, <b>2-CUI</b> , <b>3-Fromm</b> , <b>4-QUICK</b> , <b>5-LUI</b> , 6-CDS, 7-MUSCL, 8-OSPRE, 9-H-CUI, <b>10-Harmonic</b> , 11-SPL- $\frac{1}{3}$ , <b>12-SMART</b> , <b>13-Koren</b> , 14-H-QUICK, 15-SMARTER, <b>16-BLUI(SOU)</b> , 17-UMIST, 18-GPA- $\frac{1}{2}$ , 19-GPR- $\frac{1}{2}$ , 20-GPR- $\frac{1}{3}$ , 21-vanAlbada, 22-Minmod, 23-GVA- $\frac{1}{2}$ , 24-GVA- $\frac{1}{3}$ , 25-Superbee, 26-BCDS. . . . .	47
3.3	Ефекат ограничења флуксева у оквиру апроксимације конвективног члана, на елиминисање паразитских осцилација у решењу (a) QUICK шема (b) SMART-ограничена верзија QUICK шеме. . . . .	49
3.4	MUSCL функција за ограничавање флуксева. . . . .	50
4.1	Структура мреже за случај тестирања градијената и за случај вртлога Тејлора и Грина. Деформација мреже је функција параметра $\beta$ . Димензија домена је $[0, 2\pi]^2$ ; величина мреже на слици, $32 \times 32 \times 10$ ; вредност параметра деформације, $\beta = 3$ . . .	67
4.2	Брзина конвергенције приликом промене резолуције мреже за случај вртлога Тејлора и Грина. Коришћене су мреже са различитим конвективним шемама. Резултати симулација помоћу предложеног алгоритма су упоређени са резултатима T-Rex кода [96]. Величина дискретног временског корака, $\Delta t = 0.01s$ . . . . .	70
4.3	Вртлог Тејлора и Грина а) Поље притиска у $xy$ равни, б) Поље интензитета брзине у $xy$ равни . . . . .	73
4.4	Поље притиска у $xy$ равни за TGV случај, $\beta = 3$ , величина мреже $32 \times 32 \times 10$ ћелија. а) Основни приступ, б) Унапређен третман неортогоналности. . . . .	74

4.5	Поље интензитета брзина у $xy$ равни за TGV случај, $\beta = 3$ , величина мреже $32 \times 32 \times 10$ ћелија. а) Основни приступ, б) Унапређен третман неортогоналности. . . . .	75
4.6	$u$ -компонента брзине, у $xy$ равни за TGV случај, $\beta = 3$ , величина мреже $32 \times 32 \times 10$ ћелија. а) Основни приступ, б) Унапређен третман неортогоналности. . . . .	76
4.7	Случај вртлога Тејлора и Грина: Конвергенција унутрашњих итерација датих у $L_1$ норми резидуала за различите линеарне солвере примењене на дискретизовану једначину корекције притиска. Мрежа је густине $64 \times 64 \times 10$ , вредност параметра неортогоналности мреже је $\beta = 3$ . . . . .	77
4.8	Случај вртлога Тејлора и Грина: Утицај броја неортогоналних коректора ( $nrcor$ ) оп на конвергенцију SIMPLE итерација у оквиру једног временског корака. Слика приказује резидуал за једначину количине кретања ( $u$ -momentum) и резидуале једначине континуитета за различите $nrcor$ вредности ( $\beta = 4$ , $\Delta t = 0.001$ , подрелаксациони фактори: $\alpha_p = 1.0$ , $\alpha_u = 0.8$ ). . . . .	77
4.9	Увећани сегмент прорачунске мреже у $xz$ равни за ламинарно струјање у каналу. Ниво дисторзије је контролисан параметром $\beta$ . Величина домена $L \times W \times H = 2.5 \times 0.04 \times 0.236$ ; величина мреже, $N_x \times N_y \times N_z = 40 \times 2 \times 20$ (означена као груба мрежа); вредност параметра деформације $\beta = 1.005$ а) Структура мреже, б) Максимална искошеност нормала. . . . .	80
4.10	Реконструкција линеарног пада притиска за ламинарно струјање у деформисаном каналу, на различитим нивоима резолуције мреже, при $\beta = 1.005$ . а) Основни приступ, б) Унапређени третман неортогоналности. . . . .	81
4.11	Утицај различитих приступа израчунавања градијената на страници ћелије у апроксимацији дифузног члана, на брзину конвергенције итерација: а) историја конвергенције једначине за $u$ -компоненту брзине, правоугаоник означава регион од интереса, б) Увећан регион са горње слике. За све симулације је коришћена фина мрежа - $160 \times 80 \times 2$ ; параметар деформације мреже, $\beta = 1.005$ . . . . .	83
5.1	Максимална искошеност нормала за гатко, дводимензионално брдо у каналу. . . . .	86
5.2	Интензитет вртложности при струјању над дводимензионалним глатким брдом. а) Основни приступ, б) Унапређени третман неортогоналности. . . . .	86
5.3	Упоредивање профила $u$ -компоненте брзине при $x = 2.5$ , $x = 2.75$ и $x = 3.2$ у струјању над глатким дводимензионалним брдом. . . . .	87
5.4	Максимална искошеност нормала за случај струјања над троугаоним брдом. . . . .	88
5.5	Рециркулациона зона иза троугаоног брда а) Основни приступ, б) Унапређени приступ. . . . .	89

5.6	Поље притиска у околини троугаоног брда. а) Основни приступ, б) Унапређени приступ. . . . .	90
6.1	Изохипсе Аскервеин брда и правци дуж којих су постављани мерни стубови. . . . .	92
6.2	Поље притиска у вертикалној равни паралелној смеру струјања (правац А), кроз тачку НТ. . . . .	94
6.3	Интензитет брзине у вертикалној равни паралелној смеру струјања (правац А), кроз тачку НТ. . . . .	94
6.4	Поље компоненте брзине у правцу струјања у површи на растојању 2 m од тла, за SST модел. . . . .	95
6.5	Поље компоненте брзине у правцу струјања у површи на растојању 2 m од тла, за SAS модел. . . . .	95
6.6	Поље компоненте брзине у правцу струјања у површи на растојању 2 m од тла, за EARSM-M модел. . . . .	96
6.7	Поље компоненте брзине у правцу струјања у површи на растојању 2 m од тла, за EARSM-WJ модел. . . . .	96
6.8	Прорачунска мрежа конструисана на основу дигиталне мапе елевације терена за случај брда Болунд. а) Површинска мрежа и поглед ка предњем узвишењу брда Болунд, б) попречни пресек кроз прорачунску мрежу у равни паралелној $xz$ равни, у близини предњег узвишења. . . . .	98
6.9	Положај мерних стубова на брду Болунд. . . . .	99
6.10	Интензитет брзина изнад Болунда у вертикалној равни паралелној правцу струјања. . . . .	99
6.11	Резултати за случај Болунд, први део: Вертикални профили брзине израчунати помоћу "остваривог" $k-\epsilon$ турбулентног модела [83] поређени са мерењима на атмосферској размери, Правац ветра од 270 deg. . . . .	100
6.12	Резултати за случај Болунд, други део: Вертикални профили брзине израчунати помоћу "остваривог" $k-\epsilon$ турбулентног модела [83] поређени са мерењима на атмосферској размери, Правац ветра од 270 deg. . . . .	101
6.13	Резултати за случај Болунд, први део: Вертикални профили турбулентне кинетичке енергије израчунати помоћу "остваривог" $k-\epsilon$ турбулентног модела [83] и RNG $k-\epsilon$ турбулентног модела са Дурбиновим лимитером, поређени са мерењима на атмосферској размери, Правац ветра од 270 deg. . . . .	102
6.14	Струјне линије над Болундом. Брзина израчуната помоћу $k-\epsilon$ турбулентног модела са ограничењима остваривости. Правац ветра је 270 deg. . . . .	103
6.15	Анимација струјања над Болундом-поглед одозго. Брзина израчуната помоћу $k-\epsilon$ турбулентног модела са ограничењима остваривости. Правац ветра је 270 deg. . . . .	104



6.16	Анимација струјања над Болундом-поглед са стране. Брзина израчуната помоћу $k - \epsilon$ турбулентног модела са ограничењима остваривости. Правац ветра је 270 deg. . . . .	105
------	--	-----

# Табеле

2.1	Стандардни и модификовани коефицијенти за атмосферска струјања, за $k$ - $\epsilon$ модел. . . . .	26
2.2	Коефицијенти за RNG $k$ - $\epsilon$ модел. . . . .	27
4.1	Релативна $L^2$ грешка приликом реконструкције ћелијски центрираних градијената. Табела показује резултате за методу која се ослања не линеарну интерполацију и примену Гаусове теореме, и резултате предложене процедуре, базиране на методи најмањих квадрата. . . . .	67
4.2	Случај вртлога Тејлора и Грина: прорачунске грешке и брзине конвергенције мреже за различите вредности параметра $\beta$ . Варијанта алгоритма за униформне праволинијске мреже. Централна диферентна шема за конвекцију. . . . .	71
4.3	Случај вртлога Тејлора и Грина: прорачунске грешке и брзине конвергенције мреже за различите вредности параметра $\beta$ . Предложени алгоритам са централном диферентном шемом. . . . .	71
4.4	Случај вртлога Тејлора и Грина: прорачунске грешке и брзине конвергенције мреже за различите вредности параметра $\beta$ . Предложени алгоритам са MUSCL диферентном шемом. . . . .	72
4.5	Ламинарно струјање у каналу - прорачунске грешке и брзина конвергенције за праволинијске и деформисане мреже, карактеризирани параметром $\beta$ . Дифузни члан апроксимиран различитим шемама: Ортогонална корекција ( $nrelax = 0$ ), Надрелаксирана корекција ( $nrelax = -1$ ), и Минимална корекција ( $nrelax = 1$ ) . . . . .	80
4.6	Ламинарно струјање у каналу - прорачунске грешке и брзина конвергенције за праволинијске и деформисане мреже, карактеризирани параметром $\beta$ . Дифузни члан апроксимиран различитим шемама за корекцију ефеката отклона тачке пресека: Ортогонална корекција ( $nrelax = 0$ ), Надрелаксирана корекција ( $nrelax = -1$ ), и Минимална корекција ( $nrelax = 1$ ) . . . . .	82

# Глава 1

## Увод

### 1.1 Оквир истраживања и мотивација

У наредним декадама очекује се да ће енергија ветра играти значајну улогу у замени фосилних горива обновљивим изворима енергије [1]. У Европској Унији ветро-енергетски капацитет је увећан за додатних 11791.4 MW у току протекле године (2014), што је 43.7 % од укупног инсталисаног капацитета за 2014. годину, са кумулативним капацитетом ветроенергетских инсталација који сад износи 128.8 GW у Европској Унији, [2].

Повећавање капацитета ветро-електрана поклапа се са иницијативама за умањење емисија гасова стаклене баште. У многим земљама широм света осмишљене су директиве са основним циљем умањења емисије угљендиоксида, што је такође било праћено бројним директивама које су имале за циљ повећање удела обновљивих извора енергије (EWEA<sup>1</sup>, IPCC<sup>2</sup>). Управо то подстицање обновљивих извора енергије на тржишту електричне енергије је највише утицало на значајно повећано коришћење енергије ветра. Савремене анализе [3] упућују на гледиште да обновљиви извори енергије не могу у потпуности заменити изворе базиране на фосилним горивима, али показују да је потенцијал умањења трошкова значајан и да надмашује цене субвенција. Према новим студијама предвиђања трендова до краја текуће декаде удео енергије ветра наставља да расте, тако EWEA сценарио предвиђа 192 GW капацитета ветро-енергетских инсталација које ће производити 442 TWh остварујући тако 14.9% потребе за електричном енергијом до 2020.

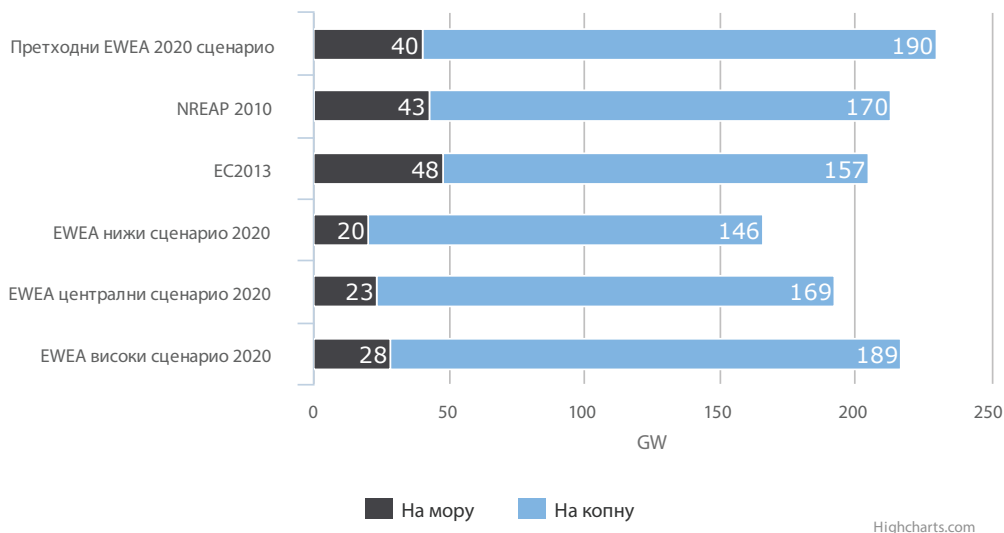
Ипак, постоје препреке које ограничавају ефикасно коришћење ветра: резервни капацитет, подршка у случајевима недостатка ветра (енг. operatio-

---

<sup>1</sup>The European Wind Energy Association.

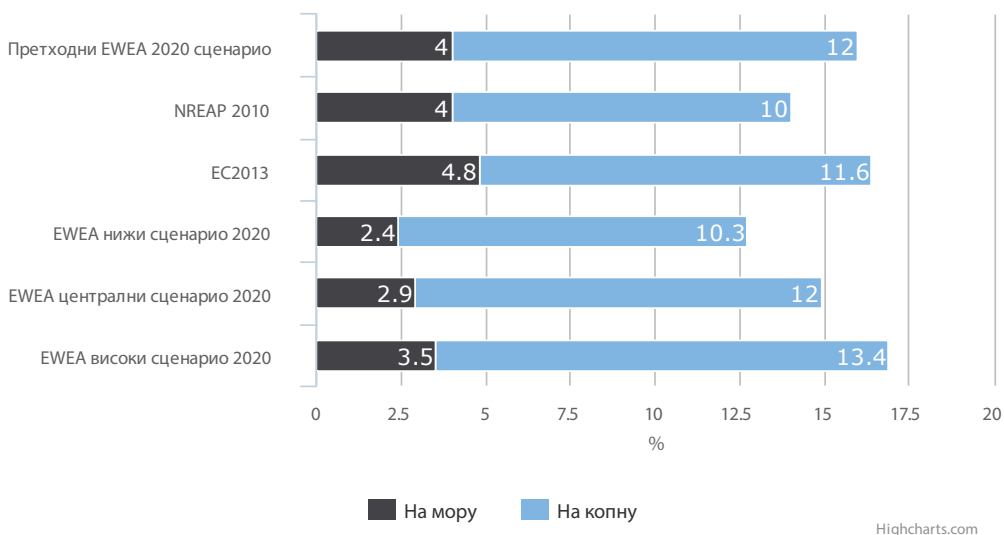
<sup>2</sup>Intergovernmental Panel for Climate Change.

Претходни EWEA, NREAP, EC primes и нови EWEA 2020 EU  
сценарији за инсталисане ветро-енергетске капацитете у  
Европској Унији у GW



Слика 1.1: Процењени капацитет ветро-енергетских инсталација у Европској Унији до 2020., и нови нижи, централни и виши сценарио (извор EWEA).

Претходни EWEA, NREAP, EC primes и нови EWEA 2020 EU за  
удео енергије ветра у укупној потрошњи струје у Европској  
унији у процентима



Слика 1.2: Процењени капацитет ветро-енергетских инсталација у Европској Унији у погледу удела у тржишту до 2020., и нови нижи, централни и виши сценарио (извор EWEA).

nal back-up), дугорочна предвиђања брзине ветра, планирање и климатолошка процена паркова на пучини, екстензија електричне мреже, одржавање волтаже и реактивне снаге, и неизвесности у погледима утицаја на емисије и тржишне услове.

У последње време све већи број ветро-енергетских инсталација се поставља на комплексним, брдовитим и планинским теренима. Пре постављања инсталација потребна је детаљна климатолошка анализа и утицај локалне орографије на слику струјања ваздуха. Такође постављањем ветро-турбина на такав неравномеран тип терена, дуж узвишења, па чак и у планинским подручјима, долази до појаве феномена као што су сепарација и рециркулација који због свог изразито нестационарног карактера могу значано увећати структурална оптерећења на ветро-турбинама [4]. Из тог разлога детаљно проучавање тзв. атмосферског граничног слоја (енг. Atmospheric Boundary Layer - ABL) над комплексним теренима је веома значајно у циклусу планирања ветро-енергетских паркова.

Атмосферски гранични слој је по дефиницији најнижи слој Земљине атмосфере, чија дебљина варира од неколико десетина метара у условима стабилне атмосфере до око два километра у зависности од временских прилика. Тај слој атмосфере је директно изложен утицају локалне орографије и површинске хртавости терена над којим ветар струји. У таквим условима задатак процене потенцијала ветра за производњу енергије постаје значајно тежи. Добијена снага из ветро-турбине је пропорционална брзини ветра на трећи степен, једначина (1.1), [5, 6], тако да и мало увећање брзине, проистекло рецимо из убрзања условљеног тереном, изазива значајно повећање снаге.

$$P = \frac{1}{2} \rho C_p \pi \frac{D^2}{4} U^3 \quad (1.1)$$

Утицај топографије као појачавајућег фактора за брзину ветра у атмосферском граничном слоју је кључан у студијама енергије ветра, па је развој атласа ветрова базираних на расподели ветра у атмосферском граничном слоју, први корак у процени потенцијала енергије ветра у региону. Прецизно одређивање брзине ветра и ефеката на брзину условљених орографијом је од највећег значаја у процесу процене профитабилности ветро-енергетског парка.

Развој прецизних модела за процену ветро-енергетског потенцијала у областима струјања над комплексним тереном је повезан са низом потешкоћа као последица прецизног представљања топографије, нестационарног карактера струјања, слабог квалитета модела турбуленције и недостатка од-

говарајућих података за поређења и валидацију тих модела на примерима реалних терена у пуној размери, између осталог.

Струјања ваздуха над комплексним тереном припада широј класи ваздушних токова над лоше опструјаваним телима која у енглеском језику имају лексиколошку ознаку "bluff body"<sup>3</sup> која за основу има значење стрме топографије. Дакле стрма топографија је утицала на стварање ширег аеродинамичког појма, тј. за саму дефиницију лоше опструјаваних тела. У овом типу струјања гранични слој, слободно-смичући слој, и вртложни траг постоје истовремено и утичу једно на друго, тако да је укупна струјна слика јако компликована и нестационарна и долази до појаве комплексних феномена као што су сепарација, поновно припајање (енг. reattachment), рецикулација, нестационарни вртложни траг и друге сложене тродимензионалне структуре.

Због сложености и значаја ове проблематике, утицај присуства брда на ваздушни ток је доста широко проучаван феномен. Потешкоће са самим турбулентним струјањима доводе се у везу са нелинеарношћу једначина које их описују тј. Навије-Стоксових једначина. Квадратна нелинеарност у конвективном члану ствара велики број просторно-временских размера кретања које су у међусобној интеракцији. На примеру атмосферског граничног слоја процењено је да су највеће турбулентне размере реда величине 1 km, док су најмање реда величине 1 mm [7].

У покушајима да се проблем поједностави, неколико теоријских, линеарних модела је развијено, највећи број којих је базиран на идејама изложеним у Jackson и Hunt, [8]. Такви модели обично подразумевају поделу струјног поља на два дела тзв. унутрашњи и спољашњи слој, при чему у спољашњем слоју ваздушни ток је вођен разликом притисака, док у унутрашњем слоју турбулентни напони имају значајну улогу. У оба случаја брзина адвекције је константна што је омогућило добијање аналитичких решења. Та претпоставка линеарности у овим моделима ограничава њихову примењивост на ниска идеализована брда са малим нагибом. Аналитичка решења могу бити добијена само за брда јако једноставног и идеализованог облика.

Последњих година постоји све веће стремљење за употребом прорачунске динамике флуида (енг. Computational Fluid Dynamics, у даљем тексту CFD) за решавање проблема струјања ваздуха и микрометеоролошких атмосферских процеса, струјања у урбаним срединама, над комплексним теренима, или оних микрометеоролошких струјања која су контролисана тем-

---

<sup>3</sup>енг. A steep headland, promontory, riverbank, or cliff.

пературским градијентима. Примена прорачунске динамике флуида је значајно повећана у областима обновљивих извора енергије, проучавању ширења пасивних примеса, тј. дисперзија контаминаната и студија утицаја на животу средину [9], што су само неки примери где прорачунска аеродинамика над комплексном топографијом игра значајну улогу. Уопштено, битни су сви случајеви који се могу свести под интеракцију између ваздушног тока и објеката који дефинишу комплексну геометрију површи, унутар атмосферског граничног слоја.

Могућност примене прорачунске динамике флуида је значајна и приликом оптимизација фарми ветра. Груписање ветро-турбина у ветроенергетском парку уводи неке значаје потешкоће: умањена производња струје изазвана дефицитом брзина у вртложним траговима и повећана структурална динамичка оптерећења на стуб и на лопатице ротора због повећаних нивоа турбулентних пулсација у односу на амбијенталну турбуленцију. У зависности од распореда турбина у ветро-енергетском парку и услова ветра, умањење производног капацитета ветротурбине које се налази у вртложном трагу друге турбине може достићи и до 40%. Улога прорачунске аеродинамике у проучавању вртложних трагова и оптимизације распореда турбина у фарми ветра је стога од изузетног значаја.

Приликом развоја нумеричког модела који обухвата математички модел и нумерички алгоритам, процес тестирања се врши у две фазе: верификација, које одговара на питање да ли једначине решавамо правилно и односи се на тестирање нумеричког алгоритма и његове имплементације и валидација, које одговара на питање да ли решавамо праве једначине и односи се на проверу адекватности математичког модела. Нумерички алгоритам служи да би систем парцијалних диференцијалних једначина био сведен на скуп линеарних алгебарских једначина. Тип процесом се уноси тзв. грешка дискретизације. Процесом верификације се утврђује величина те грешке. Нумерички алгоритам доприноси стварању и других видова грешака као што су грешке коначне прецизности у представљању реалних бројева на рачунару (енг. floating point arithmetics). За утврђивање грешке дискретизације користе се на првом месту тачна аналитичка решења, а када она нису на располагању користе се јако прецизне нумеричке симулације добијене помоћу већ верификованих нумеричких кодова.

Кроз валидацију се утврђује величина грешке математичког модела. Највећа грешка у случају турбулентних струјања над комплексним теренима је грешка настала због неадекватних турбулентних модела чије могућности го-

тово увек *не* обухватају и захтеве постављене ваздушним токовима над комплексним теренима.

Најраспрострањенији приступ моделирању турбулентних струјања од инжењерског значаја је базиран на Рејнолдсовим усредњеним Навије-Стоксовим једначинама (енг. Reynolds Averged Navier-Stokes, у даљем тексту RANS) и концепту турбулентне вискозности (енг. eddy-viscosity), тј. на Бусинесковој апроксимацији турбулентних напона. Иако RANS модели показују добре карактеристике при процењивању средње брзине ветра над тереном, њихове могућности се драстично смањују када су изражени ефекти закривљености струјница, убрзања и успорења (и стагнације) као и сепарације. Разлог су основне претпоставке изотропије турбулентних напона и због тога што у констане турбулентних модела калибрисане за основне канонске облике струјања као што су гранични слој на равной плочи и сл. [74].

Алтернатива RANS моделима је приступ познат под називом Симулација великих вртлога (енг. Large Eddy Simulation, у наставку LES). У скорије време LES је постала значајна алатка за проучавање ваздушних струјања над топографијом. Неколико LES студија се бавило ефектима неуниформности топографије на струјање у атмосферском граничном слоју у условима неутралне атмосфере, [10]. LES метода директно израчунава све размере турбулентног транспорта које су веће од размере мреже или филтера, и параметризује мање размере (енг. sub-grid scales, у наставку SGS), помоћу SGS модела. Најшире коришћени SGS модели у LES симулацији атмосферског граничног слоја су модели базирани на концепту турбулентне вискозности за турбулентне напоне и модели турбулентне дифузивности за флуksеве турбулентних скалара. Одређивање коефицијената SGS модела, као у нпр. случају модела Смагоринског, је један од највећих изазова, јер како је показано, они имају велики утицај на понашање SGS модела, и последично, на прецизност резултата симулације. Предност овог приступа у односу на RANS се огледа у томе што је на овај начин омогућено да макар део турбулентног спектра буде директно израчунат, а нестационарни ефекти буду испољени кроз статистику прикупљену током симулације. Све више постаје јасно да понашање RANS модела у предвиђању сепарације од закривљених површина, често није задовољавајућ, често чак и неодговарајућ, тако да улога LES такође значајна у оцењивању квалитета RANS модела кроз компаративне нумеричке експерименте у којима се неки специфични недостаци тих модела откривају и коригују.



Основни изазов приликом верификације прорачунског кода и валидације турбулентних модела намењених за симулацију ветра над комплексним теренима је проналажење довољно добро документованих експерименталних резултата са мерења над природним тј. реалним теренима у атмосферској размери. Доста поузданих и разнородних атмосферских експеримената на пуној, атмосферској размери је неопходан предуслов да би се дошло до бољег разумевања свих физичких процеса који су укључени у струјања у атмосферском граничном слоју и да би се валидирани турбулентни модели. Разни експерименти који се односе на струјања над комплексним теренима у условима неутралне атмосферске стратификације стоје на располагању. Један од најбоље документованих и најчешће коришћених теренских мерења је случај Аскервеин брда у Шкотској (енг. Askervein hill, Outer Hebrides, Scotland), обављен у току 1982. и 1983. године [11]. У току овог експеримента била су извршена и мерења турбуленције што представља посебну погодност и омогућило је да овај случај дуго, преко двадесетпет година, буде коришћен за валидацију турбулентних модела. Ово је имало и своју добру и лошу страну, наиме дуго коришћење овог експерименталног случаја је омогућило да већи број нумеричких кодова и турбулентних модела буде упоређено на истом случају, док је негативна страна та да су временом уведене неке *ad hoc* измене турбулентних модела, за које је сматрано да имају генерални карактер, када су у питању струјања над комплексним теренима, иако су она само последица специфичности самог случаја Аскервеин брда и да немају генерални карактер [12].

Постојећа литература за верификацију и валидацију нумеричких кодова која се односе на услове стабилне и нестабилне стратификације атмосфере су, за разлику од случаја неутралне атмосфере, прилично ретки и односе се углавном на равне терене, нпр. [13].

Литература која документује развој нумеричких метода за ваздушна струјања над комплексним теренима је бројна. У компаративној студији [14] аутори паралелно излажу резултате два нумеричка модела за симулацију атмосферских струјања над комплексном топографијом. У том раду тзв. масено-конзистентни или кинематски модели који су базирани на идеји поједностављења прорачунског поступка, на тај начин што се не решавају једначине одржања импулса, већ се долази до соленоидалног поља брзина почевши од почетног услова задатог интерполацијом тачкастих читавања реалних метеоролошких станица, су упоређени са прорачунским алгоритмом базираном на дискретизацији Навије-Стоксових једначина. Показано је да

тако добијени резултати иако квалитативно тачни значајно заостају за могућностима CFD кодова по питању прецизности.

Неколико студија се бавило применом нумеричких кодова за временску прогнозу и истраживање на мазоскали <sup>4</sup> за симулације комплексног терена на микроскали, са жељом да се испитају могућности модела предвиђених за симулације на мезоскали за фине резолуције и са жељом да се метеоролошки кодови испитају изван основног домена примене, на друга поља као што су енергија ветра и остале инжењерске примене [15, 16]. У свом раду [17], аутори испитују тзв. RAMS, регионални атмосферски модел, на неколико примера реалних комплексних терена, поредећи те резултате са резултатима кодова базираних на Jackson-Hunt теорији и са тродимензионалним Навије-Стокс кодовима са Рејнолдсовом декомпозицијом и Бусинесковом апроксимацијом за турбулентне напоне. Ти резултати, иако охрабрујући по питању квалитета RAMS модела, указују да су генерални кодови за прорачунску аеродинамику у предности када су тродимензионални ефекти присутни, и у зонама сепарације на страни брда у заветрини (енг. lee-ward side). Исти нумерички модел је испитан у [16] где је на примеру струјања над идеализованим дводимензионалним брдима са сепарацијом, упоређен са типичним инжењерским CFD програмом.

Утицај крошњи на реалном терену је испитан у [18] где је показано да оне утичу на увећање нивоа турбуленције чак до два реда величина, што је значајно узети у обзир приликом процене ветро-енергетских ресурса. Ветар над комплексним тереном формираним од пешчаних дина, као вид сложених неправилности терена, а за потребе просторног планирања је дат у [19].

Значајан корпус научних студија је заснован на упореби комерцијалних кодова. Под тим називом подразумевамо генералне програме за прорачунску аеродинамику који због тржишне оријентисаности имплементирају робустне алгоритме, способне да дају конвергирана решења за широк спектар проблема, али као последица тога не третирају одређене специфичне потребе присутне у проучаваним тест случајевима и што је најбитније сакривају детаље имплементације. У [20] аутори испитују турбулентна струјања над идеализованом конфигурацијом, са повећаним нагибом и пореде са сопственим мерењима извршеним у воденом тунелу. Испитано је шест различитих турбулентних модела имплементираних у ANSYS CFX <sup>5</sup>. Интересантно је да модели базирани на "епсилон једначини" (стандарни и RNG

---

<sup>4</sup>У грубом смислу размере од  $20 \times 20 \text{ km}$  до  $100 \times 100 \text{ km}$ .

<sup>5</sup>Власништво ANSYS Inc.

$k - \epsilon$  модели), за које је познато да су превише дифузивни, нису били у стању да репродукују рециркулациони регион иза узвишења који је запажен у експериментима. Насупрот томе, "омега модели" су успешно репродуковали постојање и величину рециркулационог региона. То је, између осталог, довело до знатно виших и нетачних вредности за смицајни напон на зиду код епсилон модела. Варијације епсилон модела које би дале боља поклапања профила су испитане генералним програмом за прорачунску аеродинамику PHOENICS <sup>6</sup>, на идеализованим дво-димензионалним конфигурацијама долина из RUSVAL експеримента [21, 22], у [23]. Показана је неприметна разлика у усредњеним профелима брзина, док је извесна варијација постојала у профелима турбулентне кинетичке енергије, дајући извесну предност RNG моделу у погледу тачности. Исти програм је коришћен за Аскервеин случај у [24], где је приказана предност генералног аеродинамичког кода над линеаризованим моделима. Доста широка анализа која обухвата и услове атмосферске топлотне стратификације, над идеализованим конфигурацијама, уз употребу комерцијалног кода STAR-CCM+ <sup>7</sup>, и двоједначинских модела турбуленције проширеног са додатним изворним члановима за ефекте гравитације је дата у [25]. ANSYS Fluent <sup>8</sup> је коришћен у студији валидације турбулентних модела над идеализованим и реалним конфигурацијама у [26], као и за валидацију модела на идеализованим конфигурацијама и, већ споменуто, поређење са нумеричким моделом за атмосферска струјања на мезоскали у [16], и на студији еолске геоморфологије и атмосферских струјања над реалном конфигурацијом пешчаних дина [27].

Валидација турбулентних модела је јако присутна тема у овој области, тако је, на пример, поређење нумеричких прорачуна са турбулентним моделима који се смењују од алгебарских до пуних модела за Рејнолдсове напоне (модели другог реда) је приказано у [28]. Аутори користе сопствене експерименте из аеротунела са идеализованим брдима великог нагиба која стварају изражен регион сепарације. У том региону разлике у моделима бивају уочљиве. Аутори закључују да су адекватнији модели потребни да би се репродуковале нормалне компоненте тензора турбулентних напона. Исти експерименти су коришћени у валидацији LES модела у [29], где је показано да Лагранжијански динамички SGS модел, који не подразумева претпоставку о инваријантности размера (scale-invariance енг.) развијен од стране Stolla и Porte-Angel-a у LES симулацији, доводи до реалистичнијих турбулентних

---

<sup>6</sup>Власништво Cham Ltd.

<sup>7</sup>Власништво CD-adapco.

<sup>8</sup>Власништво Ansys Inc.

статистика. Опсежна LES студија симулације атмосферског граничног слоја над комплексним тереном је спроведена у [30] .

Већина истраживаких кодова базираних на методи коначних запремина користи неортогоналне, структуриране, терену прилагођене мреже (енг. Body-fitted coordinates – BFC). Једначине су најчешће записане у облику који омогућава математичку трансформацију из физичког у прорачунски домен, који подразумева употребу Јакобијана трансформације [31, 32, 33, 34]. За разлику од таквог приступа у овој тези се користи особина да за метод коначних запремина није потребно вршити координатну трансформацију. Мрежа се посматра као неструктурирана и интерполације се врше са компактним интерполационим молекулима које укључују само најближе суседе.

Као основа методологије валидације турбулентних модела служе одговарајућа експериментална мерења над идеализованим и реалним конфигурацијама. Испитивања у аеро- и воденим тунелима представљају значајну базу за валидацију турбулентних модела за струјања у атмосферском граничном слоју, [35, 20]. Tkahashi et al. у [35] испитују у аеротунелу идеализовану конфигурацију тродимензионалног синусног брда у различитим условима стабилности атмосфере, као и утицаје стабилности на усредњене профиле брзина на врху и у заветрини брда. Дводимензионалне конфигурације са нагибом од 0.3 и 0.5, као и конфигурације са два брда постављеним једно за другим су испитане у аеротунелу и кроз нумеричке симулације са сопственим кодом базираним на RANS методологији и сопственом коду на основу методе коначних запремина, у раду Kim et al. [36]. Нумеричка симулација струјања и дисперзије над идеализованим дводимензионалним конфигурацијама RUSHILL и RUSVAL је приказана у раду Jung et al. [34].

Мерења над идеализованим конфигурацијама имају предност тачног представљања геометрије на свим размерама, што није случај са реалним конфигурацијама где неке одлике рељефа не могу бити приказане на одређеним резолуцијама мреже, што има за последицу да неке одлике струјања, зависне од тих карактеристика рељефа, не буду нумерички представљене у прорачуну. Предности идеализованих конфигурација се такође огледају у прецизно дефинисаним почетним и граничним условима, од чије репродукције зависи тачност нумеричког решења, све то дајући велики значај оваквом типу експерименталних испитивања.

Врхунац са становишта могућности примене нумеричких прорачуна ат-

мосферског граничног слоја на атмосферским микроразмерама долази у виду прецизних симулација над ралним конфигурацијама терена. Значајан фонд научних радова је посвећен овој теми, прилазећи јој са различитих аспеката. Тако су Kim и Patel [37], као и Kim, Patel и Lee [38], испитали низ реалних конфигурација уз употребу концепта турбулентне вискозности и зидних функција у оквиру генералне CFD методологије за случајеве неутралног атмосферског граничног слоја са циљем валидације нумеричких прорачуна на пуној атмосферској размери. Њихови закључци се односе и на значај укључивања околних елемената орографије, као околних брда у случају Аскервеин, ради репродукције свих значајних ефеката ваздушног струјања на страни брда која је у заветрини (регион сепарације). Prospathopoulos et al., [39] су користили RANS приступ и испитали осетљивост резултата на површинску храпавост терена, резолуцију мреже, и величину домена на примеру Болунд. Исто је урађено и у Castro et al. [33], али за случај Аскервеин, којима је био циљ да утврде утицај просторне дискретизације и ограничења модела турбуленције. Они су показали да је релативно груба мрежа довољна за долазна струјања на страни брда која је на удару ветра. Рециркулациони регион у њиховим симулацијама је био репродукован једино при нестационарним симулацијама и при дискретизацији конвективног члана интерполацијом трећег реда тачности. Undheim et al. [40] су проучавали ефекте резолуције мреже, правца долазног ветра и резолуције топографских података на примеру Аскервеин брда, такође користећи RANS методологију. Abdi и Bitsuamlak [41] приказују квантификовање ефекта орографије на хоризонталну компоненту брзине помоћу фракционог односа брзина (енг. Fractional Speed-Up Ratio-FSUR), као односа брзине ветра на одређеној висини изнад неравномерног терена и те исте вредности за раван терен, на основу симулација над серијом идеализованих брда и на случају Аскервеин.

Vuorinen et. al. [10] испитују компактну имплементацију метода разломљених корака (енг. fractional step method) који користи Рунге-Кута метод за дискретизацију у времену и LES методологију на примеру Болунд брда, случаја који је од недавно преузео примат у односу на Аскервеин случај за валидацију турбулентних модела над комплексним тереном [42, 43]. Истим случајем као и идеализованом конфигурацијом глатког тродимензионалног брда, испитаног у аеротунелу [44], се бави студија [45] из угла LES методологије и варијације SGS модела који омогућује динамичко одређивање константе Смагоринског. Као и многе претходне студије, акценат је стављен на испитивање ефекта резолуције мреже и површинске храпавости. Такође на

тест случају Болунд, Peralta et. al. [46], валидирају simpleFoam алгоритам из OpenFoam<sup>9</sup> библиотеке, за струјања у атмосферском граничном слоју, уз употребу двоједначинских RANS модела, између осталих и модификовани  $k - \epsilon$  модел за атмосферска струјања и имплементацију граничних услова за симулације ветра  $k - \epsilon$  моделом који су предложили Richards и Нохеу [47]. Валидација турбулентних модела са модификованим коефицијентима за атмосферски гранични слој је значајна тема која је такође обрађена у [26]. Bichmann и Sorensen [48] испитују могућност примене хибридне LES/RANS методологије на комплексне терене. Модел је базиран на стандардном  $k - \epsilon$  моделу, променом дужинске размере која је уграђена у RANS модел добијен је хибридни модел који аутоматски прелази на двоједначински  $k - \epsilon$  LES модел даље од зида. Chow и Street, [15], за разлику од њих, користе LES приступ на истом случају Аскервеин брда. Они утврђују да се резултати LES симулација за струјање над комплексним теренима може значајно унапредити уколико се под-филтриране размере моделирају моделима који комбинују идеје теорије сличности турбулентних размера (scale-similarity models) и модели базирани на концепту турбулентне вискозности.

Bitsuamlak [49] даје опширан преглед на пољу експеримената и нумеричких симулација на примерима дводимензионалних идеализованих и реалних конфигурација (Аскервеин). Аутори праве осврт на стандарде у којима су корекције брзина ветра над топографијом рачунају на основу теоретских модела, истичући да су тако добијене вредности за убрзање ваздушне струје над брдом прецењене и у закључку дају предност CFD симулацијама. Blocken [9] испитује утицај ветра у урбаној средини у погледу угодности и безбедности пешака у урбаним кањонима на примеру кампуса у Ајндховену (Eindhoven, The Netherlands) користећи нумеричке алатке.

Развој нумеричког алгоритма за атмосферска струјања са Аримедовским силама (силе потисака услед разике у густини) над отвореним рударским јамама уз употребу тзв. Симулације разједињених вртлога (енг. Detached Eddy Simulation, у наставку DES) су представили Flores et. al. [50, 51].

У најновијим настојањима да се укључе додатни реални ефекти у симулације ваздушних струјања у атмосферском граничном слоју и смање несигурности у моделима за процену потенцијала ветра у ветро-енергетици, Kolitz et al. [52] у свој модел укључују и ефекте атмосферске стабилности и Кориолисове силе услед ротације Земље.

---

<sup>9</sup>[www.openfoam.org](http://www.openfoam.org)

Прецизна симулација ветра над реалним теренима је захтеван задатак посматрано са аспекта нумеричке апроксимације. Да би се представили терени са комплексном орографијом, потребне су изразито неортогонале мреже. Такве мреже, за узврат, захтевају значајно унапређене нумеричке процедуре да би се обезбедила прецизна решења.

Неки су аутори, у скорије време, извели покушаје да се заобиђе тај проблем или помоћу ублажавања неправилности прорачунских мрежа, користећи гушћи распоред чворова мреже у близини топографских неправилности, и у исто време користећи генераторе мреже базиране на парцијалним диференцијалним једначинама, да би се условила ортогоналност мреже у близини површи описане геометрије [39, 53], или оријентишући се ка методи уроњених материјалних граница (енг. Immersed Boundary Method, у даљем тексту IBM), [54]. Метод преклопљених мрежа (енг. overset grid method, такође Chimera grid, у наставку Химера мреже), видети излагање у [55] за прорачун струјања око аеродинамички глатких тела, према најбољем знању аутора, још није примењен на комплексне аеродинамички храпаве терене. У том случају густе делови, испуњени већим бројем чворних тачака, могу покривати неправилне делове топографије и тако избећи потребу за скупим глобалним уфињавањем мреже. Локално адаптиране мреже, као у [56], које су биле са успехом коришћене за индустријска унутрашња струјања, могу такође бити одговарајућа алтернатива, са том разликом да индивидуални регуларни делови преклопљених Химера мрежа омогућавају једноставне формулације коначних разлика вишег реда, док други метод функционише само са неструктурираним приступом преко методе коначних запремина.

Значајан број радова на пољу нумеричке временске прогнозе и истраживања, и метеорологије планинских предела (енг. weather research and forecast and the mountain meteorology) је мотивисан комплексним теренима [57, 58, 59]. Значајно питање које се поставља при симулацији ваздушних струјања над комплексним теренима је прецизна апроксимација градијентна притиска. Дискретизациона грешка у члановима једначина који представљају градијенте притиска доводе до паразитских циркулација над топографијом и доводи до прорачунских нестабилности када се представљају стрми нагиби топографије. На основу тих закључака Z angl [60] предлаже апроксимацију градијента притиска у координатном систему који прати терен, унапређујући претходни приступ који је увео Mahrer [61], на тај начин да је унапређена прорачунска стабилност над стрмим теренима. Са слич-

ном мотивацијом у овој тези се предлаже унапређен и прецизан поступак за апроксимацију градијената притиска за симулацију ваздушних струјања над комплексним теренима. Показано је да конвенционални алгоритми за мреже које прате терен, имплементирани у оквиру методе коначних запремина, нису имуни на стварање паразитских осцилација поља притиска близу деформација мреже, нпр. близу наглих промена топографских карактеристика, а такође и како је могуће одстранити ове осцилације штетне за тачност резултата и интегритет симулације (дивергенција симулације) помоћу предложеног унапређења дискретизације.

Савремени нумерички програми за симулацију ваздушних струјања над комплексним теренима су искористили могућности и флексибиност методе коначних запремина. Више инжењерских CFD програма опште намене је било коришћено са успехом за тај тип проблема, и већином су, како је већ споменуто, коришћени у студијама валидације турбулентних модела, нпр. [39, 43, 10]. Уграђене неповољне карактеристике ових CFD кодова опште намене у вези са комплексним топографијама, као што су прецизна интерполација променљивих у случају деформација мреже присутних код комплексних терена, ипак нису проучавани довољно детаљно.

Поједини истраживачки кодови су осмишљени са циљем да испуне специфичне захтеве струјања над брдовитим теренима и ишли су у сусрет поменутиим захтевима користећи нпр. мешовиту интерполацију вишег реда - центриране шеме четвртог реда и узводну шему трећег реда, за конвективне чланове, [62]. Ти аутори су дискретизовали Навије-Стоксове једначине у генералисаним криволинијским координатама, користећи притом структуру података која одговара мрежама које су структуриране по блоковима, које омогућавају веће интерполационе молекуле. Код Smolarkiewicz et al., у [63, 64] је препознато како ограничења у прорачунским кодовима за струјања над комплексним тереном могу бити унесена кроз дискретизацију диференцијалних оператора у имплементацијама које зависе од рестриктивних, локалних правилности мреже, ортогоналности мреже и униформности облика прорачунских ћелија. Они су користили изразито флексибилну структуру података која апстрахује мрежу на тај начин да ивице или лица ћелија постају централни објекти, тзв. структура података базирана на ћелијским ивицама (енг. edge-based data structure). Таква структура података и тзв. средње-медијанска дуална мрежа у комбинацији, доприносе прецизности прорачуна код мрежа са искошеним ћелијама (енг. skewed meshes). Средње-медијанска дуална мрежа у прорачунима имплементираних



преко методе коначних запремина је, како су показали ти аутори, успешно унапредила приступ решавању неких изазова са којима су се истраживачи сусретали при симулацијама ветра над комплексним тереном.

Комплексност ваздушних струјања на атмосферској микроскали није ограничена само на комплексну топографију. Често постоји потреба да се у струјно поље унесу препреке као што су нпр. зграде, за студије аеродинамичких сила на грађевинским објектима услед ветра, и питања атмосферске физике у урбаној средини као што је дисперзија загађивача, нпр. [65, 66]. Студија Smolarkiewicz et. al. [65] је значајан пример са двоструким доприносом: показана је нумеричка ефикасност IBM методе за атмосферска струјања над комплексним објектима који нису ограничени на кубне препреке, и демонстрирана је могућност коришћења континуалних трансформација, које су често у употреби код симулација VFC кодовима, за јако стрме, чак и вертикалне нагибе препрека.

Претходно излагање је имало за циљ да прикаже сложеност проблематике који је обухваћен овом тезом. Како је могло бити уочено интерес за бављење ваздушним струјањима над комплексним теренима је област која је од значаја у више научно-техничких примена и тако има мултидисциплинарни карактер.

## 1.2 Циљеви истраживања

Предложена дисертација је посвећена унапређењима нумеричког алгорита за симулацију турбулентних струјања над реалним теренима у оквиру методе коначних запремина. Посебна пажња је посвећена следећим питањима: (i) унапређења поступка за израчунавање ћелијски центрираних градијената, (ii) ограничена дискретизација вишег реда за конвективне чланове основних једначина за деформисане, неортогоналне, тродимензионалне прорачунске мреже, (iii) анализа и унапређење поступака дискретизације дифузног члана са антиципацијом изразито деформисаних прорачунских мрежа, (iv) унапређења алгорита спрезања поља притиска и брзине и (v) ефикасна припрема (енг. *preconditioning*, побољшање условљености) линеарних система једначина насталих дискретизацијом. Све ове компоненте алгорита су неопходне за прецизне прорачуне и симулацију ваздушних струјања над комплексним теренима.

Нумерички алгоритам развијен кроз израду ове дисертације је имплементиран у нумеричком програму као део развоја интегралног нумеричког

кода, превенствено намењеног научним истраживањима, који је у могућности да симулира ваздушна струјања на лабораторијској размери, као и реална струјања у природном, атмосферском окружењу, са напредним нумеричким методама и турбулентним моделима. Рад се ослања на претходна истраживања које је спровела сарадничка група на Техничком Универзитету у Делфту (TU Delft, Delft, The Netherlands) током којих су обрађени моделирање и симулација неких значајних аспеката вазушних струјања у атмосферском окружењу, укључујући и распростирање пасивних примеса-загађивача у урбаним кањонима, неке примене нумеричких прорачуна у пуној атмосферској размери временски зависних струјања (диурнални циклуси), затим турбленција и дисперзија над реалним теренима, нпр. [67, 68, 69, 66, 70].

Контекст ове дисертације у погледу нумеричког приступа је одређен карактеристикама алгоритма као што су други ред тачности, ћелијски центриране променљиве, нумеричка мрежа која прати терен, све у оквиру прорачунске парадигме задате методом коначних запремина. Редослед решавања парцијалних диференцијалних једначина струјања је секвенцијални, тзв. спрегнути приступ [71, 72], иако показује боље особине конвергенције, захтева велике ресурсе у погледу радне рачунарске меморије (RAM), те није разматран у овој тези.

Оригинални допринос ове дисертације је нова метода за реконструкцију ћелијски центрираних градијената, базирана на методи најмањих квадрата имплементираног преко QR декомпозиције, на тај начин да се минимизира број аритметичких операција током обнављања вредности поља градијената. У наставку дата је нова генерализована формулација за неке добро познате приступе апроксимацији дифузних чланова предвиђених за искошене ћелије, широко распрострањених у генералним CFD кодовима. Ова генерализација, дефинисана континуалним параметром, омогућава нове партикуларне изразе, који ће у овој тези бити размотрени. Једна друга фамилија апроксимационих приступа за дифузионе чланове, који унапређују тачност у случају *отклона тачке пресека* (енг. the intersection point offset, појам дефинисан у другом поглављу), је унапређена и две нове изведене формулације су представљене, захваљујући претходним разматрањима за искошене прорачунске ћелије. Нови приступи дискретизацији дифузионог члана, дају унапређену прецизност и карактеристике конвергенције у односу на оне које само третирају закошеност.

На послетку, широко коришћени нумерички алгоритам за решавање разређених система линеарних једначина (у даљем тексту солвер) чије је порекло везано за дискретизацију једначина одржања на структурираним мрежама, SIP солвер [73], је коришћен као прекондиционер за солвере из породице Крилова (CG and Bi-CGSTAB). Нумерички експерименти, представљени у наредним поглављима показују значајно унапређене резултате конвергенције и прорачунске ефикасности у поређењу са уобичајеним прекондиционирањем некомплетним факторизацијама матрице.

Представљени нумерички поступак не уводи било какве претпоставке везане за топологију мреже, допуштајући неструктуриране мреже са произвољним обликом, чинећи представљени приступ лако примењивим у генералним CFD кодовима. Претпоставка о структурираном виду мреже је уведена једино приликом примене алгоритма за прекондиционирање линеарног система. Чињеница да се унапређења која су представљена у овој дисертацији, могу имплементирати кроз мале измене у постојеће генералне CFD кодове, омогућава да она могу значајно утицати на начин на којим ће се симулацији турбулентних струјања приступити у блиској будућности.

За потребе тестирања предложеног алгоритма уведене су синтетичке деформације прорачунске мреже на добро познатим тест случајевима. Деформације су унете на систематски начин, и контролисане су помоћу слободног параметра. Ове деформисане мреже су осмишљене како би поседовале низ неповољних особина које ће представљати изазов за прорачунске алгоритме, и које су најчешће све присутне у реалним применама симулације струјања над реалним комплексним теренима, као што су искошеност ћелија, дисконтинуитет у нагибу линија прорачунске мреже, положај издужених ћелија који се не поклапа са смером струјања. У делу посвећеном верификацији после представљања случајева са деформисаним мрежама биће представљене симулације од значаја у реалним применама. Да би потврдили потенцијал предложеног нумеричког алгоритма за симулације струјања над реалним комплексним теренима, одабрани су случајеви брда Аскервеин [124, 11] и брда Болунд [42, 43].

Научни допринос ове дисертације се огледа у следећем:

- Развијен је и имплементиран нови значајно унапређени алгоритам за симулацију струјања нестишљивог флуида базиран на методи конач-

них запремина, предвиђен за изразито неортогоналне прорачунске мреже, са посебним нагласком на мреже настале алгебарском екструзијом над реалним комплексним теренима дефинисаних реалним топографским подацима елевације терена, а намењене за симулацију турбулентних струјања у атмосферском граничном слоју.

- Предложен је оригинални критеријум квантификације неортогоналности која настаје код предметних прорачунских мрежа над комплексном топографијом, помоћу тзв. отклона тачке пресека (Intersection point offset), који се разликује од досадашње праксе где је као главни показатељ заступљена искошеност ћелије (cell skewness). Такав приступ омогућио је класификацију и генерализацију постојећих процедура за корекцију неортогоналности при методи коначних запремина и формулисање нових корекција које су дале значајна побољшања у тачности апроксимације једначина струјања нестишљивог флуида помоћу методе коначних запремина.
- Дата је оригинална и генерализована формулација за нумеричку апроксимацију дифузионог члана у генералној транспортној диференцијалној једначини као прототипу за дискретизацију основних једначина струјања флуида. Из генерализоване формулације су затим изведене две потпуно нове методе апроксимације дифузионог члана. У прорачунским тестовима нове формулације су показале унапређена нумеричка својства у односу на конвенционалне приступе који су заступљени у широко распрострањеним комерцијалним програмима за прорачунску механику флуида.
- Приказан је оригинални и систематизовани приступ деформације мреже који омогућава појаву низа неповољних и за нумерички алгоритам отежавајућих карактеристика. Овај приступ је коришћен приликом верификације нумеричког алгоритма где је одређен утицај ових фактора на тачност нумеричке апроксимације код поређења са синтетичким решењима, аналитичким решењима и код упоредно тестираних нумеричких алгоритама.
- Испитана је по први пут метода унапређења кондиционираности линеарних система на бази SIP итеративног метода који је примењен на нестационарне итеративне алгоритме на бази подпростора Крилова. У прорачунским тестовима датим у тези је приказана супериорна конвергенција предложеног алгоритма у односу на претходно испитане

итеративне методе за линеарне системе настале дискретизацијом диференцијалних једначина које описују струјање нестишљивог флуида на структурираним неортогоналним прорачунским мрежама и анализирана је прорачунска ефикасност датог алгоритма. У прилогу тезе су дати комплетни изворни кодови ради омогућења поновљивости предложених резултата.

- Представљена је нова метода реконструкције градијената на основу методе најмањих квадрата која минимизира број аритметичких операција приликом реконструкције поља градијената и даје побољшане резултате у комплексним прорачунским конфигурацијама. Унапређене су интерполационе процедуре у условима неортогоналних мрежа ради остваривања теоретски предвиђеног реда тачности апроксимације.
- По први пут је Анализа главних компоненти (Principal Component Analysis - PCA) примењена за вођење избора конвективних шема на основу већег броја резултата нумеричких експеримената.
- Представљен је значајно побољшани приступ корекција неортогоналности у секвенцијалном алгоритму спрезања поља притиска и брзине. Унапређен је алгоритам за решавање једначине корекције притиска како би била омогућена несметана конвергенција итеративног метода спрезања поља притиска и брзине за изразито неортогоналне геометрије. На одабраним моделима турбуленције уведена су оригинална ограничења физичке остваривости и испитан њихов утицај на тачност представљања променљивих у струјном пољу, на основу искуства и поређења са постојећим мерењима на реалном терену (случај Volund hill, Данска).

### 1.3 Структура тезе

Организација тезе је следећа. Након претходног излагања које је обухватило уводна разматрања, преглед литературе и циљеве, у поглављу 2, ће бити дата основа предложеног математичког модела за описивање предметног типа ваздушних струјања. Презентација нумеричког алгоритма је дата у наредном, поглављу 3. Притом је нови метод за израчунавање хелијски центрираних градијената детаљно изложен у подпоглављу 3.2, а нови третман апроксимације дифузног члана је представљен у подпоглављу 3.4. Затим ће, у поглављу 4, бити представљен низ нумеричких експеримената

са циљем верификације предложеног нумеричког алгоритма, да би се оценила остварена унапређења предложеног метода. Студије верификације нумеричког алгоритма и валидације турбулентних модела имплементираних у оквиру предложене нумеричке процедуре, на примерима идеализованих геометрија, је приказана у поглављу 5. Након тога, тестирање предложеног алгоритма и математичких модела турбулентних струјања је извршено на примерима реалних комплексних терена и извршена су поређења са експерименталним мерењима на пуној атмосферској размери, у поглављу 6. На послетку, у завршном поглављу, су дати закључци настали током израде ове тезе и дате су препоруке за будућа истраживања.

## Глава 2

# Теоријске основе математичког модела

### 2.1 Увод

Проблем турбуленције је још увек далеко од решеног, како са теоријско-математичког аспекта, тако и са практичног и инжењерског. Тај комплексни феномен потиче од појачавања локалних нестабилности путем нелинеарности која је присутна у основним једначинама које описују кретање флуида. Нелинеарност је дакле основни узрок комплексности овог феномена [74, 75]. Историјски постојало је више приступа овом проблему, а свакако најзначајнији са практичног аспекта је статистички приступ који потиче од радова Бусинеска, Рејнолдса, Прандтла, Тејлора и других. Код свих споменутих аутора доминирала је идеја о случајном карактеру тренутних вредности променљивих у струјном пољу, која је имплицитно подразумевала потребу за усредњавањем нелинеарних Навије-Стоксових једначина. Друга моћна идеја која је значајно допринела развоју једне значајне класе турбулентних модела је идеја тзв. турбулентне вискозности (енг. eddy-viscosity), која је уведена врло рано од стране Бусинеска. Од Прандтла, чија идеја путање мешања, представља први модеран покушај затварања статистички усредњених једначина, до данас, изведено је више модела чији је циљ био квантификовање вредности турбулентне вискозности унутар струјног поља, било путем алгебарских модела или путем решавања једне, две, или више парцијалних диференцијалних једначина. Алтернатива приступу који подразумева коришћење концепта турбулентне вискозности, а и даље се налази у оквиру контекста Рејнолдсових усредњених Навије-Стоксових једначина, су тзв. модели другог реда (енг. second-order closures) који подразумевају

решавање седам додатних парцијалних једначина да би се затворио статистички модел [76, 77].

У овој дисертацији се превасходно бавимо тзв. двоједначинским турбулентним моделима, због погодности које нуде са практичног аспекта [78, 77]. За многе ситуације од практичног инжењерског значаја, у ком доминирају турбулентна струјања, ови модели представљају добар компромис између алгебарских, и једноједначинских модела са једне стране, који често захтевају велику дозу емпиријских података, и који су калибрисани за узак дијапазон типова струјања и аеродинамичких ситуација, и модела другог реда са друге стране.

Поглавље почињемо са уводом у основе статистичког приступа и дајемо основне једначине, а затим у наставку представљамо основне једначине за турбулентне моделе коришћене у овој дисертацији, за моделирање струјања у атмосферском граничном слоју, над реалним комплексним тереном.

## 2.2 Рејнолдсови усредњени Навије-Стокс модели

Као увод у излагање о моделима базираним на концепту турбулентне вискозности овде су изложене основе процедуре Рејнолдсовог усредњавања и дат је облик основних једначина кретања флуида које проситичу из ове декомпозиције. У Рејнолдсовој декомпозицији, променљиве у струјном пољу се разлажу на усредњену и пулсирајућу компоненту, на следећи начин,

$$f = \bar{f} + f'. \quad (2.1)$$

Средња вредност пулсирајуће компоненте је једнака нули  $f' = 0$ , а усредњена компонента  $f$  се може добити под претпоставком да је турбулентно поље статистички стационарно и хомогено. На пример, уколико је турбулентција статистички стационарна, важи следећа релација,

$$\overline{f(\mathbf{x})} = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{t_0}^{t_0+T} f(\mathbf{x}, t) dt, \quad (2.2)$$

и средња вредност производа две величине је  $\overline{fg} = \bar{f}\bar{g} + \overline{f'g'}$ . Поље брзине  $u_i$  и притиска  $p$  могу бити разложени на усредњени део ( $U_i, P$ ) и пулсирајући део ( $u_i, p$ ), и из тога следе Рејнолдсове усредњене Навије-Стоксове једначине (RANS),

$$\frac{DU_i}{Dt} = \frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}. \quad (2.3)$$



За нестишљива ступања, једначина континуитета је сведена на једначину континуитета за усредњено поље,

$$\frac{\partial U_j}{\partial x_j} = 0. \quad (2.4)$$

Основни физички концептуални модел у овој тези је непрекидна нестишљива средина. Тензор вискозних напона  $\sigma_{ij}$  за нестишљиве флуиде под претпоставком валидности Њутнове хипотезе о односу напона и брзине деформације, је дат следећим изразом,

$$\sigma_{ij} = 2\nu S_{ij}, \quad (2.5)$$

где је  $\nu$  кинематска вискозност, и  $S_{ij}$  је тензор брзине деформације,

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right). \quad (2.6)$$

Како једначина (2.3) показује, да би RANS систем једначина био затворен, неопходан је математички модел за моменте другог реда, или тзв. Рејнолдсове напоне ( $\tau_{ij} = \overline{u_i u_j}$ ).

У ту сврху за изражавање Рејнолдсових напона може се искористити Бусинескова претпоставка која као последицу има увођење појма турбулентне вискозности  $\mu_t$ , која је израчуната на основу турбулентног модела. Код линеарних модела базираних на Бусинесковој претпоставци (енг. linear eddy viscosity models - linear EVMs), систем једначина је затворен апроксимацијом релације Рејнолдсових напона и средње брзине деформације

$$\tau_{ij} = \frac{2}{3} k \delta_{ij} - 2\nu_t S_{ij}, \quad (2.7)$$

где је  $k = \tau_{ii}/2$  турбулентна кинетичка енергија, а  $\nu_t$  је турбулентна вискозност.

Када се овај модел искористи за изражавање турбулентне вискозности, добија се следећи облик за RANS једначине

$$\rho \frac{\partial U_i}{\partial t} + \rho U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (\mu + \mu_t) \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \right], \quad (2.8)$$

са одговарајућим почетним и контурним условима, где  $U_i$  представља вектор усредњених брзина,  $p$ -притисак,  $\rho$ -густину и  $\mu$ -молекуларну динамичку вискозност,  $x_j$  је просторна координата у Декартовом систему, и  $i, j = 1, 2, 3$

су индекси компоненти у том систему.

Као што се види моделирање турбуленције се односи на предлагање описа турбуленције која је значајно поједностављена и која дозвољава ефикасну нумеричку имплементацију и прорачун. У наставку ће бити представљен низ модела коришћених у овом истраживању.

За ламинарна струјања, турбулентна вискозност нестаје, дајући стандардни облик једначина Навије-Стокса за струјања нестишљивих, вискозних флуида.

## 2.3 Двоједначински $k - \epsilon$ модел

Стандардни двоједначински  $k - \epsilon$  турбулентни модел решава транспортне једначине за турбулентну кинетичку енергију  $k$  и дисипацију турбулентне кинетичке енергије  $\epsilon$ . Једначина за турбулентну кинетичку енергију и једначина за дисипацију имају следећи облик:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho k) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho k u_j) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + P_k - \rho \epsilon, \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \epsilon) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho \epsilon u_j) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} \right] + \rho C_{\epsilon 1} P_k \frac{\epsilon}{k} - \rho C_{\epsilon 2} \frac{\epsilon^2}{k}. \quad (2.10)$$

Генерисање турбулентне кинетичке енергије путем усредњених градијената брзина  $P_k$ , је третиран на следећи начин,

$$P_k = -\overline{u_i u_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = \nu_t \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = 2\nu_t S_{ij} S_{ij} = \nu_t |S|^2. \quad (2.11)$$

Након проналажења  $k$  и  $\epsilon$  поља, турбулентна вискозност се може представити у следећем облику,

$$\mu_t = \rho C_\mu \frac{k^2}{\epsilon}. \quad (2.12)$$

### 2.3.1 Корекције $k - \epsilon$ модела

Услед захтева за побољшањем верзије стандардног  $k - \epsilon$  модела за неке типове струјања, поједини аутори су уводили одређене измене које су разматране у овом поглављу.

### 2.3.1.1 Модификација ограничења временске размере

Један од недостатака стандардног  $k - \epsilon$  модела је претерана производња турбулентне кинетичке енергије, у неким деловима струјања, поготово у стагнационим регионима. Један од начина да се тај ефекат контролише је предложио Durbin у [79]. Основна идеја која је предложена у тој студији је увођење ограничења за временску размеру турбулентних пулсација, тзв. Дурбинов лимитер. Ограничење је мотивисано анализом сопствених вредности тензора брзине доформације. Примећује се да се изворни чланови у  $\epsilon$  једначини могу записати тако да су помножени реципрочном вредношћу временске размере  $T = \frac{k}{\epsilon}$ , што се види из преформулисаног израза,

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\epsilon) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho\epsilon u_j) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} \right] + \rho \frac{C_{\epsilon 1} P_k - \rho C_{\epsilon 2} \epsilon}{T}. \quad (2.13)$$

У струјањима са стагнационим регионом, примећено је да нагли раст временске размере, резултира у јако малој производњи дисипације турбулентне кинетичке енергије, и на тај начин на прецењеној вредности турбулентне кинетичке енергије. Одатле следи да је потребно увести критеријум који ће ограничити ту временску размеру. Једна верзија је дата изразом,

$$T = \min \left[ \frac{k}{\epsilon}, \frac{0.6}{\sqrt{6} C_\mu S} \right]. \quad (2.14)$$

У овом изразу,  $S$  је скаларна инваријанта, модул тензора брзине деформације. Примена ове функције ограничења може довести до значајних унапређења тачности резултата [80].

### 2.3.1.2 Модификација за атмосферска струјања

У одређеним студијама (видети нпр. [12]), коефицијенту  $C_\mu$  који представља однос смицајних напона и кинетичке енергије, је промењена стандардна вредност за случај атмосферских струјања. Ово је такође искоришћено у Raithby et al. [81] који су усвојили вредност од  $C_\mu = 0.033$ . Та вредност је добијена одређеном калибрацијом са експериментима на брду Аскервеин из 1982. године. То моделу није дало универзални карактер јер је у већини случајева био валидиран управо на том истом тест случају. Коефицијент  $C_\mu$  је одређен том приликом на основу релације која повезује фрикциону брзину  $u_\tau^2$ ,  $C_\mu$  и турбулентну кинетичку енергију  $k$ ,

$$\frac{k}{u_\tau^2} = \frac{1}{\sqrt{C_\mu}} \quad (2.15)$$

Анемометри постављени на 10m висине, у том експерименту, су показали средњу вредност  $k/u_\tau^2 = 5.3$ , када су убачени у горњу једначину добија се резултујућа вредност коефицијента  $C_\mu = 0.036$ . У мерењима која су извшена на брду Аскервеин током 1983. године су показала нешто већу вредност за  $k/u_\tau^2$ , што може сугерисати чак нешто већу вредност за  $C_\mu$ . Ипак у овој дисертацији усвајамо оригиналну вредност која је предложена у [12]. У табели 2.1 су приказане упоредне вредности за коефицијенте стандардног  $k - \epsilon$  модела и ове предложене модификације за атмосферска струјања.

Табела 2.1: Стандардни и модификовани коефицијенти за атмосферска струјања, за  $k-\epsilon$  модел.

	$C_\mu$	$C_{\epsilon 1}$	$C_{\epsilon 2}$	$\sigma_k$	$\sigma_\epsilon$
Стандардни $k - \epsilon$	0.09	1.44	1.92	1.0	1.3
Beljaars et al.	0.033	1.44	1.92	1.0	1.85

## 2.4 RNG $k-\epsilon$ модел

RNG  $k-\epsilon$  модел (енг. Renormalization Group, у наставку RNG) је модел који су развијали Yakhot, Orszag и сарадници, [82], и представља модел који је по форми јако сличан стандардном  $k-\epsilon$  моделу. Оно што је специфично за овај модел је да је изведен потпуно аналитичким техникама ренормализационих група и тзв.  $\epsilon$  експанзије. Интересантна чињеница је да су аутори том техником добили вредности коефицијената које су врло сличне оним вредностима које су добијене путем експеримената и калибрације у стандардној верзији  $k-\epsilon$  модела. Такође може се уочити да у овом моделу, коефицијент  $C_{\epsilon 1}$  више није константан већ је функција зависна од модула брзине деформације  $S$ , коефицијента  $C_\mu$ , турбулентне вискозности  $\nu_t$  и дисипације  $\epsilon$ . Једначина за дисипацију се тако може написати у следећем облику,

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\epsilon) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho\epsilon u_j) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} \right] + \rho C_{\epsilon 1} P_k \frac{\epsilon}{k} - \rho C_2 \frac{\epsilon^2}{k} - R_\epsilon. \quad (2.16)$$

Додатни изворни члан,  $R_\epsilon$ , се појављује у  $\epsilon$  једначини. Коефицијенти модела  $C_\mu$ ,  $C_{1\epsilon}$ ,  $C_{2\epsilon}$  и турбулентни Прандтлови бројеви  $\sigma_k$  за кинетичку енергију и  $\sigma_\epsilon$  за дисипацију, имају нешто другачије вредности него у стандардном моделу, и приказани су у Табели 2.2. Додатни изворни члан  $R_\epsilon$  је дефинисан

изразом

$$R_\epsilon = \frac{C_\mu \eta^{*3} (1 - \eta^* / \eta_0) \epsilon^2}{1 + \beta \eta^{*3}} \frac{1}{k}, \quad (2.17)$$

где су  $\eta^* \equiv Sk/\epsilon$  и  $\eta_0 = 4.38$ . У зависности од интензитета брзине деформације, изворни члан  $R_\epsilon$  регулише продукцију или деструкцију дисипације, што се посредно одражава и на турбулентну кинетичку енергију турбуленције и тако делује као критеријум ограничења физичке остваривости у овом моделу.

Табела 2.2: Коефицијенти за RNG  $k$ - $\epsilon$  модел.

	$C_\mu$	$C_{\epsilon 1}$	$C_{\epsilon 2}$	$\sigma_k$	$\sigma_\epsilon$	$\beta$
RNG $k - \epsilon$	0.0845	1.42	1.68	0.7194	0.7194	0.012

## 2.5 Двоједначински $k - \epsilon$ модел са ограничењима остваривости

Такозвани "оствариви" (енг. realizable)  $k - \epsilon$  модел турбуленције је представљен у раду Shih et al. [83] и представља покушај да се у тај двоједначински модел на математички оправдан начин уведу ограничења физичке остваривости турбулентног модела.

У овом моделу, концепт физичке остваривости је омогућен на тај начин што се коефицијент  $C_\mu$  у изразу за турбулентну вискозност третира као зависно променљива, која је за разлику од претходних модела није посматрана као константа модела. На ту могућност упућују и експерименти. Док се за инерциони подслој граничног слоја добија вредност  $C_\mu = 0.09$ , у хомогеном смицајном струјању та вредност износи  $C_\mu = 0.05$ . Из тог увида произилази да би неки начин мењања  $C_\mu$  у зависности од ситуације струјања био погодан.

Са математичке стране, ограничења остваривости које би сваки модел требао да задовољи су следеће неједнакости које се односе на компоненте тензора Рејнолдсових напона:

$$\overline{u_\alpha^2} > 0, \quad (\alpha = 1, 2, 3), \quad (2.18)$$

$$\frac{\overline{u_\alpha u_\beta^2}}{\overline{u_\alpha^2} \overline{u_\beta^2}} \leq 1, \quad (\alpha = 1, 2, 3; \beta = 1, 2, 3). \quad (2.19)$$

Једначина (2.19) је позната као Шварцова неједнакост (Schwarz). Другим

речима потребна је позитивност нормалних компоненти Рејнолдсових напона и да компонентне тензора Рејнолдсових напона испуњава Шварцову неједнакост (2.18). Базирано на овим неједнакостима Shih и сарадници су предложили следећи облик израза за коефицијент  $C_\mu$ :

$$C_\mu = \frac{1}{A_0 + A_s U^{(*)} \frac{k}{\epsilon}}. \quad (2.20)$$

Исти аутори дају следећу формулацију за чланове претходног израза,

$$U^{(*)} = \sqrt{S_{ij} S_{ij} + \tilde{\Omega}_{ij} \tilde{\Omega}_{ij}}, \quad (2.21)$$

где су

$$\tilde{\Omega}_{ij} = \Omega_{ij} - 2\epsilon_{ijk}\omega_k, \quad (2.22)$$

$$\Omega_{ij} = \overline{\Omega}_{ij} - \epsilon_{ijk}\omega_k, \quad (2.23)$$

при чему је  $\overline{\Omega}_{ij}$  тензор брзине ротације посматран из ротирајућег референтног система, са угаоном брзином  $\omega_k$ . То омогућава да овај модел може бити примењен и на случајеве у којим је посматрани систем у ротацији.

Остали значајни коефицијенти су

$$A_s = \sqrt{6}\cos\phi, \quad \phi = \frac{1}{3}\arccos(\sqrt{6}W), \quad (2.24)$$

$$\tilde{S} = \sqrt{S_{ij} S_{ij}}. \quad (2.25)$$

Једини слободни коефицијент модела је  $A_0$ . Аутори га третирају као константу и калибришу на начин да се у одређеним условима добије жељена вредност за  $C_\mu$ . Оригинална референца даје вредност  $A_0 = 4.0$ , док неки аутори предлажу  $A_0 = 4.04$ .

Транспортне једначине за  $k$  и  $\epsilon$  имају препознатљив облик. Једначина за турбулентну кинетичку енергију остаје у истом облику, док су у једначину за дисипацију унете извесне измене:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho k) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho k u_j) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + P_k - \rho \epsilon, \quad (2.26)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \epsilon) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho \epsilon u_j) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} \right] + \rho C_1 S \epsilon - \rho C_2 \frac{\epsilon^2}{k + \sqrt{\nu \epsilon}}. \quad (2.27)$$

У овим једначинама важи

$$C_1 = \max \left[ 0.43, \frac{\eta}{\eta + 5} \right], \quad \eta = S \frac{k}{\epsilon}, \quad S = \sqrt{2S_{ij}S_{ij}}.$$

Генерисање турбулентне кинетичке енергије путем усредњених градијената брзина  $P_k$  је третирано на исти начин као у стандардној верзији  $k - \epsilon$  модела.

Након проналажења  $k$  и  $\epsilon$  поља, турбулентна вискозност се може наћи у стандардном облику за  $k - \epsilon$  модел,

$$\mu_t = \rho C_\mu \frac{k^2}{\epsilon}. \quad (2.28)$$

За стабилну имплементацију модела потребно је обратити пажњу на одређене детаље. Тако, аргумент  $\arccos$  функције би требао бити ограничен на интервал  $[-1,1]$ , због тога израз за  $\phi$  се формулише на следећи начин,

$$\phi = \frac{1}{3} \arccos(\max(-1, \min(\sqrt{6}W, 1))). \quad (2.29)$$

У супротном неке нумеричке вредности могу пореметити прорачун  $C_\mu$  поља које може потпуно пореметити итеративну процедуру.

Константе модела су,

$$C_{1\epsilon} = 1.44, \quad C_2 = 1.9, \quad \sigma_k = 1.0, \quad \sigma_\epsilon = 1.2.$$

## 2.6 Двоједначински $k - \omega$ SST модел

Овде је описан један од најпопуларнијих модела у прорачунској аеродинамици који је такође разматран у овој дисертацији, реч је о Ментеровом SST (енг. Shear Stress Transport, у наставку SST ) турбулентном моделу. Референца која дефинише стандардну имплементацију SST модела је [84]. У каснијим истраживањима дошло је до извесних корекција модела, које су готово све описане у чланку [85].

Модел припада класи линеарних модела базираних на концепту турбулентне вискозности, и Бусинесковој хипотези. Модел је дефинисан следећим једначинама за кинетичку енергију турбуленције,

$$\frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_j k)}{\partial x_j} = P - \beta^* \rho \omega k + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (\mu + \sigma_k \mu_t) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right], \quad (2.30)$$

и специфичну дисипацију кинетичке енергије, која има димензију фре-

квенције [1/s],

$$\frac{\partial(\rho\omega)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_j \omega)}{\partial x_j} = \frac{\gamma}{\nu_t} P - \beta^* \rho \omega^2 + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (\mu + \sigma_\omega \mu_t) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] + 2(1 - F_1) \frac{\rho \sigma_\omega}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j}. \quad (2.31)$$

Производња турбулентне кинетичке енергије је дефинисана егзактним изразом,

$$P = \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \quad (2.32)$$

који се након узимања у обзир израза за Рејнолдсов тензор напона,

$$\tau_{ij} = 2\mu_t S_{ij} - \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij}, \quad (2.33)$$

и тензор брзине деформације

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad (2.34)$$

трансформише у облик специфичан за линеарне моделе базиране на концепту турбулентне вискозности

$$P = \mu_t S^2, \quad (2.35)$$

где је  $S = \sqrt{2S_{ij}S_{ij}}$  интензитет брзине деформације.

Сама турбулентна вискозност се израчунава преко израза

$$\mu_t = \frac{\rho a_1 k}{\max(a_1 \omega, S F_2)}. \quad (2.36)$$

Потребно је напоменути да је у првобитној формулацији уместо  $S$ , у горњем изразу коришћен интензитет брзине ротације  $\Omega$ . То је уједно и најзначајнија измена која је уведена у обновљену везију модела.

Сваки од коефицијената модела је мешавина тзв. "унутрашње" (са индексом "1"), и "спољашње" (са индексом "2") константе, а функција мешања је,

$$\phi = F_1 \phi_1 + (1 - F_1) \phi_2, \quad (2.37)$$

где  $\phi_1$  представља било коју константу у унутрашњем региону са индексом 1, и  $\phi_2$  представља константу са индексом 2.

Додатне функције модела су дате наредним изразима. Прва функција ме-



шања,

$$F_1 = \tanh(\arg_1^4), \quad (2.38)$$

где је аргумент прве функције мешања записан као,

$$\arg_1 = \min \left[ \max \left( \frac{\sqrt{k}}{\beta^* \omega d}, \frac{500\nu}{d^2 \omega} \right), \frac{4\rho\sigma_{\omega 2} k}{CD_{k\omega} d^2} \right]. \quad (2.39)$$

Унакрсна дифузија је дефинисана помоћу израза

$$CD_{k\omega} = \max \left( 2\rho\sigma_{\omega 2} \frac{1}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j}, 10^{-10} \right). \quad (2.40)$$

Друга функција SST модела је затада преко ираза

$$F_2 = \tanh(\arg_2^2), \quad (2.41)$$

са аргументом

$$\arg_2 = \max \left( 2 \frac{\sqrt{k}}{\beta^* \omega d}, \frac{500\nu}{d^2 \omega} \right). \quad (2.42)$$

где су  $\rho$  густина,  $\nu_t = \mu_t/\rho$  је турбулентна кинематска вискозост,  $\mu$  је молекуларна динамичка вискозост,  $d$  је растојање од тачке струјног поља да најближег зида, и  $\Omega = \sqrt{2W_{ij}W_{ij}}$  је интензитет вртложности, где је

$$W_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (2.43)$$

Треба напоменути да је препоручено да се у моделу користи ограничење продукције турбулентне кинетичке енергије (видети [86]). У овој референци, члан  $P$  у  $k$ -једначини је замењен са:

$$\min(P, 10\beta^* \rho \omega k). \quad (2.44)$$

Контурни услови на зиду, препоручени у првобитној референци су

$$\omega_{wall} = 10 \frac{6\nu}{\beta_1 (\Delta d_1)^2}, \quad (2.45)$$

$$k_{wall} = 0. \quad (2.46)$$

Константе модела су:

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= \frac{\beta_1}{\beta^*} - \frac{\sigma_{\omega 1} \kappa^2}{\sqrt{\beta^*}}, & \gamma_2 &= \frac{\beta_2}{\beta^*} - \frac{\sigma_{\omega 2} \kappa^2}{\sqrt{\beta^*}}, \\
\sigma_{k1} &= 0.85, & \sigma_{k2} &= 1.0, \\
\sigma_{\omega 1} &= 0.5, & \sigma_{\omega 2} &= 0.856, \\
\beta_1 &= 0.075, & \beta_2 &= 0.0828, \\
\beta^* &= 0.09, \\
\kappa &= 0.41, \\
a_1 &= 0.31.
\end{aligned} \tag{2.47}$$

Треба напоменути да је у каснијим истраживањима од стране аутора пробитног модела дошло до незнатне рекалибрације констатни модела, тако да су нове, и овде усвојене, константе за продукцију дефинисане следећим вредностима,

$$\gamma_1 = 5/9, \quad \gamma_2 = 0.44. \tag{2.48}$$

## 2.7 $k - \omega$ модел са експлицитно алгебарски израчунатим Рејнолдсовим напонима

Експлицитни алгебарски модели за Рејнолдсове напоне (енг. Explicit Algebraic Reynolds Stress Models, у наставку EARSМ,[87, 88, 89]) представљају једноставан и ефикасан начин за унапређење линеарних модела базираних на Бусинесковој хипотези (линеарних EVM модела). Експлицитни алгебарски модели, за разлику од тих модела, су у могућности да узму у обзир анизотропију тензора Рејнолдсових напона. Анизотропије Рејнолдсових напона су присутне у струјањима у којима је изражена закривљеност струјница и где секундарна струјања значајно утичу на слику струјања.

Приступ који може обезбедити правилно описивање анизотропија тензора Рејнолдсових напона је свакако кроз моделе другог реда, где се решава шест додатних једначина за сваку компоненту тензора Рејнолдсових напона, поред једначина која обезбеђује дужинску размеру ( $\epsilon$  или  $\omega$  једначина), што даје укупно седам додатних парцијалних диференцијалних једначина.

Алтернатива томе, што представља средње решење између два приступа је да се експлицитно израчунају и додају доприноси анизотропија. Оно што омогућује овакав приступ је итеративно решавање спрегнутих нелинеарних једначина струјања. Анизотропије се, наиме, решавају експлицитно на

основу струјног поља из прошле итерације у стационарном случају или из претходног временског корака у случају нестационарних симулација. За нестишљива струјања тензор Рејнолдсових напона се изражава преко израза,

$$\tau_{ij} = 2\mu_t S_{ij} - \frac{2}{3}\rho k \delta_{ij} - a_{ij}^{(ex)} \rho k, \quad (2.49)$$

где је  $a^{(ex)}$  експлицитно израчуната анизотропија тензора Рејнолдсових напона. Даље излагање ће бити посвећено типу EARSM модела који је оригинално приказан и усавршаван кроз неколико студија [90, 91, 92, 93, 94]. Ту је експлицитно израчуната анизотропија дефинисана изразом,

$$\begin{aligned} a_{ij}^{(ex)} = & \beta_3 (W_{ik}^* W_{kj}^* - \frac{1}{3} II_{\Omega} \delta_{ij}) \\ & + \beta_4 (S_{ik}^* W_{kj}^* - W_{ik}^* S_{kj}^*) \\ & + \beta_6 (S_{ik}^* W_{kl}^* W_{lj}^* + W_{ik}^* W_{kl}^* S_{lj}^* - II_{\Omega} S_{ij}^* - \frac{2}{3} IV \delta_{ij}) \\ & + \beta_9 (W_{ik}^* S_{kl}^* W_{lm}^* W_{mi}^* - W_{ik}^* W_{kl}^* S_{lm}^* W_{mi}^*). \end{aligned} \quad (2.50)$$

Продукција кинетичке енергије турбуленције се може егзактно израчунати на основу израза,

$$P = \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}. \quad (2.51)$$

Величине битне у моделу су бездимензиони тензори брзине деформације

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad S_{ij}^* = \frac{\tau}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad (2.52)$$

и ротације

$$W_{ij}^* = \frac{\tau}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad (2.53)$$

у којима фигурира временска размера  $\tau$ , која се добија из израза

$$\tau_{turb} = \frac{1}{\beta^* \omega}, \quad (2.54)$$

$$\tau_{vis} = C_{\tau} \sqrt{\frac{\nu}{\beta^* \omega k}}, \quad C_{\tau} = 6.0, \quad (2.55)$$

$$\tau = \max(\tau_{turb}, \tau_{vis}). \quad (2.56)$$

Коефицијент  $C_\mu$  није константан, већ се израчунава на основу израза,

$$C_\mu = -\frac{1}{2}(\beta_1 + II_\Omega \beta_6). \quad (2.57)$$

У конститутивној релацији за анизотропију Рејнолдсових напона, фигурирају коефицијенти експанзије  $\beta_1$  до  $\beta_9$ , који се добијају на следећи начин,

$$\beta_1 = -\frac{N(2N^2 - 7II_\Omega)}{Q}, \quad (2.58)$$

$$\beta_3 = -\frac{12(IV)}{NQ}, \quad (2.59)$$

$$\beta_4 = -\frac{2(N^2 - 2II_\Omega)}{Q}, \quad (2.60)$$

$$\beta_6 = -\frac{6N}{Q}, \quad (2.61)$$

$$\beta_9 = \frac{6}{Q}, \quad (2.62)$$

где су,

$$Q = \frac{5}{6}(N^2 - 2II_\Omega)(2N^2 - 2II_\Omega), \quad (2.63)$$

$$II_\Omega = W_{kl}^* W_{ik}^*, \quad (2.64)$$

$$IV = S_{kl}^* W_{lm}^* W_{mk}^*. \quad (2.65)$$

Коефицијент  $N$  се добија из решења кубне једначине, из које се аналитичка решења могу добити помоћу Карданове формуле

$$N = \frac{A'_3}{3} + (P_1 - \text{sqrt}P_2) + \text{sign}(P_1 - \text{sqrt}P_2)|P_1 - \text{sqrt}P_2|^{1/3}, \quad P_2 \geq 0, \quad (2.66)$$

$$N = \frac{A'_3}{3} + 2 * (P_1^2 - P_2)^{1/6} \cos\left[\frac{1}{3} \cos^{-1}\left(\frac{P_1}{\sqrt{P_1^2 - P_2}}\right)\right], \quad P_2 < 0, \quad (2.67)$$

где је

$$P_1 = \left[\frac{A_3^2}{27} + \frac{9}{20}II_S - \frac{2}{3}II_\Omega\right]A'_3, \quad (2.68)$$

$$P_2 = P_1^2 - \left[\frac{A_3^2}{9} + \frac{9}{10}II_S - \frac{2}{3}II_\Omega\right]^3, \quad (2.69)$$

$$A'_3 = \frac{9}{5} + \frac{9}{4}C_{diff}[\max(1 + \beta_1^{(eq)}II_S, 0)], \quad (2.70)$$

$$II_S = S_{kl}^* S_{lk}^*, \quad (2.71)$$

$$\beta_1^{(eq)} = -\frac{6}{5} \left[ \frac{N^{(eq)}}{(N^{(eq)})^2 - 2II_\Omega} \right], \quad (2.72)$$

$$N^{(eq)} = \frac{81}{20}, \quad C_{diff} = 2.2. \quad (2.73)$$

Коефицијент ефективне дифузивности се добија на основу израза

$$\mu_t = \frac{\rho k}{\omega} \frac{1}{\max\left[\frac{\beta^*}{C_\mu}, \frac{SF_2}{a_1 \omega}\right]}. \quad (2.74)$$

Треба имати у виду да је овај модел настао на основама SST модела. Због тога, у овом моделу је потребно такође изразити и модификацију за унакрсну дифузију, која настаје када се  $k - \epsilon$  модел, који је саставни део смесе у SST моделу, препише у терминима  $k - \omega$  модела. Овде је тај члан дефинисан на следећи начин

$$D_\omega = \sigma_d \frac{\rho}{\omega} \max\left(\frac{\partial k}{\partial x_k} \frac{\partial \omega}{\partial x_k}, 0\right). \quad (2.75)$$

Постоји два скупа коефицијената, који се разликују одговарајућим индексима, 1 за унутрашњи регион и 2 за спољашњи. Коефицијенти овог модела су променљиве у простору, које се у компјутерском програму дефинишу на нивоу ћелије и које се рачунају једном у току сваке итерације. Вредност коефицијената се добија мешањем спољашњих и унутрашњих вредности у свакој тачки помоћу функције

$$C = F_1 C_1 + (1 - F_1) C_2, \quad (2.76)$$

где  $C$  представља било који коефицијент. Функција мешања  $F_1$  је дефинисана преко израза

$$F_1 = \tanh(1.5\Gamma^4), \quad (2.77)$$

$$\Gamma = \min[\max(\Gamma_1, \Gamma_2), \Gamma_3], \quad (2.78)$$

$$\Gamma_1 = \frac{\sqrt{k}}{\beta^* \omega d}, \quad (2.79)$$

$$\Gamma_2 = \frac{500\nu}{\omega d^2}, \quad (2.80)$$

$$\Gamma_3 = \frac{20k}{\max\left[\frac{d^2}{\omega} \left(\frac{\partial k}{\partial x_k} \frac{\partial \omega}{\partial x_k}\right), 200k_\infty\right]}, \quad (2.81)$$

где  $d$  представља растојање до најближег зида. Вредности унутрашњих и спољашњих коефицијената су

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= 0.518, & \gamma_2 &= 0.44, \\
\beta_1 &= 0.0747, & \beta_2 &= 0.0828, \\
\sigma_{k1} &= 1.1, & \sigma_{k2} &= 1.1, \\
\sigma_{\omega 1} &= 0.53, & \sigma_{\omega 2} &= 1.0, \\
\sigma_{d1} &= 1.0, & \sigma_{d2} &= 0.4, \\
\beta^* &= 0.09.
\end{aligned} \tag{2.82}$$

У новијим имплементацијама овог модела, неки аутори примењују незнатно другачији облик модела. Једну такву верзију, која ће такође бити коришћена су изложили, Menter et al. [95].

## 2.8 Аутоматски третман зидних услова за моделе базиране на једначини за специфичну дисипацију - $\omega$

У првом слоју ћелија у близини зида, вредност  $\omega$  је подешена на

$$\omega_w = \frac{\rho(u_\tau)^2}{\mu} \omega^+, \tag{2.83}$$

где је  $\omega^+ = \frac{\omega \nu}{u_\tau^2}$ , бездимензиона специфична дисипација. Потребно је затим наћи адекватну формулацију за фрикциону брзину  $u_\tau$ , и за  $\omega^+$ .

Полазна тачка је облик израза за  $\omega^+$  у вискозном подслоју и за логаритамски регион.

Док  $\omega$  има сингуларност на самом зиду, аналитичка решења су позната за вискозни подслој (тј. за  $y^+ < 2.5$   $y^+ = \frac{y u_\tau}{\nu}$ ). У вискозном подслоју можемо изразити  $\omega$  као функцију бездимензионог растојања од зида  $\omega = f(y^+)$  на следећи начин,

$$\omega_{vis} = \frac{6\nu}{0.075y^2} = \frac{6u_\tau^2}{0.075\nu(y^+)^2}. \tag{2.84}$$

Може се даље разивити израз за  $\omega$ , уводећи дефиницију за фрикциону брзину у близини зида, у вискозном подслоју

$$u_\tau = \frac{U_1}{y^+} \Rightarrow \omega = \frac{6U_1^2}{0.075\nu(y^+)^4}. \tag{2.85}$$

У логаритамском региону,  $\omega$  може бити изражено на следећи начин

$$\omega_{log} = \frac{u_\tau}{\sqrt{\beta^* \kappa y}} = \frac{u_\tau}{0.3y} \frac{u_\tau}{\nu y^+} = \frac{u_\tau^2}{0.3\kappa \nu y^+}. \quad (2.86)$$

Исто као у случају вискозног подслоја, даље развијамо овај израз узимајући у обзир дефиницију за фрикциону брзину која важи у логаритамском региону.

Током прорачуна, да би се правилно одредио гранични услов у близини зида за  $\omega$ , први корак је да се израчуна бездимензионо растојање од зида,  $y^+$ . Ако прва ћелија припада вискозном подслоју, тј. кад је  $y^+ < 2.5$ , користи се једначина (2.84). Ако је у првој ћелији  $y^+ > 11.63$  она се та ћелија налази у логаритамском региону, користи се једначина (2.84).

У прелазном региону, користимо израз за мешање две вредности  $\omega$  помоћу следећег генерализаног израза који обједињује све случајеве,

$$\omega_1(y^+) = \sqrt{\omega_{vis}^2(y^+) + \omega_{log}^2(y^+)}, \quad (2.87)$$

где индекс 1, означава вредност узету за прву ћелију у близини зида. Последњи израз се може користити у оквиру аутоматског третирања граничних услова, где један израз може бити коришћен увек, без обзира на растојање центра прве ћелије од зида. Нумерички тестови су показали да самостално коришћење једначине (2.87) даје правилне вредности за  $\omega$ , за широк дијапазон резолуција прорачунских мрежа.

## Глава 3

# Нумерички метод за симулацију ваздушних струјања над комплексним теренима

### 3.1 Увод

У овом поглављу ће бити изложен нумерички алгоритам који је коришћен током рада на дисертацији. Процес дискретизације о коме је реч у овом поглављу представља математички процес при коме се неки диференцијални или интерални оператор замењује алгебарском апросимацијом која омогућава нумеричко решавање почетног проблема у коначном броју аритметичких операција, имплементираних у компјутерском програму и извршене на рачунару. Процес дискретизације је централна тема области нумеричке математике посвећене приближном решавању парцијалних диференцијалних једначина.

Предложени метод је базиран на ћелијски-центрираним, преклопљеним распоредом променљивих (енг. *collocated variable arrangement*), посебно прилагођеног за мреже које се састоје од изразито деформисаних прорачунских ћелија. Метода коначних запремина, која је представљена овде, може бити коришћена за произвољно неструктуриране ћелије без икаквих измена. Питање избора структурираних или неструктурираних ћелија, зависи пре свега од избора апстрактне структуре података. Избор типа мреже и структуре података ограничава, међутим, избор алгоритама за решавање линеарних система и њихово прекондиционирање. Веома ефикасан прекондиционер који је касније представљен, у подпоглављу 3.10, је прилагођен употреби при структурираним мрежама.



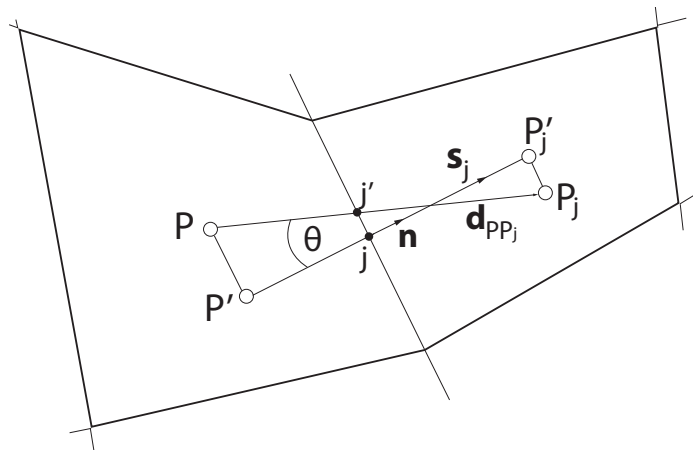
Слика 3.1 приказује типичан аранжман ћелија у нумеричкој мрежи прилагођеној методи коначних запремина и структури података коју користимо. Ћелије на слици су дводимензионалне да би се приказ основних геометријских елемената поједноставио. Током дискретизације посматрамо прорачунску мрежу, са ћелијом  $P$ , и њеним суседима, уопштено означеним са  $P_j$  од којих је раздвојена страницама  $j$ , где је  $j = 1, nf$  индекс суседа, и  $nf$  је укупан број страница ћелије, тј. укупан број суседа. Променљива са индексом  $P$  увек представља вредност у центру тренутне ћелије, док променљива са индексом  $P_j$  представља ћелијски центрирану вредност у суседној прорачунској ћелији. Величина означена као  $\mathbf{d}_{PP_j}$  је вектор растојања између центара две суседне прорачунске ћелије,  $\mathbf{s}_j$  је вектор са правцем нормале на страницу и интензитетом једнаким површини странице ћелије и  $\mathbf{n}$  је јединични вектор нормале на страницу прорачунске ћелије. Угао  $\theta$ , који заклапају јединична нормала  $\mathbf{n}$  и вектор растојања између ћелијских центара  $\mathbf{d}_{PP_j}$  је значајна величина у представљеном алгоритму због тога што квантификује искошеност странице ћелије (енг. cell face skewness). Максимум искошености нормала (енг. maximum normals skewness), који се рачуна као,

$$\max[\tan(\theta)_j, j = 1, nf], \quad (3.1)$$

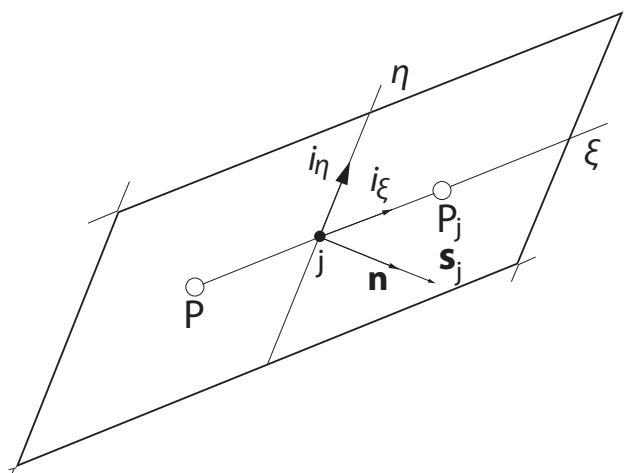
се користи да би се квантификовала деформисаност ћелије због искошења на ћелијском нивоу. Још једна значајна величина која служи да би се окарактерисала неортогоналност прорачунске ћелије је отклон тачке пресека (енг. intersection point offset), која се дефинише као отклон центра странице  $j$  и тачке пресека странице ћелије и линије у правцу колинеарном правцу вектора  $\mathbf{d}_{PP_j}$ , коју означавамо са  $j'$ . Узимање у разматрање овог новог параметра долази се до промене парадигме у корекцији алгоритама намењеним деформисаним режама. Док су већина досадашњих алгоритама превасходно посвећени унапређењима повезаним за неортогоналностима проузрокованим искошености на ћелијском нивоу, ова дисертација се бави генералном ситуацијом када су и искошеност и отклон тачке пресека пристни, Слика 3.1(a).

Да би се систематизовала апроксимација основних једначина струјања Једн.(2.4) и (2.8), ми их преформулишемо у интегрални облик генералисане транспортне једначине

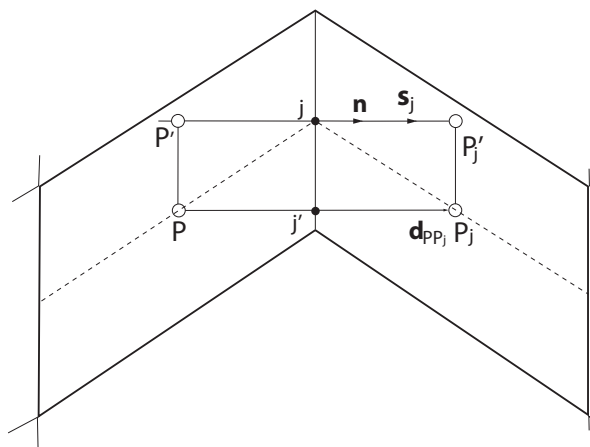
$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \phi dV + \int_S \rho \phi \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS = \int_S \Gamma_\phi \nabla \phi \cdot \mathbf{n} dS + \int_V q_\phi^V dV + \int_S \mathbf{q}_\phi^S \cdot \mathbf{n} dS, \quad (3.2)$$



(a)



(b)



(c)

Слика 3.1: Типични изглед прорачунских хелија у неортогоналним прорачунским мрежама.

где  $\phi$  представља скаларну, векторску или тензорску величину на коју се закон одржања примењује. Два члана једначине на левој страни једнакости су нестационарни и конвективни члан, док су на десној страни приказани дифузиони члан, запремински и површински изворни чланови. Променљиве које се појављују у овој једначини су: густина флуида  $\rho$ , време  $t$ , вектор брзине флуида у тачки  $\mathbf{u}$ ,  $\Gamma_\phi$  је коефицијент дифузије, и коначно запремински и површински изворни чланови  $q_\phi^V$  и  $\mathbf{q}_\phi^S$ , где је површински члан векторска величина.

У следећим подпоглављима, третирана је апроксимација чланова горње једначине, базирана на методи коначних запремина. Сви запремински и површински интегрални чланови су апроксимирани нумеричком интеграцијом другог реда, методом средишње тачке (енг. mid-point rule). Све променљиве су представљене преко њихових векторских и тензорских компоненти у Декартовом координатном систему.

## 3.2 Реконструкција ћелијски центрираних градијената

За готово сваку променљиву неопходно је израчунати вредност градијената у центрима ћелија који описују локалну промену те променљиве. Будући да су по дефиницији везани за центар ћелије ти градијенти су у колокацији са осталим променљивима од значаја. То их чини посебно значајним и из разлога израчунавања многих изворних чланова за транспортне једначине које описују турбулентне скаларе, јер се на основу градијената у центру и правила централне тачке за нумеричку интеграцију добијају изворни чланови по запремини ћелије.

Задатак израчунавања ћелијски центрираних градијената можемо формулисати као вишеструко одређен линеарни систем који се затим може решити помоћу методе најмањих квадрата,

$$\mathbf{G} \cdot \nabla \phi = \mathbf{f}, \quad (3.3)$$

где су,

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{P_1} - \mathbf{x}_P \\ \mathbf{x}_{P_2} - \mathbf{x}_P \\ \dots \\ \mathbf{x}_{P_j} - \mathbf{x}_P \\ \dots \\ \mathbf{x}_{P_{n_f}} - \mathbf{x}_P \end{bmatrix}, \quad \nabla\phi = \begin{bmatrix} \partial\phi/\partial x_1 \\ \partial\phi/\partial x_2 \\ \partial\phi/\partial x_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} \phi_{P_1} - \phi_P \\ \phi_{P_2} - \phi_P \\ \dots \\ \phi_{P_j} - \phi_P \\ \dots \\ \phi_{P_{n_f}} - \phi_P \end{bmatrix}. \quad (3.4)$$

Матрица  $\mathbf{G}$  се састоји од геометријских података везаних за прорачунску мрежу који су доступни у фази предпроцесирања (израде прорачунске мреже). Њене три колоне представљају просторна растојања између хелијских центара тренутне хелије  $P$  и суседне хелије  $P_j$ , дуж три координатна правца.

Да би се нашло решење  $\nabla\phi$ , вишеструко одређеног линеарног система (3.3), које минимизира Еуклидску норму, потребно је прво наћи QR факторизацију матрице  $\mathbf{G}$ . QR факторизација матрице  $\mathbf{G}$  може бити израчуната помоћу рутине из *LAPACK* програмске библиотеке, *DGEQRF* [97]. Ова имплементација не враћа вредности  $m \times m$  елемената ортогоналне матрице  $\mathbf{Q}$ , већ тзв. Хаусхолдерове рефлекторе (енг. Householder reflectors)  $\mathbf{H}_1, \dots, \mathbf{H}_3$  ( $\mathbf{G}$  има само три колоне код тродимензионалне формулација алгоритма), и  $\mathbf{Q}$  матрица може бити реконструисана као производ тих вектора.

За потребе овог алгоритма значајне су следеће релације:

$$\mathbf{G} = \mathbf{QR} = \mathbf{Q} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1 \\ \mathbf{0}_{m-n,n} \end{bmatrix} = [\mathbf{Q}_1 \mathbf{Q}_2] \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1 \\ \mathbf{0}_{m-n,n} \end{bmatrix} = \mathbf{Q}_1 \mathbf{R}_1, \quad (3.5)$$

где  $\mathbf{R}_1$  представља  $n \times n$  горње троугаону матрицу, а  $\mathbf{Q}_1$  је величине  $m \times n$ . Добијамо  $\mathbf{Q}_1$  задржавањем првих  $n$  колона ортогоналне матрице  $\mathbf{Q}$ , док остале колоне сачињавају матрицу  $\mathbf{Q}_2$ . Ознака  $\mathbf{0}_{m-n,n}$  представља матрицу нула, величине  $(m - n) \times n$ . Производ  $\mathbf{Q}_1 \mathbf{R}_1$  је познат као "танка" [98, р. 230], или "редукована" [99, р. 50] QR факторизација матрице  $\mathbf{G}$ .

Веома робустна и брза процедура за израчунавање градијената се може добити употребом "танке" QR факторизације, уколико одлучимо да чувамо у меморији производ  $\mathbf{R}_1^{-1} \mathbf{Q}_1^T$  који представља  $3 \times n_f$  матрицу која се састоји само од геометријских фактора и треба је израчунати само једном на почетку прорачуна. У том случају, израчунавање хелијски центрираних градијената се своди само на обнављање вредности вектора  $\mathbf{f}$  и скаларни производ вектора, дајући решење за вектор градијента за сваку прорачунску хелију,

$$\nabla\phi = (\mathbf{R}_1^{-1}\mathbf{Q}_1^T)\mathbf{f}. \quad (3.6)$$

Потребно је подсетити да, у поређењу са директним инвертовањем матрице, процес решавања који је основан на QR декомпозицији поседује већу нумеричку стабилност, које се може оправдати нижим вредностима односа највеће и најмање сопствене вредности матрице, тј. помоћу параметра кондиционираниости матрице (енг. condition number), видети нпр. [98]. Ово је посебно значајно када се проучавају робусни <sup>1</sup> алгоритми за изразито неортогоналне мреже.

Елементи матрице  $\mathbf{D}$  ( $d \times n_f$ ), где је  $\mathbf{D} = \mathbf{R}_1^{-1}\mathbf{Q}_1^T$ , и  $d = 3$  за тродимензионалне проблеме, када се користи "танка"QR декомпозиција, могу бити формулисани експлицитно помоћу следећих израза:

$$D_{1i} = Q_{i1}/R_{11} - R_{12}Q_{i2}/(R_{11}R_{22}) + (Q_{i3}R_{12}R_{23} - R_{13}R_{22})/(R_{11}R_{22}R_{33}), \quad (3.7)$$

$$D_{2i} = Q_{i2}/R_{22} - R_{23}Q_{i3}/(R_{22}R_{33}), \quad (3.8)$$

$$D_{3i} = Q_{i3}/R_{33}, \quad i = 1, n_f. \quad (3.9)$$

### 3.3 Конвективни члан

Конвективни члан је дискретизован на следећи начин

$$C_2(\phi) = \int_S \rho\phi\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}dS \approx \sum_j F_j\bar{\phi}_j, \quad (3.10)$$

где  $F_j$  представља масене протоке кроз страницу ћелије, израчунате експлицитно користећи поље брзине флуида из претходне итерације. Ово заостајање је извор додатне прорачунске грешке, пропорционалне величини дискретног временског корака [100]. Генерално се сматра да та грешка има мањи утицај на конвергенцију прорачуна од раздвајања спрезања притисак-брзина у секвенцијалном алгоритму. Када итерације секвенцијалног алгоритма (познате још као "спољашње"или SIMPLE итерације) конвергирају, ова грешка у третирању нелинеарног члана нестаје.

Вредности променљивих на центрима странице прорачунске ћелије  $\bar{\phi}_j$  могу бити апроксимирани коришћењем линеарне интерполације, тј. помоћу централне диферентне шеме (енг. central differencing, у даљем тексту

<sup>1</sup>За алгоритам се каже да је робустан уколико је способан за решавање више различитих проблема из исте класе.

CDS шема). Са додатном корекцијом због отклона тачке пресека израз има следећи облик [101, 102]:

$$\bar{\phi}_j = \lambda_j \phi_P + (1 - \lambda_j) \phi_{P_j} + \overline{\nabla \phi} \cdot \mathbf{d}_{j'j}, \quad (3.11)$$

где  $\lambda_j = \frac{\mathbf{d}_{jP_j}}{\mathbf{d}_{PP_j}}$  представља интерполациони фактор за дату страницу ћелије (видети опис Сlike. 3.1 за дефиницију вектора растојања  $\mathbf{d}_{j'j}$ ,  $\mathbf{d}_{jP_j}$  и  $\mathbf{d}_{PP_j}$ ).

Трећи члан на десној страни једнакости, означен као члан корекције неортогоналности, узима у обзир ситуацију при којој права линија која спаја центре ћелија  $P$  и  $P_j$  (линија  $\xi$ ) не пролази кроз страницу ћелије у њеном центру  $j$ , већ пролази кроз другу тачку, означену као  $j'$ , видети Сliku 3.1(a). Ова околност је претходно означена као отклон тачке пресека, и корекција тог ефекта, уведена у једначини (3.11) је пресудна за тренутну нумеричку процедуру.

Линеарна интерполација ћелијски центрираних градијената је дефинисана помоћу израза

$$\overline{\nabla \phi} = \lambda_j \nabla \phi_P + (1 - \lambda_j) \nabla \phi_{P_j}. \quad (3.12)$$

Конвективни члан дефинисан помоћу узводне шеме првог реда (енг. first order upwind differencing scheme, у наставку UDS шема) се дефинише као

$$C_1(\phi) = \int_S \rho \phi \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS \approx \sum_j \max(F_j, 0) \phi_P - \min(F_j, 0) \phi_{P_j}. \quad (3.13)$$

Коначна форма дискретизације конвективног члана се представља у форми одложене корекције (енг. deferred correction, [103]). На тај начин конвективни члан дефинисан преко узводне шеме првог реда се третира имплицитно, док се разлика апроксимације вишег и првог реда третира експлицитно,

$$C_L(\phi) = C_1(\phi), \quad (3.14)$$

$$C_R(\phi) = \gamma(C_2(\phi) - C_1(\phi)), \quad (3.15)$$

где је  $\gamma$  фактор измешаности (енг. blending factor) ( $0 \leq \gamma \leq 1$ ). Уколико тај параметар има вредност мању од 1, основна грешка у апроксимацији потиче од узводног третирања конвективног члана, која је дифузивног карактера, и има повољан утицај на стабилизацију интерполације при високим бројевима Пеклеа (енг. Peclet number), али зато проузрокује једну неповољну појаву, тзв. нумеричку дифузију, која имитира физичку појаву дифузије, али је паразитског карактера и квари тачност резултата. При централном

диференцирању, водећа грешка у представљању апроксимације преко Тејлоровог полинома, је дисперзивног карактера, она имитира физичку појаву дисперзије, паразитског је карактера, и неповољна је за стабилност нумеричког прорачуна, тј. може лако довести до појаве "пуцања" нумеричке симулације. Тај проблем се решава уфињавањем мреже, или увођењем одређене количине вештачке нумеричке дифузије преко мешања са одређеним процентом узводне шеме, која стабилизује прорачун.

Алтернатива у односу на претходни предлог је да се  $\bar{\phi}_j$  рачуна преко ограничене (у смислу осцилација интерполанта) интерополације вишег реда, формулисане у облику ограничавања флуксева.

### 3.3.1 Ограничавање флуксева

Корекција вишег реда примењена на интерполирану вредност, изведена помоћу узводне интерполације вишег реда, је дефинисана као генерална, нелинеарна, смеша узводних и центрираних градијената [104],

$$\bar{\phi}_j = \phi_C + \Psi(r)(\nabla\phi)_u \cdot \mathbf{d}, \quad (3.16)$$

где важи  $\mathbf{d} = (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_C)$ , и  $\mathbf{x}$  означа вектор положаја дате тачке. Величина  $\Psi(r)$  је флукс-лимитер функција која је дефинисана преко односа градијената, са ознаком  $r$ , који се математички дефинише помоћу следећег израза,

$$r = (\nabla\phi)_j / (\nabla\phi)_u, \quad (3.17)$$

и

$$(\nabla\phi)_j = \frac{\phi_D - \phi_C}{|\mathbf{x}_D - \mathbf{x}_C|}, \quad (\nabla\phi)_u = \frac{\phi_C - \phi_U}{|\mathbf{x}_C - \mathbf{x}_U|}. \quad (3.18)$$

У горњим изразима, индекси C,D, и U представљају центрирани, низводни и узводни ћелијски центар, респективно. Они су дефинисани на основу знака у вредности масеног протока  $\text{sgn}(F_j/|F_j|)$  кроз посматрану страну ћелије. Члан  $(\nabla\phi)_u$  је вредност градијента центрираног на страници прорачунске ћелије, између централне и узводне ћелије.

Формулација израза за однос градијената  $r$ , може бити прилично компликована уколико је потребно узети у обзир неортогоналност мреже. Тренутни алгоритам прати приступ који је описан у [102].

Функција односа градијената добија поједностављени облик када су расто-

јања између хелијских центара униформна,

$$r = \frac{\phi_D - \phi_C}{\phi_C - \phi_U}, \quad (3.19)$$

што ћемо користити након што линеарно интерполирамо вредност  $U$  из хелијског центра. Позиција тачке  $U$  је дефинисана тако да је једнакост  $\mathbf{d}_{CU} = -\mathbf{d}_{CD}$  задовољена. Последњи корак дозвољава значајна поједностављења у присуству неортогоналних прорачунских мрежа. Можемо сада дефинисати два случаја:

- Када је  $\text{sgn}(F_j/|F_j|) = 1$

$$\mathbf{x}_C = \mathbf{x}_P,$$

$$\mathbf{x}_D = \mathbf{x}_{P_j},$$

$$\mathbf{x}_U = \mathbf{x}_C + (\mathbf{x}_C - \mathbf{x}_D) = \mathbf{x}_P + (\mathbf{x}_P - \mathbf{x}_{P_j}),$$

$$\phi_C = \phi_P,$$

$$\phi_D = \phi_{P_j},$$

$$\phi_U = \phi_{P_k} + \nabla \phi_{P_k} \cdot \mathbf{d}_{P_k U}, \quad (3.20)$$

- када је  $\text{sgn}(F_j/|F_j|) = -1$

$$\mathbf{x}_C = \mathbf{x}_{P_j},$$

$$\mathbf{x}_D = \mathbf{x}_P,$$

$$\mathbf{x}_U = \mathbf{x}_C + (\mathbf{x}_C - \mathbf{x}_D) = \mathbf{x}_{P_j} + (\mathbf{x}_{P_j} - \mathbf{x}_P),$$

$$\phi_C = \phi_{P_j},$$

$$\phi_D = \phi_P,$$

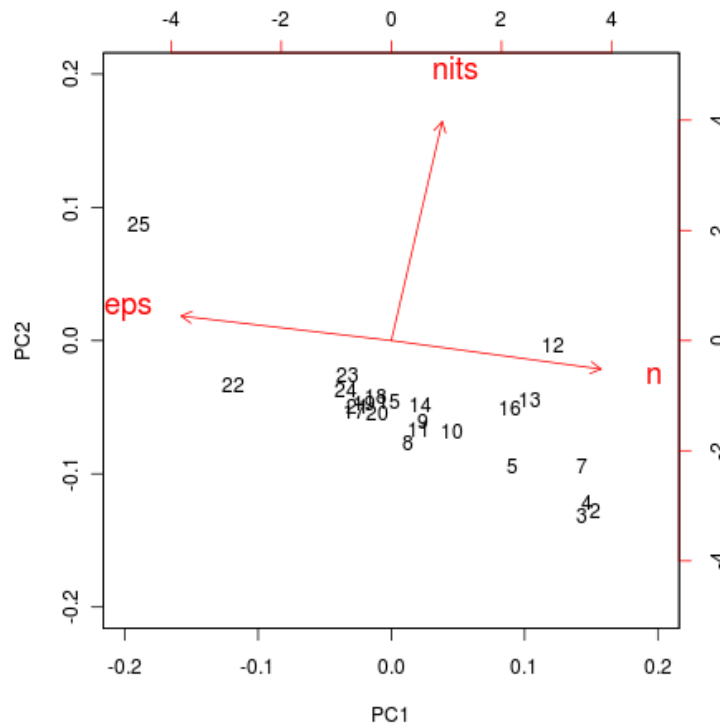
$$\phi_U = \phi_{P_k} + \nabla \phi_{P_k} \cdot \mathbf{d}_{P_k U}. \quad (3.21)$$

Коначно, ограничена интерполација вишег реда, зависно променљиве, на страницу хелије, коришћењем флуks-лимитер функције се записује на следећи начин

$$\bar{\phi}_j = \phi_P + \Psi(r)(\phi_P - \phi_U)(1 - \lambda_j), \quad (3.22)$$

где  $\lambda_j$  представља интерполациони фактор за линеарну интерполацију из хелијских центара две суседне хелије на центроид странице ' $j$ ', као у једначини (3.11).





Слика 3.2: Упоредње квалитета учинка више конвективних шема, помоћу анализе основних компоненти - PCA анализа. 1-FOU, 2-CUI, 3-Fromm, 4-QUICK, 5-LUI, 6-CDS, 7-MUSCL, 8-OSPRE, 9-H-CUI, 10-Harmonic, 11-SPL- $\frac{1}{3}$ , 12-SMART, 13-Koren, 14-H-QUICK, 15-SMARTER, 16-BLUI(SOU), 17-UMIST, 18-GPA- $\frac{1}{2}$ , 19-GPR- $\frac{1}{2}$ , 20-GPR- $\frac{1}{3}$ , 21-vanAlbada, 22-Minmod, 23-GVA- $\frac{1}{2}$ , 24-GVA- $\frac{1}{3}$ , 25-Superbee, 26-BCDS.

Waterson и Deconick [104] аргументовано наводе да већина флуks-лимитер функција потпада у две категорије: Оне који су дефинисане преко полиномиалног квоцијента (енг. Polynomial ratio limiters, у наставку PR лимитери), који представљају глатке, континуалне функције, без дисконтинуалног прелаза, доприносећи глаткој кривој конвергенције, и оне представљене преко део по део глатких функција (енг. Piecewise-linear limiters, у наставку PL лимитери) у којима се смењују линеарне шеме тако да се добију као резултат ограничене верзије постојећих линеарних шема. Њихова мана се манифестује преко проблема које њихова дисконтинуална, у погледу нагиба флуks-лимитер функције, природа може изазвати у вези са конвергенцијом прорачуна. У истом чланку, аутори наводе дугачку листу конвективних шема, у облику флуks-лимитер функција.

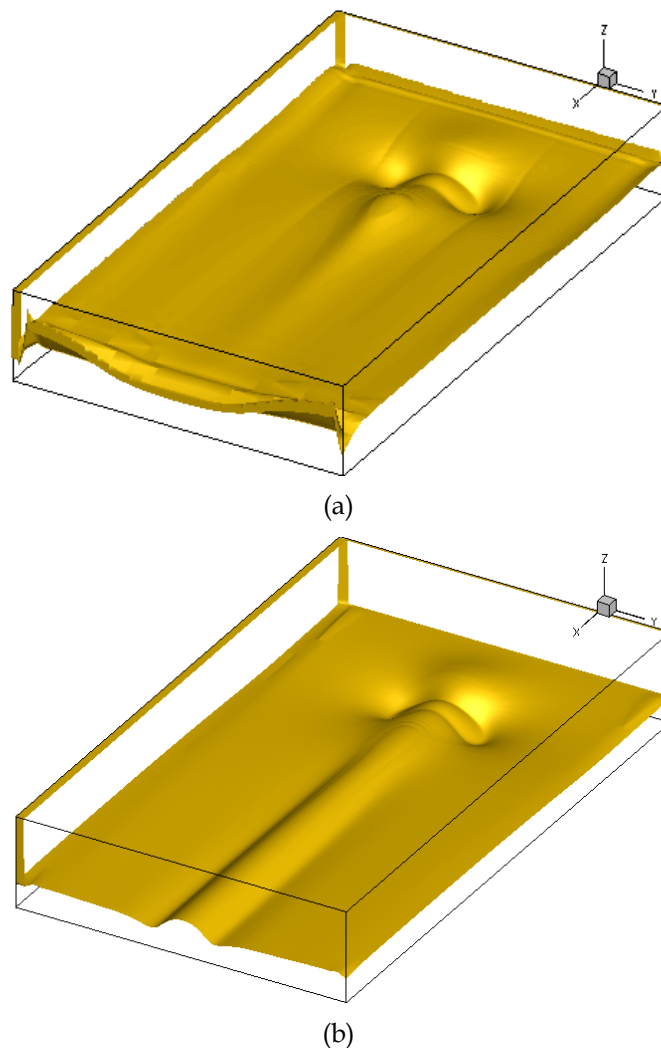
Да би се сузио избор конвективних шема које би могле бити разматране за имплементацију, за потребе ове студије је извршена Анализа основних ком-

поненти (енг. Principal Component Analysis, у наставку PCA анализа) резултата приказаних у [104], Слика 3.2. Променљиве разматране овде су: апсолутна грешка ( $eps$ ), теоретски ред шеме ( $n$ ), број итерација потребних да би се задовољила толеранција конвергенције симулације ( $nits$ ). На слици је коришћен задебљан тип слова како би извдојио један број нумеричких шема. Класичне  $\kappa$  шеме CUI, Fromm, and QUICK су се најбоље показале на датом случају. SMART (ограничена верзија QUICK шеме) има малу нумеричку грешку, али има спору конвергенцију. Koren шема и ограничена узводна шема другор реда (енг. Bounded Linear Upwind - BLUI) имају сличне грешке као SMART али им је био потребан мањи број итерација за конвергенцију решења. У терминима укупног учинка, MUSCL [105] шема је TVD шема која је по укупном скору на PCA биplotу, најближа класичним  $\kappa$  шемама. Узводна шема првог реда, се не види на овом PCA биplot дијаграму јер у терминима нижег реда и велике прорачунске грешке са нашла изван посматраног региона дијаграма.

На основу ових резултата, као препоручена ограничена шема вишег реда се усваја MUSCL као представник PL шема, добивши највиши укупни резултат у PCA анализи, Слика 3.4,

$$\Psi(r) = \max[0, \min(2r, 0.5 + 0.5r), 2]. \quad (3.23)$$

За крај дела излагања о дискретизацији конвективног члана даје се илустративни пример ефеката ограничавања флуksа на умиривање нефизичких осцилација које се могу појавити у решењу уколико се користе неограничене нумеричке шеме за конвективни транспорт. На слици 3.3.1 приказани су резултати симулације над глатким идеализованим брдом. На првој слици је приказана произвољна изо-површ брзине, која илуструје појаву нефизичких осцилација у случају када је конвекција дискретизована помоћу QUICK шеме, Слика 3.3(a). У наставку итеративног процеса, те осцилације су се увећавале и на крају су довеле до потпуне дивергенције и тзв. пуцања симулације. Након што је као разлог идентификована неограничена дискретизација конвективног члана, QUICK шема је замењена њеном ограниченом верзијом познатом под акронимом SMART, Слика 3.3(b). Након тога нефизичке осцилације су нестале, и итеративни процес је несметано конвергирао.



Слика 3.3: Ефекат ограничења флуксева у оквиру апроксимације конвектив-ног члана, на елиминисање паразитских осцилација у решењу (a) QUICK шема (b) SMART-ограничена верзија QUICK шеме.

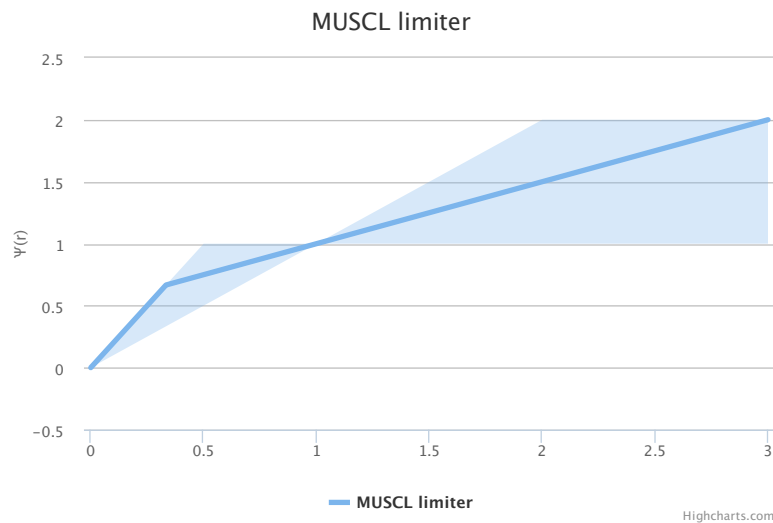
### 3.4 Дифузиони чланови

Дифузиони флукс је апроксимиран нумеричком интеграцијом, помоћу правила средишње тачке,

$$D(\phi) = \int_S \Gamma_\phi \nabla \phi \cdot \mathbf{n} dS \approx \sum_j \Gamma_{\phi,j} \overline{(G_2(\phi))}_j \cdot \mathbf{n}_j S_j. \quad (3.24)$$

Градијент другог реда тачности, дефинисан у центроиду странице про-рачунске ћелије, затим пројектован на правац нормале на страницу

$$\overline{(G_2(\phi))}_j \cdot \mathbf{n}_j \equiv \nabla \phi_j \cdot \mathbf{n},$$



Slika 3.4: MUSCL funkcija za ograničavanje fluxeva.

je od značaja ovde. Da bi uspešno aproksimirali ovu vrednost neophodna nam je pogodna forma apstrakcije neortogonalnosti.

Kako se često radi, možemo pretpostaviti da linija koja povezuje centre dve susedne ćelije prolazi kroz centar stranice koja ih razdvaja, Slika 3.1(b) [56, 71, 100, 102, 106, 107]. Kao posledica toga, član unakrsne difuzije (eng. cross-diffusion term) se uvodi kroz odloženu korekciju, koja nestaje ukoliko je proračunska mreža ortogonalna. U jednom uspešnom pristupu, unakrsna difuzija može biti implementirana u vidu minimalne, ortogonalne ili nadrelaksirane korekcije. Adekvatna mentalna slika za geometriju mreže gde je takav pristup odgovarajuć, je slučaj iskošenog kaviteta (eng. inclined cavity). Ovo je čest slučaj u literaturi gde je ova diskretizacija testirana.

Druge apstrakcije, sa potencijalno šиром primenom, tretira geometriju gde linija koja спаја ћелијске centre ne prolazi kroz centar stranice, slike 3.1(a), 3.1(c), tj. kako je prethodno definisano, kada postoji odklon тачке preseka. U том случају користе се помоћне тачке, које омогућавају да се из њих једноставном линеарном интерполацијом израчуна вредност градијента у центру stranice, у правцу нормале на stranicu [108]. U каснијем делу дисертације (у потпоглављу 6.2), ће бити показано како прорачунске мреже, добијене алгебарском екструзијом података елевације терена из дигиталне мапе, поседују такве особине да су оба горе описана случаја присутна. Прорачунске ћелије у вертикалном правцу потпадају под прву категорију, док у другим правцима друга категорија обезбеђује адекватну апстракцију.

### 3.4.1 Израчунавање градијената на центроиду странице - Релаксација параметризована са степеном $\cos(\theta)$

За искошене прорачунске мреже (слика 3.1(b)), резултујући вектор градијента дуж нормале може бити представљен као векторски збир две компоненте, једне дуж линије која спаја центре ћелија (линија  $\xi$ ), и корекционе компоненте (дуж  $\tau = (n - i_\xi)$ ),

$$\nabla\phi_j \cdot \mathbf{n} \equiv \nabla\phi_n = \overline{(\nabla\phi)}_j \mathbf{i}_\xi + \frac{\mathbf{s}_j}{\mathbf{s}_j \cdot \mathbf{d}_{PP_j}} \left[ (\phi_{P_j} - \phi_P) - \overline{(\nabla\phi)}_j \cdot \mathbf{d}_{PP_j} \right] (\mathbf{n} - \mathbf{i}_\xi), \quad (3.25)$$

где  $\overline{(\nabla\phi)}_j$  представљају вредности ћелијски центрираних градијената интерполираних на странице помоћу израза (3.12).

Овај приступ је познат као ортогонална корекција и користи се у више радова [56, 71, 102, 106, 107]. Други члан да неднсој страни је експлицитно третирани неортогонални члан (унакрсне дифузије) који постаје једнак нули када је  $\mathbf{i}_\xi = \mathbf{n}$ .

Уколико се корекциони вектор напише у виду надрелаксирание корекције  $\tau = (n - \frac{1}{\cos\theta}i_\xi)$  [100], нормални градијенти се записују као:

$$\nabla\phi_n = \overline{(\nabla\phi)}_j \frac{1}{\cos\theta} \mathbf{i}_\xi + \frac{\mathbf{s}_j}{\mathbf{s}_j \cdot \mathbf{d}_{PP_j}} \left[ (\phi_{P_j} - \phi_P) - \overline{(\nabla\phi)}_j \cdot \frac{1}{\cos\theta} \mathbf{d}_{PP_j} \right] (\mathbf{n} - \frac{1}{\cos\theta} \mathbf{i}_\xi). \quad (3.26)$$

Још једна могућност је тзв. минимална корекција [100] која има следећи облик,

$$\nabla\phi_n = \overline{(\nabla\phi)}_j \cos\theta \mathbf{i}_\xi + \frac{\mathbf{s}_j}{\mathbf{s}_j \cdot \mathbf{d}_{PP_j}} \left[ (\phi_{P_j} - \phi_P) - \overline{(\nabla\phi)}_j \cdot \cos\theta \mathbf{d}_{PP_j} \right] (\mathbf{n} - \cos\theta \mathbf{i}_\xi). \quad (3.27)$$

Када користимо овај запис, користећи као параметар угао  $\theta$ , уместо векторских израза који укључују скаларне производе као у [100], долазимо до природног начина генерализације претходних израза:

$$\nabla\phi_n = \overline{(\nabla\phi)}_j (\cos\theta)^{nrelax} \mathbf{i}_\xi + \frac{\mathbf{s}_j}{\mathbf{s}_j \cdot \mathbf{d}_{PP_j}} \left[ (\phi_{P_j} - \phi_P) - \overline{(\nabla\phi)}_j \cdot (\cos\theta)^{nrelax} \mathbf{d}_{PP_j} \right] (\mathbf{n} - (\cos\theta)^{nrelax} \mathbf{i}_\xi) \quad (3.28)$$

Овај општи израз је именован као *приступ релаксације параметризоване са степеном  $\cos(\theta)$*  (енг. Power of  $\cos\theta$  relaxation approach). Када изложилац  $nrelax$  узима вредност  $nrelax = 0$ ,  $nrelax = -1$ ,  $nrelax = 1$ , добијају се из-

рази за ортогоналну, надрелаксирану и минималну корекцију. Тако, уколико изаберемо било коју вредност из интервала  $[-1,1]$  у могућности смо да створимо целу фамилију апросимирајућих израза за градијент у центроиду странице. Вредности параметра ван овог интервала су такође могуће, и биле су тестиране, али нису разматране јер нису дале задовољавајуће резултате, иако је и та могућност верификована.

За распореде прорачунских ћелија у којима је присутан отклон тачке пресека, користи се другачији приступ. Градијент зависно променљиве, центриран на страници ћелије, може уопштено бити дефинисан на следећи начин:

$$\nabla\phi_n = \frac{\phi_{P'_j} - \phi_{P'}}{|\mathbf{x}_{P'_j} - \mathbf{x}_{P'}|} \mathbf{n} = \frac{\phi_{P'_j} - \phi_{P'}}{|\mathbf{d}_{PP'_j}| \cos \theta} \mathbf{n}. \quad (3.29)$$

Помоћне тачке  $P'$  и  $P'_j$  су коришћене да би била омогућена доследна апроксимација другог реда тачности у случају неортогоналних мрежа [108] и лако се израчунавају помоћу следећих израза,

$$\mathbf{x}_{P'} = \mathbf{x}_j - [(\mathbf{x}_{j'} - \mathbf{x}_P) \cdot \mathbf{n}] \mathbf{n}, \quad \mathbf{x}_{P'_j} = \mathbf{x}_j - [(\mathbf{x}_{j'} - \mathbf{x}_{P_j}) \cdot \mathbf{n}] \mathbf{n}, \quad (3.30)$$

где је  $j$  уобичајена ознака за центроид странице, коју треба разликовати од ознаке  $j'$  - која представља тачку пресека линије  $\xi$  са страницом ћелије. Вредности у овим тачкама се израчунавају претпостављајући линеарну варијацију у близини ћелијских центара, користећи вредности променљивих у центрима и њихове градијенте,

$$\phi_{P'} = \phi_P + \nabla\phi_P \cdot \mathbf{d}_{P'P}, \quad \phi_{P'_j} = \phi_{P_j} + \nabla\phi_{P_j} \cdot \mathbf{d}_{P'_jP_j}, \quad (3.31)$$

где важи  $\mathbf{d}_{P'P} = (\mathbf{x}_{P'} - \mathbf{x}_P)$  и  $\mathbf{d}_{P'_jP_j} = (\mathbf{x}_{P'_j} - \mathbf{x}_{P_j})$ .

Уз помоћ претходних израза градијент у центроиду странице у правцу њене нормале, може бити записан у следећем облику,

$$\nabla\phi_n = \frac{\phi_{P_j} - \phi_P}{|\mathbf{d}_{PP_j}| \cos \theta} \mathbf{n} + \frac{\nabla\phi_{P_j} \cdot \mathbf{d}_{P'_jP_j} - \nabla\phi_P \cdot \mathbf{d}_{P'P}}{|\mathbf{d}_{PP_j}| \cos \theta} \mathbf{n}. \quad (3.32)$$

Нумеричка апроксимација градијената у центру странице прорачунске ћелије, за случајеве распореда прорачунских ћелија у мрежи који доводе до присуства отклона тачке пресека, може бити написана и облику сличном претходним изразима,

$$\begin{aligned} \nabla\phi_n &= \overline{(\nabla\phi)}_j \mathbf{i}_\xi \\ &+ \frac{\mathbf{s}_j}{\mathbf{s}_j \cdot \mathbf{d}_{P'P'_j}} \left[ (\phi_{P_j} + \nabla\phi_{P_j} \cdot \mathbf{d}_{P_jP'_j} - \phi_P - \nabla\phi_P \cdot \mathbf{d}_{PP'} - \overline{(\nabla\phi)}_j \cdot \mathbf{d}_{P'P'_j}) (\mathbf{n} - \mathbf{i}_\xi) \right]. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Када је написан у овом виду, може се извести генерализисани израз базиран на приступу релаксације параметризоване са степеном  $\cos(\theta)$ , како је већ претходно рађено,

$$\begin{aligned} \nabla\phi_n &= \overline{(\nabla\phi)}_j (\cos\theta)^{nrelax} \mathbf{i}_\xi + \frac{\mathbf{s}_j}{\mathbf{s}_j \cdot \mathbf{d}_{PP_j}} \\ &\left[ (\phi_{P_j} + \nabla\phi_{P_j} \cdot \mathbf{d}_{P_jP'_j} - \phi_P - \nabla\phi_P \cdot \mathbf{d}_{PP'} - \overline{(\nabla\phi)}_j \cdot (\cos\theta)^{nrelax} \mathbf{d}_{P'P'_j}) (\mathbf{n} - (\cos\theta)^{nrelax} \mathbf{i}_\xi) \right]. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Користећи различите вредности релаксационог изложиоца  $nrelax$  добијамо, у случају са мрежама са отклоном тачке пресека, еквивалентне изразе ортогоналној ( $nrelax = 0$ ), надрелаксираној ( $nrelax = -1$ ) и минималној ( $nrelax = 1$ ) корекцији представљеним за искошене мреже. Ове шеме су означене на енглеском, као 'offset' шеме и њихова генерализација у облику једначине (3.34) представља оригинални допринос ове студије.

Долазимо, на послетку, до коначног израза за апроксимацију дифузионог члана, каји сад може бити написан помоћу следећег израза:

$$D_{L,j} = \bar{\Gamma}_{\phi,j} \frac{|\mathbf{s}_j|^2}{\mathbf{s}_j \cdot \mathbf{d}_{PP_j}} (\phi_{P_j} - \phi_P), \quad (3.35)$$

$$D_{R,j} = \bar{\Gamma}_{\phi,j} \left( \nabla\phi_n \cdot \mathbf{s}_j - \frac{|\mathbf{s}_j|}{|\mathbf{d}_{PP_j}|} \overline{(\nabla\phi)}_j \cdot \mathbf{d}_{PP_j} \right), \quad (3.36)$$

где су  $D_{L,j}$  и  $D_{R,j}$  имплицитно и експлицитно третирано део дифузног флукса кроз страницу  $j$ , прорачунске ћелије.

У каснијим нумеричким експериментима, ови приступи апроксимацији дифузионог члана ће бити пажљиво тестирани у случајевима деформисаних прорачунских мрежа, како би се валидирани овде представљени оригинални доприноси.

### 3.5 Изворни чланови

Запремински изворни чланови се добијају нумеричком интеграцијом на основу правила средишње тачке,

$$Q_V(\phi) = \int_V q_\phi dV \approx q_{\phi_P} V_P. \quad (3.37)$$

Градијенти притиска се третирају као површински изворни чланови. Прво, проналазимо ћелијски центриране градијенте притиска помоћу методе најмањих квадрата, али се те вредности не користе директно, као у случају када би се изворни чланови везани за притисак третирали као запремински изворни чланови. Уместо тога, они се користе у изразу (3.11) да би се добиле прецизне вредности притисака на центроидима страница ћелије

$$p_j = \lambda_j p_P + (1 - \lambda_j) p_{P_j} + \overline{\nabla p} \cdot \mathbf{d}_{j'j}, \quad (3.38)$$

након тога израчунавамо изворни члан преко израза,

$$Q_{P,i}^p = - \int_S p \mathbf{i} \cdot \mathbf{n} dS \approx - \sum_j p_j S_j^i, \quad (3.39)$$

где је  $\mathbf{i} = \{i, j, k\}$  јединични вектор са Декартовим компонентама. Уз помоћ једначине (3.38), ћелијски центрирани, конзервативни, градијент притиска који се користи на више места у алгоритму је дефинисан на следећи начин,

$$\nabla p_P = \frac{1}{V_P} \sum_j p_j S_j. \quad (3.40)$$

### 3.6 Нестационарни чланови

За нумеричку интеграцију нестационарних чланова по контролној запремини ћелије, користи се правило средишње тачке. Затим, извод по времену је апроксимиран помоћу коначних разлика, користећи имплицитну шему другог реда, диференцирану уназад, која користи вредности из два претходна временска слоја (енг. backward differentiation formula, у наставку BDF2),

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \phi dV \approx \frac{3(\rho_p \phi_p V)^n - 4(\rho_p \phi_p V)^{n-1} + (\rho_p \phi_p V)^{n-2}}{2\Delta t}, \quad (3.41)$$



где  $n$ ,  $n-1$ , и  $n-2$  представљају индексе три вредности у узастопним временским корацима и  $\Delta t$  је величина временског корака. Алтернативна дискретизација је базирана на имплицитној шеми Кранк-Николсона (енг. Crank-Nicolson scheme).

Обе шеме су другог реда тачности, с тим да је за потоњу шему потребно чувати вредности само из једног претходног временског корака, док је код BDF2 потребно чувати вредности из два временска корака, што делимично увећава трошкове компјутерске меморије.

### 3.7 Контурни услови

За решавање парцијалних диференцијалних једначина потребно је задати почетне и контурне услове како би смо добили одговарајућа партикуларна решења.

У тренутном алгоритму омогућено је задавање више типова контурних услова. Периодични контурни услови су реализовани логичким повезивањем ћелија које леже на супротним крајевима прорачунског домена. За неструктуриране мреже и општи приступ чувања разређених матрица, као што су приступ познат као компримовани разређени ред (енг. Compressed Sparse Row - CSR) или компримована разређена колона (енг. Compressed Sparse Column - CSC), или разређена тројка (енг. Sparse Triplet), ово подразумева мењање отиска разређености (енг. sparsity pattern). Код структурираних мрежа са дијагоналним складиштењем коефицијената матрица, периодични гранични услови су реализовани попуњавањем оних низова коефицијената, ван главне дијагонале, који би иначе били остављени са иницијалном вредности једнаком нула, јер не постоји суседна ћелија која би ту вредност попунила, кроз размену флуксева на страницама. За сам линеарни солвер написан за дијагонални распоред коефицијената, ова промена је неприметна. За струјања над комплексним теренима, значајан тип контурних услова, поготово за брзине, представља храпав зид. За аеродинамички глатке површи, користе се стандардни контурни услови базирани на закону који описује профил брзина у близини зида (енг. law-of-the-wall):

$$\frac{U}{u_\tau} = \frac{1}{\kappa} \ln(Ey^+), \quad (3.42)$$

где је вон Карманова константа једнака  $\kappa = 0.41$ , константа  $E = 8.432$ , и бездимензионо растојање од зида је  $y^+ = \frac{yu_\tau}{\nu}$ . У случају аеродинамички

храпавих површи, контурни услов зида је изражен на следећи начин,

$$\frac{U}{u_\tau} = \frac{1}{\kappa} \ln \left[ \min\left(E, \frac{E_R}{E^*}\right) y^+ \right], \quad (3.43)$$

где важи  $E^* = \frac{C_\mu^{1/4} k^{1/2} y_0}{\mu}$ ,  $C_\mu = 0.09$ ,  $E_R = 30$  и где је  $y_0$  храпавост површине.

### 3.8 Финална форма апроксимираних једначина

Имајући у виду претходна разматрања, можемо сада записати коначни облик апроксимације за генералну једначину закона одржања, једначина(3.2) на следећи начин,

$$\frac{d}{dt} (\rho_p V_P \phi_P) + \sum_j C_{L,j} - \sum_j D_{L,j} = \sum_j D_{R,j} - \sum_j C_{R,j} + q_{\phi,P}^V V_P + \sum_j \mathbf{q}_{\phi,j}^S \cdot \mathbf{n} S_j \quad (3.44)$$

Тренутни алгоритам прати секвенцијални приступ решавања основних једначина (енг. segregated approach), у коме се једначине за све зависно променљиве решавају итеративно, једна за другом. Коефицијенти линеарног система и изворни чланови се рачунају користећи вредности из претходне итерације или временског корака. Критеријум заустављања итеративног процеса је дефинисан путем релативне  $L_1$  норме резидуала. Почетни резидуал се користи за нормализацију у том изразу.

### 3.9 Алгоритам спрезања поља притиска и брзине

Спрезање поља притиска и брзине је остварено помоћу итеративног алгоритма, са корекцијом притиска као помоћном величином, која је базирана на SIMPLE алгоритму, и са вишеструким неортогоналним корекцијама. Прво се дефинише масени проток кроз страницу прорачунске ћелије  $j$  базиран на брзинама израчунатим у претходном кораку секвенцијалног алгоритма. Те брзине генерално не задовољавају услов соленоидалности поља брзина ( $\Delta \cdot \mathbf{u} = 0$ ), неопходног кинематског ограничења постављеног за нестишљива струјања. Због тога, вредност масеног протока кроз прорачунску ћелију, у овој фази, нема своју коначну вредност и биће означен са звездом,

$$F_j^* = \rho_j \mathbf{u}_j \cdot \mathbf{S}_j = \rho_j \mathbf{u}_j \cdot \mathbf{n} S_j. \quad (3.45)$$

Да би израчунали брзину на страници ћелије, интерполиране вредности брзина из центара ћелија су кориговане на следећи начин:

$$\mathbf{u}_j \cdot \mathbf{n} = \overline{(\mathbf{u})}_j \cdot \mathbf{n} - \left( \frac{V}{a_P} \right)_j \left[ \overline{\nabla p_j \cdot \mathbf{n}} - \overline{(\nabla p)_j \cdot \mathbf{n}} \right]. \quad (3.46)$$

У овом изразу је употребљена тзв. Rhie-Chow интерполација [109]. Дух Rhie-Chow интерполације <sup>2</sup> је присутан кроз екстракцију ћелијски центрираних градијената притиска из вредности за масени проток, и увођења члана из помереног (енг. staggered) распореда променљивих [96].

Веће деформације прорачунских мрежа повећавају терет Rhie-Chow интерполације, често доводећи целу процедуру до границе употребљивости [102]. Критична компонента у алгоритму је прецизна процена градијената притиска. Због тога, овде ће бити коришћен претходно дефинисан израз за градијенте на центроиду странице прорачунске ћелије, дуж правца нормале  $\nabla \phi_{nr}$  (3.32).

$$\mathbf{u}_j \cdot \mathbf{n} = \overline{(\mathbf{u})}_j \cdot \mathbf{n} - \left( \frac{V}{a_P} \right)_j \left[ \frac{p_{P_j} - p_P}{|\mathbf{d}_{PP_j}| \cos \theta} \mathbf{n} + \frac{\nabla p_{P_j} \cdot \mathbf{d}_{P_j P_j} - \nabla p_P \cdot \mathbf{d}_{P P}}{|\mathbf{d}_{PP_j}| \cos \theta} \mathbf{n} - \overline{\overline{\nabla p_j \cdot \mathbf{n}}} \right], \quad (3.47)$$

где је  $\overline{\overline{\nabla p_j}}$  аритметичка средина две ћелијске вредности. Последњи израз је коришћен у једначини (3.45) да би се добили оперативни тренутни масени протоци.

Као што је већ речено ове тренутне брзине не задовољавају кинематски услов нестишљивости, исказан кроз соленидност поља брзина, овако израчунати масени протоци доводе до масеног изворног члана. Када су корекције масеног протока примењене, једначина континуитета бива задовољена. Ова тврдња се може записати у следећем облику

$$\sum_{j=1}^{nf} F_j^* + F_j' = 0, \quad (3.48)$$

где  $F_j' = \rho_j \mathbf{u}_j' \cdot \mathbf{n} S_j$  представља масени проток нормалне компоненте корекције брзине кроз страницу  $j$ . Користећи корекције брзина за странице ће-

<sup>2</sup>енг. 'The spirit of Rhie-Chow', је фраза која се често користи у заједници која је окупљена око OpenFOAM библиотеке, а разлог је тај што је у том програму имплементирана верзија спрезања поља притисака и брзина која избегава експлицитно коришћење горе наведеног израза за масени проток кроз страницу.

лија SIMPLE алгоритма,

$$\mathbf{u}'_j \cdot \mathbf{n} = - \overline{\left( \frac{V}{a_P} \right)}_j \overline{(\nabla p')}_j \cdot \mathbf{n}, \quad (3.49)$$

и користећи израз за градијент у правцу нормале на страницу прорачунске ћелије за корекцију притиска, једначина (3.32), добијамо израз за корекцију масеног протока прилагођеног за неортогоналне прорачунске мреже,

$$F'_j = -\rho_j S_j K_j \left[ \frac{p'_{P'_j} - p'_{P'}}{|\mathbf{d}_{PP'_j}| \cos \theta} \mathbf{n} + \frac{\nabla p'_{P'_j} \cdot \mathbf{d}_{P'_j P'_j} - \nabla p'_{P'} \cdot \mathbf{d}_{P' P'}}{|\mathbf{d}_{PP'_j}| \cos \theta} \mathbf{n} \right], \quad (3.50)$$

где је,

$$K_j = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{V}{a_P} \right)_P + \left( \frac{V}{a_P} \right)_{P'_j} \right]. \quad (3.51)$$

Уколико користимо скраћену нотацију за масени дисбаланс,

$$\sum_{j=1}^{nf} F_j^* = Q_m, \quad (3.52)$$

добијамо следећи запис једначине за корекцију притиска

$$\sum_{j=1}^{nf} F'_j = -Q_m. \quad (3.53)$$

Да би се избегли издужени интерполациони молекули, користимо само први члан у угластој загради, једначине (3.50), док је други члан који представља корекцију неортогоналности занемарен у првом решавању једначине корекције притиска, и третиран је у оквиру одложене корекције. Због тога, уводимо додатне корекције масеног протока,

$$F_j^{(n)} = -\rho_j S_j K_j \left[ \frac{p_{P'_j}^{(n)} - p_{P'}^{(n)}}{|\mathbf{d}_{PP'_j}| \cos \theta} \mathbf{n} + \frac{\nabla p_{P'_j}^{(n-1)} \cdot \mathbf{d}_{P'_j P'_j} - \nabla p_{P'}^{(n-1)} \cdot \mathbf{d}_{P' P'}}{|\mathbf{d}_{PP'_j}| \cos \theta} \mathbf{n} \right], \quad (3.54)$$

које задовољавају

$$\sum_{j=1}^{nf} F_j^{(n)} = 0, \quad n = 2, n_{pcorr} + 1, \quad (3.55)$$

као последица једначине (3.48), које има значење да додатне корекције масеног протока не мењају укупан баланс масених протока на нивоу ћелије, већ

дефинисаним једначином (3.48). Процедура вишеструке корекције притиска се изводи следећим редоследом:

1. Пронаћи масене протоке на страницама ћелије базиране на тренутном пољу брзина, једначина (3.45), помоћу једначине (3.47),
2. Формирати матрицу система за једначину корекције притиска, у којој су коефицијенти који се налазе ван дијагонала  $a_j^p = -\frac{\rho_j S_j K_j}{|\mathbf{d}_{PP_j}| \cos \theta'}$
3. Решити једначину за корекцију притиска (3.53),
4. Наћи ћелијски центриране градијенте корекције притиска,
5. Кориговати масене протоке  $F_j = F_j^* - a_j^p (p'_{P_j} - p'_P) - a_j^p (\nabla p'_{P_j} \cdot \mathbf{d}_{P'_j P_j} - \nabla p'_P \cdot \mathbf{d}_{P'P})$ ,
6. Кориговати брзине  $\mathbf{u} = \mathbf{u}^* - \frac{V}{a_p^u} \nabla p'_P =$  и притиске  $p_P = p_P^* + \alpha_p p'_P$ ,  $0 \leq \alpha_p \leq 1$ ,  
Петља итеративне корекције неортогоналности:

7. Израчунати елементе вектора десне стране једначине корекције неортогоналности, једначина (3.55) користећи експлицитно третиране чланове једначине (3.50), док елементи матрице коефицијената остају исти као за једначину корекције притиска, затим решити систем.
8. Поновити кораке 4 до 6. Мала измена се чини у кораку 5, тако да је корекција масеног протока на страницама сада  $F_j = F_j - a_j^p (p_{P_j}^{(n)} - p_P^{(n)}) - a_j^p (\nabla p_{P_j}^{(n)} \cdot \mathbf{d}_{P'_j P_j} - \nabla p_P^{(n)} \cdot \mathbf{d}_{P'P})$ ,

Понављајући кораке петље за итеративну корекцију неортогоналности, унапређује се могућност укупног алгоритма за прорачуне на изразито деформисаним мрежама.

### 3.10 Итеративно решавање линеарних система једначина

Једначина корекције притиска је једначина Поасоновог типа (фр. Poisson) са Њумановим (енг. Neumann) контурним условима. Такви проблеми резултирају у симетричним позитивно-дефинитним матрицама система. Метода коњугованих градијената (енг. Conjugate Gradients method, у наставку CG), које припадају широј класи метода Крилова (рус. Крилов), се обично

користи за овакве проблеме. Са одговарајућим прекондиционером, резултујући метод тзв. Прекондиционирани метод коњугованих градијената (енг. Preconditioned Conjugate Gradient, у наставку PCG), прекондициониран помоћу непотпуне факторизације Холецког (енг. Incomplete Cholesky factorisation) са тзв. нултим допуњавањем отиска разређености<sup>3</sup>, (IC(0)), је најчешће у употреби [110].

Изражено имплицитна метода (енг. Strongly Implicit Procedure, у наставку SIP), [73] и њене варијанте, је често у употреби за решавање линеарних система једначина на структурираним мрежама. Тај алгоритам је посебно формулисан за линеарне системе настале дискретизацијом једначина одржања помоћу методе коначних разлика. Посебно су зато написане варијанте које предвиђају прорачунски молекула са пет, седам и девет тачака, на структурираним мрежама, и није употребљив изван тог специфичног домена примене. У тим околностима, пак, уколико је обезбеђена оптимална вредност слободног параметра  $\alpha$ , што је негде између 0.92 и 0.96, овај алгоритам показује боље резултате него конвенционални PCG(IC(0)) алгоритам [108].

У потрази за оптималним алгоритмом за једначине које се јављају у проблемима симулације струјања над комплексним теренима, и то у терминима прецизности, робустности и прорачунске ефикасности, у оквиру ове дисертације је испитана варијанта у којој SIP алгоритам није коришћен као самостални алгоритам за решавање система, већ је коришћен као прекондиционер за један од солвера из класе метода Крилова. Први, очигледни избор, пошто се сусрећемо са симетричним матрицама је CG метод. У књизи [108, р. 104] таква могућност је била споменута, и речено је да коришћење некомплетне ILU декомпозиције базиране на SIP алгоритму, даје боље резултате него када је коришћен PCG(IC(0)). Нису представљени било какви резултати касније који би потврдили те констатације. У опширном прегледном раду [110], где је поглавље било посвећено непотпуним факторизацијама, такође нема помињања о коришћењу SIP методе као прекондиционера.

Ради упоређивања, разматраћемо PCG(IC(0))<sup>4</sup>, као основни солвер за нашу серију нумеричких експеримената јер представља уобичајени избор када су у питању симетричне позитивно-дефинитне матрице система.

<sup>3</sup>У том случају матрица има исти отисак разређености као и оригинална матрица.

<sup>4</sup>Пун енглески назив је Incomplete Cholesky preconditioned Conjugate Gradient method with zero fill-in.

Након тога, разматраћемо прекондиционирану верзију Bi-CGSTAB<sup>5</sup> солвера, такође из класе метода Крилова. Тај алгоритам је врло робустан и доводи до брзе конвергенције, али има веће прорачунске захтеве него CG. Након примењивања SIP прекондиционера, може се запазити да конвергенција постаје још бржа. У примерима који ће касније бити приказани, Bi-CGSTAB(SIP) солвер значајно надмашује друге алгоритме у терминима брзине конвергенције.

Основни разлог за боље перформансе SIP прекондиционера у односу на оне базиране на непотпуним факторизацијама, као што су ILU(0) и IC(0) може се образложити тиме што је на тај начин оригинална матрица система  $A$  боље апроксимирана помоћу матрице прекондиционера  $M = \bar{L}\bar{U}$ , где  $\bar{L}$  и  $\bar{U}$  представљају непотпуне (апроксимативне) LU факторе матрице  $A$ .

Код прекондиционера заснованих на непотпуним факторизацијама (видети нпр. [110] за детаљан преглед стратегија прекондиционирања), започиње се примењивањем непотпуне факторизације оригиналне матрице  $A$ , притом избегавајући додатну попуна (појављивање додатних елемената који су различити од нуле, на местима изван оригиналног отиска разређености матрице  $A$ ), процедуром која доводи до ILU(0) и IC(0). Алтернативно, може се дозволити додатна попуна на основу одређених критеријума, што је процедура која доводи до других прекондиционера, захтевнијих у погледу меморије, као што је ILU(1), где је још један додатни ниво попуне дозвољен. Још неке варијанте обухватају неке мало детаљније прекондиционере као што је  $ILUT(\tau, p)$ , са двоструким критеријумом одабира додатних елемената: фиксирајући толеранцију прага прихватања нових елемената  $\tau$  и број  $p$  додатних елемената у сваком реду, [112].

Код SIP алгоритма се примењује другачији приступ. Апроксимира се почетна матрица  $A$ , матрицом  $M$ , и то тако да она даје LU декомпозицију у којој нема додатних елемената, тако да њиховог одстрањивања као код ILU(0) нема. Ово зато можемо означити као метод одозго-надоле (енг. top-down approach). За структуриране тродимензионалне мреже, постоји шест додатних дијагонала у матрици прекондиционирања  $M$ , и вредности ових елемената су апроксимиране узимајући у обзир одређену количину емпирије, као што је претпоставка монотоности решења диференцијалне једначине којом

---

<sup>5</sup>Пун назив на енглеском је Bi-Conjugate Gradient Stabilized. Потребно је напоменути да у књизи [108, р. 105], је исти солвер означен као CGSTAB, иако, после детаљне провере, долази се до закључка да је реч о Bi-CGSTAB солверу [111]. Исти акроним је такође коришћен у [56]. Оба извора [56] и [108] цитирају непубликован технички извештај од аутора Van Der Vorst и Sonneveld, написаног пре оригиналног Bi-CGSTAB рада [111].

се тежи [73]. Додатни увиди у карактер решења чини SIP - прекоњдиционе-ром базираном на физичким увидима (енг. physics based preconditioner).

---

**Алгоритам 1** SIP прекоњдиционирани Bi-CGSTAB алгоритам.

---

Иницијализација:  $k = 0$ ,  $\phi^0 = \phi_{in}$ ,  $\rho^0 = \mathbf{b} - A\phi_{in}$ ,  $\mathbf{u}^0 = \mathbf{p}^0 = \mathbf{0}$   
Извршити некоњплетну факторизацију користећи SIP алгоритам, и наћи матрицу прекоњдиционарања:  $M = LU = SIP(A)$   
**while**  $k \leq maxiter$  or  $\|\rho\|/\|\mathbf{b}\| \geq tol$  **do**  
  **loop**  
    Бројач повећати за један:  $k \leftarrow k + 1$   
     $\beta^k \leftarrow \rho^0 \cdot \rho^{k-1}$   
     $\omega^k \leftarrow (\beta^k \gamma^{k-1}) / (\alpha^{k-1} \beta^{k-1})$   
     $\mathbf{p}^k \leftarrow \rho^{k-1} + \omega^k (\mathbf{p}^{k-1} - \alpha^{k-1} \mathbf{u}^{k-1})$   
    Решити линеарни систем:  $M\mathbf{z} = \mathbf{p}^k$   
     $\mathbf{u}^k \leftarrow A\mathbf{z}$   
     $\gamma^k \leftarrow \beta^k / (\mathbf{u}^k \cdot \rho^0)$   
    Решити линеарни систем:  $M\mathbf{y} = \mathbf{w}$   
     $\mathbf{v} \leftarrow A\mathbf{y}$   
     $\alpha^k \leftarrow (\mathbf{v} \cdot \rho^k) / (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})$   
     $\phi^k \leftarrow \phi^{k-1} + \gamma^k \mathbf{z} + \alpha^k \mathbf{y}$   
     $\rho^k \leftarrow \mathbf{w} - \alpha^k \mathbf{v}$   
  **end loop**  
**end while**

---

Детаљна анализа различитих прекоњдиционера и њихова компаративна оцена у односу на SIP солвер је остављена за будућа истраживања. Ради омогућавања поновљивости овде остварених резултата у прилогу дисертације је дат комплетан изворни код, у програмском језику Fortran, за SIP прекоњдициониране алгоритме PCG(SIP) и Bi-CGSTAB(SIP) написане за разређене матрице које се чувају у дијагоналној форми. Исти алгоритми су овде дати у виду псеудокода као Алгоритам 1 и Алгоритам 2.

### 3.11 Нумеричка ефикасност

Прорачунски трошкови по једној обнови поља градијената за цео про-рачунски домен, за предложену процедуру реконструкције градијената на основу методе најмањих квадрата је  $(\sum_i (2n_{f,i} - 1))$ ,  $i = 1, n_{cells}$  флопова (енг. floating point operations) по једној променљивој, где је  $n_{cells}$  укупан број ћелија у домену. Уколико је број страница по ћелији константан, као у случају структурираних мрежа где је  $n_f = 6$  у тродимензионалним доменима, цена



---

**Алгоритам 2** SIP прекоњдиционирани CG алгоритам.

---

Иницијализација:  $k = 0$ ,  $\phi^0 = \phi_{in}$ ,  $\rho^0 = \mathbf{b} - A\phi_{in}$ ,  $\mathbf{p}^0 = \mathbf{0}$ ,  $s^0 = 10^{20}$

Извршити некоњплетну факторизацију користећи SIP алгоритам, и наћи матрицу прекоњдиционирања:  $M = LU = SIP(A)$

**while**  $k \leq maxiter$  or  $\|\rho\|/\|\mathbf{b}\| \geq tol$  **do**

**loop**

    Бројач повећати за један:  $k \leftarrow k + 1$

    Решити систем:  $M\mathbf{z}^k = \rho^{k-1}$

$s^k \leftarrow \rho^{k-1} \cdot \mathbf{z}^k$

$\beta^k \leftarrow s^k / s^{k-1}$

$\mathbf{p}^k \leftarrow \mathbf{z}^k + \beta^k \mathbf{p}^{k-1}$

$\alpha^k \leftarrow s^k / (\mathbf{p}^k \cdot A\mathbf{p}^k)$

$\phi^k \leftarrow \phi^{k-1} + \alpha^k \mathbf{p}^k$

$\rho^k \leftarrow \rho^{k-1} - \alpha^k A\mathbf{p}^k$

**end loop**

**end while**

---

прорачунавања обновљеног поља градијената је  $11n_{cells}$  флопова. Ово представља унапређење у поређењу са алгоритмима који решавају мали линеарни систем за сваку ћелију, током обнове поља градијената. Цена стварања матрице  $\mathbf{D}$  (потпоглавље 3.2) се овде не разматра јер се обавља у предпроцесорској фази, и резултат се чува у радној меморији. Додатни меморијски захтеви за складиштење матрице  $\mathbf{D}$  су занемариви.

У терминима додатног процесорског (CPU) времена, линеарни солвер Bi-CGSTAB(SIP) захтева готово исто време по итерацији као и Bi-CGSTAB(ILU). Када се упореди са самосталним SIP солвером на структурираној мрежи, време по итерацији се удвостручује, али то је више него значајно компензовано кроз редукцију укупног броја потребних итерација, која често десетострука.

## Глава 4

# Верификација нумеричког алгоритма - прорачунске грешке и прецизност нумеричке апроксимације

### 4.1 Увод

У овом и наредним поглављима бавимо се верификацијом методологије представљене у овој дисертацији. У овом поглављу су приказани следећи тест случајеви:

- Нумерички експеримент са синтетичким решењем да би се испитала ефикасност процедуре за реконструкцију градијената. Дефиниција поступка систематичне деформације прорачунске мреже, која ће бити коришћена и у осталим случајевима, претходи излагању резултата.
- Периодично струјање са аналитичким решењем за испитивање прецизности и брзине конвергенције на недеформисаним и деформисаним мрежама.
- Ламинарно струјање у каналу са деформисаним мрежама. Испитана је апроксимација градијената притиска у струјањима ограниченим чврстим површима, у условима деформације прорачунске мреже.

У наредном поглављу биће, затим, приказана струјања над идеализованим брдима. Струјања имају све карактеристике реалних случајева, изузев облика брда. Испитани су ламинарни и турбулентни случајеви.

- Ламинарно струјање преко глатког брда задатог тригонометријском функцијом.
- Струјање над идеализованим троугаоним брдом у турбулентном граничном слоју.

Након тога, у завршном поглављу посвећеном испитивању предложеног алгорита, биће приказани:

- Случајеви над реалним комплексним теренима. Испитано је и приказано поређење симулација са експериментима обављеним на пуној атмосферској размери.

У нумеричким експериментима се постепено мења тип података коришћених за поређење: једноставна синтетичка функција, аналитичка решења Навије-Стоксових једначина, нумеричка решења помоћу других алгоритама, одлике струјања забележене у испитивањима у аеротунелима (нпр. појављивање рециркулационог региона и праћење његове дужине), и на послетку, измерене вредности у експериментима обављеним у пуној атмосферској размери.

Врши се поређење резултата симулација коришћењем тренутног алгорита са алгоритмом који је првобитно био представљен у [113] и имплементиран у савремени, паралелизовани, истраживачки код који је био широко коришћен и непрекидно усавршаван током година ради проучавања напредних модела турбуленције за турбулентна струјања у присуству Архимедовских сила [114, 115, 69], струјања у атмосферском окружењу [67, 68, 70, 116], и струјања у присуству електромагнетских сила [117, 118], и који је развијала истраживачка група Техничког Универзитета Делфт, у Холандији, са којом је аутор сарађивао током израде ове дисертације. Резултати добијени тим прорачунским кодом су означени као основни приступ (енг. Basic approach). Предложена процедура је била имплементирана кроз корекције унете у овај код током његовог континуалног развоја, одржавајући доследност са претходним приступом тамо где је могуће, и уносећи унапређења на местима покривеним у поглављу 3. Посебна пажња је учињена да се очува скалабилност паралелне верзије кода, која је била демонстрирана у претходним истраживањима сарадничке групе [69].

За турбулентне тест случајеве, посебна пажња је посвећена грешкама у моделирању које ће бити могуће правилно оценити након што су грешке дискретизације проверене на ламинарним случајевима.

## 4.2 Ваљаност апроксимације ћелијски центрираних градијената

Како би оценила прецизност апроксимације градијената, направљен је низ деформисаних мрежа код којих је неортогоналност зависна од вредности параметра  $\beta$ , "фактор истезања" прорачунских линија у правцу  $y$  координате осе, слика 4.1. У примерима који следе мреже су деформисане у унутрашњости, остављајући праволинијску и униформну мрежу домена  $[0, 2\pi]^2$  нетакнуту.

Координате чворова мреже су дефинисане на следећи начин

$$y_i = y_a + c_i(y_b - y_a), \quad (4.1)$$

где су  $y_a$  и  $y_b$  крајеви сегмента, а  $c_i$  је функција истезања која контролише расподелу чворних тачака. Функције истезања су дефинисане помоћу два израза,

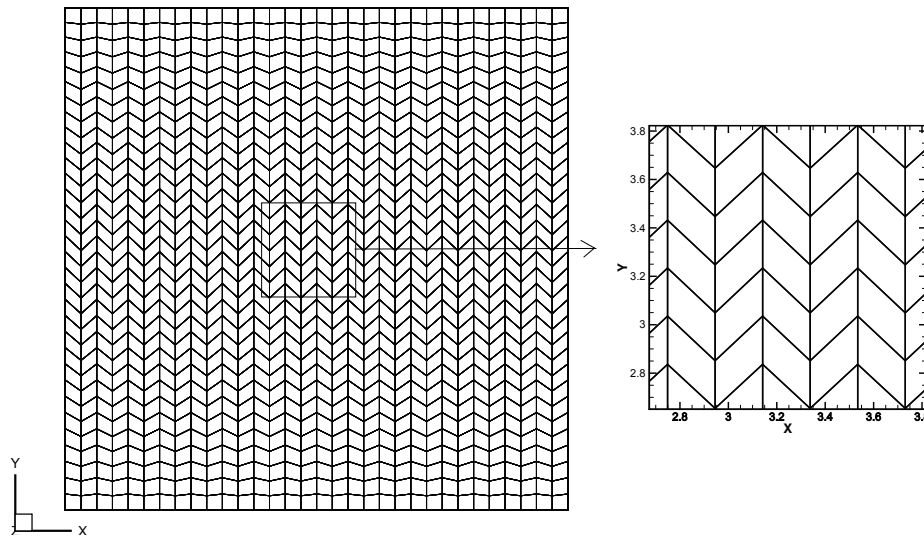
$$c_i = 1 - \beta \frac{\left(\frac{\beta + 1}{\beta - 1}\right)^{\gamma_i} - 1}{\left(\frac{\beta + 1}{\beta - 1}\right)^{\gamma_i} + 1}, \quad (4.2)$$

и

$$c_i = \beta \frac{\left(\frac{\beta + 1}{\beta - 1}\right)^{\gamma_i} - 1}{\left(\frac{\beta + 1}{\beta - 1}\right)^{\gamma_i} + 1}, \quad (4.3)$$

где је  $\gamma_i = 1 - (i - 1)/(N - 1)$ ,  $1 \leq i \leq N$ , и  $N$  је укупан број координатних тачака. Две функције истезања, (4.2) and (4.3), су примењене наизменично на парним и непарним координатним линијама мреже. Дистрибуција чворова мреже је равномерна на границама домена, из разлога што је антиципирана периодичност одређених тест случајева, који ће бити тестирани у каснијим потпоглављима.

Прорачунске мреже су конструисане на овај начин из два разлога. Процедура која функционише добро за случај правоугаоних мрежа, Гаусова метода за израчунавање градијената, у којој се вредности зависно променљивих, центрираних на страницама ћелија, израчунавају линеарном интерполацијом на основу вредности из два ћелијска центра, међусобно суседних ћелија, даје вредности на локацији тачке  $j'$  која се налази на пресеку странице ћелије и линије које повезује два центра ћелија. Ова вредност се разликује од



Слика 4.1: Структура мреже за случај тестирања градијената и за случај вртлога Тејлора и Грина. Деформација мреже је функција параметра  $\beta$ . Димензија домена је  $[0, 2\pi]^2$ ; величина мреже на слици,  $32 \times 32 \times 10$ ; вредност параметра деформације,  $\beta = 3$ .

оне која је израчуната за центроид странице  $j$ , уколико је мрежа неортогонална (Слика 3.1(a)). На овај начин је врло тешко добити добре вредности за ћелијски центриране градијенте користећи Гаусову теорему. Други разлог за осмишљавање оваквог типа мреже, за испитивање отпорности алгоритма на појаву неортогоналности је зашто што се овакве ситуације прилично често срећу у случајевима симулације струјања ветра над комплексним тернима, као што ће убрзо бити показано, у поглављу 6.2.

Табела 4.1: Релативна  $L^2$  грешка приликом реконструкције ћелијски центри-раних градијената. Табела показује резултате за методу која се ослања не ли-неарну интерполацију и примену Гаусове теореме, и резултате предложене процедуре, базиране на методи најмањих квадрата.

Mesh	Gauss	LSQ-present
Uniform	$2.980 \times 10^{-8}$	$1.428 \times 10^{-15}$
$\beta = 5$	$2.297 \times 10^{-1}$	$1.465 \times 10^{-15}$
$\beta = 4$	$3.628 \times 10^{-1}$	$1.432 \times 10^{-15}$
$\beta = 3$	$6.609 \times 10^{-1}$	$1.426 \times 10^{-15}$
$\beta = 2$	$0.160 \times 10^1$	$1.401 \times 10^{-15}$
$\beta = 1.5$	$0.324 \times 10^1$	$1.487 \times 10^{-15}$

Тестови су извршени на синтетичком скаларном пољу  $\phi(x, y, z) = x + y + z$ , на ком је једноставно аналитички наћи вредност извода по правцу, а резултати су приказани у табели 4.1. Прецизност прорачуна је оцењена путем ре-

лативне  $L^2$  норме грешке. Резултати сугеришу да је процедура базирана на Гаусовој теореме, уз употребу некориговане линеарне интерполације, прилично непрецизна већ на благо неортогоналним мрежама. Процедура предложена у овој дисетрацији, која је базирана на решавању вишеструко одређеног линеарног система ефикасним алгоритмом најмањих квадрата, даје резултате који су тачни до нивоа машинске прецизности, за шездесетчетворобитну аритметику бројева са плутајућим зарезом, на било којој прорачунској мрежи.

### 4.3 Прорачун вртлога Тејлора и Грина

Објекат проучавања у оквиру овог нумеричког експеримента је нестационарно струјање споро нестајућег (услед дејства вискозности) вртлога Тејлора и Грина (енг. Taylor-Green vortex, у наставку TGV), који представља егзактно аналитичко решење Навије-Стоксових једначина [119, 120],

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= -\sin(x)\cos(y)e^{-2\nu t}, \\ v(x, y, t) &= \cos(x)\sin(y)e^{-2\nu t}, \\ p(x, y, t) &= \frac{1}{4}(\cos(2x) + \cos(2y))e^{-4\nu t}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Струјање флуида је периодично у  $x$  и  $y$  правцима са периодом  $2\pi$ . Величина домена коришћена у симулацијама је  $2\pi \times 2\pi \times \pi$ . Та величина је изабрана да би била омогућено поређење са резултатима који су приказани у [96]. Почетни и гранични услови су израчунати на основу аналитичког решења. Слике 4.3(a) и 4.3(b) приказују поље притиска и интензитета брзине за вртлог Тејлора и Грина, у равни  $xy$ . Резолуција прорачунске мреже је повећавана од  $N_x \times N_y \times N_z = 8 \times 8 \times 10$ , до  $128 \times 128 \times 10$ , кроз сукцесивне промене резулације за фактор два. Сваки случај је пуштан педесет дискретних временских корака, а величина сваког временског корака је  $\Delta t = 0.01$  s, као у [96].

Пошто се ради о ламинарном случају, у стању смо да проценимо грешку дискретизације, и то радимо путем релативне  $L^2$  норме грешке,

$$error = \sqrt{\frac{\sum_{i=0}^N (\phi_{ex} - \phi_i)^2}{\sum_{i=0}^N \phi_{ex}^2}}. \quad (4.5)$$

Брзина којом се решења мењају када се повећава резолуција мреже <sup>1</sup> је дефинисана на следећи начин

$$rate = \frac{\log(error_{2h}/error_h)}{\log 2}, \quad (4.6)$$

где су  $h$  и  $2h$  средња растојања чворова мреже за фину и грубу мрежу респективно.

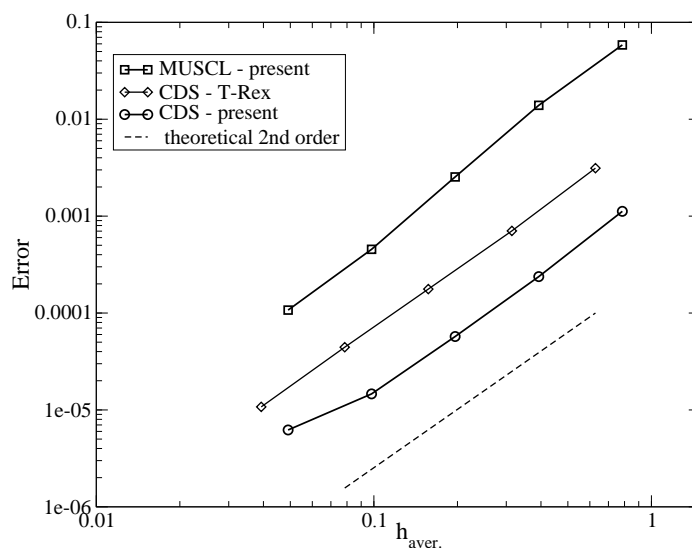
Први низ тестова је спроведен на униформним мрежама са различитим шемама за конвективне чланове (Слика 4.2). Централна диферентна шема уочљиво оступа као најпрецизнија. Резултати добијени помоћу централне шеме из тренутних симулација као и упоредно приказаних оних из [96] показују остварен други ред тачности апроксимације. Ипак постоји велика разлика између резултата са предложеним алгоритмом и оним приказаним у [96]. Анализа је показала да је узрок томе начин на који се третирају градијенти притисака у Навије-Стоксовим једначинама. Док су ћелијски центрирани градијенти коришћени директно, тј. градијент притиска је третиран као изворни члан у случају алгоритма [96], у тренутном случају градијент притиска је третиран као површински изворни члан, преко Гаусове интегралне теореме. Интерполиране вредности на страницама ћелије су нађене коришћењем једначине (3.38). Утврђено је да је третман градијената притиска такође пресудан у случају неортогоналних мрежа.

Следећи низ нумеричких експеримената је изведен на деформисаним мрежама, где је параметар  $\beta$  вариран како би се контролисао ниво деформације. Нивои резолуције мреже су  $8 \times 8 \times 10$ ,  $16 \times 16 \times 10$ ,  $32 \times 32 \times 10$ ,  $64 \times 64 \times 10$ , представљене преко средње дужине странице ћелије  $h_{aver}$ .

Први тестови су изведени са основним алгоритмом [113], који је намењен за структуриране, благо неортогоналне мреже које прате облик тела, али где су постојеће корекције неортогоналности искључене (Табела 4.2). Конвективни члан је апроксимиран централном диферентном шемом. Проблем са којим се сусрећемо већ на благо деформисаним мрежама је немогућност да се тачно представи поље притиска због појављивања паразитних, физички непостојећих, осцилација у решењу.

Иста серија тестова је поновљена коришћењем алгоритма који је представљен у овој дисертацији, са централном шемом, а резултати приказани у Табели 4.3. За разлику од претходних симулација, нису се појавиле осцилације притиска у овим резултатима, а поље брзина има већу прецизност за

<sup>1</sup>За које се такође каже "уфињавање мреже".



Слика 4.2: Брзина конвергенције приликом промене резолуције мреже за слу-чај вртлога Тејлора и Грина. Коришћене су мреже са различитим конвек-тивним шемама. Резултати симулација помоћу предложеног алгоритма су упоређени са резултатима Т-Rex кода [96]. Величина дискретног временског корака,  $\Delta t = 0.01s$ .

два реда величина. Утицај деформације мреже је приметан у брзини конвергенције при измењивању мрежа, и може се из резултата закључити да се ова вредност код неортогоналних мрежа не може више користити како би се израчунао ред тачности кода, јер начин на који се мења величина *rate* је изразито неуниформна.

Нумерички експерименти са истом поставком су изведени да би се испитало понашање конвективних шема вишег реда у случају неортогоналних мрежа (Табела 4.4). Може се видети да неповољан ефекат неправилности прорачунске мреже долази до изражаја раније него у случају централне шеме, где долази и до покављивања негативних фактора при већим деформацијама (мање  $\beta$ ).

За изразито деформисане мреже, при  $\beta = 3$ , на финој мрежи, извршени су тестови линеарних солвера за једначину корекције притиска, Слика 4.7. У тим случајевима, SIP прекондиционирани алгоритми из породице Крилова, су се показали значајно бољим од осталих. SIP прекондиционирани CG - CG(SIP), показује значајно унапређење у односу на CG(IC(0)). CG(SIP) показује бржу конвергенцију од CG(IC(0)), и униформнију конвергенцију у иницијалној фази итерација. Bi-CGSTAB(SIP) солверу, који се показао најбоље, је било потребно око два ипо пута мање итерација да би се достигао



Табела 4.2: Случај вртлога Тејлора и Грина: прорачунске грешке и брзине конвергенције мреже за различите вредности параметра  $\beta$ . Варијанта алгоритма за униформне праволинијске мреже. Централна диферентна шема за конвекцију.

$h_{aver.}$	$\beta = 5$		$\beta = 4$		$\beta = 3$	
	error	rate	error	rate	error	rate
0.785	$2.8077 \times 10^{-2}$	-	$4.4350 \times 10^{-2}$	-	$8.0734 \times 10^{-2}$	-
0.3925	$5.8394 \times 10^{-2}$	-1.056	$9.2137 \times 10^{-2}$	-1.055	$1.6679 \times 10^{-1}$	-1.047
0.19625	$9.9445 \times 10^{-2}$	-0.768	$1.5809 \times 10^{-1}$	-0.779	$2.8883 \times 10^{-1}$	-0.792
0.098125	$9.5772 \times 10^{-2}$	0.054	$1.6275 \times 10^{-1}$	-0.042	$3.3076 \times 10^{-1}$	-0.196

Табела 4.3: Случај вртлога Тејлора и Грина: прорачунске грешке и брзине конвергенције мреже за различите вредности параметра  $\beta$ . Предложени алгоритам са централном диферентном шемом.

$h_{aver.}$	$\beta = 5$		$\beta = 4$		$\beta = 3$	
	error	rate	error	rate	error	rate
0.785	$6.1048 \times 10^{-3}$	-	$9.6535 \times 10^{-3}$	-	$1.7662 \times 10^{-2}$	-
0.3925	$3.5902 \times 10^{-3}$	0.766	$5.6935 \times 10^{-3}$	0.762	$1.0531 \times 10^{-2}$	0.746
0.19625	$1.4309 \times 10^{-3}$	1.327	$2.3379 \times 10^{-3}$	1.284	$4.7898 \times 10^{-3}$	1.137
0.098125	$6.9480 \times 10^{-4}$	1.042	$1.6211 \times 10^{-3}$	0.528	-	-

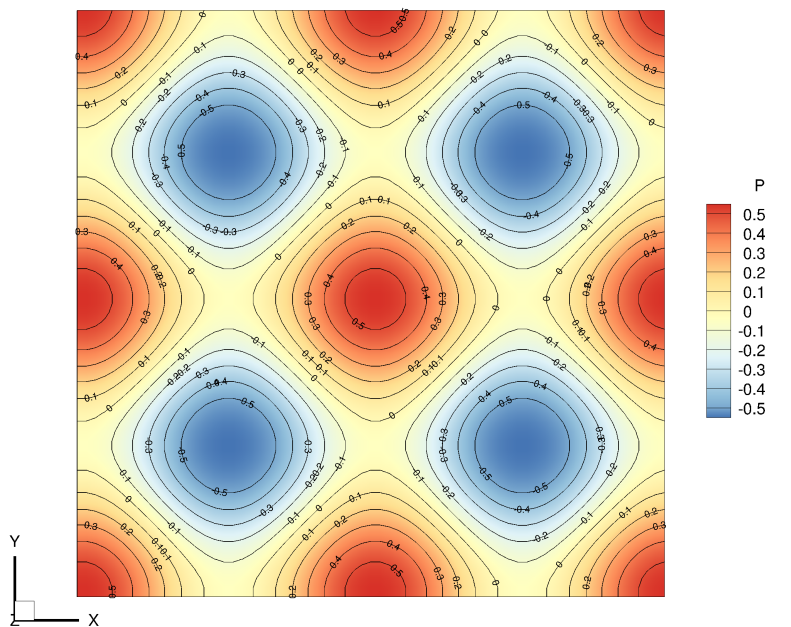
исти ниво резидуала од PCG(IC(0)), што је било довољно да се компензује то што је тај метод двоструко скупљи од CG. Када се SIP користи самостално, као што се ради у многим истраживачким кодовима за структуриране мреже, не постижу се задовољавајући резултати, иако конвергенција у овом случају поседује највећу дозу униформности.

Ефекат вишеструких пролаза решавања једначине корекције притиска (тзв. неортогонални коректори) на конвергенцију спољних итерација (тј. SIMPLE итерација за решавање спреге поља притиска и брзине), је приказан на Слици 4.8. Уколико је  $nrcor = 2$ , тј. уколико се решава друга једначина корекције притиска, резидуали за једначину континуитета имају вредности које су за ред величина мање него у случају када је  $nrcor = 1$ , али брзина којом резидуали опадају остаје исти, што се на дијаграму уочава кроз паралелност две криве, приказане у семи-логаритамској скали. Ово значи да додатни пролази решавања једначине корекције притиска не доприносе директно бржој конвергенцији SIMPLE итерација, што се може закључити и из теоретског излагања када је једначина корекције притиска изведена, где је показано да је сума додатних корекција масеног протока по страницама ћелије  $\sum_j F_j^{(n)} = 0$  коришћена за извођење једначине за додатне корекције притиска. Вредности  $F_j^{(n)}$  су коришћени за бољу дистрибуцију грешке у јед-

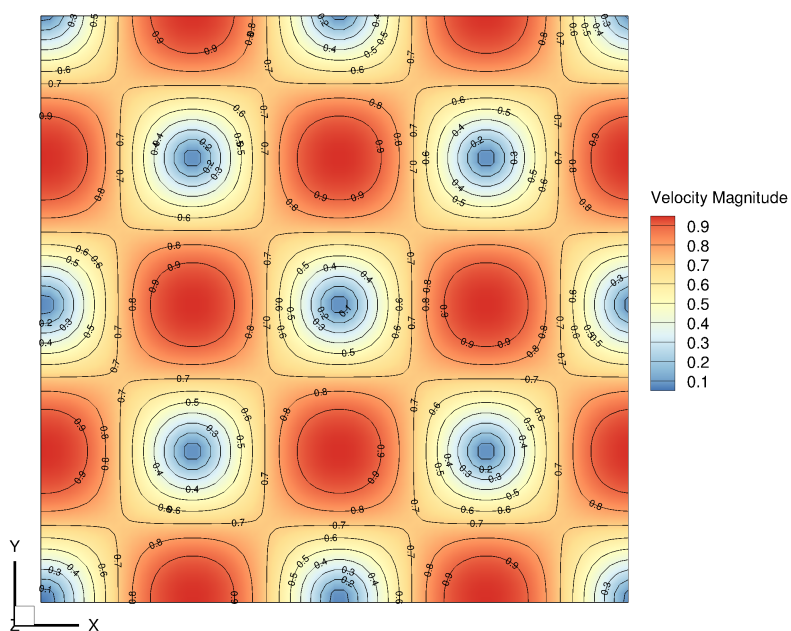
Табела 4.4: Случај вртлога Тејлора и Грина: прорачунске грешке и брзине конвергенције мреже за различите вредности параметра  $\beta$ . Предложени алгоритам са MUSCL диферентном шемом.

$h_{aver.}$	$\beta = 5$		$\beta = 4$		$\beta = 3$	
	error	rate	error	rate	error	rate
0.785	$9.9738 \times 10^{-3}$	-	$1.2003 \times 10^{-2}$	-	$1.7905 \times 10^{-2}$	-
0.3925	$4.4237 \times 10^{-3}$	1.173	$6.1833 \times 10^{-3}$	0.957	$1.0769 \times 10^{-2}$	0.733
0.19625	$4.0290 \times 10^{-3}$	0.135	$6.3668 \times 10^{-3}$	-0.04	$1.1892 \times 10^{-2}$	-0.143
0.098125	$6.9600 \times 10^{-3}$	-0.789	$1.1034 \times 10^{-2}$	-0.793	-	-

начини континуитета, у оквиру прорачунске ћелије, проузрокујући ниже резидуале једначине корекције притиска, а не на редукцију грешке у једначини континуитета која је преостала након решавања прве једначине за корекцију притиска и обнављања вредности масених протока. Неортогонални коректори, са друге стране, омогућавају коришћење виших вредности подрелаксационих фактора.

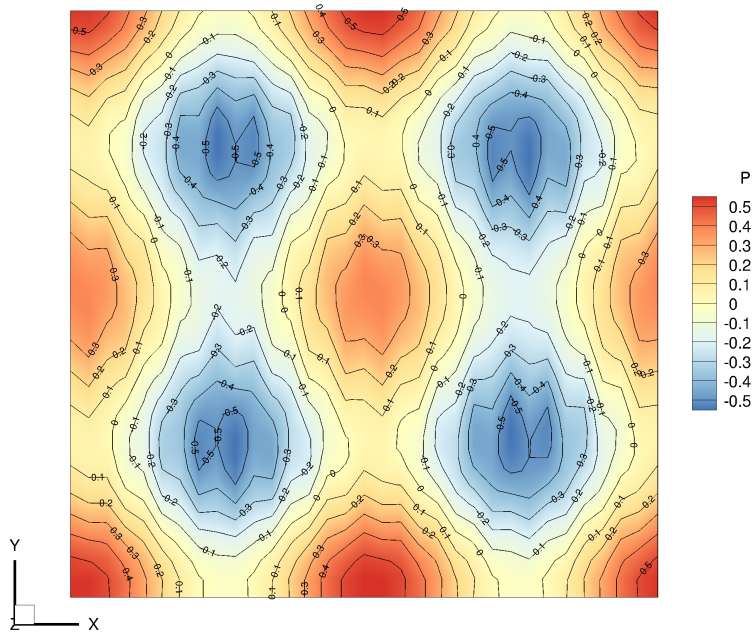


(a)

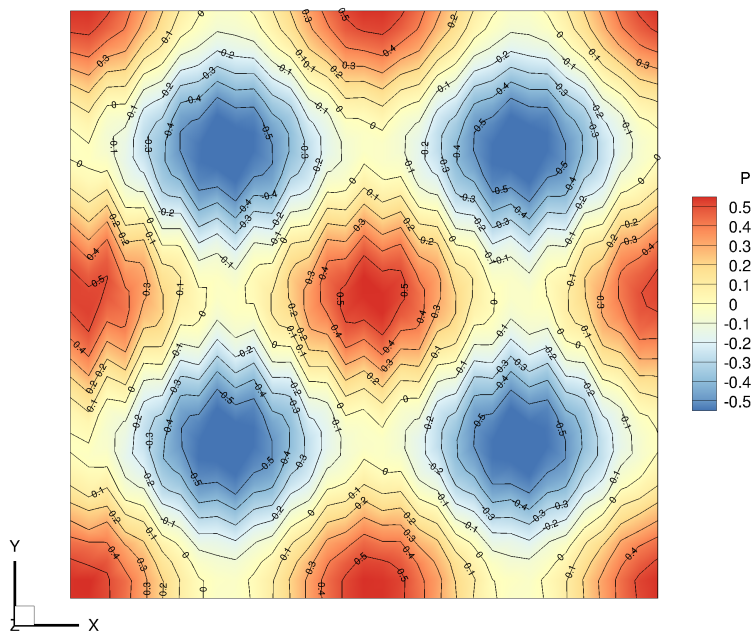


(b)

Слика 4.3: Вртлог Тејлора и Грина а) Поље притиска у  $xy$  равни, б) Поље интензитета брзине у  $xy$  равни

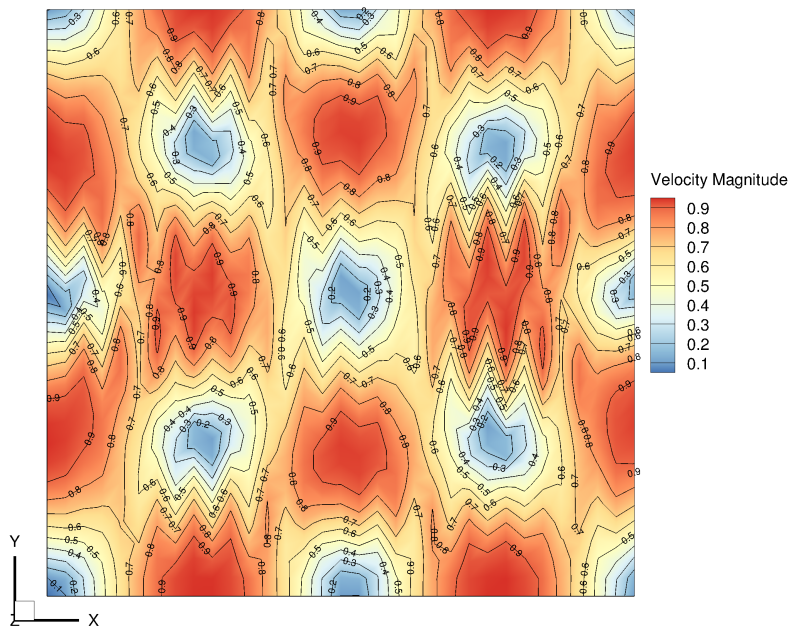


(a)

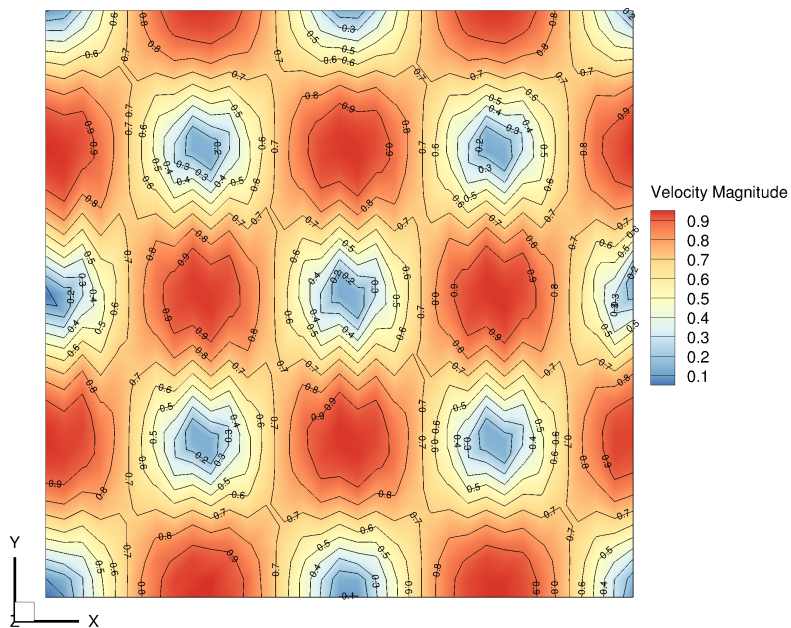


(b)

Слика 4.4: Поље притиска у  $xy$  равни за TGV случај,  $\beta = 3$ , величина мреже  $32 \times 32 \times 10$  ћелија. а) Основни приступ, б) Унапређен третман неортогоналности.

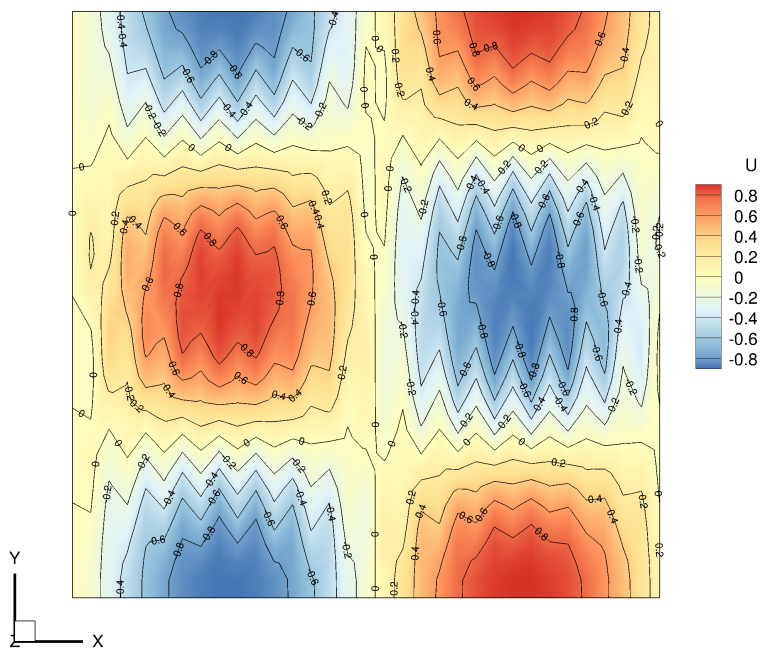


(a)

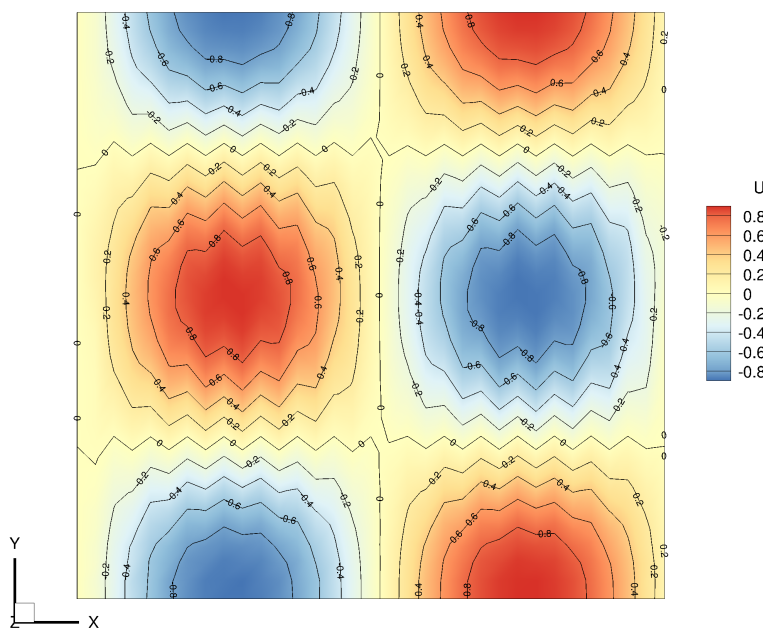


(b)

Слика 4.5: Поље интензитета брзина у  $xy$  равни за TGV случај,  $\beta = 3$ , величина мреже  $32 \times 32 \times 10$  хелија. а) Основни приступ, б) Унапређен третман неортогоналности.

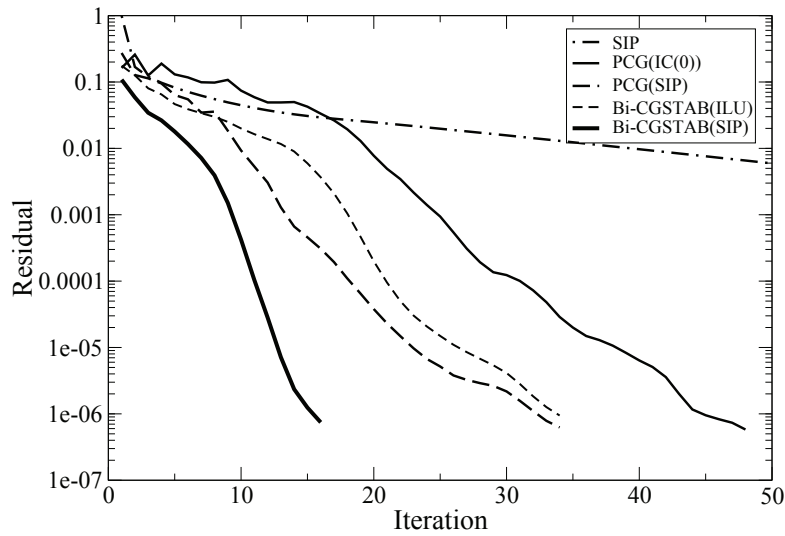


(a)

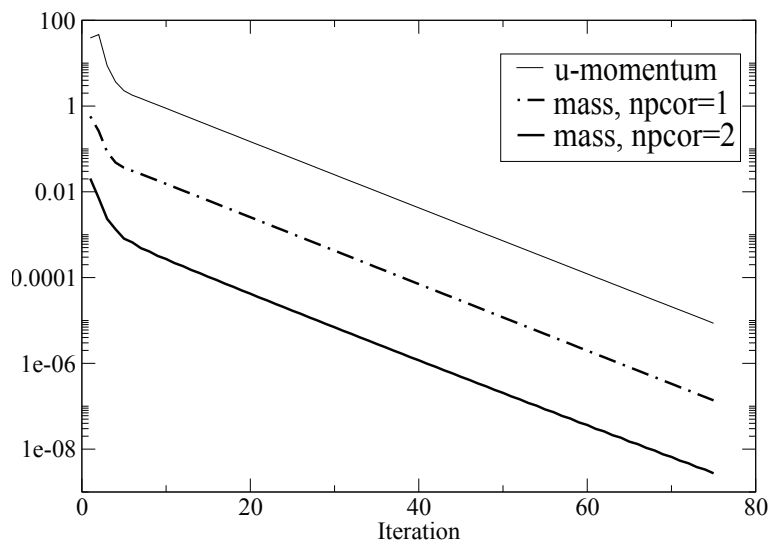


(b)

Слика 4.6:  $u$ -компонента брзине, у  $xy$  равни за TGV случај,  $\beta = 3$ , величина мреже  $32 \times 32 \times 10$  ћелија. а) Основни приступ, б) Унапређен третман неортогоналности.



Слика 4.7: Случај вртлога Тејлора и Грина: Конвергенција унутрашњих ите-рација датих у  $L_1$  норми резидуала за различите линеарне солвере приме-њене на дискретизовану једначину корекције притиска. Мрежа је густине  $64 \times 64 \times 10$ , вредност параметра неортогоналности мреже је  $\beta = 3$ .



Слика 4.8: Случај вртлога Тејлора и Грина: Утицај броја неортогоналних ко-ректора ( $npcor$ ) на конвергенцију SIMPLE итерација у оквиру једног вре-менског корака. Слика приказује резидуал за једначину количине кретања ( $u$ -momentum) и резидуале једначине континуитета за различите  $npcor$  вред-ности ( $\beta = 4$ ,  $\Delta t = 0.001$ , подрелаксациони фактори:  $\alpha_p = 1.0$ ,  $\alpha_u = 0.8$ ).



## 4.4 Ламинарно струјање у каналу са систематски деформисаним прорачунским мрежама

Сврха овог примера је да се проучи прецизност интерполација. Разматра се ламинарно Поазејево (фр. Poiseuille) струјање у раванском каналу при вредности Рејнолдосвог броја  $Re = 200$ . Величина прорачунског домена је  $L_x \times L_y \times L_z = 2.5 \times 0.04 \times 0.236$ . За овај случај постоји аналитичко решење и оно гласи

$$u(z) = 4u_{max} \left(1 - \frac{z}{h}\right) \frac{z}{h}, \quad w = 0, \quad p(x) = p_0 - 8\nu\rho \frac{u_{max}}{h^2} x, \quad (4.7)$$

где  $h$  представља висину канала.

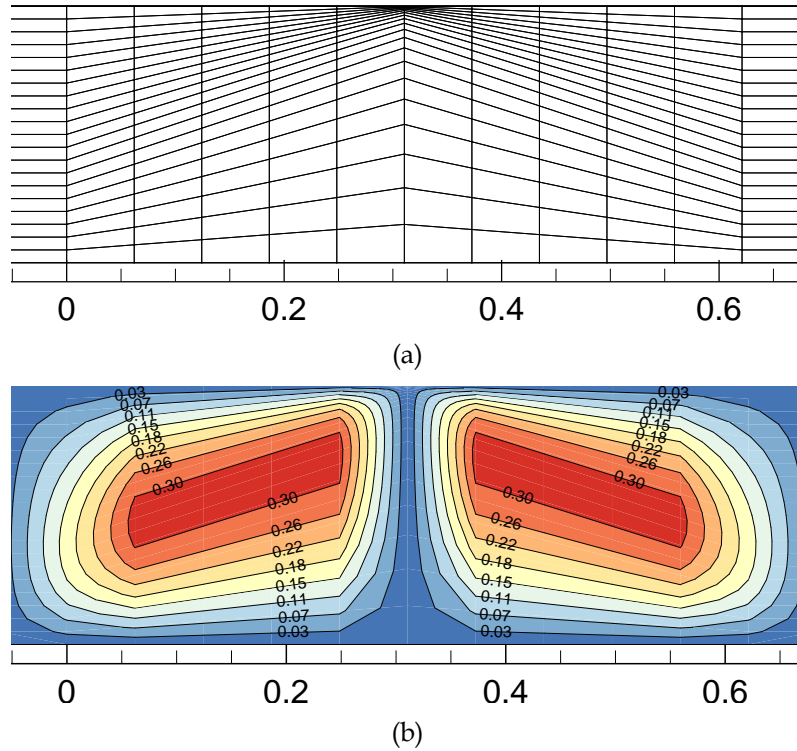
У овом примеру је један сегмент мреже систематски деформисан (Слика 4.9(a)). Деформација мреже је контролисана помоћу параметра  $\beta$ . Карактеристичне вредности за параметар деформације мреже за овај случај је  $\beta = 1.005$  и  $\beta = 1.01$ . Мања вредност  $\beta$ , подразумева већу деформацију. Тај параметар је коришћен у функцијама дефинисаним изразима (4.1) и (4.2) да би се неуниформно дистрибуирали чворови дуж вертикалне координате линије која се налази на средини канала. Чворови на мрежним линијама око ње, а у оквиру деформисаног сегмента, се проналазе путем линеарне интерполације чворова из униформне и неуниформне расподеле чворова мреже. Три нивоа резолуције мреже су коришћена, груба мрежа (енг. coarse grid):  $N_x \times N_y \times N_z = 40 \times 2 \times 20$ , средња мрежа (енг. medium grid):  $N_x \times N_y \times N_z = 80 \times 2 \times 40$  и фина мрежа (енг. fine grid):  $N_x \times N_y \times N_z = 160 \times 2 \times 80$ . На ћелијском нивоу, деформисаност мреже се може квантификовати вредностима максималне искошености нормала (енг. maximum normals skewness), која је приказана за деформисани сегмент канала, на грубој мрежи, за  $\beta = 1.005$ , на Слици 4.9(b).

Упркос привидној једноставности овај случај истиче недостатке процедуре решења и ефекте препоручених унапређења. На слици 4.10 је приказана расподела притиска дуж линије у правцу канала, позициониране на координатама  $z = 0.7438h$  и  $y = 0$ . Дуж канала, очекиван је линеарни пад притиска дефинисан једначином (4.7). Насупрот очекиваним вредностима, изражени недостаци у основном приступу долазе до изражаја и видљиви су на Слици 4.10(a), где су осцилаторне девијације од очекиваног профила присутне у региону деформисане мреже. У некој мери ове осцилације су умрене на мрежама веће резолуције. У контрасту са претходним резултатима,



предложен, унапређени третман, приказује мале девијације од очекиваног профила на грубој мрежи, које у потпуности нестају на финим мрежама, и прецизна расподела притиска дуж канала је приказана на Слици 4.10(b).

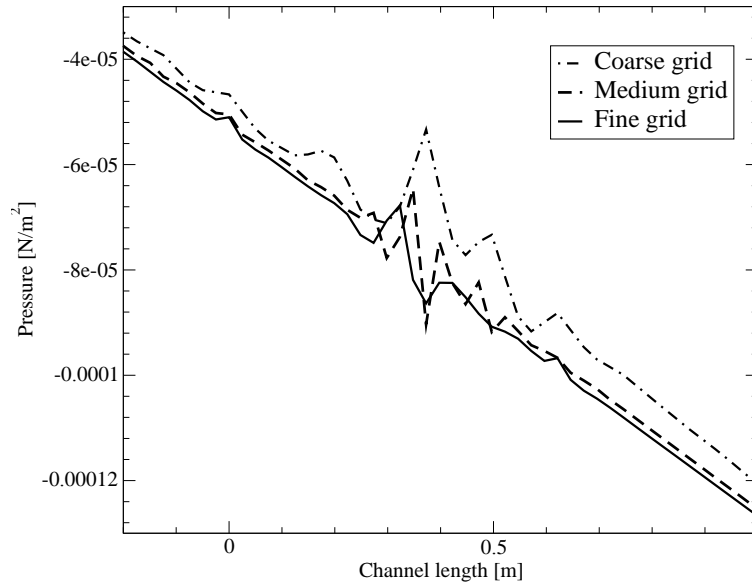
У наставку тест случај је коришћен да би се анализирали различити приступи дискретизације дифузног члана у Навије-Стоксовим једначинама(2.8). У табелама 4.5 и 4.6, грешке у израчунавању  $u$  компонентне брзине, базиране на једначинама (4.5) и (4.7) су приказане за различите приступе апроксимацији дифузног члана, резолуцију мреже, вредности параметра деформације, заједно са вредностима брзине конвергенције при повећању резолуције мреже. Сви приступи, како је и очекивано, приказују исто понашање за недеформисане, праволинијске униформне мреже. За деформисане мреже, приступи који узимају у обзир отклон тачке пресека, показују боље особине како у случају грешке тако и у брзини конвергенције. Шема која коригује присуство тачке отклона, са изложиоцем  $nrelax = 0$ , показује најбоље свеукупне резултате за деформисане мреже, када су у питању грешке прорачуна и ред тачности. У терминима нумеричке ефикасности корисно је испитати брзине конвергенције итерација за различите апроксимације дифузног члана, јер су све корекције имплементиране у виду одложене корекције који утиче на брзину конвергенције. У ту сврху, брзине конвергенције итерација су праћене током симулација на најфинијој мрежи, са параметром деформације једнаким  $\beta = 1.005$ , и резултати су приказани на Слици 4.11. Како се може видети на другој слици, шема за дискретизацију дифузног члана, способна да коригује утицај отклона тачке пресека, са изложиоцем  $nrelax = 1$ , која је представљена у овој дисертацији, даје најбржу конвергенцију. Када се пореди са надрелаксираном шемом, број итерација потребних да се достигне жељени ниво толеранције резидуала,  $1 \times 10^{-5}$ , је умањен за приближно 28%.



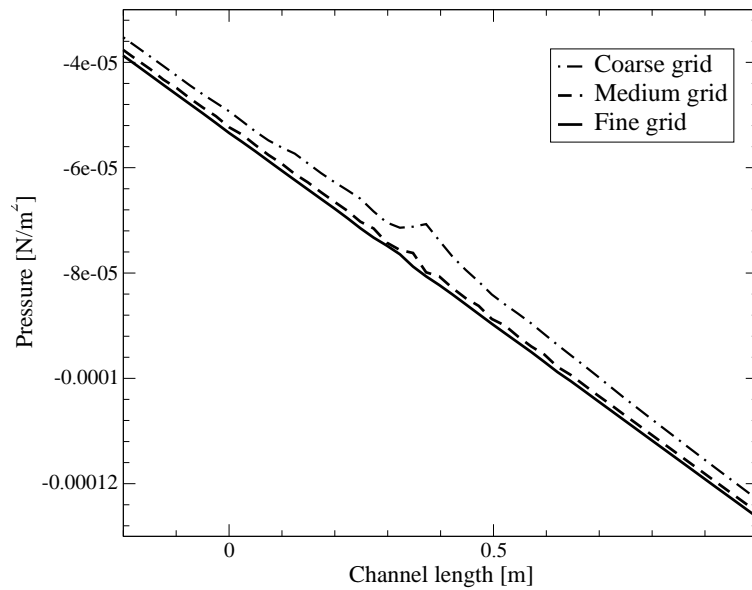
Слика 4.9: Увећани сегмент прорачунске мреже у  $xz$  равни за ламинарно струјање у каналу. Ниво дисторзије је контролисан параметром  $\beta$ . Величина до-мена  $L \times W \times H = 2.5 \times 0.04 \times 0.236$ ; величина мреже,  $N_x \times N_y \times N_z = 40 \times 2 \times 20$  (означена као груба мрежа); вредност параметра деформације  $\beta = 1.005$  а) Структура мреже, б) Максимална искошеност нормала.

Табела 4.5: Ламинарно струјање у каналу - прорачунске грешке и брзина конвергенције за праволинијске и деформисане мреже, карактеризиране параметром  $\beta$ . Дифузни члан апроксимиран различитим шемама: Ортогонална корекција ( $nrelax=0$ ), Надрелаксирана корекција ( $nrelax=-1$ ) и Минимална корекција ( $nrelax=1$ )

Grid $N_x \times N_z$	Cartesian		$\beta = 1.01$		$\beta = 1.005$	
	error	rate	error	rate	error	rate
<i>nrelax = 0</i>						
40 × 20	$1.401 \times 10^{-3}$	-	$7.681 \times 10^{-3}$	-	$9.808 \times 10^{-3}$	-
80 × 40	$3.134 \times 10^{-4}$	2.16	$1.274 \times 10^{-3}$	2.59	$1.637 \times 10^{-3}$	2.58
160 × 80	$7.874 \times 10^{-5}$	1.99	$2.558 \times 10^{-4}$	2.32	$3.278 \times 10^{-4}$	2.32
<i>nrelax = -1</i>						
40 × 20	$1.401 \times 10^{-3}$	-	$7.645 \times 10^{-3}$	-	$9.762 \times 10^{-3}$	-
80 × 40	$3.134 \times 10^{-4}$	2.16	$1.317 \times 10^{-3}$	2.54	$1.725 \times 10^{-3}$	2.50
160 × 80	$7.874 \times 10^{-5}$	1.99	$4.740 \times 10^{-4}$	1.47	$6.826 \times 10^{-4}$	1.34
<i>nrelax = 1</i>						
40 × 20	$1.401 \times 10^{-3}$	-	$7.730 \times 10^{-3}$	-	$9.877 \times 10^{-3}$	-
80 × 40	$3.134 \times 10^{-4}$	2.16	$1.341 \times 10^{-3}$	2.53	$1.733 \times 10^{-3}$	2.51
160 × 80	$7.874 \times 10^{-5}$	1.99	$4.507 \times 10^{-4}$	1.57	$6.274 \times 10^{-4}$	1.47



(a)

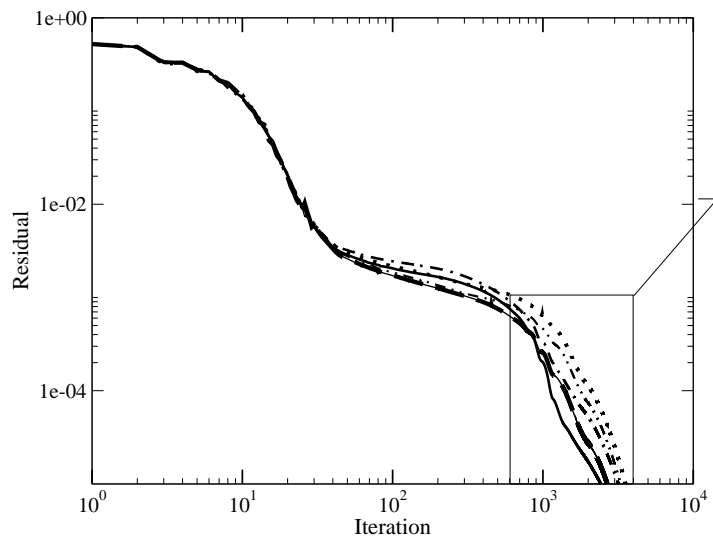


(b)

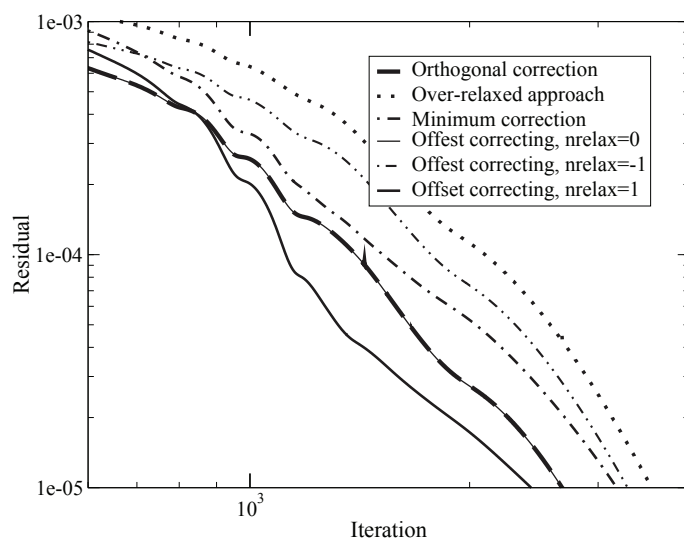
Слика 4.10: Реконструкција линеарног пада притиска за ламинарно струјање у деформисаном каналу, на различитим нивоима резолуције мреже, при  $\beta = 1.005$ . а) Основни приступ, б) Унапређени третман неортогоналности.

Табела 4.6: Ламинарно струјање у каналу - прорачунске грешке и брзина конвергенције за праволинијске и деформисане мреже, карактеризирани параметром  $\beta$ . Дифузни члан апроксимиран различитим шемама за корекцију ефеката отклона тачке пресека: Ортогонална корекција ( $nrelax = 0$ ), Надрелаксирана корекција ( $nrelax = -1$ ), и Минимална корекција ( $nrelax = 1$ )

Grid $N_x \times N_z$	Cartesian		$\beta = 1.01$		$\beta = 1.005$	
	error	rate	error	rate	error	rate
<i>nrelax = 0</i>						
40 × 20	$1.369 \times 10^{-3}$	-	$7.657 \times 10^{-3}$	-	$9.788 \times 10^{-3}$	-
80 × 40	$3.433 \times 10^{-4}$	2.00	$1.269 \times 10^{-3}$	2.59	$1.632 \times 10^{-3}$	2.58
160 × 80	$8.469 \times 10^{-5}$	2.02	$2.554 \times 10^{-4}$	2.28	$3.275 \times 10^{-4}$	2.32
<i>nrelax = -1</i>						
40 × 20	$1.401 \times 10^{-3}$	-	$7.638 \times 10^{-3}$	-	$9.763 \times 10^{-3}$	-
80 × 40	$3.134 \times 10^{-4}$	2.16	$1.276 \times 10^{-3}$	2.58	$1.653 \times 10^{-3}$	2.56
160 × 80	$7.874 \times 10^{-5}$	1.99	$3.326 \times 10^{-4}$	1.94	$4.596 \times 10^{-4}$	1.85
<i>nrelax = 1</i>						
40 × 20	$1.401 \times 10^{-3}$	-	$7.680 \times 10^{-3}$	-	$9.819 \times 10^{-3}$	-
80 × 40	$3.134 \times 10^{-4}$	2.16	$1.293 \times 10^{-3}$	2.57	$1.665 \times 10^{-3}$	2.56
160 × 80	$7.874 \times 10^{-5}$	1.99	$3.230 \times 10^{-4}$	2.00	$4.297 \times 10^{-4}$	1.95



(a)



(b)

Слика 4.11: Утицај различитих приступа израчунавања градијената на страници ћелије у апроксимацији дифузног члана, на брзину конвергенције итерација: а) историја конвергенције једначине за  $u$ -компоненту брзине, правоугаоник означава регион од интереса, б) Увећан регион са горње слике. За све симулације је коришћена фина мрежа -  $160 \times 80 \times 2$ ; параметар деформације мреже,  $\beta = 1.005$ .

## Глава 5

# Валидација математичког модела при струјањима над идеализованим конфигурацијама

У овом поглављу представљени су примери који су по типу прорачунске геометрије блиски нашем основном проблему. Овде представљене геометрије, међутим, су идеализованог типа, задате аналитичким изразима. У првом примеру изучавамо ламинарно струјање над идеализованом конфигурацијом са израженим нагибом које има за циљ да истакне неке потешкоће везане за симулацију струјања над брдима, а да притом још увек нису уведени проблеми везани за адекватно моделирање турбуленције. Поређење у том примеру је базирано на резултатима са другим симулацијама. У другом примеру приказујемо идеализовано брдо испитано у аеротунелу који, специјално задатим условима струјања, симулира атмосферски гранични слој. Посеба одлика овог тест случаја је присуство дисконтинуитета у функцији нагиба брда, што има посебно неповољан утицај на тачност апроксимираних решења. Као што ће бити показано касније овакав случај дисконтинуитета у нагибу је уобичајен код представљања комплексних реалних терена алгебарски екструдираним мрежама, што чини овај тест случај веома важним.

### 5.1 Ламинарно струјање над глатким брдом

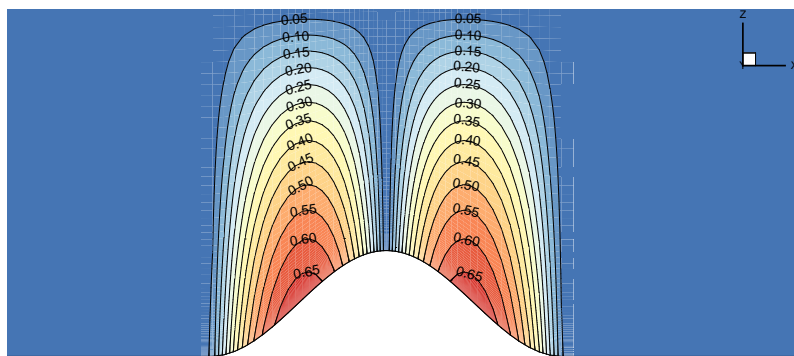
Циљ овог примера је да покаже примењивост предложеног алгоритма на глатким, неуниформним и неортогоналним прорачунским мрежама. Објекат проучавања је струјање над дводимензионалним брдом постављеним у

канал при вредности Рејнолдсовог броја  $Re = 600$ , базираном на висини канала  $H$ . Тест случај је базиран на готово идентичном примеру приказаном у [121]. Разлика се манифестује у нагибу косине брда и у висину брда. У помениutom раду [121], максимална висина брда износи 15% висине канала, док је тренутном случају та висина брда 30% висине канала. Ширина основе брда је идентична, тако да претходни услов доводи до тога да је у овом случају нагиб брда увећан, што има за последицу израженији утицај неортогоналности прорачунске мреже. Величина прорачунског домена је  $is\ 35H \times H$ . Облик брда је дефинисан аналитичким изразом  $z_h = 0.3H \sin^2[\pi(x - 2.0)]$ , а врх брда се налази на локацији  $x = 2.5$ . Услови струјања на улазу у домен су дефинисани преко параболичког профила брзина, који је развијан кроз домен тако да је одржаван константан масени проток, путем градијента притиска у правцу струјања. На зидовима канала задати су услови нулте брзине. Једна резолуција мреже је коришћена:  $N_x \times N_y \times N_z = 160 \times 2 \times 80$ . На основу примера струјања у каналу представљеном у претходном поглављу, процењено је да је то довољна резолуција. Притом, чворови прорачунске мреже су згуснути у околини брда и на самом врху. Степен деформисаности коју присуство брда уноси у прорачунску мрежу, је приказан на Слици 5.1 која приказује максималну искошеност нормала у близини брда.

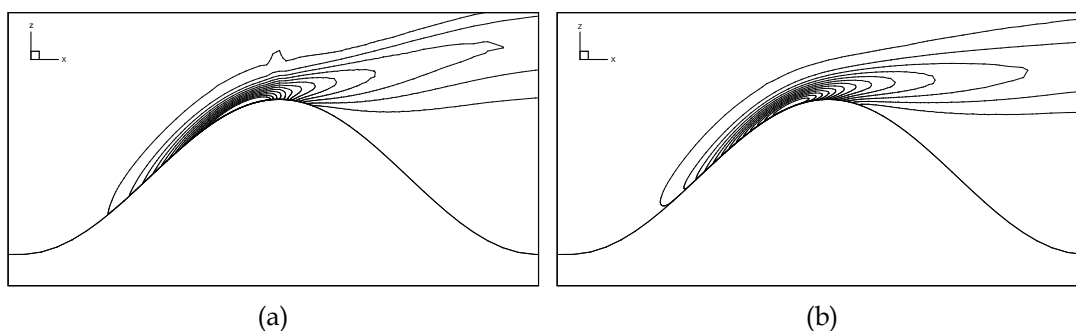
Изолиније вртложности у околини брда су приказане на Слици 5.2. Може се видети како стрмина брда и пратећа неортогоналност мреже изазивају значајан ефекат на велике структуре струјања. Ово се може видети кроз квалитативну разлику у осликавању ових линија коју унапређени приступ приказан у овој дисертацији прави у односу на основни приступ.

Профили брзина су упоређени на три локације, на врху  $x = 2.5$ , на средини падине на  $x = 2.75$  и у области рецикулације на  $x = 3.2$  (Слика 5.3). Највећа разлика између основног и тренутног приступа се може видети у рецикулационом региону (Слика 5.3(c)).

У раду [121] у ком је ниже, брдо мање стрмине коришћено, разлика између прорачунских мрежа које прате геометрију (BFC) и методе уроњених материјалних граница (IBM) није видљива у већим структурама струјног тока. Разлика је, ипак, видљива у профелима брзина. Било би интересантно, за будућа истраживања, да се користи предложена процедура за валидацију IBM кодова, јер тек када су све корекције неортогоналности укључене, све могућности BFC кодова могу бити демонстриране.



Слика 5.1: Максимална искошеност нормала за гатко, дводимензионално брдо у каналу.

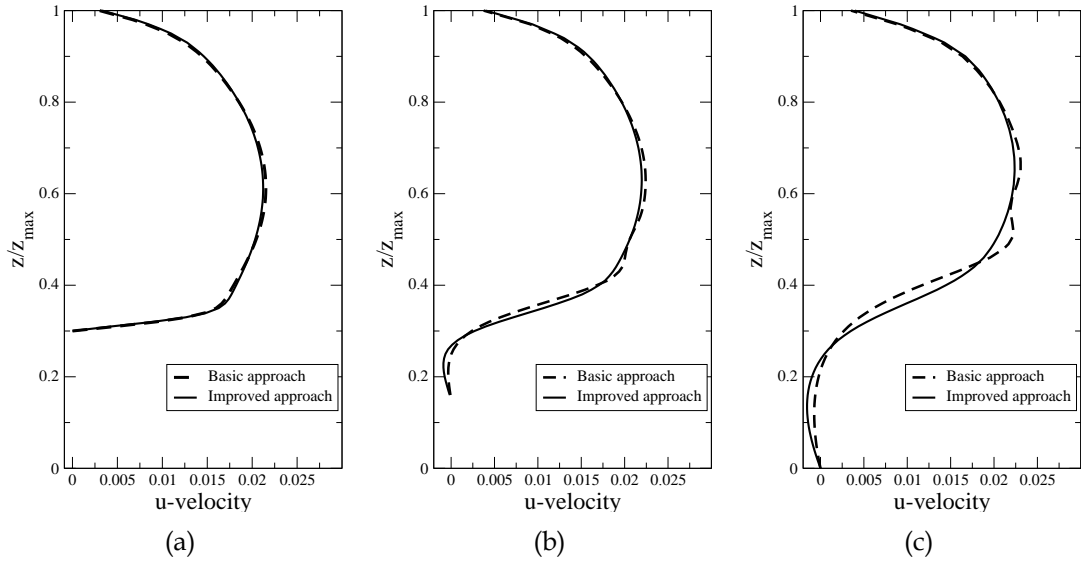


Слика 5.2: Интензитет вртложности при струјању над дводимензионалним глатким брдом. а) Основни приступ, б) Унапређени третман неортогоналности.

## 5.2 Струјање над дводимензионалним троугаоним брдом положеним унутар турбулентног граничног слоја

Овај пример служи како би се демонстрирала ефикасност предложеног алгоритма у случају турбулентних струјања над идеализованим, не-глатким, дводимензионалним брдима. Случај је базиран на експериментима из аеротунела које су извели Costa et. al. приказаним у [122]. У овом експерименту аутори су симулирали атмосферски гранични слој помоћу вртложних генератора, баријера, и порвшинске храпавости. Иста конфигурација је такође коришћена у нумеричким симулацијама приказаним у [123]. Користимо поље усредњених брзина на улазу у домен који је базиран на "В"конфигурацији дефинисаној у [122, 123], која је карактеризирана следећом степеном функцијом:





Слика 5.3: Упоређивање профила  $u$ -компоненте брзине при  $x = 2.5$ ,  $x = 2.75$  и  $x = 3.2$  у струјању над глатким дводимензионалним брдом.

$$\frac{U}{U_\infty} = \left(\frac{z}{\delta}\right)^p, \quad (5.1)$$

где је брзина слободног тока  $U_\infty = 5 \text{ m/s}$ , дебљина граничног слоја  $\delta = 150 \text{ mm}$ , изложилац степеног закона  $p = 0.17$ , и  $z$  је вертикална координата.

Величина прорачунског домена је  $L_x \times L_y \times L_z = 0.915 \times 0.3 \times 0.35 \text{ m}$ . Висина брда је  $H = 0.34 \text{ m}$ . Ширина основе брда је  $L = 4H$ . Резолуција прорачунске мреже је  $N_x \times N_y \times N_z = 160 \times 30 \times 80$ , што је идентична резолуција као у студији [123]. У овом случају RNG  $k - \epsilon$  модел [82] је коришћен за затварање система једначина везаних за појаву турбулентне вискозности.

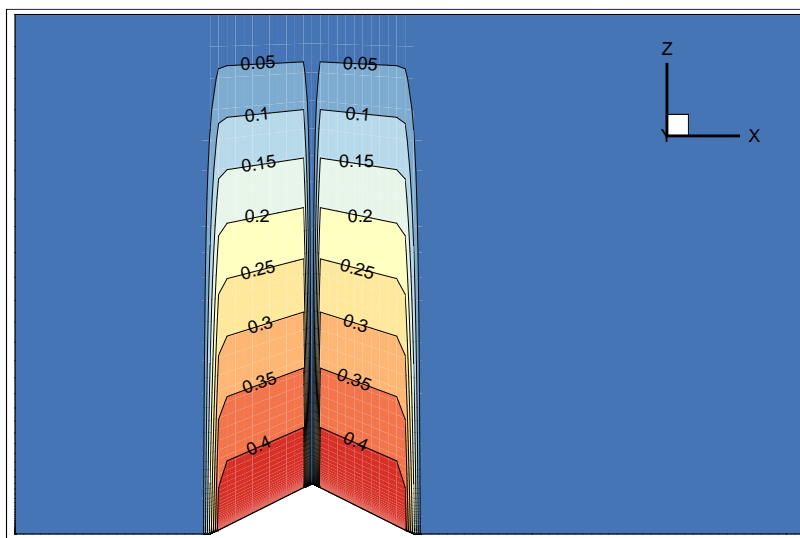
Профили турбулентне кинетичке енергије на улазу су процењени из експерименталних података [122] интерполацијом аналитичке криве. Вертикални профили дисипације турбулентне кинетичке енергије  $\epsilon$  нису обезбеђени кроз експеримент, и они су посредно израчунати на основу профила турбулентне кинетичке енергије помоћу израза,

$$\epsilon(z) = C_\mu^{3/4} \frac{k^{3/2}}{l}, \quad l = 0.07L, \quad (5.2)$$

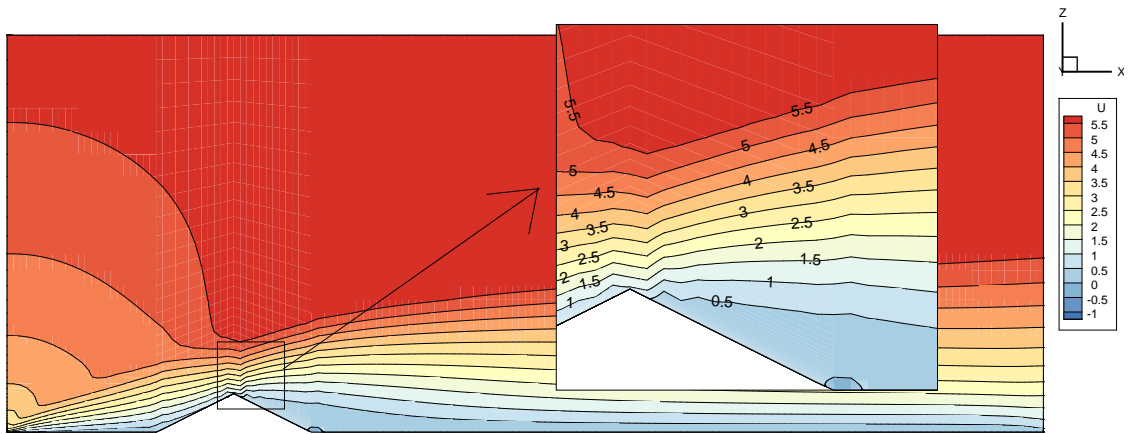
где је  $L$  је дужинска размера струјања, процењена на основу дебљине граничног слоја. Симулације су вођене док резидуали нису достигли ниво  $1 \times 10^{-4}$ .

Посматрана конфигурација струјања је карактеризирана рециркулационим

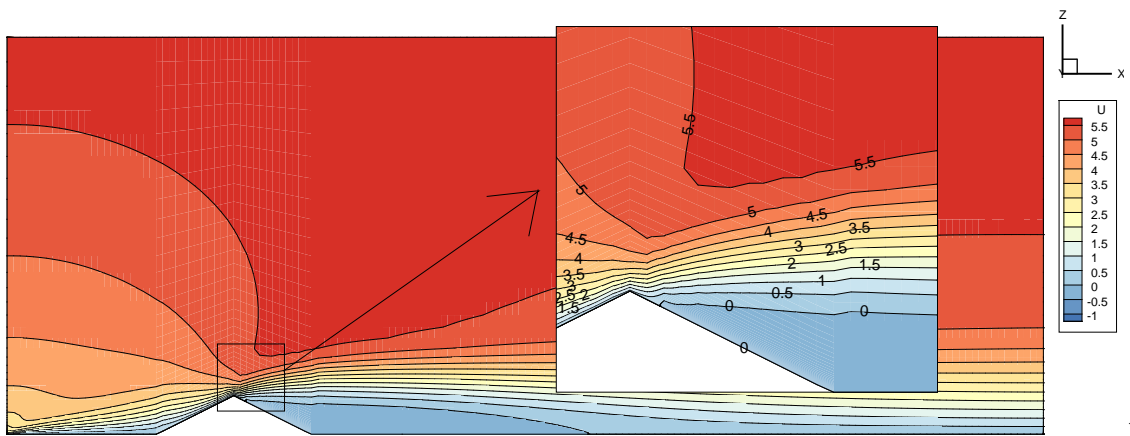
регионом који се формира иза брда. У експериментима је дужина рециркулационог региона измерена у домену  $7H - 8H$ . На Слици 5.5 контуре брзине које ограничавају рециркулациони регион су показане. Увећани сегмент је приказан да би се приказала разлика између основног и тренутног унапређеног приступа на примеру контура брзине у близини врха брда. Рециркулациони мехур је репродукован у симулацији помоћу нове процедуре, док то није потпуно било могуће помоћу основног приступа. Надаље, конвергенција итеративног алгоритма је била покварена присуством не-глатког брда у случају основног приступа и било је потребно двоструко више итерација да би се достигао исти ниво резидуала како код унапређеног приступа. Разлози за лошу конвергенцију су пронађени испитивањем поља притиска, које је приказано на Слици 5.6. Увећани поглед на регион у близини врха брда открива појављивање паразитских нефизичких осцилација у решењу у основном приступу, које је поготово подстакнут дисконтинуитетом координатних мрежних линија. Слика поља притиска у два разматрана случаја је идентично оном који је приказан у примеру деформисаног раванског канала, видети Сliku 4.10. Иста ситуација је, такође, очекивана и за примере реалних терена.



Слика 5.4: Максимална искошеност нормала за случај струјања над троугао-ним брдом.

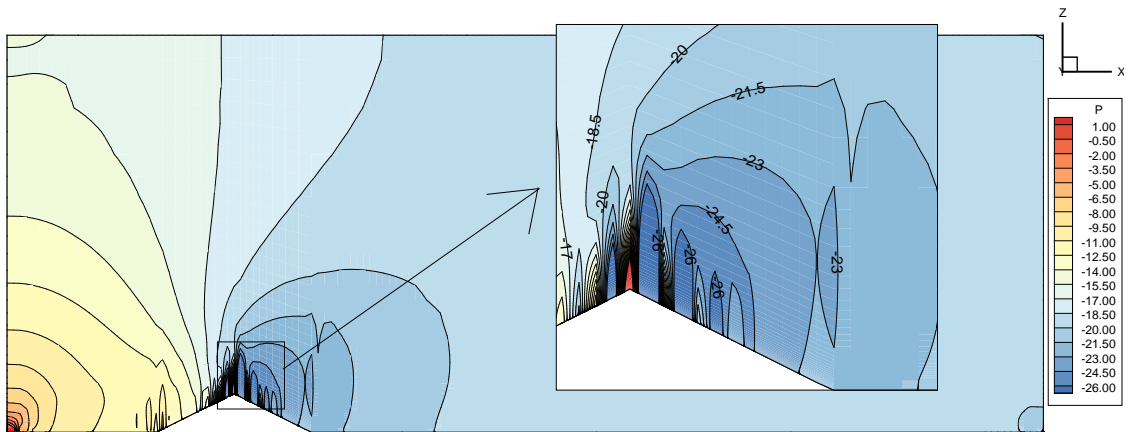


a)

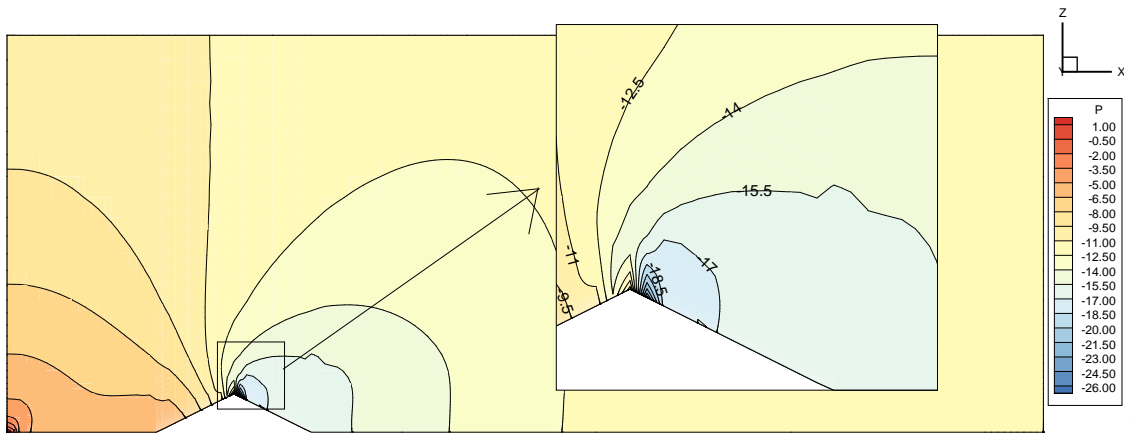


b)

Слика 5.5: Рециркулациона зона иза троугаоног брда а) Основни приступ, б) Унапређени приступ.



a)



b)

Слика 5.6: Поље притиска у околини троугаоног брда. а) Основни приступ, б) Унапређени приступ.

## Глава 6

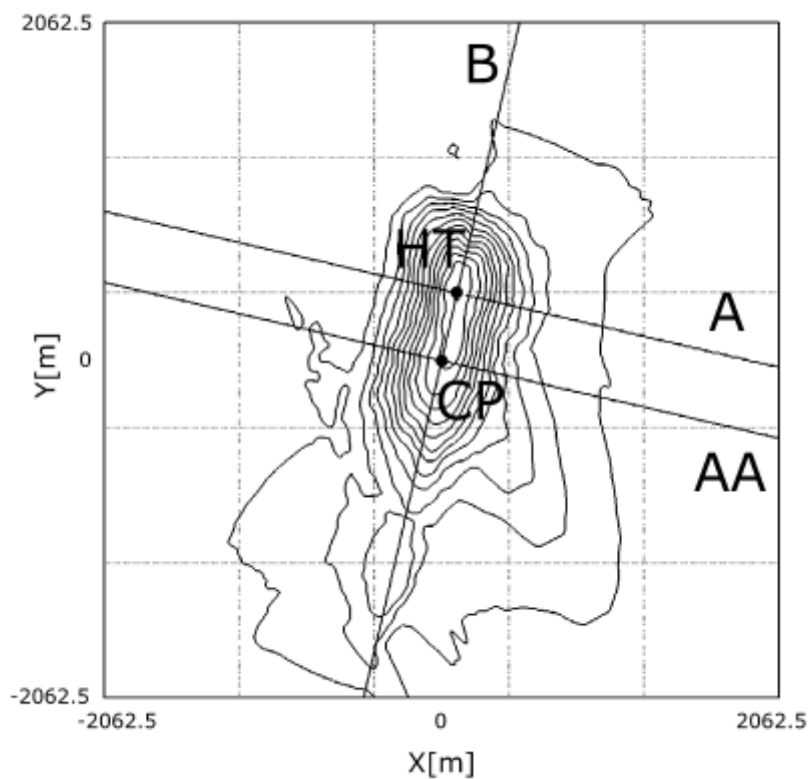
# Валидација математичких модела при турбулентним струјањима над реалним комплексним конфигурацијама

Основни циљ ове дисертације је оформити нумерички алгоритам за симулацију турбулентних струјања над реалним комплексним теренима. Као врхунац примене ове методологије у овом поглављу ће, из тог разлога, бити приказана два добро позната случаја са валидацију нумеричких кодова. У наредим примерима видимо међусобну синергију нумеричких грешака и грешака моделирања. Грешке моделирања је могуће правилно евалуирати само ако су нумеричке грешке сведене на минимум, што је био циљ анализе претходних поглавља.

### 6.1 Случај брда Аскервеин (*енг. Askervein hill*)

Аскервеин (енг. Askervein Hill) је брдо високо 116 метара, са умереним нагибом, које се налази близу обале на локацији South Uist, Outer Hebrides у Шкотској. Избор да се овај случај узме као репрезентативан за симулације турбулентних струјања над комплексним теренима је направљен јер за овај посебан случај постоји веома детаљна база експерименталних података, који су настали доком дуготрајних и опширних мерења које су извели Taylor и Teunissen. Циљ ових експеримената, који су обављени током 1982. и 1983., је био стварање експериментале основе за валидацију нумеричких модела за програме намењене прорачунима струјања. Током експеримената, подаци о

неколико параметара као што су усредњена брзина и величине које карактеришу турбуленцију су прикупљане. Као што је било приказано у уводном поглављу, то је подстакло многе истраживаче да користе овај случај, током низа година, за валидацију својих нумеричких модела. За тренутни случај коришћени су експериментални подаци које су обезбедили Taylor и Teunissen [30] као и нумерички резултати приказани у Raithby et al. [27] и Castro et al. [6].



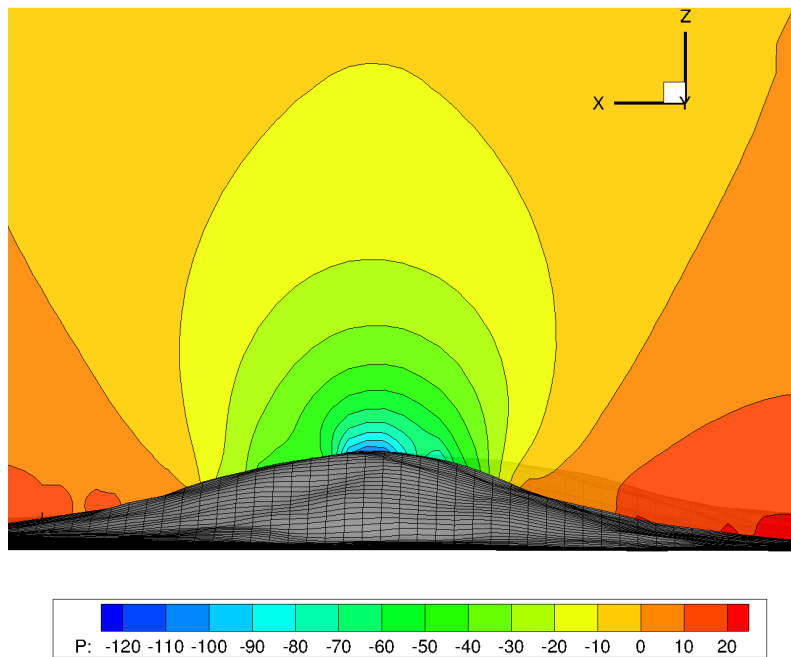
Слика 6.1: Изохипсе Аскервеин брда и правци дуж којих су постављани мерни стубови.

Током теренског експеримента на Аскервеину, извршена су мерења на висини од 10 m изнад површи брда дуж три линије које паралелне са осама овог елиптичног брда. Ти мерни правци имају ознаке "AA", "A" и "B", Слика 6.1. Дуж ових линија постављени су мерни стубови који су носили разне мерне уређаје: Gill UVW анемометри, сонични анемометри, и ветрењаче. Да би се добили вертикални профили брзине и турбулентних карактеристика, на значајним местима, на позицији врха брда (HT) и на централној тачки мапиране топографије (CP), су постављени метеоролошки стубови висине 50 m. На референтној тачки непосредно испред брда, тачка RS, исти

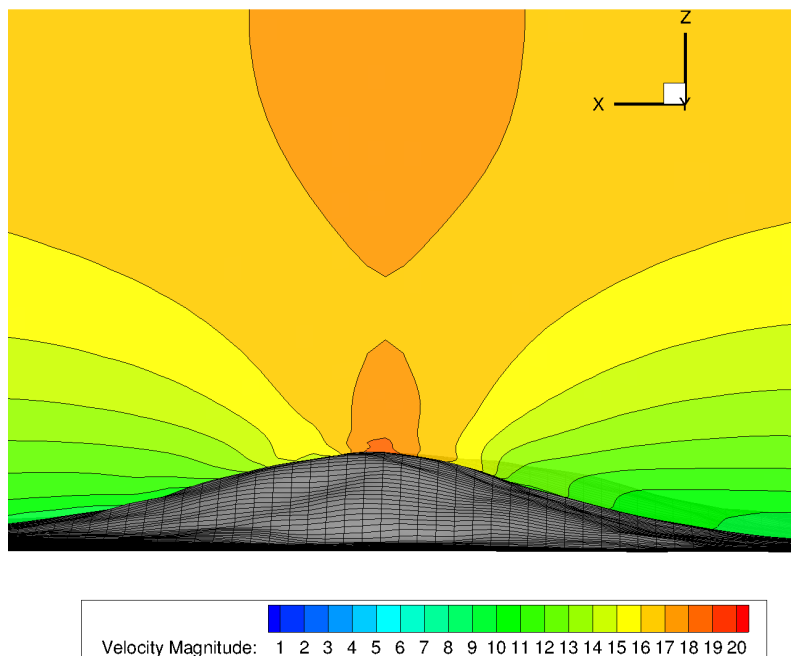
метеоролошки стуб је постављен да би се мерили вертикални профили непоремећеног, долазног струјања, што је јако значајно за подешавање улазних контурних услова за нумеричке симулације. Детаљан опис мерења се може наћи у радовима [124, 11].

Све симулације струјања над брдом су извршене на пропорционално умањеној верзији реалног домена. Разлози су нумеричке природе, из потреба за стабилношћу прорачуна, да би се контролисала величина геометријских параметара. Док је већина аутора (Castro et al. [33], Raithby et al. [81]) користила висину домена од 700 метара, у тренутном случају је домен пропорционално умањен на висину од 1 метар, на исти начин како су поступили наши сарадници [125]. Исто је учињено у свим правцима за исти геометријски фактор. На основу принципа аеродинамичке сличности, да би се одржала иста вредност Рејнолдсовог броја, вредност кинематске вискозности је умањена са реалне вредности од  $\nu = 1.8 \times 10^{-5} m^2 s^{-1}$  на вредност од  $\nu = 3 \times 10^{-8} m^2 s^{-1}$ .

Прорачунска мрежа која је коришћена за прорачун струјања над брдом Аскервеин, је направљена алгебарском екструзијом над дигитализовном мапом топографије која је обезбеђена од стране аутора експеримента и која прати облик топографије. Walmsley and Taylor [126] су обезбедили две мапе, мапу А која описује топографију терена и величине је 16000 m x 16000 m садржи брдо Аскервеин као и нека околна нижа брда, и мапу В величине 6000 m x 6000 m које садржи само брдо Аскервеин. У тренутним симулацијама (идентично као у [125]), коришћена је само мапа В. Разлог је већа хоризонтална резолуција (23.4375 m x 23.4375 m), и закључак који је проситекао из студије Castro et al. [33], где је утврђено да околна брда имају занемарив утицај на слику струјања на врху и непосредној околини брда Аскевеин. Правац доласка ветра је 210 степени. Прорачунска мрежа је, из тог разлога, ротирана тако да су прорачунске ћелије усмерене у правцу струјања и на тај начин је умањена нумеричка дифузија. Након линеарне трансформације (хоризонталне ротације) домена, чворови нумеричке мреже су измештени, тако да су нове вредности висине морале бити интерполиране помоћу дво-димензионалног Лагранжевог интерполационог полинома. Коначна величина мапирног домена је 4125 m x 4125 m, у реалности, а величина прорачунске мреже је 176x176x36 ћелија у x, y и z координатном правцу. У близини брда, по висини, величина ћелије расте геометријском прогресијом, са фактором 1.3. Након одређене висине ћелије су исте величине по z координатном правцу.

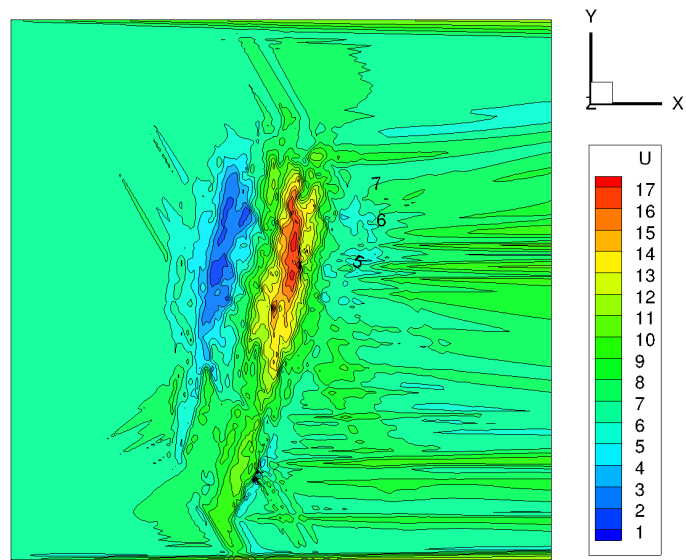


Слика 6.2: Поље притиска у вертикалној равни паралелној смеру струјања (правац А), кроз тачку НТ.

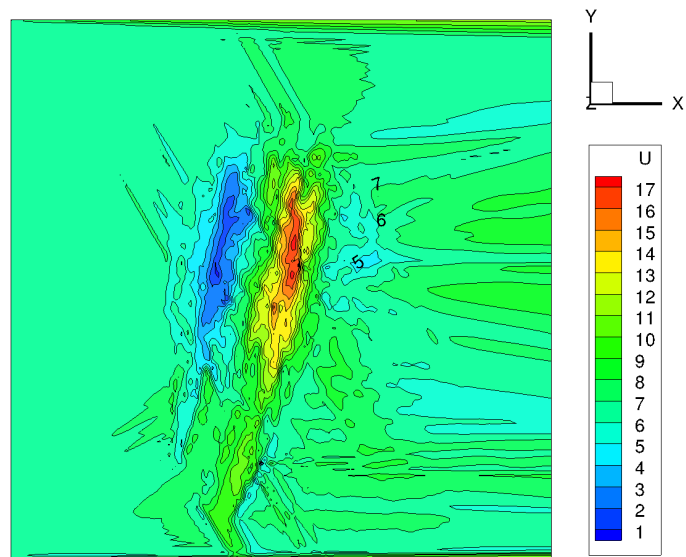


Слика 6.3: Интензитет брзине у вертикалној равни паралелној смеру струјања (правац А), кроз тачку НТ.

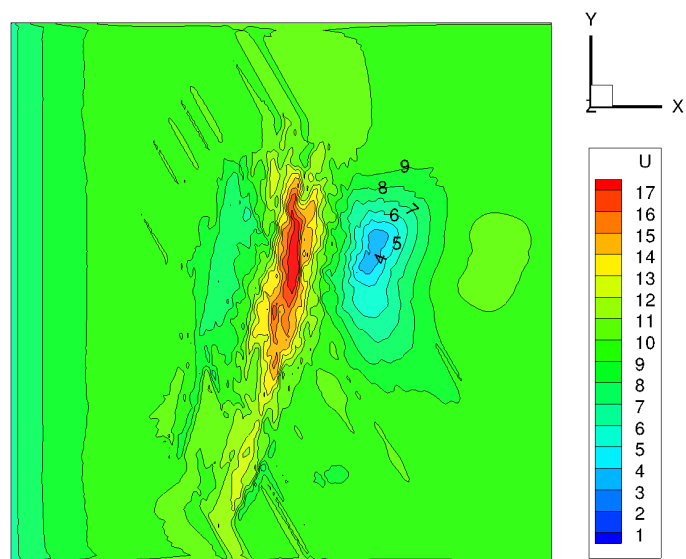




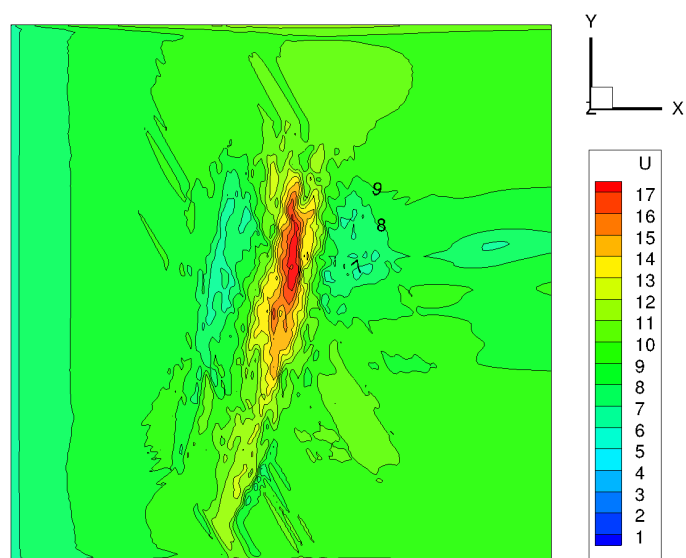
Слика 6.4: Поље компоненте брзине у правцу струјања у површи на растојању 2 m од тла, за SST модел.



Слика 6.5: Поље компоненте брзине у правцу струјања у површи на растојању 2 m од тла, за SAS модел.



Слика 6.6: Поље компоненте брзине у правцу струјања у површи на растојању 2 m од тла, за EARSIM-M модел.



Слика 6.7: Поље компоненте брзине у правцу струјања у површи на растојању 2 m од тла, за EARSIM-WJ модел.

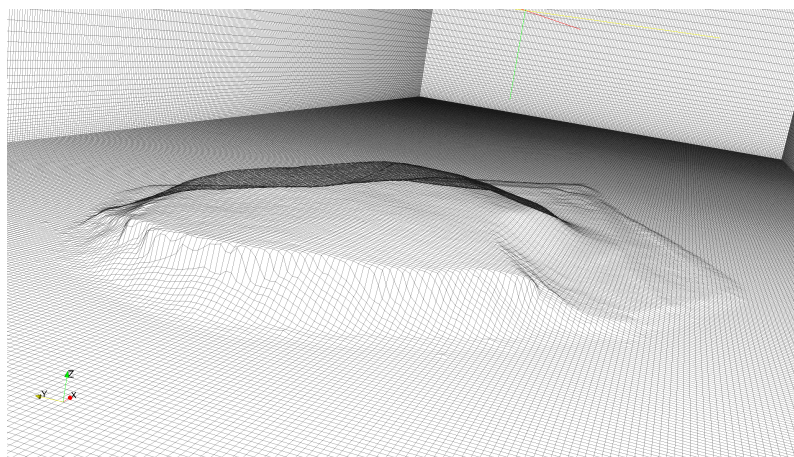
## 6.2 Случај брда Болунд (енг. *Bolund hill*)

Случај брда Болунд (Roskilde fjord, Denmark) је резултат дугорочних мерења која су извршена са циљем стварања базе података, ради упоређивања различитих приступа симулацији атмосферских струјања над реалним комплексним теренима [42, 43]. Оно што овај случај чини погодним за ту сврху је дигитална база елевације терена високе резолуције, детаљна дигитална база површинске храпавости терена, добро дефинисани услови на улазу у домен који су додатно олакшани релативном изолованошћу брда. Болунд је заправо полуострво које је танким спрудом повезано са копном, и током плимe је потпуно изоловано морем, што олакшава дефинисање граничних услова за све правце струјања ветра.

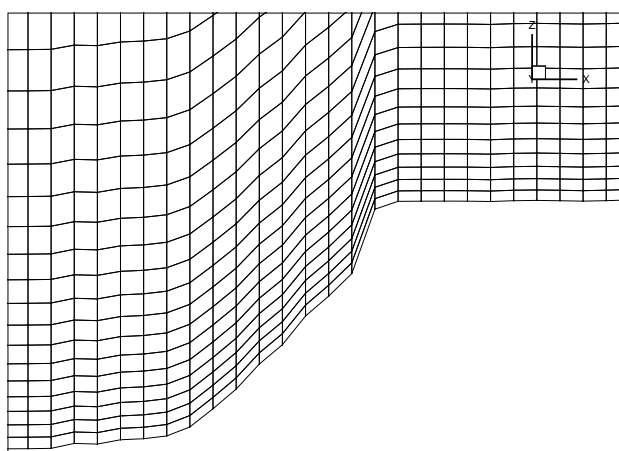
За мреже које прате терен (BFC-мреже), оформљене алгебарском екструзијом на основу дигиталне мапе топографије, стрме стране, као оне које су присутне на случају Болунда (Слика 6.8) доводе до сличних образаца неортогоналности прорачунске мреже који су били присутни у претходним синтетичким геометријама, где је параметар  $\beta$  коришћен како би се контролисала деформације мреже. Основне карактеристике прорачунске мреже су искошеност страница, отклон тачке пресека и дисконтинуитет нагиба у мрежним линијама, Слика 6.8(b).

Димензија прорачунског домена је  $506\text{ m} \times 242\text{ m} \times 120\text{ m}$  и правцу ветра, попречном правцу и вертикалном правцу. Резолуција мреже је  $506 \times 242 \times 45$ , другим речима, мрежа коришћена у овом нумеричком експерименту има хоризонталну резолуцију од  $1\text{ m}$ , што је иста резолуција која је показана у LES симулацијама, у [54]. Улазни гранични услови за брзину и турбулентне скаларе су базирани на измереним профилима и дати су у [43]. Површинска храпавост је дефинисана за сваку тачку површи, кроз базу података о храпавости. Подаци који се односе на положаје мерних стубова и два доминантна правца ветра се могу видети на Слици 6.9. У овом поглављу приказани су резултати само за западне ветрове (правац од  $270\text{ deg}$ ). Овај правац је сматран значајнијим због изразито неповољних карактеристика геометрије које се виде у попречном пресеку одређеном тим правцем.

Слике 6.11 и 6.12 приказују профиле укупне брзине која је нормализована помоћу фрикционе брзине  $u_*$  која је измерена током теренских мерења, и  $z_{gl}$  је висина изнад нивоа терена. Можемо видети како се израчунати профили ветра добро поклапају са измереним вредностима. Постоје мање деви-



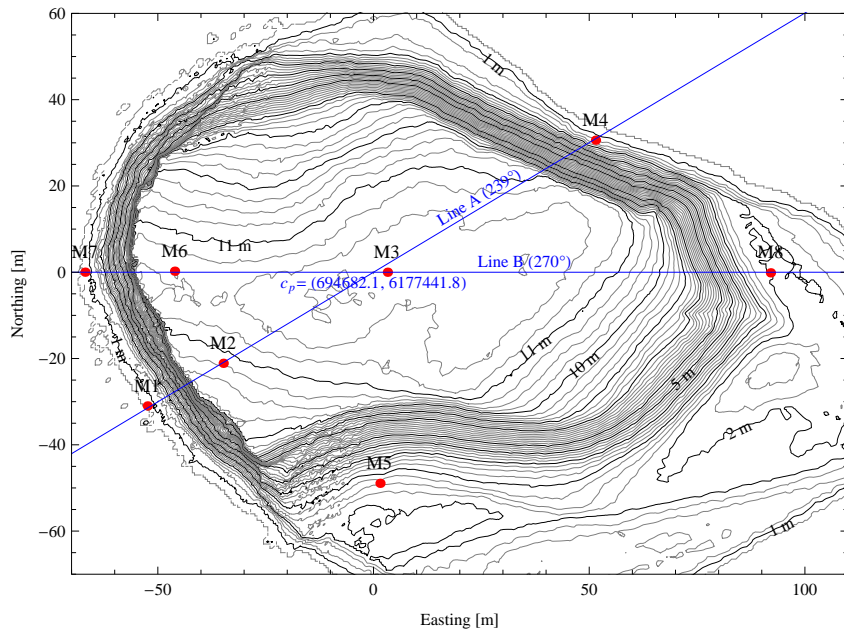
(a)



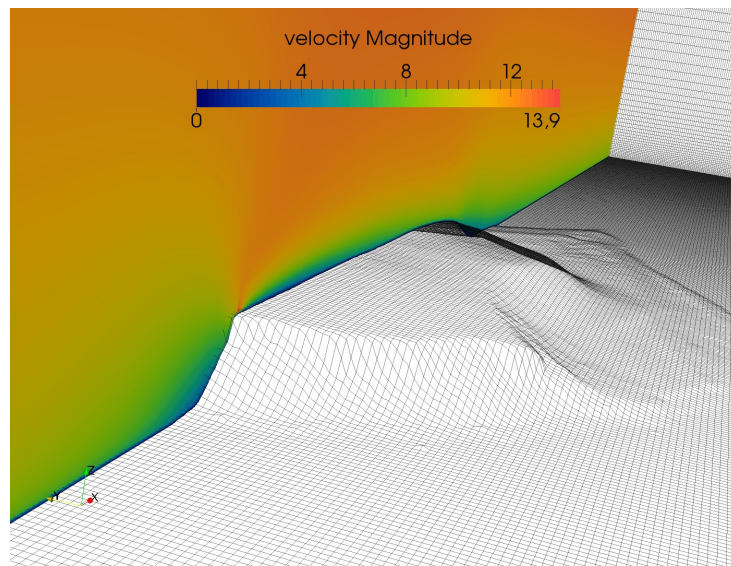
(b)

Слика 6.8: Прорачунска мрежа конструисана на основу дигиталне мапе елевације терена за случај брда Болунд, а) Површинска мрежа и поглед ка предњем узвишењу брда Болунд, б) попречни пресек кроз прорачунску мрежу у равни паралелној  $xz$  равни, у близини предњег узвишења.

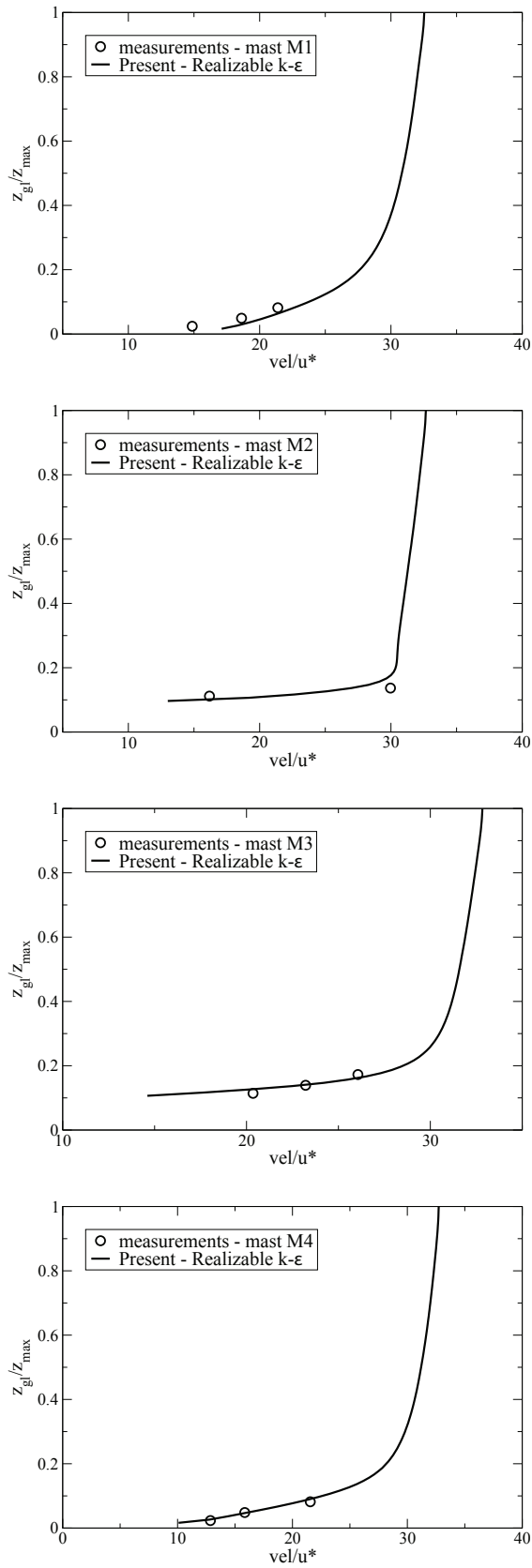
јације од измерених вредности код профила који су измерени на заклоњеној страни нпр. мерни стуб М8, такође и мерни стуб М5 који се налази у удубљењу.



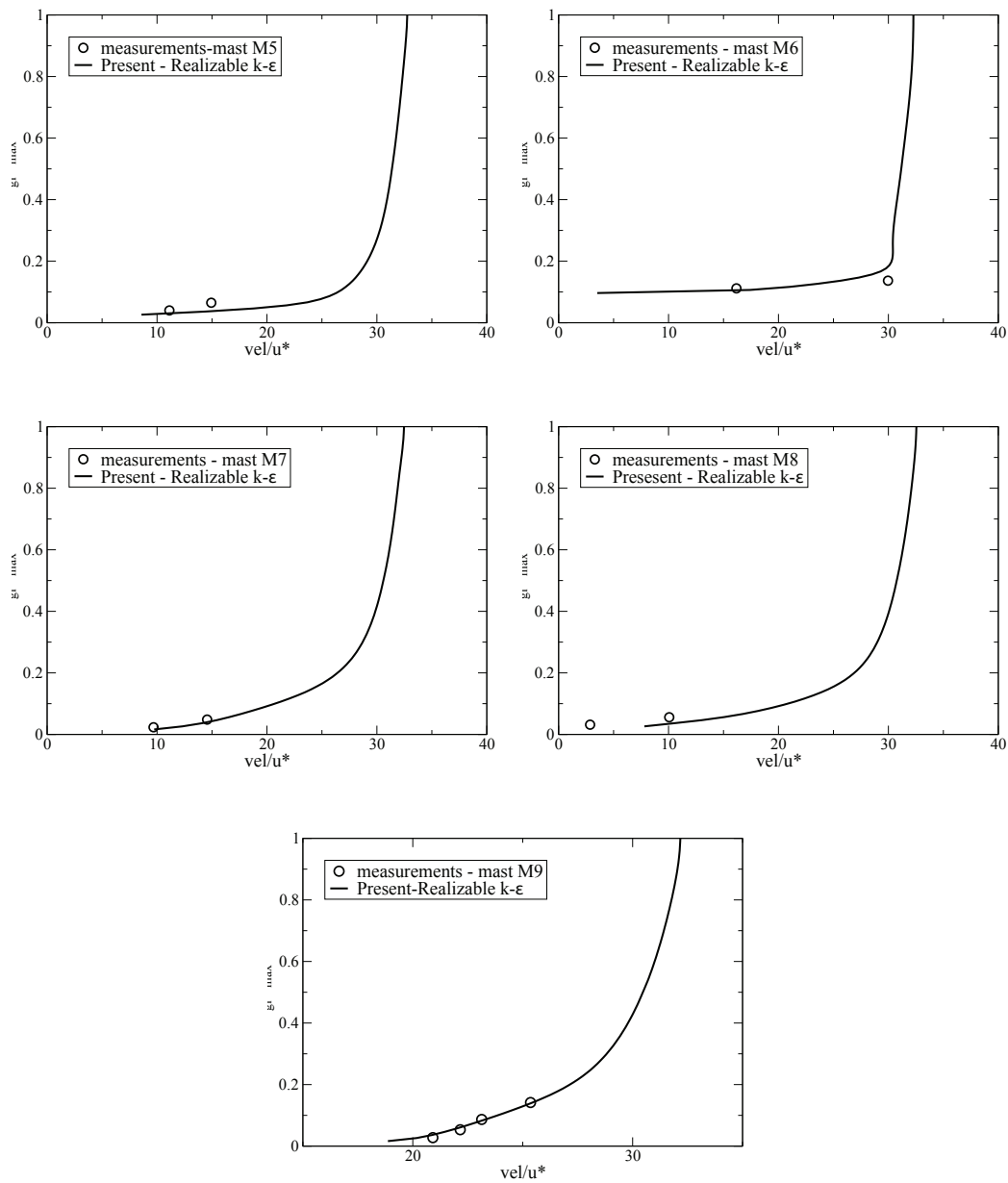
Слика 6.9: Положај мерних стубова на брду Болунд.



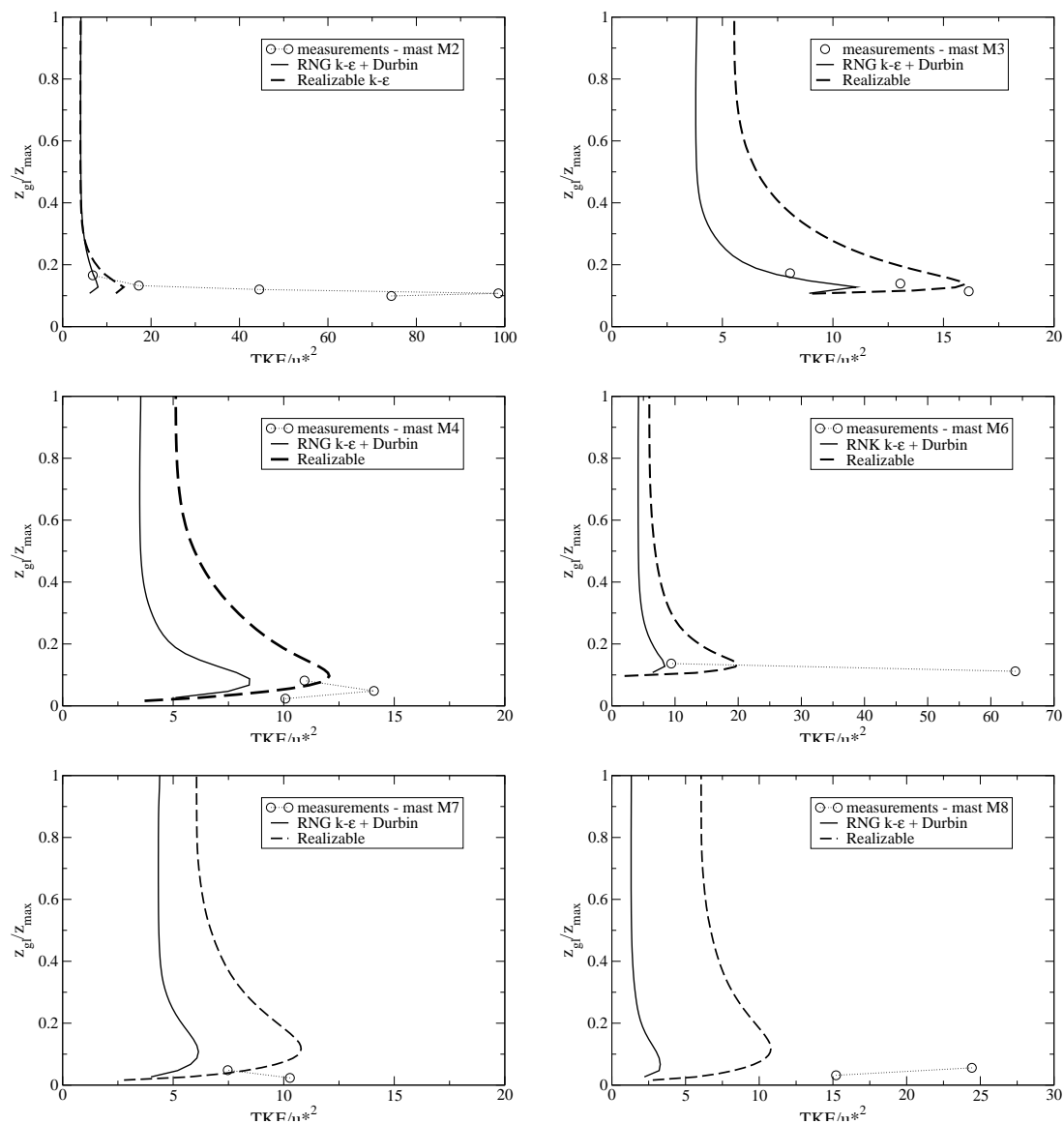
Слика 6.10: Интензитет брзина изнад Болунда у вертикалној равни паралелној правцу струјања.



Слика 6.11: Резултати за случај Болунд, први део: Вертикални профили брзине израчунати помоћу "остваривог"  $k - \epsilon$  турбулентног модела [83] поређени са мерењима на атмосферској размери, Правац ветра од 270 deg.

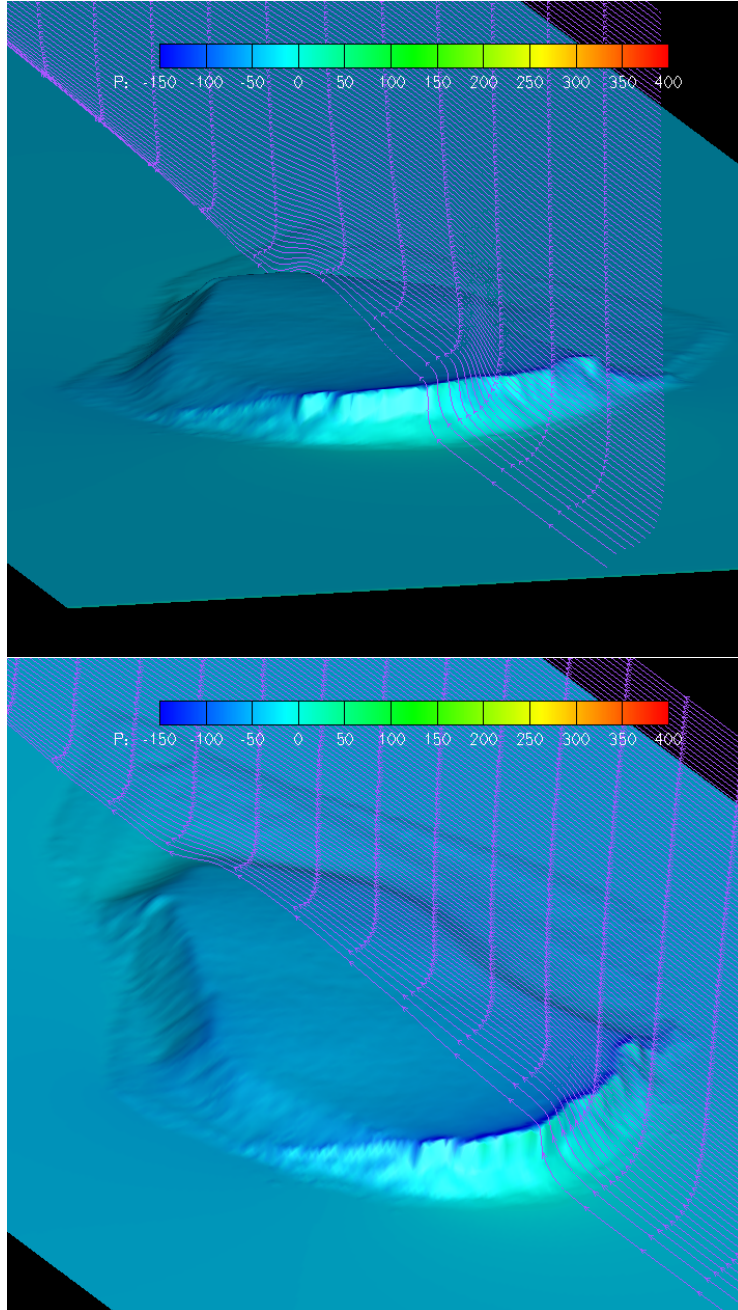


Слика 6.12: Резултати за случај Болунд, други део: Вертикални профили бр-зине израчунати помоћу "остваривог"  $k - \epsilon$  турбулентног модела [83] поређени са мерењима на атмосферској размени, Правац ветра од 270 deg.

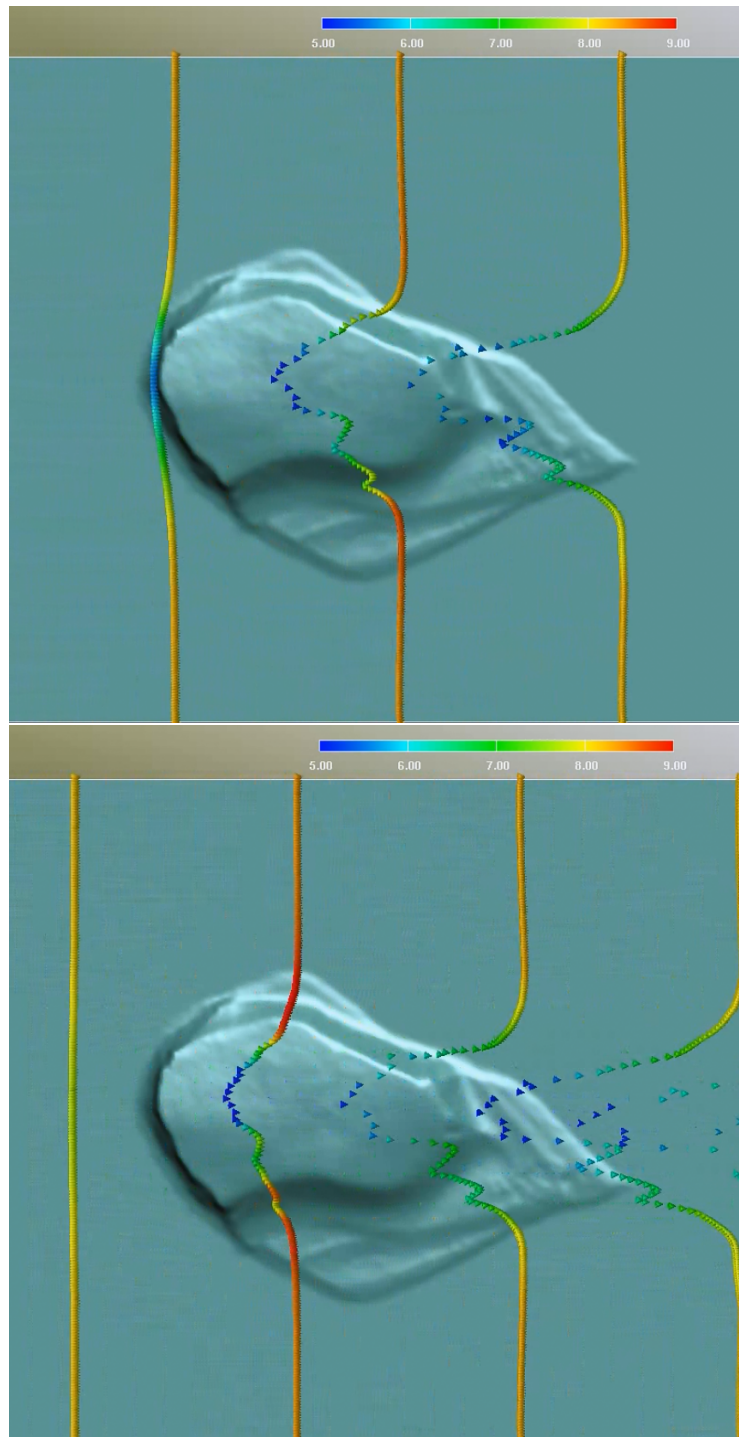


Слика 6.13: Резултати за случај Болунд, први део: Вертикални профили турбулентне кинетичке енергије израчунати помоћу "остваривог"  $k - \epsilon$  турбулентног модела [83] и RNG  $k - \epsilon$  турбулентног модела са Дурбиновим лимитером, поређени са мерењима на атмосферској размери, Правац ветра од 270 deg.

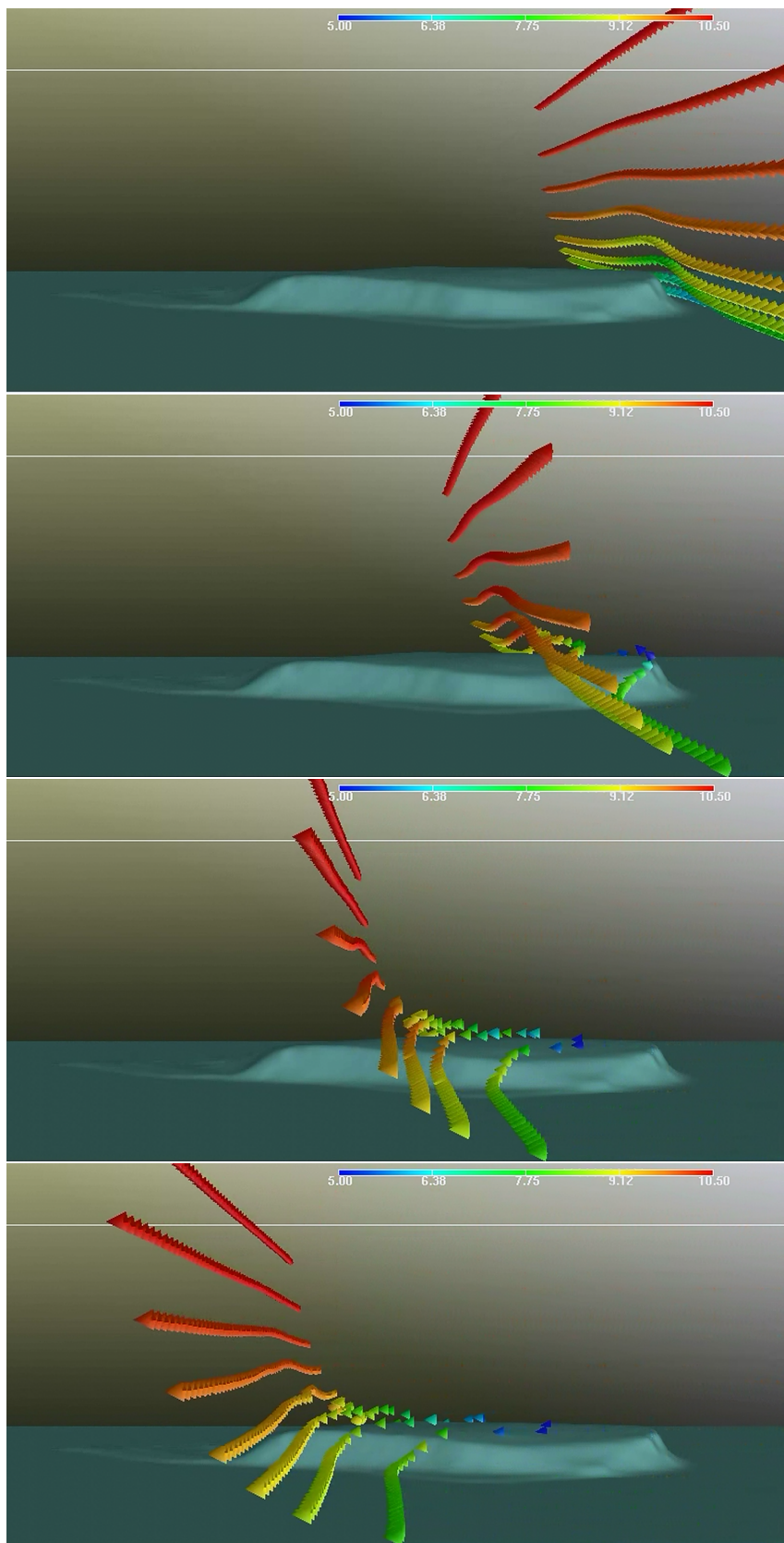




Слика 6.14: Струјне линије над Болундом. Брзина израчуната помоћу  $k - \epsilon$  турбулентног модела са ограничењима остваривости. Правац ветра је 270 deg.



Слика 6.15: Анимација струјања над Болундом-поглед одозго. Брзина израчуната помоћу  $k - \epsilon$  турбулентног модела са ограничењима остваривости. Правац ветра је 270 deg.



Слика 6.16: Анимација струјања над Болундом-поглед са стране. Брзина израчуната помоћу  $k - \epsilon$  турбулентног модела са ограничењима остваривости. Правац ветра је 270 deg.

## Глава 7

# Закључак и препоруке

У дисертацији је представљена нова и унапређена прорачунска процедура базирана на методи коначних запремина, која је развијена за потребе симулације турбулентних ваздушних струјања над реалним комплексним теренима. У дисертацији су биле разматране ефикасна апроксимација конвекције, дифузних чланова, реконструкција ћелијски-центрираних градијената, спрезање поља притиска и брзине преко SIMPLE алгоритма са вишеструким решавањем једначине за корекцију притиска у секвенци корака неортогоналних корекција. Од постојећих компонентни алгоритма биране су оне које су показале способност за унапређени третман неортогоналности на ћелијском нивоу, унутар прорачунске мреже, а на местима на којима је сматрано потребно уведене су оригиналне формулације како би се тачност прорачуна и нумеричка ефикасност унапредиле за дати тип струјања и представљају оригинални научни допринос ове дисертације. Развијена је оригинална процедура реконструкције ћелијски центрираних градијената, укључујући и третман градијената притиска, такође представљен је нови генерализовани приступ апроксимацији дифузионог члана, примењивог у присуству изражених деформација прорачунске мреже.

Више нумеричких експеримената је изведено да би се демонстрирала прорачунска прецизност и ефикасност предложене методе. Кроз верификацију нумеричког алгоритма се ишло у фазама, почевши реконструкцијом једноставних синтетичких функција, осмишљених да истакну одређене недостатке постојећих алгоритама за струјања у изразито неортогоналним геометријама. Затим су тестови извршени на аналитичким решењима Навије-Стоксових једначина, тестови у којима су резултати поређени са другим нумеричким симулацијама, изведених са сличним алгоритмима, вршена су поређења са резултатима испитивања у аеротунелима, и напослетку вршена су

поређења симулација са мерењима над реалним комплексним брдовитим теренима у реалном, атмосферском окружењу.

Сви тестови су показали да су постигнута значајна унапређења са предложеном нумеричком процедуром, у односу на конвенционалну процедуру. Тестови апроксимације хелијски центрираних градијената користећи синтетичка решења су показали да је предложени приступ способан да оствари прецизност на нивоу тачности рачунара, чак и на изузетно деформисаним мрежама. У тестовима који укључују струјања са аналитичким решењима, метод је показао очекивани други ред тачности на униформним праволинијским мрежама. На деформисаним мрежама, нове шеме за дискретизацију дифузије су показале значајно побољшање како у прецизности прорачуна, тако и у брзини конвергенције, у поређењу са другим приступима који су укључивали неке корекције неортогоналности. Резултати су показали да није довољно узети у обзир само искошеност прорачунских хелија унутар мреже, већ да је потребно узети у обзир појам отклона тачке пресека, који је дефинисан у овој дисертацији, уколико постоји потреба за већом прецизношћу прорачуна. Једно од најзначајнијих достигнућа је везано за могућност да се тачно представи поље притиска, у случајевима наглих деформација, какве се често виђају на мрежама које представљају реалне комплексне топографије.

У дисертацији су показана значајна унапређења у случајевима када је SIP алгоритам коришћен не самостално, за решавање линеарног система једначина насталих дискретизацијом, већ када је коришћен као пекондиционер, унутар алгоритма из класе тзв. Криловљевих алгоритама. Показано је да се у том случају остварују значајна побољшања CG и Bi-CGSTAB метода, увећавајући брзину конвергенције у односу на случајеве када се користи непотпуна факторизација Холецког без додатног попуњавања, тј. када се користи IC(0) прекондиционер. Побољшана конвергенција у линеарним системима доводи до глатке и брже конвергенције тзв. спољашњих или SIMPLE итерација у оквиру секвенцијалног приступа решавања једначина струјног поља. Ово постаје посебно значајно како се резолуција мреже повећава, јер се тада толеранције резидуала смањују. Овај резултат је од практичног значаја у оквиру структурираних прорачунских мрежа, а како је показано у случају реалних примера, такве мреже се стандардно користе у случају симулације ветра над комплексним топографијама.

У случају реалног случаја брда Болунд, постигнута су одлична поклапања са експериментима када су посматрани вертикални профили брзина,

добијени употребом  $k - \epsilon$  турбулентног модела са ограничењима остваривости (енг. Realizable  $k - \epsilon$  turbulence model). Исти модел је показао боље резултате у односу на RNG турбулентни модел када су посматрани вертикални профили турбулентне кинетичке енергије.

Ауторова је жеља да ова дисертација инспирише будућа истраживања у домену струјања у изразито неортогоналним геометријама, због изазова и потешкоћа које са собом носи, као и због практичног значаја за симулацију ваздушних струјања у атмосферском окружењу.



# Библиографија

- [1] B. Mathiesen, H. Lund, K. Karlsson, 100% Renewable energy systems, climate mitigation and economic growth, *Applied Energy* 88 (2) (2011) 488--501.
- [2] European Wind Energy Association, URL [www.ewea.org](http://www.ewea.org)
- [3] H. Weigt, Germany's wind energy: The potential for fossil capacity replacement and cost saving, *Applied Energy* 86 (2009) 1857--1863.
- [4] IEC61400-12-1: Wind turbines - part 12-1: Power performance measurements of Electricity Producing Wind Turbines.
- [5] J. Manwell, J. McGowan, A. Rogers, *Wind Energy Explained*, 2nd Edition, John Wiley & Sons Ltd., 2009.
- [6] A.Clifton, M.H.Daniels, M.Lehning, Effect of winds in a mountain pass on turbine performance, *Wind Energy* 17 (2014) 1543--1562.
- [7] R. Stull, *An Introduction to Boundary Layer Meteorology*, Kluwer Academic Publishers: Dordrecht, 1988.
- [8] P.C.Jackson, J. Hunt, Turbulent wind flow over a low hill, *Quart. J. R. Met. Soc.* 101 (1975) 929--955.
- [9] B.Blocken, W.D.Janssen, T. van Hooff, CFD simulation for pedestrian wind comfort and wind safety in urban areas: General decision framework and case study for the Eindhoven University campus, *Environmental Modelling and Software* 30 (2012) 15--34.
- [10] V. Vuorinen, A. Chaudhari, J. Keskinen, Large-eddy simulation in a complex hill terrain enabled by a compact fractional step OpenFOAM solver, *Advances in Engineering Software* 79 (2015) 70--80.

- [11] P.A.Taylor, H. Teunissen, The Askervein hill project: overview and background data, *Boundary-Layer Meteorology* 39 (1987) 15--39.
- [12] A.C.M.Beljaars, J.L.Walmsley, P.A.Taylor, A mixed spectral finite-difference model for neutrally stratified boundary-layer flow over roughness changes and topography, *Boundary-Layer Meteorology* 38 (1987) 273--303.
- [13] B. Zhou, F. Chow, Large-Eddy Simulation of the stable boundary layer with explicit filtering and reconstruction turbulence modeling, *Journal of the Atmospheric Sciences* 68 (2011) 2142--2155.
- [14] A. Lopes, WindStation—a software for the simulation of atmospheric flows over complex topography, *Environmental Modelling and Software* 18 (2003) 81--96.
- [15] F.K.Chow, R. and, Evaluation of turbulence closure models for large-eddy simulation over complex terrain: Flow over Askervein hill, *Journal of Applied Meteorology and Climatology* 14 (2009) 1050--1065.
- [16] A.D.Griffiths, J.H.Middleton, Simulations of separated flow over two-dimensional hills, *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics* 98 (2010) 155--160.
- [17] L. M. Paiva, G. C. Bodstein, W. F. Menezes, Numerical simulation of atmospheric boundary layer flow over isolated and vegetated hills using RAMS, *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics* 97 (2009) 439--454.
- [18] J. L. da Costa, J. P. F.A. Castro, A. P. Stuart, Computer simulation of atmospheric flows over real forests for wind energy resource evaluation, *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics* 94 (2006) 603--620.
- [19] S. J. Wakes, T. Maeglia, K. J. Dickinson, M. J. Hilton, Numerical simulation of wind flow over a complex topography, *Environmental Modelling and Software* 25 (2010) 237--247.
- [20] J. Loureiro, A. Alho, A. Freire, The numerical computation of near-wall turbulent flow over a steep hill, *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics* 96 (2008) 540--561.



- [21] L. Khurshudyan, W. Snyder, I. Nekrasov, R. Lawson, R. Thompson, F. Schiermeier, Flow and dispersion of pollutants over two-dimensional valleys: Summary report of joint Soviet-American study, Technical report EPA-600/3-90-025, Tech. rep., Res. Tri. Pk., N.C. (1990).
- [22] W. Snyder, L. Khurshudyan, I. Nekrasov, R. L. Jr, R. Thompson, Flow and dispersion of pollutants within two-dimensional valleys, *Atmospheric Environment* 25A (7) (1991) 1347--1375.
- [23] A. Maurizi, Numerical simulation of turbulent flows over 2-D valleys using three versions of the  $k$ - $\epsilon$  closure model, *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics* 85 (2000) 59--73.
- [24] L.K.Alm, T. Nygaard, Flow over complex terrain estimated by a general purpose Navier-Stokes solver, *Modeling, Identification and Control* 16 (3) (1995) 169--176.
- [25] J. Pieterse, T. Harms, CFD investigation of the atmospheric boundary layer under different thermal stability conditions, *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics* 121 (2013) 82--97.
- [26] A. Kasmi, C. Mason, Turbulence modeling of atmospheric boundary layer flow over complex terrain: a comparison of models at wind tunnel and full scale, *Wind Energy* 13 (2010) 689--704.
- [27] B. Liu, J. Qu, W. Zhang, G. Qian, Numerical simulation of wind flow over transverse and pyramid dunes, *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics* 99 (2011) 879--888.
- [28] A. N. Ross, S. Arnold, S. B. Vosper, S. D. Mobbs, N. Dixon, A. G. Robins, A comparison of wind-tunnel experiments and numerical simulations of neutral and stratified flow over a hill, *Boundary-Layer Meteorology* 113 (2004) 427--459.
- [29] F. Wan, F. Porte-Angel, Large-eddy simulation of stably-stratified flow over a steep hill, *Boundary-Layer Meteorology* 138 (2011) 367--384.
- [30] A. Chaudhari, Large-Eddy Simulation of wind flows over complex terrains for wind energy applications, Ph.D. thesis, Lappeenranta University of Technology, Lappeenranta, Finland (2014).

- [31] A. Muaurizi, J. Palma, F. Castro, Numerical simulation of the atmospheric flow in a mountainous region of the North of Portugal, *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics* 74-76 (1998) 219--228.
- [32] T. Uchida, Y. Ohya, Numerical simulation of atmospheric flow over complex terrain, *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics* 81 (1999) 283--293.
- [33] F. Castro, J. Palma, A. Lopes, Simulation of the Askervein flow. Part 1: Reynolds averaged Navier-Stokes equations ( $k - \epsilon$  turbulence model), *Boundary-Layer Meteorology* 107 (2003) 501--530.
- [34] Y. Jung, K. Park, W. Park, O. Park, Numerical analysis of flow and pollutant dispersion over 2-D bell shaped hills, *KSME International Journal* 17 (7) (2003) 1054--1062.
- [35] T. Takahashi, S. Kato, S. Murakami, R. Ooka, M. Yassin, R. Kono, Wind tunnel tests of effects of atmospheric stability on turbulent flow over a three-dimensional hill, *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics* 93 (2005) 155--169.
- [36] H. Kim, C. Lee, H. Lim, N.H. Kyong, An experimental and numerical study on the flow over two-dimensional hills, *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics* 66 (1997) 17--33.
- [37] H. Kim, V. Patel, Test of turbulence models for wind flow over terrain with separation and recirculation, *Boundary-Layer Meteorology* 94 (2000) 5--21.
- [38] H. Kim, V. Patel, C. Lee, Numerical simulation of wind flow over hilly terrain, *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics* 87 (2000) 45--60.
- [39] J. Prospathopoulos, E. Politis, P. Chaviaropoulos, Application of a 3D RANS solver on the complex hill of Bolund and assessment of the wind flow predictions, *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics* 107-108 (2012) 149--159.
- [40] O. Undheim, H. I. Andersson, E. Berge, Non-linear, microscale modelling of the flow over Askervein hill, *Boundary-Layer Meteorology* 120 (2006) 477--495.

- [41] D. Abdi, G. Bitsuamlak, Wind flow simulations on idealized and real complex terrain using various turbulence models, *Advances in Engineering Software* 75 (2014) 30--41.
- [42] J. Berg, J. Mann, A. Bechmann, M. S. Courtney, H. E. Jorgensen, The Bolund experiment, part I: Flow over a steep, three-dimensional hill, *Boundary Layer Meteorology* 141 (2011) 219--243.
- [43] A. Bechmann, N. N. Sorensen, J. Berg, J. Mann, P. Réthoré, The Bolund experiment, part II: Blind comparison of microscale flow models, *Boundary-Layer Meteorology* 141 (2) (2011) 245--271.
- [44] T. I. K. H. S. Oikawa, A wind tunnel study of turbulent flow over a three-dimensional steep hill, *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics* 83 (1999) 95--107.
- [45] M. Diebold, C. Higgins, J. Fang, A. Bechmann, M. Parlange, Flow over hills: A Large-Eddy Simulation of the Bolund case, *Boundary-Layer Meteorology* 148 (2013) 177--194.
- [46] C. Peralta, H. Nugusse, S. Kokilavani, J. Schmidt, B. Stoevesandt, Validation of the simpleFoam (RANS) solver for the atmospheric boundary layer in complex terrain, *ITM Web of Conferences* 2 (2014) 01002.
- [47] P. R. R. Hoxey, Appropriate boundary conditions for computational wind engineering models using the k- $\epsilon$  turbulence model, *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics* 46-47 (1993) 145--153.
- [48] A. Bechmann, N. Sorensen, Hybrid RANS/LES method for wind flow over complex terrain, *Wind Energy* 13 (2010) 36--50.
- [49] G.T. Bitsuamlak, T. Stathopoulos, F. Asce, C. Bédard, Numerical evaluation of wind flow over complex terrain: Review, *Journal of Aerospace Engineering* 17 (2004) 135--145.
- [50] F. Flores, R. Garraud, R. M. noz, CFD simulations of turbulent buoyant atmospheric flows over complex geometry: Solver development in OpenFOAM, *Computers and Fluids* 82 (2013) 1--13.
- [51] F. Flores, R. Garraud, R. M. noz, Openfoam applied to the cfd simulation of turbulent buoyant atmospheric flows and pollutant dispersion inside large open pit mines under intense insolation, *Computers and Fluids* 90 (2014) 72--87.

- [52] T. Koblitz, A. Bechmann, A. Sogachev, N. Sorensen, P. Rethore, Computational fluid dynamics model of stratified atmospheric boundary-layer flow, *Wind Energy* 18 (2015) 75--89.
- [53] S.Marras, Variational multiscale stabilization of finite and spectral elements for dry and moist atmospheric problems, Ph.D. thesis, Universitat Politècnica de Catalunya (2012).
- [54] M. Diebold, C. Higgins, J. Fang, A. Bechmann, M. Parlange, Flow over hills: A Large-Eddy Simulation of the Bolund case, *Boundary Layer Meteorology* 148 (2013) 177--194.
- [55] X. Zhang, S. Ni, G. He, A pressure-correction method and its applications on an unstructured Chimera grids, *Computers and Fluids* 37 (2008) 993--1010.
- [56] S. Muzaferija, D. Gosman, Finite-volume CFD procedure and adaptive error control strategy for grids of arbitrary topology, *Journal of Computational Physics* 138 (1997) 766--787.
- [57] J. Doyle, C. Epifanio, A. Persson, P. Reinecke, G. Zängl, Mesoscale modeling over complex terrain: Numerical and predictability perspectives, in: F. K. Chow, S. D. Wekker, B. J. Snyder (Eds.), *Mountain Weather Research and Forecasting - Recent Progress and Current Challenges*, Springer, 2013, pp. 531--590.
- [58] S. Zhong, F. Chow, Meso- and fine-scale modeling over complex terrain: Parameterizations and applications, in: F. K. Chow, S. D. Wekker, B. J. Snyder (Eds.), *Mountain Weather Research and Forecasting - Recent Progress and Current Challenges*, Springer, 2013, pp. 591--654.
- [59] B. Colman, K. Cook, B. Snyder, Numerical weather prediction and weather forecasting in complex terrain, in: F. K. Chow, S. D. Wekker, B. J. Snyder (Eds.), *Mountain Weather Research and Forecasting - Recent Progress and Current Challenges*, Springer, 2013, pp. 592--692.
- [60] G. Zängl, Extending the numerical stability limit of terrain-following coordinate models over steep slopes, *Monthly Weather Review* 140 (2012) 3722--3733.
- [61] Y.Mahrer, An improved numerical approximation of the horizontal gradients in a terrain-following coordinate system, *Monthly Weather Review* 112 (1984) 918--922.

- [62] N.N.Sorensen, General purpose flow solver applied to flow over hills, Ph.D. thesis, Riso -R-827(EN), Riso National Laboratory, Denmark (1995).
- [63] J. Szmelter, P. Smolarkiewicz, An edge-based unstructured mesh framework for atmospheric flows, *Computers and Fluids* 46 (2011) 455--460.
- [64] P. K. Smolarkiewicz, J. Szmelter, A. A. Wyszogrodzki, An unstructured-mesh atmospheric model for nonhydrostatic dynamics, *Journal of Computational Physics* 254 (2013) 184--199.
- [65] P. Smolarkiewicz, R. Sharman, J. Weil, S. Perry, D. Heist, G. Bowker, Building resolving large-eddy simulations and comparison with wind tunnel experiments, *Journal of Computational Physics* 227 (2007) 633--653.
- [66] S.Kenjereš, B. ter Kuile, Modelling and simulations of turbulent flows in urban areas with vegetation, *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics* 123 (2013) 43--55.
- [67] S. Kenjereš, K. Hanjalić, Combined effects of terrain orography and thermal stratification on pollutant dispersion in a town valley: A T-RANS simulation, *Journal of Turbulence* 3 (26) (2002) 1--25.
- [68] K. Hanjalić, S. Kenjereš, Some developments in turbulence modeling for wind and environmental flows, *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics* 96 (2008) 1537--1570.
- [69] S. Kenjereš, K. Hanjalić, Tackling complex turbulent flows with transient RANS, *Fluid Dynamics Research* 41 (2009) 1--32.
- [70] S. Kenjereš, S. de Wildt, T. Busking, Capturing transient effects in turbulent flows over complex urban areas with passive pollutants, *International Journal of Heat and Fluid Flow* 51 (2014) 120--137.
- [71] M. Darwish, I. Sraj, F. Moukalled, A coupled finite volume solver for the solution of incompressible flows on unstructured grids, *Journal of Computational Physics* 228 (2009) 180--201.
- [72] Z. Chen, A. Przekwas, A coupled pressure-based computational method for incompressible/compressible flows, *Journal of Computational Physics* 229 (2010) 9150--9165.

- [73] H. Stone, Iterative solution of implicit approximations of multi-dimensional partial differential equations., *SIAM Journal on Numerical Analysis* 5 (1968) 530--568.
- [74] S. Pope, *Turbulent flows*, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2007.
- [75] J. Jovanovic, *The Statistical Dynamics of Turbulence*, Springer, 2004.
- [76] C. Speziale, Analytical methods for the development of Reynolds-stress closure in turbulence, *Annual Reviews of Fluids Mechanics* 23 (1991) 107--157.
- [77] D. Wilcox, *Turbulence modeling for CFD*, DCW Industries, 1998.
- [78] B. Launder, N. Sandham (Eds.), *Closure Strategies for Turbulent and Transitional Flows*, Cambridge University Press, 2002.
- [79] P. Durbin, On  $k$ - $\epsilon$  stagnation point anomaly, *International Journal of Heat and Fluid Flow* 17 (1) (1996) 89--90.
- [80] G. Medic, P. Durbin, Toward improved prediction of heat transfer on turbine blades, *Journal of Turbomachinery* 124 (2002) 187--192.
- [81] G. Raithby, G. Stubbley, P. Taylor, The Askervein Hill project: a finite control volume prediction of three-dimensional flows over the hill, *Boundary Layer Meteorology* 39 (1987) 247--267.
- [82] V. Yakhot, S. Orszag, S. Thangam, T. Gatski, C. Speziale, Development of turbulence models for shear flows by a double expansion technique, *Physics of Fluids A* 4 (7) (1992) 1510--1520.
- [83] T. Shih, W. Liou, A. Shabbir, Z. Yang, J. Zhu, A new  $k$ - $\epsilon$  eddy-viscosity model for high Reynolds number turbulent flows – model development and validation, *Computers and Fluids* 24 (3) (1995) 227--238.
- [84] F. Menter, Two-equation eddy-viscosity turbulence models for engineering applications, *AIAA Journal* 32 (8) (1994) 1598--1605.
- [85] F. R. Menter, M. Kuntz, R. Langtry, *Ten Years of Industrial Experience with the SST Turbulence Model*, Begell House, Inc, 2003, pp.625-632.
- [86] F. Menter, Zonal two equation  $k$ - $\omega$  turbulence models for aerodynamic flows, *AIAA Paper* 93-2906.

- [87] S. Pope, A more general effective-viscosity hypothesis, *Journal of Fluid Mechanics* 72 (1975) 331--340.
- [88] W. Rodi, A new algebraic relation for calculating the Reynolds stresses, *Z. Angew. Math. Mech.* 56 (1976) 219--221.
- [89] T. Gatski, C. Speziale, On explicit algebraic stress models for complex turbulent flows, *Journal of Fluid Mechanics* 254 (1993) 59--78.
- [90] S. Wallin, A. Johansson, A new explicit algebraic Reynolds stress turbulence model for 3D flow, in: *Proceedings of the 11th Symposium on Turbulent Shear Flows, Grenoble, France, Vol. 2, 1997.*
- [91] S. Wallin, Engineering turbulence modelling for cfd with a focus on explicit algebraic Reynolds stress models, Ph.D. thesis, Royal Institute of Technology, Stockholm, Sweden (2000).
- [92] S. Wallin, A. Johansson, An explicit algebraic Reynolds stress model for incompressible and compressible turbulent flows, *Journal of Fluid Mechanics* 403 (2000) 89--132.
- [93] A. Hellsten, New two-equation turbulence model for aerodynamic applications, Ph.D. thesis, Helsinki University of Technology (2004).
- [94] A. Hellsten, New advanced k-omega turbulence model for high-lift aerodynamics, *AIA Journal* 43 (9) (2005) 1857--1869.
- [95] F. Menter, V. Garbaruk, Y. Egorov, Explicit algebraic Reynolds stress models for anisotropic wall-bounded flows, in: *EUCASS - 3rd European Conference for Aero-Space Sciences, July 6-9th, 2009, Versailles, 2009.*
- [96] B. Ničeno, An unstructured parallel algorithm for large eddy simulation and conjugate heat transfer simulations, Ph.D. thesis, TU Delft (2001).
- [97] E. Anderson, Z. Bai, C. Bischof, S. Blackford, J. Demmel, J. Dongarra, J. D. Croz, A. Greenbaum, S. Hammarling, A. McKenney, D. Sorensen, *LAPACK Users' Guide*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, third ed. Edition (1999).
- [98] G. Golub, C. V. Loan, *Matrix computations*, The Johns Hopkins University Press, 1996.
- [99] L. Trefethen, D. Bau, *Numerical linear algebra*, SIAM, 1997.

- [100] H. Jasak, Error analysis and estimation in the finite volume method with applications to fluid flows., Ph.D. thesis, Imperial College, London (1996).
- [101] I. Demirdžić, S. Muzaferija, Numerical method for coupled fluid flow, heat transfer and stress analysis using unstructured moving meshes with cells of arbitrary topology, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 125 (1995) 236--255.
- [102] B. Basara, Employment of the second-moment turbulence closure on arbitrary unstructured grids, *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 44 (2004) 377--407.
- [103] P. Khosla, S. Rubin, A diagonally dominant second-order accurate scheme, *Computers and Fluids* 2 (1974) 207--209.
- [104] N. Waterson, H. Deconinck, Design principles for bounded higher-order convection schemes - a unified approach, *Journal of Computational Physics* 224 (2007) 182--207.
- [105] B. van Leer, Towards the ultimate conservative difference scheme IV. A new approach to numerical convection, *Journal of Computational Physics* 23 (1977) 276.
- [106] S. Mathur, J. Murthy, A pressure-based method for unstructured meshes, *Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals* 31 (2) (1997) 195--215.
- [107] D. Kim, H. Choi, A second-order time-accurate finite volume method for unsteady incompressible flow on hybrid unstructured grids, *Journal of Computational Physics* 162 (2000) 411--428.
- [108] J. H. Ferziger, M. Perić, *Computational Methods for Fluid Dynamics*, 2nd Edition, Springer, 1999.
- [109] C. Rhie, W. Chow, Numerical study of the turbulent flow past an airfoil with trailing edge separation, *AIAA Journal* 21 (1983) 1525--1532.
- [110] M. Benzi, Preconditioning techniques for large linear systems: A survey, *Journal of Computational Physics* 182 (2002) 418--477.
- [111] H. V. D. Vorst, Bi-CGSTAB: A fast and smoothly converging variant of Bi-CG for the solution of non-symmetric linear system, *SIAM Journal of Scientific Computing* 13 (1992) 631--644.



- [112] Y.Saad, ILUT: A dual threshold incomplete lu factorization, *Numerical Linear Algebra and Applications* 1 (387).
- [113] S. Kenjereš, *Numerical modelling of complex buoyancy-driven flows*, Ph.D. thesis, TU Delft (1998).
- [114] S. Kenjereš, K. Hanjalić, Numerical insight into flow structure in ultraturbulent thermal convection, *Physical Review E: Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics* 66 (2002) 036307.
- [115] S. Kenjereš, K. Hanjalić, LES, T-RANS and hybrid simulations of thermal convection at high Ra numbers, *International Journal of Heat and Fluid Flow* 27 (5) (2006) 800–810.
- [116] K. Hanjalić, S. Kenjereš, Dynamic simulation of pollutant dispersion over complex urban terrains: A tool for sustainable development, control and management, *Energy* 30 (8) (2005) 1481–1497.
- [117] S. Kenjereš, K. Hanjalić, Numerical insights into magnetic dynamo action in a turbulent regime, *New Journal of Physics* 9 (306) (2007) 1--29.
- [118] S. Kenjereš, Electromagnetically driven dwarf tornados in turbulent convection, *Physics of Fluids* 23 (015103) (2011) 1--10.
- [119] J. DeBonis, Solutions of the Taylor-Green vortex problem using high-resolution explicit finite difference methods, Tech. rep., NASA-/TM–2013-217850 (2013).
- [120] G.I.Taylor, A. Green, Mechanisms of the production of small eddies from large ones, *Proceedings of the Royal Society of London A* 158 (1937) 499--521.
- [121] A. Pinelli, I. Naqavi, U. Piomelli, J. Favier, Immersed-Boundary Methods for general finite-difference and finite-volume Navier-Stokes solvers, *Journal of Computational Physics* 229 (2010) 9073--9091.
- [122] M. Costa, M. Riethmuller, C. Borrego, Effects of upstream turbulence characteristics on the flow over two-dimensional hills, in: *EURASAP International Workshop on Wind and Water Tunnel Modelling of Atmospheric Flow and Dispersion*, Aso, Japan, 1993.

- [123] P. de Mello, J. Yanagihara, Numerical prediction of gas concentrations and fluctuations above a triangular hill within a turbulent boundary layer, *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics* 98 (2010) 113--119.
- [124] P. Taylor, H. Teunissen, The Askervein Hill project: Report on September/October 1983 main field experiment, Rep. MSRB-84-6, Tech. rep., Atmospheric Environment Service, Ontario, Canada (1985).
- [125] R. Hagenzieker, Numerical simulations of turbulent flows over hills and complex urban areas with dispersion of pollutants, Master thesis, Technical University Delft, The Netherlands (2006).
- [126] J. Walmsley, P. Taylor, Boundary-layer flow over topography: Impacts of the Askervein study, *Boundary Layer Meteorology* 78 (1996) 291--320.

## Додатак А

У овом додатку су приказани изворни кодови, написани у програмском језику Fortran, за Bi-CGSTAB(SIP) и PCG(SIP) алгоритам за решавање линеарних система једначина, за разређене матрице складиштене у дијагоналном формату.

Listing 7.1: Bi-CGSTAB(SIP).

```
1  !*****
2  !
3      subroutine cgstab_sip(fi,ifi)
4  !
5  !*****
6  !
7  ! This routine incorporates the Bi-CGStab solver for seven-diagonal,
8  ! non-symmetric coefficient matrices (suitable for convection/
9  ! diffusion problems).
10 !
11 ! Writen by Samir Muzaferija, Institut fuer Schiffbau, Hamburg, 1995.
12 !
13 ! Original routine modified to incorporate sip as a preconditioner
14 ! by Nikola Mirkov, 28.01.2014. nmirkov@vinca.rs
15 !
16 !*****
17 !
18     use types
19     use parameters
20     use indexes
21     use coef
22     use coefb
23     use title_mod
24
25     implicit none
26 !
27 !*****
28 !
29     integer, intent(in) :: ifi
30     real(prec), dimension(nxyza) :: fi
31
32 !
33 ! local variables
34 !
35     integer :: i, j, k, ijk, ns, l
36     real(prec), dimension(nxyza) :: reso,pk,uk,zk,vk
```

```

37     real(prec) :: rsm, resmax, res0, resl, p1, p2, p3
38     real(prec) :: alf, beto, gam, bet, om, vres, vv, ukreso
39
40     !.....max no. of inner iters
41     resmax = sor(ifi)
42     !
43     !.....calculate initial residual vector
44     !
45     res0=0.0d0
46     do k=2,nkm
47         do i=2,nim
48             do j=2,njm
49                 ijk=lk(k)+li(i)+j
50                 res(ijk)=ae(ijk)*fi(ijk+nj)+aw(ijk)*fi(ijk-nj)+an(ijk)* &
51                 fi(ijk+1)+as(ijk)*fi(ijk-1)+at(ijk)*fi(ijk+nij)+ &
52                 ab(ijk)*fi(ijk-nij)+su(ijk)-ap(ijk)*fi(ijk)
53                 res0=res0+abs(res(ijk))
54             end do
55         end do
56     end do
57     !
58     if(ltest) write(66,*) ' 0 sweep, res0 = ',res0
59
60     !.....calculate coefficients of l and u matrices using sip
61     do k=2,nkm
62         do i=2,nim
63             do j=2,njm
64                 ijk=lk(k)+li(i)+j
65                 bb(ijk)=-ab(ijk)/(1.+alfa*(bn(ijk-nij)+be(ijk-nij)))
66                 bw(ijk)=-aw(ijk)/(1.+alfa*(bn(ijk-nj)+bt(ijk-nj)))
67                 bs(ijk)=-as(ijk)/(1.+alfa*(be(ijk-1)+bt(ijk-1)))
68                 p1=alfa*(bb(ijk)*bn(ijk-nij)+bw(ijk)*bn(ijk-nj))
69                 p2=alfa*(bb(ijk)*be(ijk-nij)+bs(ijk)*be(ijk-1))
70                 p3=alfa*(bw(ijk)*bt(ijk-nj)+bs(ijk)*bt(ijk-1))
71                 bp(ijk)=1./(ap(ijk)+p1+p2+p3 &
72                 -bb(ijk)*bt(ijk-nij) &
73                 -bw(ijk)*be(ijk-nj) &
74                 -bs(ijk)*bn(ijk-1)+small)
75                 bn(ijk)=(-an(ijk)-p1)*bp(ijk)
76                 be(ijk)=(-ae(ijk)-p2)*bp(ijk)
77                 bt(ijk)=(-at(ijk)-p3)*bp(ijk)
78             end do
79         end do
80     end do
81     !

```

```

82  !.....initialize working arrays and constants
83  !
84      do k=2,nkm
85          do i=2,nim
86              do j=2,njm
87                  ijk=lk(k)+li(i)+j
88                  reso(ijk)=res(ijk)
89                  pk(ijk)=0.0d0
90                  uk(ijk)=0.0d0
91                  zk(ijk)=0.0d0
92                  vk(ijk)=0.0d0
93              end do
94          end do
95      end do
96      alf=1.0d0
97      beto=1.0d0
98      gam=1.0d0
99  !
100 !.....start inner iterations
101 !
102     ns=nsw(ifi)
103     do l=1,ns
104 !
105 !..... calculate beta and omega
106 !
107     bet=0.0d0
108     do k=2,nkm
109         do i=2,nim
110             do j=2,njm
111                 ijk=lk(k)+li(i)+j
112                 bet=bet+res(ijk)*reso(ijk)
113             end do
114         end do
115     end do
116     om=bet*gam/(alf*beto+small)
117     beto=bet
118 !
119 !..... calculate pk
120 !
121     do k=2,nkm
122         do i=2,nim
123             do j=2,njm
124                 ijk=lk(k)+li(i)+j
125                 pk(ijk)=res(ijk)+om*(pk(ijk)-alf*uk(ijk))
126             end do

```

```

127     end do
128     end do
129     !
130     !.....solve (m zk = pk) – forward substitution
131     !
132     do k=2,nkm
133         do i=2,nim
134             do j=2,njm
135                 ijk=lk(k)+li(i)+j
136                 zk(ijk)=(pk(ijk)-bb(ijk)*zk(ijk-nij)-bw(ijk)*zk(ijk-nj)- &
137                 bs(ijk)*zk(ijk-1))*bp(ijk)
138             end do
139         end do
140     end do
141
142     !
143     !..... backward elimination
144     !
145     do k=nkm,2,-1
146         do i=nim,2,-1
147             do j=njm,2,-1
148                 ijk=lk(k)+li(i)+j
149                 zk(ijk)=zk(ijk)-bn(ijk)*zk(ijk+1)-be(ijk)*zk(ijk+nj)- &
150                 bt(ijk)*zk(ijk+nij)
151             end do
152         end do
153     end do
154     !
155     !.....calculate uk = a.pk
156     !
157     do k=2,nkm
158         do i=2,nim
159             do j=2,njm
160                 ijk=lk(k)+li(i)+j
161                 uk(ijk)=ap(ijk)*zk(ijk)-ae(ijk)*zk(ijk+nj) - &
162                 aw(ijk)*zk(ijk-nj)-an(ijk)*zk(ijk+1)- &
163                 as(ijk)*zk(ijk-1)-at(ijk)*zk(ijk+nij)- &
164                 ab(ijk)*zk(ijk-nij)
165             end do
166         end do
167     end do
168     !
169     !..... calculate scalar product uk.reso and gamma
170     !
171     ukreso=0.0d0

```

```

172     do k=2,nkm
173         do i=2,nim
174             do j=2,njm
175                 ijk=lk(k)+li(i)+j
176                 ukreso=ukreso+uk(ijk)*reso(ijk)
177             end do
178         end do
179     end do
180     gam=bet/ukreso
181     !
182     !.....update (fi) and calculate w (overwrite res – it is res–update)
183     !
184     do k=2,nkm
185         do i=2,nim
186             do j=2,njm
187                 ijk=lk(k)+li(i)+j
188                 fi(ijk)=fi(ijk)+gam*zk(ijk)
189                 res(ijk)=res(ijk)–gam*uk(ijk) !w
190             end do
191         end do
192     end do
193     !
194     !.....solve (m y = w); y overwrites zk; forward substitution
195     !
196     do k=2,nkm
197         do i=2,nim
198             do j=2,njm
199                 ijk=lk(k)+li(i)+j
200                 zk(ijk)=(res(ijk)–bb(ijk)*zk(ijk–nij)–bw(ijk)*zk(ijk–nj)– &
201                 bs(ijk)*zk(ijk–1))*bp(ijk)
202             end do
203         end do
204     end do
205     !
206     !.....backward substitution
207     !
208     do k=nkm,2,–1
209         do i=nim,2,–1
210             do j=njm,2,–1
211                 ijk=lk(k)+li(i)+j
212                 zk(ijk)=zk(ijk)–bn(ijk)*zk(ijk+1)–be(ijk)*zk(ijk+nj)– &
213                 bt(ijk)*zk(ijk+nij)
214             end do
215         end do
216     end do

```

```

217 !
218 !.....calculate v = a.y (vk = a.zk)
219 !
220     do k=2,nkm
221         do i=2,nim
222             do j=2,njm
223                 ijk=lk(k)+li(i)+j
224                 vk(ijk)=ap(ijk)*zk(ijk) -ae(ijk)*zk(ijk+nj)- &
225                     aw(ijk)*zk(ijk-nj)-an(ijk)*zk(ijk+1)- &
226                     as(ijk)*zk(ijk-1) -at(ijk)*zk(ijk+nij)- &
227                     ab(ijk)*zk(ijk-nij)
228             end do
229         end do
230     end do
231 !
232 !..... calculate alpha (alf)
233 !
234     vres=0.0d0
235     vv=0.0d0
236     do k=2,nkm
237         do i=2,nim
238             do j=2,njm
239                 ijk=lk(k)+li(i)+j
240                 vres=vres+vk(ijk)*res(ijk)
241                 vv=vv+vk(ijk)*vk(ijk)
242             end do
243         end do
244     end do
245
246     alf=vres/(vv+small)
247 !
248 !.....update variable (fi) and residual (res) vectors
249 !
250     resl=0.0d0
251     do k=2,nkm
252         do i=2,nim
253             do j=2,njm
254                 ijk=lk(k)+li(i)+j
255                 fi(ijk)=fi(ijk)+alf*zk(ijk)
256                 res(ijk)=res(ijk)-alf*vk(ijk)
257                 resl=resl+abs(res(ijk))
258             end do
259         end do
260     end do
261 !

```



```

262 !.....check convergence
263 !
264     if(l.eq.1) resor(ifi)=res0
265     rsm=resl/(resor(ifi)+small)
266     if(ltest) write(66,*) ' fi=',chvar(ifi),l,' sweep, resl = ',resl,' rsm = ',rsm
267     if(rsm.lt.resmax) return
268 !
269 !.....end of iteration loop
270 !
271     end do
272 !
273     return
274     end

```

---

### Listing 7.2: PCG(SIP).

---

```

1  !*****
2  !
3  subroutine pcgsip(fi,ifi)
4  !
5  !*****
6  !
7  ! This routine incorporates the SIP preconditioned
8  ! Conjugate Gradient solver for symmetric matrices in 3D problems
9  ! with seven–diagonal matrix structure.
10 !
11 ! Written by Nikola Mirkov, 28.01.2014. nmirkov@vinca.rs
12 !
13 !*****
14 !
15     use types
16     use parameters
17     use indexes
18     use coef
19     use coefb
20     use title_mod
21
22     implicit none
23 !
24 !*****
25 !
26     integer, intent(in) :: ifi
27     real(prec), dimension(nxyza) :: fi
28
29 !
30 ! local variables

```

```

31 !
32 integer :: i, j, k, ijk, ns, l
33 real(prec), dimension(nxyza) :: pk,zk
34 real(prec) :: rsm, resmax, res0, resl, p1, p2, p3
35 real(prec) :: s0, sk, alf, bet, pkapk
36
37 !.....max no. of inner iters
38     resmax = sor(ifi)
39 !
40 !.....initalize working arrays
41 !
42     do ijk=1,nijk
43         pk(ijk)=0.0d0
44         zk(ijk)=0.0d0
45         res(ijk)=0.0d0
46     end do
47 !
48 !.....calculate initial residual vector and the norm
49 !
50     res0=0.0d0
51     do k=2,nkm
52         do i=2,nim
53             do j=2,njm
54                 ijk=lk(k)+li(i)+j
55                 res(ijk)=ae(ijk)*fi(ijk+nj)+aw(ijk)*fi(ijk-nj)+an(ijk)* &
56                 fi(ijk+1)+as(ijk)*fi(ijk-1)+at(ijk)*fi(ijk+nij)+ &
57                 ab(ijk)*fi(ijk-nij)+su(ijk)-ap(ijk)*fi(ijk)
58                 res0=res0+abs(res(ijk))
59             end do
60         end do
61     end do
62 !
63 !.....if ltest=true, print the norm
64 !
65     if(ltest) write(66,'(a,1pe10.3)') ' res0 = ',res0
66
67 !.....calculate coefficients of l and u matrices using sip
68     do k=2,nkm
69         do i=2,nim
70             do j=2,njm
71                 ijk=lk(k)+li(i)+j
72                 bb(ijk)=-ab(ijk)/(1.+alfa*(bn(ijk-nij)+be(ijk-nij)))
73                 bw(ijk)=-aw(ijk)/(1.+alfa*(bn(ijk-nj)+bt(ijk-nj)))
74                 bs(ijk)=-as(ijk)/(1.+alfa*(be(ijk-1)+bt(ijk-1)))
75                 p1=alfa*(bb(ijk)*bn(ijk-nij)+bw(ijk)*bn(ijk-nj))

```

```

76     p2=alfa*(bb(ijk)*be(ijk-nij)+bs(ijk)*be(ijk-1))
77     p3=alfa*(bw(ijk)*bt(ijk-nj)+bs(ijk)*bt(ijk-1))
78     bp(ijk)=1./(ap(ijk)+p1+p2+p3 &
79         -bb(ijk)*bt(ijk-nij) &
80         -bw(ijk)*be(ijk-nj) &
81         -bs(ijk)*bn(ijk-1)+small)
82     bn(ijk)=(-an(ijk)-p1)*bp(ijk)
83     be(ijk)=(-ae(ijk)-p2)*bp(ijk)
84     bt(ijk)=(-at(ijk)-p3)*bp(ijk)
85     end do
86     end do
87     end do
88     !
89     s0=1.e20
90     !
91     !....start inner iterations
92     !
93     ns=nsw(ifi)
94     do l=1,ns
95     !
96     !....solve for zk(ijk) -- forward elimination
97     !
98     do k=2,nkm
99     do i=2,nim
100    do j=2,njm
101        ijk=lk(k)+li(i)+j
102        zk(ijk)=(res(ijk)-bb(ijk)*zk(ijk-nij)-bw(ijk)*zk(ijk-nj)- &
103            bs(ijk)*zk(ijk-1))*bp(ijk)
104    end do
105    end do
106    end do
107
108    !
109    !.... backward substitution; calculate scalar product sk
110    !
111    sk=0.0d0
112    do k=nkm,2,-1
113    do i=nim,2,-1
114    do j=njm,2,-1
115        ijk=lk(k)+li(i)+j
116        zk(ijk)=zk(ijk)-bn(ijk)*zk(ijk+1)-be(ijk)*zk(ijk+nj)- &
117            bt(ijk)*zk(ijk+nij)
118        sk=sk+res(ijk)*zk(ijk)
119    end do
120    end do

```

```

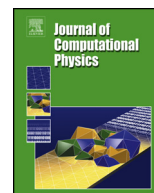
121     end do
122     !
123     !.....calculate beta
124     !
125     bet=sk/s0
126     !
127     !.....calculate new search vector pk
128     !
129     do k=2,nkm
130         do i=2,nim
131             do j=2,njm
132                 ijk=lk(k)+li(i)+j
133                 pk(ijk)=zk(ijk)+bet*pk(ijk)
134             end do
135         end do
136     end do
137     !
138     !.... calculate scalar product (pk.a pk) and alpha (overwrite zk)
139     !
140     pkapk=0.0d0
141     do k=2,nkm
142         do i=2,nim
143             do j=2,njm
144                 ijk=lk(k)+li(i)+j
145                 zk(ijk)=ap(ijk)*pk(ijk)-ae(ijk)*pk(ijk+nj)- &
146                     aw(ijk)*pk(ijk-nj)-an(ijk)*pk(ijk+1)-as(ijk)*pk(ijk-1)- &
147                     at(ijk)*pk(ijk+nij)-ab(ijk)*pk(ijk-nij)
148                 pkapk=pkapk+pk(ijk)*zk(ijk)
149             end do
150         end do
151     end do
152
153     alf=sk/pkapk
154     !
155     !.....calculate variable correction, new residual vector, and norm
156     !
157     resl=0.0d0
158     do k=2,nkm
159         do i=2,nim
160             do j=2,njm
161                 ijk=lk(k)+li(i)+j
162                 fi(ijk)=fi(ijk)+alf*pk(ijk)
163                 res(ijk)=res(ijk)-alf*zk(ijk)
164                 resl=resl+abs(res(ijk))
165             end do

```

```
166         end do
167     end do
168
169     s0=sk
170     !
171     !.....check convergence
172     !
173     if(l.eq.1) resor(ifi)=res0
174     rsm=resl/(resor(ifi)+small)
175     if(ltest) write(66,'(3a,i2,a,1pe10.3,a,1pe10.3)') ' fi=',chvar(ifi),' sweep = ',l,' resl = ',resl,' rsm = ',rsm
176     if(rsm.lt.resmax) return
177     !
178     !.....end of iteration loop
179     !
180     end do
181     !
182     return
183     end
```

---

## Додатак Б



# On the improved finite volume procedure for simulation of turbulent flows over real complex terrains



Nikola Mirkov<sup>a,\*</sup>, Boško Rašuo<sup>b</sup>, Saša Kenjereš<sup>c</sup>

<sup>a</sup> Vinca Institute of Nuclear Sciences, University of Belgrade, Mike Alasa 12-14, Belgrade, Serbia

<sup>b</sup> Faculty of Mechanical Engineering, University of Belgrade, Kraljice Marije 17, Belgrade, Serbia

<sup>c</sup> Transport Phenomena Section, Department of Chemical Engineering, Faculty of Applied Sciences, Delft University of Technology, Julianalaan 136, 2628 BL, Delft, The Netherlands

## ARTICLE INFO

### Article history:

Received 26 June 2014

Received in revised form 30 January 2015

Accepted 2 February 2015

Available online 10 February 2015

### Keywords:

Finite volume method  
Unsteady incompressible flow  
Cell-centered approach  
Pressure-correction  
Preconditioner  
Non-orthogonal grids  
Complex terrain

## ABSTRACT

This article presents a new and substantially improved finite volume procedure for simulation of incompressible flows on non-orthogonal grids. Cell-centered least-squares gradients are obtained in a robust and highly accurate way. A new discretization of the diffusive terms is employed, which is based on extension of the original cell-face gradient interpolation and is more suitable for complex grid distortions. A flexible flux-limited interpolation of dependent variables on distorted computational grids is introduced. An efficient preconditioner for Krylov method solution of linear systems is proposed, which substantially improves the solution of Poisson equation for pressure correction. The pressure-correction algorithm is adapted for efficient convergence on highly complex grids using a sequence of non-orthogonal corrector solutions and its effect on iteration convergence is analyzed. The non-orthogonalities treated by current procedure are more accustomed to numerical grids generated from a real complex terrain elevation data. The main focus is on the simulation of atmospheric micro-scale flows pertinent to wind energy application.

© 2015 Elsevier Inc. All rights reserved.

## 1. Introduction

Accurate simulation of wind flows over real terrains is a challenging task. To represent terrains with complex orography, highly non-orthogonal body-fitted meshes are produced. They in turn require substantially improved numerical procedures to provide accurate solutions.

Some authors have recently made attempts to circumvent that problem either by smoothing the mesh using dense grid-point distribution near surface irregularities and at the same time using elliptic grid generators to enforce orthogonality of grid lines near surface [1,2], or by diverting to the Immersed Boundary Method approach [3]. The overset grid method (see [4] for aerodynamic flows over smooth bodies), to the best of our knowledge, has not yet been applied to rough terrains. Dense patches can be used to increase resolution near irregular parts of topography while avoiding expensive global grid refinements. Locally adapted methods as in [5] that have been used with success for industrial internal flows may be a viable alternative as well, except that regular patches of Chimera grids enable the use of simple finite-difference formulations of higher order, while latter approach works only with unstructured finite-volume methodology.

\* Corresponding author. Tel.: +381 65 538 17 71.

E-mail address: nmirkov@vin.bg.ac.rs (N. Mirkov).

A significant amount of work in the field of the weather research and forecast and the mountain meteorology research is motivated by complex terrains [6–8]. Important question in simulating flows over complex terrain is the accurate approximation of the pressure gradients. Discretization error in pressure gradient term leads to spurious circulations over topography and leads to numerical instabilities when steep slopes are encountered. Based on this observation Zängl [9] proposed a pressure gradient approximation in terrain following coordinates, improving the earlier work by Mahrer [10], that increases the numerical stability of the simulation over steep terrain. With similar motivation we develop in our work an accurate pressure gradient approximation scheme for complex terrain simulation. We show that the conventional body-fitted finite-volume approaches are not immune to producing spurious pressure fields near grid distortions, in particular near sudden changes in topography, and how these are fixed by using the proposed approach.

Modern solvers for flows over complex terrains have recognized the flexibility of the finite volume method. Various general purpose CFD codes have been used with success for simulation of such flows, but were mostly focused on validation studies of turbulence models, e.g. [1,11,12]. Inherent difficulties of these general purpose CFD codes related to complex topographies, such as accurate interpolation of dependent variables, in the presence of grid distortions present at complex terrains, however, are not studied in detail. Some extensively used research codes were specifically targeted for flow over hilly terrain and have addressed these issues by, e.g. using blend of higher order (fourth-order centered and third order upwind) interpolation schemes for convective terms [13]. These authors discretized Navier–Stokes equations in general curvilinear coordinates using a block-structured approach which results in a specific data structure that enabled larger interpolation molecules. In [14,15] the authors recognize how limitations in codes for flow over complex terrains may be imposed within discretizations of differential operators in implementations relying on restrictive local mesh regularities, orthogonality, or shape uniformity of cells. They employed highly flexible edge-based data structure which benefits the accuracy of calculations on skewed meshes. They used median-dual finite volume meshes to alleviate the problems encountered with complex terrains and enabling alleviated spatial resolution.

The complexity of the micro-scale flows in the atmospheric environment is not limited to complex topography. There is often a need to introduce flow obstacles such as buildings for the studies of wind forces on structures and urban-physics questions like the pollutant dispersion, e.g. [16,17]. Smolarkiewicz et al. [16] is an important example with two-fold contribution: the exhibited numerical efficiency of the Immersed Boundary Method for atmospheric flows with complex obstacles not limited to cubic building-like objects, and the demonstration that the continuous transformations often used with terrain-following coordinates can be used with very steep, even vertical slopes.

This work presents a part of the development of an integral in-house computational code, which is able to simulate the laboratory scale and real-scale environmental flows with advanced numerical methods and turbulence models. In our previous work, we addressed modeling and simulations of some important aspects of the environmental flows, including the turbulent dispersion (passive scalars) in street canyons and some real-scale applications dealing with the time-dependent (diurnal cycles) simulations of flow, turbulence and dispersion over a complex terrain orography, e.g. [18–20,17,21]. In the present work we remain in the context of a second-order, cell-centered, body-fitted, finite-volume discretization paradigm. The coupled solution approach, e.g. [22,23], despite demonstrating better convergence has large memory requirements, therefore the segregated solution approach is used.

The paper focuses on: (i) improvements of cell-centered gradient calculation procedure, (ii) bounded high-order discretization of convective terms on irregular three-dimensional grids, (iii) analysis of the diffusion term discretization procedures anticipating highly distorted grids, (iv) improvements of pressure-correction algorithm, and finally (v) efficient preconditioning of linear systems. All these components are necessary for the accurate simulation of flows over complex terrain.

The original contribution is the new least-squares based cell-centered gradient reconstruction algorithm based on QR decomposition that minimizes required operations during variable gradient update. Next we give new generalized formulation of some well known diffusion term approximation approaches for skewed cell arrangements, used widely in CFD codes. This generalization, dependent on a smooth parameter enables formulation of new approximations, which will be demonstrated. A different family of diffusion term approximations which improve approximations in case of the *intersection point offset* (a notion defined in Section 3) is improved and two new diffusion term approximation approaches are formulated, owing to the previous insights from the methods for skewed meshes. New diffusion schemes give improved accuracy and convergence characteristics relative to schemes that only treat cell skewness. Finally, a widely used solver for linear systems originating from the discretization of conservation equations on structured grids – the SIP solver [24], is used as a preconditioner for the members of Krylov subspace family of solvers (CG and Bi-CGSTAB), with tests demonstrating superior results compared to common incomplete factorization preconditioners.

Discretization makes no assumptions of grid topology admitting unstructured meshes with arbitrarily shaped cells, making it applicable in general purpose CFD codes. We assumed that grid is structured only when applying mentioned preconditioner. The fact that the improvement present in this study may be implemented through minor changes into general purpose CFD codes suggests that the advancements proposed here may significantly influence the way flows over real terrain are simulated in the future.

For the purpose of testing the proposed algorithm we have introduced the artificial grid distortions in well known benchmark cases. The grid distortion is introduced systematically, and is controlled by a parameter. These distorted meshes are designed to have a series of unfavorable features, all usually present in real-life flow-over-complex-terrain applications, such as cell skewness, grid-line discontinuity, and misalignment with flow direction. After presenting cases where artificial



grid distortions are introduced, the real applications are shown. Finally, to demonstrate potential of the improved numerical method for flows over real complex terrain, we present results of flow simulation over Bolund hill [25,11].

The organization of the paper is the following. After an overview of the governing equations in Section 2, the presentation of the numerical method is given in Section 3. The treatment of the cell-centered gradients is detailed in Section 3.1 and of the new diffusion term approximation approach in Section 3.3. Finally, a set of validation tests is presented and analyzed in Section 4 to evaluate the actual benefit of the present method in the problems involving flows over complex terrains.

## 2. Governing equations

We briefly go over the mathematical model used in this study.

In a turbulent incompressible viscous flow, the velocity field may be determined by the Reynolds-averaged Navier–Stokes equations

$$\frac{\partial U_j}{\partial x_j} = 0, \quad (1)$$

$$\rho \frac{\partial U_i}{\partial t} + \rho U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (\mu + \mu_t) \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \right], \quad (2)$$

with appropriate initial and boundary conditions, where  $U_i$  denotes mean velocity vector,  $p$  – pressure,  $\rho$  – density and  $\mu$  – molecular dynamic viscosity,  $x_j$  is spatial coordinate in Cartesian coordinate system, and  $i, j = 1, 2, 3$  are Cartesian component indices.

Boussinesq assumption is evoked for the Reynolds stresses, which results in appearance of turbulent viscosity  $\mu_t$ , which is evaluated from a chosen turbulence model. Two-equation  $k - \epsilon$  turbulence model gives the following form for turbulence viscosity,

$$\mu_t = \rho C_\mu \frac{k^2}{\epsilon}. \quad (3)$$

Variants of  $k - \epsilon$  turbulence model used in this paper are Realizable [26], and RNG [27] models. For laminar flows, turbulence viscosity disappears, giving standard form of Navier–Stokes equations for incompressible viscous flows.

## 3. Numerical procedure

The proposed method is based on the cell-centered, collocated variable arrangement, especially adapted for grids consisting of highly distorted computational cells. The finite volume procedure presented herein can be used for arbitrary unstructured meshes without any changes. The choice whether structured or arbitrary unstructured meshes will be used depends exclusively on the code's data structure. The choice of the grid type, however, limits the use of certain linear solvers and preconditioners. The highly efficient preconditioner used in the later section (Section 3.10) is suitable only for the structured grids.

Fig. 1 shows typical computational grid-cell arrangements. During discretization we consider computational grid, with a cell  $P$ , and its neighbors  $P_j$  from which it is divided by faces  $j$ , where  $j = 1, nf$ , and  $nf$  is the total number of faces of the current cell. A variable with index  $P$  always denotes a value at the cell-center of the current cell, and a variable with index  $P_j$  the cell-centered value at the neighbor cell. The  $\mathbf{d}_{pp_j}$  is distance vector between cell centers of two adjacent cells,  $\mathbf{s}_j$  is cell face area vector and  $\mathbf{n}$  is cell face unit normal. Angle  $\theta$ , between unit normal  $\mathbf{n}$  and cell-center distance vector  $\mathbf{d}_{pp_j}$  is important for the present algorithm as it quantifies the cell face skewness. The maximum normals skewness calculated as  $\max[\tan(\theta)_j, j = 1, nf]$  is used to quantify distortion due to skewness at cell level. Another important value that characterizes the non-orthogonality is 'intersection point offset' i.e. the offset of the cell-face center  $j$  and the point of the intersection of cell-face and line in direction of  $\mathbf{d}_{pp_j}$ , denoted as  $j'$ . While some algorithms are devoted to the improvements related to the mesh skewness, this paper addresses the general situation where both skewness, and the intersection-point offset is present, e.g. Fig. 1(a).

To systematize the approximation of the governing equations (1) and (2), we cast them into an integral form of a general conservation law,

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \phi dV + \int_S \rho \phi \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS = \int_S \Gamma_\phi \nabla \phi \cdot \mathbf{n} dS + \int_V q_\phi^V dV + \int_S \mathbf{q}_\phi^S \cdot \mathbf{n} dS, \quad (4)$$

where  $\phi$  is either a scalar, vector or tensor component to which conservation law is applied. The two terms on the left are the transient and convection term, while the diffusion term, and volume and surface source terms are shown on the right. Variables figuring in this equation are: fluid density  $\rho$ , time  $t$ , fluid velocity vector  $\mathbf{u}$ ,  $\Gamma_\phi$  is diffusion coefficient, and finally volume and surface source terms  $q_\phi^V$  and  $\mathbf{q}_\phi^S$ , where surface term is a vector quantity.

In the following sections, a finite-volume approximation of all terms of the above equation is treated. All volume and surface integrals are approximated using the second-order accurate mid-point rule. We work with Cartesian vector and tensor components of all the dependent variables.

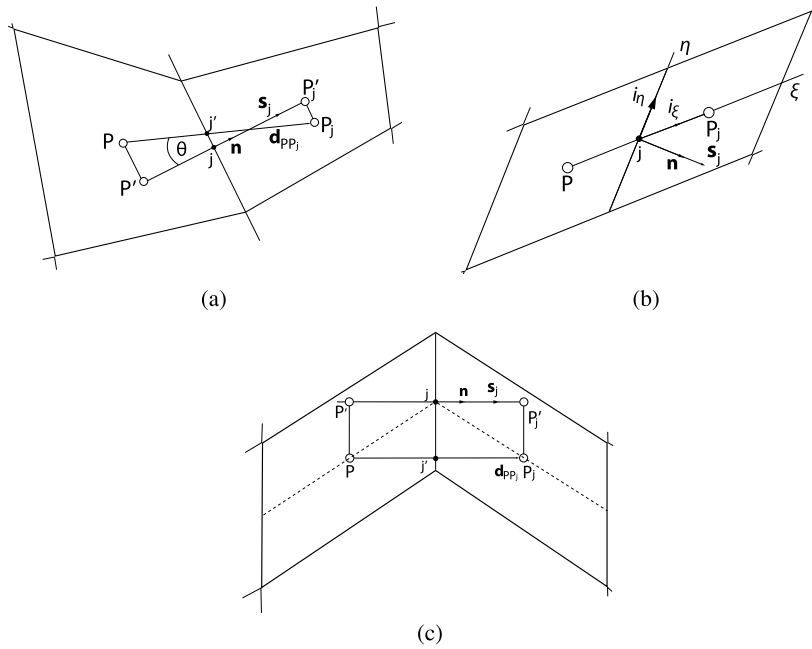


Fig. 1. The cell types found on non-orthogonal grids.

### 3.1. Cell-centered gradient reconstruction

For computations of cell-centered gradients we can formulate the overdetermined problem which can be solved in least-squares sense,

$$\mathbf{G} \cdot \nabla \phi = \mathbf{f}, \tag{5}$$

where

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{P_1} - \mathbf{x}_P \\ \mathbf{x}_{P_2} - \mathbf{x}_P \\ \dots \\ \mathbf{x}_{P_j} - \mathbf{x}_P \\ \dots \\ \mathbf{x}_{P_{n_f}} - \mathbf{x}_P \end{bmatrix}, \quad \nabla \phi = \begin{bmatrix} \partial \phi / \partial x_1 \\ \partial \phi / \partial x_2 \\ \partial \phi / \partial x_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} \phi_{P_1} - \phi_P \\ \phi_{P_2} - \phi_P \\ \dots \\ \phi_{P_j} - \phi_P \\ \dots \\ \phi_{P_{n_f}} - \phi_P \end{bmatrix}. \tag{6}$$

The matrix  $\mathbf{G}$  consists of mesh geometry data which is available in the pre-processing phase. Its three columns are spatial distances between cell-centers of the present  $P$  and neighbor cell  $P_j$ , along three coordinate directions.

To find a solution  $\nabla \phi$  to the overdetermined problem (5), which minimizes the Euclidean norm, one first needs to find the QR factorization of  $\mathbf{G}$ . The QR factorization of matrix  $\mathbf{G}$  can be produced using LAPACK routine DGEQRF [28]. Actually, this routine does not return the  $m \times m$  orthogonal matrix  $\mathbf{Q}$ , but the Householder reflectors  $\mathbf{H}_1, \dots, \mathbf{H}_3$  ( $\mathbf{G}$  has only three columns in 3D formulation of the algorithm), and  $\mathbf{Q}$  matrix can be recovered as the product of these vectors.

For our purpose the following relations are important:

$$\mathbf{G} = \mathbf{QR} = \mathbf{Q} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1 \\ \mathbf{0}_{m-n,n} \end{bmatrix} = [\mathbf{Q}_1 \mathbf{Q}_2] \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1 \\ \mathbf{0}_{m-n,n} \end{bmatrix} = \mathbf{Q}_1 \mathbf{R}_1, \tag{7}$$

where  $\mathbf{R}_1$  is an  $n \times n$  upper triangular matrix, and  $\mathbf{Q}_1$  is of size  $m \times n$ . We get  $\mathbf{Q}_1$  by retaining first  $n$  columns of the orthogonal matrix  $\mathbf{Q}$ , while the other columns make matrix  $\mathbf{Q}_2$ . The  $\mathbf{0}_{m-n,n}$  is a zero matrix of size  $(m-n) \times n$ . The  $\mathbf{Q}_1 \mathbf{R}_1$  is known as ‘thin’ [29, p. 230], or ‘reduced’ [30, p. 50] QR factorization of  $\mathbf{G}$ .

A very robust and fast procedure for calculation of the gradients can be achieved using the ‘thin’ QR factorization if we choose to store  $\mathbf{R}_1^{-1} \mathbf{Q}_1^T$  which is a  $3 \times n_f$  matrix consisting only of geometric factors and needs to be computed only once at the beginning of simulation. In that case, computation of cell-centered gradients amounts only to performing an update of  $\mathbf{f}$  vector and a scalar multiplication, giving the solution for the gradient vector at each cell,

$$\nabla \phi = (\mathbf{R}_1^{-1} \mathbf{Q}_1^T) \mathbf{f}. \tag{8}$$

We would like to remind that compared to the direct matrix inverse, inverse solutions using QR decomposition are more numerically stable, as evidenced by their reduced condition numbers [29]. This is particularly important when robust algorithm for highly non-orthogonal meshes is sought for.

Elements of the  $\mathbf{D}$  ( $d \times n_f$ ) matrix, where  $\mathbf{D} = \mathbf{R}_1^{-1} \mathbf{Q}_1^T$ , and  $d = 3$  for 3D problems, when thin QR decomposition is used, can be formed explicitly using the following expressions:

$$D_{1i} = Q_{i1}/R_{11} - R_{12}Q_{i2}/(R_{11}R_{22}) + (Q_{i3}R_{12}R_{23} - R_{13}R_{22})/(R_{11}R_{22}R_{33}), \quad (9)$$

$$D_{2i} = Q_{i2}/R_{22} - R_{23}Q_{i3}/(R_{22}R_{33}), \quad (10)$$

$$D_{3i} = Q_{i3}/R_{33}, \quad i = 1, n_f. \quad (11)$$

### 3.2. Convection term

The convection term is discretized as

$$C_2(\phi) = \int_S \rho \phi \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS \approx \sum_j F_j \bar{\phi}_j, \quad (12)$$

where  $F_j$  are mass fluxes across cell face, calculated explicitly using the velocity field from the previous iteration. This lagging is a source of an additional error, proportional to the time-step size [31]. It is generally considered that it has a smaller influence on convergence than pressure–velocity decoupling. When pressure–velocity (SIMPLE) iterations converge, this error disappears.

Face value  $\bar{\phi}_j$  can be approximated using linear interpolation (central differencing – CDS) with a correction due to the intersection-point offset [32,33] as:

$$\bar{\phi}_j = \lambda_j \phi_P + (1 - \lambda_j) \phi_{P_j} + \bar{\nabla} \phi \cdot \mathbf{d}_{j'j}, \quad (13)$$

where  $\lambda_j = \frac{\mathbf{d}_{jP_j}}{\mathbf{d}_{PP_j}}$  is the face interpolation factor (see description of Fig. 1 for the definition of distances  $\mathbf{d}_{j'j}$ ,  $\mathbf{d}_{jP_j}$  and  $\mathbf{d}_{PP_j}$ ). The third term on the right is a non-orthogonality correction, which takes into account the fact that the straight line connecting nodes  $P$  and  $P_j$  (line  $\xi$ ) doesn't intersect the cell face at cell-face center  $j$ , but goes through some other point, denoted as  $j'$ , instead (Fig. 1(a)). This situation was previously denoted as the intersection-point offset, and its correction evoked in (13) is crucial in the current procedure.

Linear interpolation of cell-centered gradients is defined by

$$\bar{\nabla} \phi = \lambda_j \nabla \phi_P + (1 - \lambda_j) \nabla \phi_{P_j}. \quad (14)$$

The convection term defined using first order upwind differencing scheme (UDS) is

$$C_1(\phi) = \int_S \rho \phi \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS \approx \sum_j \max(F_j, 0) \phi_P - \min(F_j, 0) \phi_{P_j}. \quad (15)$$

The final form of the convection term discretization is presented in a deferred correction manner [34], treating first-order accurate upwind convection term implicitly and the difference of high-order and first-order approximation, explicitly.

$$C_L(\phi) = C_1(\phi), \quad (16)$$

$$C_R(\phi) = \gamma (C_2(\phi) - C_1(\phi)), \quad (17)$$

where  $\gamma$  is the blending factor ( $0 \leq \gamma \leq 1$ ). If blending factor has value less than 1, the leading truncation error of pure upwind discretization, which is of diffusive type, stabilizes interpolation under high Peclet numbers. In that case the convective term discretization is less than second order accurate. For central differencing, the leading truncation error is of dispersion type, and the remedy for oscillations under high Peclet numbers is to refine the mesh.

The alternative to the above propositions is to calculate  $\bar{\phi}_j$  via high order bounded interpolation, presented here in flux-limiter form.

#### 3.2.1. Flux limiter formulation

The high order correction to the first-order upwind interpolated value is defined as a general, non-linear weighted average of upwind and centered gradient [35],

$$\bar{\phi}_j = \phi_C + \Psi(r) (\nabla \phi)_u \cdot \bar{\mathbf{d}}, \quad (18)$$

where  $\bar{\mathbf{d}} = (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_C)$ , and  $\mathbf{x}$  denotes the spatial position vector of a point. The  $\Psi(r)$  is flux limiter function which is defined in terms of the gradient ratio  $r$ . The gradient ratio is defined as

$$r = (\nabla \phi)_j / (\nabla \phi)_u \quad (19)$$

and

$$(\nabla\phi)_j = \frac{\phi_D - \phi_C}{|\mathbf{x}_D - \mathbf{x}_C|}, \quad (\nabla\phi)_u = \frac{\phi_C - \phi_U}{|\mathbf{x}_C - \mathbf{x}_U|}. \quad (20)$$

In the above expressions, indexes *C*, *D*, and *U* denote centered, downwind, and upwind cell center respectively, which are defined in terms of mass flow sign  $\text{sgn}(F_j/|F_j|)$  at the cell face in question. The  $(\nabla\phi)_u$  term is face-centered gradient value at the face located between center and upwind cell.

The formulation of the gradient ratio can be quite complicated if one wishes to take into account the grid non-orthogonality. Our algorithm follows the approach outlined in [33].

The gradient ratio function takes simplified form when cell-center distances are uniform,

$$r = \frac{\phi_D - \phi_C}{\phi_C - \phi_U}, \quad (21)$$

which we will use after linearly interpolating the value at *U* from the closest cell center. The position of *U* is found in such way that vector identity  $\mathbf{d}_{CU} = -\mathbf{d}_{CD}$  is satisfied. The last step enables substantial simplifications in the setting of non-orthogonal grids.

We may now define two cases:

- when  $\text{sgn}(F_j/|F_j|) = 1$

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_C &= \mathbf{x}_P, \\ \mathbf{x}_D &= \mathbf{x}_{P_j}, \\ \mathbf{x}_U &= \mathbf{x}_C + (\mathbf{x}_C - \mathbf{x}_D) = \mathbf{x}_P + (\mathbf{x}_P - \mathbf{x}_{P_j}), \\ \phi_C &= \phi_P, \\ \phi_D &= \phi_{P_j}, \\ \phi_U &= \phi_{P_k} + \nabla\phi_{P_k} \cdot \mathbf{d}_{P_kU}, \end{aligned} \quad (22)$$

- when  $\text{sgn}(F_j/|F_j|) = -1$

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_C &= \mathbf{x}_{P_j}, \\ \mathbf{x}_D &= \mathbf{x}_P, \\ \mathbf{x}_U &= \mathbf{x}_C + (\mathbf{x}_C - \mathbf{x}_D) = \mathbf{x}_{P_j} + (\mathbf{x}_{P_j} - \mathbf{x}_P), \\ \phi_C &= \phi_{P_j}, \\ \phi_D &= \phi_P, \\ \phi_U &= \phi_{P_k} + \nabla\phi_{P_k} \cdot \mathbf{d}_{P_kU}. \end{aligned} \quad (23)$$

Finally, the higher-order bounded interpolation of dependent variable, to cell face, using flux limiter form is written as

$$\bar{\phi}_j = \phi_P + \Psi(r)(\phi_P - \phi_U)(1 - \lambda_j), \quad (24)$$

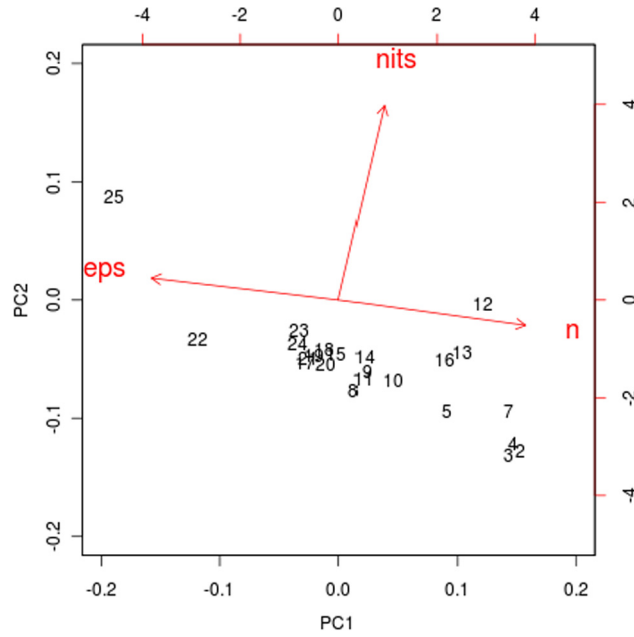
where  $\lambda_j$  is the face interpolation factor defined for cell-face ‘*j*’, as in Eq. (13).

Waterson and Deconick [35] argue that most limiters fall into the following two categories: polynomial ratio (PR) limiters, which offer the possibility of smooth, continuous limiter functions without discontinuous switching, thereby supporting convergence; and piecewise-linear (PL) limiters that switch between linear schemes so as to produce bounded versions of existing linear schemes. The disadvantage is that their discontinuous nature may induce convergence problems. In the same article authors provide an extensive list of convective schemes, presented in flux-limiter form.

To narrow down the choice of convective schemes that should be considered for implementation, we have performed a Principal Component Analysis (PCA) of the results presented in [35], Fig. 2. The variables considered were: error (*eps*), order of the scheme (*n*), number of iterations needed to satisfy desired convergence tolerance (*nits*). We have used bold typeface in the caption to distinguish a number of schemes. The classic  $\kappa$  schemes CUI, Fromm, and QUICK have the best performance for the given case. SMART (bounded QUICK) scheme produces low numerical error, but showed slow convergence. The Koren and Bounded Linear Upwind (BLUI) had a similar numerical error as SMART but needed substantially smaller number of iterations to converge. In terms of performance, MUSCL [36] scheme is the closest Total Variation Diminishing (TVD) scheme to the unbounded, classical  $\kappa$  schemes. First-order upwind (FPU) scheme is not visible in a close-up view of the PCA biplot as an outlier (in terms of low order and high numerical error).

Based on these results we have chosen MUSCL scheme as a representative of piecewise-linear schemes, having the highest overall score in PCA analysis,

$$\Psi(r) = \max[0, \min 2r, 0.5 + 0.5r, 2]. \quad (25)$$



**Fig. 2.** Performance comparison of convection schemes. 1-FOU, 2-CUI, 3-Fromm, 4-QUICK, 5-LUI, 6-CDS, 7-MUSCL, 8-OSPRE, 9-H-CUI, 10-Harmonic, 11-SPL- $\frac{1}{3}$ , 12-SMART, 13-Koren, 14-H-QUICK, 15-SMARTER, 16-BLUI(SOU), 17-UMIST, 18-GPA- $\frac{1}{2}$ , 19-GPR- $\frac{1}{2}$ , 20-GPR- $\frac{1}{3}$ , 21-vanAlbada, 22-Minmod, 23-GVA- $\frac{1}{2}$ , 24-GVA- $\frac{1}{3}$ , 25-Superbee, 26-BCDS.

### 3.3. Diffusion term

The diffusion flux is approximated using the mid-point rule,

$$D(\phi) = \int_S \Gamma_\phi \nabla \phi \cdot \mathbf{n} dS \approx \sum_j \Gamma_{\phi,j} \overline{(G_2(\phi))}_j \cdot \mathbf{n}_j S_j \quad (26)$$

The second order gradient defined at the cell face center, projected on the cell-face normal

$$\overline{(G_2(\phi))}_j \cdot \mathbf{n}_j \equiv \nabla \phi_j \cdot \mathbf{n},$$

is of interest here. For that purpose, we need a useful abstraction of the grid non-orthogonality.

As often done, we may assume that the line connecting the nodes of neighbor cells passes through the cell-face center (Fig. 1(b)) [5,22,31,33,37,38]. Subsequently the cross-diffusion term is introduced in a deferred correction manner, which disappears when the grids are orthogonal. In one successful approach, cross-diffusion may be implemented in the form of minimal, orthogonal or over-relaxed correction. The proper mental picture for a grid geometry where such approach is useful is the one of the ‘inclined cavity’. This is often the case in literature where such discretization is tested.

Another abstraction, with wider applicability, deals with geometries where line connecting cell centers does not pass through the cell face center (Figs. 1(a), 1(c)) i.e. when the, previously defined, intersection point offset is present. Then the auxiliary nodes are used, enabling straightforward calculation of face-centered gradient in direction of cell-face normal [39].

It will be shown later (in Section 4.3) that the grids generated by algebraic extrusion from terrain elevation data, possess such features that the both of these cases are present. Cells in vertical direction fall into the first category, while in other directions the second category provides better abstraction.

### 3.4. Calculation of a gradient at the cell-face center – the ‘Power of $\cos(\theta)$ relaxation approach’

For skewed meshes (Fig. 1(b)), resulting vector of normal gradient is represented as a vector sum of two components, one along line connecting cell-centers (line  $\xi$ ), and the correction component (along  $\tau = (\mathbf{n} - \mathbf{i}_\xi)$ ),

$$\nabla \phi_j \cdot \mathbf{n} \equiv \nabla \phi_n = \overline{(\nabla \phi)}_j \mathbf{i}_\xi + \frac{\mathbf{S}_j}{\mathbf{S}_j \cdot \mathbf{d}_{PP_j}} \left[ (\phi_{P_j} - \phi_P) - \overline{(\nabla \phi)}_j \cdot \mathbf{d}_{PP_j} \right] (\mathbf{n} - \mathbf{i}_\xi), \quad (27)$$

where  $\overline{(\nabla \phi)}_j$  represent face interpolated values of cell-centered gradients obtained using (14).

This is known as the orthogonal correction approach and is used in [5,22,33,37,38]. The second term on the right is explicitly treated non-orthogonal (cross-diffusion) term which becomes zero in cases when  $\mathbf{i}_\xi = \mathbf{n}$ .

If the correction vector is written in overrelaxed approach  $\tau = (n - \frac{1}{\cos\theta} \mathbf{i}_\xi)$  [31], normal gradient is written as:

$$\nabla\phi_n = \overline{(\nabla\phi)}_j \frac{1}{\cos\theta} \mathbf{i}_\xi + \frac{\mathbf{S}_j}{\mathbf{S}_j \cdot \mathbf{d}_{pp_j}} \left[ (\phi_{P_j} - \phi_P) - \overline{(\nabla\phi)}_j \cdot \frac{1}{\cos\theta} \mathbf{d}_{pp_j} \right] \left( \mathbf{n} - \frac{1}{\cos\theta} \mathbf{i}_\xi \right) \quad (28)$$

Another variant is the so-called minimal correction approach [31] which reads

$$\nabla\phi_n = \overline{(\nabla\phi)}_j \cos\theta \mathbf{i}_\xi + \frac{\mathbf{S}_j}{\mathbf{S}_j \cdot \mathbf{d}_{pp_j}} \left[ (\phi_{P_j} - \phi_P) - \overline{(\nabla\phi)}_j \cdot \cos\theta \mathbf{d}_{pp_j} \right] \left( \mathbf{n} - \cos\theta \mathbf{i}_\xi \right) \quad (29)$$

When written in this way, by using angle  $\theta$ , instead the vectorial expressions involving scalar products as in [31], a natural way to generalize previous expressions becomes apparent

$$\nabla\phi_n = \overline{(\nabla\phi)}_j (\cos\theta)^{nrelax} \mathbf{i}_\xi + \frac{\mathbf{S}_j}{\mathbf{S}_j \cdot \mathbf{d}_{pp_j}} \left[ (\phi_{P_j} - \phi_P) - \overline{(\nabla\phi)}_j \cdot (\cos\theta)^{nrelax} \mathbf{d}_{pp_j} \right] \left( \mathbf{n} - (\cos\theta)^{nrelax} \mathbf{i}_\xi \right) \quad (30)$$

This general expression is denoted as the *Power of  $\cos\theta$  relaxation approach*. When the exponent  $nrelax$  takes values  $nrelax = 0$ ,  $nrelax = -1$ ,  $nrelax = 1$ , the orthogonal, overrelaxed and minimal correction are obtained. In this way, by using any real value from the range  $[-1, 1]$  we are able generate a whole family of face gradient approximations. The values outside of this range have also been tested and they did not give satisfactory results, although that possibility has been verified.

For the cell arrangements where the intersection point offset is present we use different approach. The cell-face centered gradient of dependent variable can be defined, in general, as

$$\nabla\phi_n = \frac{\phi_{P'_j} - \phi_{P'}}{|\mathbf{x}_{P'_j} - \mathbf{x}_{P'}|} \mathbf{n} = \frac{\phi_{P'_j} - \phi_{P'}}{|\mathbf{d}_{pp_j}| \cos\theta} \mathbf{n}. \quad (31)$$

The auxiliary nodes  $P'$  and  $P'_j$  are used to enable consistent second-order approximation in the case of highly non-orthogonal grids [39] and are easily found using

$$\mathbf{x}_{P'} = \mathbf{x}_j - [(\mathbf{x}_{j'} - \mathbf{x}_P) \cdot \mathbf{n}] \mathbf{n}, \quad \mathbf{x}_{P'_j} = \mathbf{x}_j - [(\mathbf{x}_{j'} - \mathbf{x}_{P_j}) \cdot \mathbf{n}] \mathbf{n}, \quad (32)$$

where  $j$  is usual notation for cell-face center, which should to be distinguished from  $j'$  – the point of intersection of line  $\xi$  with the cell-face. The values at this points are found by assuming the linear variation in a vicinity of cell-centers, using cell-centered values and gradients

$$\phi_{P'} = \phi_P + \nabla\phi_P \cdot \mathbf{d}_{P'P}, \quad \phi_{P'_j} = \phi_{P_j} + \nabla\phi_{P_j} \cdot \mathbf{d}_{P'_jP_j}, \quad (33)$$

where  $\mathbf{d}_{P'P} = (\mathbf{x}_{P'} - \mathbf{x}_P)$  and  $\mathbf{d}_{P'_jP_j} = (\mathbf{x}_{P'_j} - \mathbf{x}_{P_j})$ .

With previous expression cell-face gradient along normal cast into the following form

$$\nabla\phi_n = \frac{\phi_{P_j} - \phi_P}{|\mathbf{d}_{pp_j}| \cos\theta} \mathbf{n} + \frac{\nabla\phi_{P_j} \cdot \mathbf{d}_{P'_jP_j} - \nabla\phi_P \cdot \mathbf{d}_{P'P}}{|\mathbf{d}_{pp_j}| \cos\theta} \mathbf{n}. \quad (34)$$

The approximation of the cell face gradient for cell arrangements with the presence of intersection point offset, can be written in a form similar to previous expressions

$$\nabla\phi_n = \overline{(\nabla\phi)}_j \mathbf{i}_\xi + \frac{\mathbf{S}_j}{\mathbf{S}_j \cdot \mathbf{d}_{P'P'_j}} \left[ (\phi_{P_j} + \nabla\phi_{P_j} \cdot \mathbf{d}_{P_jP'_j} - \phi_P - \nabla\phi_P \cdot \mathbf{d}_{PP'} - \overline{(\nabla\phi)}_j \cdot \mathbf{d}_{P'P'_j}) \right] \left( \mathbf{n} - \mathbf{i}_\xi \right). \quad (35)$$

When written in this form, a generalized expression based on the *Power of  $\cos\theta$  relaxation approach* can be written

$$\nabla\phi_n = \overline{(\nabla\phi)}_j (\cos\theta)^{nrelax} \mathbf{i}_\xi + \frac{\mathbf{S}_j}{\mathbf{S}_j \cdot \mathbf{d}_{pp_j}} \times \left[ (\phi_{P_j} + \nabla\phi_{P_j} \cdot \mathbf{d}_{P_jP'_j} - \phi_P - \nabla\phi_P \cdot \mathbf{d}_{PP'} - \overline{(\nabla\phi)}_j \cdot (\cos\theta)^{nrelax} \mathbf{d}_{P'P'_j}) \right] \left( \mathbf{n} - (\cos\theta)^{nrelax} \mathbf{i}_\xi \right) \quad (36)$$

By using different values of the relaxation exponent  $nrelax$  we can produce, in the case of offset grids, the equivalent expressions to the Orthogonal ( $nrelax = 0$ ), Overrelaxed ( $nrelax = -1$ ) and Minimal ( $nrelax = 1$ ) correction as done with the skewed meshes. These schemes are denoted as 'offset' schemes and their generalization in the form of (36) represents the original contribution of this study.

We arrive at the final form of diffusion term approximation, which is written as

$$D_{L,j} = \bar{\Gamma}_{\phi,j} \frac{|\mathbf{s}_j|^2}{\mathbf{s}_j \cdot \mathbf{d}_{ppj}} (\phi_{P_j} - \phi_P), \quad (37)$$

$$D_{R,j} = \bar{\Gamma}_{\phi,j} \left( \nabla \phi_n \cdot \mathbf{s}_j - \frac{|\mathbf{s}_j|}{|\mathbf{d}_{ppj}|} \overline{(\nabla \phi)_j} \cdot \mathbf{d}_{ppj} \right), \quad (38)$$

where  $D_{L,j}$  and  $D_{R,j}$  are implicitly and explicitly treated part of diffusion flux at face  $j$ .

In the test performed later these approaches to diffusion term approximation will be evaluated in case of distorted grids.

### 3.5. Source terms

The volume sources are determined using mid-point integration rule,

$$Q_V(\phi) = \int_V q_\phi dV \approx q_{\phi_P} V_P. \quad (39)$$

Pressure gradient is treated as a surface source. First cell-centered gradients are obtained using the least-squares procedure, but these values are not used directly. Instead, they are used in (13) to get accurate values of pressure at cell-faces

$$p_j = \lambda_j p_P + (1 - \lambda_j) p_{P_j} + \overline{\nabla p} \cdot \mathbf{d}'_{jj}, \quad (40)$$

then the pressure source is found using,

$$Q_{P,i}^p = - \int_S p \mathbf{i} \cdot \mathbf{n} dS \approx - \sum_j p_j S_j^i, \quad (41)$$

where  $\mathbf{i} = \{i, j, k\}$  is the Cartesian unit vector. With the aid of (40), the cell centered pressure gradient used throughout the solution algorithm is defined by

$$\nabla p_P = \frac{1}{V_P} \sum_j p_j S_j. \quad (42)$$

### 3.6. Unsteady terms

For numerical integration of unsteady terms over control volume, a midpoint rule is used. Then, the time derivative is approximated in finite difference manner, using second order backward differentiation formula (BDF2),

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \phi dV \approx \frac{3(\rho_P \phi_P V)^n - 4(\rho_P \phi_P V)^{n-1} + (\rho_P \phi_P V)^{n-2}}{2\Delta t}, \quad (43)$$

where  $n$ ,  $n-1$ , and  $n-2$  represent indexes of three consecutive time-step values, and  $dt$  is a time-step size.

### 3.7. Boundary conditions

Periodic boundary conditions are established by logically connecting the cells that lie at the opposite ends of computational domain. For unstructured grids and general sparse matrix storage, this amounts to changes in sparsity pattern of the system matrix. On structured grid with diagonal storage of matrix coefficients this is realized by a fill-in of those off-diagonal coefficient array places that would otherwise be left initialized with zero value, since there is no cell neighbor that would fill-in that value. For sparse linear solver written for diagonal storage this change is seamless.

For the flow over complex terrains, important type of boundary conditions is a rough wall boundary condition for velocity. For smooth wall we use standard boundary-condition based on law-of-the-wall:

$$\frac{U}{u_\tau} = \frac{1}{\kappa} \ln(Ey^+), \quad (44)$$

where the von-Karman constant  $\kappa = 0.41$ , constant  $E = 8.432$ , and non-dimensional distance from wall  $y^+ = \frac{yu_\tau}{\nu}$ . In the case of the rough wall boundary condition reads

$$\frac{U}{u_\tau} = \frac{1}{\kappa} \ln \left[ \min(E, \frac{E_R}{E^*}) y^+ \right], \quad (45)$$

where  $E^* = \frac{C_\mu^{1/4} k^{1/2} y_0}{\mu}$ ,  $C_\mu = 0.09$ ,  $E_R = 30$  and  $y_0$  is the surface roughness.

### 3.8. Solution procedure

Having in mind previous considerations, we can now write the final form of the approximated general conservation law equation (4) as,

$$\frac{d}{dt}(\rho_p V_P \phi_P) + \sum_j C_{L,j} - \sum_j D_{L,j} = \sum_j D_{R,j} - \sum_j C_{R,j} + q_{\phi,P}^V V_P + \sum_j \mathbf{q}_{\phi,j}^S \cdot \mathbf{n} S_j \quad (46)$$

The resented algorithm follows segregated approach, in which equations for all dependent variables are solved sequentially. The linear system coefficients and sources are calculated using the values from the previous iteration or time-step. The stopping criteria for inner iterations is defined using relative  $L_1$  norm of the residual. The initial residual is used to normalize the residual norm.

### 3.9. Pressure–velocity coupling

The pressure–velocity coupling is established through iterative solution procedure, based on SIMPLE algorithm with multiple non-orthogonal correctors. First we define mass flux through cell-face  $j$  based on tentative velocity field,

$$F_j^* = \rho_j \mathbf{u}_j \cdot \mathbf{S}_j = \rho_j \mathbf{u}_j \cdot \mathbf{n} S_j. \quad (47)$$

To produce cell-face velocity, the face-interpolated velocity from cell centers is corrected as follows:

$$\mathbf{u}_j \cdot \mathbf{n} = \overline{(\mathbf{u})}_j \cdot \mathbf{n} - \left(\frac{V}{a_P}\right)_j \left[ \nabla p_j \cdot \mathbf{n} - \overline{(\nabla p)}_j \cdot \mathbf{n} \right]. \quad (48)$$

In this expression we resorted to Rhie–Chow interpolation [40]. The ‘spirit of Rhie–Chow’<sup>1</sup> is present when extracting cell-centered pressure derivatives and adding staggered terms [41].

Higher grid distortions enhance the burden on Rhie–Chow method, very often bringing the whole procedure to the edge of usability [33]. The critical component in the algorithm is an accurate estimate of pressure-gradients. Therefore, we will use previously defined expression for cell face-centered, normal gradient  $\nabla \phi_n$ , (34).

$$\mathbf{u}_j \cdot \mathbf{n} = \overline{(\mathbf{u})}_j \cdot \mathbf{n} - \left(\frac{V}{a_P}\right)_j \left[ \frac{p_{P_j} - p_P}{|\mathbf{d}_{PP_j}| \cos \theta} \mathbf{n} + \frac{\nabla p_{P_j} \cdot \mathbf{d}_{P_j P_j} - \nabla p_P \cdot \mathbf{d}_{P'P}}{|\mathbf{d}_{PP_j}| \cos \theta} \mathbf{n} - \overline{\nabla p}_j \cdot \mathbf{n} \right], \quad (49)$$

where  $\overline{\nabla p}_j$  is simple arithmetic average of two cell centered values. The last expression is used in (47) to give operative tentative mass-fluxes.

Since tentative velocities do not satisfy incompressibility constraint, mass fluxes result in a mass source. When mass-flux corrections are applied, continuity requirement is finally satisfied. We can write this statement as

$$\sum_{j=1}^{nf} F_j^* + F_j' = 0, \quad (50)$$

where  $F_j' = \rho_j \mathbf{u}_j' \cdot \mathbf{n} S_j$  signifies mass flux based on the normal component of face velocity correction. Using the cell face velocity corrections of SIMPLE algorithm,

$$\mathbf{u}_j' \cdot \mathbf{n} = -\left(\frac{V}{a_P}\right)_j \overline{(\nabla p')} \cdot \mathbf{n}, \quad (51)$$

and employing the expression for the face normal gradient of the pressure correction (34), we obtain the expression for mass flux corrections capable of non-orthogonal grid treatment,

$$F_j' = -\rho_j S_j K_j \left[ \frac{p'_{P_j} - p'_{P'}}{|\mathbf{d}_{PP_j}| \cos \theta} \mathbf{n} + \frac{\nabla p'_{P_j} \cdot \mathbf{d}_{P_j P_j} - \nabla p'_P \cdot \mathbf{d}_{P'P}}{|\mathbf{d}_{PP_j}| \cos \theta} \mathbf{n} \right], \quad (52)$$

where

$$K_j = \frac{1}{2} \left[ \left(\frac{V}{a_P}\right)_P + \left(\frac{V}{a_P}\right)_{P_j} \right]. \quad (53)$$

<sup>1</sup> The phrase often used in OpenFOAM community, the reason being ingenious implementation of pressure–velocity coupling which avoids explicit use of usual face mass-flux formula for collocated approach.



If we use shorthand notation for mass imbalance,

$$\sum_{j=1}^{nf} F_j^* = Q_m, \quad (54)$$

we get the pressure correction equation

$$\sum_{j=1}^{nf} F_j' = -Q_m. \quad (55)$$

To avoid extended computational molecule, we use only the first term in square brackets of (52), and the second term representing non-orthogonal correction is ignored in the first pressure-correction solution, and then treated in a deferred correction manner. For that purpose, we introduce additional mass-flux corrections,

$$F_j^{(n)} = -\rho_j S_j K_j \left[ \frac{p_{p'_j}^{(n)} - p_{p'}^{(n)}}{|\mathbf{d}_{pp_j}| \cos \theta} \mathbf{n} + \frac{\nabla p_{p_j}^{(n-1)} \cdot \mathbf{d}_{p'_j p_j} - \nabla p_p^{(n-1)} \cdot \mathbf{d}_{p' p}}{|\mathbf{d}_{pp_j}| \cos \theta} \mathbf{n} \right], \quad (56)$$

which satisfy

$$\sum_{j=1}^{nf} F_j^{(n)} = 0, \quad n = 2, n_{pcorr} + 1, \quad (57)$$

as a consequence of (50), which means that the additional mass flux corrections do not change the overall mass-flux balance of the computational cell, already established by Eq. (50). Note that above the pressure correction The procedure for multiple pressure-correction solution is conducted in the following sequence:

1. Find mass fluxes based on tentative velocities (47) with (49).
2. Form system matrix for the pressure-correction equation, where off-diagonal coefficients are  $a_j^p = -\frac{\rho_j S_j K_j}{|\mathbf{d}_{pp_j}| \cos \theta}$ .
3. Solve pressure correction equation (55).
4. Find cell-centered pressure-correction gradients.
5. Correct mass-fluxes  $F_j = F_j^* - a_j^p (p_{p'_j} - p_p) - a_j^p (\nabla p_{p'_j} \cdot \mathbf{d}_{p'_j p_j} - \nabla p_p \cdot \mathbf{d}_{p' p})$ .
6. Correct velocities  $\mathbf{u} = \mathbf{u}^* - \frac{V}{a_p} \nabla p_p'$  and pressure  $p_p = p_p^* + \alpha_p p_p'$ ,  $0 \leq \alpha_p \leq 1$ .  
Non-orthogonal corrector loop:
7. Create right-hand side vector for non-orthogonal correction equation (57) using the explicit terms of Eq. (52), system matrix coefficients remain the same as for pressure correction equation, and solve.
8. Repeat steps 4 to 6. The change is made in step 5, and mass flux correction at cell face is now  $F_j = F_j - a_j^p (p_{p'_j}^{(n)} - p_p^{(n)}) - a_j^p (\nabla p_{p'_j}^{(n)} \cdot \mathbf{d}_{p'_j p_j} - \nabla p_p^{(n)} \cdot \mathbf{d}_{p' p})$ .

By repeating the steps of a non-orthogonal correction loop we enhance the capability of the underlying algorithm for dealing with highly distorted grids.

### 3.10. Solution of the linear system

Pressure correction equation is a Poisson-type equation with Neumann boundary conditions. Such problems result in a symmetric positive definite system matrix. The Conjugate Gradient (CG), which belongs to Krylov subspace type of methods is usually chosen for such problems. With a suitable preconditioner, the resulting method is referred to as Preconditioned Conjugate Gradient (PCG), and the Incomplete Cholesky with zero fill-in (IC(0)) is most often in use [42].

The Strongly Implicit Procedure [24] and its variants are often employed for solution of linear systems on structured grids. They are particularly written for five, seven or nine-point stencil discretization on structured grids, and are not useful other than in those particular cases. In those circumstances, however, provided that the adjustable parameter  $\alpha$  has been set to optimal value (somewhere between 0.92 and 0.96), this solver provides better results than the baseline solver PCG(IC(0)) [39].

In search for the optimal solution algorithm in terms of accuracy, robustness, and numerical efficiency for the equations resulting in complex terrain simulations, we have decided not to use SIP as a standalone solver but rather as a preconditioner for one of the solvers from Krylov family. The first obvious choice, since we are primarily dealing with symmetric matrices, was CG method. In [39, p. 104] such combination has been mentioned, and it was said that using ILU preconditioner based on SIP gave better results than in the CG(IC(0)) case. No results were presented afterwards to corroborate

that claims. In a comprehensive review such as [42], where a section is devoted to Incomplete factorizations, there is no mentioning of SIP being used as a preconditioner as well.

For comparison, we will consider Incomplete Cholesky preconditioned Conjugate Gradient method with zero fill-in,<sup>2</sup> denoted here CG(IC(0)), as a baseline for our series of tests since it as a typical choice for symmetric positive definite systems.

Subsequently we will consider a preconditioned version of Bi-CGSTAB solver from Krylov family.<sup>3</sup> The solver is very robust and fast but has higher computational cost than CG. After applying SIP preconditioner, we notice that the convergence becomes even faster. In the examples presented later, the Bi-CGSTAB(SIP) solver significantly outperforms other solvers in terms of convergence rates.

The main reason for the better performance of the SIP preconditioner compared to incomplete factorization preconditioners such as ILU(0) and IC(0) seems to be a better approximation of the original system matrix  $A$  by a preconditioner matrix  $M = \bar{L}\bar{U}$ , where  $\bar{L}$  and  $\bar{U}$  are the incomplete (approximate) LU factors of  $A$ .

In incomplete factorization preconditioners (see e.g. [42] for a comprehensive overview) we start by performing the LU decomposition of the original matrix  $A$ , avoiding the fill-in (emergence of non-zero elements on places outside the original sparsity pattern of  $A$ ), a procedure leading to ILU(0) and IC(0). Alternatively we may allow some fill in by various criteria leading to some other preconditioners, more demanding in terms of memory, such as ILU(1) where one additional level of fill-in is allowed, or use more elaborate preconditioners such as the dual threshold  $ILUT(\tau, p)$  by fixing the drop tolerance  $\tau$  and a number  $p$  of fill-ins in each row [44].

SIP takes different approach. It approximates the starting matrix  $A$  by matrix  $M$ , so that it gives LU decomposition where there is no fill-in and no values have to be discarded. We may call this a top-down approach. In particular for structured grids in 3D, there are six additional diagonals in preconditioner matrix  $M$  and the values at these places are approximated by taking into a consideration certain amount of heuristics such as smoothness of the underlying solution [24]. Additional insight into the character of the solution makes SIP also a physics based preconditioner.

A detailed analysis of different preconditioners and their comparative assessment in respect to the SIP solver are left for future studies.

### 3.11. Computational cost

For the current least-squares gradient reconstruction procedure, the computational cost of a single gradient field update for the whole computational domain is  $(\sum_i (2n_{f,i} - 1), i = 1, n_{cells})$  flops per variable, where  $n_{cells}$  is the total number of cells in domain. If the number of cell faces is constant, as in the case of structured grids where  $n_f = 6$  in three-dimensional domains, computational cost of gradient field update is  $11n_{cells}$  flops. This represents an improvement compared to algorithms which solve a small linear system for every cell, during the variable gradient field update. The cost of creation of the matrix  $\mathbf{D}$  (Section 3.1) is not considered since it is done in the preprocessing stage, and the result is stored in memory. The additional memory requirements due to storage of matrix  $\mathbf{D}$  are minor.

In terms of additional CPU time, the linear solver Bi-CGSTAB(SIP) requires almost the same time per iteration as the Bi-CGSTAB(ILU). When compared with standalone SIP solver on structured grids it shows a twofold increase in time per iteration, but this is more than significantly compensated by reducing total number of iterations (reduction is often tenfold).

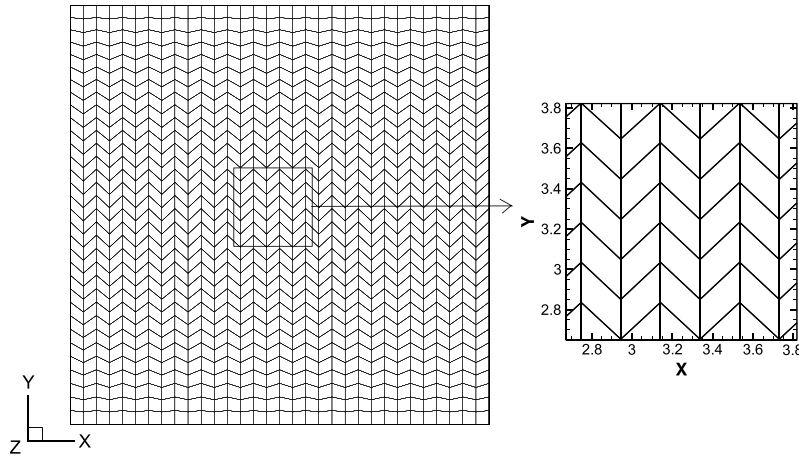
## 4. Numerical examples

In this section, we assess the methodology presented in the paper. The structure of this section is the following:

- Simple test with manufactured solution to show the effectiveness of the gradient reconstruction procedure. Definition of the systematic grid distortion procedure, also used for later example, precedes the test results.
- The periodic flow, with analytical solution is used to assess the accuracy, and convergence rates for non-deformed and deformed grids.
- Laminar flow in a channel with distorted grids. Pressure gradient approximation in wall bounded flow under condition grid deformation is examined.
- Flow over idealized hills. The flow have all the features of the real application case, except the hill shape. Laminar and turbulent cases are tested.
  - Laminar flow over a smooth hill
  - Flow over a triangular hill in turbulent boundary layer
- Real application case. Matching with the experimental results at atmospheric scale is shown.

<sup>2</sup> Preconditioner has the same sparsity pattern as the original matrix.

<sup>3</sup> We note here than in [39, p. 105], the same solver is denoted as CGSTAB although, after detailed inspection, we come to conclusion that the word is about Bi-CGSTAB solver [43]. The same solver acronym also is used in [5]. Both [5] and [39] cite the unpublished report of Van Der Vorst and Sonneveld, written before the Bi-CGSTAB paper [43].



**Fig. 3.** Grid structure for the Taylor–Green vortex case. Distortion of the grid is a function of parameter  $\beta$ . Dimension of the domain is  $[0, 2\pi]^2$ ; grid size,  $32 \times 32 \times 10$ ; distortion parameter value,  $\beta = 3$ .

We gradually change the type of data used for comparison: a simple manufactured solution, analytical solutions, numerical solution by other algorithms, flow features observed in wind tunnel testing (e.g. the appearance and length of the recirculation bubble), and finally the measured values in the experiment conducted at atmospheric scale.

We compare the results of simulations using the present algorithm with the one first presented in [45], and implemented in a state-of-the-art, parallel, research code that has been extensively used and continuously developed over the years to study advanced turbulence closures for buoyancy driven flows [46,47,20], flows in the atmospheric environment [18,19, 21,48] and electromagnetically driven flows [49,50]. The results produced with that code are denoted here as the ‘Basic approach’. The present procedure has been implemented through changes made on this code in the course of its continual development, maintaining the consistency of the approach where appropriate and introducing mentioned improvements in places covered by Section 3. Special attention has been given to preserve the scalability of the parallel version of the code which have been demonstrated in previous works [20].

For turbulent test cases, the contribution of turbulence modeling errors is not analyzed in detail, and will be investigated in a separate publication.

#### 4.1. Numerical errors and accuracy

##### 4.1.1. Cell-centered gradient approximation accuracy

To assess gradient approximation accuracy, we have set up a sequence of distorted grids, in which grid non-orthogonality is dependent on parameter  $\beta$  (stretching ratio of grid lines in the  $y$ -axis direction), Fig. 3. In the present example, grids are deformed in the domain interior, leaving the square outer boundary of size  $[0, 2\pi]^2$  intact.

Nodal coordinates are determined using

$$y_i = y_a + c_i(y_b - y_a), \quad (58)$$

where  $y_a$  and  $y_b$  are the end points of the segment and  $c_i$  is the stretching function controlling the distribution of nodal points. The stretching functions are defined by two expressions,

$$c_i = 1 - \beta \frac{\left(\frac{\beta+1}{\beta-1}\right)^{\gamma_i} - 1}{\left(\frac{\beta+1}{\beta-1}\right)^{\gamma_i} + 1} \quad (59)$$

and

$$c_i = \beta \frac{\left(\frac{\beta+1}{\beta-1}\right)^{\gamma_i} - 1}{\left(\frac{\beta+1}{\beta-1}\right)^{\gamma_i} + 1}, \quad (60)$$

where  $\gamma_i = 1 - (i-1)/(N-1)$ ,  $1 \leq i \leq N$ , and  $N$  is the total number of coordinate points. The two stretching functions, (59) and (60), are applied interchangeably on even and odd grid lines. Node distributions on domain boundaries are uniform, since spatial periodicity of fluid flow problems that will be used as test cases is anticipated.

**Table 1**

The  $L^2$  error for the cell-centered gradient reconstruction. The table shows results for Gauss, and present least-squares gradient reconstruction procedures. Tests are performed for the manufactured scalar field  $\phi(x, y, z) = x + y + z$ .

Mesh	Gauss	LSQ-present
Uniform	$2.980 \times 10^{-8}$	$1.428 \times 10^{-15}$
$\beta = 5$	$2.297 \times 10^{-1}$	$1.465 \times 10^{-15}$
$\beta = 4$	$3.628 \times 10^{-1}$	$1.432 \times 10^{-15}$
$\beta = 3$	$6.609 \times 10^{-1}$	$1.426 \times 10^{-15}$
$\beta = 2$	$0.160 \times 10^1$	$1.401 \times 10^{-15}$
$\beta = 1.5$	$0.324 \times 10^1$	$1.487 \times 10^{-15}$

The meshes are constructed this way for two reasons. The procedure that works well for uniform rectilinear meshes, the Gauss gradient procedure, where face center values of dependent variables are obtained by linear interpolation between neighbor cell-centers, finds values at the  $j'$  point located on the intersection of the cell face and the line connecting two cell centers. This value differs from the one calculated at the face center  $j$  if the grid is nonorthogonal (Fig. 1(a)). In this way, it is quite difficult to get the correct values for the cell-centered gradients using the Gauss gradient procedure. The second reason for engineering this sort of meshes to test the resilience of underlying algorithm to non-orthogonality is because similar situations are rather frequently encountered in simulations of wind flows over complex terrain, as will be seen in Section 4.3

Tests are performed for the manufactured solution  $\phi(x, y, z) = x + y + z$ , and the results are summarized in Table 1. Accuracy is estimated using relative  $L^2$  error norms. The results suggest that the Gauss gradients with linear interpolation give highly inaccurate results already on mildly non-orthogonal meshes. The least-squares procedure produces values that are accurate almost to the level of machine precision (for 64 bit floating-point arithmetic), at any grid.

4.1.2. Taylor–Green vortex

The Taylor–Green vortex (TGV) is an unsteady flow of decaying vortex, represented by a closed-form solution of the Navier–Stokes equation [51,52],

$$\begin{aligned}
 u(x, y, t) &= -\sin(x) \cos(y)e^{-2vt}, \\
 v(x, y, t) &= \cos(x) \sin(y)e^{-2vt}, \\
 p(x, y, t) &= \frac{1}{4}(\cos(2x) + \cos(2y))e^{-4vt}.
 \end{aligned}
 \tag{61}$$

The flow is periodic in  $x$  and  $y$  directions with a period of  $2\pi$ . The domain used in simulations is  $2\pi \times 2\pi \times \pi$  to enable comparison of results with those presented in [41]. The initial and boundary conditions are obtained from analytical solutions. Figs. 5(a) and 5(b) show pressure and velocity magnitude contours for the Taylor–Green vortex problem respectively.

The grid is refined from  $N_x \times N_y \times N_z = 8 \times 8 \times 10$ , to  $128 \times 128 \times 10$  with a factor of two. Each case was run for 50 time-steps and each time step was  $\Delta t = 0.01$  s, as in [41].

The discretization error is estimated in relative  $L^2$  error norm:

$$error = \sqrt{\frac{\sum_{i=0}^N (\phi_{ex} - \phi_i)^2}{\sum_{i=0}^N \phi_{ex}^2}}
 \tag{62}$$

The rate at which solutions changes when grid is refined is estimated according to

$$rate = \frac{\log(error_{2h}/error_h)}{\log 2},
 \tag{63}$$

where  $h$  and  $2h$  are average grid spacings for fine and rough grid respectively.

The first series of tests is conducted on uniform grids and with various convection schemes (Fig. 4). The CDS clearly stands out as the most accurate one. The results using the CDS scheme from both the present approach and the one in [41] showed second-order accuracy. There is however a large difference in accuracy between results made with CDS scheme in this work and those in [41]. Our analysis pointed to the way the pressure gradients are treated in source terms of the momentum equations. While least-square gradients were used directly in [41], and the pressure gradient source in momentum equation is treated as a volume source, in this study the pressure gradient is treated as a surface source, where face-interpolated values were found using Eq. (40). We found treatment of pressure gradients crucial for the accuracy on non-orthogonal grids as well.

The next series of tests is conducted on distorted grids, where parameter  $\beta$  was varied to control the level of distortion (see Figs. 6–8). Grid refinement levels were:  $8 \times 8 \times 10$ ,  $16 \times 16 \times 10$ ,  $32 \times 32 \times 10$ ,  $64 \times 64 \times 10$ , represented with the average cell size  $h_{aver.}$

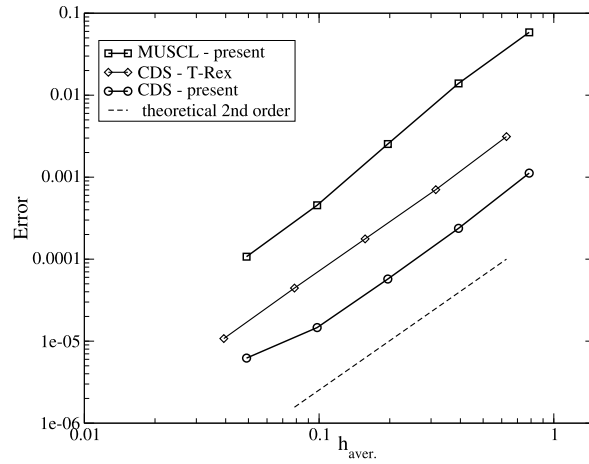


Fig. 4. Grid convergence rates for the Taylor–Green vortex case. The uniform grids and various convection schemes are used. Results made with the present algorithm are compared with those produced with T-Rex code [41]. Time-step size,  $\Delta t = 0.01$  s.

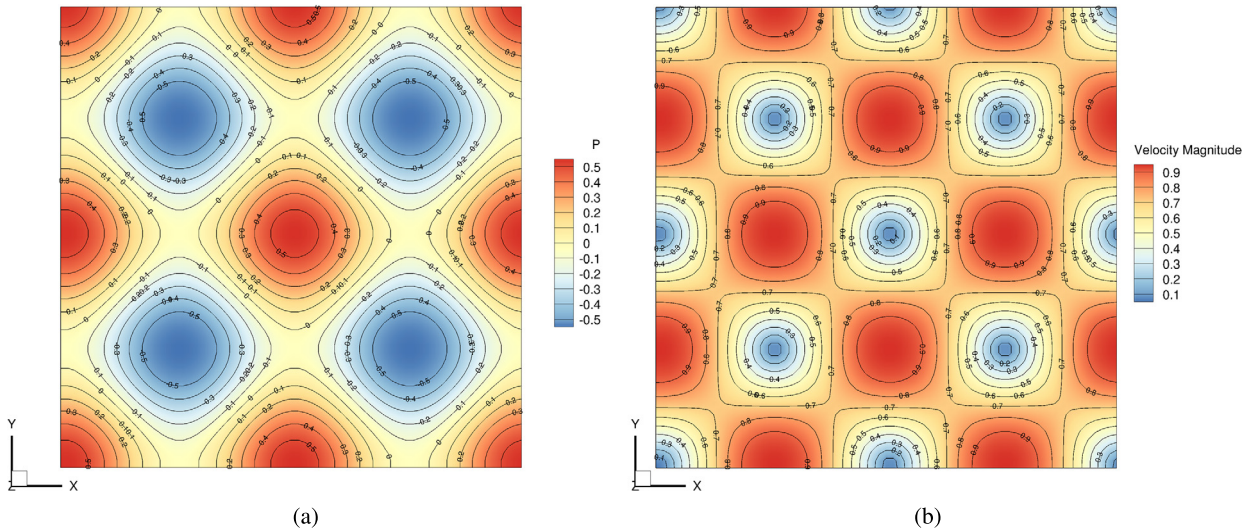


Fig. 5. Taylor–Green vortex. (a) Pressure contours, (b) velocity magnitude contours.

Table 2

The Taylor–Green vortex case: errors and grid convergence rates for various values of  $\beta$ . Variant of the algorithm for uniform Cartesian meshes, with non-orthogonality corrections being switched-off. Central differencing scheme.

$h_{aver}$	$\beta = 5$		$\beta = 4$		$\beta = 3$	
	Error	Rate	Error	Rate	Error	Rate
0.785	$2.8077 \times 10^{-2}$	–	$4.4350 \times 10^{-2}$	–	$8.0734 \times 10^{-2}$	–
0.3925	$5.8394 \times 10^{-2}$	–1.056	$9.2137 \times 10^{-2}$	–1.055	$1.6679 \times 10^{-1}$	–1.047
0.19625	$9.9445 \times 10^{-2}$	–0.768	$1.5809 \times 10^{-1}$	–0.779	$2.8883 \times 10^{-1}$	–0.792
0.098125	$9.5772 \times 10^{-2}$	0.054	$1.6275 \times 10^{-1}$	–0.042	$3.3076 \times 10^{-1}$	–0.196

First tests were run using a baseline algorithm [45], intended for structured, body-fitted, mildly non-orthogonal grids, but where existing non-orthogonality corrections have been switched-off (Table 2). The convection was treated with the central differencing scheme. The problem encountered already on mildly distorted grids was the inability to accurately represent the pressure field due to non-physical oscillations in the solution.

The same series of tests were repeated using the algorithm presented in this paper and the central differencing scheme, Table 3. In sharp contrast to previous simulations, no pressure oscillations were present in these results, and the velocity field has two orders of magnitude higher accuracy. The effect of distorted grids is seen in the rate in which results change when grids are refined, and we conclude that this value cannot be used anymore to estimate the order of the accuracy of the code, because the way rate changes is highly non-uniform.



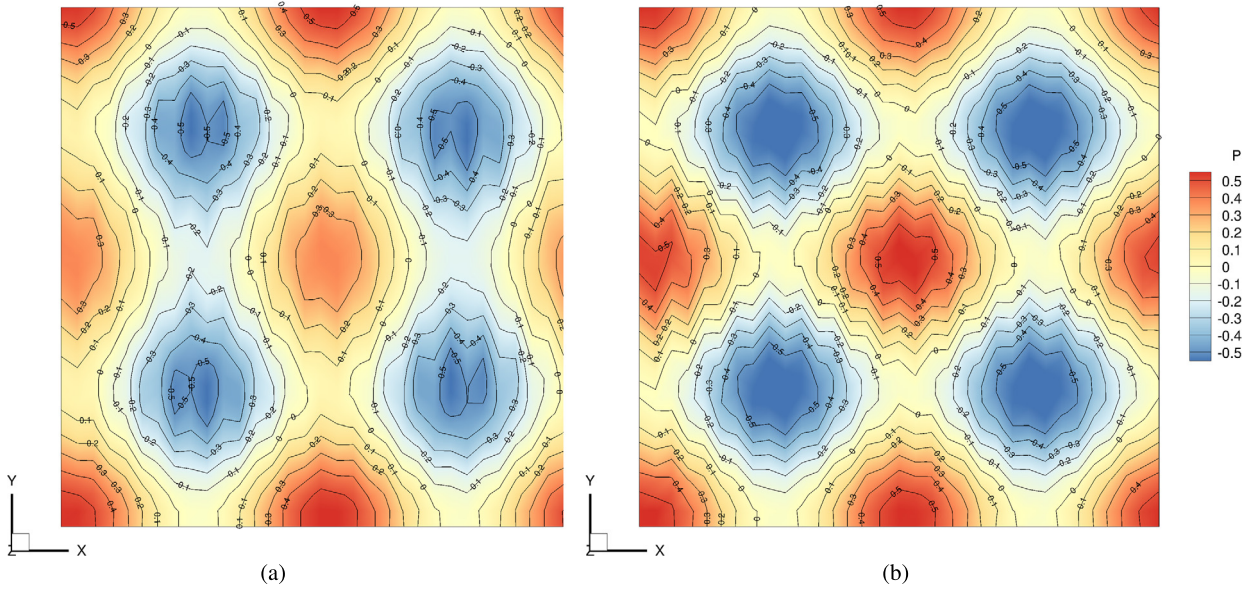


Fig. 6. Pressure contours of Taylor–Green vortex,  $\beta = 3$ , grid size  $32 \times 32 \times 10$  cells. (a) Basic scheme, (b) improved nonorthogonality treatment.

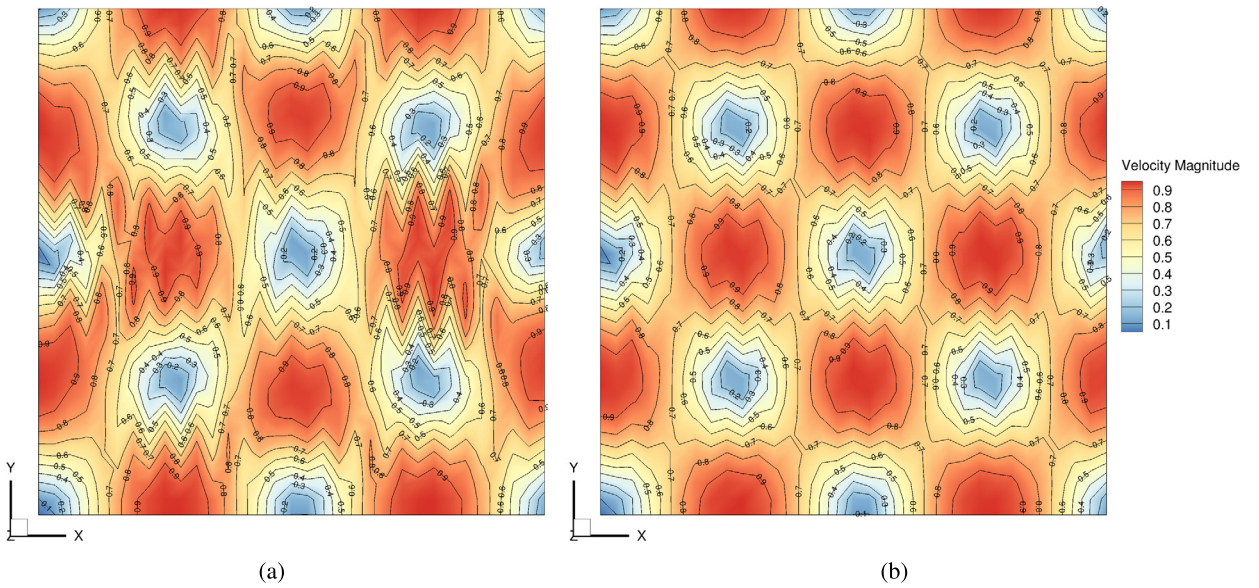


Fig. 7. Velocity magnitude of Taylor–Green vortex,  $\beta = 3$ , grid size  $32 \times 32 \times 10$  cells. (a) Basic scheme, (b) improved nonorthogonality treatment.

Table 3

The Taylor–Green vortex case: errors and grid convergence rates for various values of  $\beta$ . Central differencing scheme.

$h_{aver.}$	$\beta = 5$		$\beta = 4$		$\beta = 3$	
	Error	Rate	Error	Rate	Error	Rate
0.785	$6.1048 \times 10^{-3}$	–	$9.6535 \times 10^{-3}$	–	$1.7662 \times 10^{-2}$	–
0.3925	$3.5902 \times 10^{-3}$	0.766	$5.6935 \times 10^{-3}$	0.762	$1.0531 \times 10^{-2}$	0.746
0.19625	$1.4309 \times 10^{-3}$	1.327	$2.3379 \times 10^{-3}$	1.284	$4.7898 \times 10^{-3}$	1.137
0.098125	$6.9480 \times 10^{-4}$	1.042	$1.6211 \times 10^{-3}$	0.528	–	–

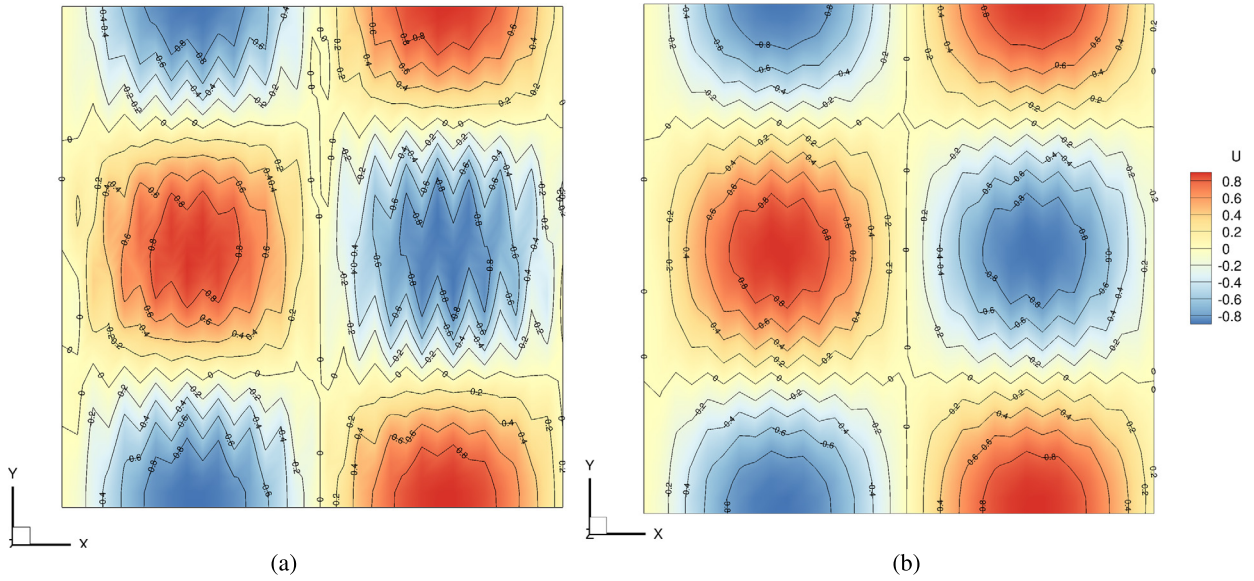


Fig. 8. The  $u$ -velocity component of Taylor–Green vortex,  $\beta = 3$ , grid size  $32 \times 32 \times 10$  cells. (a) Basic scheme, (b) improved nonorthogonality treatment.

Table 4

The Taylor–Green vortex case: errors and grid convergence rates for various values of  $\beta$ . MUSCL differencing scheme.

$h_{aver}$	$\beta = 5$		$\beta = 4$		$\beta = 3$	
	Error	Rate	Error	Rate	Error	Rate
0.785	$9.9738 \times 10^{-3}$	–	$1.2003 \times 10^{-2}$	–	$1.7905 \times 10^{-2}$	–
0.3925	$4.4237 \times 10^{-3}$	1.173	$6.1833 \times 10^{-3}$	0.957	$1.0769 \times 10^{-2}$	0.733
0.19625	$4.0290 \times 10^{-3}$	0.135	$6.3668 \times 10^{-3}$	–0.04	$1.1892 \times 10^{-2}$	–0.143
0.098125	$6.9600 \times 10^{-3}$	–0.789	$1.1034 \times 10^{-2}$	–0.793	–	–

Tests with the same set-up are conducted to assess the performance of higher-order convective schemes in the setting of non-orthogonal grids (Table 4). We see the deteriorating effect of distorted grids appearing sooner than in the CDS case, with negative grid convergence rates on grids with higher distortion (lower  $\beta$ ).

For highly distorted grids with  $\beta = 3$ , on a fine mesh, we performed tests of linear solvers for pressure-correction equations (Fig. 9). In these tests, the SIP preconditioned Krylov space algorithms performed distinctly better than the rest. The SIP preconditioned CG-CG(SIP) shows substantial improvement over CG(IC(0)). The CG(SIP) shows faster convergence than CG(IC(0)), and smoother convergence in initial stage of iteration. Bi-CGSTAB(SIP), which performed the best, needed a factor of approximately 2.5 less iterations to reach the same residual level as PCG(IC(0)), which was enough to compensate for the fact that it is around twice as expensive as CG. Using SIP alone, as still done in many structured grid codes, does not give satisfactory performance.

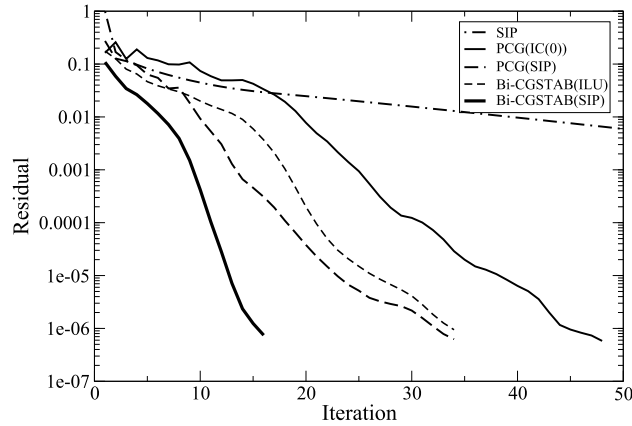
The effect of multiple pressure-correction equation solutions (non-orthogonal correctors) on the convergence of pressure-velocity iteration is shown in Fig. 10. If  $n_{pcor} = 2$ , i.e. the second pressure correction is solved, the continuity residuals have order of magnitude lower value then in  $n_{pcor} = 1$  case, but the rate at which residuals drop remains the same (the two lines for  $n_{pcor} = 1$  and  $n_{pcor} = 2$  are parallel). This means that additional pressure corrections do not contribute directly to faster convergence of SIMPLE iterations, which can also be concluded from the section where pressure correction equation is derived, where the sum of additional mass-flow corrections  $\sum_j F_j^{(n)} = 0$  is used to formulate the equation for additional pressure corrections. The  $F_j^{(n)}$  are used for better distribution of continuity error within computational cell, leading to lower residuals of pressure-correction equation, and not for the reduction of continuity error left after the first pressure correction solution and mass flow update. Non-orthogonal correctors, however enabled the use of higher under-relaxation factors.

#### 4.1.3. Laminar flow in a channel with systematically distorted grids

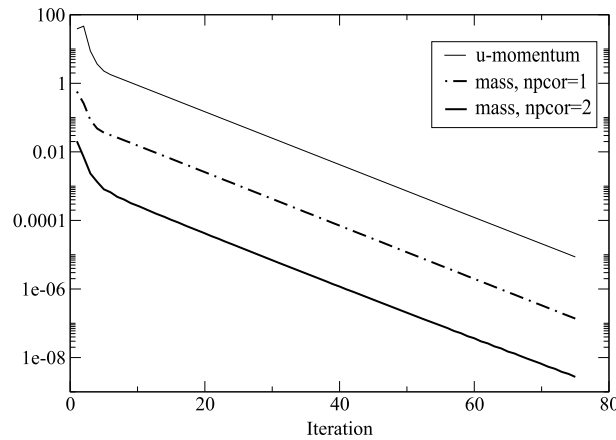
The purpose of this example is to study the accuracy of the interpolations. It considers laminar Poiseuille flow in a plane channel at  $Re = 200$ . The domain size is  $L_x \times L_y \times L_z = 2.5 \times 0.04 \times 0.236$ . The analytical solution is

$$u(z) = 4u_{\max} \left(1 - \frac{z}{h}\right) \frac{z}{h}, \quad w = 0, \quad p(x) = p_0 - 8\nu\rho \frac{u_{\max}}{h^2} x, \tag{64}$$

where  $h$  is the channel height.



**Fig. 9.** Taylor–Green vortex case. Figure shows convergence in relative  $L_1$  norm of the residual for various linear solvers during the solution of linear system resulting from the discretized pressure correction equation. Legend describes Solver(Preconditioner) combination. Mesh is  $64 \times 64 \times 10$ , grid non-orthogonality parameter value is  $\beta = 3$ .



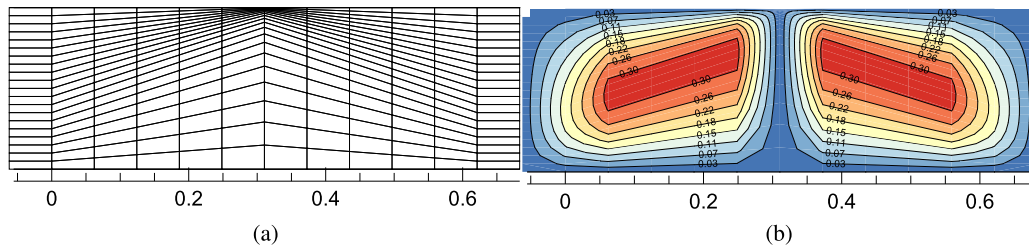
**Fig. 10.** Taylor–Green vortex case. Influence of the number of nonorthogonal correctors ( $npcor$ ) on convergence of SIMPLE iterations within single time-step. Figure shows residual for  $u$ -momentum equation and continuity residuals for different  $npcor$  values ( $\beta = 4$ ,  $\Delta t = 0.001$ , under-relaxation factors:  $\alpha_p = 1.0$ ,  $\alpha_u = 0.8$ ).

In this example, a segment of the grid is systematically distorted (Fig. 11(a)). The grid distortion is controlled by the parameter  $\beta$ . Characteristic values of the grid distortion parameter for this example are  $\beta = 1.005$  and  $\beta = 1.01$ . Smaller the  $\beta$ , greater the distortion. It is used in functions (58) and (59) to non-uniformly distribute grid nodes along vertical line at the channel mid span. Grid nodes at the lines around it, within the distorted segment, are found by linear interpolation of the uniform and distorted grid node distributions. Three levels of the grid refinement are used: the coarse grid:  $N_x \times N_y \times N_z = 40 \times 2 \times 20$ , medium grid:  $N_x \times N_y \times N_z = 80 \times 2 \times 40$  and fine grid:  $N_x \times N_y \times N_z = 160 \times 2 \times 80$ . The distortion is quantified at cell level, by the values of maximum normals skewness, which is plotted for the distorted channel segment of the coarse grid, for  $\beta = 1.005$ , in Fig. 11(b).

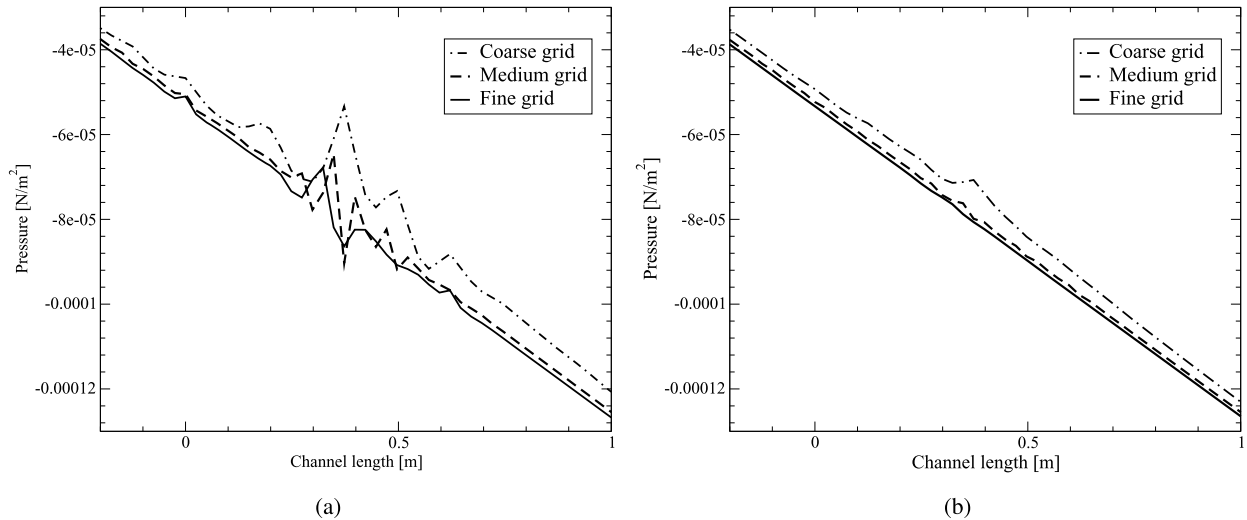
Despite its apparent simplicity this test case reveals shortcomings in the solution procedure and the effect of proposed remedies. In Fig. 12 the pressure distribution along the line in the direction of the channel, positioned at  $z = 0.7438h$  and  $y = 0$  is shown. Along the channel a linear pressure drop, defined by (64) is expected. However, the remarkable shortcomings in the numerical solution based on the basic approach are visible in Fig. 12(a), where the oscillatory deviations from the expected profile occur in the region of grid distortion. To some extent these are attenuated at the finer grid resolutions. In sharp contrast to the previous results, the current, improved treatment, displays only minor deviations from the expected profile on the coarse grid, which entirely disappear on the fine grid, and an accurate pressure distribution along the channel is represented (Fig. 12(b)).

In the sequel the test case is used to analyze different approaches for the diffusion term approximation in the Navier–Stokes equations (2). In Tables 5 and 6, the errors for  $u$ -velocity component, based on (62) and (64) are summarized for different diffusion term approximations, grid resolutions, distortion parameter values, together with the corresponding grid convergence rates. All the approaches, as expected, show the same behavior for the non-distorted, Cartesian grid case. For the distorted meshes, the approaches that take into account the ‘intersection line offset’ show better properties both in terms of the error and the convergence rate. The offset correcting scheme, with  $nrelax = 0$  shows best overall performance





**Fig. 11.** Close-up view of the grid in the  $xz$  plane for the laminar flow in a channel. Level of distortion is controlled by the parameter  $\beta$ . The domain size  $L \times W \times H = 2.5 \times 0.04 \times 0.236$ ; grid size,  $N_x \times N_y \times N_z = 40 \times 2 \times 20$  (denoted as the coarse grid); distortion parameter value  $\beta = 1.005$ . (a) Grid structure, (b) maximum normals skewness.



**Fig. 12.** Representation of linear pressure drop for the laminar flow in a distorted channel, at different levels of grid refinement, at  $\beta = 1.005$ . (a) Basic scheme, (b) improved nonorthogonality treatment.

**Table 5**

Laminar flow in a channel – errors and grid convergence rates for Cartesian and distorted grids, characterized by parameter  $\beta$ . Cell-face centered gradient discretized using various correction schemes: *Orthogonal* ( $nrelax = 0$ ), *Overrelaxed approach* ( $nrelax = -1$ ), and *Minimal correction* ( $nrelax = 1$ ).

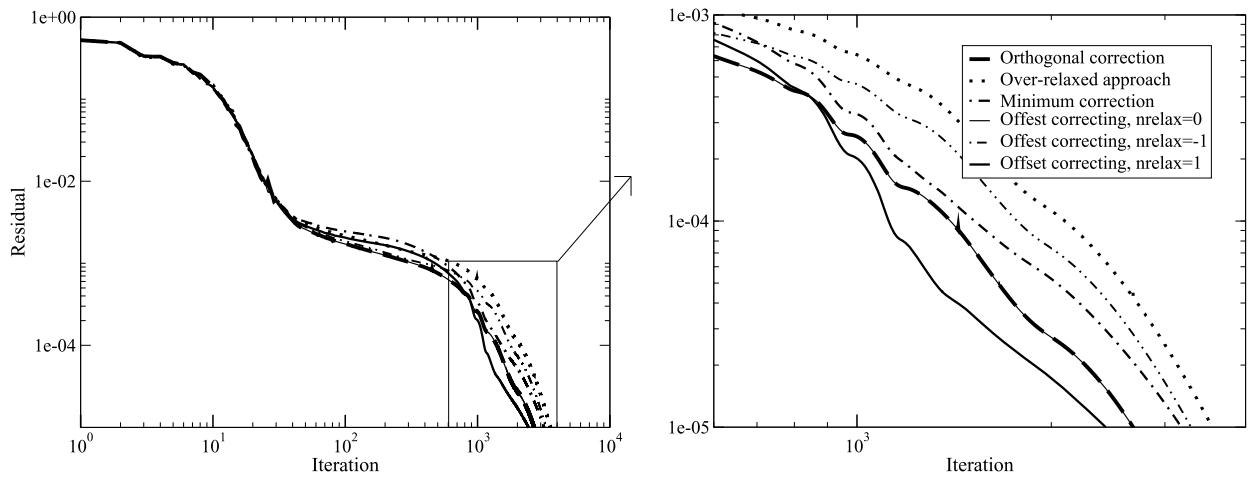
Grid $N_x \times N_z$	Cartesian		$\beta = 1.01$		$\beta = 1.005$	
	Error	Rate	Error	Rate	Error	Rate
<b>Orthogonal correction</b>						
40 × 20	$1.401 \times 10^{-3}$	–	$7.681 \times 10^{-3}$	–	$9.808 \times 10^{-3}$	–
80 × 40	$3.134 \times 10^{-4}$	2.16	$1.274 \times 10^{-3}$	2.59	$1.637 \times 10^{-3}$	2.58
160 × 80	$7.874 \times 10^{-5}$	1.99	$2.558 \times 10^{-4}$	2.32	$3.278 \times 10^{-4}$	2.32
<b>Overrelaxed approach</b>						
40 × 20	$1.401 \times 10^{-3}$	–	$7.645 \times 10^{-3}$	–	$9.762 \times 10^{-3}$	–
80 × 40	$3.134 \times 10^{-4}$	2.16	$1.317 \times 10^{-3}$	2.54	$1.725 \times 10^{-3}$	2.50
160 × 80	$7.874 \times 10^{-5}$	1.99	$4.740 \times 10^{-4}$	1.47	$6.826 \times 10^{-4}$	1.34
<b>Minimal correction</b>						
40 × 20	$1.401 \times 10^{-3}$	–	$7.730 \times 10^{-3}$	–	$9.877 \times 10^{-3}$	–
80 × 40	$3.134 \times 10^{-4}$	2.16	$1.341 \times 10^{-3}$	2.53	$1.733 \times 10^{-3}$	2.51
160 × 80	$7.874 \times 10^{-5}$	1.99	$4.507 \times 10^{-4}$	1.57	$6.274 \times 10^{-4}$	1.47

for distorted grids, when the errors and orders of accuracy are explored. In terms of the numerical efficiency it is useful to explore the iteration convergence rates for different diffusion term, since all the corrections are implemented in deferred correction manner which influences the iteration convergence. For that purpose, the iteration convergence rates are monitored for the simulation on fine grid, with distortion parameter value of  $\beta = 1.005$ , and the results are shown in Fig. 13. It is seen on the right, that the offset correcting diffusion scheme with  $ncor = 1$  presented in this article, gives the fastest convergence. Compared to the overrelaxed approach the number of iterations needed to reach the desired residual tolerance of  $1 \times 10^{-5}$  was reduced for approximately 28%.

**Table 6**

Laminar flow in a channel – errors and grid convergence rates for Cartesian and distorted grids, characterized by parameter  $\beta$ . Diffusion discretized using the *offset correcting* schemes using various relaxation parameter values: *Orthogonal* ( $nrelax = 0$ ), *Overrelaxed approach* ( $nrelax = -1$ ), and *Minimal correction* ( $nrelax = 1$ ).

Grid $N_x \times N_z$	Cartesian		$\beta = 1.01$		$\beta = 1.005$	
	Error	Rate	Error	Rate	Error	Rate
<i>nrelax = 0</i>						
40 × 20	$1.369 \times 10^{-3}$	–	$7.657 \times 10^{-3}$	–	$9.788 \times 10^{-3}$	–
80 × 40	$3.433 \times 10^{-4}$	2.00	$1.269 \times 10^{-3}$	2.59	$1.632 \times 10^{-3}$	2.58
160 × 80	$8.469 \times 10^{-5}$	2.02	$2.554 \times 10^{-4}$	2.28	$3.275 \times 10^{-4}$	2.32
<i>nrelax = -1</i>						
40 × 20	$1.401 \times 10^{-3}$	–	$7.638 \times 10^{-3}$	–	$9.763 \times 10^{-3}$	–
80 × 40	$3.134 \times 10^{-4}$	2.16	$1.276 \times 10^{-3}$	2.58	$1.653 \times 10^{-3}$	2.56
160 × 80	$7.874 \times 10^{-5}$	1.99	$3.326 \times 10^{-4}$	1.94	$4.596 \times 10^{-4}$	1.85
<i>nrelax = 1</i>						
40 × 20	$1.401 \times 10^{-3}$	–	$7.680 \times 10^{-3}$	–	$9.819 \times 10^{-3}$	–
80 × 40	$3.134 \times 10^{-4}$	2.16	$1.293 \times 10^{-3}$	2.57	$1.665 \times 10^{-3}$	2.56
160 × 80	$7.874 \times 10^{-5}$	1.99	$3.230 \times 10^{-4}$	2.00	$4.297 \times 10^{-4}$	1.95



**Fig. 13.** The effect of different approaches to computation of face-centered gradient in diffusion term approximation, on simulation convergence:  $u$ -momentum convergence history. Fine grid –  $160 \times 80 \times 2$ ; grid distortion parameter,  $\beta = 1.005$ .

#### 4.2. Flow over idealized hills

##### 4.2.1. Laminar flow over a smooth hill

This example serves to demonstrate the applicability of the current approach to smooth non-uniform and non-orthogonal grids. We consider a flow over a smooth two-dimensional hill in a channel at  $Re = 600$  based on channel height  $H$ . The example is based on the one in [53]. The difference is in the steepness of the hill slope and in height of the hill. In [53] the maximum height is 15% of the channel height, while in the present case the maximum height is 30%. This leads to increased hill slope making the non-orthogonality effects more significant. The size of the domain is  $35H \times H$ . The shape of the hill is defined by  $z_h = 0.3H \sin^2[\pi(x - 2.0)]$  and its peak is at  $x = 2.5$ . The inlet flow is initialized with parabolic profile and it is developed keeping the mass flow rate constant by pressure gradient forcing in stream wise direction. No slip boundary condition is imposed at the lower and upper channel wall.

Only one grid resolution was used:  $N_x \times N_y \times N_z = 160 \times 2 \times 80$ . Based on the previous example case, it was estimated that this grid resolution is fine enough, since the grid points are clustered around the hill and towards the hill top. The amount of the grid distortion introduced by the hill is shown in Fig. 14, depicting the maximum normals skewness contours in the vicinity of the hill.

The vorticity contours near the hill are shown in Fig. 15. We see that steep hill slope and grid non-orthogonality cause a significant effect on large scale structures. This can be seen in quantitative difference in contours between the basic and the current, improved approach.

The velocity profiles are compared at three locations, at the peak  $x = 2.5$ , in the middle of the slope at  $x = 2.75$  and in the recirculation region at  $x = 3.2$  (Fig. 16). The greatest difference between the basic and the current approach is in seen in the recirculation region (Fig. 16(c)).

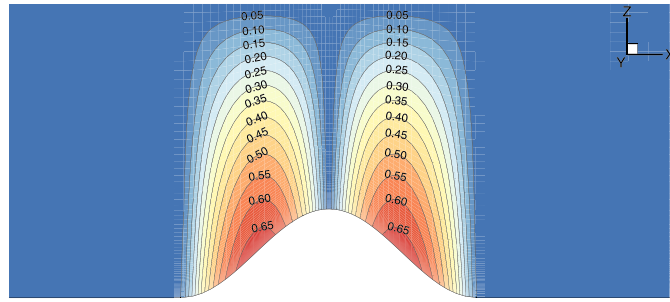


Fig. 14. The maximum normals skewness for the smooth 2D hill in a channel.

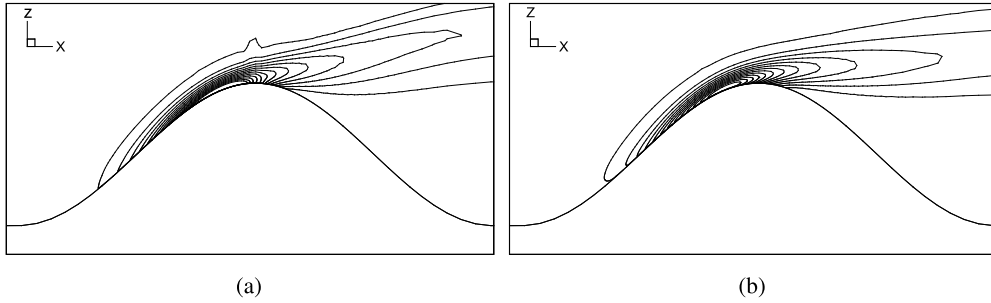


Fig. 15. Vorticity magnitude in the flow over smooth 2D hill. (a) Basic scheme, (b) improved nonorthogonality treatment.

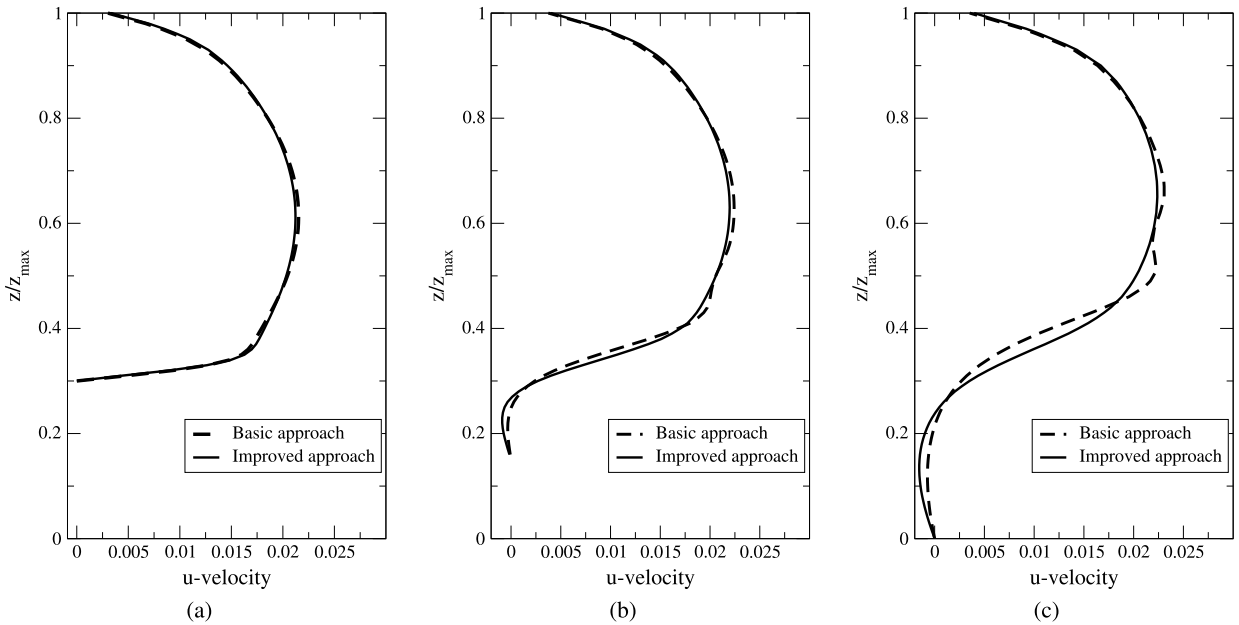


Fig. 16. Comparison of the  $u$ -velocity component profiles at  $x = 2.5$ ,  $x = 2.75$  and  $x = 3.2$  in the flow over smooth 2D hill.

In [53] where the lower, less steep hill was used, the difference between body-fitted and immersed-boundary approach was not visible in the large scale flow features. It was, however, visible in the velocity profiles. It would be interesting, for the future studies, to use the current body-fitted algorithm to validate codes based on the immersed-boundary method, because only when all the non-orthogonality corrections are included, the full capabilities of body-fitted algorithms can be demonstrated.

4.2.2. Flow over a two-dimensional triangular hill within turbulent boundary layer

This example serves to demonstrate the effectiveness of the present algorithm in the case of turbulent flow over idealized, non-smooth, two-dimensional hill (Fig. 17). It is based on the wind tunnel experiment by Costa et al. presented in [54],

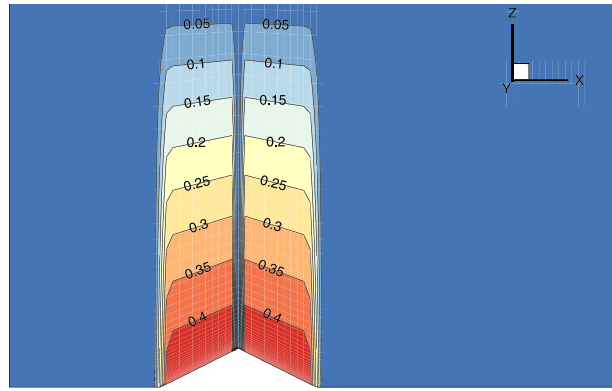


Fig. 17. The maximum normals skewness for the triangular hill in a channel.

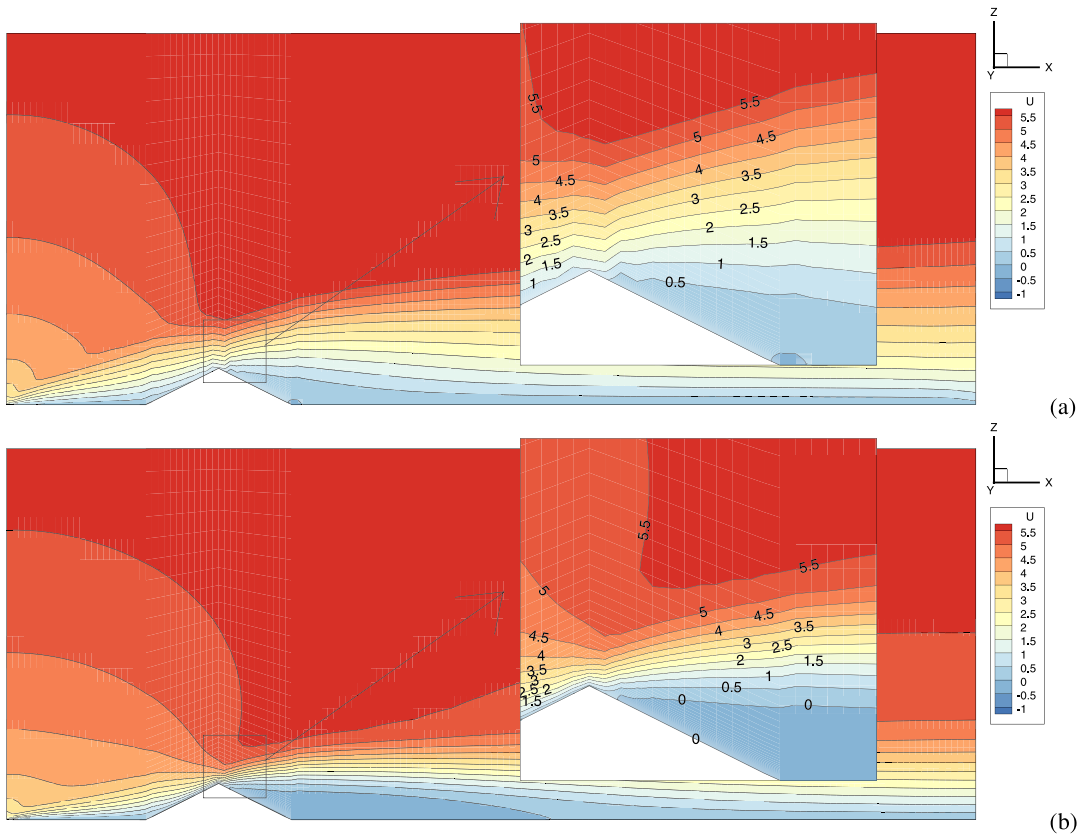


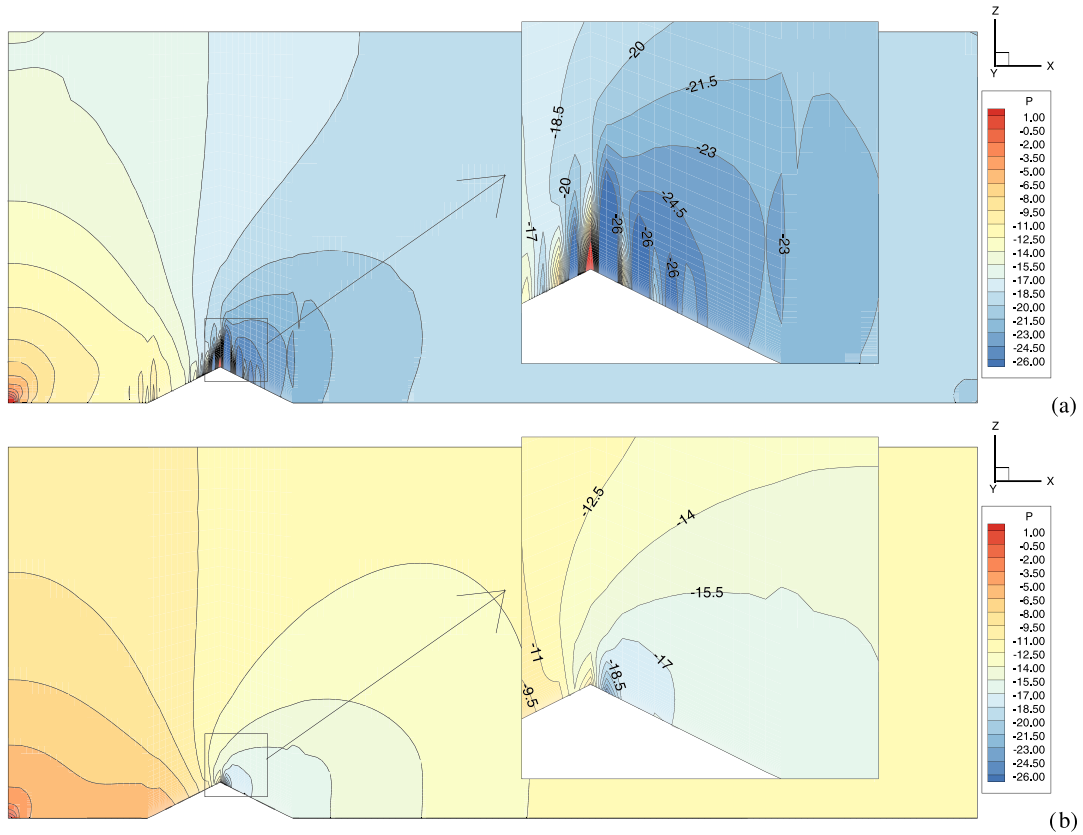
Fig. 18. Recirculation zone behind the triangular hill. (a) Basic approach, (b) the improved approach.

in which the authors simulated atmospheric boundary layer conditions with a system of vortex generators, barriers and surface roughness. The same configuration was also used in a numerical study [55]. We use the mean velocity field at the domain inlet based on B flow type configuration defined in [54,55], which is characterized by the following power law profile

$$\frac{U}{U_\infty} = \left(\frac{z}{\delta}\right)^p, \tag{65}$$

where  $U_\infty = 5$  m/s, boundary layer thickness  $\delta = 150$  mm, exponent of the power law  $p = 0.17$ , and  $z$  is the vertical coordinate.

The domain size is  $L_x \times L_y \times L_z = 0.915 \times 0.3 \times 0.35$  m. The height of the hill is  $H = 0.34$  m. The length of the hill is  $L = 4H$ . The grid size is  $N_x \times N_y \times N_z = 160 \times 30 \times 80$ , which is the same grid resolution as in [55]. The RNG  $k - \epsilon$  model [27] is used to calculate the turbulent viscosity.



**Fig. 19.** Pressure contours around the triangular hill. (a) Basic approach, (b) the improved approach.

The turbulence kinetic energy profiles at the inlet are estimated from the experimental data [54] by curve-fitting. The vertical profiles of kinetic energy dissipation rate  $\epsilon$  are not available from the experiment, and they are obtained from the turbulence kinetic energy profiles by

$$\epsilon(z) = C_{\mu}^{3/4} k^{3/2} \frac{1}{l}, \quad l = 0.07L, \quad (66)$$

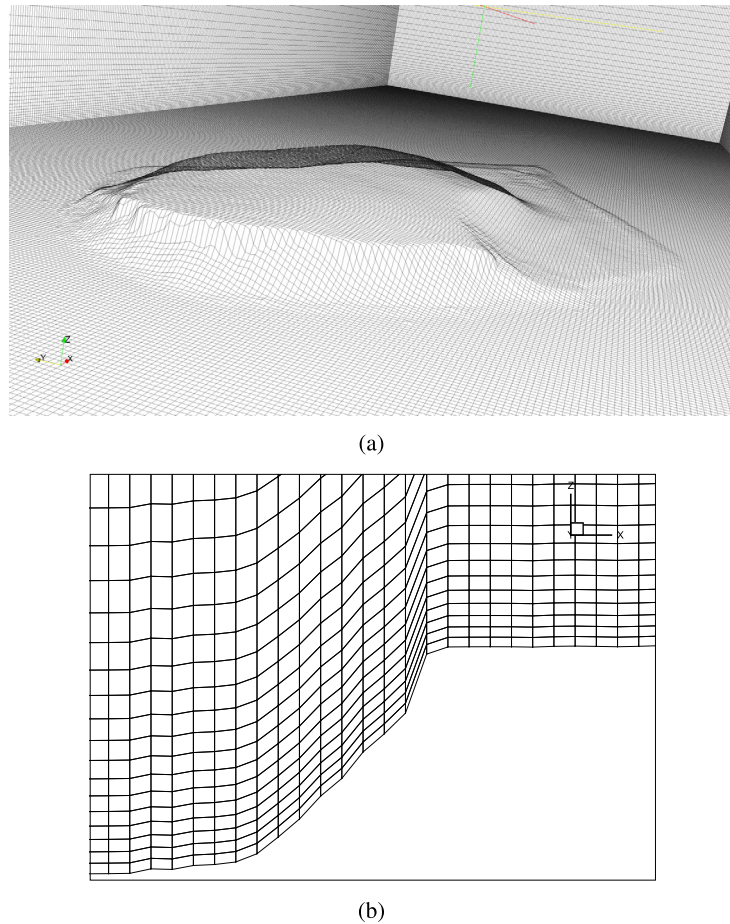
where  $L$  is the length scale of the flow, estimated to be equal to the boundary layer thickness. Simulation was run until all the residuals reached the level of  $1 \times 10^{-4}$ .

The considered flow configuration is characterized by a large recirculation region behind the hill. In the experiments the length of the recirculation bubble was in the range  $7H-8H$ . In Fig. 18 shown are the contours of the velocity delineating the recirculation zone. The close-up view is shown to emphasize the difference between the basic and current, improved approach in velocity contours near the triangular hill top. The recirculation bubble is recreated in the simulation by the present procedure while that was not entirely possible with the basic procedure. Moreover, the iteration convergence was significantly impaired by the presence of non-smooth hill in the simulation by basic approach, and it took more than twice as many iterations to reach the same convergence level as in the simulation by the present approach. The reasons for the poor convergence are found in pressure contours shown in Fig. 19. The close-up view of the pressure field structure near the hill top, reveals the oscillatory behavior in the basic approach, which is most intensified in the presence of grid-line discontinuity. The behavior of the pressure field in two considered approaches is similar to the one demonstrated in the case of distorted channel (see Fig. 12). Similar situation is expected to be encountered in real application, as well.

#### 4.3. Application to flow over real complex terrain – the Bolund hill case

The Bolund hill case is a result of a long-term measurement campaign carried out with the aim of creating a database for comparing of different atmospheric flow-over-complex-terrain simulation approaches [25,11]. Its favorable characteristics are high resolution terrain elevation and surface roughness database, and well defined inlet conditions due to isolation with the sea.

For body-fitted grids generated by algebraic extrusion, escarpments such as the one present on the Bolund hill (Fig. 20) produce similar non-orthogonal mesh patterns that can be observed in our synthetic examples where parameter  $\beta$  was



**Fig. 20.** Computational grid produced by digital terrain elevation data of the Bolund hill. (a) Surface mesh and a perspective view of the Bolund's front escarpment, (b) grid cross-section in the plane parallel to the XZ plane, in the vicinity of the front escarpment.

used to control grid distortion. Main characteristics of the grid are cell-skewness, intersection point offset and grid-line discontinuity, Fig. 20(b).

The dimensions of the computational domain are  $506 \text{ m} \times 242 \text{ m} \times 120 \text{ m}$  in wind direction, cross-wind direction and vertical direction. Grid size is  $506 \times 242 \times 45$ , i.e. the grid used in this study has horizontal resolution of 1 m, which is the same resolution as the one used in [3]. Inlet boundary conditions for velocity and turbulence quantities are based on measured values and are given in [11]. Surface roughness was defined at every surface point through roughness database. The details regarding position of masts and two dominant wind directions are seen in Fig. 21. Here we present only the results of simulations for westerly winds (direction 270 deg).

Figs. 22 and 23 show velocity magnitudes scaled by friction velocity  $u_*$  measured during the field campaign, and  $z_{gl}$  is elevation above the ground level. We see that the computed velocity profiles match very well with the measured ones. There are slight deviations from measured values at masts located on leeward side M8, and at the mast M5 shadowed by terrain elevation. In future studies, we plan to analyze these modeling errors in detail.

## 5. Conclusions

In this paper a new finite volume procedure has been developed for the simulation of flows on highly distorted meshes. We have considered the efficient approximation of the convection, diffusion terms, cell-centered gradients reconstruction, pressure-velocity coupling through SIMPLE algorithm with multiple pressure correction solutions in a sequence of non-orthogonality corrector steps. Some components of the algorithm were known from the previous studies, and available in widely used codes, while some represent the original contribution. These are: i) gradient reconstruction procedure, including the treatment of pressure gradients, ii) new generalized diffusion term approximation approaches, applicable in presence of large grid distortions. Several numerical tests have been conducted to demonstrate the accuracy and efficiency of the present method. All the tests showed significant improvement achieved by the present procedure when compared to the conventional approach. Cell centered gradient approximation tests using the manufactured solution have showed that

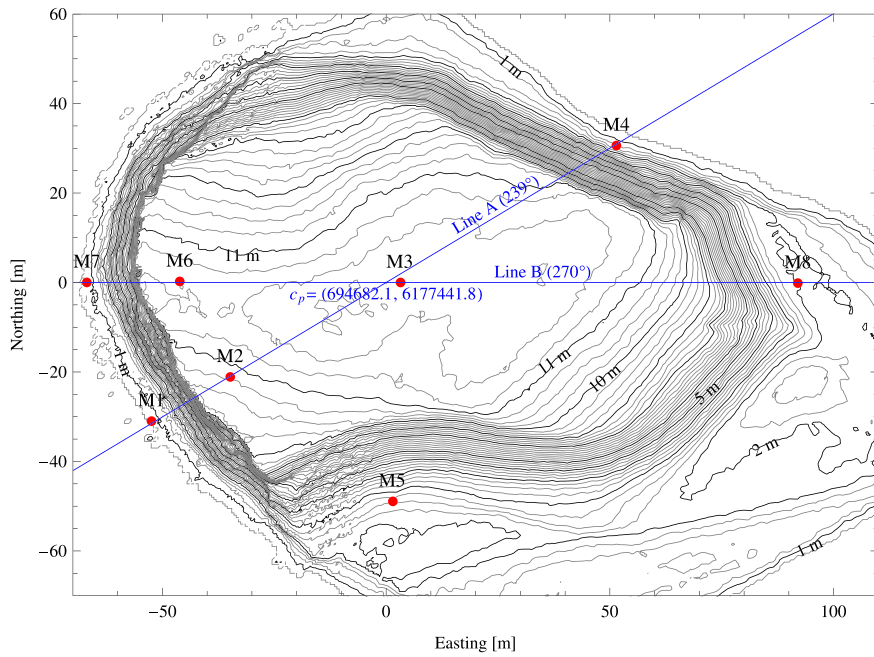


Fig. 21. Location of the masts on the Bolund hill.

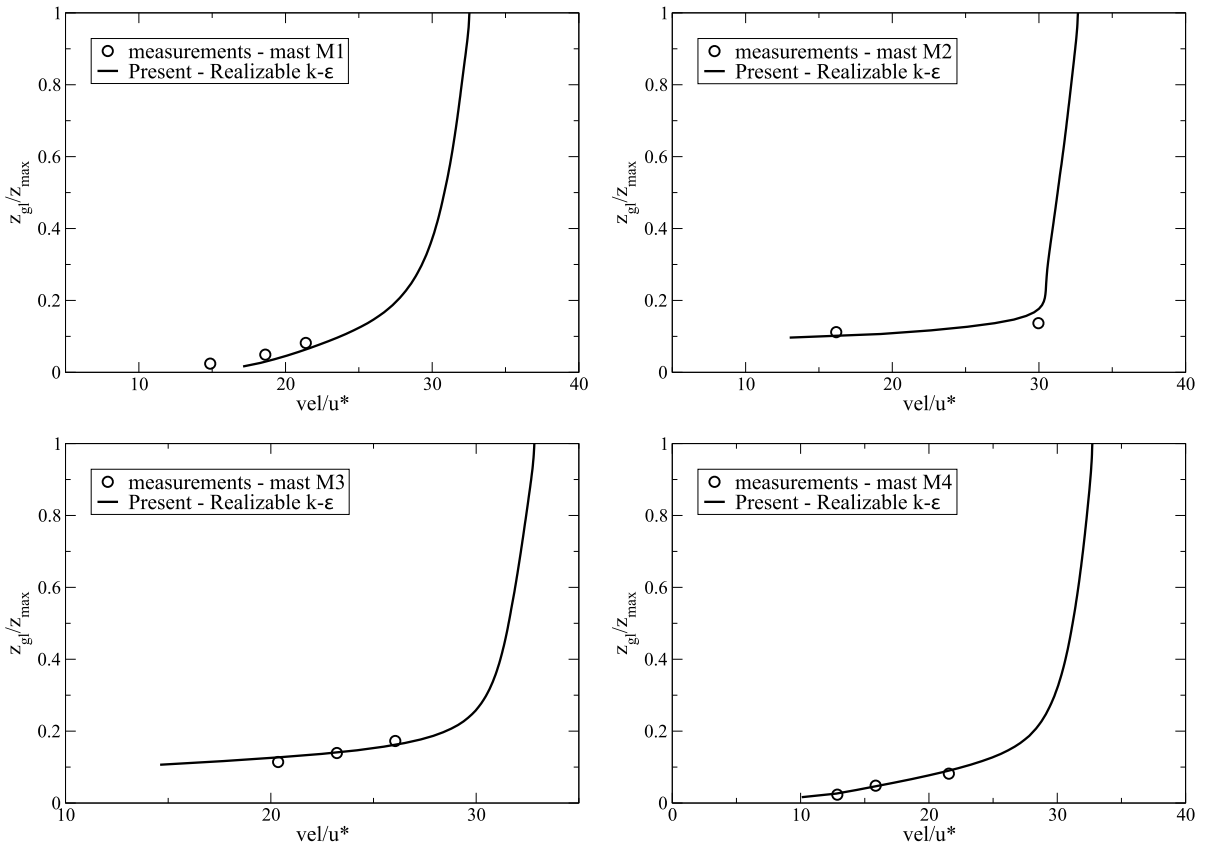
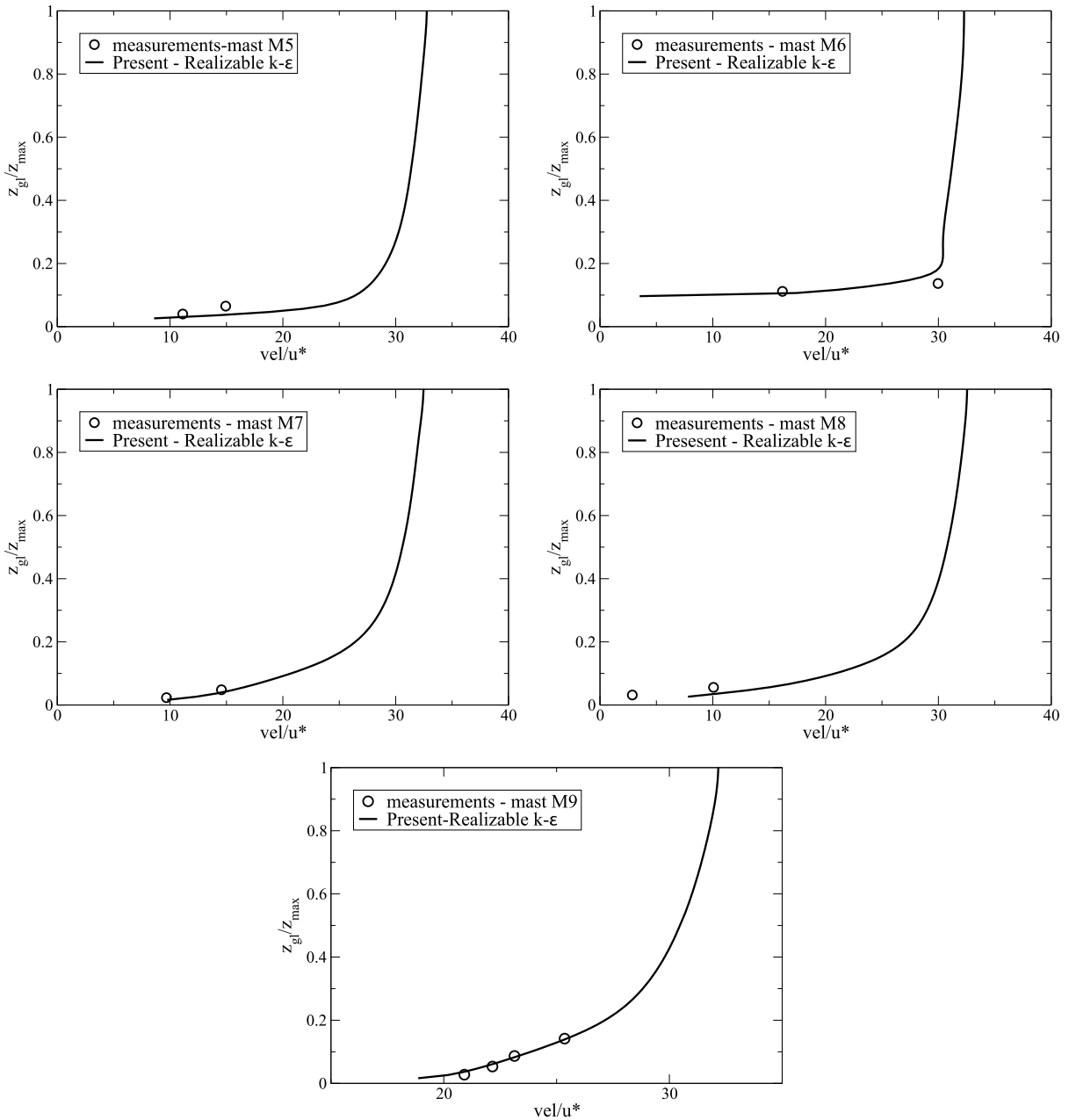


Fig. 22. Results of the Bolund hill case, part I. Computed velocity using Realizable  $k - \epsilon$  turbulence model [26] versus measurements at the atmospheric scale. Wind direction is 270 deg.





**Fig. 23.** Results of the Bolund hill case, part II. Computed velocity using Realizable  $k-\epsilon$  turbulence model versus measurements at the atmospheric scale. Wind direction is 270 deg.

the current approach is capable of achieving the machine accuracy even on extremely distorted meshes. In tests including laminar flows with analytical solutions, the method has demonstrated the second order accuracy on Cartesian grids. On deformed meshes new diffusion schemes demonstrated significant improvement both in terms of accuracy and convergence rates over the previous schemes that included non-orthogonality corrections. Our work showed that not only cell skewness but also the intersection point offset is important to be taken into account, if the accurate simulation is desired. Most significant achievement is the ability to accurately represent the pressure field in the case of sudden distortions often seen in the presence of real topography. Our study showed excellent results when SIP algorithm was not used as a standalone solver, but as a preconditioner for Krylov solvers. It showed significant improvement of CG and Bi-CGSTAB algorithms, improving convergence compared to the Incomplete Cholesky IC(0) preconditioner. Although small residual tolerance is not always needed for pressure correction solution in SIMPLE algorithm, it becomes increasingly important as grid is refined, so the present result has great significance for solution of linear systems emerging from discretization of fluid flow problems on structured meshes.



We hope this study will inspire further research in the domain of the flows in non-smooth grids setting, because of its inherent difficulty, as well as its practical importance to simulation of near-surface flows in atmospheric environment.

## Acknowledgements

The authors N.M. and B.R. acknowledge the support of their research by Serbian Ministry of Education, Science and Technological Development through projects TR-33036 and TR-35006. We would like to express gratitude to the anonymous reviewers for highly constructive suggestions.

## References

- [1] J. Prospathopoulos, E. Politis, P. Chaviaropoulos, Application of a 3D RANS solver on the complex hill of Bolund and assessment of the wind flow predictions, *J. Wind Eng. Ind. Aerodyn.* 107–108 (2012) 149–159.
- [2] S. Marras, Variational multiscale stabilization of finite and spectral elements for dry and moist atmospheric problems, PhD thesis, Universitat Politècnica de Catalunya, 2012.
- [3] M. Diebold, C. Higgins, J. Fang, A. Bechmann, M. Parlange, Flow over hills: a large-eddy simulation of the Bolund case, *Bound.-Layer Meteorol.* 148 (2013) 177–194.
- [4] X. Zhang, S. Ni, G. He, A pressure-correction method and its applications on an unstructured Chimera grids, *Comput. Fluids* 37 (2008) 993–1010.
- [5] S. Muzaferija, D. Gosman, Finite-volume CFD procedure and adaptive error control strategy for grids of arbitrary topology, *J. Comput. Phys.* 138 (1997) 766–787.
- [6] J. Doyle, C. Epifanio, A. Persson, P. Reinecke, G. Zängl, Mesoscale modeling over complex terrain: numerical and predictability perspectives, in: F.K. Chow, S.D. Wekker, B.J. Snyder (Eds.), *Mountain Weather Research and Forecasting – Recent Progress and Current Challenges*, Springer, 2013, pp. 531–590.
- [7] S. Zhong, F. Chow, Meso- and fine-scale modeling over complex terrain: parameterizations and applications, in: F.K. Chow, S.D. Wekker, B.J. Snyder (Eds.), *Mountain Weather Research and Forecasting – Recent Progress and Current Challenges*, Springer, 2013, pp. 591–654.
- [8] B. Colman, K. Cook, B. Snyder, Numerical weather prediction and weather forecasting in complex terrain, in: F.K. Chow, S.D. Wekker, B.J. Snyder (Eds.), *Mountain Weather Research and Forecasting – Recent Progress and Current Challenges*, Springer, 2013, pp. 592–692.
- [9] G. Zängl, Extending the numerical stability limit of terrain-following coordinate models over steep slopes, *Mon. Weather Rev.* 140 (2012) 3722–3733.
- [10] Y. Mahrer, An improved numerical approximation of the horizontal gradients in a terrain-following coordinate system, *Mon. Weather Rev.* 112 (1984) 918–922.
- [11] A. Bechmann, N.N. Sorensen, J. Berg, J. Mann, P. Réthoré, The Bolund experiment, part II: blind comparison of microscale flow models, *Bound.-Layer Meteorol.* 141 (2) (2011) 245–271.
- [12] V. Vuorinen, A. Chaudhari, J. Keskinen, Large-eddy simulation in a complex hill terrain enabled by a compact fractional step OpenFOAM solver, *Adv. Eng. Softw.* 79 (2015) 70–80.
- [13] N.N. Sorensen, General purpose flow solver applied to flow over hills, PhD thesis, Riso-R-827(EN), Riso National Laboratory, Denmark, 1995.
- [14] J. Szmelter, P. Smolarkiewicz, An edge-based unstructured mesh framework for atmospheric flows, *Comput. Fluids* 46 (2011) 455–460.
- [15] P.K. Smolarkiewicz, J. Szmelter, A.A. Wyszogrodzki, An unstructured-mesh atmospheric model for nonhydrostatic dynamics, *J. Comput. Phys.* 254 (2013) 184–199.
- [16] P. Smolarkiewicz, R. Sharman, J. Weil, S. Perry, D. Heist, G. Bowker, Building resolving large-eddy simulations and comparison with wind tunnel experiments, *J. Comput. Phys.* 227 (2007) 633–653.
- [17] S. Kenjereš, B. ter Kuile, Modelling and simulations of turbulent flows in urban areas with vegetation, *J. Wind Eng. Ind. Aerodyn.* 123 (2013) 43–55.
- [18] S. Kenjereš, K. Hanjalić, Combined effects of terrain orography and thermal stratification on pollutant dispersion in a town valley: a T-RANS simulation, *J. Turbul.* 3 (26) (2002) 1–25.
- [19] K. Hanjalić, S. Kenjereš, Some developments in turbulence modeling for wind and environmental flows, *J. Wind Eng. Ind. Aerodyn.* 96 (2008) 1537–1570.
- [20] S. Kenjereš, K. Hanjalić, Tackling complex turbulent flows with transient RANS, *Fluid Dyn. Res.* 41 (2009) 1–32.
- [21] S. Kenjereš, S. de Wildt, T. Busking, Capturing transient effects in turbulent flows over complex urban areas with passive pollutants, *Int. J. Heat Fluid Flow* 51 (2014) 120–137.
- [22] M. Darwish, I. Sraj, F. Moukalled, A coupled finite volume solver for the solution of incompressible flows on unstructured grids, *J. Comput. Phys.* 228 (2009) 180–201.
- [23] Z. Chen, A. Przekwas, A coupled pressure-based computational method for incompressible/compressible flows, *J. Comput. Phys.* 229 (2010) 9150–9165.
- [24] H. Stone, Iterative solution of implicit approximations of multi-dimensional partial differential equations, *SIAM J. Numer. Anal.* 5 (1968) 530–568.
- [25] J. Berg, J. Mann, A. Bechmann, M.S. Courtney, H.E. Jorgensen, The Bolund experiment, part I: flow over a steep, three-dimensional hill, *Bound.-Layer Meteorol.* 141 (2011) 219–243.
- [26] T. Shih, W. Liou, A. Shabbir, Z. Yang, J. Zhu, A new  $k-\epsilon$  eddy-viscosity model for high Reynolds number turbulent flows – model development and validation, *Comput. Fluids* 24 (3) (1995) 227–238.
- [27] V. Yakhot, S. Orszag, S. Thangam, T. Gatski, C. Speziale, Development of turbulence models for shear flows by a double expansion technique, *Phys. Fluids A, Fluid Dyn.* 4 (7) (1992) 1510–1520.
- [28] E. Anderson, Z. Bai, C. Bischof, S. Blackford, J. Demmel, J. Dongarra, J.D. Croz, A. Greenbaum, S. Hammarling, A. McKenney, D. Sorensen, *LAPACK Users' Guide*, third edition, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, 1999.
- [29] G. Golub, C.V. Loan, *Matrix Computations*, The Johns Hopkins University Press, 1996.
- [30] L. Trefethen, D. Bau, *Numerical Linear Algebra*, SIAM, 1997.
- [31] H. Jasak, Error analysis and estimation in the finite volume method with applications to fluid flows, PhD thesis, Imperial College, London, 1996, <http://powerlab.fsb.hr/ped/kturbo/OpenFOAM/docs/HrvojeJasakPhD.pdf>.
- [32] I. Demirdžić, S. Muzaferija, Numerical method for coupled fluid flow, heat transfer and stress analysis using unstructured moving meshes with cells of arbitrary topology, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 125 (1995) 236–255.
- [33] B. Basara, Employment of the second-moment turbulence closure on arbitrary unstructured grids, *Int. J. Numer. Methods Fluids* 44 (2004) 377–407.
- [34] P. Khosla, S. Rubin, A diagonally dominant second-order accurate scheme, *Comput. Fluids* 2 (1974) 207–209.
- [35] N. Waterson, H. Deconinck, Design principles for bounded higher-order convection schemes – a unified approach, *J. Comput. Phys.* 224 (2007) 182–207.
- [36] B. van Leer, Towards the ultimate conservative difference scheme IV. A new approach to numerical convection, *J. Comput. Phys.* 23 (1977) 276.
- [37] S. Mathur, J. Murthy, A pressure-based method for unstructured meshes, *Numer. Heat Transf., Part B, Fundam.* 31 (2) (1997) 195–215.
- [38] D. Kim, H. Choi, A second-order time-accurate finite volume method for unsteady incompressible flow on hybrid unstructured grids, *J. Comput. Phys.* 162 (2000) 411–428.

- [39] J.H. Ferziger, M. Perić, *Computational Methods for Fluid Dynamics*, 2nd edition, Springer, 1999.
- [40] C. Rhie, W. Chow, Numerical study of the turbulent flow past an airfoil with trailing edge separation, *AIAA J.* 21 (1983) 1525–1532.
- [41] B. Ničeno, An unstructured parallel algorithm for large eddy simulation and conjugate heat transfer simulations, PhD thesis, TU Delft, 2001, [http://repository.tudelft.nl/assets/uuid:f1280820-20ce-4c5f-bd0b-8f70e2c2e965/as\\_niceno\\_20011119.PDF](http://repository.tudelft.nl/assets/uuid:f1280820-20ce-4c5f-bd0b-8f70e2c2e965/as_niceno_20011119.PDF).
- [42] M. Benzi, Preconditioning techniques for large linear systems: a survey, *J. Comput. Phys.* 182 (2002) 418–477.
- [43] H.V.D. Vorst, Bi-CGSTAB: a fast and smoothly converging variant of Bi-CG for the solution of non-symmetric linear system, *SIAM J. Sci. Comput.* 13 (1992) 631–644.
- [44] Y. Saad, ILUT: a dual threshold incomplete LU factorization, *Numer. Linear Algebra Appl.* 1 (1994) 387.
- [45] S. Kenjereš, Numerical modelling of complex buoyancy-driven flows, PhD thesis, TU Delft, 1998, <http://repository.tudelft.nl/view/ir/uuid%3A1a63419440d74e1ca5c27c32b99e78ee/>.
- [46] S. Kenjereš, K. Hanjalić, Numerical insight into flow structure in ultraturbulent thermal convection, *Phys. Rev. E, Stat. Nonlinear Soft Matter Phys.* 66 (2002) 036307.
- [47] S. Kenjereš, K. Hanjalić, LES, T-RANS and hybrid simulations of thermal convection at high Ra numbers, *Int. J. Heat Fluid Flow* 27 (5) (2006) 800–810.
- [48] K. Hanjalić, S. Kenjereš, Dynamic simulation of pollutant dispersion over complex urban terrains: a tool for sustainable development, control and management, *Energy* 30 (8) (2005) 1481–1497.
- [49] S. Kenjereš, K. Hanjalić, Numerical insights into magnetic dynamo action in a turbulent regime, *New J. Phys.* 9 (2007) 306.
- [50] S. Kenjereš, Electromagnetically driven dwarf tornadoes in turbulent convection, *Phys. Fluids* 23 (2011) 015103.
- [51] J. DeBonis, Solutions of the Taylor–Green vortex problem using high-resolution explicit finite difference methods, Tech. rep., NASA/TM–2013-217850, 2013.
- [52] G.I. Taylor, A. Green, Mechanisms of the production of small eddies from large ones, *Proc. R. Soc. Lond. A* 158 (1937) 499–521.
- [53] A. Pinelli, I. Naqavi, U. Piomelli, J. Favier, Immersed-boundary methods for general finite-difference and finite-volume Navier–Stokes solvers, *J. Comput. Phys.* 229 (2010) 9073–9091.
- [54] M. Costa, M. Riethmuller, C. Borrego, Effects of upstream turbulence characteristics on the flow over two-dimensional hills, in: *EURASAP International Workshop on Wind and Water Tunnel Modelling of Atmospheric Flow and Dispersion*, Aso, Japan, 1993.
- [55] P. de Mello, J. Yanagihara, Numerical prediction of gas concentrations and fluctuations above a triangular hill within a turbulent boundary layer, *J. Wind Eng. Ind. Aerodyn.* 98 (2010) 113–119.

## Биографија

Никола Мирков је рођен 13. Септембра 1982. године у Београду. Основну школу и гимназију је завршио у Београду. Основне студије на Машинском факултету Универзитета у Београду уписао је школске 2001./2002. године, где је и дипломирао на катедри за Ваздухопловство са просечном оценом 8.06/10. Дипломски рад са темом „Моделирање ламинарно-турбулентног прелазног региона и утицај на перформансе летелица“ одбранио је у децембру 2007. године са оценом 10. Од априла 2008. године запослен у Лабораторији за Термотехнику и Енергетику Института за Нуклеарне Науке Винча, где носи звање истраживач-сарадник. Основни правац рада кандидата током докторских студија и великим делом током рада на пројектима Технолошког развоја је био нумеричко испитивање турбулентних струјања у атмосферском окружењу за потребе ветроенергетике и студија утицаја на животну средину.

Кандидат је у оквиру међународне сарадње учествовао у пројекту “HPC-Europa 2 - Pan-European Research Infrastructure on High-Performance Computing”. GA No. 228398. У оквиру овог пројекта, у два наврата 2009. и 2010. (у укупном трајању од четири месеца) године боравио је на Техничком Универзитету Делфт-Холандија (Delft University of Technology). Том приликом је радио на развоју савремених нумеричких алгоритама и софтверских алатки за паралелне прорачуне струјања у атмосферском граничном слоју. Аутор је више публикација представљених у научним часописима и на међународним конференцијама.

**Прилог 1.**

**Изјава о ауторству**

Потписани \_\_\_\_\_ Никола Мирков \_\_\_\_\_

број индекса \_\_\_\_\_ D16/07 \_\_\_\_\_

**Изјављујем**

да је докторска дисертација под насловом

Нумеричка симулација турбулентних струјања над реалним комплексним теренима

---

---

- резултат сопственог истраживачког рада,
- да предложена дисертација у целини ни у деловима није била предложена за добијање било које дипломе према студијским програмима других високошколских установа,
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио/ла ауторска права и користио интелектуалну својину других лица.

**Потпис**

**докторанда**

У Београду, \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

Прилог 2.

## Изјава о истоветности штампане и електронске верзије докторског рада

Име и презиме аутора: Никола Мирков

Број индекса: D16/07

Студијски програм: Докторске студије

Наслов рада: Нумеричка симулација турбулентних струјања над реалним комплексним теренима

Ментор: проф. Др. Бошко Рашуо

Потписани: Никола Мирков

Изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предао/ла за објављивање на порталу **Дигиталног репозиторијума Универзитета у Београду**.

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Београду.

**Потпис докторанда**

У Београду, \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

### Прилог 3.

## Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом:

Нумеричка симулација турбулентних струјања над реалним комплексним теренима

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство
2. Ауторство - некомерцијално
3. Ауторство – некомерцијално – без прераде
4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима
5. Ауторство – без прераде
6. Ауторство – делити под истим условима

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци, кратак опис лиценци дат је на полеђини листа).

**Потпис докторанда**

У Београду, \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

1. Ауторство - Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце, чак и у комерцијалне сврхе. Ово је најслободнија од свих лиценци.
2. Ауторство – некомерцијално. Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела.
3. Ауторство - некомерцијално – без прераде. Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела. У односу на све остале лиценце, овом лиценцом се ограничава највећи обим права коришћења дела.
4. Ауторство - некомерцијално – делити под истим условима. Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада.
5. Ауторство – без прераде. Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела.
6. Ауторство - делити под истим условима. Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада. Слична је софтверским лиценцама, односно лиценцама отвореног кода.