UNIVERZITET U BEOGRADU
MATEMATIČKI FAKULTET

Slaviša R. Milisavljević

FUNKCIJA RASTOJANJA MALIH PLANETA I RAČUN PROKSIMITETA

Doktorska disertacija

Beograd, 2012.

UNIVERSITY OF BELGRADE
FACULTY OF MATHEMATICS

Slaviša R. Milisavljević

DISTANCE FUNCTION OF MINOR PLANETS AND PROXIMITY CALCULATION

Doctoral Dissertation

Belgrade, 2012.

FUNKCIJA RASTOJANJA MALIH PLANETA I RAČUN PROKSIMITETA

Disertacija odobrena na Matematičkom fakultetu Univerziteta u Beogradu 18.11.2011. godine.

Mentor:

prof. dr Stevo Šegan, Matematički fakultet, Beograd

Komisija za odbranu:

prof. dr Stevo Šegan, Matematički fakultet, Beograd

prof. dr Mike Kuzmanoski, Matematički fakultet, Beograd

dopisni član SANU dr Zoran Knežević, Astronomska opservatorija, Beograd

---

Zahvalnost

Ova doktorska disertacija je nastala kao prirodni nastavak istraživanja u oblasti proksimiteta malih planeta i usavršavanja metoda razvijenih u mom magistarskom radu. Posle višegodišnje pauze zahvaljujući sugestijama prof. dr. Mikea Kuzmanoskog i posle konsultacija sa prof. dr. Stevom Šeganom pomenuti problem bio je na dohvat i ja sam se ponovo uhvatio u koštac sa njim. U tom smislu zahvaljujem se svom mentoru prof. dr. Stevi Šeganu na podršci i savetima u rešavanju problema obuhvaćenih doktorskom disertacijom. Veliku pomoć u uspostavljanju veza sa svetom i upoznavanja savremenog stanja u izučavanju teme ove disertacije pružili su mi dopisni član SANU dr. Zoran Knežević i prof. dr. Mike Kuzmanoski, kojima se ovom prilikom srdačno zahvaljujem. Susrevši se sa problemima ozbiljnih programskih i programerskih zahvata u rešavanju nekih analitičkih i numeričkih problema veliku pomoć sam imao od strane kolege Dušana Marčete. Zahvaljujem se ostalim kolegama i poznanicima koji su mi nesebično pomogli u izradi ove disertacije.

Narodna izreka: ’Dete si onoliko dugo koliko su ti roditelji živi’.

Ovu doktorsku disertaciju posvećujem mojim dragim roditeljima, ocu Radoju i majci Radi, kao zahvalnost za detinjstvo koje mi pružaju, sa željom da ono što duže traje …

FUNKCIJA RASTOJANJA MALIH PLANETA I RAČUN PROKSIMITETA

Rezime

Problem najmanjih međusobnih rastojanja dve konfokalne eliptične orbite (lokalni minimumi), u literaturi poznat kao račun proksimiteta malih planeta, u novije vreme prepoznat pod pojmom Minimal Orbit Intersection Distance – MOID zauzima veoma značajno mesto u astronomskim studijama, ne samo zbog predikcije mogućih sudara asteroida i drugih nebeskih tela, već i zbog činjenice da se analizom ponašanja asteroida pri bliskim prilazima mogu odrediti njihove mase, promene orbitalnih elemenata i neke druge važne karakteristike. Baveći se tim problemom u ovoj disertaciji vršili smo analizu funkcije rastojanja dve eliptične konfokalne putanje malih planeta primenjujući kombinovane, analitičko-numeričke metode računanja proksimiteta.

Pregledom svih važnijih rezultata u ovoj oblasti od sredine XIX veka pa do današnjih dana vidimo da se problem transformisao od rešavanja dve transcedentne jednačine, raznim metodama i dugotrajnim aproksimacijama, do efikasnih i brzih rešenja vektorskih jednačina sistema koji opisuje problem. U tezi je razvijen, izložen i primenjen jednostavan i efikasan analitičko – numerički metod, koji pronalazi sve minimume i maksimume funkcije rastojanja, a posredno omogućava da se odrede i prevojne tačke. Metoda je idejno zasnovana na grafičkoj interpretaciji Simovljevića (1974) i na transcedentnim jednačinama koje je razvio Lazović (1993). Testiranje metode smo obavili na blizu 3 miliona parova realnih eliptičnih asteroidskih orbita i njene mogućnosti i rezultate računa uporedili sa algebarskim rešenjima koja je dao Gronki (Gronchi, 2005). Slučaj para konfokalnih orbita sa četiri proksimiteta, koji je metodom slučajnih uzoraka i posle brojnih simulacija sa različitim vrednostima putanjskih elemenata pronašao Gronki (Gronchi, 2002), bio je motiv da pokušamo da pronadjemo takav par medju realnim parovima asteroidskih putanja. Zahvaljujući efikasnosti metode koju smo razvili takva dva para su pronadjena i njihovi parametri su prikazani u ovoj disertaciji.

Osim ovog, dalja analiza funkcije rastojanja kroz simulacije sa preko 20 miliona različitih parova asteroidskih putanja, dala je još nekoliko interesantnih rešenja funkcije rastojanja. Rezultati takve simulacije dati su u obliku tabelarnih i grafičkih prikaza raznovrsnosti rešenja funkcije rastojanja.

Ključne reči: Male planete, Asteroidi, Funkcija rastojanja, Proksimiteti, MOID.

Naučna oblast: Astronomija.

Uža naučna oblast: Nebeska Mehanika.

UDK broj: 523.44(043.3)

THE DISTANCE FUNCTION FOR MINOR PLANETS AND PROXIMITY CALCULATION

Abstract

The problem of the minimal mutual distances for two confocal elliptical orbits (local minima), in the literature known as the proximity calculation for minor planets and recognised recently as Minimal Orbit Intersection Distance – MOID, occupies a very important place in astronomical studies, not only because of the prediction of possible collisions of asteroids and other celestial bodies, but also because of the fact that by analysing the behaviour of asteroids during their encounters it is possible to determine their masses, changes of orbital elements and other important characteristics. Dealing with this problem in this thesis the author has analysed the distance function for two elliptical confocal orbits of minor planets combining analytical and numerical methods for proximity calculation.

A survey of all relevant results in this field from the middle of the XIX century till our days indicates that the problem has been transformed from looking for a solution of two transcendental equations by applying various methods and approximations of long duration towards efficient and rapid solutions of vector equations of the system which describes the problem. In the thesis a simple and efficient analytic-numerical method has been developed, presented and applied. It finds out all the minima and maxima in the distance function and, indirectly, makes it possible to determine also the inflection points. The method is essentially based on Simovljević's (1974) graphical interpretation and on transcendental equations developed by Lazović (1993). The present method has been examined on almost three million pairs of real elliptical asteroid orbits and its possibilities and the computation results have been compared to the algebraic solutions given by Gronchi (2005). The case of a pair of confocal orbits with four proximities found by Gronchi (2002), who applied the method of random samples and carried out numerous simulations with different values of orbital elements, gave the motivation to try here to find out such a pair among the real pairs of asteroid orbits. Thanks to the efficacy of the method developed in the thesis two such pairs have been found and their parameters are presented.

In addition to the one meantioned above a further analysis of distance function through simulations including more than 20 million different pairs of asteroid orbits has resulted in several additional interesting solutions of the distance function. The results are given in the form of tables and plots showing the diversity of solutions for the distance function.

Key words: Minor planets, Asteroids, Distance function, Proximities, MOID.

Branch of Science: Astronomy.

Field: Celestial Mechanics.

UDC number: 523.44(043.3)

Sadržaj

PREDGOVOR

Radeći pod rukovodstvom prof. dr. Mikea Kuzmanoskog magistarski rad upoznao sam se sa problemom proksimiteta. Problemom proksimiteta u prethodna dva stoleća bavili su se mnogi svetski stručnjaci doprinoseći njegovom upoznavanju u manjoj ili većoj meri. Medju njima prof. Dr. Mike Kuzmanoski i prof. dr Jovan Lazović su veći deo svog naučnog opusa posvetili ovoj temi objavivši veći broj radova. Osim njih i značajnih rezultata koje su oni postigli problemu proksimiteta dosta pažnje posvetili su i prof. dr. Vojislav Mišković pre njih i prof. dr. Jovan Simovljević zajedno sa njima. Jedna od ideja prof. dr. Jovana Simovljevića u problemu rešavanja proksimiteta iskorišćena je kao osnov za izradu magistarskog rada. Kada je Đovani Gronki objavio rad 'ON THE STATIONARY POINTS OF THE SQUARED DISTANCE BETWEEN TWO ELLIPSES WITH A COMMON FOCUS', (2002), u kojem eksplicitno analitički rešava navedeni problem izgledalo je da o tom pitanju zaista nema šta više da se kaže. Međutim, vrativši se pre nekoliko godina ovoj temi video sam da je u međuvremenu objavljeno više naučnih radova u kojima su se pojavili neki novi aspekti rešavanja problema proksimiteta uopšte, MOID-a posebno, jer se pokazalo da postoji neslaganje teorijskih i praktičnih rešenja, posebno sa stanovišta broja stacionarnih tačaka funkcije rastojanja. To je značilo da problem proksimiteta nije izgubio aktuelnost i zato smo se u ovoj disertaciji pozabavili tim problemom.

U disertaciji je generisan i upotrebljen kombinovani metod računa proksimiteta koji omogućava veću efikasnost izračunavanja. Posledica je bila i znatno veći broj uporednih analiza i kompletnija slika osobina funkcije rastojanja.

1. UVOD

Pre svega treba istaći činjenicu da u astronomiji nisu tako česti slučajevi da neki problem traje skoro dva veka i da pored mnogih njegovih rešenja i rezultata on još uvek privlači pažnju kako astronoma tako i ostalih naučnika iz različitih oblasti. Upravo je to slučaj sa problemom proksimiteta, pri čemu hronološki gledajući sa ove vremenske distance, stiče se utisak da se njegovo rešavanje odvijalo nekako prirodno tj. postepeno, upravo onim tempom kako su i dolazila nova saznanja bilo da su ona astronomska ili matematička. Od rešavanja problema dve transcedentne jednačine sukcesivnim aproksimacijama bilo da su u pitanju prave ili ekscentrične anomalije, preko raznih pojednostavljenja funkcije rastojanja, do primene složenog matematičkog aparata i diferencijalne geometrije.

U tom smislu, vratimo se nakratko dva veka unazad, tj. na činjenicu tada opšteg uvažavanja Ticijus-Bodeovog pravila. Iz tih razloga, a posle otkrića Urana, postojala je sve veća verovatnoća da na udaljenosti od oko 2.8 AJ mora postojati planeta. To se zaista i obistinilo 1. Januara 1801. kada je italijanski astronom Pjaci (Piaci) to uočio. Međutim, dimenzije tog nebeskog tela bile su mnogo manje od očekivanih i ta prva mala planeta – asteroid dobila je ime Ceres. Od tada, počinje stalno otkrivanje novih sličnih nebeskih tela tako da ih sredinom XIX veka ima već oko petnaestak.

Ovde želim da istaknem da su do prve polovine XX veka i astronomi sa ovih prostora imali odredjeni doprinos izučavanju asteroida. Tako je Milorad B. Protić otkrio tridesetak asteroida a jednom od njih otkrivenom 15. Oktobra 1936. godine u glavnom asteroidskom prstenu, dao je ime Srbija. Pero Djurković otkrio je dva asteroida koji su dobili imena po Milutinu Milankoviću i Zvezdari. Svakako treba naglasiti i da je prof. dr. Vojislav Mišković u svojim Godišnjacima Našeg Neba koje je sa saradnicima objavljivao na Astronomskoj opservatoriji u Beogradu u periodu od 1930. godine do 1962. godine iscrpno izveštavao o svakom pronalasku novih planetoida kako ih je on tada zvao i davao odgovarajuća stručna objašnjenja.

U drugoj polovini XX veka bilo je numerisano već oko 1500 asteroida; početkom osamdesetih njihov broj raste na preko 2000, dok je veći skok usledio krajem devedesetih, kada je bilo numerisano 13 000 asteroida. S obzirom na neverovatan razvoj tehnike poslednjih decenija, broj numerisanih asteroida raste iz dana u dan, tako da ih trenutno ima preko tristo hiljada, a najveći deo je otkriven i registrovan poslednjih desetak godina.

Kada govorimo o njihovim kinematičkim karakteristikama treba reći da je njihovo kretanje u direktnom smeru a najveći broj ima putanje između Marsa i Jupitera (asteroidski pojas). U toj oblasti je njihova najveća koncentracija jer se tu nalazi preko

99% svih do sada numerisanih objekata. Ipak, veliki razvoj posmatračkih tehnika poslednjih decenija omogućava njihovo sve češće otkrivanje i van ove oblasti pa čak i van Sunčevog sistema. Veliki broj asteroida, bliskost pojedinih putanja asteroida pa čak i mogućnost sudara među njima su glavni razlozi što problem najmanjih međusobnih rastojanja tj. proksimiteta i njegova analiza u svim aspektima od njegove prve pojave sredinom 19. veka, pa do današnjih dana, ne gubi na aktuelnosti. Takodje u novije doba te analize vrlo često imaju za cilj izbegavanje sudara kosmičkih letilica sa sve većom koncentracijom svemirskog otpada. Ako tome dodamo da sličnim metodama izračunavamo i udaljenosti između Zemlje i asteroida, kao i da se na osnovu ponašanja asteroida u proksimitetu (bliskim prilazima) vrši izračunavanje njihovih masa, ne čudi što su se poslednjih dvadesetak i više godina u ovoj oblasti već ustalili termini kao što su: Near Earth Asteroids (NEAs), Near Earth Object (NEO), Minimal Orbit Intersection Distance (MOID), Potentially Hazardous Asteroids (PHAs) i Virtual Asteroids (VAs).

Može se primetiti iz gore navedenih naziva i njihovih skraćenica, da se danas, u eri velikog tehnološkog napretka, kako u oblasti posmatranja tako i računskih tehnika, problem proksimiteta transformisao i sve češće dve transcedentne jednačine koje opisuju problem zamenjuju odredjena analitička rešenja i razni oblici funkcije rastojanja. Velike mogućnosti računara i programskih paketa omogućavaju nam raznovrsne pristupe i različite analize problema proksimiteta. Near Earth Asteroids (NEAs) i Near Earth Objects (NEOs), su oblasti u kojima se matematički modeli i programski paketi za izračunavanje proksimiteta koriste isključivo za pronalaženje asteroida i drugih nebeskih tela čije su putanje u pojedinim njihovim delovima izuzetno bliske Zemljinoj. Potentially Hazardous Asteroids (PHAs) su, uslovno rečeno, ona podgrupa gore navedenih asteroida čije kretanje tj. mala vrednost proksimiteta sa Zemljom predstavlja realnu opasnost za eventualno ukrštanje putanja i mogući sudar. Virtual Asteroids (VAs) su nastali kao produkt različitih matematičkih modela za simulaciju asteroidskih kretanja a sa ciljem da se na osnovu njihovih putanjskih elemenata još preciznije i bolje definiše funkcija rastojanja sa svim njenim stacionarnim tačkama. S obzirom da pojedini proksimiteti mogu imati veće vrednosti od prevojnih tačaka funkcije rastojanja, uveden je i pojam Minimal Orbit Intersection Distance (MOID) koji se koristi za procenu rizika sudara između dva nebeska tela, a definisan je kao rastojanje između najbližih tačaka oskulatornih orbita ta dva nebeska tela.

Imajući sve to u vidu cilj našeg rada je da na osnovu postojećih analitičkih i drugih rešenja i metoda za nalaženje proksimiteta nebeskih tela, posebno tela Sunčevog sistema, napravimo proceduru i eventualno izgradimo metod za pronalaženje svih stacionarnih tačaka dve konfokalne orbite uz pokušaj da iscrpemo sva teorijski moguća rešenja i slučajeve, a što do sada nije uradjeno.

Svi rezultati analize proksimiteta i funkcije rastojanja, kao i ostalih kritičnih tačaka, biće dati na osnovu putanjskih elemenata, koji su pored ostalih podataka sastavni deo osnovne liste asteroida.

2. PREGLED VAŽNIJIH REZULTATA U OBLASTI PROKSIMITETA

2.1. Prvi radovi u oblasti proksimiteta i njihovi rezultati

Sredinom XIX veka, kada je bilo otkriveno oko petnaestak asteroida, američki, astronom B. A. Guld. (B. A. Gould) i nemački astronom H. A. Darest (H. A. d'Arest) bili su prvi koji su počeli da se bave ovom problematikom. Znajući međusobne položaje putanja asteroida, oni su pretpostavili da se proksimiteti između dve planetoidske putanje mogu očekivati u okolini relativnih čvorova.

S obzirom da je proksimitet najmanje rastojanje između dve asteroidske putanje, smatralo se da on može biti od većeg značaja za izučavanje kretanja asteroida. Direktor bečke opservatorije K. V. Litrov (K. V. Littrow) prvi je ukazao na mogućnost da se dva asteroida nađu istovremeno (ili bar približno u isto vreme) u tom položaju. On je tvrdio da bi asteroidi imali uticaja jedni na druge ako bi se nalazili dosta blizu, pod uslovom da svi ostali poremećaji (od velikih planeta), budu što tačnije izračunati i da bi se na osnovu tih uticaja mogle izračunati mase asteroida.

To je naročito bilo moguće kod asteroida koji su se dugo kretali "jedan pored drugog" oko proksimiteta, skoro "paralelno". Bez obzira što je Litrov ukazao na to, tek će se E. Stromgren (E. Strömgrem), direktor opservatorije u Kopenhagenu, pozabaviti time. On je smatrao da proksimiteti asteroida od "samo" nekoliko stotih delova AJ nisu dovoljni da proizvedu merljive poremećaje na osnovu kojih bi se mogle izračunati, bar približno, neke od masa asteroida. Kasnije se ispostavilo sasvim suprotno, tj. da upravo izračunavanjem međusobnih gravitcionih uticaja možemo dobiti najpouzdanije vrednosti masa asteroida. Važno je napomenuti da je još 1802. godine (odmah posle otkrića Palasa), Gaus (Gaus) dao sugestiju da se mase asteroida mogu dobiti na osnovu međusobnih gravitacionih efekata. Međutim, zbog problema koji proističu iz činjenice da su asteroidi veoma malih masa, Gausova nada ostvarila se tek posle 172. godine, kada su mase Ceresa i Palasa prvi put određene upravo po njegovoj zamisli.

Prvo izračunavanje proksimiteta daje nemački astronom Grunert (Grunert) i to preko opštih izraza za određivanje tačaka ukrštanja dvaju konusnih preseka u prostoru. Izrazi su suviše komplikovani, tako da su u praksi bili skoro neupotrebljivi. Pored sugestija koje je dao za međusobne uticaje asteroida, Litrov takođe daje i jednačine koje su imale konkretnu primenu u rešavanju problema proksimiteta. Promenljive veličine u njima su ekscentrične anomalije (E i E_1) i to je prvi put da se proksimiteti predstavljaju preko njih.

Jednačine koje je on izveo imaju oblik:

$$\begin{aligned} &\alpha\sin(E+B)-a^2e^2\sin 2E+\alpha'\sin(E+B')\cos E_1+\alpha''\sin(E+B'')\sin E_1=0,\\ &\beta\sin(E+C)-a_1{}^2e_1{}^2\sin 2E_1+\beta'\sin(E_1+C')\cos E+\beta''\sin(E_1+C'')\sin E=0. \end{aligned} \tag{2.1}$$

U ovim jednačinama a i a_1, su velike poluose, e i e_1, ekscentričnosti dotičnih putanja, a veličine α, α', α'', β, β', β'', B, B', B", C, C' i C" funkcije putanjskih elemenata uočenih planetoida.

Litrov je zbog nemogućnosti da na jednostavan i brz način lako dođe do parova asteroida gde postoje proksimiteti, pribegao pravljenju modela asteroidskih putanja od žice. Na taj način prvo bi otkrio kod kojih parova se putanje dovoljno približavaju, pa tek onda pristupao izračunavanju.

Interesantno je da je ovakav postupak ujedno omogućavao da nađe i približne vrednosti heliocentričnih longituda položaja proksimiteta. Ako se ovako nađena vrednost longitude nije mnogo razlikovala od longitude relativnog čvora, Litrov je za približnu vrednost longitude položaja proksimiteta uzimao nađenu vrednost longitude. Tačniju vrednost položaja proksimiteta određivao je sukcesivnim aproksimacijama.

Linser (Linsser) je bio sledeći astronom koji se bavio ovim problemom. Njegov postupak se svodio na izračunavanje heliocentričnih longituda, heliocentričnih latituda i potega uočenih asteroida u ekvidistantnim razmacima. Upoređivanjem izračunatih potega i latituda i izdvajanjem onih parova za koje su razlike ovih vrednosti padale ispod usvojenih granica, određivao je vrednosti longituda proksimiteta. Litrov i Linser su za najmanje međusobno rastojanje usvojili iznos od 0.1 AJ.

Sin astronoma Galea (Galle) (koji je otkrio Neptun), A. Gale (A. Galle), u svojoj doktorskoj disertaciji formirao je jednačine za minimalno rastojanje između putanja u obliku:

$$\lambda \sin(E_1 + \Lambda) = \frac{a}{2a_1} \sin^2 \varphi \sin 2E + \alpha \sin(E + A),$$
$$\lambda' \sin(E + \Lambda') = \frac{a_1}{2a} \sin^2 \varphi_2 \sin 2E_1 + \alpha' \sin(E_1 + A'). \qquad (2.2)$$

Veličine λ, λ', Λ, Λ', α, α', A, A' mogu se predstaviti preko glomaznih i komplikovanih izraza dobijenih posle niza smena i transformacija. Galle je, kao i njegovi prethodnici, nepoznate E i E1 izračunavao sukcesivnim aproksimacijama, uzimajući za polazne vrednosti ekscentričnih anomalija one dobijene pomoću relativnih čvorova.

Ilustracije radi, tada je broj otkrivenih planetoida bio 232, a Galle je konkretne rezultate za neki od parova radio logaritmima na četiri decimale.

Direktor opservatorije u Nici G. Fajet (G. Fayet) je sa svojim saradnicima odredio uzajamne proksimitete za 800 asteroidskih putanja i proksimitete za periodične komete i velike planete.

On je rešavao problem takođe sukcesivnim aproksimacijama, a polazio je od toga da su kod proksimiteta između dva asteroida heliocentrične longitude jednake (što ne mora uvek da bude tačno), i ograničavao se na parove kod kojih je minimalna udaljenost između putanja manja od 0.01 AJ. Postupak kojim se služio je ideja engleskog astronoma A. Mart-a (A. Marth) izložena još 60 godina ranije, koja u stvari predstavlja konstruisanje i nanošenje na milimetarsku hartiju intersekata asteroida. Iz njih je dobijao približne položaje proksimiteta, a nakon izračunavanja i udaljenosti tačaka

proksimiteta. Inače intersekt asteroida je zatvorena kriva linija, koja se dobija kao projekcija stvarne asteroidske putanje na poluravan koja je normalna na ekliptiku.

Tačnost Fajeovog postupka iznosila je od 0.5o-1o za vrednost longitude a ±0.003 AJ za udaljenost proksimiteta.

Rezultati njegovog rada su oko 320 000 parova intersekata, među kojima je pronašao šest parova kod kojih u položaju proksimiteta udaljenost između asteroida nije veća od 0.0004 AJ, tj. 60 000 km.

2.2. Radovi naših naučnika u oblasti proksimiteta

Opširan istorijski pregled najznačajnijih radova na ovu temu dao je V.V.Mišković (1974.). Uglavnom su to bile analize dotadašnjih radova nemačkih astronoma. On je obradu ograničavao na slučajeve asteroida koji su se kretali u istoj ravni. Drugim rečima, slučajeve asteroida sa približno jednakim čvorovima i nagibima putanja. Ovakve parove ili grupe asteroida nazvao je kvazikomplanarnim asteroidima.

Svakako da je najkompletniju metodu za izračunavanje proksimiteta asteroidskih putanja dao J. P. Lazović (1964) u svojoj doktorskoj disertaciji "Važnije osobenosti u kretanju kvazikomplanarnih planetoida". Ova metoda je najviše primenjivana, a sa određenim dopunama u upotrebi je i danas. Određivanje proksimiteta pomoću izraza u kojima figurišu prave anomalije kao promenljive je takođe dao Lazović (1967), pri čemu je korišćen isti postupak, sa tom razlikom što su krajnja rešenja položaja i veličine proksimiteta izražena preko pravih anomalija.

U prvom slučaju on polazi od uslovnih jednačina:

$$\frac{\partial(\rho^2)}{\partial E_1}=0,\frac{\partial(\rho^2)}{\partial E_2}=0, \qquad (2.3)$$

pri čemu je kvadrat rastojanja izražen preko ekscentričnih anomalija E_1 i E_2, odnosno

$$\rho^2=(f_{1x}(E_1)-f_{2x}(E_2))^2+(f_{1y}(E_1)-f_{2y}(E_2))^2+(f_{1z}(E_1)-f_{2z}(E_2))^2. \qquad (2.4)$$

Posle niza smena, sređivanja i rešavanja dobija jednačine u obliku:

$$\begin{aligned} f(E_1,E_2)&\equiv X_2\sin E_1+Y_2\cos E_1-Z_1\sin E_1\cos E_1=0,\\ g(E_1,E_2)&\equiv X_1\sin E_2+Y_1\cos E_2-Z_2\sin E_2\cos E_2=0. \end{aligned} \qquad (2.5)$$

gde su veličine X_2, Y_2, Z_1, X_1, Y_1 i Z_2 odgovarajući koeficijenti koji zavise od putanjskih elemenata.

Ovo su jednačine transcendentnog tipa i on ih rešava sukcesivnim aproksimacijama, pri čemu određuje uzastopne i to sve manje i manje popravke ΔE_{10}, ΔE_{20}, ΔE_{11}, ΔE_{21}, ...,$\Delta E_{1(k-1)}$, $\Delta E_{2(k-1)}$ dok ne odredi za svaki sistem, tj. za svako ukrštanje putanja vrednosti

$$E_{1k}=E_{1(k-1)}+\Delta E_{1(k-1)} \text{ i } E_{2k}=E_{2(k-1)}+\Delta E_{2(k-1)}, \qquad (2.6)$$

koje zadovoljavaju polazne jednačine sa tačnošću sa kojom se to želi.

Prve popravke ΔE_{10} i ΔE_{20} mogu se odrediti iz jednačina oblika

$$f_0 + \Delta E_{10}\frac{\partial f}{\partial E_{10}} + \Delta E_{20}\frac{\partial f}{\partial E_{20}} = 0\,,\ g_0 + \Delta E_{10}\frac{\partial g}{\partial E_{10}} + \Delta E_{20}\frac{\partial g}{\partial E_{20}} = 0\,, \qquad (2.7)$$

pri čemu se dobijaju nove vrednosti $E_{11} = E_{10} + \Delta E_{10}$ i $E_{21} = E_{20} + \Delta E_{20}$.

Sve dalje popravke dobijaju se na analogan način, a vrednosti približnih popravki zbog učinjenih zanemarivanja kod razvijanja u red imaju oblik:

$$\Delta E_{10} = \frac{g_0\frac{\partial f}{\partial E_{20}} - f_0\frac{\partial g}{\partial E_{20}}}{\frac{\partial f}{\partial E_{10}}\frac{\partial g}{\partial E_{20}} - \frac{\partial f}{\partial E_{20}}\frac{\partial g}{\partial E_{10}}}\,, \qquad \Delta E_{20} = \frac{f_0\frac{\partial g}{\partial E_{10}} - g_0\frac{\partial f}{\partial E_{10}}}{\frac{\partial f}{\partial E_{10}}\frac{\partial g}{\partial E_{20}} - \frac{\partial f}{\partial E_{20}}\frac{\partial g}{\partial E_{10}}}\,. \qquad (2.8)$$

Lazović je ovu metodu potpuno kompletirao 1993. godine.

Kod rešavanja problema preko pravih anomalija, Lazović polazi od uslova da heliocentrični vektori položaja $\vec{r}_1\, i\, \vec{r}_2$ prve i druge eliptične putanje budu izraženi preko pravih anomalija (υ_1, υ_2) u obliku,

$$\begin{aligned}\vec{r}_1 &= r_1\cos\upsilon_1\vec{P}_1 + r_1\sin\upsilon_1\vec{Q}_1,\\ \vec{r}_2 &= r_2\cos\upsilon_2\vec{P}_2 + r_2\sin\upsilon_2\vec{Q}_2,\end{aligned} \qquad (2.9)$$

a da je vektor relativnog položaja jednak $\vec{\rho} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$. Kvadrat rastojanja će isto biti u funkciji pravih anomalija, a uslovne jednačine za postojanje ekstremuma imaće sledeći oblik:

$$\frac{\partial \rho^2}{\partial \upsilon_1} = 0\,,\ \frac{\partial \rho^2}{\partial \upsilon_2} = 0\,. \qquad (2.10)$$

Posle rešavanja i sređivanja ponovo dobija izraze oblika

$$f(\upsilon_1, \upsilon_2) = 0\,,\ g(\upsilon_1, \upsilon_2) = 0 \qquad (2.11)$$

tj. transcedentni sistem jednačina, ali sada izražen preko pravih anomalija, koje takođe rešava sukcesivnim aproksimacijama dok ne nađe vrednosti,

$$\begin{aligned}\upsilon_{1n} &= \upsilon_{1(n-1)} + \Delta\upsilon_{1(n-1)},\\ \upsilon_{2n} &= \upsilon_{2(n-1)} + \Delta\upsilon_{2(n-1)},\end{aligned} \qquad (2.12)$$

koje zadovoljavaju polazni sistem jednačina, sa potrebnim stepenom tačnosti.

Sledeće popravke u nizu dobijaju se na analogan način, čime se može dobiti još tačnija vrednost pravih anomalija

$$\begin{aligned}\upsilon_{12} &= \upsilon_{10} + \Delta\nu_{10} + \Delta\upsilon_{11} = \upsilon_{11} + \Delta\upsilon_{11},\\ \upsilon_{22} &= \upsilon_{20} + \Delta\nu_{20} + \Delta\upsilon_{21} = \upsilon_{21} + \Delta\upsilon_{21}.\end{aligned} \qquad (2.13)$$

Dalje popravke dobijaju se razvojem funkcija $f(\upsilon_1, \upsilon_2) = 0$ i $g(\upsilon_1, \upsilon_2) = 0$ u Tejlorov red i zanemarivanjem članova sa stepenima većim od jedan. Prve od njih dobijaju se iz jednačina

$$f_0 + \Delta\upsilon_{10} f'_{\upsilon_{10}} + \Delta\upsilon_{20} f'_{\upsilon_{20}} = 0,$$
$$g_0 + \Delta\upsilon_{10} g'_{\upsilon_{10}} + \Delta\upsilon_{20} g'_{\upsilon_{20}} = 0, \qquad (2.14)$$

gde su:

$$f'_{\upsilon_{10}} = \left(\frac{\partial f}{\partial \upsilon_1}\right)_{\upsilon_1=\upsilon_{10},\upsilon_2=\upsilon_{20}},$$
$$f'_{\upsilon_{20}} = \left(\frac{\partial f}{\partial \upsilon_2}\right)_{\upsilon_1=\upsilon_{10},\upsilon_2=\upsilon_{20}},$$
$$g'_{\upsilon_{10}} = \left(\frac{\partial g}{\partial \upsilon_1}\right)_{\upsilon_1=\upsilon_{10},\upsilon_2=\upsilon_{20}}, \qquad (2.15)$$
$$g'_{\upsilon_{20}} = \left(\frac{\partial g}{\partial \upsilon_2}\right)_{\upsilon_1=\upsilon_{10},\upsilon_2=\upsilon_{20}},$$

a posle rešavanja sistema one su

$$\Delta\upsilon_{10} = \frac{g_0 f'_{\upsilon_{20}} - f_0 g'_{\upsilon_{20}}}{f'_{\upsilon_{10}} g'_{\upsilon_{20}} - f'_{\upsilon_{20}} g'_{\upsilon_{10}}},$$
$$\Delta\upsilon_{20} = \frac{f_0 g'_{\upsilon_{20}} - g_0 f'_{\upsilon_{10}}}{f'_{\upsilon_{10}} g'_{\upsilon_{20}} - f'_{\upsilon_{20}} g'_{\upsilon_{10}}}. \qquad (2.16)$$

Razmatrajući razne aspekte i mogućnosti određivanja proksimiteta Lazović radi i na numeričko-grafičkim metodama. U jednoj takvoj metodi Lazović (1974) dolazi do jednačina pravih u kojima kao parametar figuriše prava anomalija čija se vrednost očitava predstavljanjem pravih na jedinstvenom grafiku.

Razvojem računarske tehnike, naročito u poslednje četiri decenije, numeričke metode su u potpunosti potisnule grafičke, ali su to u principu bile prilagođene metode Lazovića (1976,1978). Isti autor (Lazović 1970,1971), daje analizu i vrši izračunavanje poremećaja parova kvazikomplanarnih planetoida u kretanju, dok su u proksimitetu.

Dobijeni rezultati pokazuju i potvrđuju da međusobni gravitacioni uticaj malih planeta, kada se istovremeno nalaze u proksimitetu ili u njegovoj blizini, uopšte nije zanemarljiv. Lazović i M. Kuzmanoski (1974,1976) daju određene rezultate u vezi trajanja proksimiteta, kao i promena međusobnih rastojanja zbog promena njihovih putanjskih elemenata .

Izračunavanjem proksimiteta između putanja najvećih malih planeta (Ceres, Palas, Juno, Vesta) i drugih numerisanih malih planeta, Lazović i Kuzmanoski (1983) su dobili proksimitet od samo 0,0000154 AJ, tj. svega 2300 km i to između (2) Palas i (1193) Afrika.

J. Simovljević (1977) daje vrednosti početnih uslova, tj. ekscentričnih anomalija, za izračunavanje proksimiteta metodom sukcesivnih aproksimacija. Simovljević (1979) daje proračune, tj. analitičke izraze poremećajnih efekata planetoidskih putanja tokom trajanja proksimiteta. Takođe, kao što je u predgovoru već pomenuto, on iznosi jednu

interesantnu ideju za rešavanje proksimiteta koja je u stvari i jedan od osnova ovoga rada.

M. Kuzmanoski i Z. Knežević (1993) objavljuju zajednički rad pod naslovom 'Close Encounteres with Large Asteroids in the Next 50 Years'. Ovde je opisana i primenjena kombinovana metoda za detekciju bliskih susreta među najvećim asteroidima (većim od 100 km u prečniku), u periodu od 50 godina počev od 1991. godine. Metod se sastoji od višestepene selekcije, a tačna numerička integracija daje parametre bliskih susreta sa visokom pouzdanošću. Rezultat je lista od 208 bliskih susreta na rastojanjima manjim od 0.01 AJ.

2.3. Pregled značajnijih radova u oblasti proksimiteta od druge polovine XX veka do danas

Nećemo pogrešiti ako kažemo da je rad iz 1968. godine (Sitarski, 1968), G. Sitarskog 'Approaches of the Parabolic Comets to the Outer Planets' jedan od najcitiranijih u oblasti proksimiteta, ne samo zato što ima preko 40 godina kako je objavljen, već zbog činjenice da autor u drugom poglavlju 'Minimal Distances between Two Orbits', na vrlo jednostavan način, definiše problem. Naime, on preko kvadrata razlike vektora položaja izraženih preko putanjskih elemenata i definisanja funkcije rastojanja i njenih prvih i drugih izvoda po dve nezavisno promenjive veličine dobija jednačine pomoću kojih može da odredi položaje na orbitama gde su minimalne vrednosti funkcije rastojanja tj. proksimiteti. Ovde treba naglasiti da je sličan metod za izračunavanje proksimiteta razvijen od strane Lazovića (1967), što je već pomenuto u prethodnom poglavlju.

Ne mnogo manje citiran rad je iz 1975. godine (Bernstain, 1975), D. N. Bernštajna 'Broj korena sistema jednačina'. Zbog činjenice da je problem proksimiteta u osnovi matematički (sistem dve transcedentne jednačine koje se mogu transformisati u jednačine četvrtog stepena), autor korišćenjem Lorenovih polinoma na mnogostrukosti i zadovoljenja uslova mešovite zapremine Minkovskog preko dokaza dve teoreme definiše broj korena sistema jednačina.

Kratak, ali vrlo često citiran rad iz 1978. godine (Vassiiliev, 1978) N. N. Vasiljeva 'Determining of critical points of distance function between points of two Keplerian orbits', osim jednostavnosti i već manje više očekivanog načina definisanja problema preko niza smena i funkcije rastojanja ima i konkretne rezultate za slučaj orbita Plutona i Neptuna. U tom smislu su matematički model, program i rezultati Vasiljeva proveravani, i upoređivani sa rezultatima koji su dobijeni korišćenjem kombinovane metode koja će biti predstavljena u ovom radu u poglavlju 4.

1986. godine (Dybczinski at al.,1986) P. A. Dubčinski, T. J. Jopek, R. A. Serafin u svom radu 'On the minimum distance between two Keplerian orbits with a common focus' generalizuju problem proksimiteta tako da pored eliptičnih putanja svoj metod prilagođavaju paraboličnim i hiperboličnim putanjama. Oni ukazuju na neke praktične nedostatke kompjuterskog izračunavanja nekoliko autora koji su se ranije bavili istom problematikom (Lazović 1967, 1981, Murray 1980, neophodnost odgovarajućih početnih vrednosti i Dubyago 1949, Sitarski 1968, Babađanov 1980, ograničenja u

primenjivosti metode). Svoj metod, koji je suštinski sličan prethodnima, numerički testiraju pomoću četiri metode:

NL-Njutnov metod (Lazović, 1967)

NL-Njutnov metod (Hoosts et al., 1984)

SM-metod skeniranja

AM-naizmenični iterativni metod

1999. godine (Kholshevnikov and Vassiiliev, 1999) K. V. Holševnikov i N. N. Vasiljev u radu 'On the distance function between points of two Keplerian orbits' uspevaju da određenim smenama uproste funkciju rastojanja i problem praktično svode na određivanje svih realnih korena trigonometrijskog polinoma reda 8, pri čemu su koeficijenti polinoma racionalne funkcije putanjskih elemenata. Upotrebom računarske algebre pokazuju da polinom manjeg stepena sa takvim svojstvima ne postoji.

'On the stationary points of the squared distance between two with a common focus' iz 2002. godine autora (Gronchi, 2002) G. F. Gronkija je, svakako, najcitiraniji rad, ako uzmemo u obzir da je objavljen pre skoro 10 godina. U svom radu on formira kvadrat funkcije rastojanja u obliku:

$$d^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2$$

pri čemu je parametrizacija elipsi data izrazima u zagradama i to:

$$x' = a'[\cos(\omega')(\cos(u') - e') - \sqrt{1 - e'^2}\sin(\omega')\sin(u')]$$

$$y' = a'[\sin(\omega')(\cos(u') - e') + \sqrt{1 - e'^2}\cos(\omega')\sin(u')]$$

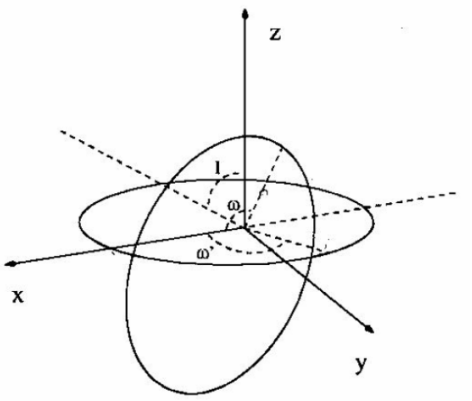
$$z' = 0$$

$$x = a[\cos(\omega)(\cos(u) - e) - \sin(\omega)\sqrt{1 - e^2}\sin(u)]$$

$$y = a[\sin(\omega)(\cos(u) - e) + \cos(\omega)\sqrt{1 - e^2}\sin(u)]\cos(I)$$

$$z = a[\sin(\omega)(\cos(u) - e) + \cos(\omega)\sqrt{1 - e^2}\sin(u)]\sin(I)$$

Parametri ω, ω' i I imaju orijentaciju kao na slici 1.



Slika 2.1: Skica Gronkijevog referentnog sistema dve elipse u prostoru sa najmanjim brojem parametara, Gronchi (2002).

Kao što se može videti, gornji izrazi su dati preko putanjskih elemenata i pravih anomalija pri čemu veličina I predstavlja međusobni nagib ravni u kojima se nalaze elipse. Pored ovoga i odnos velikih poluosa je uzet tako da jedna od njih ima vrednost 1, a sve u smislu definisanja problema sa što manjim brojem parametara. Kritične tačke funkcije rastojanja moraju zadovoljavati uslove:

$$\frac{\partial d^2}{\partial u} = 0;\ \frac{\partial d^2}{\partial u'} = 0;$$

gde se posle još nekoliko pojednostavljenja i poznatih trigonometrijskih smena dobija sistem polinoma u obliku:

$$p(t,s) = \alpha(t)s^2 + \beta(t)s + \gamma(t) = 0$$

$$q(t,s) = A(t)s^4 + B(t)s^3 + D(t)s - A(t) = 0$$

Koristeći Bernštajnovu teoremu iz prethodno navedenog rada i sumu Minkovskog Gronki rešava problem i dokazuje da je najveći mogući broj rešenja tj. stacionarnih tačaka 16. Njegov algoritam je baziran na Brzoj Furijeovoj transformaciji gde nakon velikog broja numeričkih eksperimenata, približno sa oko milion različitih parametara elipsi, daje tabelu zavisnosti ekscentričnosti i broja stacionarnih tačaka u obliku:

Tabela 2.1: Zavisnost broja stacionarnih tačaka od ekscentričnosti prve i druge eliptične putanje, Gronchi (2002).

ekscentričnost prve putanje	ekscentričnost druge putanje	broj stacionarnih tačaka
$e \neq 0$	$e' \neq 0$	12
$e \neq 0$	$e' = 0$	10
$e = 0$	$e' \neq 0$	10
$e = 0$	$e' = 0$	8

U sledećem radu iz 2005. godine (Gronchi, 2005) G. F. Gronki 'An algebraic method to compute the critical points of the distance function between two Keplerian orbits' on daje algebarski metod za izračunavanjem kritičnih tačaka funkcije rastojanja između dve

Keplerove orbite zasnovane na teoriji eliminacije. Efikasan algoritam izračunava kritične tačke ne samo kod eliptičnih putanja već i kod paraboličnih i hiperboličnih koje imaju zajedničku žižu. Na kraju daje određene komentare u vezi nekih degerativnih slučajeva koji se mogu pojaviti kada je u pitanju kretanje asteroida.

Tih godina (Baluyev and Kholshevnikov, 2004) Baljujev R. i Holševnikov K. rade na problemu neporemećenih orbitalnih razdaljina i objavljuju rad pod nazivom: 'Distance

between two arbitrary unperturbed orbits'. Oni utvrđuju sve realne korene trigonometrijskih polinoma stepena osam i potvrđuju da kod neporemećenih putanja polinom nižeg stepena ne postoji. Takođe, oni izloženi postupak pored eliptičnih putanja primenjuju i na hiperbolične i parabolične putanje.

2006. godine (Murison and Munteanu, 2006) M. A. Murison i A. Munteanu 'On the Distance Function between Two Confocal Keplerian orbits' rade na analitičkim i numeričkim istraživanjima problema minimalnog rastojanja preko ekscentričnih anomalija i konstatuju opšte rešenje u obliku polinoma stepena 8 izraženih preko $\cos E_1$ i $\cos E_2$. Numerički rešavajući Keplerovu jednačinu i jednostavnim algoritmom za pretragu, moguće je odrediti vreme bliskih prilaza dva asteroida. Takav brzi filter služi za selektovanje mogućih proksimiteta bez potrebe za numeričkom integracijom diferencijalnih jednačina kretanja. Kao i kod Gronki-ja (2002) (gde teorija kaže da je gornja granica 16 stacionarnih tačaka) i ovde su numerička istraživanja ukazala da je gornja granica broja stacionarnih tačaka 12.

2006. godine (Gronchi at al., 2006) G. F. Gronki, G. Tomei i A. Milani objavljuju rad 'Mutual geometry of confocal Keplerian orbits: uncertainty of the MOID and search for virtual PHAs'. U ovom radu uvodi se ranije navedeni pojam MOID – Minimum Orbit Intersection Distance koji su prvi upotrebili Bowell i Muinonen (1994) kao korisno sredstvo za ustanovljavanje da li se dva nebeska tela sudaraju ili prolaze veoma blizu. Ovde su dati određeni rezultati u vezi broja lokalnih minimuma kao i njihov položaj u odnosu na uzlazni i izlazni čvor. Takođe koristeći ovaj pristup autori su tražili virtuelne PHA – Potentially Hazardous Asteroids i pronašli objekte čije orbite su različite od onih kakve imaju NEA – Near Earth Asteroids.

2010. godine (Armellin at al., 2010) R. Armelin, P. Di Lizia, M. Berc i K. Makino objavljuju rad 'Computing the critical points of the distance function between two Keplerian orbits via rigorous global optimization'. Metod koji je ovde predstavljen globalno je optimizovan i zasniva se na Tejlorovom modelu. Posle dobijanja stacionarnih tačaka odredjene sposobnosti modela se koriste za analizu uticaja nezavisnih orbitalnih parametara na položaj stacionarnih tačaka.

U testovima su korišćene jednostavne orbite i Aphophis asteroid a globalni optimizator je bio COSY-GO. Metod takođe omogućava klasifikaciju novootkrivenih nebeskih tela a opseg procena svih MOID-a je baziran na Monte Carlo algoritmu.

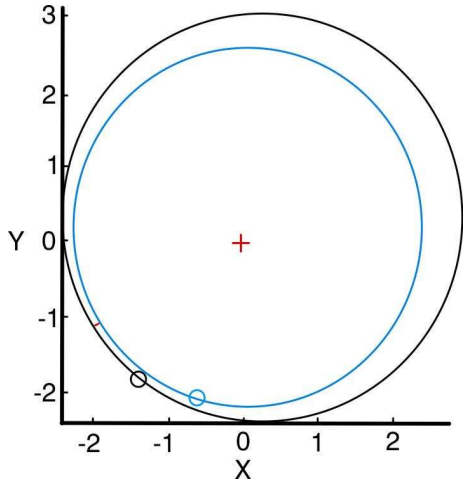
Vidimo dakle da je određivanje proksimiteta u modernim tokovima astronomskih istraživanja dobilo jednu drugačiju formu i da je on i dalje zastupljen astronomski problem, iako datira od sredine XIX veka. Zbog činjenice da se njegova rešenja mogu koristiti i za druga izračunavanja, on ima uvek određenu aktuelnost i značaj. To najbolje potvrđuju upravo u uvodnom delu navedeni naslovi pojedinih oblasti koje su se definisale poslednjih decenija. Sve zajedno to su sigurno opravdani razlozi za stalno traženje novih načina prilaženja problemu proksimiteta, bilo da je reč o njegovom izračunavanju, određivanju uslova za njegovo postojanje ili definisanje problema u celini.

3. PROKSIMITETI I KRITIČNE TAČKE FUNKCIJE RASTOJANJA

3.1 Broj proksimiteta i uslovi njihovog postojanja

Kada govorimo o uslovima postojanja proksimiteta prvo što treba da imamo na umu je činjenica da je ovo prostorni problem i da je neophodno prvo definisati šta se događa u ravni kada imamo dve konfokalne elipse. U tom smislu, dokaz da između dve elipse u ravni sa jednom zajedničkom žižom, ne može postojati više od dve presečne tačke (Milisavljevic, 2002), treba uzeti u obzir. Ono što se kasnije događa kada jednoj od elipsi počnemo da menjamo pored geometrijskih parametara (velike poluose i ekscentričnosti) i ostale parametre tj. putanjske elemente (nagib, argument uzlaznog čvora i argument perihela), u najkraćem se može opisati na sledeći način:

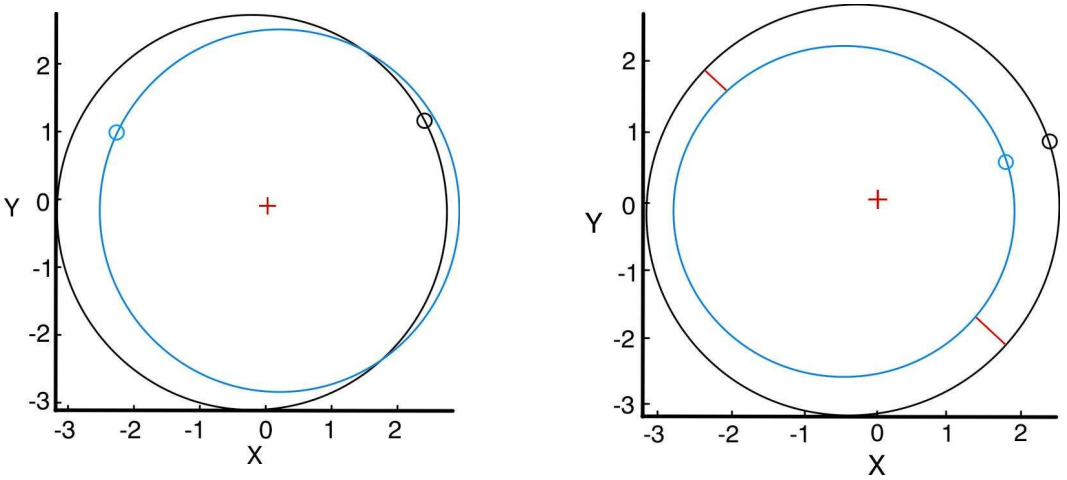
Jedan proksimitet uvek postoji. Sama priroda problema na to ukazuje, tj. poznato je da između bilo koje dve zatvorene krive linije u prostoru mora postojati makar jedno minimalno rastojanje. Zbog toga se o nekim posebnim uslovima koji moraju biti ispunjeni, ovde ne mora ni govoriti, jer je to jasno samo po sebi (videti primer na sl. 3.1.)



Slika 3.1: Projekcija putanja para malih planeta (4 – 638) na ravan prve putanje tj. XY ravan

Dva proksimiteta mogu postojati i to je praktično najčešći slučaj. Oni se obično nalaze u blizini relativnih čvorova, ili kada se radi o kvazikomplamarnim putanjama, u okolini njihovih projekcijskih preseka. S obzirom na relativno mali međusobni nagib svih prikazanih primera, njihove projekcije na XY ravan daju dosta realnu sliku stvarnog stanja. Ipak, zbog tačnog izražavanja uveli smo termin projekcijski presek, jer se te tačke ne moraju uvek nalaziti u blizini relativnih čvorova. Da bi slučaj sa dva proksimiteta bio ispunjen, dovoljno je da između ravni u kojima se nalaze putanje

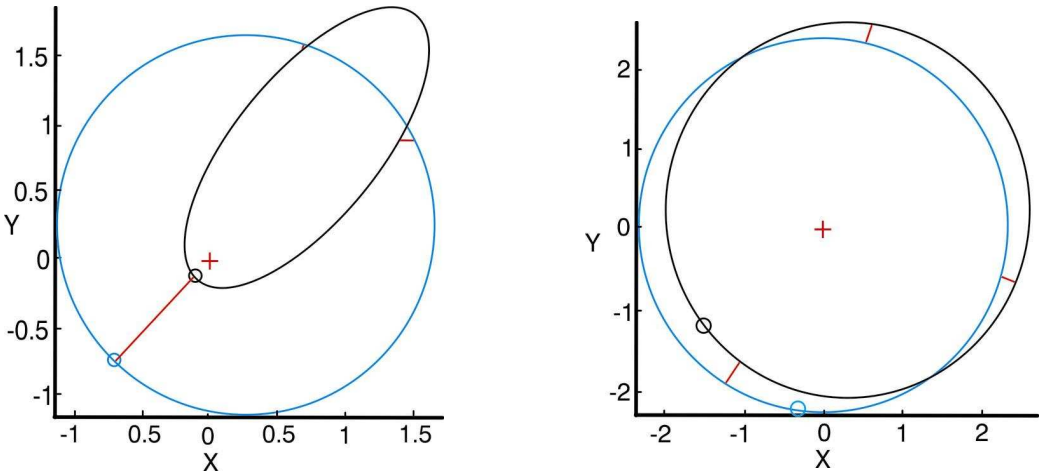
postoji određeni nagib, ili da se, gledajući njihovu projekciju na XY ravan, stiče utisak kao da se seku u dve tačke. Slike 3.2 a i 3.2 b u principu odgovaraju svim mogućim slučajevima u stvarnosti.



a) *b)*

Slika 3.2: a)Projekcija putanja para malih planeta (1 – 3468) na XY ravan. b) Projekcija putanja para malih planeta (6 – 16) na XY ravan.

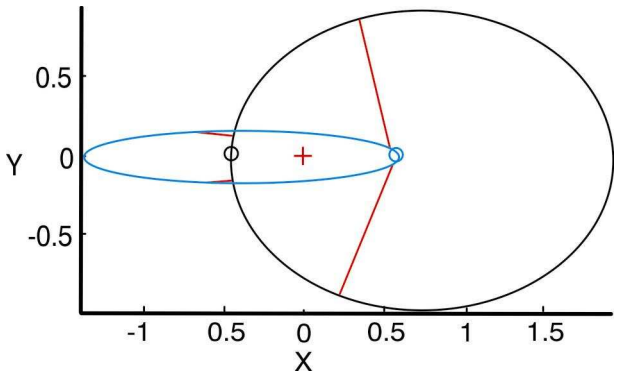
Tri proksimiteta mogu postojati, ali se taj slučaj, kada su u pitanju putanje malih planeta, sreće mnogo ređe. Proksimiteti kod ovog slučaja obično su raspoređeni tako da su dva u okolini projekcijskih preseka putanja (ređe u blizini čvorova), dok je treći uvek skoro simetrično u sredini naspram njih. Uslovi za postojanje ovakvog slučaja obično proističu iz specijalnih položaja prethodnog slučaja. Sa slika 3.3 a i 3.3 b to se može jasno videti (napomena: položaj žiže na slici 3.3a prilično odstupa od realnog jer je u pitanju veliki medjusobni nagib elipsi)



a) *b)*

Slika 3.3: a)Projekcija putanja para malih planeta (1943 – 3200) na XY ravan. b) Projekcija putanja para malih planeta (287 – 486) na XY ravan.

Četiri proksimiteta takođe mogu postojati, sa tom razlikom što ih je u stvarnosti veoma teško pronaći. Primer sa sl. 3.4 je simulirani model koji imamo u radu Gronkija (2002), i on upravo pokazuje da je slučaj sa četiri proksimiteta teorijski moguć.

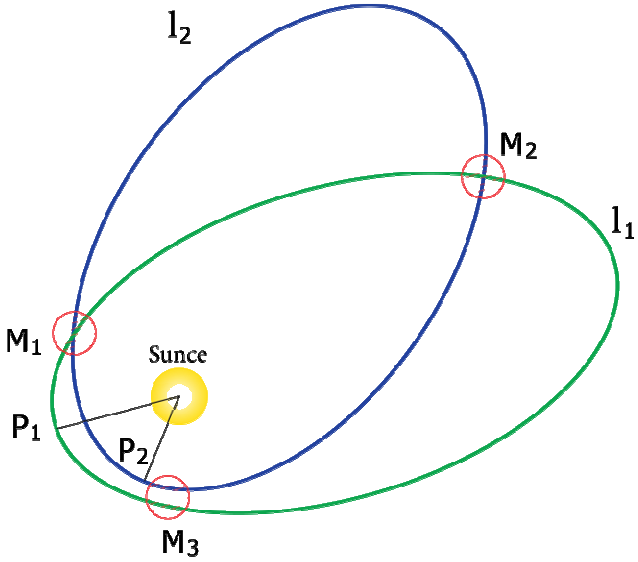


Slika 3.4: Projekcija putanja simuliranog modela para malih planeta M1 i M2 na ravan prve putanje tj. XY ravan

Postavlja se pitanje šta je to što je realno moguće i što se stvarno može dogoditi u ravni između dve elipse sa jednom zajedničkom žižom, a što bi pri maloj promeni međusobnog nagiba, tj. u prostornom slučaju, uslovilo pojavu tri proksimiteta?! To bi bio slučaj kada imamo dve presečne tačke i treću koja je veoma bliska dodiru, kao što je prikazano na slici 3.5

U tom trećem karakterističnom položaju (na slici 3.5 obeležen sa M_3) može se nalaziti jedno minimalno rastojanje između dve elipse, a ono je najmanje kada je $SP_1=SP_2$ tj. kada su perihelske daljine jednake.

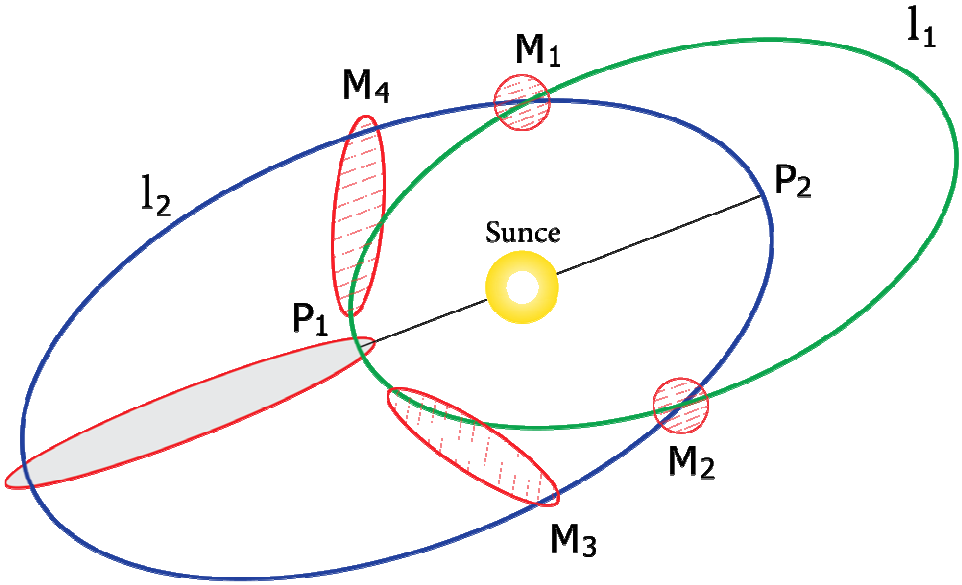
Ipak, nikada se ne može dogoditi da se to minimalno rastojanje degeneriše u tačku (Milisavljević, 2002).



Slika 3.5: Šematski prikaz položaja dve konfokalne eliptične putanje za postojanje 3 proksimiteta

Kada se ispune dati uslovi i dođe do situacije kao na sl. 3.5 (obično je karakteristično mesto "dodira" u blizini perihela one elipse koja se pomera), dobijamo model koji u prostornom slučaju (kada između ravni u kojima se elipse nalaze postoji određeni nagib), ima tri proksimiteta. Od ta tri proksimiteta, dva su, kao i obično, u okolini projekcijskih preseka putanja M_1 i M_2, dok je treći u okolini karakterističnog položaja M_3.

Kada govorimo o slučaju sa četiri proksimiteta on bi se mogao shvatiti kao specijalni slučaj prethodnog prikazanog na sl. 3.5. Postavimo elipse sa te slike u položaj sa dve presečne tačke, ali sada sa međusobnom razlikom u poziciji perihela od približno 180º (videti sl. 3.6).



Slika 3.6: Šematski prikaz položaja dve konfokalne eliptične putanje za postojanje 4 proksimiteta

Na prvi pogled vidimo da je to već razmatrani slučaj dva proksimiteta sa sl. 3.2a Međutim, iz ovakve ravanske postavke u prostornom slučaju, pri dovoljno velikoj razlici u nagibima ravni u kojima se elipse nalaze, dolazi upravo do pojave još dva proksimiteta i to u zonama M_3 i M_4. Ovi proksimiteti su skoro simetrično raspoređeni u odnosu na pravac maksimalnog rastojanja između ovih elipsi. Njihovo postojanje (egzistencija) je zasnovana na dve činjenice: Prva je položaj elipsi kao "karike u lancu" (periheli su na suprotnim stranama), tako da pozicija M_3 sa sl. 3.5, koju smo uslovno zvali tačka dodira, ovde ne postoji. Naprotiv, imajući u vidu da se pozicija M_3 nalazila u pravcu perihela, ona se pri ovakvom međusobnom položaju elipsi prosto gubi i postaje jedno od najvećih rastojanja (sivi osenčeni deo sl. 3.6).Tako imamo situaciju u kojoj ostajemo 'samo' na dva proksimiteta, kao što je već prikazano na sl. 3.2.

Međutim, postepenim povećavanjem međusobnog nagiba ravni u kojima se nalaze elipse, dolazi do pojave trećeg proksimiteta, a kasnije oko "kritičnog ugla" (u prikazanom primeru njegova vrednost je 79º-81º), i do pojave četvrtog proksimiteta. Oba ova proksimiteta upravo se nalaze u zonama M_3 i M_4. Svakako da dovoljno veliki međusobni nagib dve elipse, gde imamo četiri proksimiteta, neće biti isti kod svih primera ovog tipa, ali se slobodno može reći da je upravo to drugi razlog za postojanje četiri proksimiteta. Svi ostali mogući položaji (bez obzira na vrednosti putanjskih elemenata, a naročito na uzajamni nagib), ne mogu dati ni jedan koji bi se principijelno razlikovao od ovde prikazanih primera i modela.

3.2 Kritične tačke funkcije rastojanja i zavisnost od putanjskih elemenata

S obzirom na kompleksnost funkcije rastojanja i na ogroman broj njenih oblika kao i na činjenicu da zastupljenost kritičnih tačaka prevashodno zavisi od oblika tj. geometrije putanja, metodu koju ćemo kasnije objasniti koristili smo u nekoliko etapa. Prva ideja je bila da se od svih postojećih registrovanih asteroida (http://www.minorplanetcenter.net/iau/MPEph/MPEph.html) pronađu parovi sa četiri proksimiteta jer do sada takav rezultat nije bio objavljen. U tom cilju odabrano je 2449 asteroida sa poznatim 'dijametrom' i nagibom većim od 45° (Gronkijev simulirani model sa 4 proksimiteta je bio razlog takvog odabira). Njihovim međusobnim kombinacijama napravljena je baza od 2997576 parova asteroida za koje se, po dosadašnjim pretpostavkama, moglo očekivati da se takav rezultat dobije.

Sledeća etapa je bila da se sa malo prilagođenom gore pomenutom metodom pronađu svi mogući parovi rešenja (broj min i broj max) kod simuliranih parova asteroidskih putanja zbog što celovitije analize funkcije rastojanja. Zbog ogromnog broja mogućih kombinacija, koje se mogu simulirati, pribeglo se određenim ograničenjima tako da su putanjski elementi prve elipse bili fiksni a1=1, i1=1, ω1=10, Ω1=10 dok su putanjski elementi druge elipse i e1 varirani po sledećem modelu: i2=1:89;2, ω2=5:355;25, Ω2=5:355;25, e2=0:0.9;0.01, a2=0.05:0.95;0.15, e1=0:0.9;0.1. (ω predstavlja argument perihela). Posle još nekih dodatnih provera i višestrukih pokušaja rešavanja, jedini način da se funkcija rastojanja što celovitije definiše bio je da se pre početka sledeće etape izvrše dodatne korekcije u pogledu variranja putanjskih elementa.

3.3 Kritične tačke funkcije rastojanja i zavisnost od oblika putanja

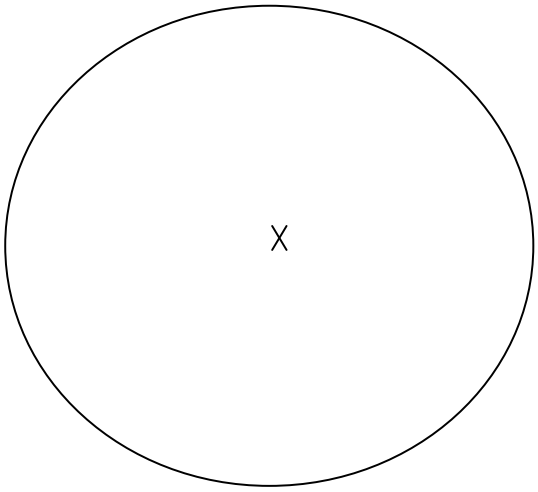
Poslednja etapa tj. korak koji je urađen, kao što je u prethodnom poglavlju već nagovešteno, bila je uslovna klasifikacija mogućih parova konfokalnih elispi tj. eliptičnih putanja asteroida. U tom smislu, formirane su tri grupe i u svakoj po nekoliko tipova kako bi kasnije simulacije funkcije rastojanja mogle da nam daju još celovitiju sliku o tome šta se zapravo događa tokom simulacija; tj. pri promeni određenih parametara i naravno što preciznije rezultate. Njihovi oblici i geometrijske karakteristike su:

Grupa I

Ovde su uzeti u razmatranje tri para istih elipsi pri čemu par a) ima najmanju ekscentričnost (elipse su jako bliske kružnicama), par b) ima ekscentričnost koja uslovljava da je velika poluosa dva puta duža od male poluose, i par c) gde je ekscentričnost izuzetno velika što uslovljava da je odnos velike i male poluose približno 1:20 (degenerativni slučajevi ipak mogući u realnosti).

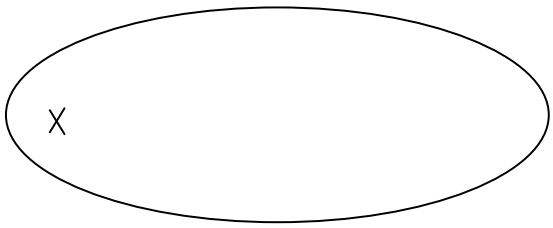
Ia) a1=1, a2=1, e1=0.01, e2=0.01

(dve identične eliptične putanje jako malih ekscentričnosti - bliske kružnici)



Ib) a1=1, a2=1, e1=0.866, e2=0.866

(dve identične eliptične putanje kod kojih mala i velika poluosa imaju razmeru 1:2)



Ic) a1=1, a2=1, e1=0.99, e2=0.99

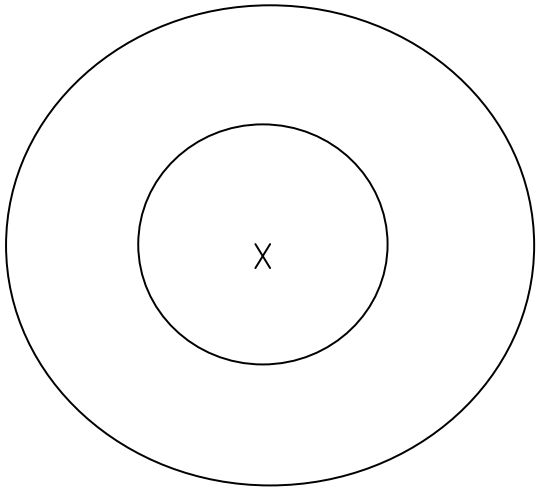
(dve identične eliptične putanje kod kojih mala i velika poluosa imaju približnu razmeru 1:20)

Grupa II

Ideja za formiranje grupa II i III proistekla je iz činjenice da sva tri para elipsi iz prve grupe (ili one srazmerne tj. proporcionalne njima) mogu imati ili nemati presečnih tačaka kada su u istoj ravni. Druga grupa, upravo predstavlja određene karakteristične slučajeve u ravni kada se ove elipse i njima slične ne seku.

IIa) a1=0.5, a2=1, e1=0.01, e2=0.01

(dve slične eliptične putanje jako malih ekscentričnosti – bliske kružnici, pri čemu jedna ima duplo manju veliku poluosu od druge)

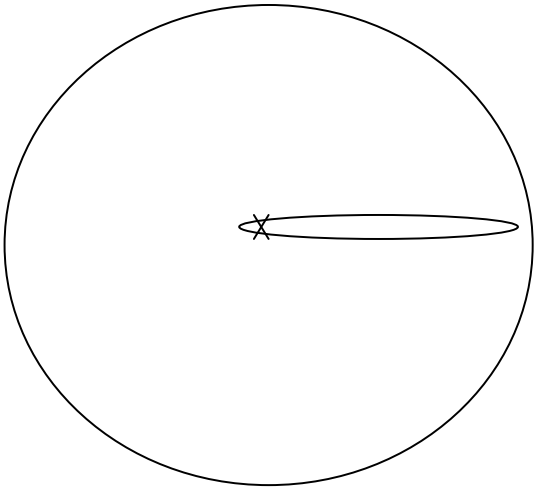


IIb) a1=0.01, a2=1, e1=0.01, e2=0.99

(kombinacija eliptičnih putanja Ic-Ia po ekscentričnosti, pri čemu se one u ravni ne seku, tj. druga ima jako male obe poluose i praktično se nalazi unutar prve)

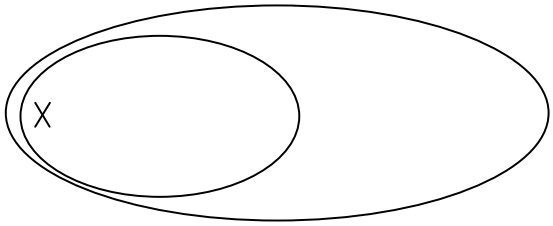
IIc) a1=1, a2=0.49, e1=0.01, e2=0.99

(suprotno prethodnom tipu tj. sada se eliptična putanja sa ekstremnom ekscentričnošću nalazi unutar druge, koja ima veoma malu ekscentričnost, blisku kružnici i duplo veću veliku poluosu)



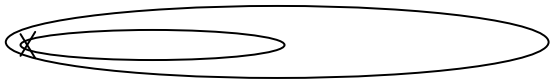
IId) a1=0.5, a2=1, e1=0.866, e2=0.866

(dve slične eliptične putanje čije poluose stoje u razmeri 1:2 pri čemu je jedna ima duplo manju veliku poluosu od druge tj. nalazi se unutar nje)



IIe) a1=0.5, a2=1, e1=0.99, e2=0.99

(dve slične eliptične putanje velikih ekscentričnosti, čije poluose stoje u odnosu približno 1:20, pri čemu je jedna ima duplo manju veliku poluosu od druge t.j nalazi se unutar nje)

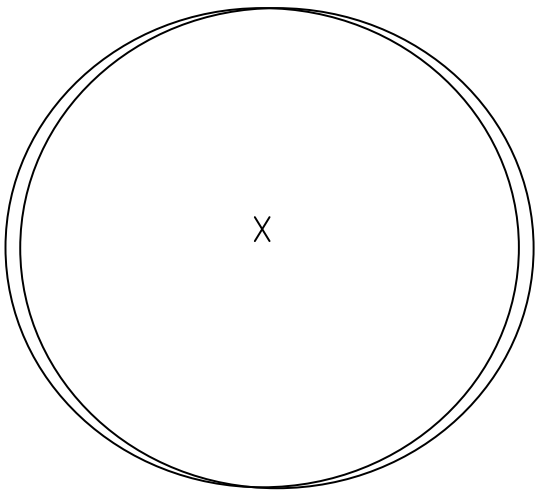


Grupa III

Treća grupa predstavalja određene karakteristične slučajeve u ravni kada se ove elipse (i njima slične) seku.

IIIa) a1=1, a2=0.97, e1=0.01, e2=0.03

(dve slične eliptične putanje malih ekscentričnosti koje se seku kada su u istoj ravni)

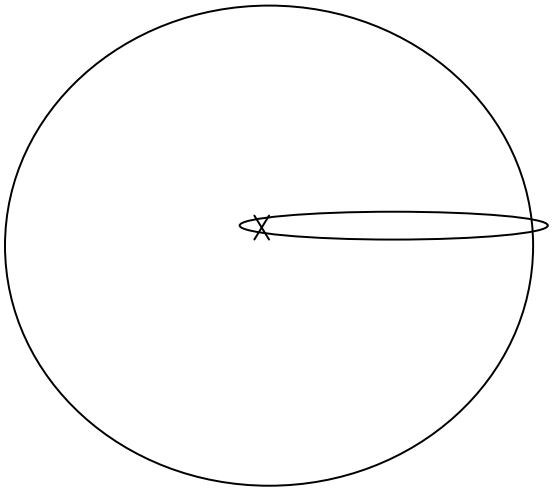


IIIb) a1=0.011, a2=1, e1=0.01, e2=0.99

(kombinacija eliptičnih putanja Ic-Ia pri čemu se one u ravni seku iako druga ima veoma male obe poluose)

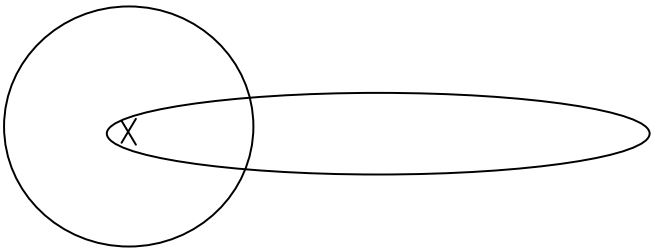
IIIc) a1=1, a2=0.51, e1=0.01, e2=0.99

(eliptična putanja ekstremne ekscentričnosti nalazi se unutar eliptične putanje jako male ekscentričnosti bliske kružnici koja ima duplo veću veliku poluosu pri čemu se one seku kada su u istoj ravni)



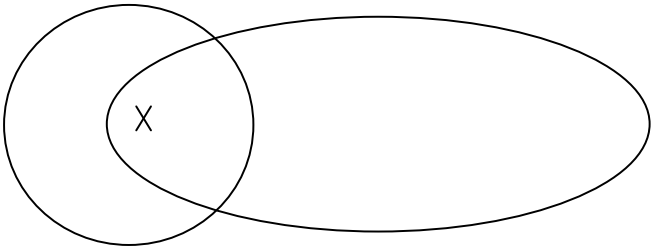
IIId) a1=0.5, a2=1, e1=0.01, e2=0.99

(predstavlja presek jedne eliptične putanje male ekscentričnosti i druge velike ekscentričnosti, pri čemu druga ima duplo veću poluosu od prve, a seku se kada su u istoj ravni)



IIIe) a1=0.5, a2=1, e1=0.01, e2=0.866

(kombinacija jedne eliptične putanje male ekscentričnosti i druge sa srednjom ekscentričnosti, odnos poluosa 1:2, pri čemu je prva ima duplo manju veliku poluosu od druge a seku se kada su u istoj ravni)



IIIf) a1=1, a2=0.5, e1=0.99, e2=0.96

(dve slične eliptične putanje velikih ekscentričnosti-odnos poluosa približno 1:20, pri čemu jedna ima duplo manju veliku poluosu od druge, t.j nalazi se unutar nje, ali se seku kad su u istoj ravni)

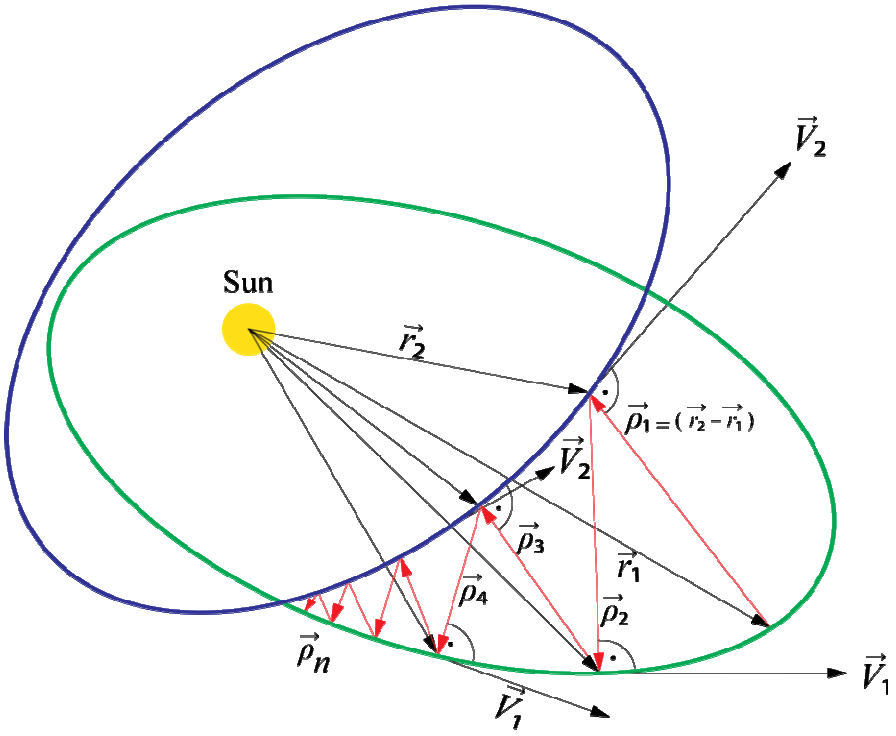
Ono što je važno naglasiti je da, kao što smo se u prvoj grupi opredelili za ‘samo’ tri karakteristične elipse, tj. asteroidske putanje, tako se i u ostale dve grupe nismo vodili idejom da ‘ukrstimo svaku sa svakom’, tj. simuliramo sve parove elipsi. Razlog je u činjenici da su rezultati prethodne dve etape pokazali da se broj teorijski mogućih rešenja (14 i 16) sistema transcedentih jednačina koje definišu funkciju rastojanja a koja nisu do sada pronađena mogu očekivati kod parova elipsi (gore prikazanih oblika) i, naravno, njima sličnim. Sve simulacije su imale iste fiksne parametre tj. putanjske elemente ω1=1, Ω1=1, i1=1 i iste varijacije ostalih, ω2=5: 355; 3.125, Ω2=5:355;3.125, i2=1:89;1, (sve vrednosti su date u stepenima). Ovakvim pristupom je moguće da za svaki tip iz sve tri gore navedene grupe parova putanja izvršiti izračunavanje minimalnih i maksimalnih rastojanja za preko milion njihovih različitih međusobnih položaja.

3.4 Geometrijski i analitički prikaz rešavanja problema proksimiteta

Metoda za izračunavanje proksimiteta prikazana u magistarskom radu ‘Jedan postupak za određivanje proksimiteta između putanja malih planeta’ (S. Milisavljević, 2002) bila je osnov za postupak koji je korišćen u ovom radu i koji će sada biti izložen. Ako pogledamo sliku 3.7 vidimo da relativni vektor položaja $\vec{\rho}$, osim što predstavlja razliku prvog i drugog vektora položaja $\vec{r}_1$ i $\vec{r}_2$ (u zavisnosti od njegove orjentacije može biti i

obrnuto), uvek je normalan na tangentu u tački dodira putanje na koju dolazi tj. u njegovom kraju.

Ovde možemo reći da se funkcija rastojanja kao matematička interpretacija može nazvati merom dužine vektora $\vec{\rho}$, odnosno dužinom orbitalnog preseka (DOP). Dakle naš cilj je nalaženje kritičnih tačaka funkcije rastojanja dve tačke konfokalnih orbita i, naravno, kada su u pitanju ekstremne tačke, nalaženje minimuma, tj. proksimiteta. Očekujemo da usputni rezultat bude i nalaženje najmanjeg medju njima, odnosno nalaženje najmanje dužine orbitalnog preseka (NDOP, engleski MOID).



Slika 3.7: Šematski prikaz grafičke metode određivanja proksimiteta

Dakle poštujući ranije date uslove, (slike 3.7), vidimo da naizmeničnim 'odlaženjem' i 'dolaženjem' sa jedne na drugu eliptičnu putanju vektora $\vec{\rho}$, pri čemu je početak sledećeg uvek u tački gde je kraj prethodnog, on, zapravo, konvergira u tačku gde će njegov intenzitet biti najmanji. To suštinski znači da je upravo u toj tački najmanje rastojanje između dve eliptične putanje tj. proksimitet. Ova činjenica je osnova postupka koji je prikazan u gore pomenutom magistarskom radu.

S obzirom da je osnovni cilj ovog rada pronalaženje svih mogućih rešenja sistema jednačina koje opisuju problem proksimiteta tj. svih kritičnih tačaka funkcije rastojanja gore opisana metoda bila je kao takva neadekvatna. Ona, osim što je bila suviše spora, nije pružala ni mogućnost pronalaženja maksimalnih rastojanja.

Kao, što je poznato, maksimalna rastojanja zajedno sa minimalnim rastojanjima i prevojima predstavljaju kritične tačke funkcije rastojanja. U tom smislu, u postupku koji će biti izložen i na osnovu koga je napravljen algoritam i program za izračunavanje kritičnih tačaka funkcije rastojanja iskorišćen je samo analitički deo gore pomenutog postupka. U najkraćem, on izgleda ovako:

Opšte je poznato da dve vektorske jednačine:

$$(\vec{r}_1-\vec{r}_2)\cdot\vec{V}_1=0,$$
$$(\vec{r}_2-\vec{r}_1)\cdot\vec{V}_2=0, \tag{3.1}$$

definišu problem i one nisu ništa drugo neko matematička interpretacija onoga što je prethodno rečeno o karakteru relativnog vektora položaja. Ovaj sistem vektorskih jednačina je transcedentnog tipa, a da bismo se prilagodili prethodno izloženom geometrijskom postupku, uzmimo da su vektori položaja malih planeta izraženi preko ekscentričnih anomalija E_1 i E_2, (Simovljević, 1976), odnosno:

$$\vec{r}_1=a_1(\cos E_1-e_1)\vec{P}_1+b_1\sin E_1\vec{Q}_1,$$
$$\vec{r}_2=a_2(\cos E_2-e_2)\vec{P}_2+b_2\sin E_2\vec{Q}_2. \tag{3.2}$$

Imajući u vidu da je $\frac{d\vec{r}}{dt}=\vec{V}$ i koristeći vezu $\frac{d\vec{r}}{dt}=\frac{d\vec{r}}{dE}\frac{dE}{dt}$, (Milanković, 1935, 1995), jednačine (3.1) možemo napisati u obliku:

$$(\vec{r}_1-\vec{r}_2)\cdot\frac{d\vec{r}_1}{dE_1}=0,$$
$$(\vec{r}_2-\vec{r}_1)\cdot\frac{d\vec{r}_2}{dE_2}=0. \tag{3.3}$$

S obzirom da za primenu ove metode nije neophodno rešavanje sistema ove dve vektorske jednačine mi ćemo pristupiti reašavanju samo jedne od njih. Uzmimo proizvoljnu vrednost za E_1 (npr. E_1=0) ubacimo je i zamenimo vrednosti za $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$ i $\vec{V}_2$ u drugu jednačinu sistema (3.1) i podelimo je sa $\frac{dE_2}{dt}$. Posle pregrupisavanja članova dobijamo izraz:

$$\cos E_2\sin E_2(b_2^2-a_2^2)+\sin E_2(a_2^2e_2+a_1a_2\cos E_1\vec{P}_1\cdot\vec{P}_2-a_1a_2e_1\vec{P}_1\cdot\vec{P}_2+b_1a_2\sin E_1\vec{Q}_1\cdot\vec{P}_2)$$
$$+\cos E_2(a_1e_1b_2\vec{P}_1\cdot\vec{Q}_2-b_1b_2\sin E_1\vec{Q}_1\cdot\vec{Q}_2-a_1b_2\cos E_1\vec{P}_1\cdot\vec{Q}_2=0. \tag{3.4}$$

Prethodnu jednačinu možemo napisati u obliku:

$$A\sin E_2+B\cos E_2+C\sin E_2\cos E_2=0, \tag{3.5}$$

jer su izrazi u zagradama konstantne veličine, pri čemu su:

$$A=(a_2^2e_2+a_1a_2\cos E_1\vec{P}_1\cdot\vec{P}_2-a_1a_2e_1\vec{P}_1\cdot\vec{P}_2+b_1a_2\sin E_1\vec{Q}_1\cdot\vec{P}_2)=a_2^2e_2+a_2\vec{P}_2\cdot\vec{r}_1,$$
$$B=(a_1e_1b_2\vec{P}_1\cdot\vec{Q}_2-b_1b_2\sin E_1\vec{Q}_1\cdot\vec{Q}_2-a_1b_2\cos E_1\vec{P}_1\cdot\vec{Q}_2)=-b_2\vec{Q}_2\cdot\vec{r}_1, \tag{3.6}$$
$$C=b_2^2-a_2^2.$$

Ako sada jednačinu (3.5) podelimo sa koeficijentom B (vodeći računa da je B različito od nule) dobija se:

$$M\sin E_2+\cos E_2+N\sin E_2\cos E_2=0, \tag{3.7}$$

gde su sa M i N označeni količnici $\frac{A}{B}$ i $\frac{C}{B}$, respektivno.

Koristeći trigonometrijske jednakosti $\sin E = [2\tan\frac{E}{2}/(1+\tan^2\frac{E}{2})]$ i $\cos E = [1-\tan^2\frac{E}{2})/(1+\tan^2\frac{E}{2})]$ pa primenjujući smenu za tangens ugla $tg\frac{E_2}{2} = t$ i njenom zamenom u jednačinu (3.7), dobijamo:

$$M \cdot \frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2} + N \cdot \frac{2t}{1+t^2} \cdot \frac{(1-t^2)}{1+t^2} = 0. \qquad (3.8)$$

Pomnožimo li, sada, prethodnu jednačinu sa $(1+t^2)$ posle određenih sređivanja dolazi se do jednačine četvrtog stepena oblika:

$$a_4t^4 + a_3t^3 + a_2t^2 + a_1t^1 + a_0 = 0, \qquad (3.9)$$

pri čemu je

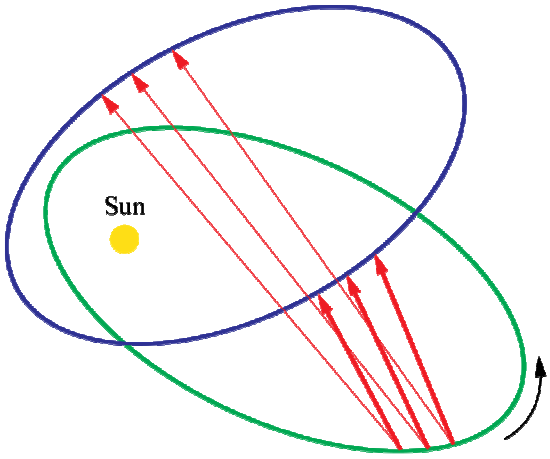
$$a_0 = -1, \quad a_1 = -2(M+N), \quad a_2 = 0, \quad a_3 = -2(M-N), \quad a_4 = 1. \qquad (3.10)$$

Ono što je kod ove jednačine karakteristično je da ona, sobzirom na oblik i problem koji opisuje, mora imati uvek 2 ili 4 realna rešenja.

Samo jedno od moguća četiri rešenja je ono koje je odgovarajuće, a kriterijum za njegovo određivanje je najmanja vrednost od svih mogućih razlika intenziteta vektora $\vec{r}_2$ i $\vec{r}_1$. Naime, nakon rešavanja jednačine (3.9) i posle vraćanja prethodnih smena, nalazimo odgovarajuće ekscentrične anomalije, a samim tim i intenzitete vektora položaja.

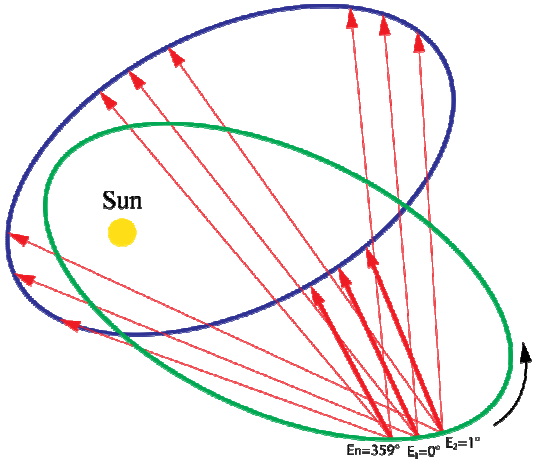
Oduzimanjem od svakog intenzitet vektora $\vec{r}_1$, dobijamo četiri intenziteta vektora $\vec{\rho}$ i upoređujemo ih međusobno da bi pronašli najmanji. Ona ekscentrična anomalija (od najviše mogućih četiri koje figurišu kao rešenja) koja odgovara najmanjoj vrednosti vektora $\vec{\rho}$, je traženo rešenje jednačine.

S obzirom da je dobijena vrednost ekscentrične anomalije druge eliptične putanje E_2 ona koja odgovara najmanjem relativnom vektoru položaja iz tačke na prvoj eliptičnoj putanji sa vrednošću ekscentrične anomalije $E_1 = 0$, ceo postupak moramo ponoviti za $E_1 = 1$, $E_1 = 2$, $E_1 = 3 \ldots\ldots E_1 = 359$ ili sa manjim ili većim korakom, zavisno od karakteristika eliptičnih putanja, kako bi dobili isto toliko vrednosti za E_2. Kada tako dobijene vrednosti ekscentričnih anomalija E_1 i E_2 i njihovih odgovarajućih najmanjih vektora položaja međusobno uporedimo one koje su najmanje su naši potencijalni proksimiteti. Sada se ceo postupak ponavlja sa druge na prvu eliptičnu putanju, pri čemu su sada polazne vrednosti $E_2 = 0$, $E_2 = 1$, $E_2 = 2 \ldots\ldots E_2 = 359$. Upoređivanjem i kombinacijom ovakve dve grupe rezultata mi rešavamo preblem proksimiteta tj. izračunavamo njihov tačan broj, veličinu i poziciju.



Slika 3.8: Šematski prikaz metode određivanja proksimiteta kada jednačina 3.9 ima dva rešenja

Sa slike 3.8 može se videti kako se postupak tj. izračunavanje izvodi kada jednačina (3.9) ima dva rešenja a sa slike 3.9 kada ona ima četiri rešenja. Podebljani relativni vektori položaja su naša prolazna rešanja.



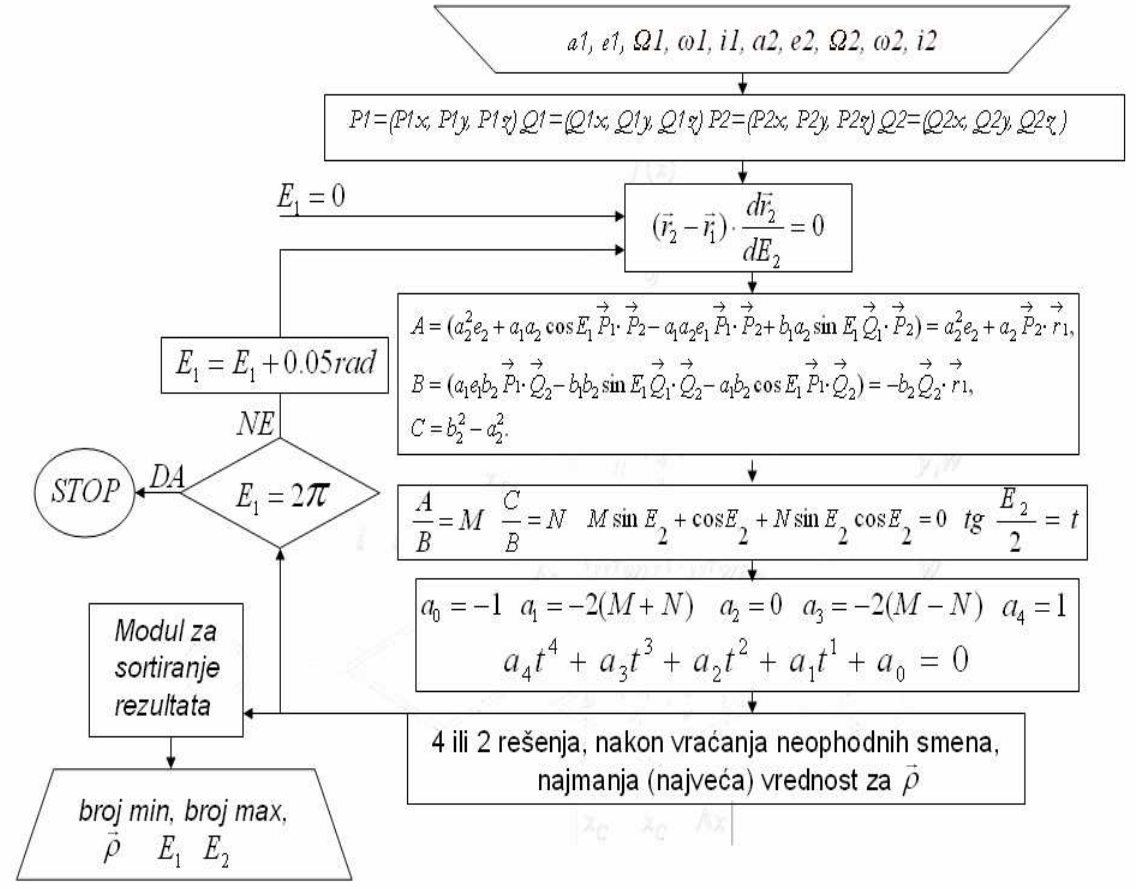
Slika 3.9: Šematski prikaz metode određivanja proksimiteta kada jednačina 3.9 ima četiri rešenja

Imajući u vidu činjenicu da i maksimalna rastojanja između dve eliptične putanje zadovoljavaju uslov ortogonalnosti na tangente u tačkama dodira odnosno da i za njih važi vektorski sistem jednačina (3.1), gore opisani postupak (uz uslov poređenja najvećih relativnih vektora položaja), takođe primenjujemo za izračunavanje maksimuma tj. njihovog broja, veličine i pozicije.

4. ALGORITAM ZA ODREĐIVANJE EKSTREMNIH VREDNOSTI FUNKCIJE RASTOJANJA I PROGRAM

4.1 Algoritamska blok šema

Kompletan analitički postupak određivanja tj. izračunavanja minimalnih i maksimalnih rastojanja dve konfokalne eliptičene putanje, objašnjen u prethodnoj glavi, iskorišćen je za formiranje algoritma i pisanje računarskog programa za izračunavanje lokalnih minimuma i maksimuma funkcije rastojanja i njihovih odgovarajućih ekscentričnih anomalija.



Slika 4.1: Blok šema algoritma za izračunavanje lokalnih minimuma i maksimuma funkcije rastojanja i njihovih odgovarajućih ekscentričnih anomalija.

Blok šema tog algoritma je prikazana je na slici 4.1. S obzirom da je blok šema simetrična u odnosu na ulazne veličine E_1 i E_2 na slici 4.1 dat je primer kada su ulazne veličine ekscentrične anomalije prve eliptične putanje E_1 tj. kada izračunavamo lokalne minimume, maksimume i njihove odgovarajuće ekscentrične anomalije E_2 na drugoj eliptičnoj putanji. Postupak izračunavanja i algoritam su isti kada promenjive E_1 i E_2 zamene mesta stom razlikom što se tada koristi prva jednačina sistema 3.3. Parametri u ulaznom modulu algoritma su putanjski elementi prve i druge eliptične putanje: velike poluose, ekscentričnosti, longitude uzlaznog čvora, longitude perihela i nagibi. Kada smo isti algoritam i njemu prilagođeni program koristili za izračunavanje broja stacionarnih tačaka i njihovih vrednosti za $\vec{\rho}$, E_1 i E_2 kod simuliranih parova, kao što je već u prethodnom poglavlju pomenuto, obično je jedna putanja imala fiksne putanjske elemente na ulazu dok su putanjski elementi druge putanje varirali tj. njihova varijacija je programski generisana. U tom smislu se i ulazni modul algoritma za simulacije neznatno razlikuje.

4.1.1 Modul za sortiranje rezultata

S obzirom da, kao što smo već rekli, jednačina četvrtog stepena može imati četiri ili dva realna rešenja i da za svaki par asteroida, bilo da su oni realni ili simulirani, treba 'obići' obe eliptične putanje sa odgovarajućim korakom, očigledno je da u postupku izračunavanja imamo mnogo prolaznih rešenja. Iz tog razloga u algoritmu postoji petlja, a formiran je i poseban modul za sortiranje rezultata. U modulu za sortiranje se odbacuju sva tekuća rešenja koja programski nisu zahtevana i praktično se formiraju dve funkcije rastojanja $f_1(\rho, E_1)$ i $f_2(\rho, E_2)$ koje se kasnije upoređuju. U zavisnosti od vrste ekstremuma koji se traži (minimum ili maksimum) u funkciji rastojanja figurišu $\rho_{\min}$ ili $\rho_{\max}$. Izlazni modul je fleksibilan u smislu da se može predvideti i znatno veći broj izlaznih podataka nego što je to dato u blok šemi na slici 4.1.

4.2 Opis rada programa

Iako će kompletan program, koji je formiran i korišćen kako u računu stacionarnih tačaka eliptičnih putanja realnih asteroidskih parova, tako i simuliranih parova, biti dat u prilogu, u ovom poglavlju će biti objašnjeni neki njegovi glavni delovi. Prvo što treba reći je da je program napisan u programskom jeziku Matlab 7.0 i da se on kao takav pokazao prilično pogodan za zahtevana izračunavanja. Takođe je važna činjenica da osim što je izloženi postupak određivanja proksimiteta brži od sličnog (Milisavljević, 2002) i programski jezik Matlab 7.0 je operativniji od svog prethodnika pre deset godina. Ako tome dodamo i znatno veće hardverske mogućnosti danas, jasno je kako je uspešno obrađeno preko 20 miliona što realnih što simulirnih parova eliptičnih putanja.

Na samom početku programa definisan je zajednički korak za promene (varijacije) E_1 i E_2, a odmah zatim se zadaje i preciznost Njutnove metode. Posle unošenja putanjskih elemenata obe asteroidske putanje na osnovu njih se prvo generišu jedinični vektori $\vec{P}$ i

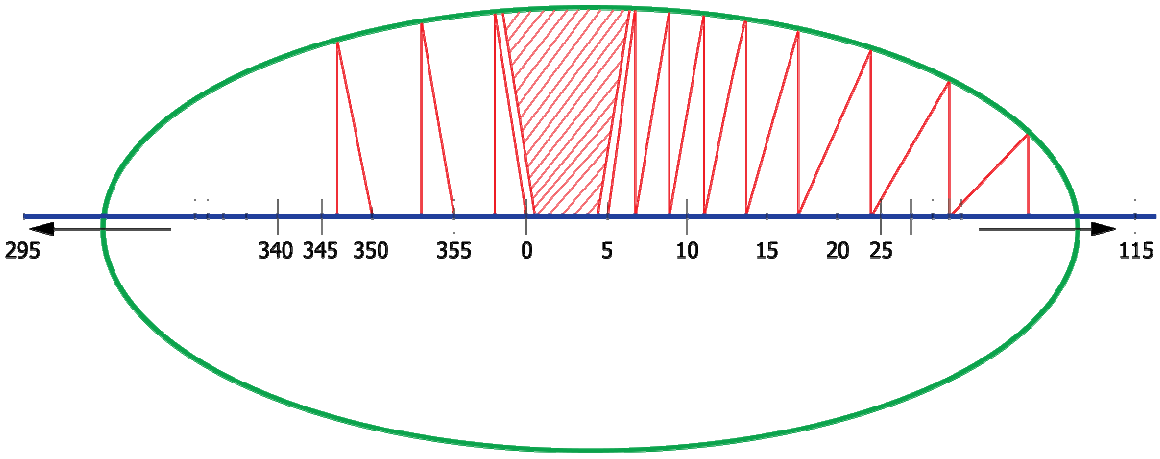
$\vec{Q}$ tj. njihove koordinatne algebarske vrednosti. U segmentima ’pomoćni parametri’ posle višestrukih smena formira se jednačina četvrtog stepena i nakon toga se pristupa njenom rešavanju. Zatim slede segmenti ’prekidanje’ gde se odvajaju realna od imaginarnih rešenja, zatim se nalaze rešenja u okolini perihela i afela i tek onda program računa rastojanja.

Prvi korak u celom postupku, bilo da se izračunavaju minimumi ili maksimumi za E_1 jeste provera da li postoji minimum ili maksimum u tački $E_1 = 0$. Isti postupak se ponavlja i za E_2. Na kraju program sortira sve minimume i maksimume i bira najmanji medju minimumima. Podatke o minimumima i maksimumima na izlazu prate podaci o odgovarajućim vrednostima E_1 i E_2 koji su dati u stepenima, a odgovarajući minimum ili maksimum funkcije rastojanja izraženi su u astronomskim jedinicama. Ovo je suština rada programa. Primena Njutnove metode u rešavanju jednačine četvrtog stepena omogućava višestruko ubrzanje računskog postupka u odnosu na brzinu rada odgovarajućeg modula programskog jezika Matlab 7.0. Pored navedenih izlaznih podataka program daje i broj kombinacija minimuma i maksimuma za svaki set simulacija ili realnih parova jer je za analizu fukcije rastojanja taj podatak od značaja.

4.3 Još neke karakteristike programa

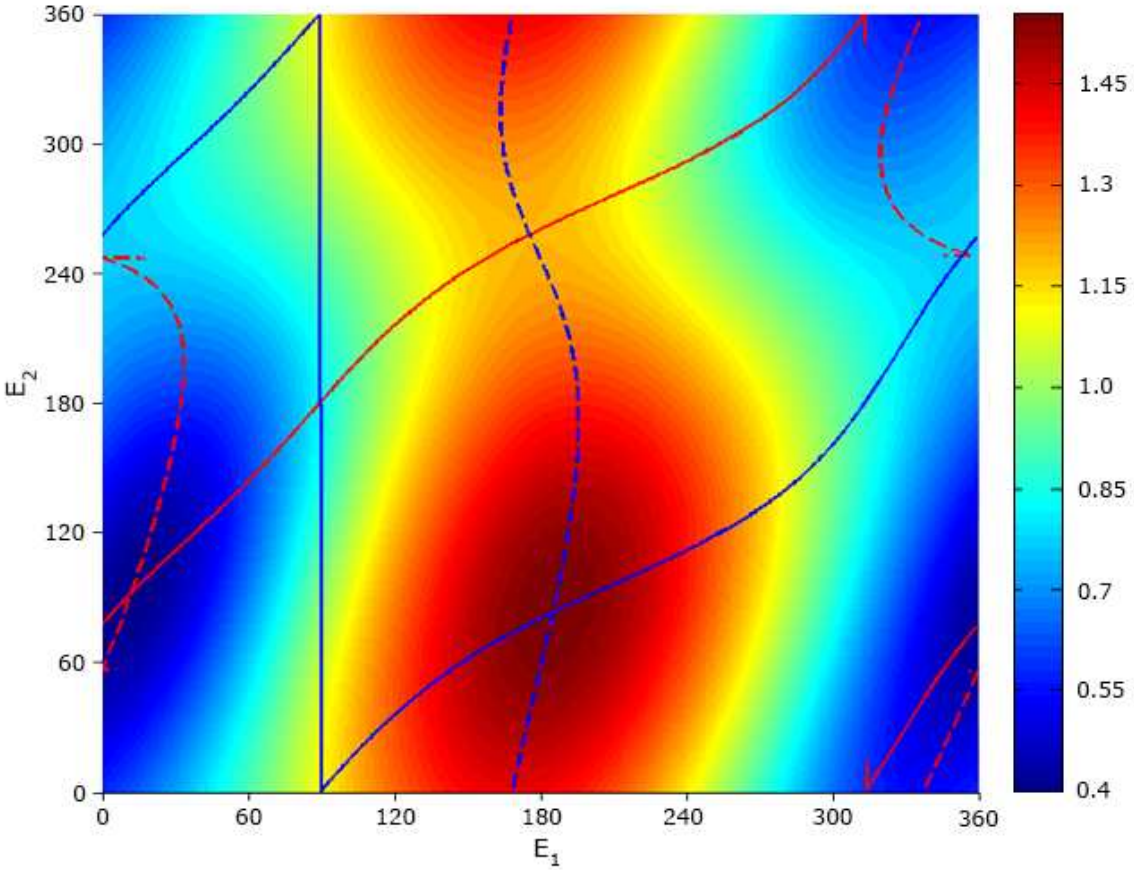
Rekli smo da program može da generiše više vrsta izlaznih podataka u skladu sa zahtevima analize funkcije rastojanja. Važno je istaći da program omogućava, posredno, iscrtavanjem grafika funkcije rastojanja, odredjivanje njenih prevojnih tačaka. U slučaju primene metode (Milisavljević 2002), koja je određivala samo minimume tj. proksimitete, da bi se očuvala kontinualnost u obilaženju i da neki od mogućih proksimiteta ne bi bio preskočen, a zbog problema stalnog smenjivanja minimalnih rastojanja i prevoja funkcije rastojanja dve putanje, morali smo stalno "gurati" odlazeći vektor uvek na novu početnu poziciju, sve dok ne prestane da se vraća unazad na već izračunati proksimitet (slika 4.2).

Naime, ako sa l_1 obeležimo prvu eliptičnu putanju i nju položimo u *XY* ravan, druga eliptična putanja $l_{2,}$ bi u tom slučaju, zauzimala položaj kao na slici 4.2. Slika 4.2 prikazuje projekciju ove dve eliptične putanje na *XZ* ili *YZ* ravan, što zavisi od ostalih parametara. U svakom slučaju, usled međusobnog nagiba ravni u kojima se ove dve putanje nalaze i zakrivljenosti elipse kao geometrijskog oblika, imamo smenjivanje užih i širih oblasti najmanjih rastojanja ovih (ili bilo kojih) asteroidskih putanja. Zato smo koristili mogućnost "dodavanja" vrednosti ekscentrične anomalije svakoj sledećoj ulaznoj veličini, jer tek kada vektor relativnog položaja $\vec{\rho}$ prođe prevoj, tj. najširu oblast (šrafirani deo sl. 4.2) on, kao što smo rekli, ulazi u zonu proksimiteta i potreba za ovakvim dodavanjem vrednosti više ne postoji do nailaska na sledeći prevoj.



Slika 4.2: Šematski prikaz ranije metode prevazilaženja prevojne oblasti na funkciji rastojanja

U novoj metodi to nije neophodno jer, kao što je već rečeno, program izabranim korakom ulazne vrednosti za ekscentričnu anomaliju prvo 'obiđe' kompletnu jednu pa drugu eliptičnu putanju, formira dve funkcije rastojanja, uporedi njihove lokalne minimume i maksimume i samim tim rešava problem tj. daje kompletnu sliku funkcije rastojanja.



Slika 4.3: Grafički prikaz funkcije rastojanja za proizvoljan par eliptičnih putanja

Na slici 4.3 se vidi da se u preseku punih i isprekidanih crvenih linija nalaze minimumi a da se u preseku punih i isprekidanih plavih linija nalaze maksimumi. Prevoji se nalaze u preseku plavih i crvenih linija. Zahvaljujući izlaznim rezultatima imamo da su:

prox_min = 12 92.031 0.41445

prox_max = 185 83.084 1.5832

pri čemu su vrednosti u prvoj i drugoj koloni E_1 i E_2 respektivno, dok je u trećoj rastojanje izraženo u AJ. Sa grafika se vidi da su prevojne tačke u centru sedla i to prevoj koji odgovara maksimumu u narandžastoj oblasti, a prevoj koji odgovara minimumu u svetloplavoj oblasti. Njihove vrednosti možemo očitati sa grafika i u konkretnom slučaju: to su dve vrednosti (ukupan broj min i max jednak je broju prevojnih tačaka), a koordinate su im približno:

prev_1: $\approx$ (170 260) prev_2: $\approx$ (355 250) ;

naravno sve su vrednosti izražene u stepenima. Svakako da se položaji prevojnih tačaka mogu odrediti i znatno preciznije ali to nije bio primarni cilj analize funkcije rastojanja.

Na kraju ovog poglavlja treba podsetiti da su se tačne pozicije maksimalnih rastojanja i prevoja ranije računale aproksimativnim postupkom J. Lazovića (opisanom u poglavlju 2) i da transcedentni sistem jednačina 2.5, u zavisnosti od vrednosti odgovarajućih parcijalnih izvoda, ima rešenja koja su minimumi, maksimumi ili prevojne tačke.

Znajući da je

$$\rho^2 = (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)\cdot(\vec{r}_2 - \vec{r}_1), \tag{4.1}$$

parcijalni izvod po E_1 možemo napisati u obliku:

$$\frac{\partial \rho^2}{\partial E_1} = -2(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)\cdot\frac{\partial \vec{r}_1}{\partial E_1}, \tag{4.2}$$

a parcijalni izvod po E_2,

$$\frac{\partial \rho^2}{\partial E_2} = 2(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)\cdot\frac{\partial \vec{r}_2}{\partial E_2}\ . \tag{4.3}$$

Ako ponovo prvu diferenciramo po E_1, a drugu po E_2, dobijamo izraze u obliku:

$$\frac{\partial^2 \rho^2}{\partial E_1^2} = 2\frac{\partial \vec{r}_1}{\partial E_1}\cdot\frac{\partial \vec{r}_1}{\partial E_1} - 2(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)\cdot\frac{\partial^2 \vec{r}_1}{\partial E_1^2}, \tag{4.4}$$

$$\frac{\partial^2 \rho^2}{\partial E_2^2} = 2\frac{\partial \vec{r}_2}{\partial E_2}\cdot\frac{\partial \vec{r}_2}{\partial E_2} + 2(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)\cdot\frac{\partial^2 \vec{r}_2}{\partial E_2^2}\ . \tag{4.5}$$

Mešovite parcijalne izvode dobijamo kada jednačinu (4.2) diferenciramo po E_2, ili jednačinu (4.3) po E_1. Tako dolazimo do:

$$\frac{\partial^2 \rho^2}{\partial E_1 \partial E_2} = \frac{\partial}{\partial E_1}\left(\frac{\partial \rho^2}{\partial E_2}\right) = -2\frac{\partial \vec{r}_1}{\partial E_1}\cdot\frac{\partial \vec{r}_2}{\partial E_2}\ . \tag{4.6}$$

Uslov za postojanje ekstremuma je

$$\frac{\partial^2\rho^2}{\partial E_1^2}\cdot\frac{\partial^2\rho^2}{\partial E_2^2}-\left(\frac{\partial^2\rho^2}{\partial E_1\partial E_2}\right)^2>0, \tag{4.7}$$

za vrednosti odgovarajućih rešenja. Ako je to ispunjeno, ekstremum u toj tački zaista postoji i to ako je $\frac{\partial^2\rho^2}{\partial E_1^2}>0$ on je minimum, a ako je $\frac{\partial^2\rho^2}{\partial E_1^2}<0$ on je maksimum. Ostala rešenja sistema (3.1) su prevojne tačke.

5. REZULTATI ANALIZE FUNKCIJE RASTOJANJA

5.1 Simulirani parovi putanja

5.1.1 Parovi putanja kada je jedna od njih sa fiksnim svim putanjskim elementima osim ekscentričnosti

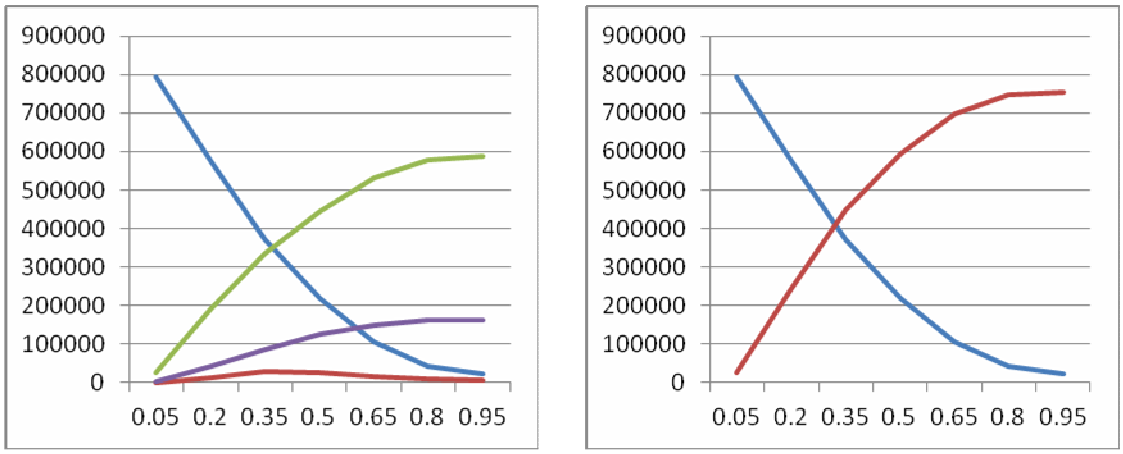
U tabeli 5.1 prikazani su rezultati simulacije parova putanja za sedam različitih vrednosti velike poluose druge eliptične putanje, koja je varirana od a2=0.05 do a2=0.95 sa korakom od 0.15 u jedinicama velike poluose prve orbite. Na ovaj način dobijeno je 5740875 parova i isto toliko rezultata tj. parova kombinacija broja minimuma i broja maksimuma funkcije rastojanja.

Tabela 5.1: Rezultati simulacija

Min - Max	**Vrednosti fiksnih i promenljivih elemenata svih 7 simulacija a1=1, i1=1, ω=10, Ω=10, e1=0,0.9;0.1 i2=1,89;2, ω=5,355;25, Ω=5,355;25, e2=0,0.9;0.1**								**%**
	Velika poluosa druge eliptične putanje a2 u jedinicama a1							**Ukupno**	
	0.05	**0.2**	**0.35**	**0.5**	**0.65**	**0.8**	**0.95**		
1-1	792339	573310	371174	219418	104890	41885	21773	2124789	37,0115
1-2	72	13561	28039	25420	17190	8651	4569	97502	1,6983
1-3	1	2	2	7	42	95	213	362	0,0063
1-4	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2-1	24232	190520	334288	444554	532145	577138	586249	2689126	46,8417
2-2	2222	41849	84372	123855	149686	160991	163018	725991	12,6459
2-3	28	10	2	9	94	328	624	1095	0,0190
2-4	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3-1	1178	822	1384	2692	5460	11633	18759	41928	0,7303
3-2	3	39	854	4153	10584	19374	24765	59772	1,0411
3-3	1	0	1	0	12	0	0	14	0.0002
3-4	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4-1	50	11	9	13	5	21	57	166	0,0028
4-2	0	0	0	4	17	9	98	128	0,0022
4-3	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4-4	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Kao što se može videti iz tabele 5.1 parovi sa 14 i 16 stacionarnih se ne pojavljuju pa je očigledno da nema ni parova sa 4 maksimuma, (u daljem tekstu prva cifra će označavati broj minimuma a druga cifra broj maksimuma). Vidimo da postoji 166 parova 4 - 1, za koje je Gronki (2002) iz svojih simulacija takođe dobio potvrdan rezultat.

Pronađeni parovi 4 - 2 u našim simulacijama pokazuju da funkcija rastojanja sa 12 stacionarnih tačaka zaista postoji. Zastupljenost ostalih parova data je dijagramima na slici 5.1 (a-b). Na tim dijagramima vrednosti na apscisi predstavljaju dužinu velike poluose druge orbite u jedinicama velike poluose prve orbite, dok je na ordinati dat broj asteroida. Jasno je, da na taj način, apscisa predstavlja osu poređenja dimenzija dve orbite.

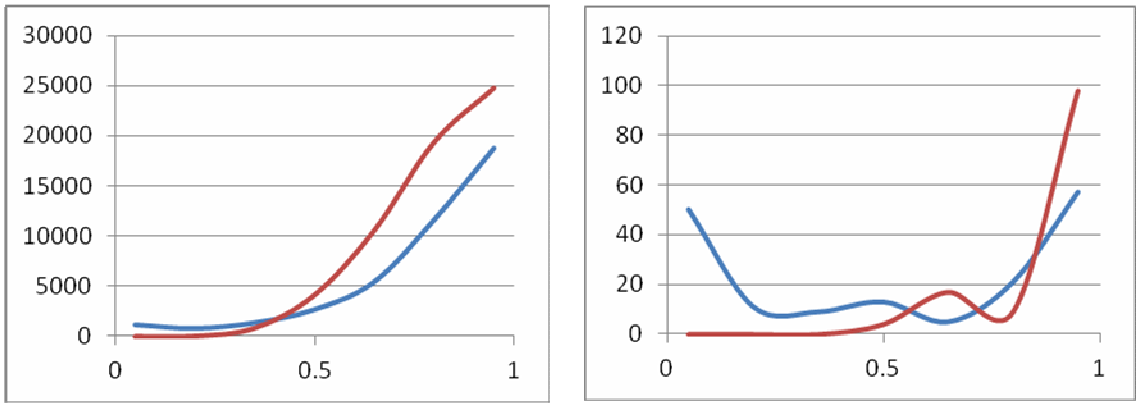


Slika 5.1: a) Dijagram zastupljenosti parova 1-1, 2-1, 2-2 i 1-2 i b) Dijagram zastupljenosti parova 1-1 i zbirni 2-1, 2-2 i 1-2 . Na ordinati je broj parova a na apscisi je relativna (normalizovana) velika polusa.

Na dijagramu a) slike 5.1 plava linija predstavlja parove 1-1, zelena parove 2-1, ljubičasta linija predstavlja parove 2-2 dok crvena linija parove 1-2. Vidimo da sa povećanjem velike poluose druge orbite broj parova 1-1 stalno opada, dok broj parova 2-1 i 2-2 stalno raste. Što se tiče parova 1-2 kod njih broj spočetka raste počev od nule, a kasnije opada do nule. Na dijagramu b) slike 5.1, možemo videti da je zbir parova 2-1, 2-2 i 1-2 komplementaran sa brojem parova 1-1 na celom intervalu promene velike poluose. Ovo ukazuje na činjenicu da se od situacije sa jednim proksimitetom do situacije sa više proksimiteta 'najbrže dolazi' geometrijskim izjednačavanjem asteroidskih putanja.

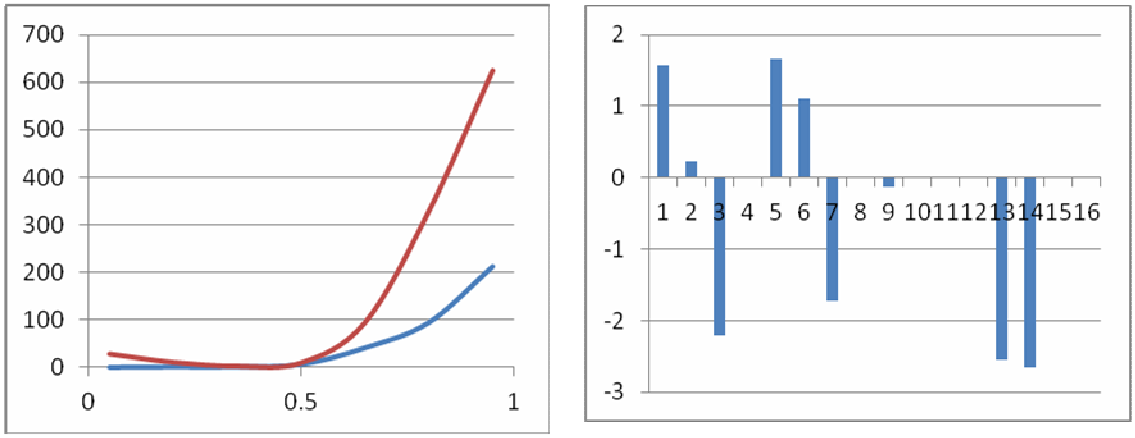
Takvu pretpostavku bi kasnije simulacije trebalo i da potvrde. Zastupljenost parova 1-3 i 2-3 je jako mala u odnosu zastupljenost ostalih parova ali je i u njihovom slučaju primetan rast broja tih parova sa rastom velike poluose.

Dijagram a) slike 5.2 prikazuje broj parova 3-1 (plava linija) i broj parova 3-2 (crvena linija): vidi se da ti brojevi imaju tendenciju rasta sa rastom velike poluose, tj. sa geometrijskim izjednačavanjem putanja. Dijagram b) slike 5.2 predstavlja broj parova 4 -1 (plava linija) i broj parova 4-2 (crvena linija), gde možemo videti izvesno oscilovanje ovakvih, specifičnih, parova asteroida.



Slika 5.2: a) Dijagram zastupljenosti parova sa 3-1, 3-2 i b) 4-1, 4-2. Na ordinati je broj parova a na apscisi veličina velike poluose.

Dijagram a) slike 5.3 prikazuje broj parova 1-3 (plava linija) i broj parova 2-3 (crvena linija). Može se videti da i ti brojevi imaju tendenciju rasta sa izjednačavanjem putanja.



Slika 5.3: a) Dijagram zastupljenosti parova sa 1-3 i 2-3 maksimuma u zavisnosti od dužine jedne od velikih poluosa i b) Logaritam procentualne zastupljenosti svih 16 teoretski mogućih simuliranih parova putanja

Dakle, vidimo da ovaj tip simulacija ukazuje na porast složenosti funkcije rastojanja sa izjednačavanjem putanja po dimenziji. Ovu konstataciju uslovno bi trebalo da potvrde i neki drugi tipovi simulacija.

5.1.2 Parovi putanja kod kojih se variraju samo ω_2, Ω_2 i e_2.

Za svaki od 14 različitih parova (tipova) konfokalnih eliptičnih putanja prikazanih u poglavlju 3.3, urađeno je 1136441 simulacija. Dobijeni rezultati su analizirani sa stanovišta ‘evolucije’ funkcije rastojanja i njene promene sa promenom putanjskih elementa koji su varirani.

Pođimo redom:

Kod tipa Ia fukcija rastojanja ima 6 i 8 stacionarnih tačaka. Pojavljuju se samo parovi 2-1 i parovi 2-2 sa zastupljenošću 13% i 87% redom. Karakteristično je da se parovi 2-1 javljaju za relativno male vrednosti medjusobnog nagiba manje od 15°.

Kod tipa Ib funkcija rastojanja je složenija, ima 10 i 12 stacionarnih tačaka tj. pojavljuju se parovi 2-3, 3-3 i 4-2. Najzastupljeniji parovi su 2-1, 53%, 2-2, 30% i 1-1, 11%. Parovi 2-3, su zastupljeni 3%, dok se ostali pojavljuju u zanemarljivom broju. Ovde nije primetna neka kontinualnija zavisnost funkcije rastojanja u odnosu na relativni nagib.

Suštinska razlika tipa Ic i Ib je u tome što se kod tipa Ic ne pojavljuje nijedan par 3-3. Ostale karakteristike su vrlo slične.

Kod tipa IIa pojavljuju se prvi put relativno jasne oscilacije složenosti fuknkcije rastojanja sa rastom nagiba. Parovi 1-1 pojavljuju se za vrednosti relativnog nagiba od 0° do 6°, parovi 2-1 od 7° do 14°, i parovi 2-2 za vrednosti od 15° do 89°. Navedene oblasti nagiba blago variraju u zavisnosti od vrednosti ostala dva putanjska elementa.

Tip IIb verovatno zaslužuje posebnu pažnju jer funkcija rastojanja za male vrednosti longitude uzlaznog čvora i longitude perihela u intervalu nagiba od 0° do 45°, ima 6 stacionarnih tačaka (pojavljuju se parovi 2-1), u intervalu nagiba od 46° do 58°, ima 8 stacionarnih tačaka (parovi 3-1) i intervalu nagiba od 58° do 88° ima 10 stacionarnih tačaka (pojavljuju se parovi 3-2). Sa primicanjem nagiba vrednosti od 90°, pojavljuju se parovi 4-1 i 4-2, tj. funkcija rastojanja ima 10 i 12 stacionarnih tačaka. Sa druge strane, povećanje longitude uzlaznog čvora i longitude perihela znatno menja ovakvu raspodelu.

Što se tiče tipa IIc funkcija rastojanja sa povećanjem longitude uzlaznog čvora i longitude perihela varira i po prvi put, imamo skokovite prelaze sa 2-2 na 1-1 i obrnuto. Za veće vrednosti ova dva putanjska elementa pojavljuju se parovi 3-1, 3-2, 3-3 pa i nekoliko parova 4-2.

Funkcija rastojanja za tip IId za interval relativnog nagiba od 0° do 56°, ima 6 stacionarnih tačaka (parovi 1-2), a za interval nagiba od 57° do 87°, ima 8 stacionarnih tačaka (parovi 2-2). Interesantno je da se u intervalu od 76° do 77° nagiba pojavljuju parovi 2-3 da bi se oko kritičnog ugla od 88° do 89° pojavili parovi 3-2.

Kod tipa IIe funkcija rastojanja sa porastom nagiba postaje jednostavnija. Sreću se parovi 3-2 za nagib od 0° do 7°, parovi 2-2 za nagib od 8° do 71° i parovi 1-2 za nagib od 72° do 88°. Tek u oblasti graničnog ugla, tj. medjusobni nagib od 89° pojavljuju se parovi 4-1.

Tip IIIa ima funkciju rastojanja vrlo sličnu tipu Ia.

Tip IIIb ima slične karakteristike funkcije rastojanja kao tip IIb.

Kod tipa IIIc najzastupljeniji su parovi 1-2, a funkcija rastojanja ima 10 stacionarnih tačaka (pojavlju se parovi 3-2), za vrlo male vrednosti manje od 10° medjusobnog nagiba što je u skladu sa ranijim komentarom u vezi pojave 3 minimuma (poglavlje 3.1).

Tip IIId ima funkciju rastojanja sa 10 stacionarnih tačaka za male vrednosti longitude uzlaznog čvora i longitude perihela u intervalu nagiba od 0° do 88°. Sa povećanjem vrednosti ovih parametara pojavljuju se parovi 2-1 za interval nagiba od 0° do 12° i parovi 3-2 od 13° do 88°.

Kod tipa IIIe pojavljuju se parovi 2-1 u intervalu nagiba od 0° do 39°, parovi 3-1 u intervalu nagiba od 40° do 57° i parovi 3-2 za nagibe od 58° do 88°.

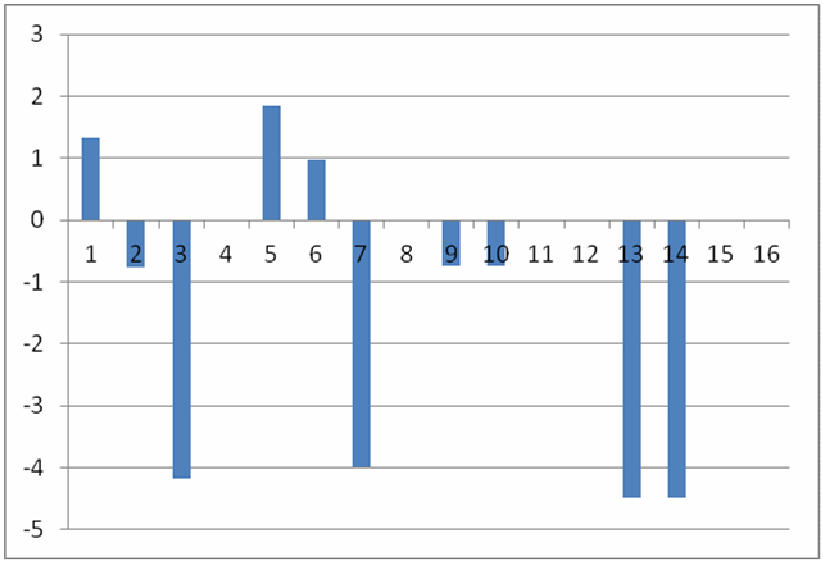
Tip IIIf ima veliku sličnost sa tipom IIe.

5.2 Realne asteroidske putanje

U prethodnim poglavljima izložen postupak je korišćen i kod realnih asteroidskih putanja sa neznatnim izmenama u modulu generisanja ulaznih podataka. Takođe ispitani su minimumi i maksimumi funkcije rastojanja za 2449 asteroida (tj. 2997576 parova) sa poznatim poluprečnicima i nagibima većim od 45°. Svi orbitalni (putanjski) elementi uzeti su iz dostupne baze podataka IAU Minor Planet Center (http://www.minorplanetcenter.net/iau/MPEph/MPEph.html). Rezultati su prikazani u tabeli 5.2 i pored ostalog odmah se može primetiti da kao i u tabeli 5.1 gde smo imali prikazane rezultate za simulirane asteroidske parove ni ovde nema parova sa 14 i 16 stacionarnih tačaka tj. parova 3-4, 4-3 i 4-4. Takođe nema parova sa 4 maksimuma kao i parova sa 3-3 koji su, iako u jako malom broju, ipak pronađeni kod simuliranih asteroidskih parova putanja. Kada se pogleda zastupljenost ostalih parova reklo bi se da nema velike razlike od simuliranih i kao što je očekivano najviše ima parova sa 2 minimuma što je i ranije utvrđeno (slika 5.4).

Tabela 5.2: Rezultati realnih asteroidskih parova

Broj minimuma - maksimuma	**Broj Parova**	**Vrednost najmanjeg proksimiteta u [AJ]**	**Procenat (%) u odnosu na sve testirane asteroide**	**Redni broj kombinacije minimum - maksimum**
1 – 1	64762	1.549545e-04	21.61	**1**
1 – 2	5244	5.184364e-04	0.174	**2**
1 – 3	2	4.376694e-01	0.000066	**3**
1 – 4	0	-	-	**4**
2 – 1	2052908	1.396222e-05	68.49	**5**
2 – 2	280654	1.605368e-04	9.36	**6**
2 – 3	3	2.177545e-01	0.0001	**7**
2 – 4	0	-	-	**8**
3 – 1	5540	3.297258e-03	0.185	**9**
3 – 2	5461	4.325793e-03	0.182	**10**
3 – 3	0	-	-	**11**
3 – 4	0	-	-	**12**
4 – 1	1	1.485550	0.000033	**13**
4 – 2	1	2.070808	0.000033	**14**
4 – 3	0	-	-	**15**
4 – 4	0	-	-	**16**



Slika 5.4: Logaritam procentualne zastupljenosti svih 16 teoretski mogućih parova putanja u svim kombinacijama izabranih asteroida.

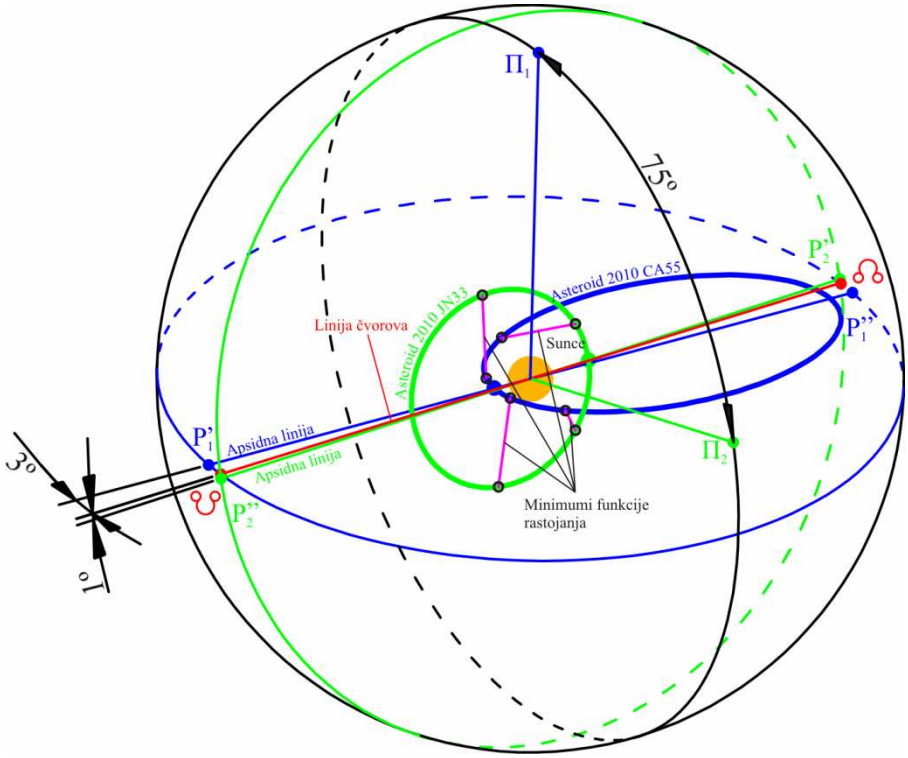
Analizirajući sve dobijene rezultate moguće je dati neke komentare:

Kod najvećeg broja parova sa jednim proksimitetom bez obzira na broj maksimuma bliske vrednosti njihovih nagiba putanja su evidentne tako da se može slobodno reći da je uslov kvazikomplanarnosti kod ovih parova u većini slučajeva zadovoljen.

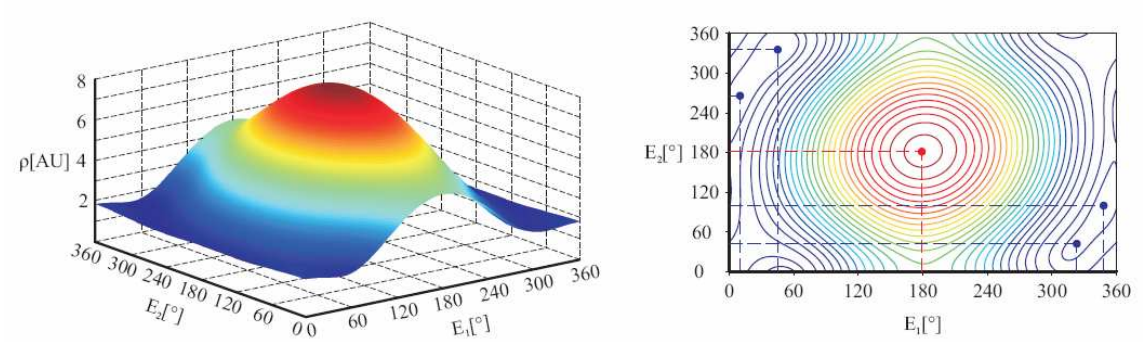
Parovi sa dva minimuma naročito oni sa jednim maksimumom su najzastupljeniji. Takođe mogućnost tj. verovatnoća za postojanje ovakvih parova u slučaju komplanarnosti je najveća.

Parovi sa tri minimuma su generalno mnogo manje zastupljeni i veoma ih je teško naći među kvazikomplanarnim asteroidima. Jedan od minimuma je skoro uvek blizu jednog od perihela dok su druga dva u nešto široj okolini čvorne linije.

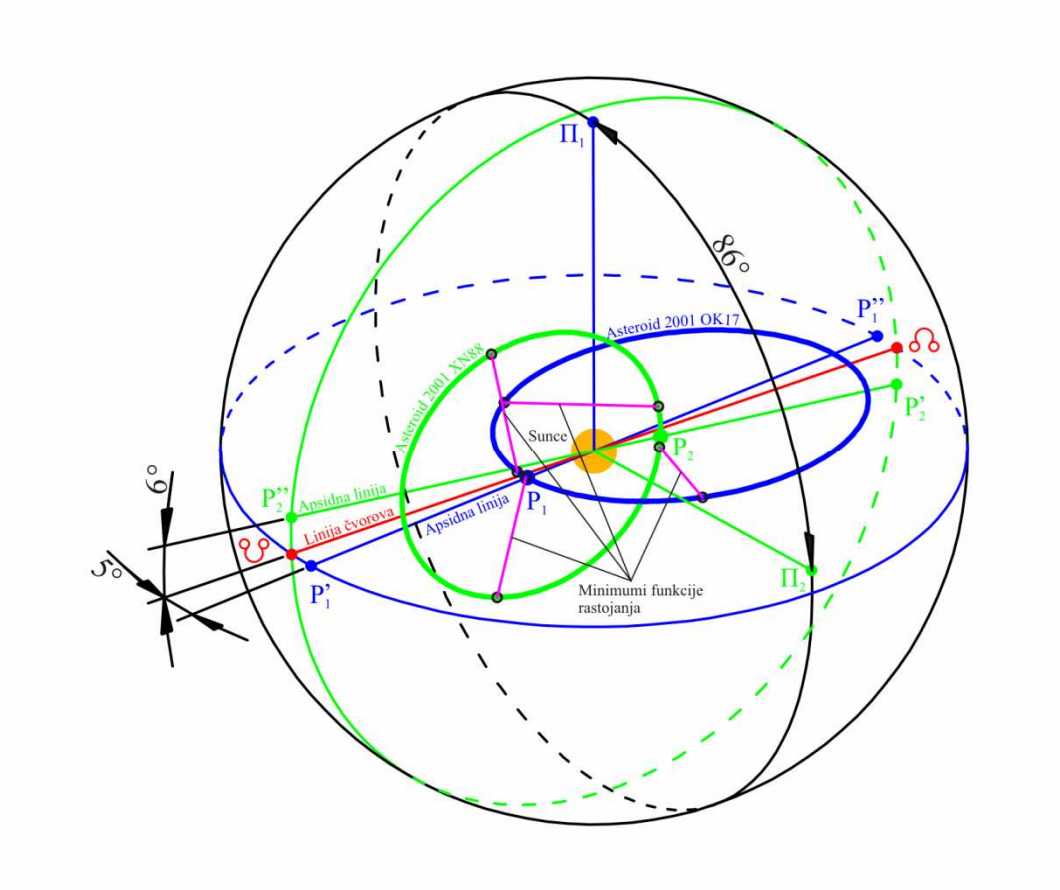
Parovi sa četiri minimuma su se pojavili samo dva puta od skoro tri miliona analiziranih. Prvi pronađeni par ima četiri minimuma, dva maksimuma i šest prevojnih tačaka, a drugi četiri miminuma, jedan maksimum i pet prevojnih tačaka. U oba slučaja, evidentna je veliki medjusobni nagib. Na slikama 5.5 i 5.7 prikazane su orbite tih asteroidskih parova sa njihovim projekcijama na nebesku sferu i kada ih uporedimo sa odgovarajućom slikom 5.9 Gronkijevog simuliranog modela, odmah se uočava velika sličnost. To naravno potvrđuju i prostorni i ravanski dijagram funkcije rastojanja dati na slikama 5.6 i 5.8.



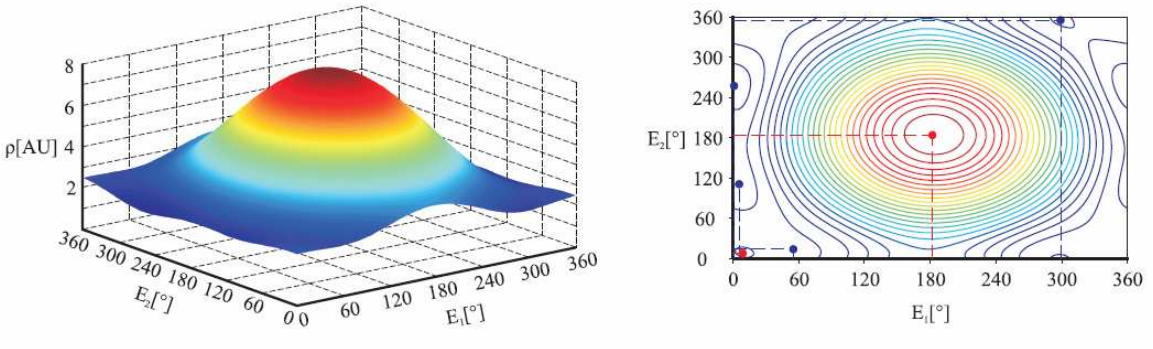
Slika 5.5: Orbite asteroidskog para 2010 CA55–2010 JN33, (slučaj 4-1) i njihove projekcije na nebesku sferu.



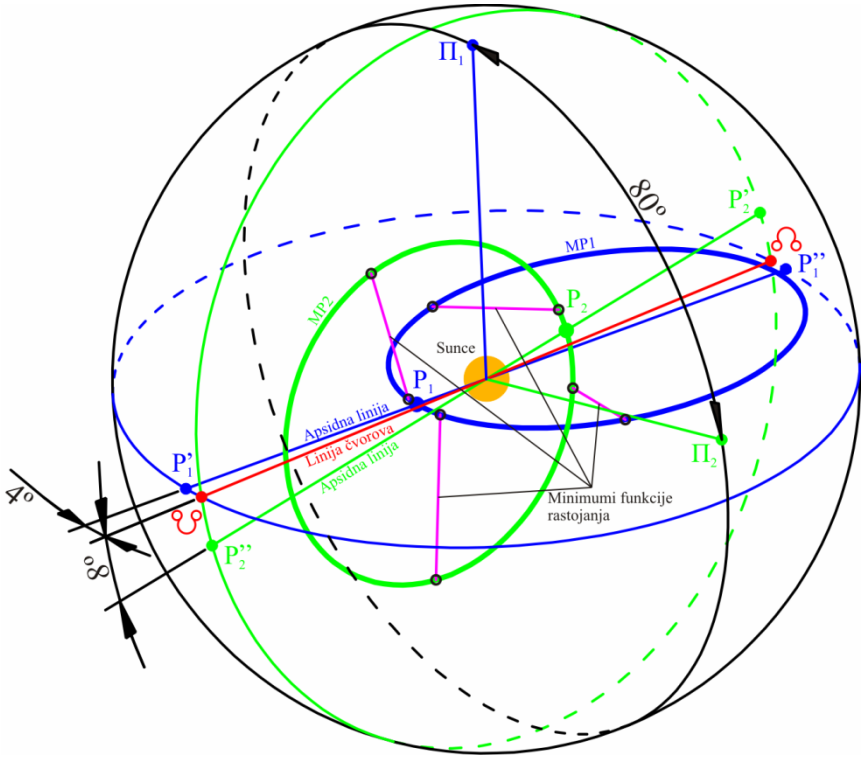
Slika 5.6: Prostorni i ravanski dijagram funkcije rastojanja $\rho(E_1, E_2)$ za asteroidski par 2010 CA55–2010 JN33 (slučaj 4-1).



Slika 5.7: Orbite asteroidskog para 2001 OK17–2001 XN88, (slučaj 4-2) i njihove projekcije na nebesku sferu.



Slika 5.8: Prostorni i ravanski dijagram funkcije rastojanja $\rho(E_1, E_2)$ za asteroidski par 2001 OK17–2001 XN88 (slučaj 4-2).



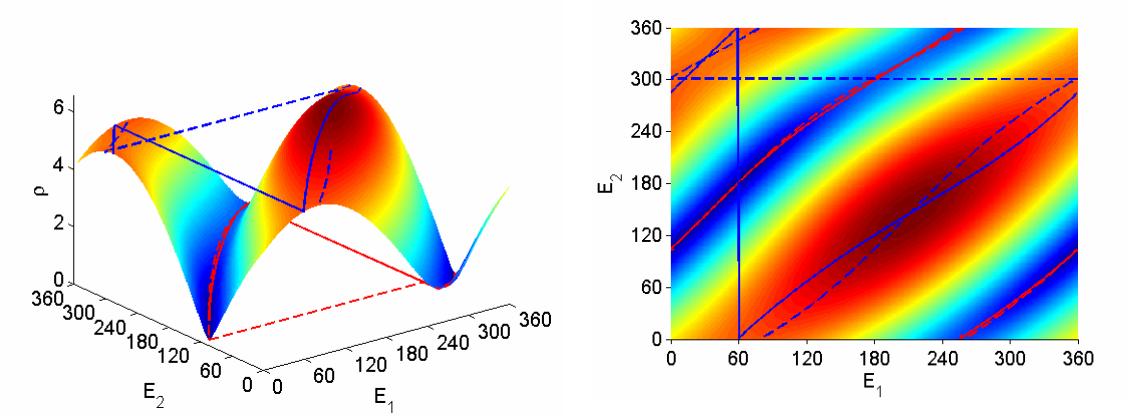
Slika 5.9: Orbite Gronkijevog (Gronchi, 2002) simuliranog para MP1- MP2 (slučaj 4-1) i njihove projekcije na nebesku sferu.

5.3 Analiza funkcije rastojanja

Iako vrednosti ekscentričnih anomalija u pozicijama minimuma, maksimuma kao i prevojnih tačaka u okviru istog slučaja, mogu biti prilično različite, njihove funkcije rastojanja ipak imaju vrlo slične oblike. U tom smislu, na slikama dole dati su 3d i 2d dijagrami za svaki od mogućih parova asteroidskih putanja (klasifikovanih po broju minimum-maksimum). Tabela sa njihovim imenima data je u prilogu 2.

Na slici 5.10 a-b su prikazani odgovarajući dijagrami za slučaj kad je funkcija rastojanja 1-1, što zajedno sa dva prevoja ukupno, daje 4 stacionarne tačke i samim tim predstavlja slučaj kad je ona najprostija. U zavisnosti od vrednosti putanjskih elemenata i minimum i maksimum mogu zauzimati najrazličitije pozicije tj. imati odgovarajuće vrednosti E_1 i E_2.

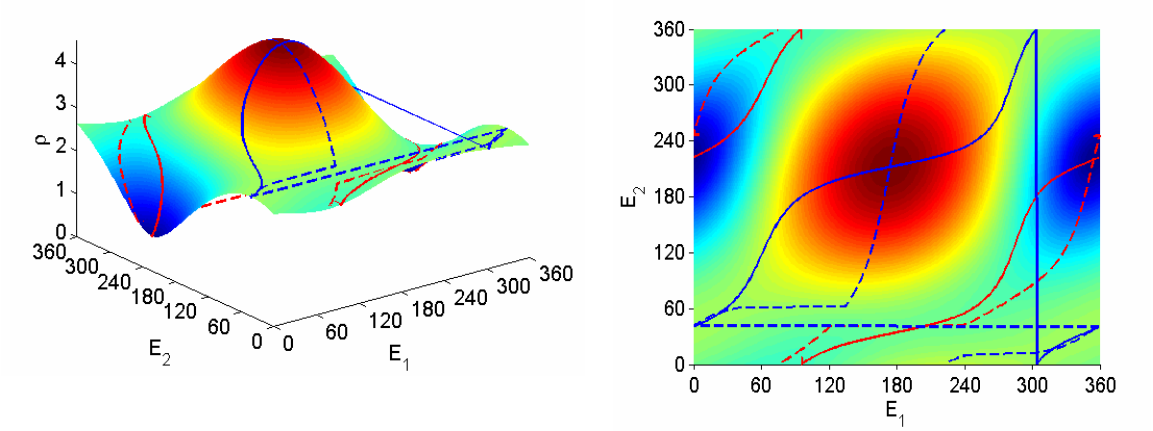
Na svim 3d dijagramima koji su prikazani na Z osi su vrednosti relativnog vektora položaja $\vec{\rho}$ tj. veličina funkcije rastojanja izražena u AJ. Prevojne tačke su uvek u centru sedla i u centrima oblasti prelaska iz jedne minimalne ili maksimalne vrednosti u drugu njoj najbližu.



prox_min = 64 186.18 0.00015495 prox_max = 211 144.89 6.5808

Slika 5.10 a-b: 3D i 2D dijagram funkcije rastojanja za par 1-1.

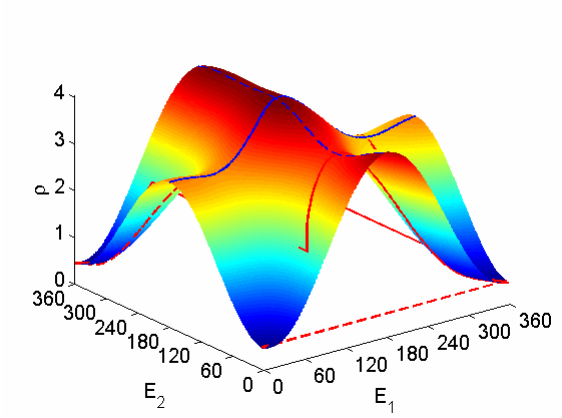
Slučaj 1-2 je po karakteristikama sličan prethodnom osim naravno što ima jedan maksimum više, pa samim tim i 3 prevoja tj. ukupno 6 stacionarnih tačaka funkcije rastojanja.

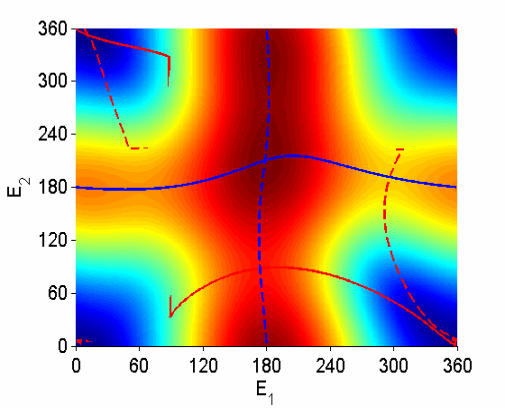


prox_min = 354 219.68 0.78758 prox_max = 174 211.77 4.5648

355 37.911 2.7715

Slika 5.11 a-b: 3D i 2D dijagram funkcije rastojanja za par 1-2.





prox_min = 13 351.74 0.43771

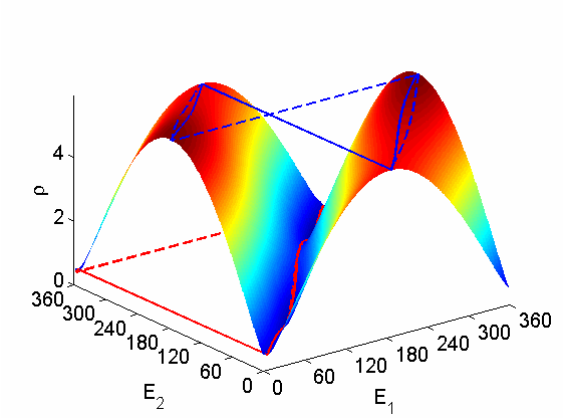
prox_max = 11 178.78 3.1107

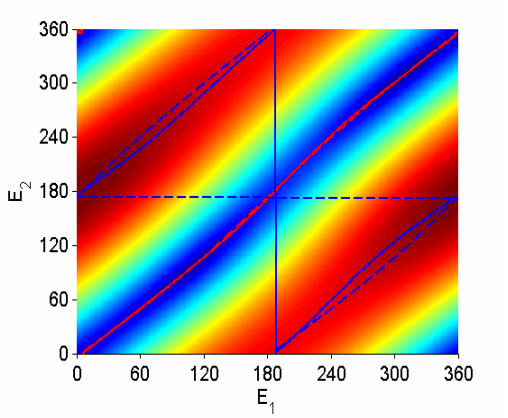
179 210.22 4.0411

182.11 325 4.0119

Slika 5.12 a-b: 3D i 2D dijagram funkcije rastojanja za par 1-3.

Iako su parovi koji imaju 1 minimum po zastupljenosti odmah iza parova sa 2 minimuma, slučaj 1-3 je izuzetno redak i jako ga je teško pronaći, kako kod realnih tako i kod simuliranih asteroidskih parova putanja. Funkcija rastojanja sada ima 8 stacionarnih tačaka.





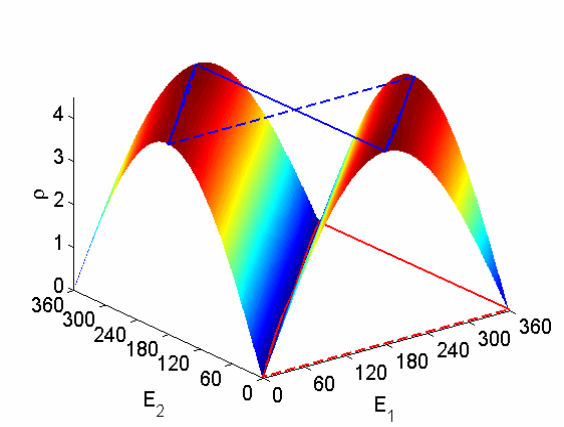
prox_min = 109 95.597 0.2202

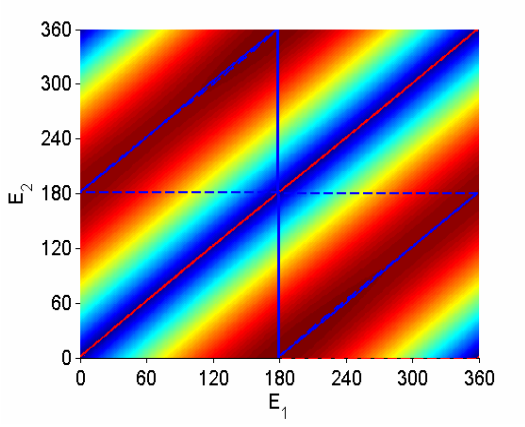
prox_max = 5 179.33 5.9418

310 309.76 1.3962e-005

Slika 5.13 a-b: 3D i 2D dijagram funkcije rastojanja za par 2-1.

Svakako da su parovi 2-1 najzastupljeniji bilo da je reč o simuliranim ili realnim parovima asteroidskih putanja, i ono što je u ovom slučaju evidentno je da su im pozicije minimuma obično sa ujednačenim razlikama odgovarajućih ekscentričnih anomalija tj. u široj okolini linije čvorova kako je već ranije pomenuto.

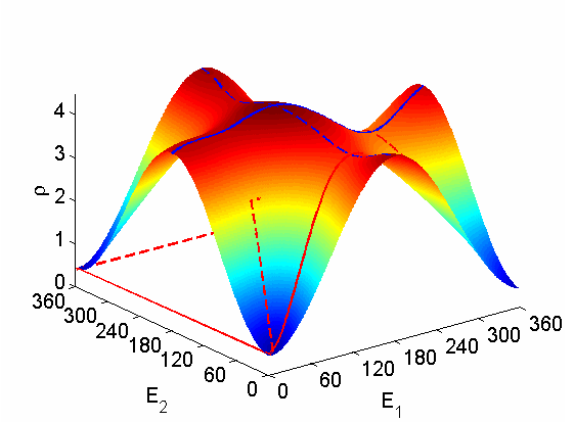


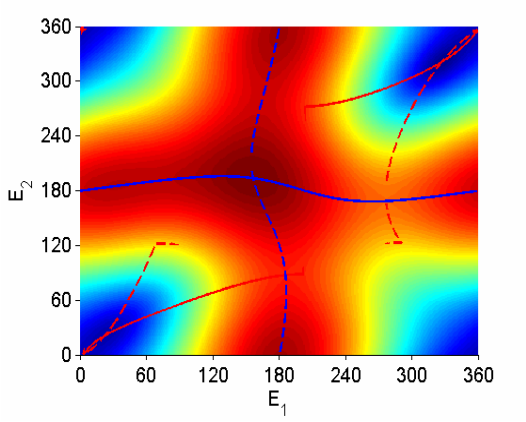


prox_min =	14	15.668	0.00016054	prox_max=	184	5.6783	4.4953
	199	200.55	0.069757		351	172.63	4.4272

Slika 5.14 a-b: 3D i 2D dijagram funkcije rastojanja za par 2-2.

Slučaj 2-2 je karakterističan kao najčešće zastupljen kada je relativni nagib velik (blizak 90°). Simuliranje tj. promena ostalih putanjskih elemenata (longitude perihela i longitude uzlaznog čvora), u tim uslovima, najčešće dovodi do pojave još jednog ili više minimuma ili još jednog maksimuma.

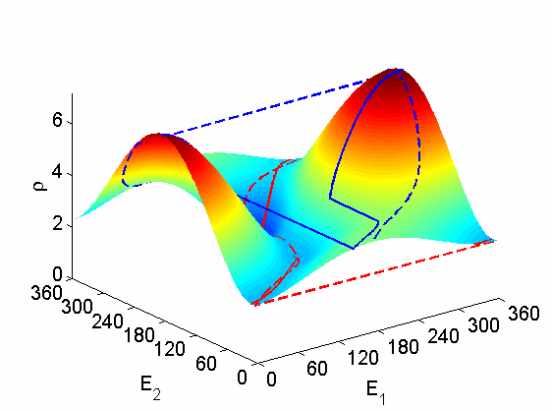


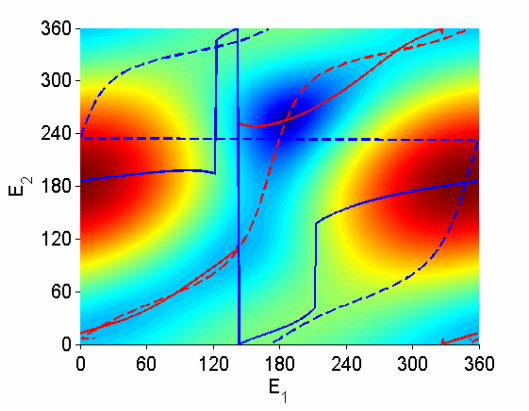


prox_min =	23	21.304	0.37099	prox_max=	33	184.93	4.2263
	328	321.56	0.21789		157	193.42	4.4858
					179.09	351	4.3052

Slika 5.15 a-b: 3D i 2D dijagram funkcije rastojanja za par 2-3.

Slučaj 2-3 je upravo direktna posledica prethodno komentara o parovima 2-2 I, takođe, kao i parovi sa 1-3 je jako retko zastupljen. Sada funkcija rastojanja ima 5 prevoja tj. 10 stacionarnih tačaka.





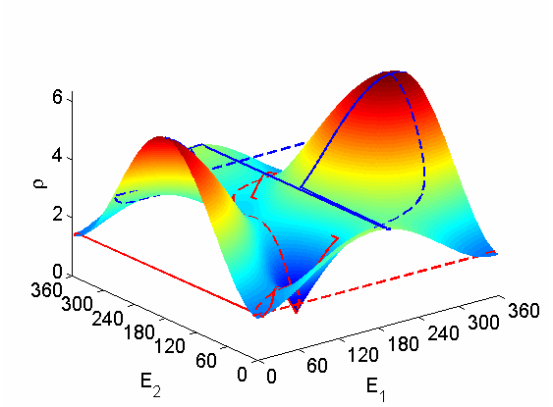
prox_min = 18 19.192 2.1732 prox_max = 348 183.91 7.1919

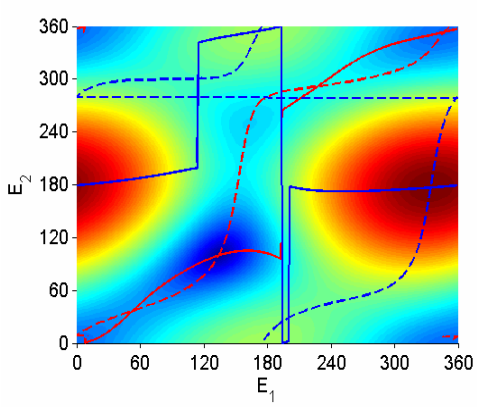
186 255.15 0.0032973

143.31 109 2.1201

Slika 5.16 a-b: 3D i 2D dijagram funkcije rastojanja za par 3-1.

Iako ne mnogo zastupljeni svi slučajevi 3-1 imaju prilične međusobne sličnosti kada su položaji minimuma i maksimuma u pitanju. To nedvosmisleno ukazuje da su raniji stavovi kada je bilo reči o parovima sa 3 minimuma bili ispravni tj. da se minimumi i maksimumi nalaze upravo na očekivanim mestima, kako je to već prikazano u poglavlju 3.1.





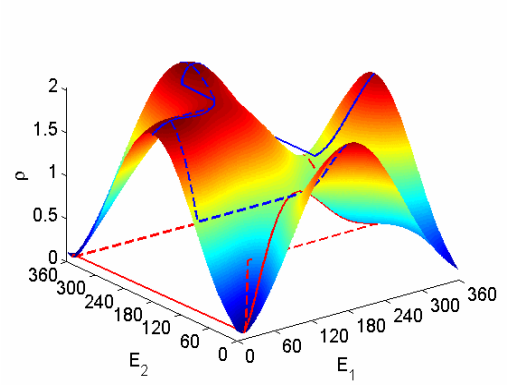
prox_min = 134 99.542 0.0045304 prox_max = 172 354.63 3.3656

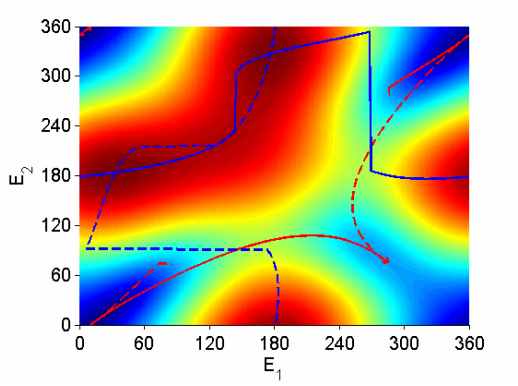
347 353.36 1.3932 334 176.67 6.3586

162.58 248 2.0882

Slika 5.17 a-b: 3D i 2D dijagram funkcije rastojanja za par 3-2.

Može se reći da je par 3-2 karakterističan slučaj prethodnog 3-1 I, osim što je još ređe zastupljen od njega, njegova funkcija rastojanja je među najkomplesnijima jer kao i par 2-3 ima pet prevoja tj. ukupno 10 stacionarnih tačaka. Ovde je takođe karakteristično da se drugi maksimum obično pojavljuje na oko 180° od prvog (na priloženom dijagramu na slici 5.17 b i iz vrednosti ekscentričnih anomalija za maksimume to se može videti).

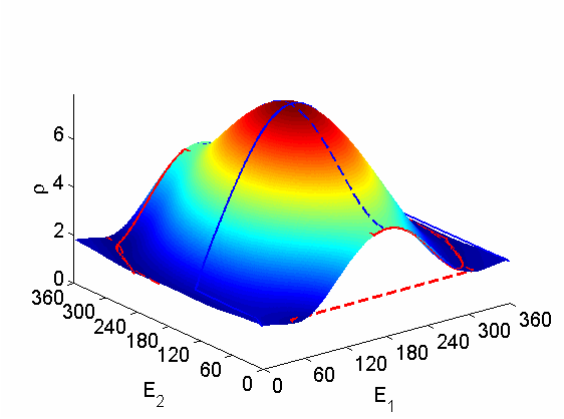


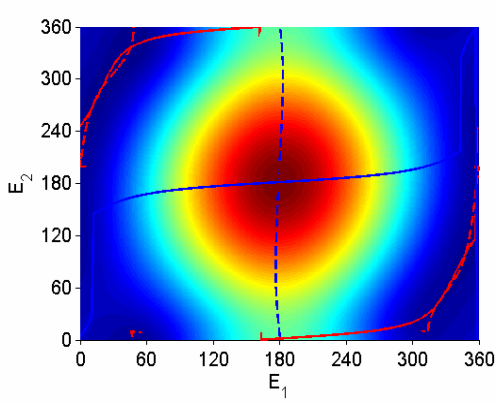


prox_min =	17	6.0837	0.073164	prox_max =	33	183.66	2.0309
	279	80.995	0.61863		136	224.65	1.919
	354	343.12	0.073082		176	326.91	2.031

Slika 5.18 a-b: 3D i 2D dijagram funkcije rastojanja za par 3-3.

Slučaj 3-3 je najređi od svih, pa čak i od onih sa 4 minimum, izgled njegovih 3d i 2d dijagrama funkcije rastojanja to jasno pokazuje. Takođe, to je još jedna potvrda da je smena minimuma, maksimuma i njihovih odgovarajućih prevoja na obilaženju, po orbitama, zaista jedan složen postupak. Sada funkcija rastojanja ima maksimalnih 12 stacionarnih tačaka.



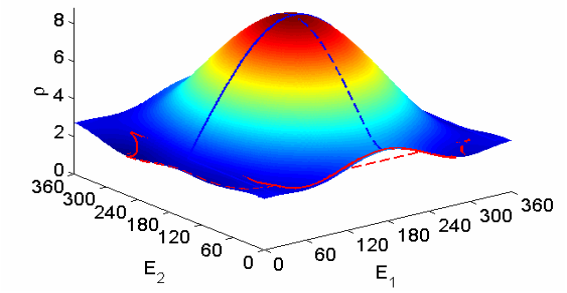


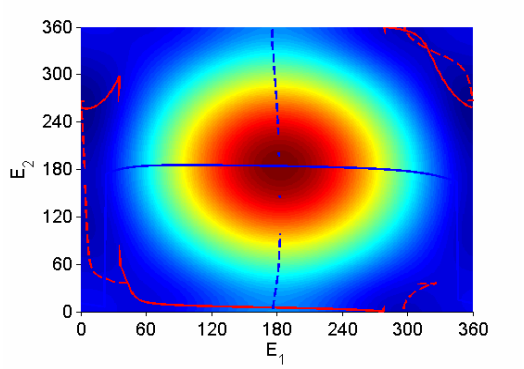
prox_min =	10	265.91	1.5424	prox_max =	179	181.24	7.8719
	45	335.66	1.4856				
	323	41.877	1.5776				
	348	99.614	1.554				

Slika 5.19 a-b: 3D i 2D dijagram funkcije rastojanja za par 4-1.

Slučajevi sa četiri minimuma bez obzira da li imaju 1 ili 2 maksimuma, takođe su izuzetno retki bilo da je reč o realnim ili simuliranim parovima asteroidskih putanja (samo tri pronađena od skoro tri miliona parova kod realnih i zanemarljivi procenat kod simuliranih to jasno potvrđuju). Analizirajući pozicije sva četiri minimum, stiče se utisak da su oni nekako pravilno raspoređeni unakrsno po eliptičnoj putanji (na 2d dijagramu su obično u sva četiri ugla). Jedan maksimum je obično u sredini 2d

dijagrama tj. sa vrednostima ekscentričnih anomalija oko 180°, dok je drugi ako postoji u jednom od uglova 2d dijagrama pa je i njegova veličina neznatno veća od njemu susednog minimuma. Ipak, zbog malog uzorka tj. pronađenih parova o nekoj većoj generalizaciji ovde se ne može govoriti osim, kao što je više puta pomenuto, da je kod ovakvih parova medjusobni nagib blizak 90°.





prox_min = 1 257.4 2.0709

55 14.096 2.6607

299 355.25 2.4535

5.5428 111 2.3585

prox_max= 9 8.5423 2.7427

182 184.08 8.8626

Slika 5.20 a-b: 3D i 2D dijagram funkcije rastojanja za par 4-2.

Tabela 5.3 Vrednosti putanjskih elemenata karakterističnih parova asteroida čiji su 2d i 3d dijagrami funkcije rastojanja prikazani u poglavlju 5.3

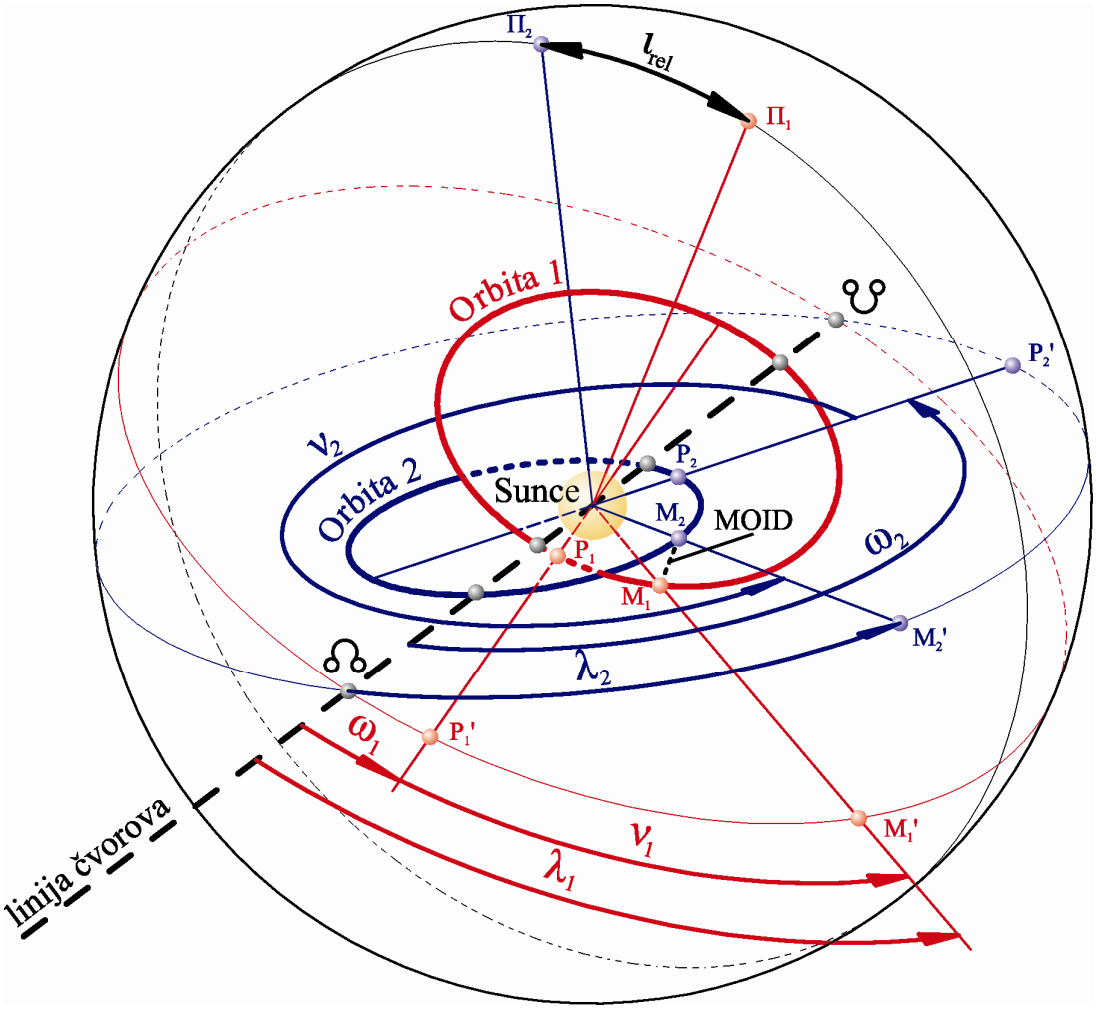
Min - Max	**ω[°]**	**Ω[°]**	**i [°]**	**e**	**a [AJ]**
1-1	132.281269	45.522674	18.681453	0.15134733	3.23990973
	27.024027	37.320218	14.340210	0.16700712	2.59426748
1-2	248.128542	169.911193	12.982126	0.25506017	2.67048425
	132.18943	56.572203	63.460828	0.26643638	1.00686863
1-3	262.852693	165.372567	65.533781	0.97710700	1.90355258
	280.485689	309.975292	46.041624	0.73550991	1.77708360
2-1	125.024081	307.898145	6.419848	0.11848675	2.69487397
	82.945156	356.590639	16.535383	0.23064606	2.92042212
2-2	5.442021	62.505725	7.982340	0.13714720	2.24800198
	23.590632	42.583744	4.414988	0.12392857	2.21303649
2-3	185.075073	185.459505	56.067896	0.79678925	2.33972020
	164.648147	256.898547	70.922738	0.89724060	2.06601764
3-1	337.072218	167.373232	1.018258	0.06452355	2.88539236
	331.807638	150.336242	53.250673	0.81316168	2.53967653

3-2	291.324685	97.424668	24.223534	0.30047538	2.38294391
	356.691413	7.095813	60.542807	0.88223092	2.51151353
3-3 simulacija	1	1	1	0.866	1
	292.5	111.25	31	0.866	1
4-1	305.374159	106.551914	56.891819	0.78611989	3.12940206
	59.344843	200.577800	55.145393	0.33872023	1.70703838
4-2	158.824199	122.113353	49.223350	0.56541673	3.24433387
	190.782840	279.623991	47.061014	0.48404983	2.55926808

5.4 Pojam proksimiteta i pojam MOID-a

Ceo ovaj rad je, u krajnjoj liniji, nastao kao produžetak jednog specifičnog napora u istraživanju međusobnih bliskih prilaza malih planeta, pri čemu taj napor možemo da identifikujemo kao značajan deo beogradske škole astronomije, deo koji će uskoro da navrši stoleće posmatračkih i nešto manje od stoleća teorijskih rezultata. Poštujući svetsku praksu tvorci te škole i njihovi sledbenici su koristili pojam proksimiteta da bi označili situacije kada dolazi do bliskih prilaza malih planeta. Međutim, rast zahteva da se iz znatno bogatije populacije malih planeta nađu one male planete koje mogu da dovedu do medjusobnog sudara, posebno zahtev da se razmotre i istorijski i budući bliski prolazi tih tela i Zemlje, dakle, sve to je dovelo da se ti i takvi prolazi i položaji počnu nazivati najmanjim. U engleskom govornom području za najmanji od proksimiteta dva nebeska tela upotrebljen je naziv MOID (Minimal Orbital Intersection Distance)

Smatrajući da smo u ovom radu dali dosta dokaza o učešću srpskih astronoma u razvoju teorije proksimiteta, da su mnogi danas vodeći stručnjaci u toj oblasti deo svojih znanja crpeli i iz naše škole, ovde sebi dozvoljavamo da pojam MOID pretvorimo u pojam NDOP, tj. u pojam Najmanja Dužina Orbitalnih Preseka. Ovim ukazujemo na nekoliko stvari: prvo, radi se o određivanju svih minimuma funkcije rastojanja dve tačke konfokalnih putanja malih planeta, tj. o odredjivanju svih proksimiteta; dalje, radi se o nalaženju najmanjeg medju njima; treće, radi se o funkciji rastojanja, tj. o presecima dveju konfokalnih eliptičnih putanja, a to znači da se radi o specifičnoj vektorskoj funkciji. Bez obzira što u ovom radu nije bio cilj ’potraga’ za najmanjim proksimitetom tj. njegovo izračunavanje (kao što je to većinom slučaj u radovima novije generacije) treba naglasiti da je ta 'potraga' ovde bila uspešna. U tom smislu na slici 5.21 je dat položaj NDOP za dve proizvoljne orbite sa svim pratećim parametrima tj. njihovim projekcijama na nebesku sferu, koji se najčešće ne mogu sresti u literaturi i radovima na temu proksimiteta i analize funkcije rastojanja.



Slika 5.21: Projekcije svih relevantnih parametara MOID-a na nebesku sferu.

Sa slike 5.21 vidimo da je položaj NDOP-a najčešće dat preko pravih anomalija (ugaonih udaljenosti od perihela), prve i druge orbite i njihovih argumenata perihela (ugaonih udaljenosti od uzlaznog čvora). Znajući vezu prave i ekscentrične anomalije lako se prelazi sa jedne na drugu tako da, sa stanovišta izračunavanja proksimiteta, to i nema nekog posebnog značaja. Oba pristupa su skoro ravnomerno zastupljena u literaturi.

U odnosu na NDOP naše simulacije i izračunavanja za realne orbite daju sledeće:

Najmanja vrednost NDOP-a koju smo izračunali je za par asteroida 131 (Vala) – 134 (Ivet) i iznosi od 0,00001396 AJ, što je oko trećine Zemljinog radijusa;

Najveći broj NDOP-a nađe se u blizini čvorova;

Veća je verovatnoća da se NDOP nađe u blizini perihela nego u blizini afela;

Koncentracija NDOP-a ka perihelu je srazmerna srednjem ekscentricitetu orbita tj. što je veća ekscentričnost veća je šansa da se NDOP nađe u blizini perihelia;

6. ZAKLJUČAK

Ponavljamo: problem najmanjih uzajamnih rastojanja dveju konfokalnih eliptičnih orbita, tj. problem lokalnih minimuma, koji je, po pravilu, poznat u istoriji astronomije kao problem proksimiteta, i problem pronalaženja najmanjeg među njima, što je u literaturi poznato pod gore uvedenim nazivom MOID, ima izuzetno važnu ulogu u astronomskim istraživanjima. Šta više, ponašanje asteroida u okolini proksimiteta otvara i specifične mogućnosti daljih istraživanja.

U tom smislu raniji postupak (Milisavljević 2002, 2010) jeste posledica radova Lazovića (1964, 1967, 1976, 1978, 1981) i Simovljevića (1977), pri čemu se izbegavaju aproksimacije i proksimiteti nalaze naizmeničnim rešavanjem jedne, pa druge, vektorske jednačine sistema 3.1. Tako se došlo u priliku da se razvije metoda određivanja svih kritičnih tačaka - minimuma, maksimuma i prevojnih tačaka.

Postupak izložen u ovoj disertaciji je značajno poboljšan i zahvaljujući primeni programskih alata prilagođen, tako da je prerastao u postupak koji omogućava izračunavanje ne samo minimuma, kao prethodni, već i maksimuma, a posredno je moguće odrediti i prevojne tačke.

Sve te mogućnosti su programski implementirane i iskorišćene u obradi kako realnih tako i simuliranih parova asteroidskih putanja. U odnosu na aktuelne i ranije postupke i metode naš postupak je znatno brži, a izbor i korišćenje Njutnove metode za rešavanje jednačine četvrtog stepena, umesto gotovih rešenja koja nudi Matlab 7.0, još nekoliko puta je ubrzalo proces izračunavanja.

Kada se govori o stvarnim brzinama izračunavanja ili o broju izabranih parova za koje je račun obavljen pokazalo se da rezultujuća brzina, odnosno efikasnost računa, zavisi od više parametara od kojih je svakako najznačajniji izbor metode, pa tek onda dolaze do izražaja vrste simulacija, izbor operativne programske platforme, hardverskih potencijala računarskog sistema, ... Na srednje brzim personalnim računarima (godina 2010, 2011 – pentium IV, ...) ovakvim postupkom moguće je obraditi preko milion parova asteroidskih putanja za 24 časa.

Zahvaljujući ovakvom pristupu formirano je analitičko i programsko okruženje koje je omogućilo znatno veći broj izračunavanja funkcija rastojanja malih planeta u cilju izdvajanja karakterističnih parova asteroidskih putanja. U tom smislu kroz analizu rezultata za 3 miliona realnih i preko 20 miliona simuliranih parova asteroidskih putanja otišli smo korak dalje u izučavanju funkcije rastojanja malih planeta, što je i bio jedan od ciljeva ovog rada. U tom smislu metoda koja je razvijena i primenjena u ovoj disertaciji pokazala se izuzetno efikasnom jer:

Omogućava značajno bržu obradu velikog skupa nebeskih tela i njihovih putanja kako u realnim tako i u simuliranim uslovima

Uslovno oscilatorni karakter metode doprineo je kvalitetno novom rezultatu, a to je povećanje selektivnosti i uklanjanje opasnosti da se neka stacionarna tačka previdi

Odredjene provere metode na tri grupe asteroida Aten, Apollo i Amor, su pokazale da navedeni metod takodje može da se primeni i u situacijama koje su posebno interesantne kada se radi o bliskim prilazima nebeskih tela zemlji

Pokazalo se da su, nezavisno od toga da li se radi o realnim ili simuliranim parovima, najzastupljeniji parovi 2-1 i 1-1. To ukazuje na činjenicu da u većini slučajeva funkcija rastojanja ima jedan ili dva minumuma kod kvazikomplanarnih realnih asteroida i da zadržava slične karakteristike i kada kvazikomplanarnosti više nema, tj. kada medjusobni nagib postane znatno veći od nekoliko stepeni.

Analiza simulacije Ia - specifičan slučaj kada su dve eliptične putanje identične i sa jako malom ekscentričnošću - pokazala je da i za sve ostale vrednosti medjusobnog nagiba do 89° funkcija rastojanja ima slične karakteristike.

Kod parova asteroidskih putanja sa jednim minimumom taj minimum je MOID, a kod ostalih parova gde imamo više minimuma, jedan od njih je MOID pri čemu se MOID uvek nalazi u neposrednoj blizini perihela. Ova činjenica je demonstrirana na slikama 5.10, 5.11 i 5.12 koje se odnose na prikaz podataka za nalaženje kritičnih tačaka parova kod kojih smo dobili 1-1, 1-2 i 1-3.

Grupa simulacija data tabelom 2 pokazuje da broj parova sa složenijom funkcijom rastojanja (broj stacionarnih tačaka) raste sa izjednačavanjem orbita po dimenziji. Promene argumenta perihela i longitude uzlaznog čvora nisu imale većeg uticaja.

U opštem slučaju funkcija rastojanja evoluira u složeniju sa povećanjem medjusobnog nagiba i najčešće se broj minimuma i broj maksimuma povećava da bi oko kritičnih uglova od 80° do 90° njihov broj bio najveći. I u ovom slučaju promena argumenta perihela i longitude uzlaznog čvora nisu imale većeg uticaja.

Pokazalo se da parovi asteroidskih putanja sa tri minimuma ipak postoje i kod realnih i kod simuliranih parova. Jedan od njihovih minimuma je u blizini perihela, a ako to nije slučaj onda su dva od tri u okolini linije čvorova.

Važna je činjenica da slučaj 3-3 postoji kod simuliranih putanja. Kod realnih nije pronađen. Sa druge strane parovi sa četiri minimuma su znatno brojniji. To ukazuje na moguću vezu sa složenošću funkcije rastojanja jer u slučaju 3-3 i 4-2 imamo 12 stacionarnih tačaka.

I pored velikog broja simulacija par sa 4 maksimuma nije pronađen. Teorija ukazuje, Bernstajn (1975) i Gronki (2002), na maksimalnih 16 stacionarnih tačaka ali, iz nekih analiza karakteristčnih parova eliptičnih putanja, čini se da četvrti maksimum pri variranju putanjskih elemenata nekako ‘sklizne’ u prevoj.

Takođe, simulacije po grupama i tipovima (poglavlje 3.3) pored ostalog pokazuju da uslov da dve eliptične putanje imaju ili nemaju presečnih tačaka kada su u istoj ravni nema skoro nikakvog značaja kada je u pitanju izgled njihove funkcije rastojanja tj. broj stacionarnih tačaka.

Važan rezultat ovog rada je činjenica da su prethodno izloženim postupkom uspešno pronađeni parovi sa 4-1 i 4-2 kod realnih asteroidskih putanja, što je i bio jedan od glavnih motiva i ciljeva.

Pokazala se ispravnom odluka da se eventualni realni parovi sa četiri minimuma traže kod onih čiji je nagib veći od 45°; date slike i dijagrami ukazuju na njihovu veliku

sličnost sa simuliranim modelom (Gronchi 2002). Ostali simulirani parovi sa četiri minimuma pokazuju da su vrednosti parametara putanja bliske vrednostima u Gronkijevom modelu, pa je uslov za postojanje 4 minimuma funkcije rastojanja: (i) postojanje velikog medjusobnog nagiba 75°-90°, (ii) bliske vrednosti longitude perihela obe eliptične putanje, najčešće sa razlikom do 10°, (iii) suprotne pozicije longitude uzlaznog čvora odnosno sa približnom razlikom njihovih vrednosti od oko 180°.

Bez obzira što nismo pronašli parove sa četiri maksimuma, kao ni parove 4-3, ne možemo tvrditi da ih nema. Dakle, gornja granica, maksimalni broj, stacionarnih tačaka funkcije rastojanja dve konfokalne eliptične putanje koji smo ovde našli je 12.

Osim toga, potvrdili smo ranije dobijenih 8 rešenja i dopunili ih sa 3 nova rešenja: 3-3, 4-1 i 4-2.

LITERATURA

1. Armelin R., Di Lizia P., Berz M. and Makino K. 2010, *Computing the critical points of the distance function between two Keplerian orbits via rigorous global optimization,* Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy 107, 3, 377-395.
2. Baluyev R. and Kholshevnikov K. 2004, *Distance between two arbitrary unperturbed orbits,* Sobolev Astronomical Institute, St. Petersburg. University, 198504, St. Petersburg, Russia
3. Bernstain D. N. 1975, *Broj korena sistema jednačina,* Funkcionalna analiza, t. 9bp. 3, 1975, 1-4. Institut upravljanja problemima AN SSSR.
4. Dybczy´nski, P.A., Jopek, T.J., and Serafin, R.A. 1986, *On the minimum distance between two keplerian orbits with a common focus,* Astronomical Observatory of the A. Mickiewicz Universitz Sloneczna 36, 60 – 286 Poznan, Poland.
5. Fayet G., *Contribution à l'ètude des proximitèn d'orbites dans le système solaire,* Ann. Bur. des Long., t. XII, Centre National de la Rech, Scient., Paris, 1949.
6. Gronchi G.F.: 2002, *On the stationary points of the squared distance between two ellipses with a common focus,* SIAM Journ. Sci. Comp., 24/1, pp.61-80.
7. Gronchi G.F.: 2005, *An algebraic method to compute the critical points of the distance function between two Keplerian orbit,* Cel. Mech. Dyn. Ast., Vol. 93/1, pp.297-332.
8. Gronchi G.F., Tommei G. and Milani A. 2006, *Mutual geometry of confocal Keplerian orbits: uncertainty of the MOID and search for virtual PHAs,* in Near Earth Objects, our Celestial Neighbors: Opportunity and Risk. IAU Symposium 236. Prague, Cech Republic, pp. 3-14, Cambridge University Press.
9. Grunert, *Uber die Proximitäten der Bahnen der Planeten und Cometen,* Sitzb. d. math. – naturw. Cl. der k. Ak. d. Wiss., Wien, 1854, Bd. XIII.
10. Karl von Littrow, *Bahnnähenywischen den periodischen Gestirnen des Sonnensystems,* Sitzb. d. Math. – Naturw. Cl. der k. Ak. d. Wiss., Wien, 1854, Bd. XIII. Većina kasnijih radova po ovom pitanju pojavila se u volumima XXIX, XLIII, XLV; XLVII; XLIX; LI; LIV; LVI istog zbornika.
11. Kholshevnikov K. i Vassiiliev N.: 1999, *On the distance function between two Keplerian elliptic orbits,* Cel. Mech. & Dyn. Astr. 75, 75-83.
12. Kuzmanoski M. 1992, a., *Close encounters between minor planets,* Bul. Astron. Obs., Belgrade 145-151.
13. Kuzmanoski M. 1992, b., *Mutual perturbing effects of minor mlanets in their orbital elements,*Bul. Astron. Obs., Belgrade 153-156.

14. Kuzmanoski M. i Z.Knežević: 1993, *Close encounterrs with large asteroids in the next 50 years*, Icarus 103, 93-103.

15. Lazović J.P.: 1964, *Važnije osobenosti u kretanju kvazikomplanarnih asteroida.* Doktorska disertacija, Univerzitet u Be.ogradu.

16. Lazović J.P.: 1967, *Determination of the minimum distance between orbits of asteroids with small mutual inclination.* Bull. ITA 1, 57-62.

17. Lazović J.P.: 1974, *Approximate values of true anomalies of quasicomplanar asteroids in proximity.* Dept. Astron. Belgrade 5, 85-93.

18. Lazović J.P.: 1976, *Numerical determination of the approximate true anomalies in the proximity of quasicomplanar orbits of celestial bodies.* Public. Dept. Astron. Belgrade 6, 83-88.

19. Lazović J.P.: 1978, *Numerical determination of approximate of true anomalies of the quasicomplanar asteroids proximity* Public. Dept. Astron. Belgrade 8, 43-46.

20. Lazović J.P.: 1979, *Masses of some numbered minor planets.* Public. dept. Astron. Belgrade 9, 55-61.

21. Lazović J.P.: 1980, *Contribution to the proximity of non-quasicomplanar elliptical orbits of celestal bodies,* (OSP). Public. Dept. Astron.. Belgrade 10, 43-47.

22. Lazović J.P.: 1981, D*etermination of proximity determination elliptical orbits of celestial bodies by way of eccentric anomalies,* (OSP). Public. dept. Astron. Belgrade 11, 65-73.

23. Lazović J.P.: 1993, *The approximate values of eccentric anomalies of proximity* Zbornik radova X Nacionalne konferencije Jugoslovenskih astronoma No. 44, 11-14.

24. Lazović J.P. i Kuzmanoski M.: 1980, *Proximities of asteroids (1) Ceres, (2) Palas, (3) Juno and (4) Vesta,* (OSP) Public. Dept. Astron. Belgrade 10, 29-34.

25. Lazović J.P. i Kuzmanoski M.: 1983, *Ceres, Pallas, Junos and Vestas proximities with other numbered minor planet,* (OSP) Public. Dept. Astron. Belgrade 12, 11-18.

26. Lazović J.P. i Kuzmanoski M.: 1985, *Perturbing action of Ceres, Palas, Juno and Vesta at their proximities with other selected minor planets.* (OSP) Public. Dept. Astron. Belgrade 13, 13-18.

27. Marth A., *Data for a Graphical Representation of the Solar System*, Monthly Notices R. A. S., 1885, XLV, 348, 483.

28. Milanković M., *Nebeska mehanika*, 1935-1995, Beograd.

29. Milisavljević, S. 2002, *Jedan postupak za određivanje proksimiteta između putanja malih planeta*, Magistarski rad, Univerzitet u Beogradu.

30. Milisavljević, S. 2010, *The Proximities of Asteroids and Critical Points of the Distance Function*, Serbian Astronomical Journal, 180, 90 – 102.

31. Mišković V.V.: 1974. *Prilog problematici proksimiteta planetoida*. Glas srpske akademije nauka i umetnosti (Odeljenje prirodno-matematičkih nauka) 37, 31-54.

32. Murison A. M. and Munteanu A. 2006, *On the Distance Function between Two Confocal Keplerian Orbits*, U.S. Naval Observatory, Washington DC, Harvard University, Internal document.

33. Simovljević J.L.: 1976, *Teorijska astronomija*, Beograd.

34. Simovljević J.L.: 1977, *A contribution to the determination of proximity of asteroid orbits*, Glas Acad. Serbe Sci. Arts (Math.-Nat.) 41, 65-74.

35. Simovljević J.L.: 1979, *Approximate perturbation methods for regular asteroid proximities,* Acta Astron. 29, 445-453.

36. Sitarski G.: 1968, *Approache of the Parabolic Comets to the Outer Planets*, Acta Astronomica, 18, 171-196.

37. Šegan S., Milisavljević S. i Marčeta D. 2011, *A Combined Method to Compute the Proximities of Asteroids.* Acta Astronomica, 61, 275-283.

38. Vassiiliev N. 1978, *Determination of the singularities of the function of distance between any points of Keplerian orbits,* St. Petersburg, Bilten instituta za Teorijsku Astronomiju, t. XIV, No: 5(158).

39. Web stranica http://www.minorplanetcenter.net/iau/MPEph/MPEph.html.

PRILOG 1

Program za izračunavanje minimuma i maksimuma funkcije rastojanja kod simuliranih asteroidskih parova putanja

```
clear
clc
format short g
rad=pi/180;
%                          ZADAVANJE PRECIZNOSTI
korak=1*rad; %korak za E1 i E2
korak1=1*rad; %korak za E1 i E2 unutar osnovnih petlji(za pr. resenja)
preciznost_Newton=10^-5; %preciznost za Njutnovu metodu
%                  KOMBINACIJE MINIMUMA I MAKSIMUMA
KOMBINACIJE=[1 1 1 1 2 2 2 2 3 3 3 3 4 4 4 4
             1 2 3 4 1 2 3 4 1 2 3 4 1 2 3 4]';
%                           PREALLOCATIONS
broj_kombinacija=[1 1 1 1 2 2 2 2 3 3 3 3 4 4 4 4
                  1 2 3 4 1 2 3 4 1 2 3 4 1 2 3 4
                  0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0]';
%                  OSNOVNA PETLJA (KOMBINACIJE ASTEROIDA)
a1=1;a2=1;e1=0.866;e2=0.866;o1=1*rad;O1=1*rad;i1=1*rad;
broj_kombinacije=0;
for o2=5*rad:3.125*rad:355*rad
for O2=5*rad:3.125*rad:355*rad
for i2=1*rad:1*rad:89*rad
broj_kombinacije=broj_kombinacije+1;
if mod(broj_kombinacije,100)==0
broj_kombinacije
end
%                        ME•USOBNA INKLINACIJA
N1x=sin(i1)*sin(O1);N1y=-sin(i1)*cos(O1);N1z=cos(i1);
N2x=sin(i2)*sin(O2);N2y=-sin(i2)*cos(O2);N2z=cos(i2);
% DOT
kosinus=N1x*N2x+N1y*N2y+N1z*N2z;
% CROS
X=N1y*N2z-N1z*N2y;Y=N1z*N2x-N1x*N2z;Z=N1x*N2y-N1y*N2x;
sinus=sqrt(X^2+Y^2+Z^2);
% KVADRANTI
```

```
if sinus>0
    rel_inkl=acos(kosinus);
else
    rel_inkl=2*pi-acos(kosinus);
end
rel_inkl=rel_inkl/rad;
%                              Male poluose
b1=a1*sqrt(1-e1^2);b2=a2*sqrt(1-e2^2);
%                           Pomocni parametri
P1=cos(O1)*cos(o1)-sin(O1)*sin(o1)*cos(i1);
P2=sin(O1)*cos(o1)+cos(O1)*sin(o1)*cos(i1);P3=sin(o1)*sin(i1);
P4=cos(O2)*cos(o2)-sin(O2)*sin(o2)*cos(i2);
P5=sin(O2)*cos(o2)+cos(O2)*sin(o2)*cos(i2);P6=sin(o2)*sin(i2);
Q1=-cos(O1)*sin(o1)-sin(O1)*cos(o1)*cos(i1);
Q2=-sin(O1)*sin(o1)+cos(O1)*cos(o1)*cos(i1);Q3=cos(o1)*sin(i1);
Q4=-cos(O2)*sin(o2)-sin(O2)*cos(o2)*cos(i2);
Q5=-sin(O2)*sin(o2)+cos(O2)*cos(o2)*cos(i2);Q6=cos(o2)*sin(i2);
T1=P4*Q1+P5*Q2+P6*Q3;T2=Q4*P1+Q5*P2+Q6*P3;U1=Q4*P1+Q5*P2+Q6*P3;
U2=P4*Q1+P5*Q2+P6*Q3;S=P1*P4+P2*P5+P3*P6;V=Q1*Q4+Q2*Q5+Q3*Q6;
%                             PONISTAVANJE
prox_min_E1=[];prox_max_E1=[];prox_min_E2=[];prox_max_E2=[];
provera_min_M=[];provera_max_M=[];koraci_E1=zeros(360*rad/korak,3);
koraci_E1_max=zeros(360*rad/korak,3);koraci_E2=zeros(360*rad/korak,3);
koraci_E2_max=zeros(360*rad/korak,3);f_E1=zeros(1,360*rad/korak1);
f_E2=zeros(1,360*rad/korak1);pr=zeros(1,360*rad/korak1);
%                              PETLJA ZA E1
br=0;
for E1=0:korak:2*pi-korak
br=br+1;
%                              Ponistavanje
EE2=[];x2=[];y2=[];z2=[];r=[];priblizno_resenje=[];
pr=zeros(1,360*rad/korak1);
AA=a2^2*e2+a1*a2*cos(E1)*S-a1*a2*e1*S+b1*a2*sin(E1)*T1;
BB=a1*e1*b2*U1-b1*b2*sin(E1)*V-a1*b2*cos(E1)*U1;CC=b2^2-a2^2;M=AA/BB;
N=CC/BB;
%                           PRIBLIZNA RESENJA
br1=0;
for E2=0:korak1:2*pi-korak1
    br1=br1+1;
    pr(br1)=E2; %priblizno resenje
    f_E2(br1)=M*sin(E2)+cos(E2)+N*sin(E2)*cos(E2);
end
broj_resenja=0;
if f_E2(1)/f_E2(numel(f_E2))<0
        broj_resenja=1;
```

```
        priblizno_resenje(1)=0;
end
for i=1:br1-1
    if f_E2(i)/f_E2(i+1)<0
        broj_resenja=broj_resenja+1;
        priblizno_resenje(broj_resenja)=pr(i);
    end
end
%                           NJUTNOVA METODA
%PRVO RESENJE
A=100;
X=priblizno_resenje(1);
while abs(A)>preciznost_Newton
    A=M*sin(X)+cos(X)+N*sin(X)*cos(X);
    A_prim=M*cos(X)-sin(X)+N*(cos(X)^2-sin(X)^2);
    X=mod(X-A/A_prim,2*pi);
end
EE2(1)=X;
%DRUGO RESENJE
A=100;
X=priblizno_resenje(2);
while abs(A)>preciznost_Newton
    A=M*sin(X)+cos(X)+N*sin(X)*cos(X);
    A_prim=M*cos(X)-sin(X)+N*(cos(X)^2-sin(X)^2);
    X=mod(X-A/A_prim,2*pi);
end
EE2(2)=X;
%TRECE RESENJE
if broj_resenja>2
A=100;
X=priblizno_resenje(3);
while abs(A)>preciznost_Newton
    A=M*sin(X)+cos(X)+N*sin(X)*cos(X);
    A_prim=M*cos(X)-sin(X)+N*(cos(X)^2-sin(X)^2);
    X=mod(X-A/A_prim,2*pi);
end
EE2(3)=X;
%CETVRTO RESENJE
A=100;
X=priblizno_resenje(4);
while abs(A)>preciznost_Newton
    A=M*sin(X)+cos(X)+N*sin(X)*cos(X);
    A_prim=M*cos(X)-sin(X)+N*(cos(X)^2-sin(X)^2);
    X=mod(X-A/A_prim,2*pi);
end
```

```
EE2(4)=X;
end
%                          RACUNANJE RASTOJANJA
x1=a1*(cos(E1)-e1)*P1+b1*sin(E1)*Q1;
y1=a1*(cos(E1)-e1)*P2+b1*sin(E1)*Q2;
z1=a1*(cos(E1)-e1)*P3+b1*sin(E1)*Q3;
for j=1:broj_resenja
x2=a2*(cos(EE2(j))-e2)*P4+b2*sin(EE2(j))*Q4;
y2=a2*(cos(EE2(j))-e2)*P5+b2*sin(EE2(j))*Q5;
z2=a2*(cos(EE2(j))-e2)*P6+b2*sin(EE2(j))*Q6;
r(j)=sqrt((x1-x2)^2+(y1-y2)^2+(z1-z2)^2);
end
%                  ODRE•IVANJE MIN I MAX RASTOJANJA
index_min=find(r==min(r));index_max=find(r==max(r));
if numel(index_min)>1
   index_min=index_min(1);
end
if numel(index_max)>1
   index_max=index_max(1);
end
min_ro=min(r);max_ro=max(r);
%                      FUNKCIJE ro_min(E1) i ro_max(E1)
koraci_E1(br,:)=[E1/rad EE2(index_min)/rad min_ro];
koraci_E1_max(br,:)=[E1/rad EE2(index_max)/rad max_ro];
end %kraj petlje za E1
%                               PETLJA ZA E2
br=0;
for E2=0:korak:2*pi-korak
br=br+1;
%                              Ponistavanje
EE1=[];x2=[];y2=[];z2=[];r=[];priblizno_resenje=[];
pr=zeros(1,360*rad/korak1);
AA=a1^2*e1+a2*a1*cos(E2)*S-a2*a1*e2*S+b2*a1*sin(E2)*T2;
BB=a2*e2*b1*U2-b2*b1*sin(E2)*V-a2*b1*cos(E2)*U2;CC=b1^2-a1^2;
M=AA/BB;N=CC/BB;
%                           PRIBLIZNA RESENJA
br1=0;
for E1=0:korak1:2*pi-korak1
    br1=br1+1;
    pr(br1)=E1; %priblizno resenje
    f_E1(br1)=M*sin(E1)+cos(E1)+N*sin(E1)*cos(E1);
end
broj_resenja=0;
if f_E1(1)/f_E1(numel(f_E1))<0
        broj_resenja=1;
```

```
        priblizno_resenje(1)=0;
end
for i=1:br1-1
    if f_E1(i)/f_E1(i+1)<0
        broj_resenja=broj_resenja+1;
        priblizno_resenje(broj_resenja)=pr(i);
    end
end
%                           NJUTNOVA METODA
%PRVO RESENJE
A=100;
X=priblizno_resenje(1);
while abs(A)>preciznost_Newton
    A=M*sin(X)+cos(X)+N*sin(X)*cos(X);
    A_prim=M*cos(X)-sin(X)+N*(cos(X)^2-sin(X)^2);
    X=mod(X-A/A_prim,2*pi);
end
EE1(1)=X;
%DRUGO RESENJE
A=100;
X=priblizno_resenje(2);
while abs(A)>preciznost_Newton
    A=M*sin(X)+cos(X)+N*sin(X)*cos(X);
    A_prim=M*cos(X)-sin(X)+N*(cos(X)^2-sin(X)^2);
    X=mod(X-A/A_prim,2*pi);
end
EE1(2)=X;
%TRECE RESENJE
if broj_resenja>2
A=100;
X=priblizno_resenje(3);
while abs(A)>preciznost_Newton
    A=M*sin(X)+cos(X)+N*sin(X)*cos(X);
    A_prim=M*cos(X)-sin(X)+N*(cos(X)^2-sin(X)^2);
    X=mod(X-A/A_prim,2*pi);
end
EE1(3)=X;
%CETVRTO RESENJE
A=100;
X=priblizno_resenje(4);
while abs(A)>preciznost_Newton
    A=M*sin(X)+cos(X)+N*sin(X)*cos(X);
    A_prim=M*cos(X)-sin(X)+N*(cos(X)^2-sin(X)^2);
    X=mod(X-A/A_prim,2*pi);
end
```

```
EE1(4)=X;
End
%                          RACUNANJE RASTOJANJA
x1=a2*(cos(E2)-e2)*P4+b2*sin(E2)*Q4;
y1=a2*(cos(E2)-e2)*P5+b2*sin(E2)*Q5;
z1=a2*(cos(E2)-e2)*P6+b2*sin(E2)*Q6;
for j=1:broj_resenja
x2=a1*(cos(EE1(j))-e1)*P1+b1*sin(EE1(j))*Q1;
y2=a1*(cos(EE1(j))-e1)*P2+b1*sin(EE1(j))*Q2;
z2=a1*(cos(EE1(j))-e1)*P3+b1*sin(EE1(j))*Q3;
r(j)=sqrt((x1-x2)^2+(y1-y2)^2+(z1-z2)^2);
end
%                   ODRE•IVANJE MIN I MAX RASTOJANJA
index_min=find(r==min(r));
index_max=find(r==max(r));
if numel(index_min)>1
   index_min=index_min(1);
end
if numel(index_max)>1
   index_max=index_max(1);
end
min_ro=min(r);
max_ro=max(r);
%                       FUNKCIJE ro_min(E2) i ro_max(E2)
koraci_E2(br,:)=[EE1(index_min)/rad E2/rad min_ro];
koraci_E2_max(br,:)=[EE1(index_max)/rad E2/rad max_ro];
end %kraj petlje za E1
%                  ODRE•IVANJE BROJA MIN I MAX ZA E1
%                            MINIMUMI ZA E1
broj_minimuma_E1=0;
%                   PROVERA DA LI JE NA NULI MINIMUM
if koraci_E1(1,3)<koraci_E1(2,3) && koraci_E1(br,3)<koraci_E1(br-1,3)
    broj_minimuma_E1=1;
    if koraci_E1(1,3)<koraci_E1(br,3)
    prox_min_E1(1,:)=koraci_E1(1,:);
    else
    prox_min_E1(1,:)=koraci_E1(br,:);
    end
end
%                            OSTALI MINIMUMI
for j=2:br-1
    if koraci_E1(j,3)<koraci_E1(j-1,3) && koraci_E1(j,3)<koraci_E1(j+1,3)
        broj_minimuma_E1=broj_minimuma_E1+1;
        prox_min_E1(broj_minimuma_E1,:)=koraci_E1(j,1:3);
    end
```

```
end
if numel(prox_min_E1)>0
for i=1:numel(prox_min_E1)
    if prox_min_E1(i)<0
        prox_min_E1(i)=prox_min_E1(i)+360;
    end
end
end
%                           MAKSIMUMI ZA E1
broj_maksimuma_E1=0;
%                   PROVERA DA LI JE NA NULI MAKSIMUM
if koraci_E1_max(1,3)>koraci_E1_max(2,3) &&
koraci_E1_max(br,3)>koraci_E1_max(br-1,3)
    broj_maksimuma_E1=1;
    if koraci_E1_max(1,3)>koraci_E1_max(br,3)
    prox_max_E1(1,:)=koraci_E1_max(1,:);
    else
    prox_max_E1(1,:)=koraci_E1_max(br,:);
    end
end
%                           OSTALI MAKSIMUMI
for j=2:br-1
    if koraci_E1_max(j,3)>koraci_E1_max(j-1,3) &&
koraci_E1_max(j,3)>koraci_E1_max(j+1,3)
        broj_maksimuma_E1=broj_maksimuma_E1+1;
        prox_max_E1(broj_maksimuma_E1,:)=koraci_E1_max(j,1:3);
    end
end
if numel(prox_max_E1)>0
for i=1:numel(prox_max_E1)
    if prox_max_E1(i)<0
        prox_max_E1(i)=prox_max_E1(i)+360;
    end
end
end
%                  ODRE•IVANJE BROJA MIN I MAX ZA E2
%                           MINIMUMI ZA E2
broj_minimuma_E2=0;
%                   PROVERA DA LI JE NA NULI MINIMUM
if koraci_E2(1,3)<koraci_E2(2,3) && koraci_E2(br,3)<koraci_E2(br-1,3)
    broj_minimuma_E2=1;
    if koraci_E2(1,3)<koraci_E2(br,3)
    prox_min_E2(1,:)=koraci_E2(1,:);
    else
    prox_min_E2(1,:)=koraci_E2(br,:);
```

```
    end
end
%                           OSTALI MINIMUMI
for j=2:br-1
    if koraci_E2(j,3)<koraci_E2(j-1,3) && koraci_E2(j,3)<koraci_E2(j+1,3)
        broj_minimuma_E2=broj_minimuma_E2+1;
        prox_min_E2(broj_minimuma_E2,:)=koraci_E2(j,1:3);
    end
end
if numel(prox_min_E2)>0
for i=1:numel(prox_min_E2)
    if prox_min_E2(i)<0
        prox_min_E2(i)=prox_min_E2(i)+360;
    end
end
end
%                           MAKSIMUMI ZA E2
broj_maksimuma_E2=0;
%                   PROVERA DA LI JE NA NULI MAKSIMUM
if koraci_E2_max(1,3)>koraci_E2_max(2,3) &&
koraci_E2_max(br,3)>koraci_E2_max(br-1,3)
    broj_maksimuma_E2=1;
    if koraci_E2_max(1,3)>koraci_E2_max(br,3)
    prox_max_E2(1,:)=koraci_E2_max(1,:);
    else
    prox_max_E2(1,:)=koraci_E2_max(br,:);
    end
end
%                           OSTALI MAKSIMUMI
for j=2:br-1
    if koraci_E2_max(j,3)>koraci_E2_max(j-1,3) &&
koraci_E2_max(j,3)>koraci_E2_max(j+1,3)
        broj_maksimuma_E2=broj_maksimuma_E2+1;
        prox_max_E2(broj_maksimuma_E2,:)=koraci_E2_max(j,1:3);
    end
end
if numel(prox_max_E2)>0
for i=1:numel(prox_max_E2)
    if prox_max_E2(i)<0
        prox_max_E2(i)=prox_max_E2(i)+360;
    end
end
end
%                 UPORE•IVANJE FUNKCIJA ZA E1 I E2
%                         PROVERA ZA MINIMUME
```

```
br_provera=0;
for i=1:numel(prox_min_E2)/3
    provera_min=0;
    for j=1:numel(prox_min_E1)/3
        if abs(prox_min_E2(i,2)-prox_min_E1(j,2))<2*korak/rad ||
abs(prox_min_E2(i,2)-prox_min_E1(j,2))>360-2*korak/rad
            provera_min=1;
        end
    end
    if provera_min==0
    br_provera=br_provera+1;
    provera_min_M(br_provera,:)=prox_min_E2(i,:);
    end
end
prox_min=[prox_min_E1
    provera_min_M];
%                          PROVERA ZA MAKSIMUME
br_provera=0;
for i=1:numel(prox_max_E2)/3
    provera_max=0;
    for j=1:numel(prox_max_E1)/3
        if abs(prox_max_E2(i,2)-prox_max_E1(j,2))<2*korak/rad ||
abs(prox_max_E2(i,2)-prox_max_E1(j,2))>360-2*korak/rad
            provera_max=1;
        end
    end
    if provera_max==0
    br_provera=br_provera+1;
    provera_max_M(br_provera,:)=prox_max_E2(i,:);
    end
end
prox_max=[prox_max_E1
    provera_max_M];
%                        BROJ MINIMUMA I MAKSIMUMA
broj_minimuma=numel(prox_min)/3;
broj_maksimuma=numel(prox_max)/3;
%                          BROJANJE KOMBINACIJA
COMB=[broj_minimuma broj_maksimuma];
for i=1:16
    if COMB==KOMBINACIJE(i,1:2)
        broj_kombinacija(i,3)=broj_kombinacija(i,3)+1;
    end
end
%                            REZULTAT I ZAPIS
REZULTAT_1=[rel_inkl broj_minimuma broj_maksimuma];
```

```
dlmwrite('Rezultat_simulacija.txt', REZULTAT_1, 'delimiter', ' ','-
append','precision', 2)
end
end
end
dlmwrite('Simulacija.txt', broj_kombinacija, 'delimiter', ' ')
prox_min
prox_max
%                                   STAMPANJE
plot3(koraci_E1(:,1),koraci_E1(:,2),koraci_E1(:,3),'r','linewidth',2)
hold on
plot3(koraci_E2(:,1),koraci_E2(:,2),koraci_E2(:,3),'--r','linewidth',2)
grid on
plot3(koraci_E1_max(:,1),koraci_E1_max(:,2),koraci_E1_max(:,3),'b','linewidth'
,2)
hold on
plot3(koraci_E2_max(:,1),koraci_E2_max(:,2),koraci_E2_max(:,3),'--
b','linewidth',2)
grid on
korak=1;
[E1,E2]=meshgrid(0:korak*rad:2*pi);x1=a1*(cos(E1)-e1)*P1+b1*sin(E1)*Q1;
y1=a1*(cos(E1)-e1)*P2+b1*sin(E1)*Q2;z1=a1*(cos(E1)-e1)*P3+b1*sin(E1)*Q3;
x2=a2*(cos(E2)-e2)*P4+b2*sin(E2)*Q4;y2=a2*(cos(E2)-e2)*P5+b2*sin(E2)*Q5;
z2=a2*(cos(E2)-e2)*P6+b2*sin(E2)*Q6;r=((x1-x2).^2+(y1-y2).^2+(z1-z2).^2).^0.5;
hSurf =
surf(E1/rad,E2/rad,r,'EdgeColor','none','LineStyle','none','FaceLighting','pho
ng');
xlabel('E_1','FontSize',15)
ylabel('E_2','FontSize',15)
zlabel('\rho','FontSize',15)
set(gca,'TickDir','out')
set(gca,'XTick',[0:60:360])
set(gca,'YTick',[0:60:360])
set(gca,'FontSize',15)
axis([0 360 0 360 0 max(max(r))])
grid off
```

PRILOG 2

Tabela realnih parova asteroida čiji su putanjski elementi dati u tabeli 5.3, a analize funkcije rastojanja njihovih orbita prikazane u poglavlju 5.3

Prvi asteroid	Drugi asteroid	Min-Max
1323 Tugela	2337 Boubin	1-1
3 Juno	10563 Izhdubar	1-2
2004 NN8	2009 AE16	1-3
123 Brunhild	1116 Catriona	2-1
963 Iduberga	1219 Britta	2-2
159459 200 KB	2004 LG	2-3
2987 Sarabhai	2007 PH25	3-1
323 Brucia	2010 KY127	3-2
2010 CA55	2010 JN33	4-1
2001 OK17	2001 XN88	4-2

BIOGRAFIJA AUTORA

Mr Slaviša Milisavljević je rođen 08. I 1967. godine u Zemunu. Osnovnu školu i prve dve godine usmerenog obrazovanja pohađa i završava u Zemunu, a završne godine u Elektrotehničkoj školi ”Nikola Tesla” u Beogradu. Studije mehanike na Prirodno Matematičkom fakultetu u Beogradu upisao je školske 1985/86. godine gde je, po odsluženju vojnog roka, diplomirao 1992. godine sa prosekom 7,26. U periodu od 1993. do 1995. radio je u više beogradskih gimnazija kao profesor fizike i informatike.

U istom periodu završio je i za Mašinskog inženjera u vazduhoplovstvu - pilota, na Višoj mašinskoj školi u Zemunu. Od 1996. do 1998. godine radio je kao profesor mehanike u Vazduhoplovno Tehničkoj školi ”Petar Drapšin” u Beogradu.

Posle položenih diferencijalnih ispita, upisao je školske 1996/97. godine poslediplomske studije na Katedri za astronomiju, smer nebeske mehanike i teorijske astronomije. Magistarsku tezu pod nazivom ”Jedan postupak za određivanje proksimiteta između putanja malih planeta” odbranio je 08. XI 2002. godine. Od 1998. do 2002. radi kao predavač i organizator teoretske nastave u Pilotskoj školi ”Pegaz”, a zatim, do 2004. godine, kao mašinski inženjer u preduzeću ”Feroplast” u Beogradu. Odlazi u Englesku 2004. godine na *Cranfield University* prvo kao student u viziti, a kasnije kao i student *MSc by Research, Crashworthiness Impact & Structural Mechanics Group – School of Engineering*, a 2007. uspešno brani tezu pod naslovom ”Modelling of Wave Loading on Offshore Structures”. Od 2008. do 2009. radi kao *Certificate & Stress Engineer* u kompaniji *MacCarthy Interiors LTD, Great London, UK*. Trenutno je zaposlen kao stručni saradnik u odeljenju za razvoj u računskoj labaratoriji Matematičkog fakulteta u Beogradu.

Magistarski radovi:

Tema: *Jedan postupak za određivanje proksimiteta između putanja malih planeta* (Mentor: prof.dr Mike Kuzmanoski, Matematički fakultet Beograd)

MSc Modelling of Wave Loading on Offshore Structures, School of Engineering 2007., London.

Naučni radovi u međunarodnim časopisima:

Šegan, S., Milisavljević, S., Marčeta, D., 2011: A Combined Method to Compute the Proximities of Asteroids, *Acta Astronomica.*, 61, 275-283.

Šegan, S., Milisavljević, 2011: Minor planets orbital geometry and number of distance function critical points, *ISRN Astronomy& Astrophysics*, accepted in November 2011.

Radovi u domaćim časopisima:

Milisavljević, 2010: The Proximities of Asteroids and Critical Points of the Distance Function, *Serb. Astron. J.*, 180, 91-102.

Radovi na konferencijama štampani u celini:

Milisavljević, Šegan S., Marčeta D., Samardžija B. 2010: ”Radovi akademika Milutina Milankovića i Vojislava Mišković̀a u periodici AOB’, (Zbornik radova konferencije ”Razvoj astronomije kod Srba VI” Beograd 22-26. April 2010.)

Milisavljević, Šegan S., Marčeta D., Samardžija B. 2010: ”Foundation of the Serbian Astronomical School and connection with adjacent national schools”. The Fifth SEEDI Conference: Digitization of cultural and scientific heritage, Sarajevo, Bosna i Hercegovina, May 19-20, 2010.)

Milisavljević, Šegan S., Marčeta D., 2011: ”Proximity calculation and orbital element statistics” XVI Serbian National Conference of Astronomy, Belgrade, 12- 14. October 2011.

Iskustvo u nastavi:

U periodu od 1993. do 1995. radio je u više beogradskih gimnazija kao profesor fizike i informatike.

Od 1996. do 1998. godine radi kao profesor mehanike u Vazduhoplovno Tehničkoj školi ”Petar Drapšin” u Beogradu

Od 1998. do 2002. radi kao predavač i organizator teoretske nastave u Pilotskoj školi ”Pegaz”.

Rad na naučnim projektima:

Od 2008. do 2009. radi kao *Certificate & Stress Engineer* u kompaniji *MacCarthy Interiors LTD, Great London, UK*. Optimizacija na relaciji težina – napon – deformacija nekih elemenata vazduhoplova.

Прилог 1.

Изјава о ауторству

Потписани Славиша Р. Милисављевић

број уписа _____

Изјављујем

да је докторска дисертација под насловом

Функција растојања малих планета и рачун проксимитета

_____

_____

- резултат сопственог истраживачког рада,
- да предложена дисертација у целини ни у деловима није била предложена за добијање било које дипломе према студијским програмима других високошколских установа,
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио ауторска права и користио интелектуалну својину других лица.

Потпис докторанда

У Београду, 03.07.2012.

Slaviša Milisavljević

Прилог 2.

Изјава о истоветности штампане и електронске верзије докторског рада

Име и презиме аутора Славиша Р. Милисављевић

Број уписа _____

Студијски програм _____

Наслов рада Функција растојања малих планета и рачун проксимитета

Ментор др Стево Шеган, ванредни професор, Универзитет у Београду, Математички факултет

Потписани Славиша Р. Милисављевић

Изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предао за објављивање на порталу **Дигиталног репозиторијума Универзитета у Београду.**

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Београду.

Потпис докторанда

У Београду, 03.07.2012.

Славиша Милисављевић

Прилог 3.

Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом:

Функција растојања малих планета и рачун проксимитета

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство

2. Ауторство - некомерцијално

3. Ауторство – некомерцијално – без прераде

4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима

5. Ауторство – без прераде

6. Ауторство – делити под истим условима

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци, кратак опис лиценци дат је на полеђини листа).

Потпис докторанда

У Београду, 03.07.2012.

Марија Шћекић

1. Ауторство - Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце, чак и у комерцијалне сврхе. Ово је најслободнија од свих лиценци.

2. Ауторство – некомерцијално. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела.

3. Ауторство - некомерцијално – без прераде. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела. У односу на све остале лиценце, овом лиценцом се ограничава највећи обим права коришћења дела.

4. Ауторство - некомерцијално – делити под истим условима. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада.

5. Ауторство – без прераде. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела.

6. Ауторство - делити под истим условима. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада. Слична је софтверским лиценцама, односно лиценцама отвореног кода.