

UNIVERZITET U BEOGRADU
ARHITEKTONSKI FAKULTET

Gordana D. Đukanović

**Pramenovi krivih trećeg i četvrtog reda
dobijeni preslikavanjem pramenova
konika**

doktorska disertacija

Beograd, 2012.

UNIVERSITY OF BELGRADE
FACULTY OF ARCHITECTURE

Gordana D. Đukanović

**The pencils of curves of the third
and fourth order obtained by mapping
the pencils of conics**

Doctoral Dissertation

Belgrade, 2012.

UNIVERZITET U BEOGRADU
ARHITEKTONSKI FAKULTET

ČLANOVI KOMISIJE:

Dr Ljiljana Petruševski

redovni profesor Univerziteta u Beogradu - Arhitektonskog fakulteta

Dr Đorđe Đorđević

docent Univerziteta u Beogradu- Arhitektonskog fakulteta

Dr Radovan Štulić

redovni profesor Univerziteta u Novom Sadu – Fakulteta tehničkih nauka

Dr Marija Obradović

docent Univerziteta u Beogradu- Građevinskog fakulteta

Datum odbrane doktorske disertacije:

IZJAVE ZAHVALNOSTI

Zahvaljujem se svima koji su mi posredno ili neposredno pomogli u izradi ovog rada.

Naročito veliku zahvalnost dugujem svom dragom profesoru Lazaru Dvornikoviću koji mi je pružio nesebičnu pomoć svojim stručnim znanjima i iskustvom. Njegovo novo viđenje i interpretacija geometrijskih postulata kroz uvođenje termina "relativistička geometrija", osnov su ovog rada.

Hvala svim članovima komisije na sugestijama tokom rada i tokom pisanja disertacije. Hvala Miri i Vladislavi na pomoći kod tehničkog rešenja rada. Hvala mojim roditeljima. I hvala mojim sinovima koji su uvek verovali da ćemo uspeti.

Dragi, Ognjenu i Miljanu

Pramenovi krivih trećeg i četvrtog reda dobijeni preslikavanjem pramenova konika

Izvod

Korišćenjem principa relativističke geometrije, inverzija kao kvadratna transformaciju u ravni upoređena je sa njenim prostornim izvođenjem u vidu dva stereografska projektovanja, sa "ravni" na sferu i sa sfere na istu "ravan" (iz antipodnog centra projiciranja). Dato je klasično i relativističko tumačenje. Analizirani su takođe različiti tipovi simetrija konike, konformna (osna i centralna) i nekonformna. Harmonijskom simetrijom, kao potpuno bijektivnom i konformnom centralnom inverzijom, prikazana je transformacija svih šest tipova pramenova konika i njihovih specifičnosti u pramenove krivih trećeg i četvrtog reda i njihove preslikane specifičnosti, i obrnuto. Osnovna transformacija je inverzija, pri čemu je ona tumačena na dva načina: kao kvadratna transformacija u klasičnoj projektivnoj geometriji i kao čista simetrija u relativističkoj geometriji, sa stalnim povlačenjem paralela između dva geometrijska sistema i njihovim mogućnostima eksplikacije i generalizacije.

Prikazan je i pramen krivih četvrtog reda dobijen inverzijom pramena kvadraka sečenog pomoću "ravni" u pramen ekvivalentnih površi četvrtog reda sečenog tom istom "ravni". Prepoznavanjem ekvivalentnosti inverzije sa klasičnom osnom simetrijom (nekonformna simetrija) ukazano je na neograničene mogućnosti za preslikavanje krivih i površi i dobijanje novih oblika koji će biti od koristi i u teoriji geometrije kao i u arhitektonskoj praksi. Istraživanja u oblasti proširenih simetrija nude neiscrpan prostor za dalja otkrića o ravanskim i prostornim oblicima. Na osnovu modela preslikavanja, kreirana je Lisp rutina pomoću koje je u okviru Auto-CAD-a izvršeno kompjutersko crtanje pramenova konika, pramenova krivih 3. i 4. reda i generisanje i prikazivanje prostornih modela površi.

Ključne reči: relativistička geometrija, inverzija, osna simetrija, pramen krivih 3. i 4. reda, pramen površi 3. i 4. reda

The pencils of curves of the third and fourth order obtained by mapping the pencils of conics

Abstract

The principle of relativistic geometry is used to compare the inversion as a quadratic transformation in the plane with its spatial presentation in the form of two stereographic projections: from a `plane` onto a sphere and from the sphere back onto the same `plane` (from the antipodal centre of projection). Both the classical and the relativistic interpretations are presented. Different types of conic symmetry are analysed, conformal (axial and point symmetry) and non-conformal. Harmonic symmetry, which is a completely bijective and conformal central inversion, is used to present the transformation of all types of pencils of conics and their specific features into the pencils of curves of the 3rd and 4th order and their mapped specific features and vice versa. The basic transformation is inversion which is interpreted in two ways: as a quadratic transformation in the classical projective geometry and as a pure symmetry in the relativistic geometry, with constant comparison of the two geometric systems and their opportunities for explications and generalizations.

A pencil of curves of the 4th order obtained by inverting the pencil of quadric cut by a `plane` into a pencil of equivalent surfaces of the 4th order cut by the same `plane` is further presented. The recognition of the equivalence of inversion with the classical axial symmetry (non-conformal symmetry) has created numerous possibilities for mapping curves and surfaces and obtaining new forms which can be of great use both in the theory of geometry and in the practice of architecture. The research in the field of expanded symmetry will greatly widen the scope of further discoveries about the plane and surface forms. The projection model was used to create the Lisp routine and the AutoCAD software was used for the purposes of computer drawing the pencils of conics, pencils of curves of the 3rd and 4th order and generating and presenting the spatial models of the surfaces.

Key words: relativistic geometry, inversion, symmetry, pencil of curves of the 3rd and 4th order, pencil of surfaces of the 3rd and 4th order

Ključna dokumentaciona informacija

Tip dokumenta:	Monografska publikacija
Tip zapisa:	Tekstualni štampani materijal
Vrsta rada (VR):	Doktorska disertacija
Autor (AU):	Mr Gordana Đukanović, dipl.ing.građ.
Mentor (MN):	Dr Lazar Dovniković, red.prof. u penziji
Naslov rada (NS):	Pramenovi krivih trećeg i četvrtog reda dobijeni preslikavanjem pramenova konika
Jezik publikacije (JP):	Srpski
Zemlja publikovanja (ZP):	Republika Srbija
Godina izdavanja (GI):	2012.
Izdavač (IZ):	Autorski reprint
Mesto i adresa (MS):	11030 Beograd, Bulevar Kralja Aleksandra 73/II
Fizički opis rada (br.pogl./strana/ lit. navoda/tabela/slika/priloga):	12 / 145 / 52/ 0 / 100/ 0
Naučna oblast (NO):	Arhitektura i urbanizam
Naučna disciplina (DIS):	Geometrija arhitektonske forme
Predmetna odrednica/ključna reč (PO):	relativistička geometrija, inverzija kao harmonijska simetrija, pramen krivih 3. i 4. reda, pramen površi 3. i 4. reda
UDK:	
Čuva se (ČU):	Biblioteka Arhitektonskog fakulteta, 11000 Beograd, Bulevar Kralja Aleksandra 73/II
Primedbe (P):	
Izvod (IZ):	Harmonijskom simetrijom, kao potpuno bijektivnom i konformnom centralnom inverzijom, prikazana je transformacija svih tipova pramenova konika i njihovih specifičnosti u pramenove krivih trećeg i četvrtog reda i njihove preslikane specifičnosti, i obrnuto. Prepoznavanjem ekvivalentnosti inverzije sa klasičnom osnom simetrijom (nekomformna simetrija) ukazano je na neograničene mogućnosti za preslikavanje krivih i površi i dobijanje novih oblika koji će biti od koristi i u teoriji geometrije kao i u arhitektonskoj praksi.
Datum prihvatanja teme (DP):	2005

Key word documentation

Document type (DT):	Monographics publication
Type of record (TR):	Textual printed article
Contains code (CC):	Ph D Thesis
Autor (AU):	Mr Gordana Đukanović, M.Sc.Arch.
Mentor (MN):	Dr Lazar Dovniković, Ph D.
Title (TI):	The pencils of curves of the 3rd and 4rd order obtained by mapping the pencils of conics
Language of text (LT):	Serbian
Cantry of Publication (CP):	Serbia
Publication Year (PY):	2012.
Publisher (PB):	Autor's reprint
Publication Place (PL):	11000 Belgrade, Bulevar Kralja Aleksandra 73/III
Phisical description (PD):	12 / 145 / 52/ 0 / 100/ 0
Scientific fields (SF):	Architecture and Urbanism
Scientific discipline (SD):	Geometry of Architectural Form
Subject/Key words (CX):	relativistic geometry, inversion as harmonic symmetry, pencil of curves of the 3 rd and 4 th order, pencil of surfaces of the 3 rd and 4 th order
UDC	
Holding data (HD):	Library Faculty of Architecture , 11000 Belgrade, Kneza Višeslava 1
Note (N):	
Abstract (AB):	Harmonic symmetry, which is a completely bijective and conformal central inversion, is used to present the transformation of all types of pencils of conics and their specific features into the pencils of curves of the 3rd and 4th order and their mapped specific features and vice versa. The recognition of the equivalence of inversion with the classical axial symmetry (non-conformal symmetry) has created numerous possibilities for mapping curves and surfaces and obtaining new forms which can be of great use both in the theory of geometry and in the practice of architecture.
Accepted by Scientific Board on (ASB):	2005.

Spisak skraćenica

DRH	dvograni rotacioni hiperboloid
EE	eliptičko-eliptički pramen konika
EE _k	eliptički pramen krugova
EH	eliptičko-hiperbolički pramen konika
EP	eliptičko-parabolički pramen konika
HE	hiperboličko-eliptički pramen konika
HE _K	hiperbolički pramen krugova
HH	hiperboličko-hiperbolički pramen konika
HP	hiperboličko-parabolički pramen konika
IRE	izduženi rotacioni elipsoid
JRH	jednograni rotacioni hiperboloid
L	lopta
PC	parabolički cilindar
PE	paraboličko-eliptički pramen konika
PH	paraboličko-hiperbolički pramen konika
PE _K	parabolički pramen krugova
PP	paraboličko parabolički pramen konika
P ₃ H	Paraboličko (3)-hiperbolički pramen konika
RK	rotacioni konus
RP	rotacioni paraboloid
SRE	spljošteni rotacioni elipsoid

Spisak korišćenih oznaka

- 1, 2, 3, 4 temeljne tačke pramena konika
1,2,3,4 temeljne tačke prostorne krive IV reda 1. vrste u polarnoj ravni
a, b projicirajuće izvodnice jednogranog hiperboloida, poluprečnici elipse
C centar lopte
E centar elipse
k.i. konjugovano imaginarne tačke
 P_1P_2 prodor pasante kroz komplementarnu kvadriku
r poluprečnik
s, t, p sekanta, tangenta, pasanta kvadrike
 S_1S_2 prodor prave kroz kvadriku
 s_e najmanji krug eliptičkog pramena
 s_h krug na koga su upravni svi krugovi hiperboličkog pramena krugova
T dodir tangente
Tp teme parabole
x, y, z ose koordinatnog sistema
 π broj pi
n red krive
A i \bar{A} pridruženi par tačaka
S, V centar inverzije
s i s_v apsoluta (krug inverzije)
 \bar{S} antipod
a i \bar{a} pridruženi par krugova
 g_1 i g_2 geodezijski krugovi na sferi
k i \bar{k} krugovi pridruženi inverzijom
e i \bar{e} elipse pridružene inverzijom
p i \bar{p} parabole pridružene inverzijom
h i \bar{h} hiperbole pridružene inverzijom
 v_1 nedoglednica ravni l
 φ ugao preseka asimptota hiperbole
 $a_E = a_H = a_P$ ose simetrije elipse, parabole i hiperbole
 $\bar{a}_E = \bar{a}_P = \bar{a}_H$ preslikane ose simetrije elipse, parabole i hiperbole
 O_s oskulatorni krug u tački S
 $\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}$ i $\bar{4}$ inverzijom preslikane temeljne tačke pramena konika
 α ugao samopreseka asimptota hiperbole i dveju grana krive 4.reda
 T_1 i T_2 T_3 i T_4 temena konike
t i \bar{t} tangenta konike i njoj simetrična tangenta

m i \bar{m} spojnica temeljnih tačaka konike i njoj simetrična spojnica preslikanih tačaka
 u_2 nedoglednica ravni 2
 O_{se} oskulatorni krug u tački S elipse
 O_{sh} oskulatorni krug u tački S hiperbole
 C_S i \bar{C}_S centri simetrije elipse
 b i \bar{b} uzajamno simetrične ose
 s_a i m raspadnute konike pramena
 as_n ($n = 1,2,3,4$) asimptote hiperbole
 pn ($n = 1,2,3,4$) polarne prave
 V_n ($n = 1,2,3,4$) vrhovi konusa
 β krugovi kvadrike u horizontalnim ravnima
 $\bar{\beta}$ preslikani krugovi površi 4. ili 3. reda

SADRŽAJ

Spisak skraćenica.....	I
Spisak korišćenih oznaka.....	II
Spisak slika	VII
1 Uvod	1
1.1 Predmet istraživanja.....	1
1.2 Cilj istraživanja.....	2
1.3 Zadaci istraživanja.....	3
1.4 Polazne hipoteze	4
1.5 Metodologija.....	5
1.6 Naučna opravdanost.....	6
2 Pregled dosadašnjih istraživanja u ovoj oblasti	9
2.1 Uopšteno o krivim linijama.....	9
2.1.1 O istorijatu proučavanja krivih linija	9
2.1.2 Načini nastanka krivih linija.....	12
2.1.3 O podeli krivih linija.....	15
3 Osnovni principi relativističke geometrije harmonijskih ekvivalenata - harmonijske simetrije	20
3.1 Osnovni pojmovi relativističke geometrije.....	20
3.2 Kvadratna transformacija.....	22
3.2.1 Opšta inverzija.....	23
3.2.2 Inverzija kao harmonijska simetrija	23
3.2.3 Inverzija na ravni kao inverzija na sferi	24
3.3 Krive 4. i 3. reda dobijene harmonijskom simetrijom	27
3.3.1 Krive eliptičkog tipa	27
3.3.2 Krive hiperboličkog tipa.....	28
3.3.3 Krive paraboličkog tipa.....	29
4 Pramenovi krivih 4. i 3. reda dobijeni kao harmonijski ekvivalenti pramena konika (nastalih projekcijom ravnog preseka konusa kroz sekantu, tangentu i pasantu konusa).....	31

4.1	<i>Osnovni tipovi pramenova konika</i>	31
4.2	<i>Harmonijski ekvivalenti dobijenih pramenova konika</i>	33
4.2.1	Preslikavanje paraboličko-paraboličkog pramen konika u pramen krivih četvrtog i trećeg reda	33
4.2.2	Paraboličko-eliptički pramen konika.....	35
4.2.3	Paraboličko-hiperbolički pramen konika.....	37
4.2.4	Pramen krivih 4. reda koji se dobija preslikavanjem PE pramena konika.....	38
5	Transformacija pramenova krugova u pramenove konika, a ovih u pramenove krivih 4. i 3. reda	40
5.1	<i>Transformacija eliptičkog pramena krugova</i>	40
5.1.1	Paraboličko-parabolički pramen hiperbola i njegov harmonijski ekvivalent.....	40
5.1.2	Eliptičko-parabolički pramen konika i njegov harmonijski ekvivalent.....	42
5.1.3	Pramen krivih 3. reda kao harmonijski ekvivalent eliptičko-paraboličkog pramena konika	43
5.2	<i>Transformacija hiperboličkog pramena krugova</i>	45
5.3	<i>Transformacija paraboličkog pramena krugova</i>	50
5.3.1	Uzajamna simetrija paraboličko-eliptičkog pramena konika i paraboličko- eliptičkog pramena krivih 4. reda.....	51
5.3.2	Preslikavanje pramena konika u pramen krivih 3. reda, kada je centar inverzije izabran u zajedničkoj temenoj tački svih konika.....	56
6	Pramenovi krivih 4. i 3. reda dobijeni kao harmonijski ekvivalenti pramena konika (nastali projekcijom ravnog preseka jednogranog hiperboloida kroz sekantu i pasantu hiperboloida)	59
6.1	<i>Dobijanje HH pramena konika</i>	59
6.2	<i>Transformacija hiperboličko-eliptičkog pramena konika u pramen krivih 4. i 3. reda</i> ...	70
7	Inverzija nesimetričnih pramenova konika u pramenove krivih 4. i 3. reda	76
7.1	<i>Preslikavanje pramena konika koji ima četiri realne tačke od kojih su tri poklopljene-P_3H pramen konika</i>	76
7.1.1	Centar inverzije izabran je u tački oskulacije svih konika iz P_3H pramena	77
7.2	<i>Centar inverzije izabran je u tački na osi parabole iz P_3H pramena</i>	80
8	Pramenovi krivih 4. reda dobijeni "ravnim" sečenjem pramena površi četvrtog reda koji je ekvivalentan pramenu kvadratika kroz krivu 4. reda 1. vrste	84
8.1	<i>O pramenovima površi drugog reda kroz prostornu krivu 4. reda 1. vrste</i>	84

8.2	<i>Prostorna kriva 4. reda prve vrste sa samopresečnom tačkom (sa dve ravni simetrije) i njen harmonijski ekvivalent</i>	85
8.3	<i>Pojedinačne kvadrike iz pramena kroz prostornu krivu 4. reda 1. vrste i njihovi harmonijski ekvivalenti</i>	88
8.4	<i>Ravan presek pramena kvadrika kroz prostornu krivu 4. reda 1. vrste i njegov harmonijski ekvivalent</i>	95
9	Proširenje pojma simetrije i pravci za dalja istraživanja	98
9.1	<i>Tri najvažnije simetrije</i>	98
9.2	<i>Izuzetne mogućnosti nekonformne simetrije</i>	101
10	Kreiranje Visual LISP programa za crtanje krivih i površi harmonijskom simetrijom .	107
10.1	<i>Programi u programskom paketu Visual LISP</i>	108
11	Mogućnosti za primenu krivih i površi višeg reda dobijenih inverzijom u arhitektonskoj praksi	127
11.1	<i>O primeni krivih i površi u arhitektonskoj praksi</i>	127
11.2	<i>Konstruktivni sistemi koji se koriste u arhitektonskoj praksi za površi dobijene harmonijskom simetrijom</i>	129
11.3	<i>Primena površi višeg reda dobijenih harmonijskom simetrijom u pejzažnoj arhitekturi i uređenju ambijentalnih celina</i>	134
11.4	<i>Izvođenje objekata modelovanih prema geometriji krivih i površi 3. i 4. reda</i>	136
11.5	<i>Diagrid konstruktivni sistem</i>	139
12	Zaključak	143
	Reference	146
	<i>BIOGRAFIJA</i>	151

Spisak slika

Sl. 1 Sečenje pridruženih pravih dva projektivna pramena	13
Sl. 2 Spajanje tačaka dva projektivna niza	14
Sl. 3 Klasični i relativistički red krivih.....	18
Sl. 4 Recipročni radijus vektori inverzije.....	24
Sl. 5 Inverzija na ravni	25
Sl. 6 Inverzija na sferi kao prostorna inverzija.....	25
Sl. 7 Elipsa i njen harmonijski ekvivalent za razne položaje posmatrača S	27
Sl. 8 Uzajamna harmonijska simetrija hiperbole i krive 4. reda za centar inverzije dat na realnoj osi hiperbole.....	29
Sl. 9 Centar harmonijske simetrije je na osi parabole i kriva 4. reda ima pravolinijsku osu harmonijske simetrije	30
Sl. 10 Pramenovi konika	32
Sl. 11 Harmonijski ekvivalent PP pramena konika.....	34
Sl. 12 Pramen krivih 3. reda koji je harmonijski ekvivalent PE pramena konika	36
Sl. 13 Pramen krivih 3. reda koji je harmonijski ekvivalent PH pramena konika.....	37
Sl. 14 Pramen krivih 4. reda dobijen preslikavanjem PE pramena konika.....	39
Sl. 15 Paraboličko-parabolički pramen hiperbola i njegov harmonijski ekvivalent	41
Sl. 16 Harmonijski ekvivalent eliptičko-paraboličkog pramena konika.....	43
Sl. 17 Pramen krivih 3. reda kao harmonijski ekvivalent eliptičko-paraboličkog pramena konika.....	44
Sl. 18 Harmonijski ekvivalent EE pramena konika koji se dobija kada se centar harmonijske simetrije postavi na osu simetrije	46
Sl. 19 Komplementarni pramen EE pramenu konika je HH pramen konika.....	47
Sl. 20 EE pramen konika i njegov harmonijski ekvivalent-EE pramen krivih 4. i 3. reda.....	48
Sl. 21 Uzajamna harmonijska simetrija hiperbole iz EE pramena konika i krive 3. reda sa dve kružne ose harmonijske simetrije.....	48
Sl. 22 Uzajamna harmonijska simetrija elipse iz EE pramena konika i krive 4. reda sa dve kružne ose harmonijske simetrije.....	49
Sl. 23 Uzajamna harmonijska simetrija parabole iz EE pramena konika i krive 4. reda sa jednom osom simetrije	50
Sl. 24 Uzajamna simetrija paraboličko-eliptičkog pramena konika i paraboličko-eliptičkog pramena krivih 4. reda.....	52
Sl. 25 Uzajamna harmonijska simetrija pravougla hiperbole i Bernulijeve lemniskate.....	52
Sl. 26 Uzajamna harmonijska simetrija elipse i jajaste krive 4. reda.....	53
Sl. 27 Uporedjenje dobijene jajaste krive 4. reda sa jajastom Segovom krivom.....	54
Sl. 28 Projiciranje kruga u parabolu i harmonijska inverzija parabole u "kapljicu"	55
Sl. 29 Prostorni model sfere sagledivih dimenzija i eliptičkog cilindra	55
Sl. 30 Centar inverzije je izabran u zajedničkoj temenoj tački svih konika.....	56
Sl. 31 Uzajamna harmonijska simetrija elipse i krive 3. reda.....	57
Sl. 32 Uzajamna harmonijska simetrija pravougla hiperbole i strofoide	57
Sl. 33 Uzajamna harmonijska simetrija parabole i krive 3. reda.....	58
Sl. 34 HH pramen konika nastao sečenjem kroz sekantu jednogranog hiperboloida.....	60

Sl. 35 HH pramen konika i njegov harmonijski ekvivalent-pramen krivih 4. reda.....	62
Sl. 36 Elipsa iz HH pramena konika i njen harmonijski ekvivalent kriva 4. reda.....	62
Sl. 37 Hiperbola iz HH pramena konika i njen harmonijski ekvivalent, kriva 4.reda	63
Sl. 38 Parabola iz HH pramena konika i njen harmonijski ekvivalent, kriva 4.reda sa šiljkom	63
Sl. 39 HH pramen krivih 4. reda nastao u slučaju kada je centar S inverzije izabran je na b osi hiperbole.....	64
Sl. 40 Za izabrani centar inverzije S elipsa iz HH pramena konika i njen harmonijski ekvivalent kriva 4. reda.....	65
Sl. 41 Za izabrani centar inverzije S hiperbola iz HH pramena konika i njen harmonijski ekvivalent kriva 4. reda.....	65
Sl. 42 Za izabrani centar inverzije S parabola iz HH pramena konika i njen harmonijski ekvivalent kriva 4. reda.....	66
Sl. 43 Centar inverzije S je u temeljnoj tački HH pramena konika (prikazan je i njegov harmonijski ekvivalent pramen krivih 3. reda)	66
Sl. 44 Elipsa iz HH pramena konika i njen harmonijski ekvivalent kriva 3. reda.....	67
Sl. 45 Uzajamna harmonijska simetrija hiperbole iz HH pramena konika i krive 3. reda sa dve kružne ose simetrije	68
Sl. 46 Parabola iz pramena konika i njen harmonijski ekvivalent kriva 3. reda.....	68
Sl. 47 Centar inverzije $S=S_3$ je u temeljnoj tacki HH pramena, a krug inverzije prolazi kroz temeljnu tacku S_4	70
Sl. 48 HE pramen konika koji nastaje ravnim sečenjem jednogranog hiperboloida kroz njegovu pasantu	71
Sl. 49 HE pramen konika i njegov harmonijski ekvivalent, pramen krivih 4. reda	71
Sl. 50 Preslikana elipsa iz HE pramena konika u krivu 4. reda oblika jajeta za izabrani centar harmonijske inverzije S	72
Sl. 51 Preslikana hiperbola iz HE pramena konika u krivu 4. reda za izabrani centar harmonijske inverzije S	72
Sl. 52 Preslikana parabola iz HE pramena konika u krivu 4. reda za izabrani centar harmonijske inverzije S	73
Sl. 53 HE pramen konika i njegov harmonijski ekvivalent, pramen krivih 4. reda za centar inverzije u tački elipse.....	73
Sl. 54 Preslikana elipsa iz HE pramena konika u krivu 3. reda za izabrani centar harmonijske inverzije S u tački elipse.....	74
Sl. 55 Preslikana hiperbola iz HE pramena konika u krivu 4. reda za izabrani centar harmonijske inverzije S u tački elipse	74
Sl. 56 Preslikana parabola iz HE pramena konika u krivu 4. reda za izabrani centar harmonijske inverzije S u tački elipse	75
Sl. 57 Asimetrični pramen konika	77
Sl. 58 Harmonijski ekvivalent asimetričnog pramena konika	78
Sl. 59 Uzajamna simetrija elipse i krive trećeg reda	78
Sl. 60 Uzajamna simetrija parabole iz asimetričnog pramena konika i Dioklove cisoide	80
Sl. 61 Asimetrični pramen krivih 4.reda nastao inverzijom asimetričnog pramena konika	81
Sl. 62 Asimetrična kriva 4. reda	82
Sl. 63 Uzajamna simetrija parabole iz asimetričnog pramena konika i krive 4. reda	82
Sl. 64 Pramen kvadraka kroz prostornu krivu 4. reda 1. vrste	87
Sl. 65 Pramen kvadraka kroz prostornu krivu 4. reda 1. vrste i njemu ekvivalentan pramen površi 4. i 3.reda.....	88
Sl. 66 Konus i njegov harmonijski ekvivalent-površ 4. reda	90

Sl. 67 Konus i njegov harmonijski ekvivalent – vretenasta ciklida (3d model)	90
Sl. 68 Harmonijski ekvivalent cilindra-Dipenova ciklida.....	91
Sl. 69 Cilindar i Dipenova ciklida - 3d model.....	92
Sl. 70 Lopta iz pramena prostorne krive 4. reda i njen harmonijski ekvivalent takođe lopta ..	93
Sl. 71 Rotacioni elipsoid i njegov harmonijski ekvivalent-površ 3. reda	93
Sl. 72 Parabolički cilindar i njegov harmonijski ekvivalent površ 4. reda sa šiljkom	94
Sl. 73 Pramen konika i harmonijski ekvivalentan pramen površi 4 reda - 3d model.....	95
Sl. 74 Pramen konika u presečnoj ravni T i njemu ekvivalentan pramen sfernih konika na preslikanoj "ravni" \bar{T}	96
Sl. 75 Harmonijski ekvivalent elipse (e_k) - eliptička kriva na površi 4.reda (\bar{e}_k).....	96
Sl. 76 Harmonijski ekvivalent elipse (e_c) - eliptička kriva na Dipenovoj ciklidi (\bar{e}_k).....	97
Sl. 77 Perspektivna kolineacija, inverzija i nekonformna simetrija	100
Sl. 78 Preslikavanje tačke P osnom simetrijom za centar S i osu s.....	100
Sl. 79 Uzajamna simetrija hiperbole i krive 8. reda.....	103
Sl. 80 Uzajamna simetrija hiperbole i krivih 8 i 12 reda (relativistički red)	104
Sl. 81 Kriva 16 reda koja je simetrična polaznoj hiperboli.....	105
Sl. 82 Nekonformnom simetrijom preslikan HH pramen konika i dobijen HH pramen krivih	106
Sl. 83 Nekonformnom simetrijom preslikan HE pramen konika u HE pramen krivih.....	106
Sl. 84 Feniks Međunarodni Media Centar-konstrukcija.....	127
Sl. 85 Feniks Međunarodni Media Centar-pogled iz aviona	128
Sl. 86 Gauss-ova mera krivine, proizvod krivina glavnih pravaca K	131
Sl. 87 Harmonijski ekvivalent rotacionog cilindra – površ 3 reda.....	132
Sl. 88 Površ 4. reda harmonijski ekvivalent rotacionog konusa	133
Sl. 89 Površ četvrtog reda Cloud Gate projektovana u studiju Anish Kapoor-a, izvedena u Čikagu u SAD.....	134
Sl. 90 Na fotografiji skulpture Cloud Gate crvenom bojom je označena pasuljasta kriva 4. reda koja se dobija kao harmonijski ekvivalent elipse	135
Sl. 91 Površ je napravljena u studiju Anish Kapoor	135
Sl. 92 Površ je harmonijski ekvivalent rotacionog cilindra, urađena u studiju Anish Kapoor	136
Sl. 93 Crescent Moon Tower izgrađen u Dubaiju.....	137
Sl. 94 Površ 4. reda dobijena kao harmonijski ekvivalent rotacionog paraboloida.....	137
Sl. 95 Preslikavanje rotacionog paraboloida u površ 4. reda oblika polumeseca	138
Sl. 96 Prostorni model rotacionog paraboloida i invertovane površi 4. reda oblika polumeseca	139
Sl. 97 Kapitalna kapija arhitektonskog biroa RMJM u Abu Dabiju, Ujedinjeni Arapski Emirati	140
Sl. 98 Prototip objekta-Frank Gery	141
Sl. 99 The Chengdu Contemporary Art Centre (CCAC)- Zaha Hadid Architects.....	141
Sl. 100 Elk Grove Civic Center Zaha- Hadid Architects-pogled odozgo	142

1 Uvod

1.1 Predmet istraživanja

Uvođenjem novih pojmova prave (krug) i ravni (sfera) postavljeni su temelji relativističke geometrije. Relativističkom geometrijom se pokazuje da su elipsa, parabola i hiperbola krive drugog, trećeg ili četvrtog reda u zavisnosti od položaja posmatrača prema krivoj. Inverzija, kao kvadratna transformacija postaje klasična osna simetrija (nekonformna simetrija) ako jednu tačku iz harmonijskog dvojnog odnosa pošaljemo u antipod. Ukazano je na neograničene mogućnosti za preslikavanje krivih i površi nekonformnom simetrijom i dobijanje novih oblika koji će biti od koristi kako u geometrijskoj teoriji tako i u arhitektonskoj praksi.

Inverzija kao kvadratna transformaciju u ravni upoređena je sa njenim prostornim izvođenjem u vidu dva stereografska projiciranja, sa "ravni" na sferu i sa sfere na istu "ravan" (iz antipodnog centra projiciranja). Dato je klasično i relativističko tumačenje.

Predmet analize takođe su bili različiti tipovi simetrija konike, konformna (osna i centralna) kao i transformacije pramenova konika i njihovih specifičnosti u pramenove krivih trećeg i četvrtog reda i njihove (preslikane) specifičnosti. Osnovna transformacija implementirana u ovom istraživanju je inverzija, s tim što je ona tumačena na dva načina: kao kvadratna transformacija u klasičnoj projektivnoj geometriji, i, kao čista simetrija u relativističkoj geometriji, sa stalnim povlačenjem paralela između dva geometrijska sistema i njihovim mogućnostima eksplikacije i generalizacije.

Prikazan je i pramen krivih četvrtog reda dobijen inverzijom pramena kvadrika sečenog sa "ravni" u pramen ekvivalentnih površi četvrtog reda sečenog tom istom "ravni". Ispitan je i pramen krivih četvrtog reda dobijen "ravnim" presekom pramena površi četvrtog reda koji je harmonijski ekvivalentan pramenu kvadrika kroz krivu četvrtog reda prve vrste raspadnutu u dve konike.

Relativistička geometrija, u najkraćem, nastala je dokazivanjem da se, uz dosledno uvažavanje principa kontinuiranosti, grane hiperbole zajedno sa svojim asimptotskim tangentama zaista seku u beskonačnosti. A kako se asimptote seku i u

središtu hiperbole, proizilazi da se ove prave seku dva puta, pa stoga one mogu biti samo krugovi na sferi nesagledivih dimenzija (koja se nikakvom elacijom ne može pretvoriti u klasičnu ravan). Ovom spoznajom – da su "prave" i "ravni" u stvari krugovi i sfere koji prolaze kroz antipodnu tačku arbitrarnog posmatrača – u geometriju je uveden princip relativnosti (prave" jednog posmatrača su za druge posmatrača obični krugovi!). Ovakve "prave" se udaljavanjem od posmatrača smanjuju i na kraju se sažimaju u infinitezimalne antipodne "prave" (tj. kružice kroz antipodnu tačku). Da bi relativistička geometrija kao nova teorija ostala u sebi neprotivrečna, ona mora da uz neke opšte principe sledi jedino svoje pojmove i rezultate, a bez obzira na pojmove i rezultate prethodnih geometrijskih sistema. No pošto se promenom fundamentalnog pojma prave linije menjaju značenja i svih ostalih geometrijskih termina, neizbežno je stalno upoređivanje na relaciji staro–novo; tako je npr. inverzija kao kvadratna transformacija postala čista simetrija (u odnosu na krug ili sferu, generalno, ili na "pravu" i "ravan", u graničnom, klasičnom slučaju). Iz toga je odmah usledio odlučujući rezultat nove geometrije, a to je spoznaja da se određene krive ili površi, različitih oblika i različitih redova, koje su bile disparatne u ne-relativističkoj geometriji, sada odjednom vide tek kao različiti vidovi jedne te iste krive ili površi (čime se približavamo ostvarenju sna o mogućnosti apsolutne klasifikacije krivih i površi).

1.2 Cilj istraživanja

Primarni cilj istraživanja bio je da se znanja o pramenovima krivih drugog reda (konika) prošire i na srodne pramenove krivih trećeg i četvrtog reda, ali tako da se pri tome, korišćenjem principa i rezultata relativističke geometrije, izvrši opšta sinteza, to jest prečišćavanje i redukcija ukupnog korpusa tih znanja na jednu obuhvatniju i koherentniju celinu, pristupačniju i teoretičarima i praktičarima, i profesorima i đacima. Drugim rečima, upoređivanjem starih i novih saznanja pokazano je koji od prethodnih rezultata ostaju da važe i u novoj geometriji, koji se i na kakav način modifikuju, a koji se potpuno odbacuju. Generisanje krivih 4. i 3. i viših redova izvedeno je iz njihove simetrije, sa krivim prvenstveno drugog reda-konikama. Krive 3. i 4. reda razvrstane u su u harmonijske grupe prema njihovim unikatnim (rodonačelnim) krivim sa kojima su uzajamno simetrične.

Cilj rada bio je i da se prezentuje način dobijanja pramenova kvadratika i njihovih harmonijskih ekvivalenata i da se izdvoje površi (koje bi zbog atraktivnosti oblika našle primenu u tehničkoj praksi).

1.3 Zadaci istraživanja

Prvi zadatak bio je da se različiti pramenovi krugova homologijom preslikaju u odgovarajuće pramenove konika, pa da se ovi pramenovi konika, zajedno sa drugim pramenovima konika (koji su već bili obrađeni u magistarskom radu "Prostorna geneza pramenova konika" (Djukanović (Vasiljević) G.,2000)), preslikaju u pramenove krivih trećeg i četvrtog reda (preslikane su i tri singularne konike raspadnute u odgovarajuće parove "pravih").

Drugi zadatak je da se grafički prikaz transformacija (i homologije i inverzije), koji je isti u oba geometrijska sistema, interpretira klasičnim pojmovima (koji uključuju beskonačnost) i relativističkim pojmovima (koji uključuju posmatrača i njegovu antipodnu tačku), jer se najbitnije razlike između dva sistema kriju upravo u tim "beskonačno dalekim" odnosno "antipodnim" područjima, koja su podjednako van vidokruga posmatrača. Od suštinskog je značaja, takođe, da se ne-cirkularnost konike, cirkularnost ekvivalentne krive trećeg reda i bicirkularnost ekvivalentne krive četvrtog reda u projektivnoj geometriji uporedi sa potpunom uzajamnom simetrijom ovih krivih (bile one na "ravni" ili na sferi) u relativističkoj geometriji, u kojoj su stoga sve one istog, četvrtog reda.

Inverzija kao kvadratna transformacija u ravni upoređena je sa njenim prostornim izvođenjem u vidu dva stereografska projiciranja, sa "ravni" na sferu i sa sfere na istu "ravan" (iz antipodnog centra projiciranja); dato je klasično i relativističko tumačenje.

Analizirani su različiti tipovi simetrija konike, konformne (osne i centralna) i nekonformne (centralno-osna, tj. polaritet), kao i njihove transformacije u odgovarajuće harmonijske simetrije kod ekvivalentnih krivih trećeg i četvrtog reda. Dat je primer kako se specifična konstrukcija jedne krive simetrijama prenosi na njene ekvivalente. Primerima je ilustrovano preslikavanje kruga krivine u temenoj i u regularnoj tački

krivih, posebno kada se krug krivine transformiše u asimptotu ili u stacionarnu odnosno prevojnu tangentu krive.

Razmotrena je homologija (perspektivna kolineacija) na sferi.

Povezani su "ravni" i sferni preseki kvadrike sa "ravnim" ili sfernim presekom ekvivalentnih površi višeg reda.

Uspostavljena je veza između preseka dve kvadrike (pramen kvadrika) i preseka dve njima ekvivalentne površi (pramen ekvivalentnih površi višeg reda).

1.4 Polazne hipoteze

Budući da su inverzija, stereografska projekcija i konformna simetrija u relativističkoj geometriji sinonimi, bezbrojne uzajamno simetrične ("inverzne") krive u "ravnim" ili na sferi čine grupu harmonijski ekvivalentnih krivih, koje se razlikuju samo po obliku, dok sve drugo što ima jedna kriva (ose simetrije, centri simetrije, temena krive, fokusi, singularne tačke) imaju u simetričnom vidu i sve ostale krive. Zbog konformnosti "inverzije" sve su krive u jednoj grupi slične u malom. Svaki način konstrukcije ili neka specifična fizička (npr. optička) osobina jedne krive prenosi se simetrijom, u posebno modifikovanom obliku, i na ostale članove grupe.

Klasični red pojedinačne krive jednak je zajedničkom maksimalnom redu svih krivih u grupi umanjenom za broj prolaza krive kroz posmatračevu antipodnu tačku (tj. za strukost antipodne tačke te krive). Zato elementarnu grupu harmonijski ekvivalentnih linija drugog reda čine "prave" i krugovi, dok svaka hiperbola ili elipsa, kao kriva unikatnog oblika, obrazuje svoju grupu karakterisanu antipodnom singularnom dvostrukom tačkom u kojoj se tangente konike, tj. njene realne ili imaginarne asimptote, seku pod uglom koji je invarijantan za celu grupu. Sve parabole ulaze u jednu istu grupu, jer su im asimptote poklopljene sa osom parabole u dvostruku tangentu u antipodnom šiljku parabole. (Krug i "prava" bi se mogli tretirati i kao specijalni slučaj elipse ukupnog četvrtog reda, sa antipodnom kružnom tačkom, tj. sa parom izotropnih asimptota, tako da je klasični red kruga drugi, a "prave" prvi, jer ona triput prolazi kroz antipod, jednom realno i dvaput imaginarno.)

Pošto je "inverzija" konformna transformacija, harmonijski i drugi dvojni odnosi dva para segmenata, na istom "pravolinijskom" ili krivolinijskom zraku ostaju

invarijantni. Prema tome, sve što važi za konike moraće da važi i za pramenove konika, pa dalje i za pramenove ekvivalentnih krivih trećeg i četvrtog reda, kako u "ravni" tako i na sferi, baš kao što važi i za pramenove krugova.

Dok klasična inverzija kao kvadratna transformacija nije ni potpuno bijektivna (tri prave se preslikavaju u tri tačke, i obrnuto), niti je potpuno konformna jer svezuje ili razvezuje singularne tačke, relativistička inverzija je, kao čista simetrija, potpuno i bijektivna i konformna, tako da ona obezbeđuje ne samo neuporedivo jednostavnije preslikavanje nego predstavlja i potpuno konzistentnu i grafički preciznu transformaciju. Na osnovu toga nije teško predvideti da će se svako upoređivanje između klasične i relativističke geometrije redovno završavati u korist ove druge.

Nekonformna simetrija u odnosu na krug, kao inverzna slika relativističke homologije, omogućava da se proces formiranja i rasformiranja singularnih tačaka, koji se u homologiji (projiciranjem nedoglednice u antipodnu kružnu tačku) završavao u "beskonačno" dalekom antipodu, sada izvodi neposredno pred očima posmatrača. Za razliku od inverzije kao konformne simetrije, koja menja samo oblik krive i ništa više, nekonformna simetrija može (ali i ne mora) da menja gotovo sve što je u vezi sa brojem i vrstom singularnih tačaka.

Moguće je povezati "ravne" i sferne preseke kvadrike sa "ravnim" ili sfernim presekom ekvivalentnih površi višeg reda i uspostaviti vezu između preseka dve kvadrike (pramen kvadrika) i preseka dve njima ekvivalentne površi (pramen ekvivalentnih površi višeg reda).

1.5 Metodologija

U radu su korišćene metode sintetičke i projektivne geometrije, algebarske geometrije, diferencijalne, analitičke i kompjuterske geometrije kao i metode vizuelnog programiranja (Visual-Lisp).

U području relativističke geometrije koriste se isključivo konstruktivne metode klasične sintetičke projektivne geometrije (jer, kao što je već rečeno, zbog invarijantnosti naših grafičkih prikaza one važe i u novoj geometriji), i relativistički pojmovi "prave" i "ravni" i iz njih već neprotivrečno izvedeni rezultati. Pri tome nije od

suštinskog značaja da li se grafički prikazi rade klasičnim priborom ili se koriste neki od kompjuterskih programa.

1.6 Naučna opravdanost

Grafičko izvođenje i transformacija pramenova konika u pramenove krivih trećeg i četvrtog reda, pomoću klasične inverzije kao ravne i prostorne kvadratne transformacije, moglo bi i samo da bude naučno opravdana tema jedne doktorske disertacije. Kada se ovom preslikavanju doda i uporedno preslikavanje tih pramenova relativističkom inverzijom, kao potpuno bijektivnom i konformnom harmonijskom simetrijom nove geometrije, čiji nas napred navedeni rezultati vode ka mogućnosti apsolutne klasifikacije krivih i površi, naučna opravdanost rada postaje još sagledivija.

Realizovana tema doktorske disertacije "Pramenovi krivih trećeg i četvrtog reda dobijeni preslikavanjem pramenova konika" je naučno zasnovana, jer sažeto rečeno, predviđa da se teorijska i konstruktivno-geometrijska saznanja o krivim drugog reda i njihovim pramenovima, prenesu, prostom harmonijskom simetrijom, na krive trećeg i četvrtog reda i njihove pramenove. Ovako proširena znanja o krivim viših redova predstavljaju evidentan naučni doprinos, koji je, uz to, zbog jednoobrazne geneze i obrade mnoštva geometrijski definisanih krivih i njihove direktne povezanosti sa odgovarajućim površima, od koristi ne samo teoretičarima geometrije nego i praktičarima, arhitektama.

Važan doprinos nauci predstavlja otkriće da je inverzija ekvivalentna sa klasičnom osnom simetrijom (nekonformna simetrija). U radu je ukazano na neograničene mogućnosti za preslikavanje krivih i površi i dobijanje novih oblika koji će biti od koristi i u teoriji geometrije kao i u arhitektonskoj praksi. Ukazano je da će istraživanja u oblasti proširenih simetrija biti neiscrpan prostor za dalja otkrića o ravanskim i prostornim oblicima.

Ovaj rad naslanja se na istraživanja profesora Lazara Dovnikovića, koji je rodonačelnik relativističke geometrije, a u svojoj knjizi "Harmonija sfera" (1999) dao je osnove nove teorije. Ovo je deo govora profesora Dovnikovića sa promocije pomenute knjige koja je održana 7. decembra 1999. godine u Matici Srpskoj u Novom Sadu: "Inicijalnu ideju za zasnivanje relativističke geometrije predstavljalo je otkriće (1974)

da projektivni komplement (tj. realni predstavnik imaginarnih tačaka) kruga sečenog pramenom pravih vrha S – leptirasta kriva 4. reda sa samopresekom u S , kada S ode u beskonačnost prelazi u pravouglu hiperbolu – krivu 2. reda. Zakon kontinuiteta nam tada nalaže zaključak da se prave linije-asimptote hiperbole (tangente u njenoj samopresečnoj tački S_∞)- seku dva puta (a da se onda paralelne prave dodiruju u beskonačnosti). Ovaj zaključak je zahtevao definitivno odbacivanje klasičnog, linearnog, pojma prave linije i definisanje "prave" kao svakog kruga koji prolazi kroz najudaljeniju tačku od posmatrača, a to je na "ravni" (kao sferi) njegova antipodna tačka. Zbog ekvivalentnosti tačaka sfere, svaki posmatrač ima svoju antipodnu tačku i svoj sistem "pravih" linija (koje su za ostale posmatrače obični krugovi), čime se u geometriju automatski uvodi princip relativnosti."

Profesor Lazar Dovniković u svojim radovima daje osnove nove relativističke geometrije i u okviru nje rešava mnoge do sada nerešene probleme iz teorije krivih i površi. Ovo su neki od profesorovih radova koji se bave relativističkom geometrijom:

-*The Relativistic Geometry of Harmonic Equivalents*, Tokyo, 1994. U ovom radu se objašnjava suština relativističke geometrije i zbog čega je bila neophodna zamena starih geometrijskih pojmova i uvođenje novih.

-*The Realization of the Continuity Principle in the Relativistic Pencils of Circles and Spheres*, Novi Sad, 1998. Rad govori o principu kontinuiteta, koji je objašnjen na primeru pramenova krugova i sfera u relativističkoj geometriji. Prema principu kontinuiteta svaka tačka ravni preslikana harmonijskom simetrijom ima svoju sliku, pa tako i tačka centra kruga inverzije ima svoju sliku u antipodu - čime je zadovoljen princip kontinuiteta.

-*The Relativistic Geometry as the Legendary 'Royal Road' to the Whole of Geometry*, Kiev, 2002. Profesor Dovniković je u ovom radu relativističku geometriju nazvao legendarnim kraljevskim putem u celinu geometrije, jer se uvođenjem novih pojmova "prave" i "ravni" pruža mogućnost za objašnjenje nerešenih, i kroz vekove proučavanih problema geometrije.

-*Perspektivna kolineacija u relativističkoj geometriji*, Podgorica, 2002. Rad tumači perspektivnu kolineaciju u skladu sa relativističkom geometrijom i shvatanjem beskonačne tačke kao antipodne tačke posmatrača

-A Pencil of Quadrics and Multitude of Pencils of Quadrics Harmonic Equivalents through a Fourth Order Space Curve, predavanje po pozivu, Beograd, 2004. Na predavanju je prikazan pramen kvadratika kroz izabranu krivu 4. reda i njegov harmonijski ekvivalent.

-Relativistic Homology as a Way of Tying or Untying Singular Points, Journal for Geometry and Graphics, Vienna, 2004. Rad govori o relativističkom tumačenju perspektivne kolineacije i objašnjava kako se singularne tačke krivih svezuju i razvezuju.

-Relativistički proširene simetrije kao suština projektivne komplementarnosti krivih i površi, 2008., Predavanje po pozivu, Vrnjačka Banja. Na predavanju je pomoću relativističke geometrije, korišćenjem proširenih simetrija objašnjena suština projektivne komplementarnosti krivih i površi.

-Geometrijska sinteza principa relativnosti sa principima kvantne teorije, 2008., Predavanje po pozivu, Vrnjačka Banja. Na predavanju su objašnjeni pravci istraživanja – razvrstavanje krivih i površi u bezbrojna mnoštva uzajamno simetričnih oblika.

-Kvantno-relativistička geometrija kao nova naučna paradigma, Predavanje po pozivu, Beograd, 2010. Rad objašnjava razliku između klasičnog i relativističkog reda krivih. Dato je i objašnjenje za svezivanje i razvezivanje singularnih tačaka krivih u relativističkoj geometriji.

-Geometrijska kvantno-relativistička struktura univerzuma, Predavanje po pozivu, Novi Sad, 2012. Profesor Dovnikovic u ovom radu, kroz mnogo primera, objašnjava tri najvažnije simetrije u relativističkoj geometriji.

Ova disertacija nastavlja i proširuje započeta istraživanja u toj oblasti i samim tim pruža nesumnjiv doprinos pomenutoj teoriji.

2 Pregled dosadašnjih istraživanja u ovoj oblasti

2.1 Uopšteno o krivim linijama

2.1.1 O istorijatu proučavanja krivih linija

Osnova na kojoj se razvila nauka o krivim linijama jesu teorijske postavke iz matematike, zadaci geometrijskog karaktera, zadaci iz područja mehanike i fizike, prirodnih nauka i tehnike. Geometrijska i mehanička svojstva krivih linija uočljiva su u različitim mehanizmima, detaljima mašina, građevinskim konstrukcijama, u optici slikarstvu, arhitekturi, u teoriji i praksi geometrijskih konstrukcija, u crtanju i td. Krive linije susrećemo i u svakodnevnom životu, a neke od njih se mogu prepoznati i kao geometrijske krive. Proučavanje krivih linija povezuje teoriju matematike sa konkretnim primerima iz prakse i sa iskustvom.

Iz egipatskih papirusa vidi se kako su prastari naučnici pokušavali da izmere površine područja koje su ograničene krugom i linijom. Egipćani su se još od 17. do 20.veka pre nove ere bavili kvadraturom kruga i postigli dobru aproksimaciju broja π ili 3,1604. Tek pojavom matematike kao nauke počela se razvijati i nauka o linijama, dostigavši visoko savršenstvo u radovima grčkih matematičara.

Grčki naučnici stvorili su teoriju konusnih preseka. Oni su preseke konusa definisali kao preseke sa ravnima koje su upravne na izvodnice konusa. U zavisnosti od toga da li je ugao pri vrhu konusa, oštar, prav ili tup oni su dobijali preseke po elipsi, paraboli ili hiperboli.

Platon (Πλάτων; 427.-347. p.n.e) je držao predavanja iz matematike, astronomije i vlastite teorije "ideja". Kao i pitagorejci s juga Italije, članovi Akademije su verovali kako se u proučavanju matematike nalazi ključ ukupnog razumevanja kosmosa (sveta). Matematika razotkriva sve pravilnosti i harmonije koje upravljaju prirodnim i ljudskim svetom.

Legenda kaže da je iznad ulaza u Akademiju pisalo: "Neka ne ulazi onaj ko ne zna geometriju."

Arhimed (Αρχιμήδης, 287.-212. p.n.e) je rešio problem kvadrature segmenta parabole. Upoređujući figure, koje su upisane u elipsu i kružnicu, kojoj je prečnik jednak velikoj osi elipse, on je odredio i površinu elipse.

Prvu metodičku obradu konusnih preseka dao je Apolonije iz Pergama; (262.-190. p.n.e.). Njegovo delo "Konike" klasično je delo grčke matematike. Apolonije je sistematizovao sva dotadašnja znanja i dao je imena konikama kakva se i danas upotrebljavaju.

Stari Grci nisu otkrili samo konusne preseke. Postavili su mnoge i do danas aktuelne geometrijske probleme kao što su: trisekciju ugla, udvostručenje kocke i razmatrali su kvadraturu kruga i ta znanja koristili su za izvođenje krivih. Tako su se pojavile Arhimedova spirala, cikloida, Dinostratova kvadratisa. Ravni preseki torusa dobili su ime po starogrčkom geometru Perseju (Perseus, c. 150. p.n.e.)

U srednjem veku mnoga dotadašnja znanja bila su potisnuta i zaboravljena.

U 17. veku dolazi do razvoja analitičke geometrije i tako se nauka ponovo vratila na teoriju o krivim linijama. Godine 1637. objavljena je Dekartova (René Descartes, 1596.-1650.) knjiga "Geometrija". Metodom koordinata, a pomoću jednačina, Dekart je predstavljao tačke, prave, ravni, krive i površi. Otkriće ove metode imalo je veliki značaj za razvoj geometrije i teorije o krivim linijama. Bilo koja napisana jednačina predstavljala je neku novu krivu liniju.

Posle otkrića metode koordinata, kao njena prirodna posledica, pojavila se naučna metoda pod nazivom infinitezimalni račun. Zahvaljujući tome, tj. otkriću diferencijalnog i integralnog računa počeo je prelaz od specijalnih i originalnih načina pri istraživanju krivih do proučavanja krivih opštom metodom.

Mnogobrojni problemi mehanike 17. i 18. veka doveli su do otkrića novih krivih linija. Veliki doprinos izučavanju krivih linija dali su matematičari Dekart (Descartes), Lajbnic (Gottfried Wilhelm Freiherr von Leibniz, 1646.-1716.), i Hajgens (Christiaan Huygens, 1629.-1695.), a takođe i braća Bernuli (Johann Bernoulli, 1667.-1748., Jacques Bernoulli, 1654.-1705), otkrivajući sve novije i novije oblike i njihova svojstva.

O tome koliko je bio aktuelan problem istraživanja krivih svedoči i naziv prvog udžbenika za analizu koga je napisao Lopital (Guillaume François Antoine, Marquis de l'Hôpital, 1661.-1704.) "Analiza infinitezimalnih veličina za razumevanje krivih".

Nisu samo praktične potrebe ljudi - zahtevi industrije, konstruisanja mašina i mehanizama, izgradnja brana i pregrada u bujičnim tokovima, podržavale stalno i veliko zanimanje tih naučnika za istraživanje krivih, već i ta "radost posmatranja forme" koja, po rečima Klajna (Felix Christian Klein, 1849.-1925.), karakteriše istinskog geometričara.

Procvat analitičke metode u proučavanju krivih tokom vremena izazvao je reakciju nekih naučnika. Kao objekat polemike pojavljivala se jednačina koja predstavlja krivu, pri čemu se ništa nije znalo o obliku krive i o načinu njenog nastanka. To je dovelo do povratka na sintetičku metodu i to je unelo novi smer u proučavanju krivih linija. Ovde su prva dostignuća povezana s imenima Dezarga (Girard Desargues, 1591.-1661.) i Paskala (Blaise Pascal, 1623.-1662.). Dezarg je, istražujući projektivna svojstva figura i upotreбивši svoj pojam involucije, obogatio teoriju krivih 2. reda novim otkrićima. Paskal otkriva svoju poznatu teoremu o odnosu šestorke tačaka konike, po kojoj za svaki šestougao, upisan u krivu 2. reda, secišta suprotnih stranica leže na jednom pravcu. Delair (Phillipe De la Hire, 1640-1718) dolazi do važnog zaključka da je direktrisa krive 2. reda polara njenog fokusa.

Nove metode istraživanja svojstava krivih 2. reda uspešno se razvijaju u 19. veku. Brianšon (Charles Julien Brianchon, 1783-1864) dokazuje teoremu koja je dualna Paskalovoj teoremi i izučava projektivna svojstva hiperbole. Ponsele (Jean-Victor Poncelet, 1783.-1864.) istražuje krive 2. reda pomoću svoje metode projektivnih odnosa (projektiviteta). Štajner (Jakob Steiner, 1796-1863) istražuje projektivna svojstva tih krivih na osnovu pojma dvorazmere i posmatra ih kao proizvode tvorevina 1. stepena.

Kritika analitičke metode za istraživanje oblika i svojstava krivih bila je zasnovana, kako je već rečeno, na tome da pri korišćenju te metode nije prisutan vizuelan izgled krive i iščezavaju geometrijske konstrukcije. Ovi pogledi doveli su, s druge strane strane, do izgradnje tzv. algebarske geometrije. Proučavane su invarijante algebarskih formi. Posebne zasluge u proučavanju algebarskih krivih pripisuju se Plikeru (Julius Plücker, 1801.-1868.).

Sa razvojem kompjuterskih softvera koji su zasnovani upravo na algebarskom pristupu u tretiranju krivih, a koji su u stanju da pruže i automatski diplej grafika funkcije koju obrađuju (MAPLE, Mathematica, Geogebra, itd.) oba aspekta, i grafika i analitika, bivaju objedinjeni i pomireni.

Druga grupa naučnika proučavala je prirodnu jednačinu krive linije. Ta jednačina funkcionalno povezuje poluprečnik zakrivljenosti krive i dužinu njenog luka, tj. one elemente koji su organski povezani sa samom prirodom istraživane krive.

2.1.2 Načini nastanka krivih linija

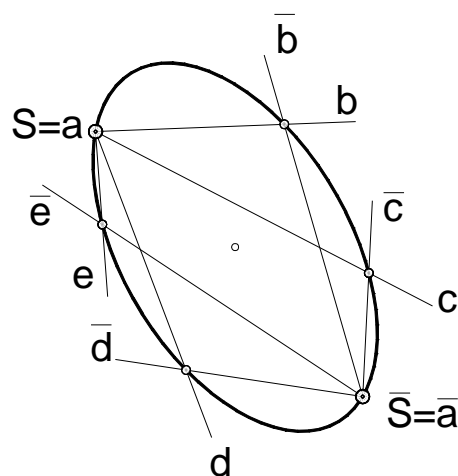
Osnovna podela ravnih krivih linija je na analitičke (izražene su jednačinom) i empirijske (nemaju ili im ne znamo jednačinu: to su krive stanja u meteorologiji, nivo linije terena i slično). Proučavanje karakteristika oblika krive i njenih svojstava sredstvima diferencijalne geometrije moguće je samo onda kada je kriva data u analitičkom obliku, tj. jednačinom. Međutim, u mnogim zadacima teorijskog i, naročito, praktičnog karaktera, potrebno je, pre nego što počnemo sa istraživanjem jednačine krive, sastaviti tu jednačinu na osnovu raspoloživih podataka, koji u svakom slučaju određuju tu krivu i izraženi su u početnim uslovima.

Podsetimo se sedam najpoznatijih načina nastanka krivih linija (Savelov A.A., 1979):

1. Krive nastaju presekom neke površi ravnima. To je, u istoriji, krivih linija, bio jedan od prvih načina generisanja krivih. Konike se dobijaju ravnim presekom konusa, Persejeve krive se dobijaju kada torus sečemo ravnima itd.
2. Krive se definišu kao geometrijsko mesto tačaka koje zadovoljavaju određene uslove. Ovaj način nastanka krivih su primenjivali još starogrčki matematičari. Tako je npr. Euklid proučavao konusne preseke kao geometrijsko mesto tačaka za koje je zbir udaljenosti od date tačke i datog pravca konstantan. Kao geometrijsko mesto tačaka definisao je i Diokle ($\Delta\iota\kappa\lambda\eta\varsigma$, 240.-180.p.n.e.) svoju cisoidu. Na isti način i Nikomed (250.-150.p.n.e.) je definisao konhoidu. Linije, kao npr. Dekartovi ovali, Kasinijevi (Giovanni Domenico Cassini, 1625.-1712.) ovali, Paskalov puž, strofoida, verziera i čitav niz drugih krivih, definišu se kao geometrijska mesta tačaka.
3. Kriva je određena kao putanja tačke koja se kreće po nekom određenom zakonu. Ovo je takozvani kinematički način nastanka krivih. Grčki matematičari su ga odlično poznavali. Tačka se kreće po Arhimedovoj spirali ako se njen poteg, pri jednolikom obrtanju oko pola S, uvećava

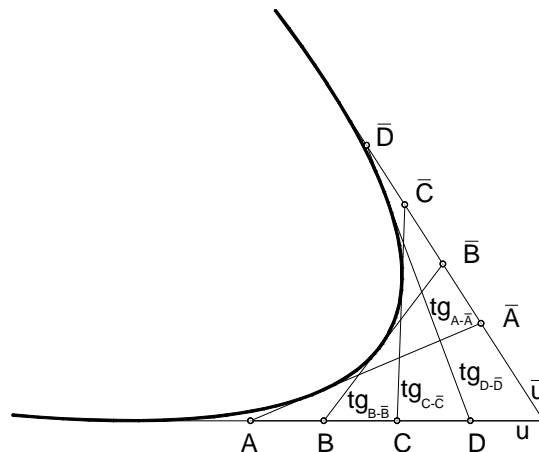
aritmetičkom progresijom ($\rho=a\varphi$). Sve cikloide su putanje tačke čvrsto povezane sa kružnicom koji se kotrlja bez klizanja po drugooj kružnici. Bernulijeva lemniskata može biti određena kao trajektorija središta većeg kraka zglobnog ukrštenog paralelograma kod koga je suprotni krak učvršćen. Hipocikloida koju opisuje tačka kružnice k poluprečnika r , koja se bez klizanja kotrlja po unutrašnjoj strani kružnice k_I poluprečnika $3r$, poznata je kao Štajnerova kriva (Jakob Steiner, 1796.-1863, jedan od osnivača projektivne geometrije). Kinematički se definišu rozete, klizne linije i mnoge druge linije. Kinematički način zadavanja krive Dekart je postavio kao osnovu za određivanje krivih metodom koordinata.

4. Izvođenje linija povezivanjem projektivno pridruženih elemenata. Ovaj način je relativno skorijeg datuma i u potpunosti se proučava u projektivnoj geometriji. Projektivno se pridružuju dva niza tačaka ili dva pramena pravih. Sečenjem pridruženih pravih dva projektivna pramena dobija se skup tačaka koje čine krivu 2. reda (koniku)- Sl. 1. Spajanjem tačaka dva projektivna niza dobija se skup pravih (tangenata) koje omotavaju krivu 2. razreda (koniku)- Sl. 2. Prostorno gledano, to je u prvom slučaju projekcija presečne krive dva hiperbolička paraboloida sa paralelnim projicirajućim izvodnicama i jednom, zajedničkom direktrinom ravni, a u drugom - projekcija konture hiperboličke kvadrike.



Sl. 1 Sečenje pridruženih pravih dva projektivna pramena

Specijalan slučaj projektivnog pridruživanja je perspektivno pridruživanje, koje se ostvaruje projiciranjem dva ravanska sistema iz opšteg središta. Pridružene tačke pri tome leže na istom projekcijskom zraku, a pridruženi pravci leže u jednoj projicirajućoj ravni. Ovaj slučaj se time svodi na homotetiju. Sve konike koje prolaze istim parom beskrajno dalekih tačaka nazivamo sličnim ili homotetičnim konikama. Metodom projiciranja mogu se dobiti mnoge krive linije koje se često susreću. Na ovaj način možemo dobiti i cikloidu kao paralelnu projekciju cilindrične zavojnice na ravan koja je paralelna sa njenom osom. Arhimedova spirala može se odrediti kao ortogonalna projekcija konusne zavojnice na ravan koja je upravna na njenu osu.



Sl. 2 Spajanje tačaka dva projektivna niza

5. Kriva se definiše zadavanjem diferencijalnih svojstava. Neposredno zadavanje prema početnim uslovima, odnosno proizašavši iz tih uslova, odnos među infinitezimalnim elementima krive izražava se na početku u obliku neke diferencijalne jednačine. Uzastopno integraljenje te jednačine dovodi do obične jednačine tražene krive. Takav način određivanja jednačine krive karakterističan je za mnogobrojne grane geometrije, mehanike, fizike, tehnike. Na primer- kriva eksponencijalne funkcije može biti definisana kao linija za koju subtangenta za sve tačke ima istu vrednost. Traktrisa je okarakterisana konstantnošću dužine tangente. Radioidalna spirala definisana je kao linija za koju je poluprečnik zakrivljenosti obrnuto proporcionalan dužini luka.

6. Kriva je definisana kao rezultat nekog geometrijskog preslikavanja već poznate krive. Ovaj način formiranja krive posebno je koristan. On predstavlja neiscrpno sredstvo za određivanje novih krivih. A takođe omogućava određivanje svojstava nove krive uz pomoć svojstava krive koju preslikavamo. Osnovne geometrijske transformacije su:
- afina transformacija
 - projektivna inverzija
 - kvadratna transformacija
 - korelativna transformacija
 - tangencijalna transformacija.
7. Kriva se odmah zadaje u analitičkom obliku i predstavlja grafik neke funkcije. To je najlogičniji način za analiziranje krive. Dekartova metoda kojom se određuje odnos između krive i njene jednačine daje neograničene mogućnosti. Neke veoma poznate krive su prvo zadate jednačinama, pa su onda ispitivane njihove osobine i crtani su grafici funkcija. To su trigonometrijske, eksponencijalne, logaritamske funkcije i mnoge druge.

2.1.3 O podeli krivih linija

Najopštija podela krivih je na ravne i prostorne.

Osnovna podela ravnih krivih je na analitičke (izražene su jednačinom) i empirijske (nemaju ili im ne znamo jednačinu; krive stanja u meteorologiji, profili terena i sl.). Analitičke krive se dele na algebarske ($f(x,y)=0$ je polinom n -tog stepena, prava je seče u n tačaka i tada je n -tog reda) i transcendentne (jednačina im nije polinom-nemaju red, prava ih može seći u bezbroj tačaka). Algebarske krive se dele prema njihovom redu, razredu i rodu.

Red - broj preseka sa pravom.

Razred - broj tangenata krive kroz tačku.

Rod - razlika između maksimalno mogućeg i stvarnog broja dvostrukih tačaka krive.

Prostorna kriva određena je presekom dve površi. Analitički, određena je njihovim dvema jednačinama $f_1(x,y,z)=0$ i $f_2(x,y,z)=0$. Eliminacijom jedne od

koordinata dobija se projekcija na koordinatnu ravan drugih dveju. Prostorne krive imaju red i razred.

Red-broj tačaka u jednoj ravni (broj preseka sa ravni).

Razred-broj oskulatornih ravni kroz jednu tačku van krive.

O problemu klasifikacije krivih govorio je prof. Lazar Dovniković u svom predavanju po pozivu: "Kvantno-relativistička geometrija kao nova naučna paradigma", (Dovniković L., Mongeometrija, Beograd 2010).

Najvažnije pri istraživanju krivih, kao i pri istraživanju drugih matematičkih objekata, je razmotriti pitanje njihove klasifikacije. Klasifikovati krivu znači, u stvari, otkriti njenu bitnu osobinu kojom se ona, svrstava u grupu ostalih krivih sa istom osobinom. Postoje brojne osobine krivih linija tako da se one mogu pri razvrstavanju naći u više klasifikacionih grupa. Podele krivih mogu da se izvode prema njihovom redu i klasi, prema rodu odnosno prema broju i vrsti singulariteta, prema prirodi njihovih beskonačno dalekih tačaka, prema projektivnoj ili afinjoj srodnosti krivih, prema mogućnosti simetrije njihovih tačaka, prema načinima izvođenja krivih itd. Kada se ovome dodaju i one najopštije podele krivih: na ravne i prostorne, te na algebarske i transcendentne, težina problema klasifikacije postaje očigledna. U relativističkoj geometriji razvrstavanjem krivih u harmonijske grupe otvaraju se novi pravci u klasifikovanju krivih.

"Već sama činjenica da relativistička "prava" može da seče i krive "različitih" redova u istom broju tačaka, umnogome relativizuje klasičnu fundamentalnu podelu krivih prema njihovom redu.

Druga dokazana činjenica, da su i mnoge klasično asimetrične krive u stvari simetrične (u odnosu na njihove kružne ose simetrije), oslobađa nas još jedne klasifikacione pregrade.

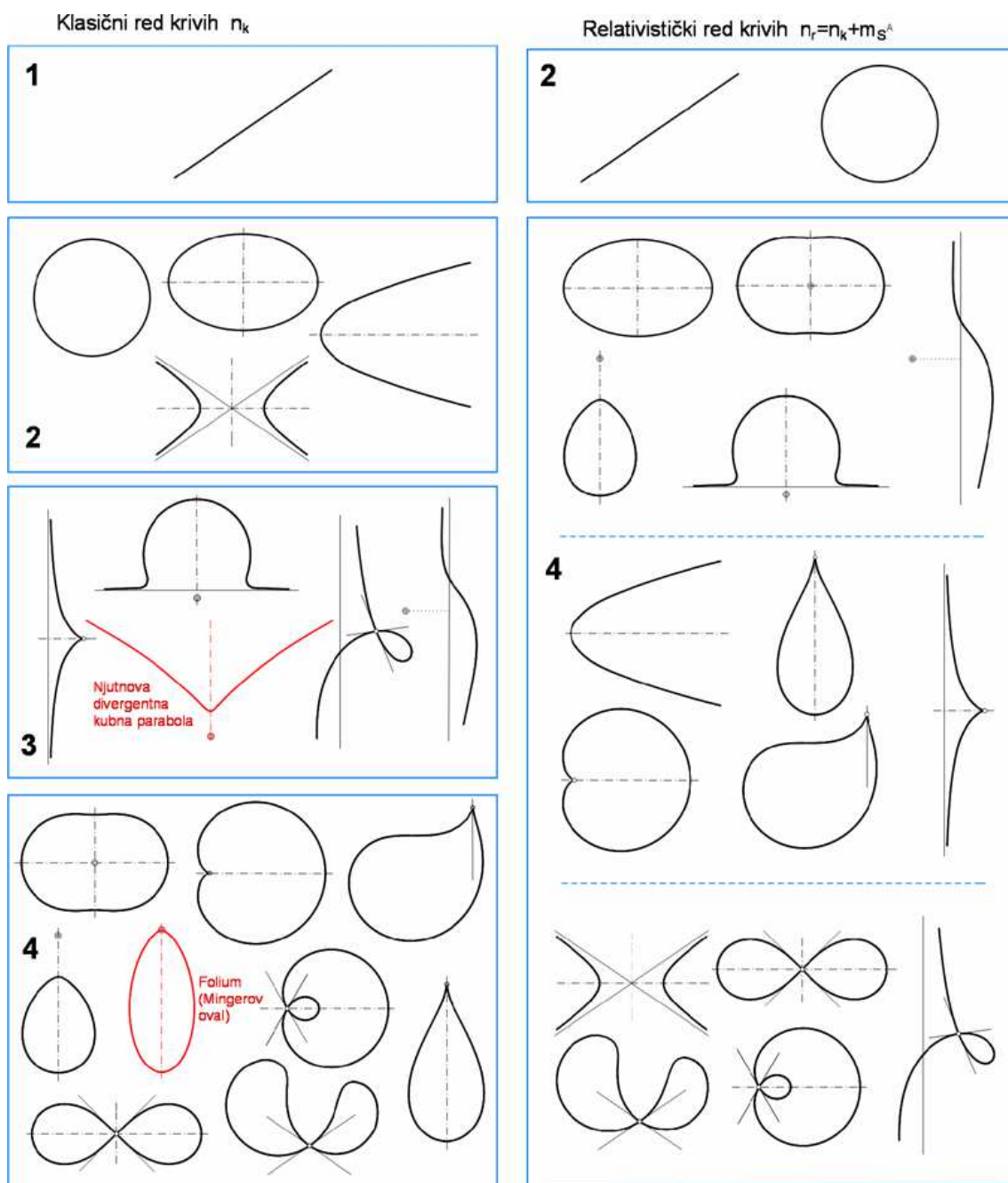
Treća "oslobađajuća" činjenica sledi iz suštinske jednakosti "ravni" i sfere. Kako obe površi zatvaraju prostor, ukida se i razlika između "ravnih" i prostornih krivih, jer su sada, u stvarnosti, sve krive prostorne." (Dovniković L., 1999).

U relativističkoj geometriji krive se razvrstavaju u harmonijske grupe. Sve krive koje pripadaju istoj grupi su simetrične međusobno i simetrične su polaznoj rodonačelnoj krivoj i mogu biti različitog reda. Simetrija u "ravni" može se izvoditi i prostorno. Kako se pri tome baš sve što ima jedna kriva izomorfno prenosi na drugu,

postaje izvesno da će upravo razvrstavanje krivih u harmonijske grupe predstavljati traženi put ka njihovoj sveobuhvatnoj klasifikaciji. Dok pojedinačne krive iz najklasičnije grupe konusnih preseka (elipsa, parabola i hiperbola) imaju zajednički red, a razlikuju se po mnogo čemu drugome, pojedinačne krive iz jedne relativističke grupe uzajamno harmonijski simetričnih krivih razlikuju se samo po obliku, a sve ostalo im je zajedničko. Klasifikacija krivih u harmonijske grupe ima veliku vrednost. Ako za neku krivu ustanovimo da pripada određenoj grupi, o njoj ćemo, po zakonu simetrije, odmah znati i sve ono što već znamo o nama najpoznatijem članu te grupe.

Konike su cirkularne krive jer se mogu dobiti u preseku parova krugova. Tačke elipse određene su presekom para pridruženih krugova sa centrima u fokusima elipse i zbirom poluprečnika jednakim velikoj osi elipse. Kod hiperbole su centri krugova takođe u njenim fokusima, ali je sada razlika poluprečnika jednaka realnoj osi hiperbole. U relativističkoj geometriji, konika je kriva četvrtog reda, jer joj se "doda" dvostruka tačka koja je u antipodu, pošto se elipsa dobija presekom sfere i eliptičkog cilindra koji sferu dodiruje u antipodu. Dakle dolazi do "raspada" prostorne krive 4. reda na prostornu krivu i izolovanu dvostruku tačku u kojoj se presečne kvadrike dodiruju. Samo ako je izolovana dvostruka tačka u antipodu, posmatrač će tu krivu videti kao koniku. Pomeri li se posmatrač u neku drugu tačku na sferi, on će presečnu krivu videti kao krivu 4. reda sa izolovanom dvostrukom tačkom. Krug se dobija presekom sfere i horizontalne "ravni", koja je u relativističkoj geometriji takođe sfera. Iz ovoga se zaključuje da krug takođe ima dvostruku tačku, ali je to kružna tačka u kojoj se dve sfere dodiruju (to su tačke iste u "ravni" i na sferi).

Na Sl. 3 se vrši pregrupisavanje krivih prema klasičnom i redu u relativističkoj geometriji. Sl. 3 preuzeta je iz rada "Kvantno-relativistička geometrija kao nova naučna paradigma", (Dovniković L., 2010). U relativističkoj geometriji "prava" i krug su krive drugog reda jer je "prava" u stvari krug koji prolazi kroz posmatračev antipod. Ako klasična kriva drugog reda ima dve asimptote, ona dva puta prolazi kroz antipod i ima u njemu dvostruku tačku, tako da je ona u relativističkoj geometriji četvrtog reda.



Sl. 3 Klasični i relativistički red krivih

Krive trećeg reda imaju jedan prolaz kroz antipod i zato im se doda jedan red, dok krive klasičnog četvrtog reda (jednodelne i dvodelne) takve i ostaju. Krive koje se izuzimaju iz ovog pravila su označene crvenom bojom. To su Njutnova divergentna kubna parabola (ona je klasičnog 3. reda, ali ima jednu izolovanu dvostruku tačku i jednom prolazi kroz antipod te joj se u relativističkoj geometriji red poveća za tri) i folium (Mingerov (Karl Menger, 1902.-1985.) oval, klasičnog četvrtog reda, ali pri

inverziji prelazi u krivu 6. reda). Dakle, pri preslikavanju one prelaze u krive šestog reda. Bitno je naglasiti da su posle pregrupisanja, sve krive parnog reda.

Objašnjenje počinje sa preslikavanjem prave, kao krive reda $n=1$. Prava se može preslikati u samu sebe ukoliko se centar harmonijske simetrije nalazi na samoj pravoj, jer je prava u tom slučaju zrak preslikavanja. Ukoliko je centar harmonijske simetrije van prave, prava se preslikava u krivu reda $2n$, odnosno krug. Daljom harmonijskom simetrijom kruga, odnosno krive reda $2n$, gde je centar preslikavanja na krugu, dobija se prava, odnosno kriva reda $2n/2$. Ukoliko je centar harmonijske simetrije van kruga tj. van krive reda $2n$, kriva se preslikava u krivu istog reda, odnosno krug. To znači da se harmonijskom simetrijom red preslikane krive može maksimalno udvostručiti.

Ravnu racionalnu krivu reda n iz jednog polja tačaka, kvadratne transformacije preslikavaju u ravnu racionalnu krivu reda $2n$. Relativistička geometrija harmonijskih ekvivalenata, osnovne elemente projektivnog prostora zamenjuje pojmom kruga i sfere uvodeći pojam relativnosti pri sagledavanju oblika. Analiza i spoznaja prostorne suštine perspektivne kvadratne transformacije ukazuje na prelaz ove transformacije u centralnu inverziju na sferi kao harmonijsku simetriju. Ova bijektivna transformacija se izvodi polaritetom, koji parove tačaka pridružuje involutorno i harmonijski (pa se zbog toga može zvati i harmonijskom simetrijom) u odnosu na apsolutu, održavajući pri tome invarijantnost preslikanih uglova. Naime, ravna kriva reda n u zavisnosti od položaja centra harmonijske simetrije (centar može biti na krivoj ili van nje), može se u drugom polju preslikati u krivu reda n , $2n-1$ ili $2n$.

3 Osnovni principi relativističke geometrije harmonijskih ekvivalenata - harmonijske simetrije

3.1 Osnovni pojmovi relativističke geometrije

U ovom poglavlju biće date osnovne teorijske postavke i metodološki pristup za analizu i proučavanje krivih linija postupcima relativističke geometrije. (Dovniković L.,2002).

Osnovni pojmovi prave i ravni zamenjuju se krugom i sferom, pri čemu veličina sfere ne utiče na opštost rasuđivanja. Uvodi se pojam posmatrača (odatle i naziv relativistička geometrija), a sagledavanje i tumačenje geometrijskih elemenata zavisi od položaja posmatrača.

Projektivna geometrija je uvela nove pojmove, kako bi premostila činjenicu da se euklidskom geometrijom ne mogu objasniti beskonačno daleki elementi. Tako je postojeća geometrija dopunjena fiktivnim pojmovima beskonačno dalekih elemenata: tačke, prave i ravni. (Dve paralelne prave se seku u beskonačno dalekoj tački. Dve paralelne ravni imaju zajedničku pravu u beskonačnosti). Još od vremena Zenona pojam beskonačnog je Gordijev čvor matematike. Uvođenjem projektivne geometrije trebalo je suprotstaviti se neprikosnovenim autoritetima Euklida, Njutna i Kanta. Kant je tvrdio da je euklidska geometrija jedini način kako naš um može da shvata i tumači prostorne odnose. Kakve su bile prve reakcije na uvođenje projektivne prave govori jedna anegdota u knjizi E.T. Bela –*Veliki matematičari*. Kada je jednom uvaženom stručnjaku za geometriju mlađi kolega stidljivo rekao da se paralelne prave sastaju u beskonačnosti, stručnjak je stao kao ukopan, a zatim naglašavajući svaku reč rekao da "svaki čovek koji tvrdi da se paralele sastaju u beskonačnosti ili bilo gde drugde jednostavno nema zdrav razum". On je bio u pravu, jer su paralelne prave ekvidistante, i kao takve se ne mogu nikada i nigde sresti. Za novu koncepciju paralelizma bila je neophodna nova definicija prave koja se negde zatvara, a ne da se starom pojmu prave dodeli beskonačna tačka za koju se ne zna gde je i koju niko nije mogao da vidi. Tako

da je projektivna prava u stvari hibridni pojam nastao od euklidske prave sa pridodatom beskonačno dalekom tačkom.

U relativističkoj geometriji (Dovniković, 1999), kao prirodnom nastavku deskriptivne projektivne geometrije, pojam pravih linija zamenjuje se pojmom **krugova** kroz antipodnu tačku posmatrača (na sfernoj ravni) a pojam ravni **sferama** kroz tu istu tačku. Beskonačno daleka tačka projektivne euklidske prave i beskonačno daleka prava projektivne euklidske ravni stapaju se u konačnu **antipodnu** kružnu tačku koja je na toj "sfernoj ravni" najudaljenija od mesta posmatrača.

Svaka tačka "sferne ravni" je ekvivalentna, odnosno svi posmatrači su ravnopravni i svaki od njih ima svoju antipodnu tačku i svoje krugove koji prolaze kroz njegov antipod tako da ih on vidi kao "prave". Samo oni krugovi koji prolaze i kroz tačku posmatrača i kroz antipod su geodezici sfere. Prema tome, povezivanje "prave" sa pojmom geodezijske linije je pogrešno. Ono što je za jednog posmatrača "prava linija", za drugog je krug. Isto tako, ukoliko posmatrač ostaje na istom mestu na sferi, dok krivu harmonijskom simetrijom preslikavamo, posmatrač će sve te krive videti kao uzajamno harmonijski simetrične krive sa ekvivalentnim geometrijskim i konstruktivnim elementima. Sve ove krive koje su "slične u malom" obrazuju grupu harmonijski simetričnih krivih.

Da li će za nekog posmatrača krug sfere biti običan krug ili "prava" ne zavisi od veličine kruga, već od njihovog uzajamnog položaja. Ukoliko geodezik sfere ne prolazi kroz antipod posmatrača, posmatrač će ga videti jednostavno – kao krug, dok će i najmanji krug sfere, ukoliko prolazi kroz antipod, za odgovarajućeg posmatrača biti "prava".

Ako analiziramo dva posmatrača, S_1 i S_2 , a njihove antipode označimo sa \bar{S}_1 i \bar{S}_2 . Svaki posmatrač ima svoj parabolički snop krugova kroz antipod. Zajedničke "prave" će činiti eliptički pramen krugova kroz \bar{S}_1 i \bar{S}_2 .

Pošto tri tačke određuju krug, zajednička "prava" za tri posmatrača biće krug koji prolazi kroz njihova tri antipoda (Dovniković L., 1994).

Ako posmatramo klasičnu centralnu inverziju kao kvadratnu transformaciju u projektivnoj geometriji, zaključujemo da se centar inverzije u svim pravcima preslikava u pridruženu tačku beskonačno daleke prave. Može se zaključiti da je u toj geometriji narušena bijektivnost preslikavanja. U relativističkoj geometriji centar inverzije

preslikava se u jednu tačku, a to je antipod. Klasična osna simetrija je sada samo specijalni slučaj ove simetrije u odnosu na kružnu osu, pri čemu je transformacijska veza dveju simetrija opet jedna harmonijska simetrija.

3.2 Kvadratna transformacija

"Kvadratna transformacija je najjednostavnija transformacija u grupi nelinearnih transformacija, kod koje se red strukture (krive, površi, kongruencije, ...) može najviše udvostručiti. U okviru kvadratnih transformacija posebno mesto zauzima biracionalna kvadratna transformacija (Godeaux, 1927.) kod koje se rod krive ne menja i koja je dvosmerno racionalna - biracionalna. Konstruktivna i analitička analiza biracionalne kvadratne transformacije je izložena u radovima autora (Skala A., 1986; Mihajlović Levi V., 1990; Štulić R., 1997). Planimetrijski konstruktivno-sintetički pristup analitičkoj obradi biracionalnih kvadratnih transformacija koji je dat u radu :

" Konstruktivno i analitičko određivanje nekih klasa racionalnih kubika primenom opšte inverzije kao kvadratne transformacije" (Mihajlović Levi V.,1990), za razliku od čisto algebarskog pristupa, omogućava neposredniju analizu elemenata preslikavanja. Ipak, u zavisnosti od složenosti objekata preslikavanja, konstruktivno-sintetička obrada zahteva relativno dugotrajan konstruktivni postupak, kao i intuitivnu sposobnost za prethodno raspoređivanje elemenata preslikavanja u odnosu na objekat koji se preslikava. Prostorne restitucije, kao nacrtno-geometrijske interpretacije planimetrijskih preslikavanja, zasnovao je (Dovniković L., 1990) u radu " Uniform mechanisms for rational plane curves". Pokazano je da poznato Maklorenovo-ovo (Colin Maclaurin, 1698.-1746.) preslikavanje zapravo predstavlja proizvod dva projiciranja pravolinijskim zracima sa ravni na posebno odabranu hiperboličku kvadriku i obrnuto, i to - prvo iz ravni formalnog preslikavanja na kvadriku iz jednog centra projiciranja na kvadrici, a zatim nazad na istu ravan, iz pridruženog centra projiciranja sa iste kvadrike. Jedna druga biracionalna kvadratna transformacija ravnih krivih sa kružnom apsolutom uvođenjem jednogranog rotacionog hiperboloida kao površi, analitički je obrađena u doktorskoj disertaciji "Obrada ravnih krivih zasnovana na prostornoj interpretaciji biracionalne kvadratne transformacije" (Štulić R., 1997).

Prostorna restitucija kvadratnih transformacija, za razliku od čisto ravanske analitičke i konstruktivno-sintetičke obrade kvadratnih transformacija, daje jasniji prikaz preslikavanja i najjednostavniju projektivno-geometrijsku obradu, a analitički postupak projiciranja se svodi na parametarske jednačine" (Stavrić M.,2002).

3.2.1 Opšta inverzija

Inverzija u euklidskoj geometriji predstavlja ravansku kvadratnu transformaciju. Uopšteno, inverzija se zasniva na polaritetu konike. Specijalan slučaj je centralna inverzija gde je pol inverzije centar kruga u odnosu na koji se vrši preslikavanje. Postoje tri tipa centralne inverzije:

1. Hiperbolička
2. Parabolička
3. Eliptička

Kada se ravanskom inverzijom preslikaju tačke, svaka tačka ravni ima samo jednu sliku, međutim pol inverzije se u svim pravcima preslikava u različitu tačku beskonačno daleke prave euklidske ravni. Odnosno, za svaki zrak preslikavanja drugačiji od prethodnog, pol inverzije ima drugu sliku. Time je narušena bijektivnost preslikavanja.

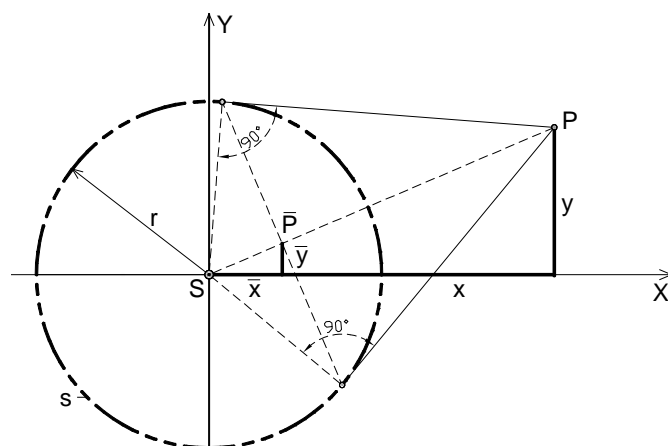
U projektivno-euklidskom prostoru, gde se centar sfere inverzije preslikava u različitim pravcima u različite tačke fiktivne beskonačno daleke ravni, takođe je narušena bijektivnost preslikavanja.

3.2.2 Inverzija kao harmonijska simetrija

Preslikavanje tačaka centralnom inverzijom je veoma jednostavno. Zasnovano je na polaritetu tačaka P i \bar{P} u odnosu na krug inverzije s . Inverzija je kvadratna transformacija recipročnih radijus vektora inverzije. Koordinate preslikanih tačaka \bar{x} i \bar{y} dobijaju se pomoću sledećih jednačina:

$$\bar{x} = \frac{r^2 x}{x^2 + y^2} \quad \bar{y} = \frac{r^2 y}{x^2 + y^2} \cdot$$

Sl. 4 ilustruje jednačine.



Sl. 4 Recipročni radijus vektori inverzije

3.2.3 Inverzija na ravni kao inverzija na sferi

Na Sl. 5 prikazana je inverzna slika nekoliko krugova i pravih u ravni, a na Sl. 6 ta ista slika preslikana je na sferu obrnutom stereografskom projekcijom. Analizom te preslikane slike došlo se do zaključka da stereografski preslikana slika predstavlja inverznu sliku zadatih geometrijskih oblika u odnosu na pol - I i sferu inverzije s_I .

U ravanskoj slici pomoću inverzije za krug s i pol inverzije S , krug a kroz tačku A se preslikava u sebi koncentričan krug \bar{a} kroz pridruženu tačku \bar{A} - Sl. 5. Prava kroz C se preslikava u krug kroz tačku \bar{C} i S . Prave g_1 i g_2 se kao zraci inverzije preslikavaju same u sebe. Takođe se i svi krugovi eliptičkog pramena krugova kroz tačke A i \bar{A} , kao ravnopravni zraci inverzije, preslikavaju sami u sebe. Ovi su krugovi upravni na apsolutu s . Prethodna analiza odnosi se na euklidsku ravni.

Pridruženi par tačaka A i \bar{A} obrazuje sa parom presečnih tačaka bilo kojeg zraka inverzije sa apsolutom (s) harmonijsku četvorku tačaka, jer je s harmonijska simetrala svih zrakova inverzije.

Kada se krug a smanjuje, njegov harmonijski ekvivalent krug \bar{a} se povećava. Kada se krug a sažme u tačku S u projektivnoj geometriji kažemo da se on preslikao u niz tačaka na beskonačno dalekoj pravoj projektivne ravni.

Međutim kada ravnu sliku stereografski projektujemo na sferu (bez obzira na veličinu sfere), apsoluta s se projektuje u krug s , početni krug označen plavom bojom (a) i preslikani krug označen crvenom bojom (\bar{a}) u odgovarajuće krugove na sferi.

Slika iz ravni α postupkom obrnutim od stereografskog projektovanja, preslikava se na sferu β , sa centrom projektovanja u tački \bar{S} , a zatim se centar projektovanja pomera u tačku I , odakle se krug a projektuje u krug \bar{a} , a tačka S u \bar{S} . Dakle tačka S preslikava se u antipodnu tačku \bar{S} zrakom $I-S-\bar{S}$ koji spaja ove tačke, kao i svim "pravolinijskim" zracima koji prolaze kroz sekantu sfere kroz pol S i antipod \bar{S} .

Krug \bar{a} se neće više beskonačno povećavati kada se krug a smanjuje. On se povećava samo do velikog kruga sfere, a posle toga se smanjuje dok se ne sažme u tačku \bar{S} . Ortogonalne prave g_1 i g_2 , koje su u ravni α , preslikavaju u "prave"-velike krugove sfere. Dok se prava c kroz tačku C preslikava takođe u "pravu" koja prolazi kroz antipod. I ovde se jasno vidi da "prave" ne moraju biti veliki krugovi sfere tj. geodezici. Da bi neki posmatrač krug na sferi video kao "pravu", taj krug mora prolaziti kroz antipod. Pošto je u projektivnoj ravni prava c paralelna sa pravom g_2 na sferi te dve prave će imati dodir u antipodu. Dakle, dve "prave" koje su paralelne, nisu ekvidistante. To je suština relativističke geometrije. Da li ćemo neki krug videti kao pravu zavisi isključivo od položaja posmatrača i od toga da li ta prava prolazi kroz njegov antipod. Iz ovog primera se vidi i pravilo da se dve "prave" seku u dve tačke. "Prava" c se seče sa geodezikom g_1 u tački C i naravno u antipodu \bar{S} . Dakle, relativistička geometrija bi se mogla nazvati euklidsko-neeuklidskom. Bitno je naglasiti da će se preslikavanja u ovom radu vršiti u projektivnoj ravni, ali će se dobijene slike tumačiti relativističkom geometrijom.

Pri obrnutom stereografskom preslikavanju sa ravni na sferu, krug i_2 se dvostruko prekriva u duž $A\bar{A}$. Naravno, mi ga tako vidimo kao duž u frontalnoj projekciji jer je u zračnom položaju. Krug i_3 se u ovoj projekciji vidi kao elipsa. Krugovi eliptičkog pramena kroz A i \bar{A} , sada kao zraci inverzije na površini sfere β , tačku A preslikavaju u \bar{A} i obrnuto. Eliptički pramen krugova kroz A i \bar{A} se može tumačiti kao presek lopte sa pramenom ravni kroz sekantu sfere, tako da se tačke A i \bar{A} preslikavaju ovim zamišljenim zrakom kroz A i \bar{A} . Ovaj zrak i prolazi kroz vrh I rotacionog konusa koji dodiruje sferu po apsoluti. Tačke apsolute se preslikavaju same u sebe, a ostale tačke se preslikavaju u tačke na suprotnoj strani u odnosu na apsolutu.

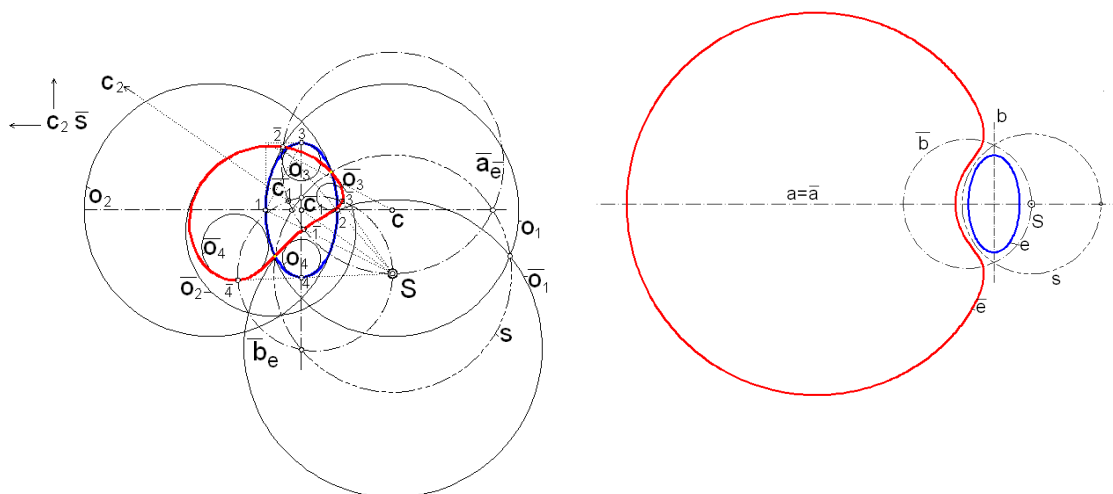
Pol inverzije je uvek iznad "ravni" (sfere β) i njegovim zracima se tačke "ravni" unutar apsolute preslikavaju u tačke "ravni" van apsolute. Pol I nikada ne može da

stigne na "ravan" ma koliko ona bila "ravna". Prema principu kontinuiteta sfera će ostati sfera ma koliko je mi povećavali. Pošto nema ravni, sledi da nema ni ravanske inverzije. Ravanska inverzija može samo da bude preslikavanje ravni u samu sebe i zbog toga sve što je rečeno za inverziju na običnoj sferi, važi i za sferu nesagledivih dimenzija, ma koliko ona bila velika (Dovniković L.,1990).

3.3 Krive 4. i 3. reda dobijene harmonijskom simetrijom

3.3.1 Krive eliptičkog tipa

Elipsa je kao "ravna" kriva u stvari kriva na relativno velikoj sferi i dobijena je presekom te sfere i eliptičkog cilindra koji tu sferu dodiruje u antipodu posmatrača \bar{S} . Ako se posmatrač pomeri iz tačke S u neku drugu tačku na sferi, on više neće tu krivu videti kao elipsu, već kao krivu 4. ili 3. reda (Sl. 7 – levo). Na toj slici dat je primer uzajamne simetrije elipse i krive 4. reda za centar inverzije S i krug inverzije s . Preslikana kriva ima jednu pravolinijsku i jednu kružnu osu harmonijske simetrije, dok je na Sl. 7 – desno prikazana inverzijom dobijena kriva koja ima jednu pravolinijsku i jednu kružnu osu harmonijske simetrije.



Sl. 7 Elipsa i njen harmonijski ekvivalent za razne položaje posmatrača S

U zavisnosti od položaja posmatrača, odnosno za različite položaje centra inverzije S , dobijaju se razne krive 4. i 3. reda. Krive eliptičkog tipa, dobijene transformacijom elipse, su prikazane na sledećim slikama :

Sl. 22 Uzajamna harmonijska simetrija elipse iz EE pramena konika i krive 4. reda sa dve kružne ose harmonijske simetrije

Sl. 26 Uzajamna harmonijska simetrija elipse i jajaste krive 4. reda

Sl. 31 Uzajamna harmonijska simetrija elipse i krive 3. reda

Sl. 36- Elipsa iz HH pramena konika i njen harmonijski ekvivalent kriva 4. reda

Sl. 40 Za izabrani centar inverzije S elipsa iz HH pramena konika i njen harmonijski ekvivalent kriva 4. reda

Sl. 44 Elipsa iz HH pramena konika i njen harmonijski ekvivalent kriva 3. reda

Sl. 50 Preslikana elipsa iz HE pramena konika u krivu 4. reda oblika jajeta za izabrani centar harmonijske inverzije S

Sl. 54 Preslikana elipsa iz HE pramena konika u krivu 3. reda za izabrani centar harmonijske inverzije S u tački elipse

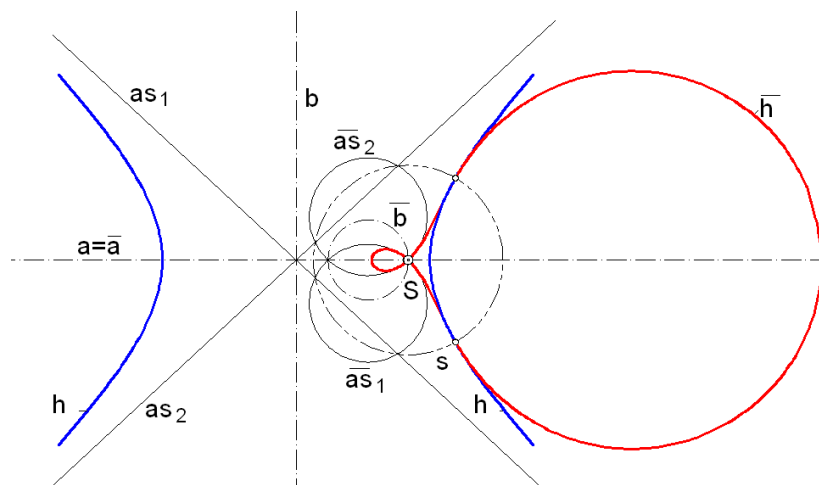
Sl. 59 Uzajamna simetrija elipse i krive trećeg reda

Sl. 62 Asimetrična kriva 4. reda.

3.3.2 Krive hiperboličkog tipa

Presečna kriva sfere i eliptičkog cilindra koji sferu dodiruje i istovremeno seče na obe strane od dodirne tačke koja je istovremeno antipodna tačka - \bar{S} , stereografski se projicira, iz te dvostruke tačke na tangencijalnu "ravan" u tački S posmatrača, u hiperbolu. Menjanjem mesta posmatrača na sferi, odnosno menjanjem njemu antipodnog centra stereografskog projiciranja, ta ista prostorna kriva projiciraće se u najrazličitije oblike uzajamno harmonijski simetričnih "ravnih" krivih. Svaka od ovih krivih može se, dakle, dobiti iz bilo koje druge, inverznim preslikavanjem u "ravni".

Na Sl. 8 centar harmonijske simetrije nalazi se na realnoj osi hiperbole i dobijena kriva 4. reda ima jednu kružnu i jednu pravolinijsku osu harmonijske simetrije.



Sl. 8 Uzajamna harmonijska simetrija hiperbole i krive 4. reda za centar inverzije dat na realnoj osi hiperbole

Krive hiperboličkog tipa, dobijene transformacijom hiperbole, su prikazane na sledećim slikama :

Sl. 21 Uzajamna harmonijska simetrija hiperbole iz EE pramena konika i krive 3. reda sa dve kružne ose harmonijske simetrije

Sl. 25 Uzajamna harmonijska simetrija pravougla hiperbole i Bernulijeve lemniskate

Sl. 32 Uzajamna harmonijska simetrija pravougla hiperbole i strofoide

Sl. 37 Hiperbola iz HH pramena konika i njen harmonijski ekvivalent, kriva 4. reda

Sl. 41 Za izabrani centar inverzije S hiperbola iz HH pramena konika i njen harmonijski ekvivalent kriva 4. reda

Sl. 45 Uzajamna harmonijska simetrija hiperbole iz HH pramena konika i krive 3. reda sa dve kružne ose simetrije

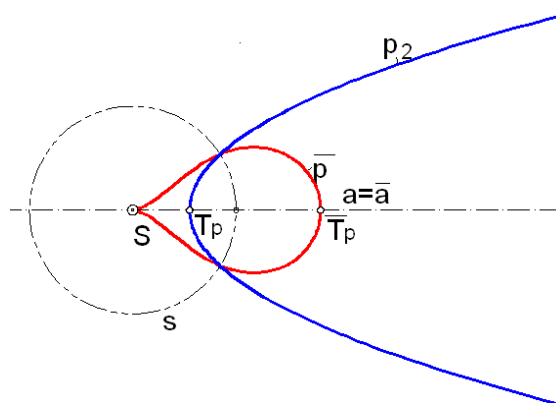
Sl. 51 Preslikana hiperbola iz HE pramena konika u krivu 4. reda za izabrani centar harmonijske inverzije S

Sl. 55 Preslikana hiperbola iz HE pramena konika u krivu 4. reda za izabrani centar harmonijske inverzije S u tački elipse.

3.3.3 Krive paraboličkog tipa

Parabola je kriva koja se može dobiti presekom eliptičkog cilindra i sfere. Taj cilindar dodiruje i seče sferu u antipodu posmatrača (Sl. 29). Kada se dve asimptote hiperbole poklope, odnosno kada se dve tangente krive u oskulatornim "ravnima" poklope u jednu dvostruku oskulatornu "ravan", samopresečna tačka krive prelazi u

šiljak prostorne krive. Ova oskulatorna "ravan" je tada jedina simetralna ravan paraboličke grupe krivih. Druga ravan simetrije (analogno ravnima simetrije kod eliptičkih i hiperboličkih krivih) je sažeta u singularnu tačku krive - šiljak, gde su sažeta i dva centra simetrije krive (nastaje singularna simetrija). Kako parabola predstavlja graničnu krivu između mnoštva elipsi i hiperbola, tako i grupa krivih sa paraboličkom tačkom - šiljkom, predstavlja graničnu grupu između mnoštva krivih sa izolovanom i samopresečnom tačkom.



Sl. 9 Centar harmonijske simetrije je na osi parabole i kriva 4. reda ima pravolinijsku osu harmonijske simetrije

Krive paraboličkog tipa, dobijene transformacijom parabole, su prikazane na sledećim slikama :

Sl. 23 Uzajamna harmonijska simetrija parabole iz EE pramena konika i krive 4. reda sa jednom osom simetrije

Sl. 27 Upoređenje dobijene jajaste krive 4. reda sa jajastom Segovom krivom

Sl. 33 Uzajamna harmonijska simetrija parabole i krive 3. reda

Sl. 38 Parabola iz HH pramena konika i njen harmonijski ekvivalent, kriva 4. reda sa šiljkom

Sl. 42 Za izabrani centar inverzije S parabola iz HH pramena konika i njen harmonijski ekvivalent kriva 4. reda

Sl. 46 Parabola iz pramena konika i njen harmonijski ekvivalent kriva 3. reda

Sl. 56 Preslikana parabola iz HE pramena konika u krivu 4. reda za izabrani centar harmonijske inverzije S u tački elipse

Sl. 60 Uzajamna simetrija parabole iz asimetričnog pramena konika i Dioklove cisoide

Sl. 63 Uzajamna simetrija parabole iz asimetričnog pramena konika i krive 4. reda.

4 Pramenovi krivih 4. i 3. reda dobijeni kao harmonijski ekvivalenti pramena konika (nastalih projekcijom ravnog preseka konusa kroz sekantu, tangentu i pasantu konusa)

4.1 Osnovni tipovi pramenova konika

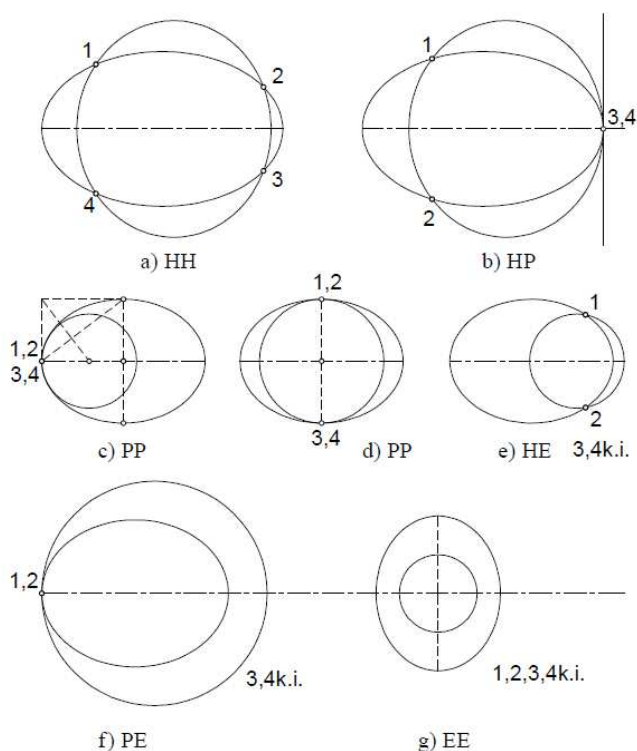
U ovom poglavlju harmonijskom simetrijom (inverzijom) preslikani su pramenovi konika u pramenove krivih trećeg i četvrtog reda. Analizirani su ravni pramenovi konika koji su projekcija ravnih preseka konusa. Pramenjača presečnog pramena ravni je pasanta, sekanta ili je tangenta konusa.

Pramen konika određen je sa četiri tačke koje se nazivaju temeljnim tačkama pramena konika. Biranjem proizvoljne pete tačke u ravni određena je jedna konika toga pramena. Dakle pramen konika pokriva sve tačke svoje ravni. Od četiri temeljne tačke pramena dve po dve mogu biti realne ili konjugovano imaginarne. U ovom poglavlju razmotreni su pramenovi konika koji se dobijaju ravnim sečenjem konusa, koji je postavljen tako da mu je jedna konturna izvodnica (u frontalnoj ravni simetrije) u projicirajućem položaju, a sistem njegovih kružnih preseka postavljen je paralelno horizontalnoj ravni. Pramenjača pramena ravni u opštem slučaju može biti prava u proizvoljnom položaju. Radi pojednostavljenja u proučavanju pramenova konika (što ne remeti opštost rasuđivanja) usvaja se pramenjača upravna na frontalnicu i usvaja se frontalno simetrična kvadratika. Zbog toga se u presečnim ravnima i u prvoj projekciji dobijaju pramenovi koaksijalnih konika.

Sl. 10 prikazuje različite pramenove koaksijalnih konika u zavisnosti od vrste i rasporeda četiri temeljne tačke pramena, pa su prema tome dati i nazivi pramenova:

1. Hiperboličko-hiperbolički (HH) - konike se seku u četiri realne i različite tačke (Sl. 10-a),

2. Hiperboličko-parabolički (HP) - konike se seku u dve realne i različite tačke i dve realne i poklopljene tačke (Sl. 10–b), paraboličko-hiperbolički (PH) je slika u ogledalu-simetrična slika HP pramena u odnosu na vertikalnu osu kroz poklopljene temeljne tačke 3=4.
3. Paraboličko-parabolički (PP) - konike se seku u četiri tačke realne i poklopljene (Sl. 10–c), ili (PP) u dve po dve realne i poklopljene tačke(Sl. 10–d),
4. Hiperboličko-eliptički (HE) - konike se seku u dve realne i različite i dve konjugovano imaginarne tačke (Sl. 10–e), dok je eliptičko-hiperbolički (EH) pramen simetrična slika HE pramena u odnosu na vertikalnu osu kroz realne i razdvojene temeljne tačke 1 i 2.
5. Paraboličko-eliptički (PE) - konike se seku u dve realne i poklopljene i dve konjugovano imaginarne tačke (Sl. 10–f), njemu simetričan pramen je eliptičko parabolički (EP) u odnosu na vertikalnu osu kroz realne i poklopljene temeljne tačke 1=2.
6. Eliptičko-eliptički EE - konike se "seku" u dva para konjugovano imaginarnih tačaka (Sl. 10–g).



Sl. 10 Pramenovi konika

4.2 Harmonijski ekvivalenti dobijenih pramenova konika

Kos konus sa kružnom osnovom (Sl. 11) postavljen je tako da mu je jedna izvodnica u zračnom položaju (V) u odnosu na prvu ortogonalnu projekciju. Očigledno je da sve konike prostornog pramena moraju seći ovu izvodnicu, tj. u prvoj ortogonalnoj projekciji će se videti kao pramen koji prividno prolazi vrhom konusa. Dakle dve tačke pramena konika biće realne i poklopljene, a druge dve tačke zavise od položaja pramenjače tj. da li je ona tangenta (Sl. 11), pasanta (Sl. 12) ili sekanta (Sl. 13), konusa. U ovom poglavlju preslikavani su paraboličko-parabolički, paraboličko-eliptički i paraboličko-hiperbolički pramen konika. Pokazano je da je harmonijska simetrija potpuno bijektivna transformacija pa se pramen krivih trećeg i četvrtog reda seče u istom broju tačaka kao i pramen konika (Đukanović (Vasiljević) G., 2004).

4.2.1 Preslikavanje paraboličko-paraboličkog pramena konika u pramen krivih četvrtog i trećeg reda

Paraboličko-parabolički pramen konika koji je dobijen ortogonalnom projekcijom pramena konika na konusu i njegovim preslikavanjem nastao pramen krivih 3. i 4. reda prikazan je na Sl. 11. Pramenjača (t) pramena ravni, dodiruje konus. Pol inverzije (S) izabran je u zajedničkom temenu svih konika. Pošto kroz pol svaka konika prolazi samo jedanput, u klasičnoj geometriji red preslikanih krivih smanjuje se za jedan. Dakle, pramen konika je harmonijskom inverzijom preslikan u pramen krivih 3. reda.

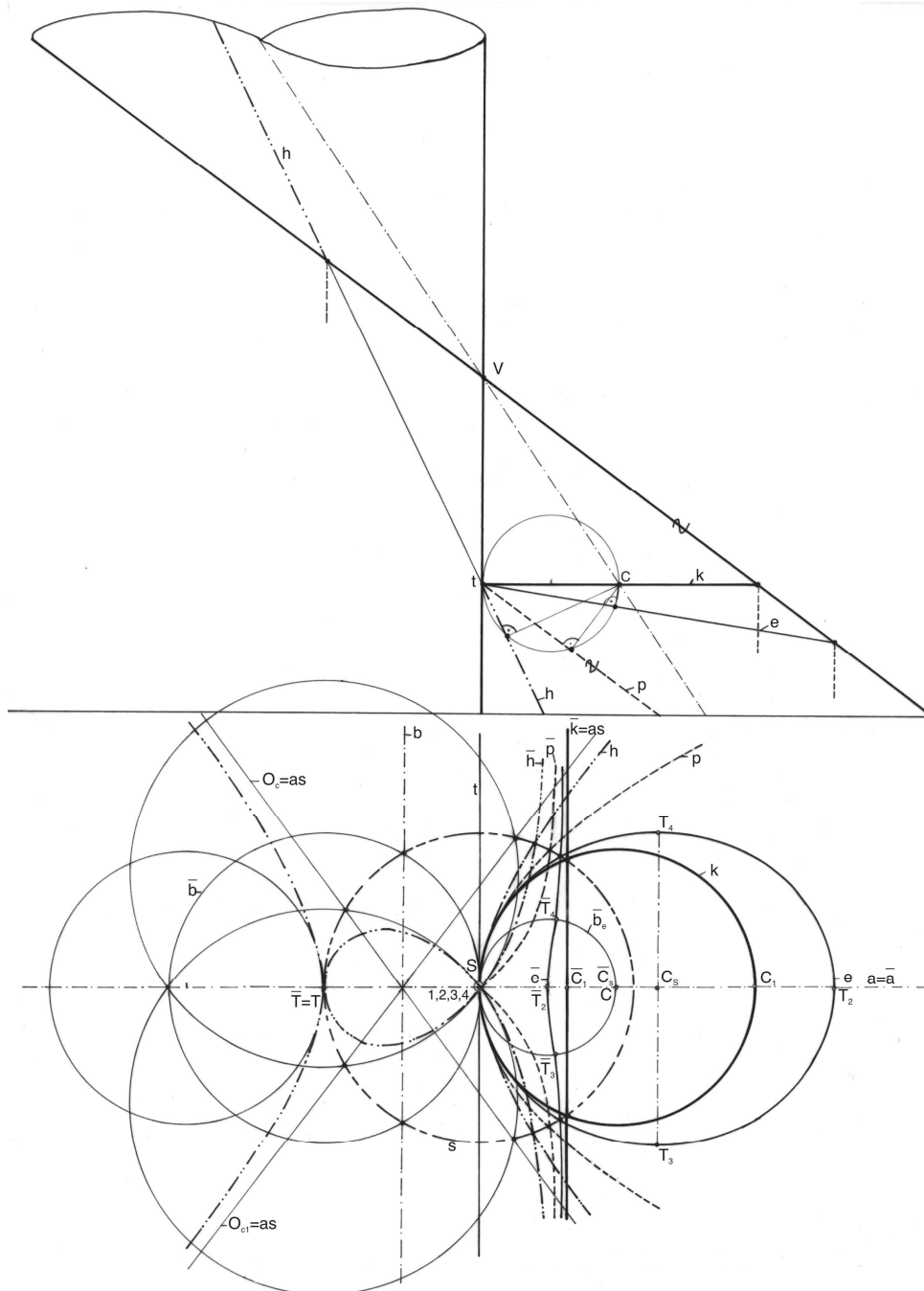
Kod paraboličko-paraboličkog pramena konika sve četiri temeljne tačke su konsektivne pa je to slučaj hiperoskulacije (sve konike u prvoj projekciji imaju isti centar krivine u temenoj tački). Centar krivine normalnog preseka konusa kroz tangentu (t) je tačka C . Prema teoremi Menijea (Jean Baptiste Meusnier, 1754.-1793):

Centar krivine bilo kojeg kosog preseka površi - konusa, kroz tangentu (t) konusa, ortogonalna je projekcija centra krivine normalnog preseka konusa, kroz istu tangentu (t), na ravan kosog preseka. Zbog pravog ugla, centri krivine svih preseka kroz istu tangentu leže na Talesovoj kružnici.

Harmonijskom inverzijom krug (k) preslikan je u "pravu" (\bar{k}) koja u stvari na velikoj sferi predstavlja krug koji prolazi kroz antipod. Pošto se centri krivina u zajedničkom temenu svih konika poklapaju (isti je centar C) harmonijski ekvivalent

pramena konika, to jest pramen krivih trećeg reda, imaće zajedničku asimptotu (\bar{k}) (sve krive imaće hiperoskulaciju u antipodu).

Pri preslikavanju elipse (e) temena tačka T_1 se preslika u antipodu, a tačke T_2, T_3, T_4 u harmonijski ekvivalentne tačke \bar{T}_2, \bar{T}_3 i \bar{T}_4 .



Sl. 11 Harmonijski ekvivalent PP pramena konika

Pravolinijske ose simetrije - ose a i b_e se preslikavaju u jednu "pravolinijsku" osu simetrije (\bar{a}) i jednu kružnu osu simetrije (\bar{b}_e).

U klasičnoj geometriji elipsa ima jedan centar simetrije C_S , dok u relativističkoj ima dva: preslikani C_S i drugi u antipodu. Pravolinijski zraci se preslikavaju u kružne zrake harmonijske simetrije. Izolovana dvostruka tačka i jedne (e) i druge krive (\bar{e}), pošto je imaju obe krive, u odnosu na koju kriva mora da bude i osno i centralno simetrična, a to znači da mora da leži na obe ose simetrije, to jest u jednom od centara krive (za elipsu u antipodnom centru) $C_2=\bar{S}$, a za krivu trećeg reda u $C_2=S$.

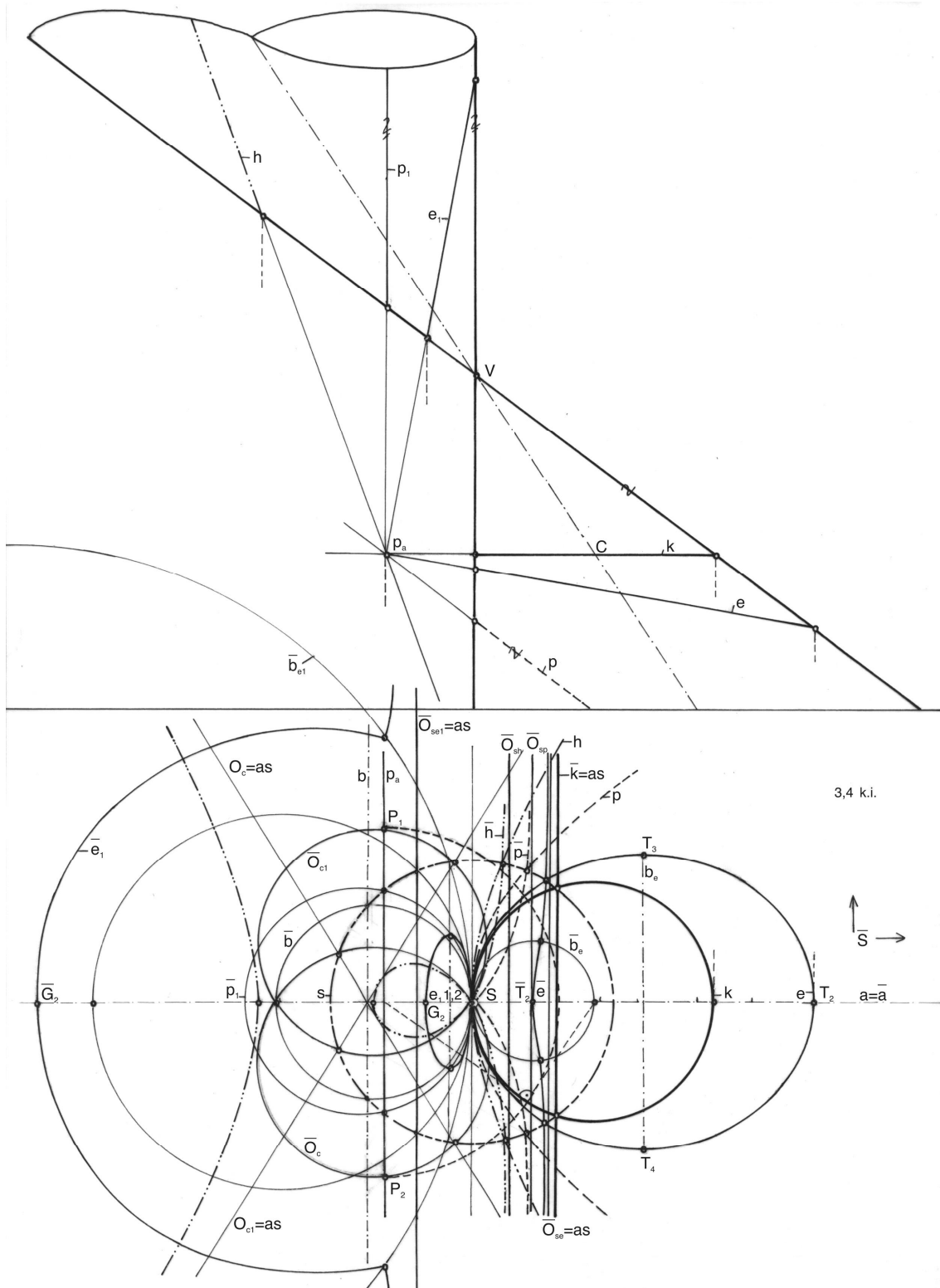
Pošto je pol inverzije u temenu hiperbole, realna osa hiperbole će kao zrak inverzije da se preslika u samu sebe, tako da dobijena kriva trećeg reda ima jednu "pravolinijsku" i jednu kružnu osu simetrije (\bar{b}) preko koje se invertuje sama u sebe. Jedna grana hiperbole preslikava se u petlju, a druga u ostatak krive 3. reda (strofoide). Tačke S i \bar{S} povezane su dvema granama krive. Pol inverzije je takođe i u temenu parabole. Dobijena harmonijski simetrična kriva je Dioklova cisoida. Dvostruka tačka parabole se nalazi u antipodnoj tački posmatrača, dok se kod invertovane krive koja je 3. reda, preslika u šiljak prve vrste u tački S . Zajednička oskulatorna kružnica u temenoj tački se preslikava u zajedničku asimptotu svih krivih 3. reda ($\bar{k}=as$).

4.2.2 Paraboličko-eliptički pramen konika

Paraboličko-eliptički pramen konika sa dve poklopljene realne i dve konjugovano imaginarnе tačke prikazan je na Sl. 12. Centar harmonijske simetrije (inverzije) izabran je u zajedničkom temenu (S) svih konika pramena. Harmonijskom simetrijom je dobijen pramen krivih 3. reda koje se dodiruju u antipodu.

Preslikan je krug (k) u asimptotu (\bar{k} svih inverzijom dobijenih krivih 3. reda iz pramena), elipsa e_1 u krivu (\bar{e}_1), parabola u Dioklovu cisoidu i hiperbola u strofoidu. Tačke na apsoluti ostaju na svom mestu pa je najlakše pratiti preslikavanje konike u odgovarajuću krivu 3. reda pomoću njihovog "ukrštanja" na apsoluti.

Parabola p_1 (Sl. 12-gore) se projicira u pravu p_a koja zajedno sa tangentom (koja je paralelna sa p_1) u tačkama 1,2 predstavlja raspadnutu koniku pramena. Prava p_a se preslikava u krug, a zajednička tangenta se kao zrak inverzije preslikava u sebe. Dakle tangenta u tačkama 1,2 i krug (\bar{p}_1) predstavljaju raspadnutu krivu 3. reda.

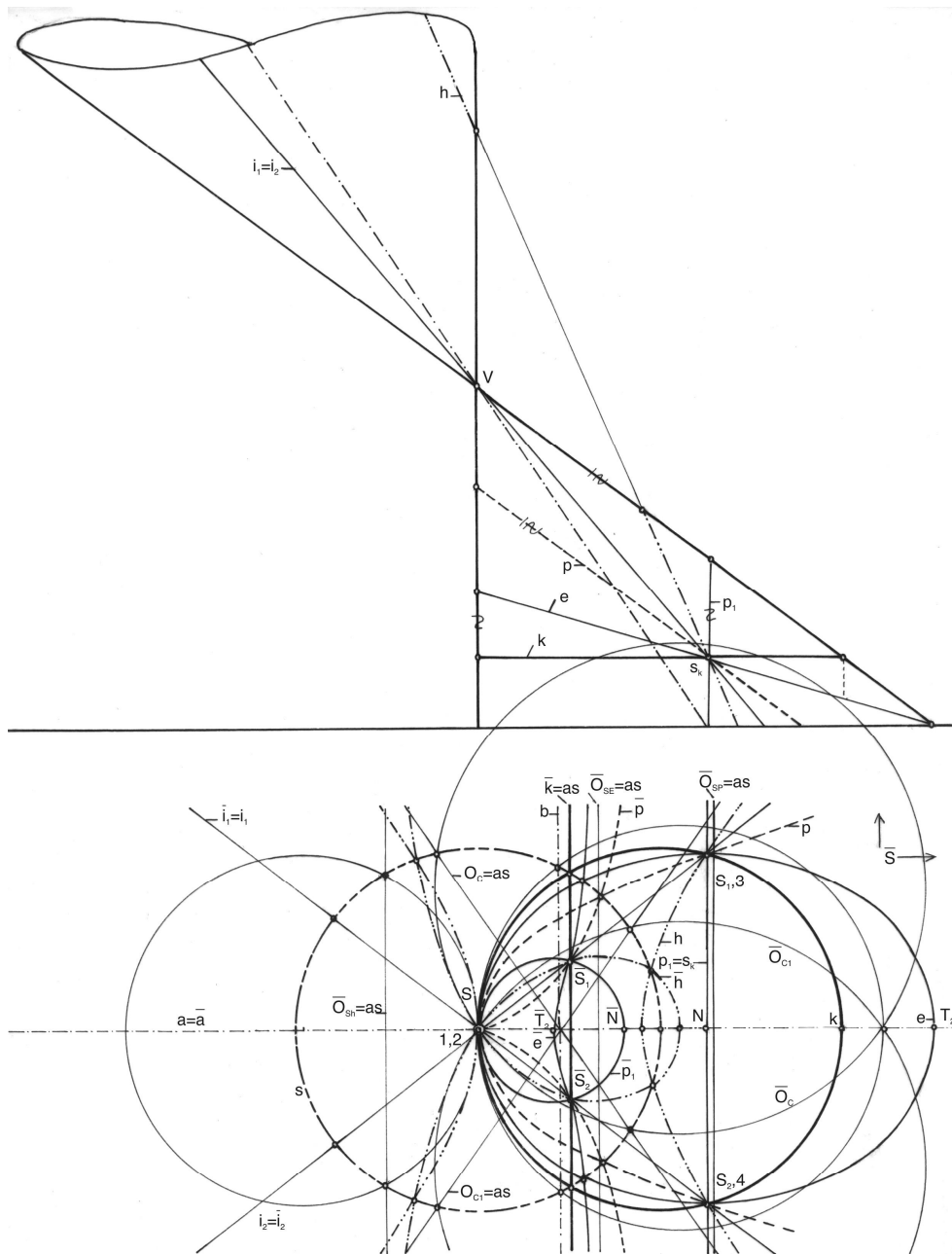


Sl. 12 Pramen krivih 3. reda koji je harmonijski ekvivalent PE pramena konika

Poznatim postupkom određene su tačke P_1 i P_2 koje su realni predstavnici konjugovano imaginarnih tačaka u kojima prava p prodire konus.

4.2.3 Paraboličko-hiperbolički pramen konika

Kada je pramenjača p sekanta konusa i prodire konus u tačkama S_1 i S_2 dobija se paraboličko-hiperbolički pramen konika što prikazuje Sl. 13. Pramen konika ima četiri realne temeljne tačke od kojih su dve poklopljene u zajedničkom temenu konika. Pramen krivih trećeg reda ima dve realne i razdvojene tačke (\bar{S}_1 i \bar{S}_2) i dve zajedničke i poklopljene antipodu.



Sl. 13 Pramen krivih 3. reda koji je harmonijski ekvivalent PH pramena konika

Elipsa je izabrana tako da se temene tačke T_3 i T_4 poklapaju sa S_1 i S_2 . Nacrtna je i krug \bar{p}_1 kao deo raspadnute krive 3. reda. Već objašnjenim postupkom, koji prikazuje Sl. 11, preslikani su krug, elipsa, parabola i hiperbola u odgovarajuće krive 3. reda.

4.2.4 Pramen krivih 4. reda koji se dobija preslikavanjem PE pramena konika

Kada se za preslikavanje pramena konika sa Sl. 12, pol harmonijske inverzije pomeri po zajedničkoj simetrali pramena konika dobija se pramen krivih četvrtog reda koji je prikazan na Sl. 14. Zajedničko teme pramena konika (1,2) preslika se u zajedničko teme krivih 4. reda. Dve konjugovano imaginarne tačke pramena takođe se preslikaju u dve konjugovano imaginarne tačke pramena krivih 4. reda. Raspadnuta konika pramena koju čine paralelne prave s_a i m preslikava se u dva kruga.

Centar inverzije S izabran je u centru C kruga (k) tako da se on preslika u koncentričan krug. Izabrane su dve elipse (Sl. 14 gore, e i e_1) za preslikavanje; one se preslikavaju u krive četvrtog reda koje imaju izolovanu dvostruku tačku u S . Elipsa e se sa preslikanom elipsom ukršta na apsoluti, dok se elipsa e_1 dodiruje sa preslikanom krivom. Parabola se preslikava u krivu četvrtog reda sa šiljkom u tački S jer se šiljak iz tačke \bar{S} preslikao u tačku S . Hiperbola se preslikava u krivu četvrtog reda sa samopresečnom tačkom u S . Naravno, i ovde se tačka iz antipoda "vratila iz beskonačnosti", tako da sada možemo da zaključimo kakva je priroda tačke hiperbole koja je u antipodu kao i kod preslikavanja elipse i parabole. Hiperbola ima u antipodu samopresečnu tačku, elipsa ima izolovanu dvostruku tačku, dok parabola, kao granica između mnoštva hiperbola i elipsi, ima šiljak u antipodu.

5 Transformacija pramenova krugova u pramenove konika, a ovih u pramenove krivih 4. i 3. reda

5.1 Transformacija eliptičkog pramena krugova

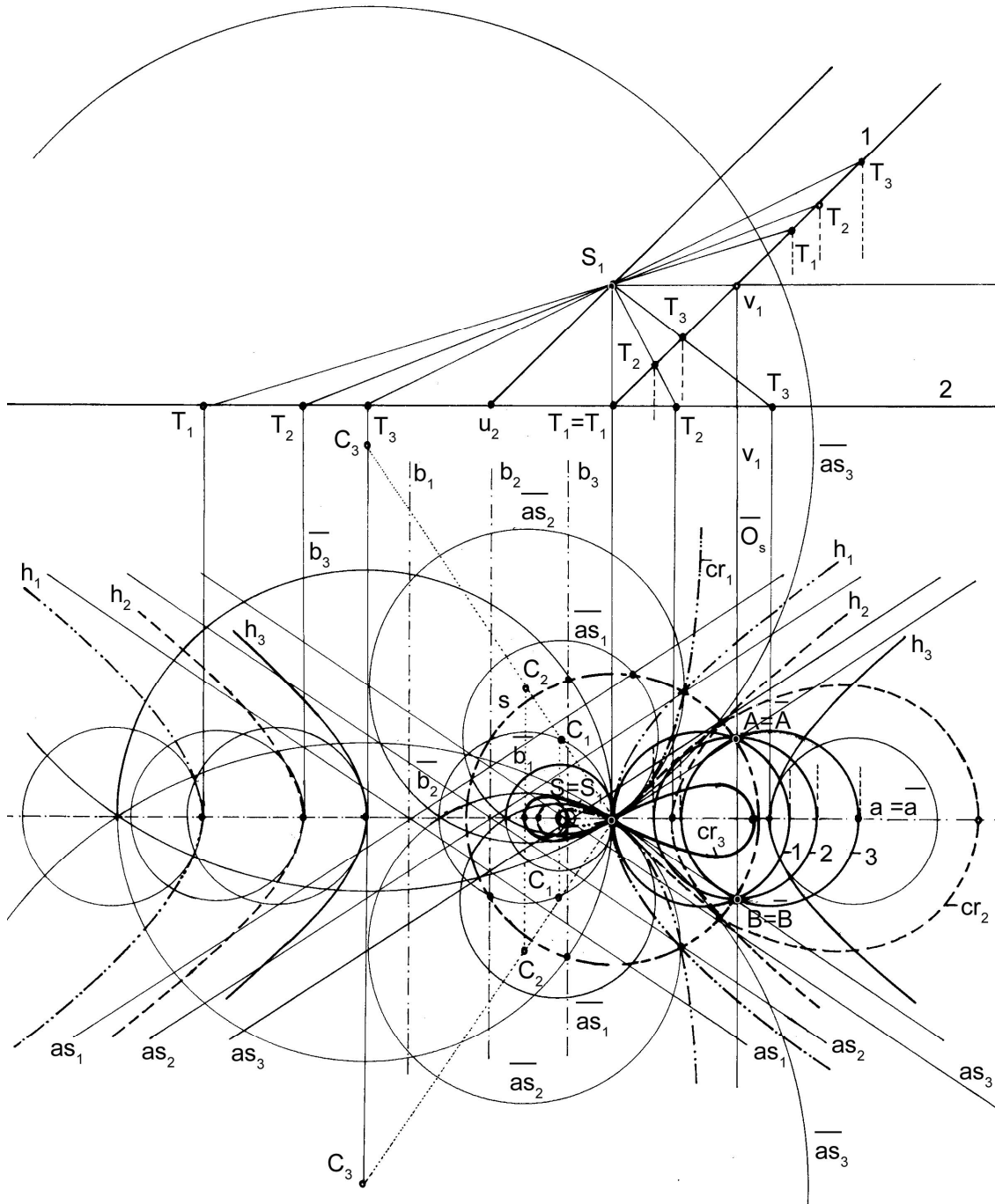
U ovom poglavlju eliptički pramenovi krugova preslikavaju se homologijom (perspektivnom kolineacijom) u odgovarajuće pramenove konika, pa se ovi pramenovi konika harmonijskom inverzijom (simetrijom) preslikavaju u pramenove krivih trećeg i četvrtog reda (pri preslikavanju obavezno se preslikaju i singularne konike raspadnute u odgovarajuće parove pravih).

Eliptički pramen krugova (na ravni 1) je perspektivnom kolineacijom za pol S_1 preslikan u pramen hiperbola (na ravni 2), za slučaj da svi krugovi iz pramena seku nedoglednicu. U drugom slučaju perspektivnom kolineacijom za pol S_1 preslikana su tri kruga od kojih jedan seče nedoglednicu (preslikava se u hiperbolu), drugi je dodiruje (preslikava se u parabolu), a treći ne seče nedoglednicu realno (preslikava se u elipsu) Metodama sintetičke i analitičke geometrije, korišćenjem recipročnih radijus vektora inverzije, perspektivnom kolineacijom dobijeni pramen konika je preslikavan u pramen krivih 4. i 3. reda, ali su stari načini preslikavanja tumačeni principima nove relativističke geometrije, uključujući antipodnu tačku posmatrača. (Đukanović (Vasiljević)G. ,2006).

5.1.1 Paraboličko-parabolički pramen hiperbola i njegov harmonijski ekvivalent

Eliptički pramen krugova (to su elipse na ravni (1) koje se u prvoj projekciji sagledavaju kao krugovi) koji se projicira u (2) eliptički pramen hiperbola sa dva pramena paralelnih asimptota prikazan je na Sl. 15. Preslikana su tri kruga, koji su označeni brojevima 1, 2 i 3, u hiperbole koje su označene sa h_1 , h_2 i h_3 . Nedoglednica v_1 realno seče sve krugove pramena pa se tako homologijom svi krugovi preslikaju u hiperbole. Inverzijom se dva pramena paralelnih asimptota preslikaju u dva parabolička

pramena oskulatornih krugova, a pramen hiperbola se preslika u pramen krivih 4. i 3. reda čije se grane seku (u polu) pod istim uglom φ ali sa različitim oskulatornim krugovima u čvoru. Centar harmonijske inverzije nalazi se na realnoj osi svih hiperbola.



Sl. 15 Paraboličko-parabolički pramen hiperbola i njegov harmonijski ekvivalent

Pri inverziji hiperbole h_1 dobija se kriva trećeg reda (strofoida)- cr_1 , zato što se centar inverzije nalazi u tački hiperbole (ovde u temenju) (Dovniković L.1998).

Hiperbole h_2 i h_3 inverzijom se preslikaju u krive četvrtog reda koje imaju jednu kružnu i jednu pravolinijsku osu harmonijske simetrije.

Pramen hiperbola je paraboličko-parabolički (homotetične hiperbole) jer ima dve po dve zajedničke tačke $1=2$, i $3=4$ u beskonačnosti, odnosno četiri poklopljene tačke u antipodu. Pramen krivih 4. i 3. reda ima četiri realne i poklopljene tačke u S (dva puta prolaze krive kroz S i imaju isti ugao φ preseka dveju grana).

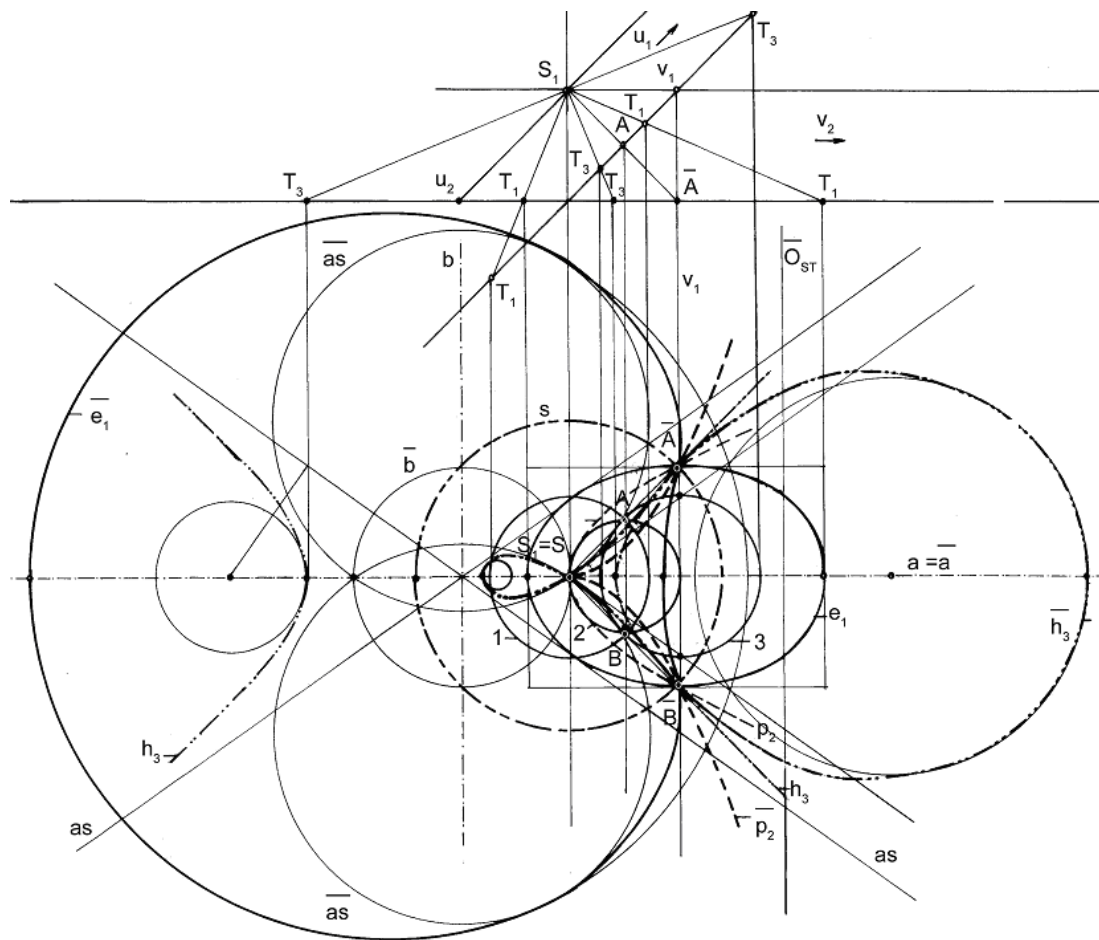
Raspadnutu koniku pramena predstavljaju dve "prave" koje se seku u S (SA i SB). One se kao zraci preslikavanja preslikaju u sebe.

Tačke na apsoluti ostaju na svom mestu pa je najlakše pratiti preslikavanje konike u odgovarajuću krivu 4. ili 3. reda pomoću njihovog "ukrštanja" na apsoluti.

5.1.2 Eliptičko-parabolički pramen konika i njegov harmonijski ekvivalent

Eliptički pramen krugova koji je postavljen prema nedoglednici v_1 tako da se homologijom preslikava u pramen konika koji sadrži elipsu (krug 1 ne seče nedoglednicu), parabolu (krug 2 dodiruje nedoglednicu), hiperbolu (krug 3 seče nedoglednicu) prikazan je na Sl. 16. Pramen krivih 4. reda i 3. reda sadrži krive eliptičkog hiperboličkog i paraboličkog tipa. Pramen konika je eliptičko-parabolički jer ima 2 realne i razdvojene tačke u (A i B) i 2 beskonačne, tj. 2 poklopljene tačke u antipodu, dok pramen krivih 4. reda i 3. reda ima 2 realne i poklopljene tačke u S i 2 realne i razdvojene u \bar{A} i \bar{B} .

Raspadnutu koniku pramena predstavljaju dve "prave" koje se seku u S ($S\bar{A}$ i $S\bar{B}$). One se kao zraci preslikavanja preslikaju u sebe.



Sl. 16 Harmonijski ekvivalent eliptičko-paraboličkog pramena konika

5.1.3 Pramen krivih 3. reda kao harmonijski ekvivalent eliptičko-paraboličkog pramena konika

Eliptički pramen krugova postavljen je u odnosu na nedoglednicu v_1 tako da se krug 1 preslika u hiperbolu, krug 2 u parabolu (dodiruje nedoglednicu) i krug 3 u elipsu i kao rezultat perspektivne kolineacije dobija se eliptičko-parabolički pramen konika. Pramen konika je eliptičko-parabolički jer ima dve realne i razdvojene i dve realne i poklopljene beskonačne tačke (2 tačke se poklapaju u antipodu).

Pol inverzije postavljen je u temeljnoj tački pramena konika ($S=A_1$) tako da se inverzijom eliptičko-paraboličkog pramena konika dobija pramen krivih trećeg reda. Jedna regularna fundamentalna tačka pramena invertuje u antipod Sl. 17. Pramen krivih 3. reda ima četiri zajedničke tačke od kojih se tri poklapaju u $S=A_1$ (dve temeljne tačke se iz antipoda inverzijom preslikaju u S) i četvrta je u B_1 .

Raspadnuta konika pramena koju predstavljaju dve prave koje se seku u S_1 (SS_1 i S_1B_1) preslikava se u raspadnutu krivu 3. reda koju čine prava SS_1 i krug (\bar{k}) u koji se preslikala prava S_1B_1 .

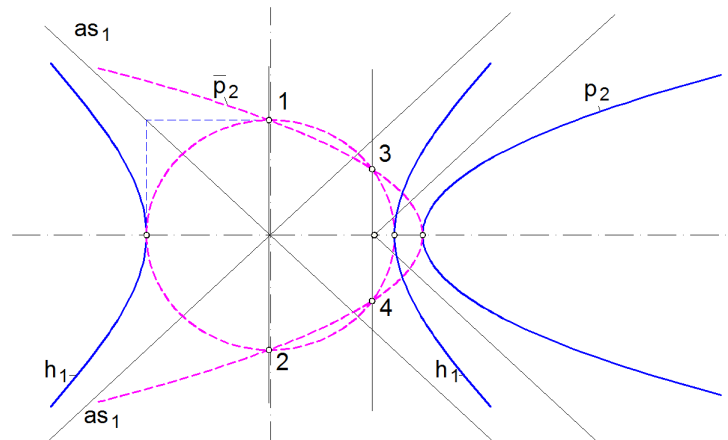
5.2 Transformacija hiperboličkog pramena krugova

U ovom poglavlju predmet istraživanja bili su harmonijski ekvivalenti pramenova konika koji se dobijaju perspektivnom kolineacijom hiperboličkih pramenova krugova. Pošto krugovi iz hiperboličkog pramena, nemaju realnih zajedničkih presečnih tačaka, tako ni konike koje su dobijene njihovim preslikavanjem neće imati realnih zajedničkih presečnih tačaka, pa će se dobiti eliptičko-eliptički pramen konika.

Hiperbolički pramen krugova (k_1, k_2 i k_3) koji je homologijom preslikan u eliptičko-eliptički pramen konika prikazan je na Sl. 18. Pramen krugova je postavljen prema nedoglednici v_1 tako da se homologijom preslikava u pramen konika koji sadrži hiperbolu (krug 1 seče nedoglednicu), parabolu (krug 2 dodiruje nedoglednicu), elipsu (krug 3 ne seče nedoglednicu). Pramen krivih 4. reda sadrži krive hiperboličkog, paraboličkog i eliptičkog tipa.

Elipsa se preslika u krivu 4. reda (\bar{e}_3) koja ima jednu kružnu i jednu pravolinijsku osu autosimetrije. Ose $a_E = a_H = a_P$, kao zraci koji prolaze kroz centar S , preslikavaju se same u sebe. Tako da i kriva hiperboličkog tipa (\bar{h}_1) ima jednu kružnu i jednu pravolinijsku osu autosimetrije. Oskulatorni krugovi hiperbole preslikavaju se u oskulatorne krugove krive 4. reda, a asimptota hiperbole u oskulatorne krugove u čvoru. Kriva 4. reda paraboličkog tipa (\bar{p}_2) ima samo pravolinijsku osu autosimetrije dok je druga osa simetrije sažeta u antipodu.

Dva zajednička para tačaka ovog EE pramena konika su konjugovano imaginarni. Realni predstavnici tih k.i. tačaka su tačke u kojima se seku komplementarne konike (Sl. 19). Nacrtna je komplementarna elipsa za dobijenu hiperbolu h_1 i komplementarna parabola za parabolu p_2 .

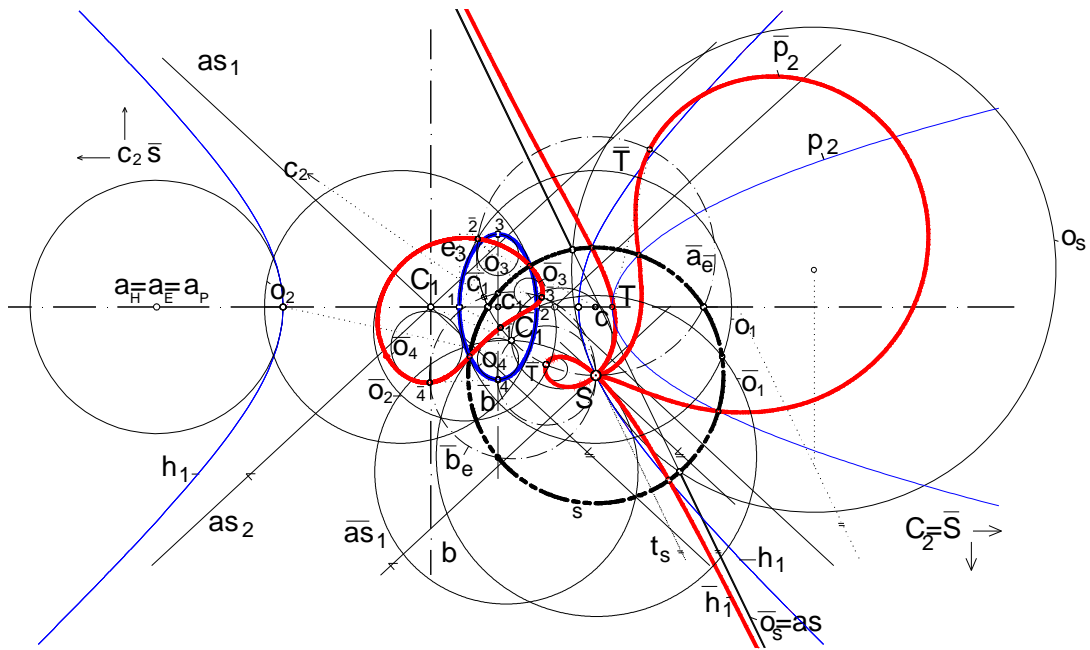


Sl. 19 Komplementarni pramen EE pramenu konika je HH pramen konika

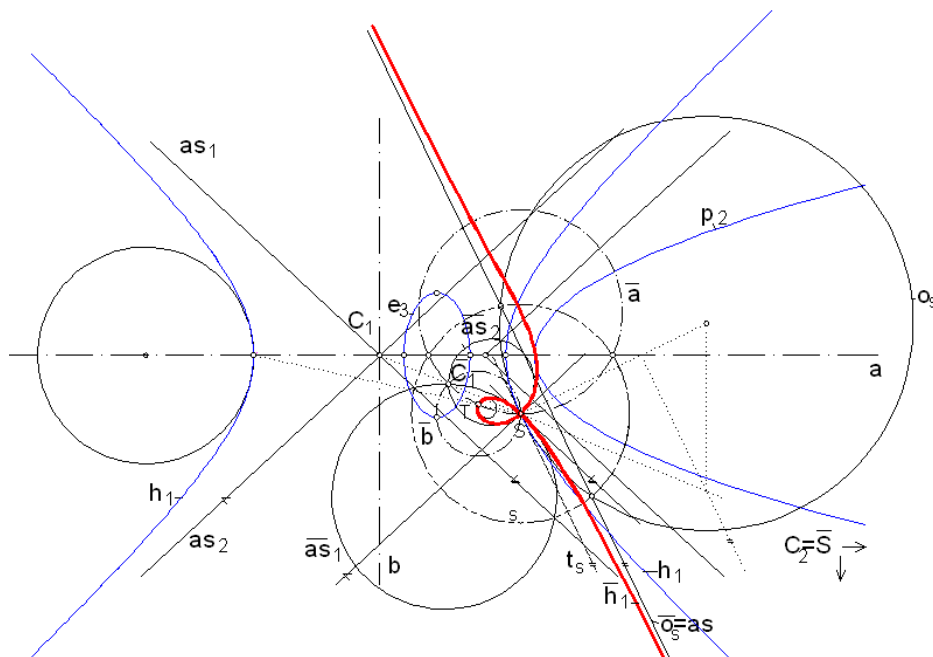
Pramen krivih 4. i 3. reda dobija se kada je centar S postavljen u tačku konike-hiperbole h_1 , što je prikazano na Sl. 20.

Hiperbola (Sl. 21) sa osama a_H i b_H preslikana je harmonijskom simetrijom (S, s) u krivu 3. reda sa kružnim osama simetrije \bar{a}_H i \bar{b}_H preko kojih se kriva invertuje u samu sebe. Pošto hiperbola ima dve ose simetrije a_H i b_H , tako i preslikana kriva 3. reda ima dve kružne ose simetrije \bar{a}_H i \bar{b}_H . Asimptote hiperbole kao oskulatorne "prave" u antipodnom čvoru hiperbole, preslikavaju se u oskulatorne krugove u čvoru krive 3. reda. Oskulatorni krug hiperbole O_s preslikava se u asimptotu krive trećeg reda. Centar ovog kruga određen je preko centra hiperbole C_1 .

Tangente u čvoru krive 3. reda paralelne su asimptotama hiperbole. Ugao samopreseka je invarijanta harmonijske simetrije hiperbole sa krivom 3. reda. Ove tangente su zraci inverzije i preslikavaju se same u sebe. Hiperbolu dodiruju i seku u čvoru \bar{S} baš kao što krivu 3. reda dodiruju i seku u čvoru S .



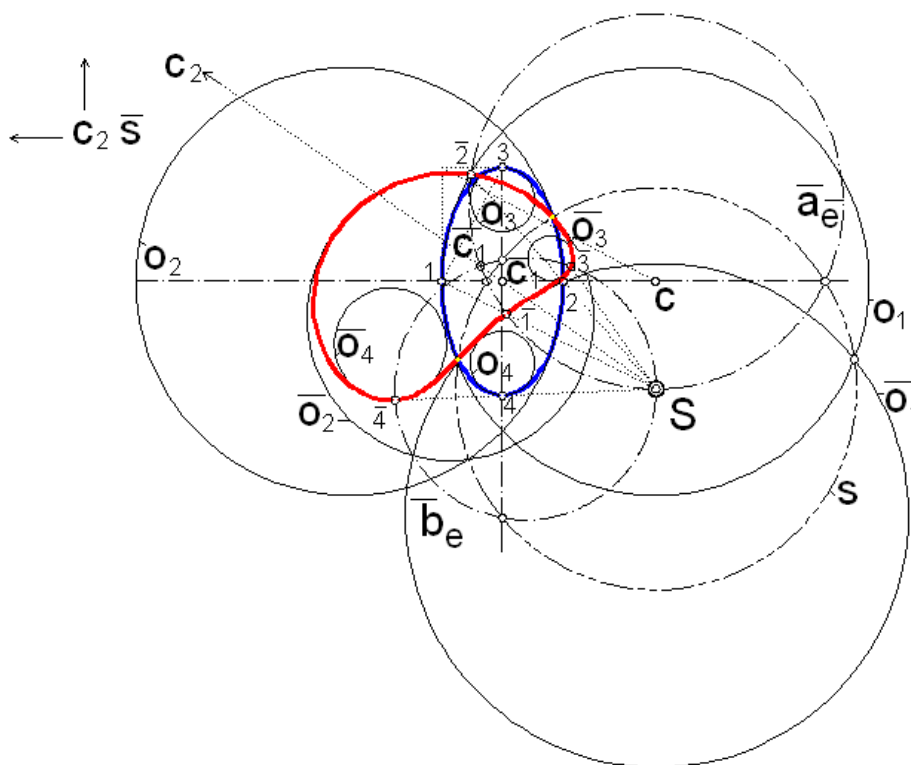
Sl. 20 EE pramen konika i njegov harmonijski ekvivalent-EE pramen krivih 4. i 3. reda



Sl. 21 Uzajamna harmonijska simetrija hiperbole iz EE pramena konika i krive 3. reda sa dve kružne ose harmonijske simetrije

Preslikavanje elipse iz eliptičko-eliptičkog pramena konika izdvojeno je iz celokupnog pramena i prikazano je na Sl. 22. Centar inverzije S je van elipse pa se harmonijskom simetrijom, dobija kriva 4. reda-pasuljasta kriva. Zbog nepravilnog

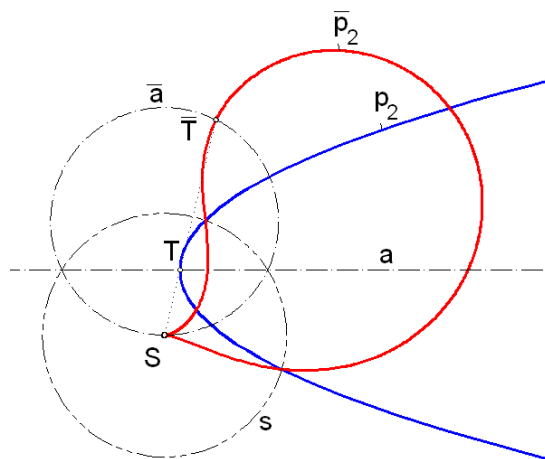
oblika krive moglo bi se pomisliti da se radi o asimetričnoj krivoj. Međutim ona je harmonijski simetrična sa zadatom elipsom kao i sa svim krivim linijama koje su toj elipsi harmonijski simetrične. Ovaj "oval"-pasuljasta kriva, ima i dve kružne ose autosimetrije (\bar{a}_E i \bar{b}_E) i takođe je centralno simetričan u odnosu na tačke \bar{C}_1 i $\bar{C}_2=S$. Tačka S je izolovana tačka krive 4.reda, a tačka \bar{S} je izolovana antipodna tačka elipse. U temenim tačkama elipse 1, 2, 3, i 4 ucrtani su oskulatorni krugovi O_1, O_2, O_3 i O_4 . Ovi krugovi su preslikani u oskulatorne krugove krive 4. reda u tačkama $\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}$ i $\bar{4}$.



Sl. 22 Uzajamna harmonijska simetrija elipse iz EE pramena konika i krive 4. reda sa dve kružne ose harmonijske simetrije

Preslikavanje samo parabole iz eliptičko-eliptičkog pramena konika prikazano je na Sl. 23. Homologijom se krug 2 koji dodiruje nedoglednicu preslikava u parabolu. Centar inverzije S je van parabole pa se harmonijskom simetrijom, dobija kriva 4. reda sa jednom singularnom tačkom, šiljkom prve vrste u tački S. Dobijena kriva ima jednu osu harmonijske simetrije \bar{a}_P . Druga osa simetrije sažeta je u tačku šiljka krive u kojoj su stisnuta i tri temena krive, što znači da kriva 4.reda ima samo jedno teme. Parabola je

granična kriva između mnoštva hiperbola i elipsi, tako je i grupa krivih 4. reda sa parabolikom tačkom granica između hiperboličkih i paraboličkih krivih 4. reda. Dok se hiperbole razlikuju prema uglu samopreseka-to je kod hiperbole ugao samopreseka asimptota, a kod elipse - to je ugao između njenih konjugovano imaginarnih asimptota (ugao preseka dijagonala tangentskog pravougaonika). Kod parabole, asimptote su poklopljene sa osom, i ugao samopreseka je jednak nuli. U antipodu, u šiljku se dve grane krive dodiruju, sve su parabole slične, odnosno sve su paraboličke krive sa šiljkom međusobno harmonijski simetrične. Iz jedne paraboličke krive sve se ostale mogu dobiti (mogu da se izvedu iz nje).



Sl. 23 Uzajamna harmonijska simetrija parabole iz EE pramena konika i krive 4. reda sa jednom osom simetrije

Inverzija je u relativističkoj geometriji potpuno bijektivna transformacija pa se pramen krivih 4. i 3. reda seče u istom broju tačaka kao i pramen konika.

5.3 Transformacija paraboličkog pramena krugova

Predmet istraživanja u ovom poglavlju bili su parabolički pramenovi krugova, homologijom iz njih dobijeni pramenovi konika i njihovi harmonijski ekvivalenti-pramenovi krivih 4. i 3. reda.

Perspektivna kolineacija (homologija) je centralno projiciranje na dve ravni (1) i (2). Parabolički pramen krugova sa ravni (1) se iz centra S projicira u pramen konika na

ravni 2. Zraci projiciranja koji prolaze kroz tačke datog kruga obrazuju konus sa vrhom u središtu projiciranja. Presek ovog konusa i ravni 2 je konika.

Koja konika će se dobiti perspektivnom kolineacijom zavisi od položaja kruga prema nedoglednici v_1 , što je objašnjeno u prethodnom poglavlju. Ako krug dodiruje nedoglednicu dobija se parabola, ako je seče dobija se hiperbola i ako je ne seče dobijena kriva je elipsa. Ovo se lako može pratiti u drugoj projekciji gde su ravni 1 i 2 u zračnom položaju-upravne na frontalnicu Sl. 24.

Inverzijom, ravni 1 i 2 se pretvaraju u sfere, a sve prave u krugove koji prolaze kroz zajednički antipod za ove dve sfere. Nedoglednica u_2 ("prava" na "ravni "2) projicira se na 1, u oba smera, u par antipodnih "pravih"- u_1 koje su u "ravni "1, i obratno, nedoglednica v_1 projicira se sa 1 na 2 u par antipodnih pravih v_2 .

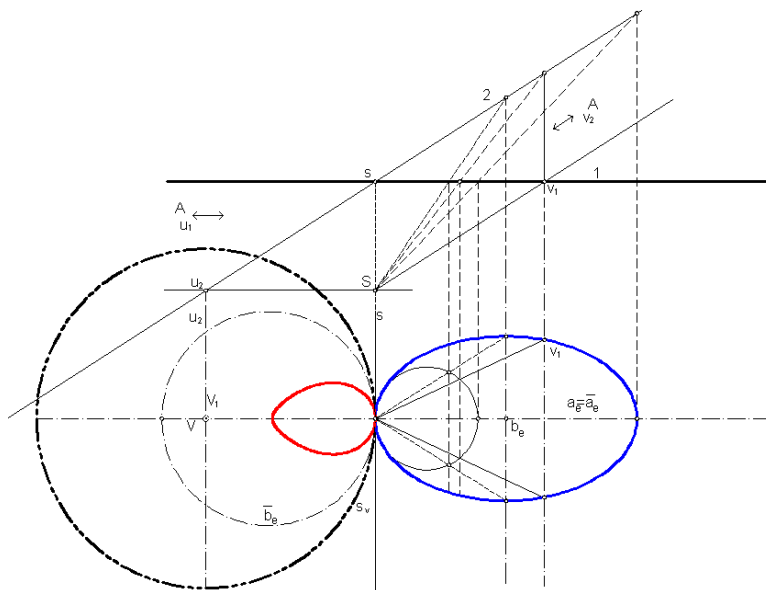
Parabolički pramen krugova homologijom se preslikava u paraboličko-eliptički (PE_k) pramen konika, dalje se ovi pramenovi inverzijom preslikavaju u pramenove krivih 4. i 3. reda.

5.3.1 Uzajamna simetrija paraboličko-eliptičkog pramena konika i paraboličko- eliptičkog pramena krivih 4. reda.

Perspektivnom kolineacijom preslikan je najveći krug, koji seče nedoglednicu v_1 (u tačkama M i N) u hiperbolu što je prikazano na Sl. 24 (desno). Slučaj je izabran tako da se dobija pravougla hiperbola sa uglom samopreseka asimptota od 90 stepeni. To je na Sl. 24 i označeno. Pod tim istim uglom se seku i tangente u samopresečnoj tački krive 4. reda-Bernulijevoj lemniskati. Ove tangente su zraci preslikavanja i one se preslikaju same u sebe i ovde se poklapaju sa preslikanim asimptotama jer je centar inverzije V postavljen u centar pravougla hiperbole. Preslikavanje samo hiperbole, koja je izdvojena iz pramena, prikazano je na Sl. 25.

Date su jednačine pravougla hiperbole i Bernulijeve lemniskate (Brieskorn E., 1986). S obzirom da je poluprečnik kruga inverzije jednak poluosama hiperbole ($R=r$), i koordinatni početak (x,y) je u centru inverzije V , jednačine glase:

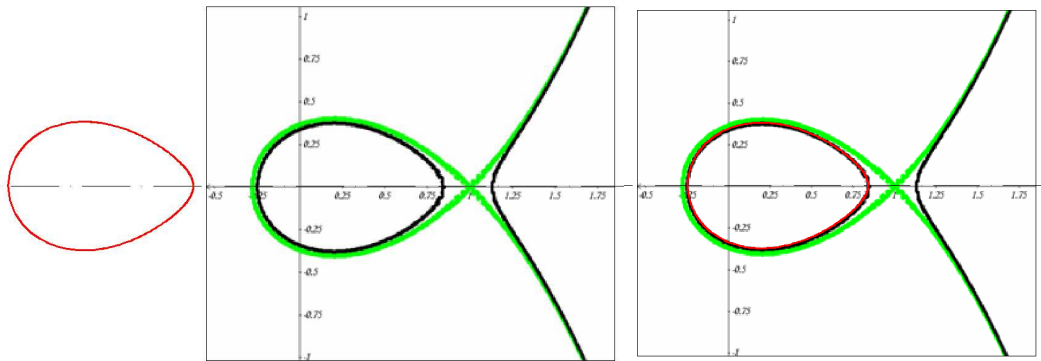
$$\begin{array}{l} \text{pravougla hiperbola} \quad \rightarrow \quad \text{Bernulijeva lemniskata} \\ r = a = b \quad x^2 - y^2 - r^2 = 0 \quad \rightarrow \quad r^2(x^2 - y^2) - (x^2 + y^2) = 0 \end{array}$$



Sl. 26 Uzajamna harmonijska simetrija elipse i jajaste krive 4. reda

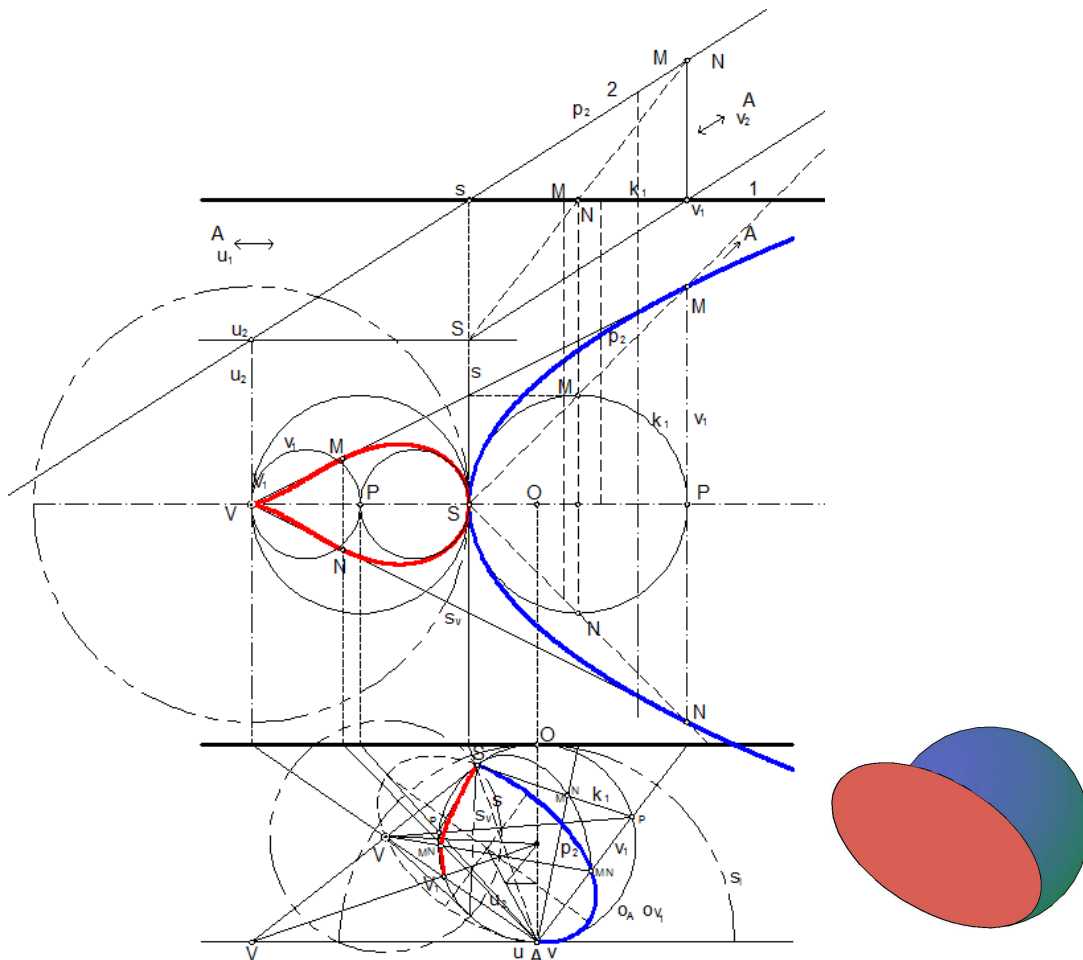
Najmanji krug se perspektivnom kolineacijom preslikava u elipsu. Uzajamna harmonijska simetrija elipse i jajaste krive 4. reda prikazana je na Sl. 26. Kriva označena crvenom bojom ima jednu pravolinijsku i jednu kružnu osu harmonijske simetrije. Upoređivanjem jajastih krivih koje su obrađene u magistarskom radu (Petrović M., 2010) i dobijene krive 4. reda, došlo se do sledećeg zaključka: da je kriva označena crvenom bojom na Sl. 26 najbližnja Segovoj krivoj. Ova kriva je pronađena, u pomenutom magistarskom radu, u grupi jajastih krivih koje su nastale nekom transformacijom. Sličnost najbolje ilustruje Sl. 27 gde je preklapljen dobijena jajasta kriva 4. reda (označene crvenom bojom) preko Segovoj krive (označene crnom bojom). Segova kriva je dobijena od krive označene zelenom bojom Transformacijom Torsten Silkea:

$$x^2 + y^2 = e^{2x-2} \quad \rightarrow \quad x^2 + y^2 + 0.02 = e^{2x-2}$$



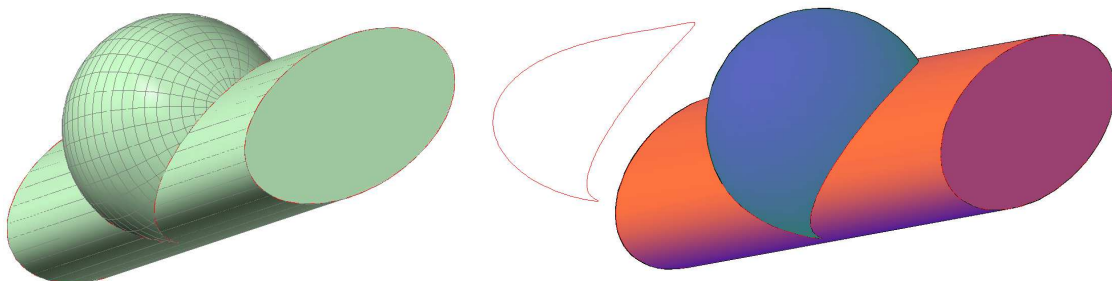
Sl. 27 Uporedjenje dobijene jajaste krive 4. reda sa jajastom Sego krivom

Projiciranje kruga k_1 u parabolu p_2 . dve ortogonalne projekcije prikazano je na Sl. 28. Nedoglednica v_1 kao tangenta kruga stisne se u v_2 kao šiljak parabole. Slučaj je izabran tako da krug k_1 bude krug oskulacije u temenu parabole. Inverzijom (V, s_v) "ravni" u samu sebe, parabola se preslika u "kapljicu" sa šiljkom. To je kriva 4. reda sa jednom pravolinijskom osom harmonijske simetrije $a_p = \bar{a}_p$. Zajednička osa parabole i "kapljice" je njihova zajednička tangenta u šiljku. U prvoj ortogonalnoj projekciji na Sl. 28 prikazana je inverzna stereografsku projekciju parabole i "kapljice" na sferu sagledivih dimenzija. To je prostorna inverzija, harmonijska simetrija, ravni i sfere u odnosu na sferu s_1 . Sferna parabola, prostorna kriva 4. reda, prekrila se u deo elipse koja je u oskulaciji sa konturnim krugom sfere. "Kapljica" se prekrila u deo konike $S-V_1$ sfere u samu sebe. "Sferna konika" i "sferna parabola" su povezane prostornom inverzijom (V, s_v) . "To pokazuje da je inverzija potpuna harmonijska simetrija (dosledno bijektivna i komforna). U klasičnoj projektivnoj geometriji ovde se javlja paradoks - projicirajući konus "kapljice" 4. reda seče sferu (2. reda) po krivoj 8. reda koja se dvostruko prekriva ne u krivu 4. reda nego opet u koniku 2. reda!" (Dovnikovic L., 2002. Podgorica).



Sl. 28 Projiciranje kruga u parabolu i harmonijska inverzija parabole u "kapljicu"

Na Sl. 29 uradjen je prostorni 3D model sfere sagledivih dimenzija i eliptičkog cilindra koji oskulira sferu u tacki A. Parabola se dobija presekom sfere i eliptičkog cilindra.

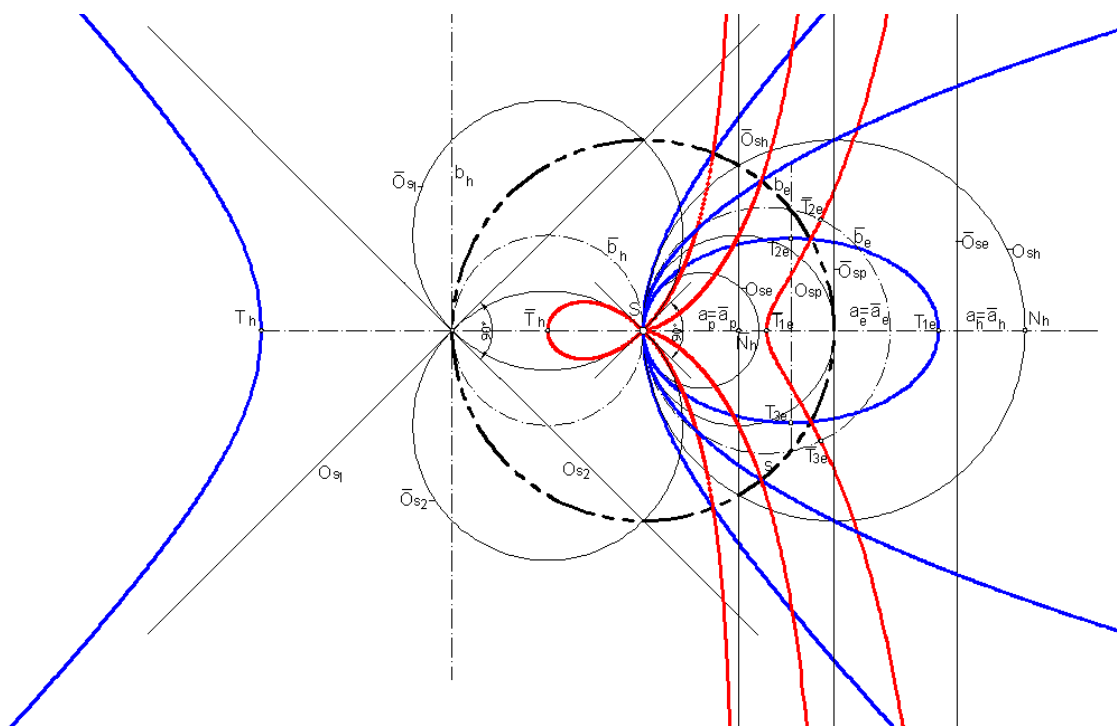


Sl. 29 Prostorni model sfere sagledivih dimenzija i eliptičkog cilindra

3d modeli su rađeni na osnovu postupaka iz radova (Janić M. et al., 2008) i (Janić M. et al., 2011).

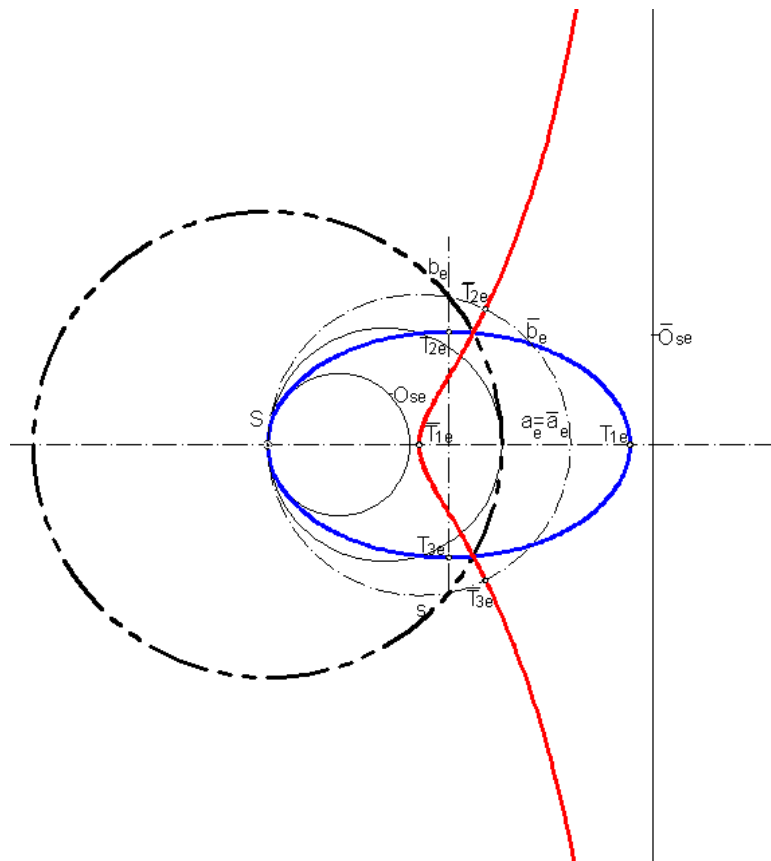
5.3.2 Preslikavanje pramena konika u pramen krivih 3. reda, kada je centar inverzije izabran u zajedničkoj temenoj tački svih konika

Preslikavanjem već nacrtanog, paraboličko-eliptičkog pramena konika, pri izboru centra inverzije u zajedničkoj temenoj tački, dobija se pramen krivih 3. reda. Sve krive imaju paralelne asimptote. Oskulatorni krugovi konika u temenu S se preslikaju u asimptote krivih 3. reda Sl. 30.

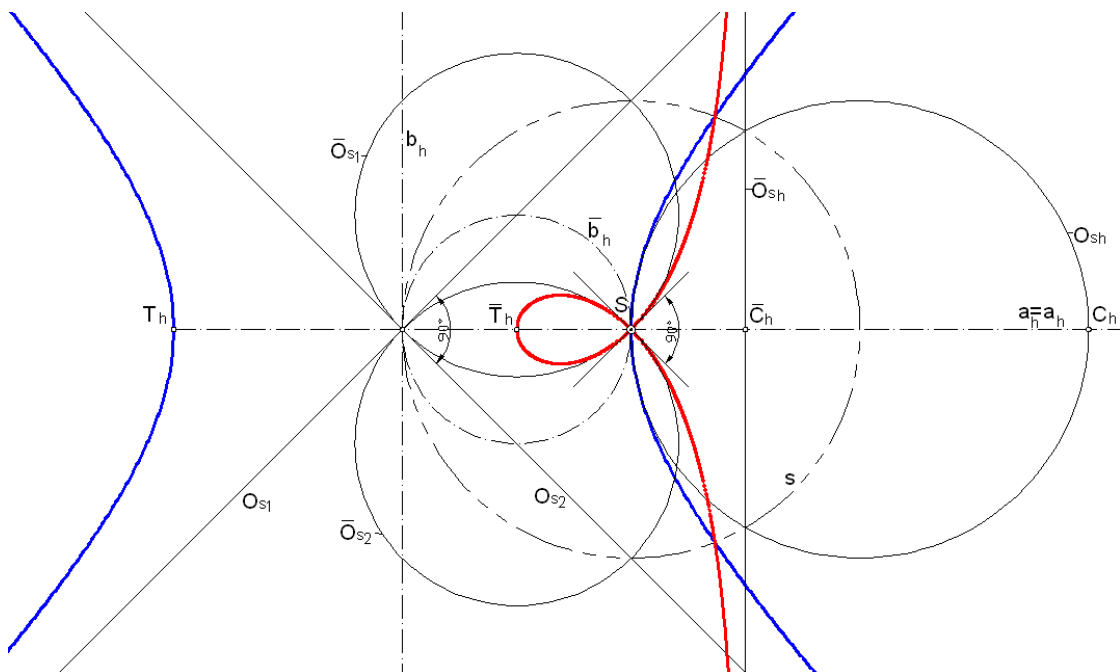


Sl. 30 Centar inverzije je izabran u zajedničkoj temenoj tački svih konika

Priroda perspektivne kolineacije navodi na zaključak da će klasične krive 2. reda uvek imati dvostruku tačku u antipodu, krive 3. reda trostruku itd. Priroda te dvostruke tačke najbolje se vidi iz položaja njene nedoglednice u odnosu na kolinearno pridruženu krivu. Kod singularnih tačaka hiperboličkog tipa, inverzijom krive se najbolje dolazi do zaključka o tipu dvostruke tačke.



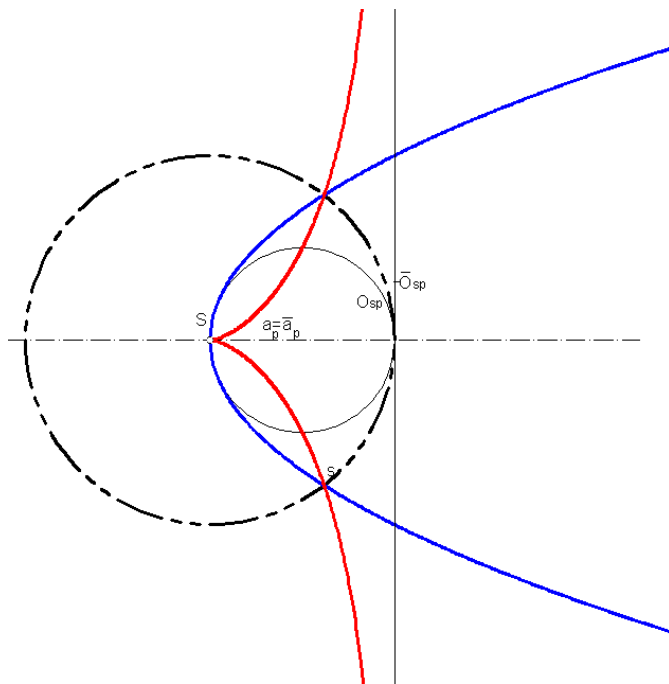
Sl. 31 Uzajamna harmonijska simetrija elipse i krive 3. reda



Sl. 32 Uzajamna harmonijska simetrija pravougla hiperbole i strofoide

Ako se koordinatni početak za ose x i y postavi u centar S , onda su konika i kriva 3. reda date sledećim jednačinama (Sl. 32):

$$\begin{array}{llll}
 \text{pravougl}a \text{ hiperbola} & \rightarrow & \text{strofoida} & \\
 r = a = b & (x+r)^2 - y^2 - r^2 = 0 & \rightarrow & x^2 \left[\frac{r+2x}{r-2x} \right] - y^2 = 0
 \end{array}$$



Sl. 33 Uzajamna harmonijska simetrija parabole i krive 3. reda

Perspektivnom kolineacijom singularne tačke se vezuju na jednoj krivoj, a razvezuju na drugoj uvek u antipodu, dakle van našeg vidokruga. To je razlog zašto ih ranije nismo mogli zapaziti, iako je inverzija pokazivala da se konike uvek preslikavaju u krive sa dvostrukom tačkom. To se objašnjavao inverzijom kao kvadratnom transformacijom, što ona u stvari nije (u relativističkoj geometriji). Krive 2. reda u relativističkoj geometriji su 4. reda (dodata im je singularna dvostruka tačka u antipodu), tako da one posle inverzije ostaju istog četvrtog reda. Dakle, to je razlog zašto inverzija nije kvadratna transformacija u relativističkoj geometriji.

Inverzija je potpuno bijektivna transformacija pa se pramen krivih 4. i 3. reda seče u istom broju tačaka kao i pramen konika. Preslikavanje konika u krive 3. i 4. reda na složenim slikama sa mnoštvom linija, najbolje se može pratiti pomoću njihovog "ukrštanja" na apsoluti (krugu inverzije - s). Da bi se olakšalo istraživanje, izdvajane su konike iz pramena i prikazano je odvojeno preslikavanje samo te konike u krivu 4. ili 3. reda.

6 Pramenovi krivih 4. i 3. reda dobijeni kao harmonijski ekvivalenti pramena konika (nastali projekcijom ravnog preseka jednogranog hiperboloida kroz sekantu i pasantu hiperboloida)

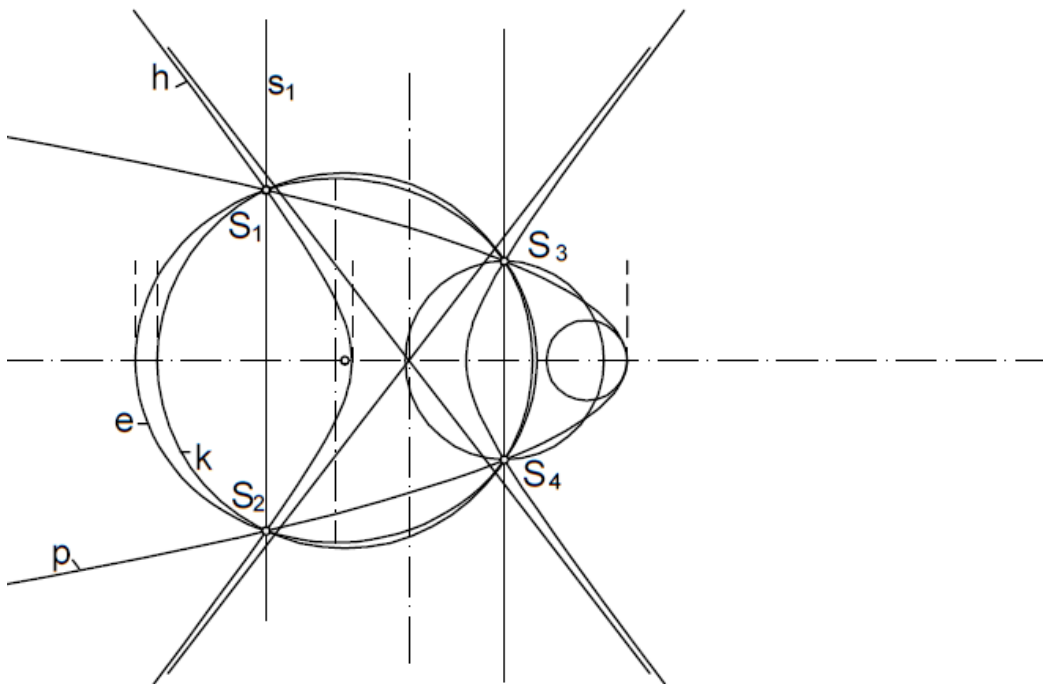
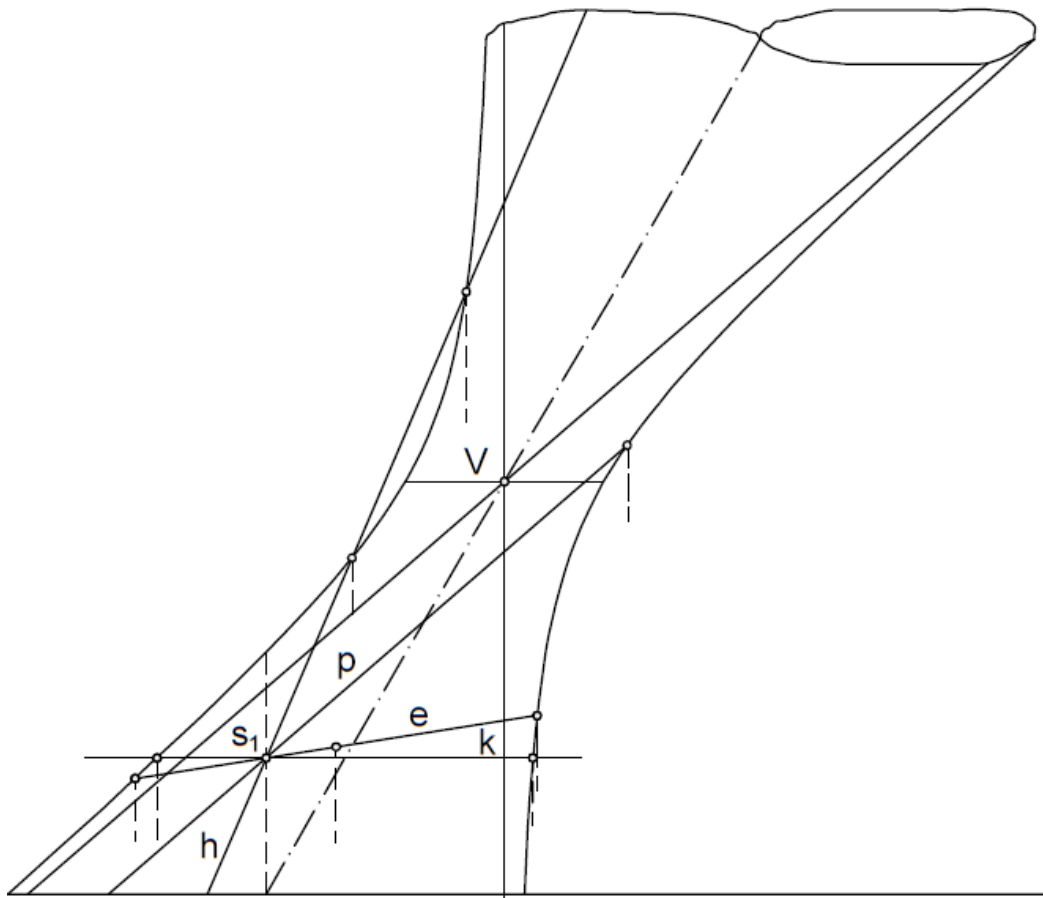
6.1 Dobijanje HH pramena konika

Postavimo pramen ravni kroz pravu s_1 koja je sekanta jednogranog hiperboloida, čiji je jedan sistem kružnih preseka paralelan sa horizontalnicom. Ovaj hiperboloid je postavljen tako da su mu dve paralelne izvodnice (iz suprotnih sistema) u projicirajućem položaju. Sve konike u presečnim ravnima moraju proći kroz ove izvodnice (a i b) što je prikazano na Sl. 34. U prvoj projekciji to su dve realne i razdvojene temeljne tačke pramena konika S_3 i S_4 . Druge dve tačke su S_1 i S_2 na sekanti konike (takođe su realne i razdvojene). Dakle dobija se hiperboličko-hiperbolički (HH) pramen konika.

Hiperboličko-parabolički (HP) pramen konika dobija se kada pramen presečnih ravni postavimo kroz tangentu jednogranog hiperboloida. U prvoj projekciji sve konike moraju proći kroz projekciju dodirne tačke tangente (dve realne i poklopljene tačke) i projekciju izvodnica a i b (dve realne i razdvojene tačke).

Ako je pramenjača pasanta jednogranog hiperboloida projekcijom presečnih konika ovog pramena ravni na horizontalnicu, dobija se hiperboličko-eliptički (HE) pramen konika (dve realne i razdvojene i dve konjugovano imaginarnе tačke).

Ako je pramenjača beskonačno daleka prava horizontalnice (jednograni hiperboloid sečemo pramenom paralelnih ravni) tada se u prvoj projekciji dobija HE_k ("eliptički" pramen krugova) i komplementarni pramen pravouglanih hiperbola (EH_k) na dvogranom hiperboloidu kao komplementu jednogranog hiperboloida za zrake projiciranja upravne na frontalnicu.



Sl. 34 HH pramen konika nastao sečenjem kroz sekantu jednogranog hiperboloida

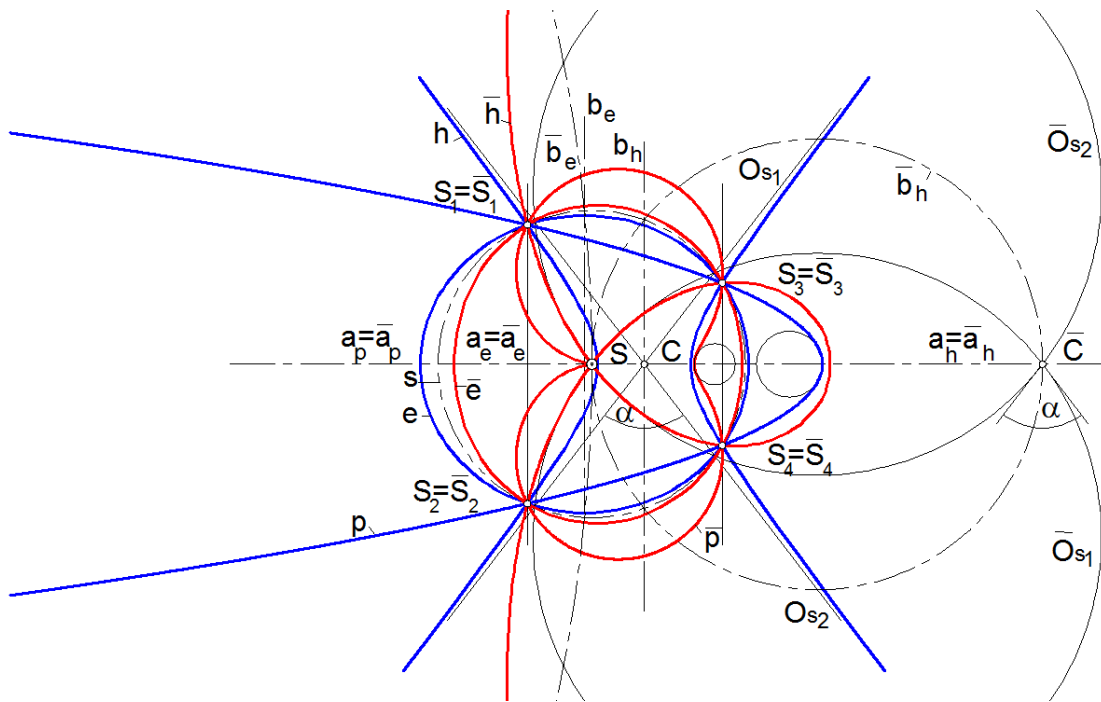
Hiperboličko–hiperbolički (HH) pramen konika i njegov harmonijski ekvivalent-pramen krivih 4. reda prikazani su na Sl. 35. Centar harmonijske inverzije S izabran je na osi simetrije svih konika pramena i krug inverzije s poklapa se sa presečnim krugom jednogranog hiperboloida i horizontalne ravni kroz sekantu- s_1 .

U daljem radu preslikavanje elemenata će se vršiti direktno na relativističkoj ravni - sferi, relativno velikih dimenzija, mada veličina sfere ne utiče na opštost rasuđivanja. Ceo prostor se zamišlja kao skup sfera različitih dimenzija, ali pošto se mi nalazimo na Zemaljskoj kugli koja je relativno velika u odnosu na posmatrača, naš um najbolje prihvata geometrijska tumačenja kao euklidsko-projektivna, stoga ćemo ovakvo preslikavanje aproksimirati planimetrijskim preslikavanjem, gde je konstruktivna obrada elemenata najjednostavnija. U grupi harmonijskih ekvivalenata elipse (kao i ostalih konika), koja ima jednu singularnu dvostruku tačku, nalazi se ∞ oblika krivih 4. i 3. reda a samo jedan oblik krive 2. reda - ta konkretna konika(pri čemu se izolovana dvostuka tačka konike nalazi u antipodu posmatrača). Na primerima koji slede biće prikazani samo neki od mnoštva oblika koji se dobijaju harmonijskom simetrijom elipse, hiperbole i parabole.

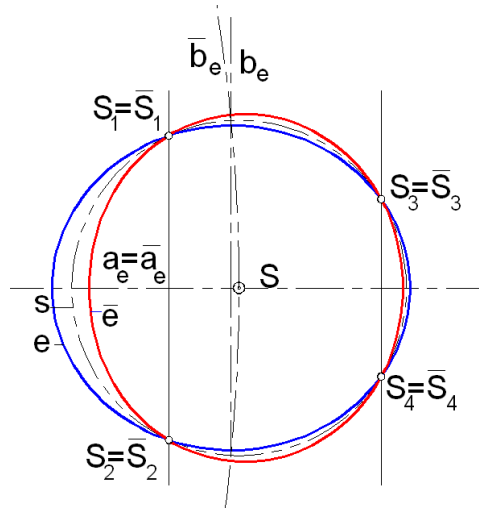
U ovom poglavlju preslikani su pramenovi konika koje leže u ravnima čija je pramenjača sekanta jednogranog hiperboloida.

Izdvojena je elipsa iz HH pramena i preslikana je u jednodelnu krivu 4. reda sa izolovanom dvostrukom tačkom koja ima jednu kružnu i jednu pravolinijsku osu harmonijske simetrije - Sl. 36. Sve tačke kruga k se preslikavaju same u sebe, jer se on poklapa sa apsolutom.

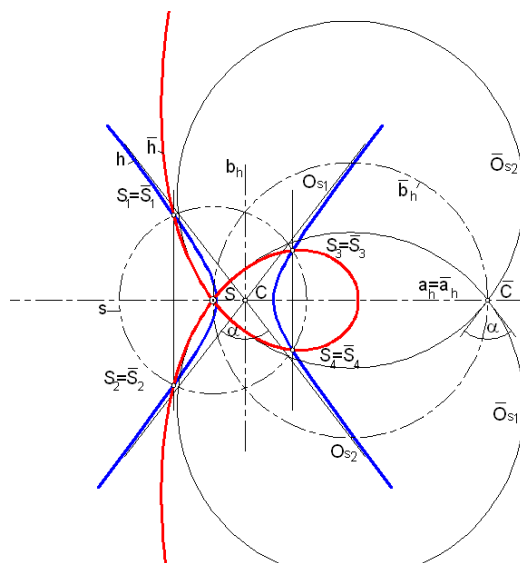
Na Sl. 37 prikazana je hiperbola i njen harmonijski ekvivalent kriva 4. reda sa samopresečnom tačkom i sa dve ose simetrije (pravolinijska \bar{a}_h i kružna \bar{b}_h). Asimptote hiperbole se preslikavaju u dva kruga \bar{O}_{s1} i \bar{O}_{s2} .



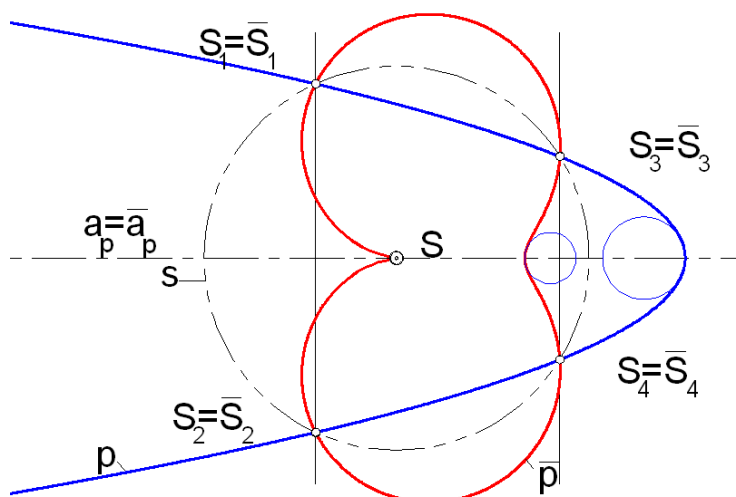
Sl. 35 HH pramen konika i njegov harmonijski ekvivalent-pramen krivih 4. reda



Sl. 36 Elipsa iz HH pramena konika i njen harmonijski ekvivalent kriva 4. reda



Sl. 37 Hiperbola iz HH pramena konika i njen harmonijski ekvivalent, kriva 4.reda



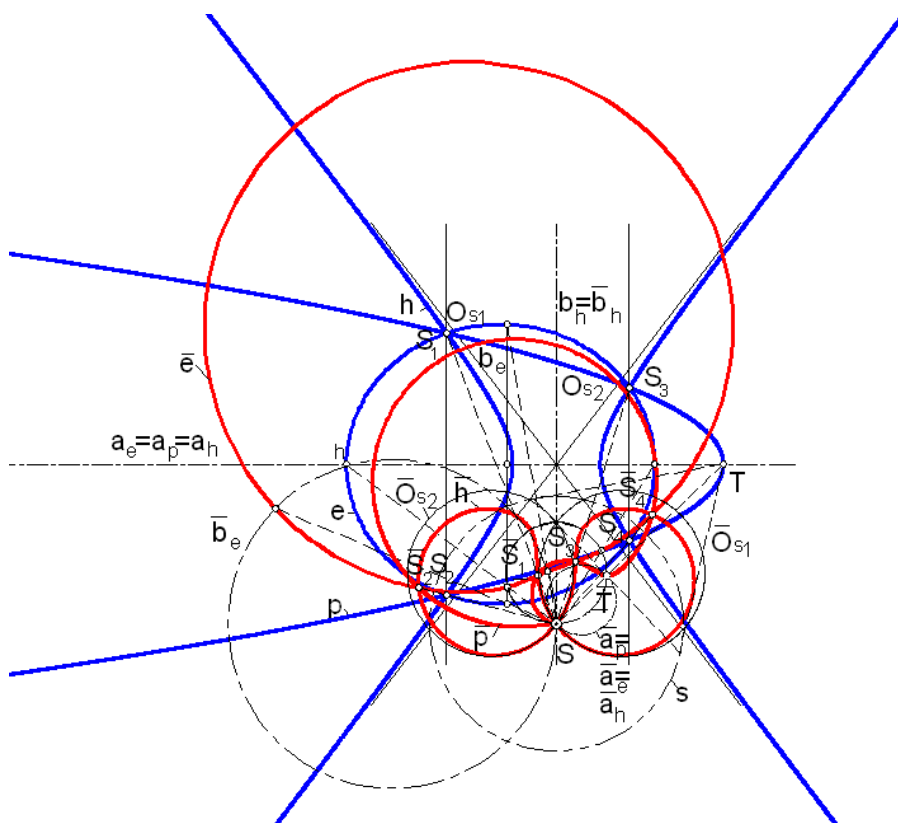
Sl. 38 Parabola iz HH pramena konika i njen harmonijski ekvivalent, kriva 4.reda sa šiljkom

Hiperbola ima dve asimptote, tj. po relativističkom tumačenju ima samopresečnu tačku u antipodu. Kada se dve asimptote hiperbole poklope, odnosno kada se dve tangente krive u oskulaturnim "ravnima" poklope u jednu dvostruku oskulaturnu "ravan", samopresečna tačka krive prelazi u šiljak prostorne krive. Dok eliptičke i paraboličke grupe krivih imaju dve ravni simetrije paraboličke krive imaju samo jednu. Ova oskulaturna "ravan" je tada jedina simetralna ravan paraboličke grupe krivih. Druga ravan simetrije (analogno ravnima simetrije kod eliptičkih i hiperboličkih

krivih) je sažeta u singularnu tačku krive - šiljak, gde su sažeta i dva centra simetrije krive (dobija se singularna simetrija). Kako parabola predstavlja graničnu krivu između mnoštva elipsa i hiperbola, tako i grupa krivih sa paraboličkom tačkom - šiljkom, predstavlja graničnu grupu između mnoštva krivih sa izolovanom i samopresečnom tačkom. Na Sl. 38 prikazana je parabola iz HH pramena konika i njen harmonijski ekvivalent, kriva 4. reda sa šiljkom i jednom pravolinijskom osom harmonijske simetrije \bar{a}_p .

"Raspadnutu" koniku pramena čine dve paralelne prave kroz temeljne tačke pramena konika. "Prave" se preslikavaju u krugove koji prolaze kroz centar inverzije S i u parovima kroz preslikane tačke: krug \bar{k}_1 kroz (\bar{S}_1, \bar{S}_2) i krug \bar{k}_2 kroz (\bar{S}_3, \bar{S}_4). Preslikane "raspadnute" konike pramena nacrtane su na Sl. 35.

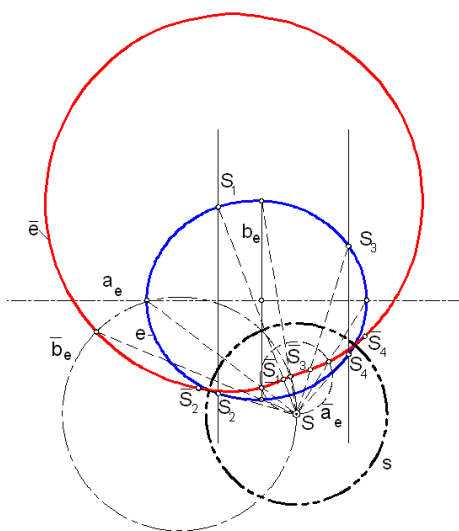
Ako centar inverzije izaberemo na imaginarnoj osi hiperbole dobija se pramen krivih 4. reda koji je prikazan na Sl. 39.



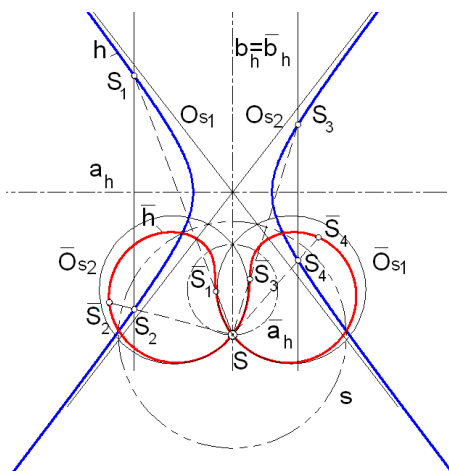
Sl. 39 HH pramen krivih 4. reda nastao u slučaju kada je centar S inverzije izabran je na b osi hiperbole

Svaka temeljna tačka pramena konika (S_1, S_2, S_3 i S_4) ima svoju sliku ($\bar{S}_1, \bar{S}_2, \bar{S}_3$ i \bar{S}_4). Kako sve konike HH pramena prolaze kroz četiri temeljne tačke, tako i pramen krivih četvrtog reda prolazi kroz četiri preslikane temeljne tačke. Za svaku preslikanu koniku posebno je data preslikana kriva 4. reda i to je prikazano na slikama Sl. 40, Sl. 41 i Sl. 42.

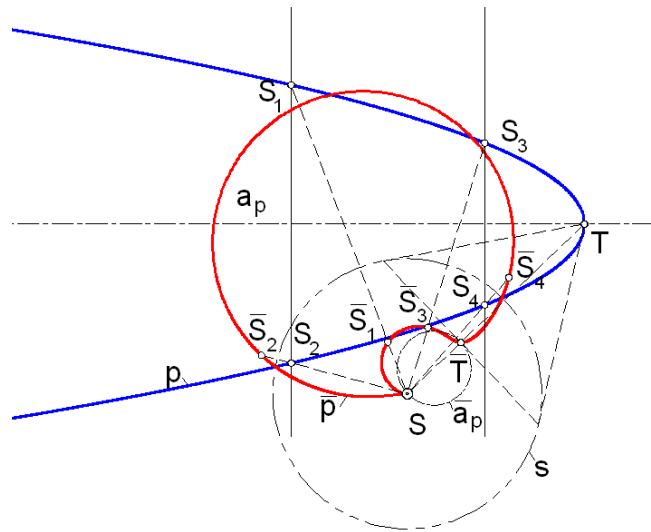
Za crtanje pramenova konika, kao i njihovih harmonijskih ekvivalenata korišćen je program AutoCAD. Visual LISP je upotrebljen za pisanje programa za crtanje konika i zatim za preslikavanje krivih drugog reda u krive 4. reda.



Sl. 40 Za izabrani centar inverzije S elipsa iz HH pramena konika i njen harmonijski ekvivalent kriva 4. reda

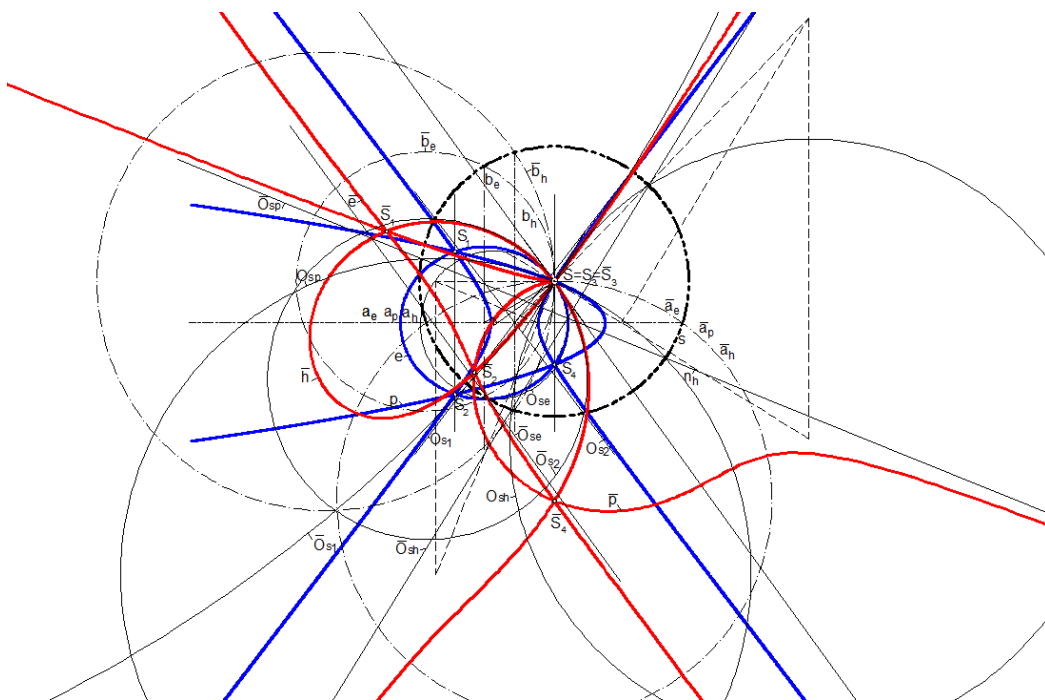


Sl. 41 Za izabrani centar inverzije S hiperbola iz HH pramena konika i njen harmonijski ekvivalent kriva 4. reda



Sl. 42 Za izabrani centar inverzije S parabola iz HH pramena konika i njen harmonijski ekvivalent kriva 4. reda

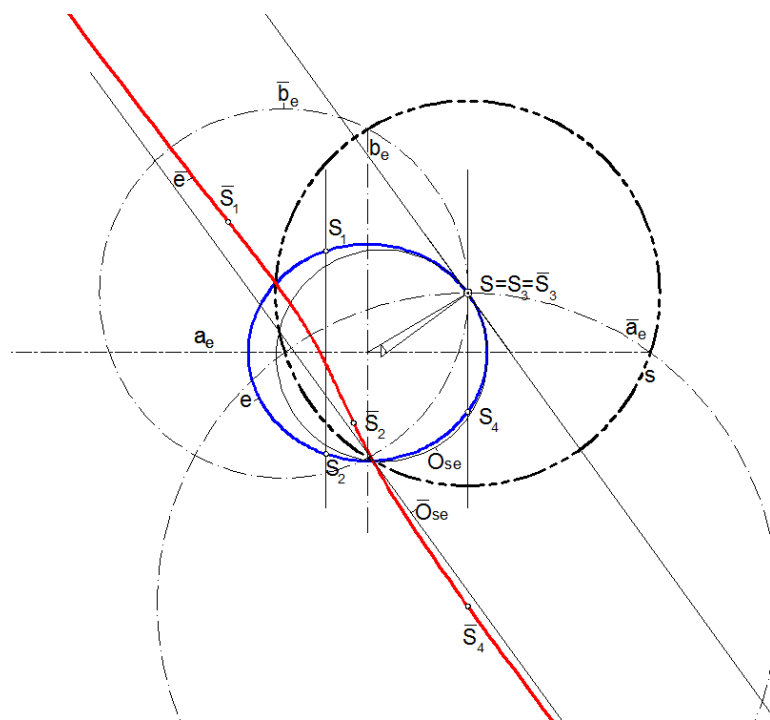
Inverzija je u relativističkoj geometriji potpuno bijektivna transformacija pa se pramen krivih 4. reda seče u istom broju tačaka kao i pramen konika.



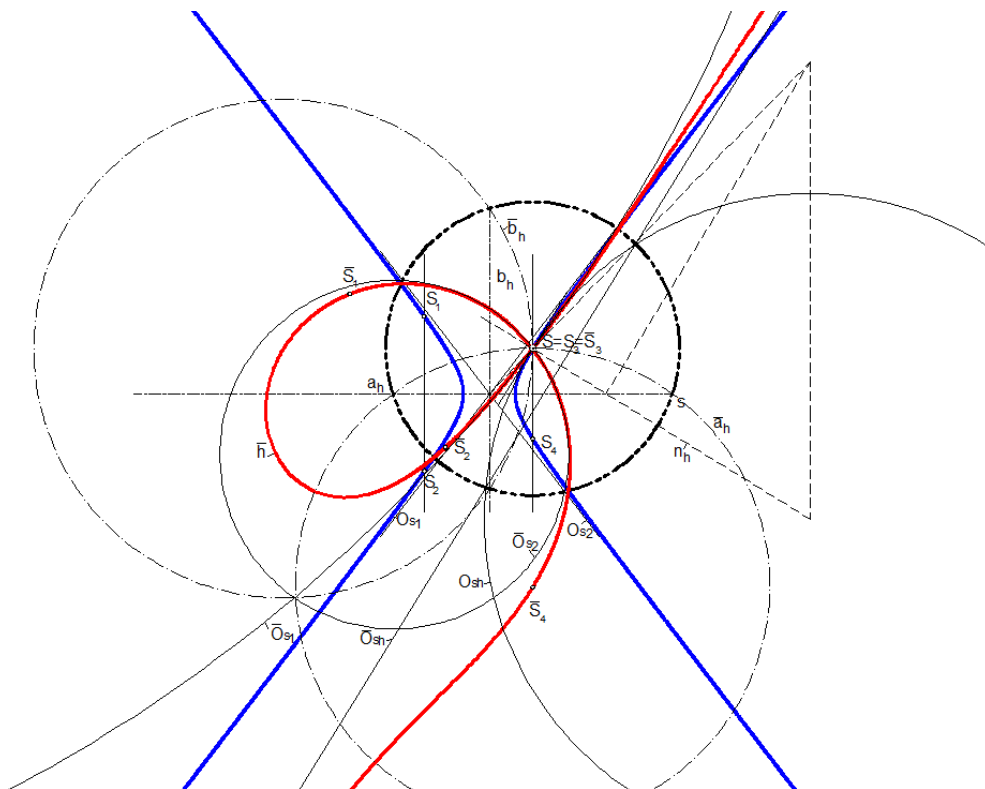
Sl. 43 Centar inverzije S je u temeljnoj tački HH pramena konika (prikazan je i njegov harmonijski ekvivalent pramen krivih 3. reda)

Ako se centar inverzije S izabere u tački S_3 pramena konika, dobija se njegov harmonijski ekvivalent pramen krivih 3. reda-Sl. 43. Pošto je jedna tačka svake konike poslata u antipod red preslikane krive se smanjio za 1.

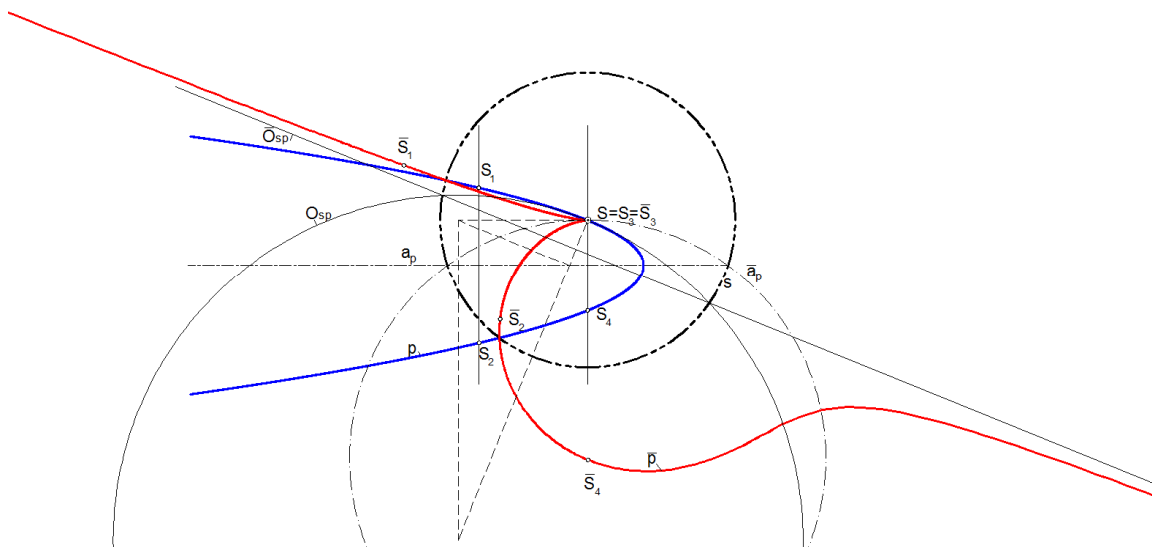
Na Sl. 44 izdvojena je elipsa iz pramena konika i prikazano je kako se preslikava u krivu 3.reda sa dve kružne ose harmonijske simetrije i sa jednom izolovanom dvostrukom tačkom. Centar osculatornog kruga elipse O_{se} u tački S određen je preko središta konike i on se preslikava u asimptotu krive 3.reda.



Sl. 44 Elipsa iz HH pramena konika i njen harmonijski ekvivalent kriva 3. reda



Sl. 45 Uzajamna harmonijska simetrija hiperbole iz HH pramena konika i krive 3. reda sa dve kružne ose simetrije



Sl. 46 Parabola iz pramena konika i njen harmonijski ekvivalent kriva 3. reda

Uzajamna harmonijska simetrija hiperbole iz HH pramena konika i krive 3. reda sa dve kružne ose simetrije prikazana je na Sl. 45 . Centar osculatornog kruga hiperbole O_{sh} u tački S određen je preko središta konike i on se preslikava u asimptotu krive 3. reda. Dobijena kriva ima dve kružne ose harmonijske simetrije i preko njih se kriva

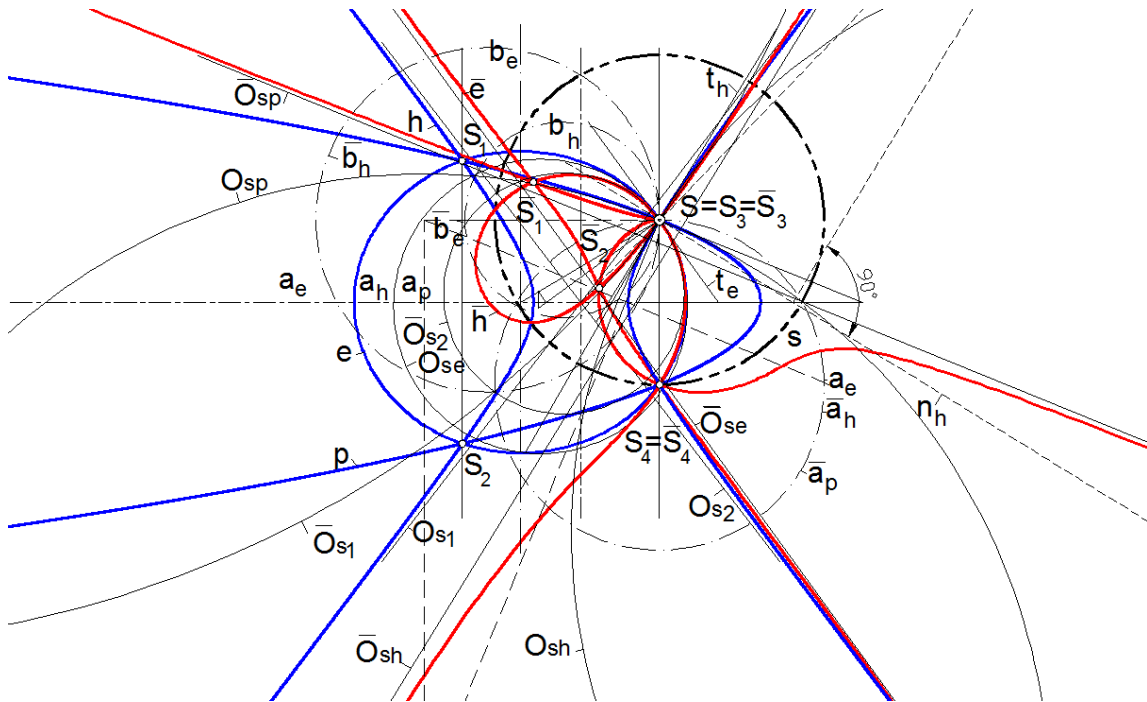
invertuje u samu sebe. Ose \bar{a} i \bar{b} se seku u paru centara kroz koje prolaze zraci centralne simetrije krive 3. reda. Asimptote hiperbole kao oskulatorne "prave" u antipodnom čvoru hiperbole, preslikavaju se u oskulatorne krugove u čvoru krive 3. reda. Tangente u čvoru S krive 3. reda imaju isti ugao samopreseka kao i asimptote hiperbole tj. paralelne su asimptotama hiperbole. Tangente u čvoru su zraci inverzije i one se preslikavaju same u sebe tako da hiperbolu dodiruju i seku u njenom antipodnom čvoru \bar{S} kao što krivu 3. reda dodiruju i seku u njenom čvoru S .

Na Sl. 46 prikazana je uzajamna harmonijska simetrija parabole iz HH pramena konika i krive 3. reda sa jednom kružnom osom simetrije. Osa parabole (koja je ujedno i njena asimptota, to jest dvostruka oskulatorna "prava" u antipodnom šiljku) preslika se, inverzijom(S, s), u kružnu osu \bar{a} koja je ujedno i dvostruki oskulatorni krug u šiljku kose asimetrične krive.

Ako se centar inverzije S postavi u istoj tački pramena konika, a krug inverzije izabere da prolazi kroz još jednu temeljnu tačku HH pramena konika (S_4) dobija se još jedan pramen krivih 3 reda (Sl. 47).

Hiperboličko-hiperbolički pramen konika se seče u dva para realnih i razdvojenih temeljnih tačaka, a pošto je inverzija potpuno bijektivna transformacija, što je ranije već rečeno, u svim slučajevima koji su obrađeni u ovom poglavlju vidi se da se i pramen krivih 3. i 4. reda seče takođe u paru realnih i razdvojenih temeljnih tačaka. U projektivno-euklidskom prostoru, pol inverzije u euklidskom centru sfere inverzije se invertuje u različitim pravcima u različite tačke fiktivne beskonačno daleke ravni, čime je narušena bijektivnost preslikavanja.

Ukoliko se u klasičnu centralnu inverziju uvedu relativistički pojmovi prave i ravni (krug i sfera) dobija se transformacija na sferi - harmonijska simetrija. Sve tačke sa "sferne ravni" se invertuju u ekvivalentne tačke na sferi, dok se tačka pola inverzije invertuje u svim pravcima u jednu konačnu antipodnu tačku posmatrača. Na ovaj način se u potpunosti uspostavlja bijektivnost i konformnost, to jest topološki izomorfizam inverzije, pa ona postaje harmonijska simetrija.



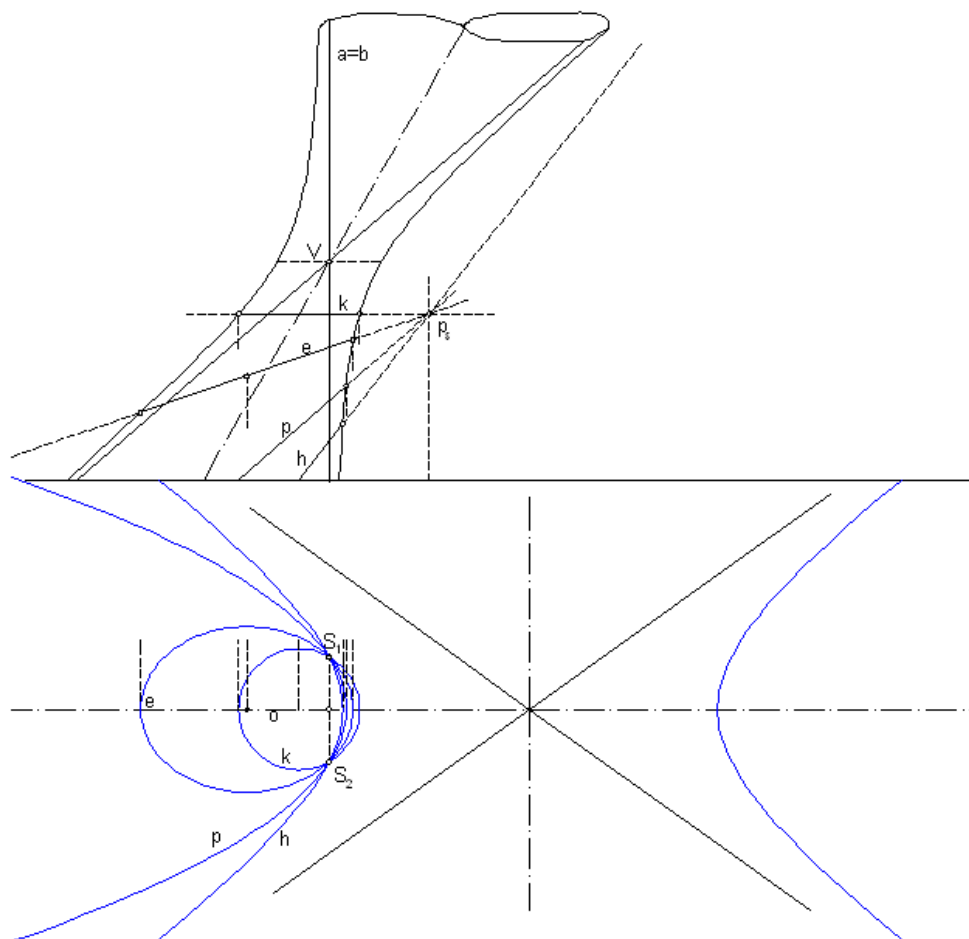
Sl. 47 Centar inverzije $S=S_3$ je u temeljnoj tacki HH pramena, a krug inverzije prolazi kroz temeljnu tacku S_4

6.2 Transformacija hiperboličko-eliptičkog pramena konika u pramen krivih 4. i 3. reda

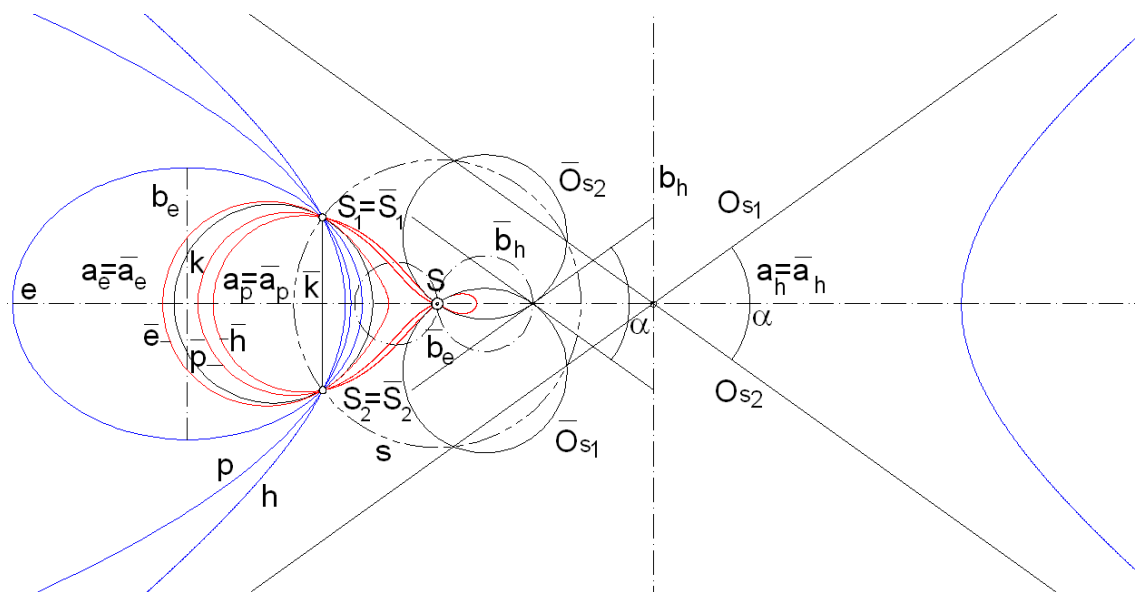
Ponovo je razmatran slučaj jednograng hiperboloida koji je postavljen tako da su mu dve paralelne izvodnice (iz suprotnih sistema) u projicirajućem položaju. Pramen presečnih ravni postavljen je kroz pasantu $-p_s$ jednogranog hiperboloida. Sve konike u presečnim ravnima moraju proći kroz ove izvodnice (a i b). U prvoj projekciji to su dve realne i razdvojene temeljne tačke pramena konika S_1 i S_2 . Druge dve temeljne tačke pramena konika su konjugovano imaginarne, a njihovi realni predstavnici su na pasanti konike $-p_s$ što će u daljem radu biti prikazano. Dakle, dobija se hiperboličko-eliptički (HE) pramen konika koji je prikazan na. Sl. 48.

Ako se centar inverzije izabere na osi simetrije svih konika iz pramena, onda se dobija pramen krivih 4. reda - Sl. 49.

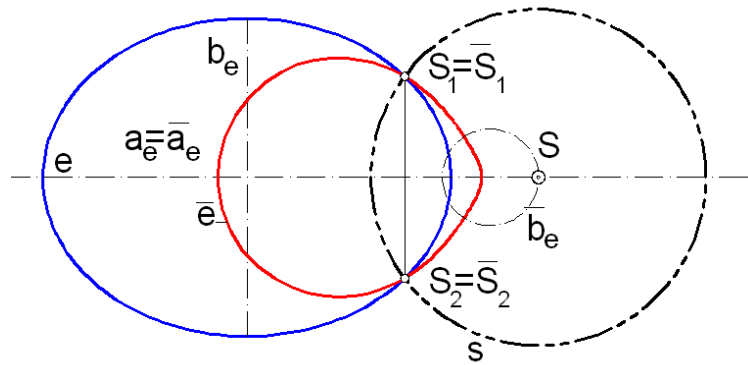
U daljem radu posebno su izdvojene sve konike iz pramena i prikazani su njihovi harmonijski ekvivalenti (Sl. 50, Sl. 51 i Sl. 52).



Sl. 48 HE pramen konika koji nastaje ravnim sečenjem jednogranog hiperboloida kroz njegovu pasantu

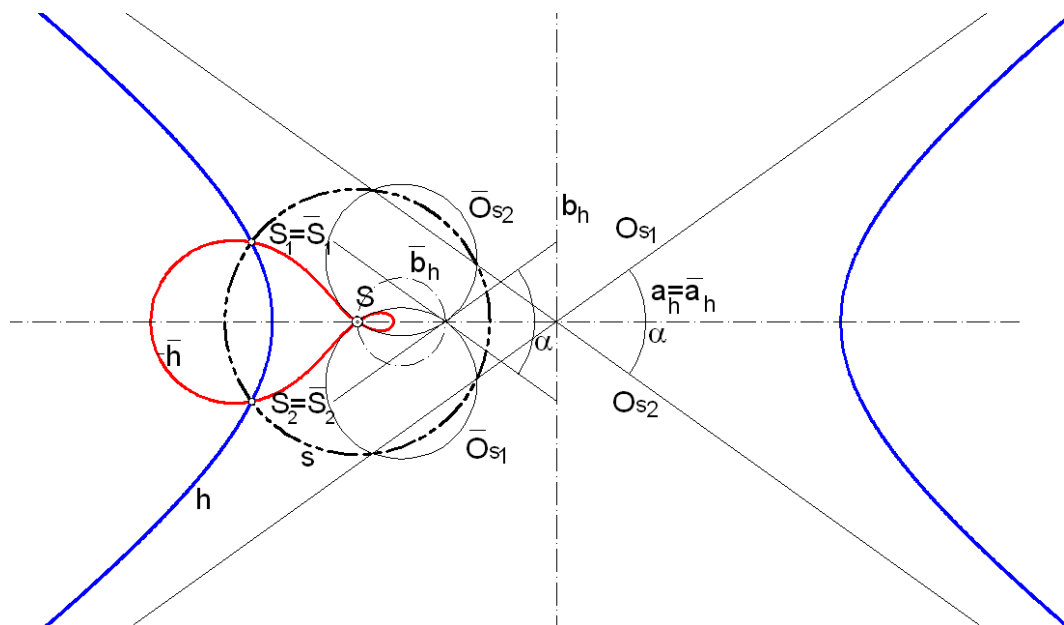


Sl. 49 HE pramen konika i njegov harmonijski ekvivalent, pramen krivih 4. reda

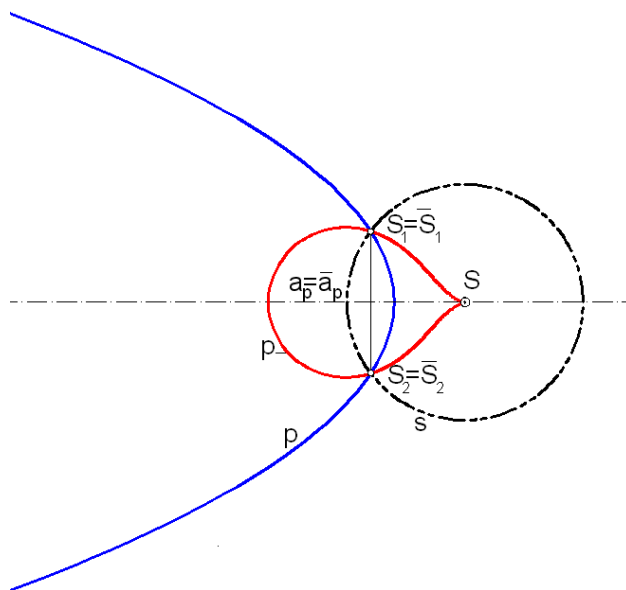


Sl. 50 Preslikana elipsa iz HE pramena konika u krivu 4. reda oblika jajeta za izabrani centar harmonijske inverzije S

Preslikavanje elipse iz HE pramena konika u krivu 4. reda oblika jajeta prikazano je na Sl. 50. Dobijena kriva ima jednu kružnu - \bar{b}_e i jednu pravolinijsku - \bar{a}_e osu harmonijske simetrije i izolovanu tačku u S . Uzajamna simetrija hiperbole i krive 4. reda sa samopresečnom tačkom u centru inverzije S prikazana je na Sl. 51. Parabola iz HE pramena konika preslikana je u krivu 4. reda koja ima šiljak u S i ima jednu osu pravolinijske simetrije - \bar{a}_p , a to je prikazano na Sl. 52.

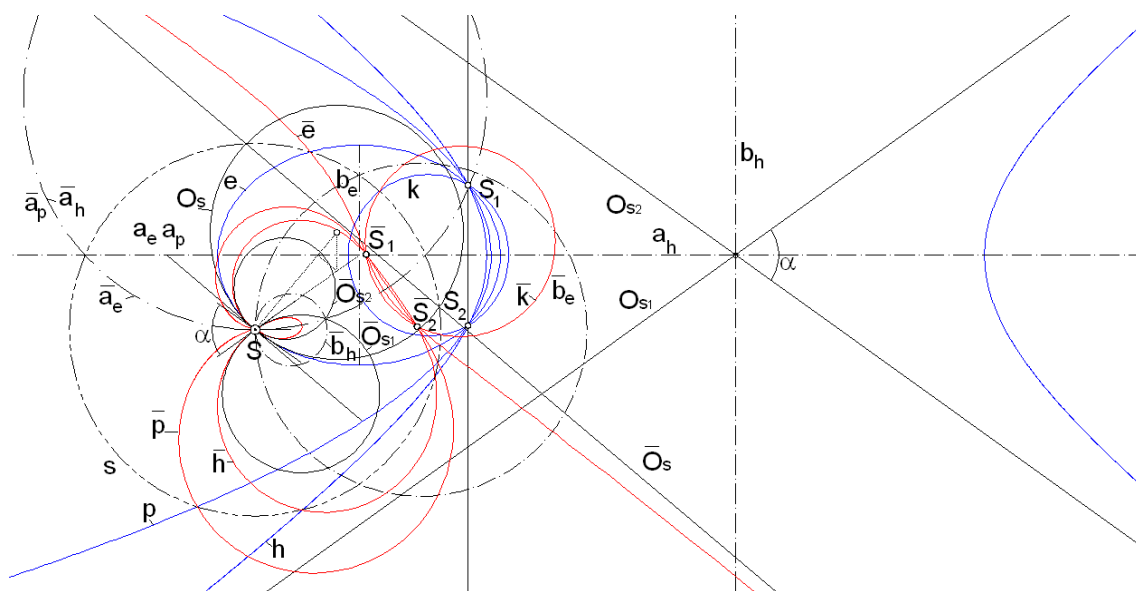


Sl. 51 Preslikana hiperbola iz HE pramena konika u krivu 4. reda za izabrani centar harmonijske inverzije S

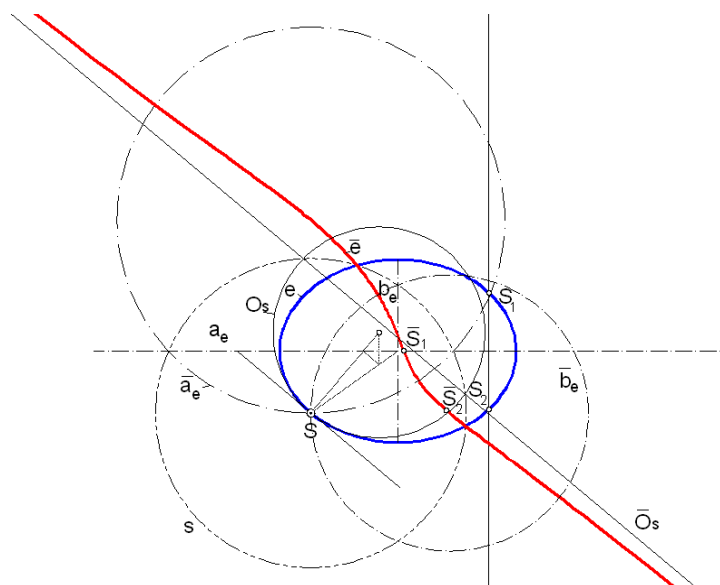


Sl. 52 Preslikana parabola iz HE pramena konika u krivu 4. reda za izabrani centar harmonijske inverzije S

Kada je centar inverzije izabran u tački S elipse preslikavanjem se dobija HE pramen krivih 4. i 3. reda i to je prikazano na Sl. 53. Elipsa se preslikava u krivu 3. reda sa dve kružne ose harmonijske simetrije - \bar{a}_e i \bar{b}_e - Sl. 54. Oskulatorni krug elipse u tački S se preslikava u pravu - asimptotu krive 3. reda.

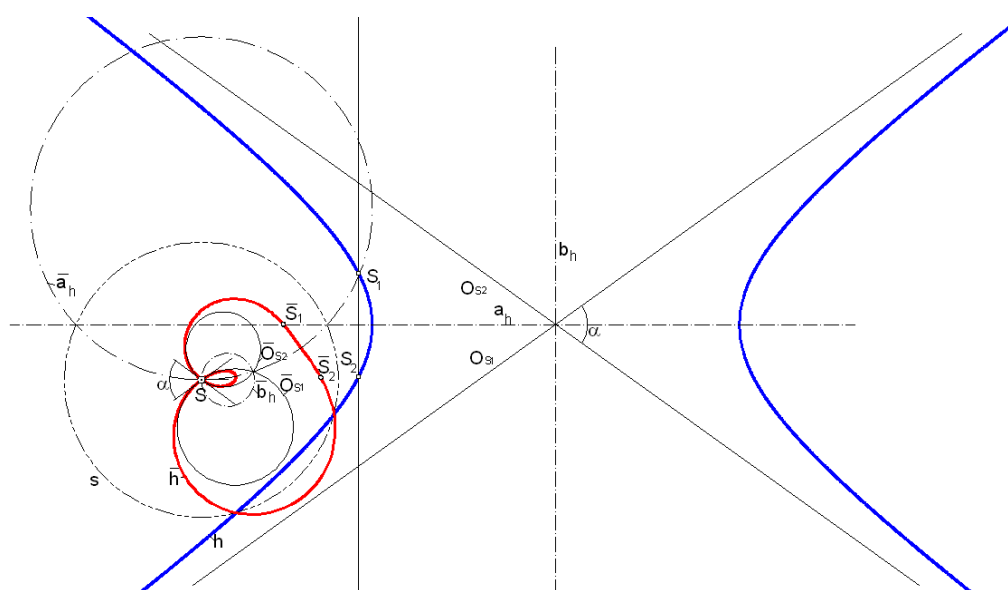


Sl. 53 HE pramen konika i njegov harmonijski ekvivalent, pramen krivih 4. reda za centar inverzije u tački elipse

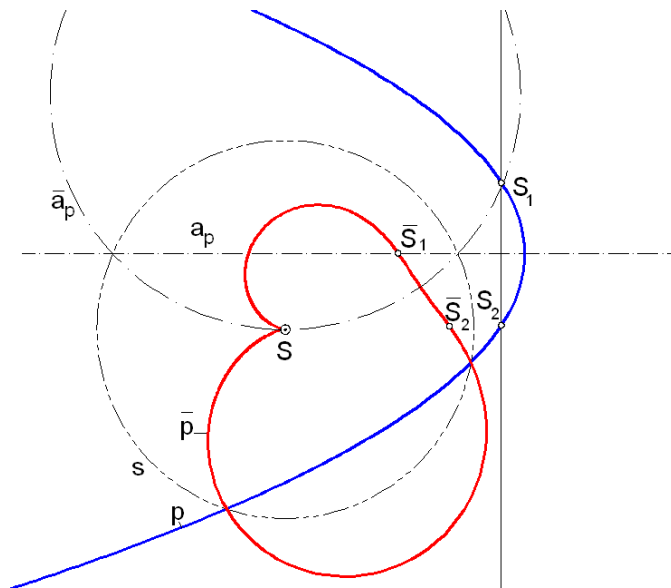


Sl. 54 Preslikana elipsa iz HE pramena konika u krivu 3. reda za izabrani centar harmonijske inverzije S u tački elipse

Uzajamna harmonijska simetrija hiperbole (h) iz HE pramena konika i krive 4. reda prikazana je na Sl. 55. Dobijena kriva ima dve kružne ose harmonijske simetrije ili \bar{a}_e i \bar{b}_e . Pokazano je da je ugao samopreseka asimptota hiperbole jednak uglu samopreseka dveju grana krive 4. reda, koje prolaze kroz tačku S. Taj ugao je na Sl. 55 označen sa α .



Sl. 55 Preslikana hiperbola iz HE pramena konika u krivu 4. reda za izabrani centar harmonijske inverzije S u tački elipse



Sl. 56 Preslikana parabola iz HE pramena konika u krivu 4. reda za izabrani centar harmonijske inverzije S u tački elipse

Na Sl. 56 preslikana je parabola iz HE pramena konika u krivu 4. reda koja ima šiljak koji je iz tačke \bar{S} preslikan u tačku S . Harmonijska simetrija nam u stvari daje dokaz da parabola ima šiljak u antipodu. I otriva nam ono što nije u vidokrugu posmatrača.

7 Inverzija nesimetričnih pramenova konika u pramenove krivih 4. i 3. reda

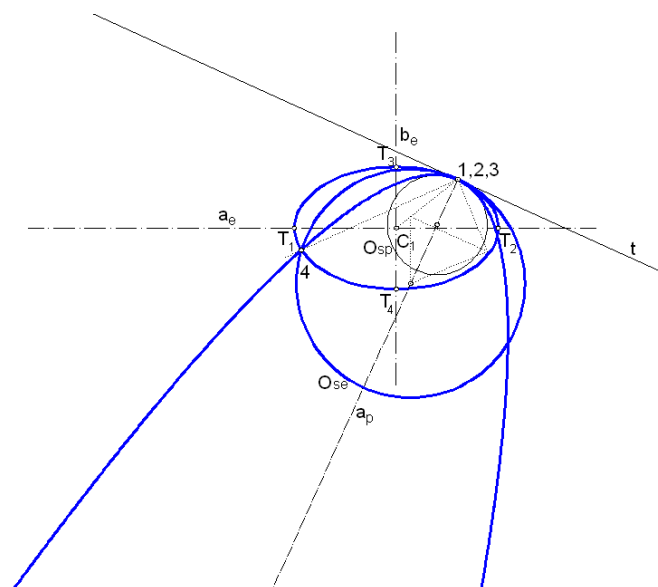
7.1 Preslikavanje pramena konika koji ima četiri realne tačke od kojih su tri poklopljene- P_3H pramen konika

U ovom poglavlju inverzijom (harmonijskom simetrijom) preslikavan je P_3H pramen oskulatornih konika koji ima četiri realne tačke, od kojih su tri poklopljene (prikazan je na Sl. 57) u pramen krivih 4. i 3. reda. Pri preslikavanju, preslikana je i singularna konika raspadnuta u odgovarajuće parove pravih.

U proizvoljnoj tački elipse su konstruisane tangenta i normala, a zatim je poznatim konstruktivnim postupkom na normali određen centar oskulatorne kružnice (pomoću fokusa konike i pomoću središta konike). Elipsa i njen oskulatorni krug određuju čitav pramen konika. Ove dve konike imaju dva zajednička konsektivna elementa zajednička (tri konsektivne tačke) i u dodiru su drugog reda. Ovo je slučaj oskulacije, jer tri konsektivne tačke određuju zajedničku kružnicu krivine u regularnoj zajedničkoj tački dveju krivih. Pramen konika dopunjen je parabolom koja prolazi kroz temeljnu tačku 4 i ima oskulaciju sa ostalim konikama u tački u kojoj se tri temeljne tačke poklapaju ($1=2=3$).

Za razne položaje posmatrača, dobijaju se različiti pramenovi krivih 4. i 3. reda koji svi imaju oskulaciju u tački \bar{S} i seku se u još jednoj tački baš kao i polazni pramen konika koji ima oskulaciju u tački S i seče se u još jednoj tački.

Pokazano kako je i "asimetrična" kriva 3. reda sa izolovanom dvostrukom tackom, iz P_3H pramena krivih 4. i 3. reda u stvari harmonijski simetrična sa polaznom elipsom koja spada u grupu simetričnih krivih.



Sl. 57 Asimetrični pramen konika

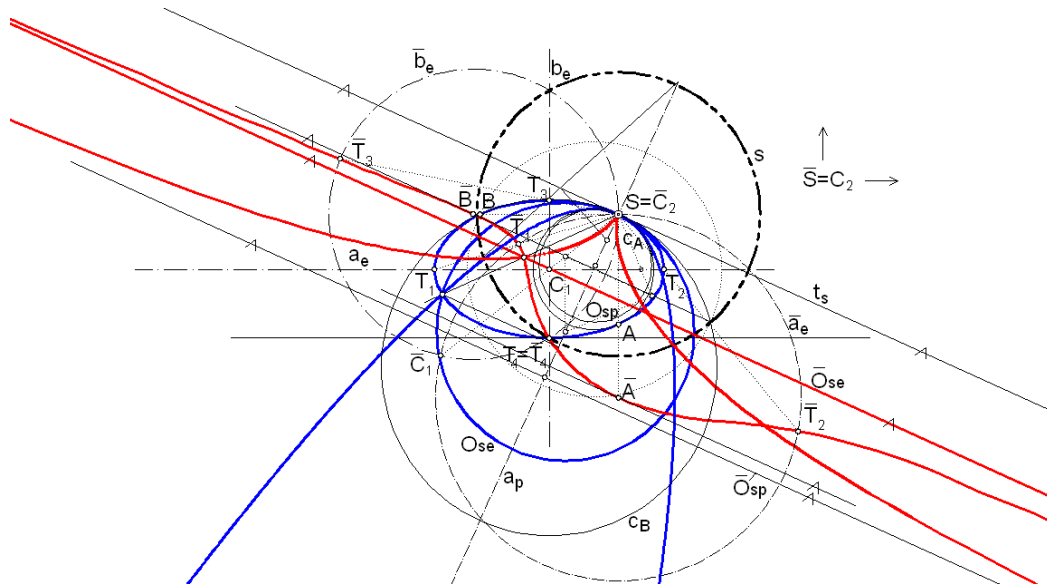
7.1.1 Centar inverzije izabran je u tački oskulacije svih konika iz P3H pramena

Uzmemo li krug inverzije sa centrom u tački (S) elipse dobijamo harmonijski ekvivalent asimetričnog pramena konika - pramen krivih 4. i 3. reda (Sl. 58). Elipsa se preslikava u asimetričnu krivu 3. reda (Sl. 59). Sva četiri temena elipse (T_1, T_2, T_3 i T_4) preslikaće se u temena u konačnosti dobijene krive 3. reda, a antipodna tačka \bar{S} biće obična tačka krive 3. reda. Asimptota krive 3. reda sada je pridružena oskulatoremnom krugu u običnoj tački (S) elipse. Svi mogući krugovi koji dodiruju elipsu u tački S (tj. imaju sa elipsom zajedničku tangentu u tački S) obrazovaće parbolički pramen krugova.

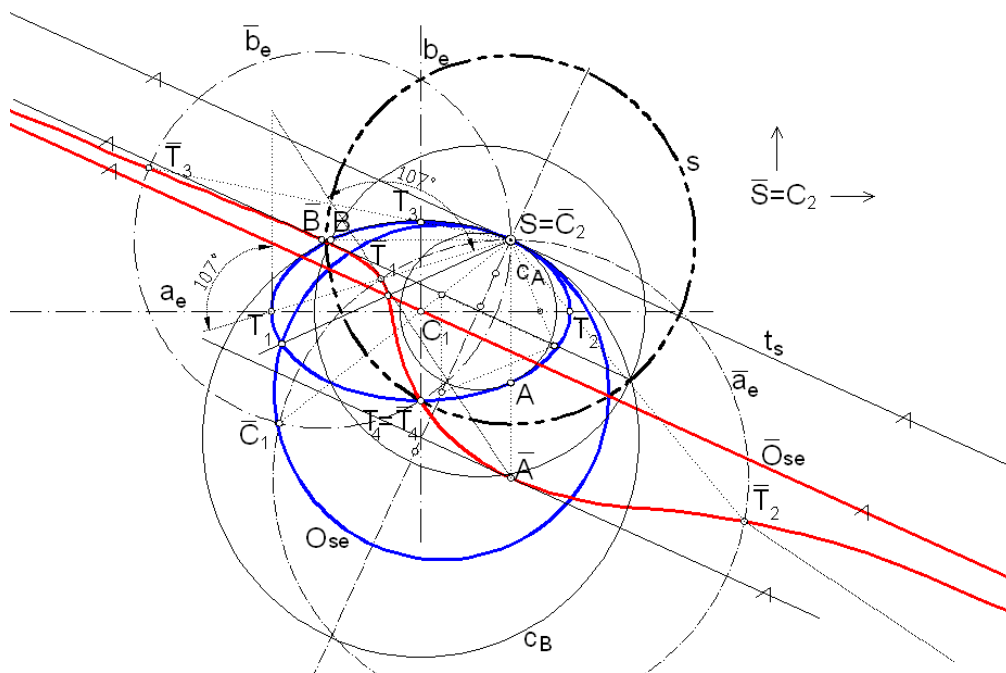
Krugovi ovog pramena preslikavaju se u pramen paralelnih "pravih" koje dodiruju krivu 3. reda u antipodnoj tački \bar{S} (pramen paralelnih tangenata krive). U ovom pramenu paralelnih tangenata nalazi se i asimptota (\bar{O}_{se}) krive 3. reda; ona je pridružena oskulatoremnom krugu O_{se} u tački S elipse. Kako oskulatoremni krug (O_{se}) u običnoj tački (S) elipse dodiruje i seče elipsu, tj. ima sa njom tri zajedničke konsektivne tačke (1,2,3), tako i asimptota \bar{O}_{se} kao oskulatorna "prava", ima sa krivom 3. reda tri zajedničke konsektivne tačke u antipodu.

Izdvojićemo elipsu iz pramena konika i objasnićemo kako se preslikava (Sl. 59). "Pravolinijske" ose simetrije a_e i b_e elipse (seku se u paru centara C_1 i \bar{S})

preslikavaju se u kružne ose simetrije \bar{a}_e i \bar{b}_e krive 3. reda (seku se u paru njenih centara \bar{C}_1 i S).



Sl. 58 Harmonijski ekvivalent asimetričnog pramena konika



Sl. 59 Uzajamna simetrija elipse i krive trećeg reda

Temena elipse preslikavaju se u temena krive 3. reda, a oskulatorni krugovi u temenima elipse u oskulatorne krugove u temenima krive 3. reda. Medutim, tangenta u

temenu jedne krive (koja kao "prava" prolazi kroz antipod \bar{S}) preslikava se u dodirni krug u temenu druge krive (koji prolazi kroz S), i obratno.

Elipsa, mora da seče svoje ose u temenim tačkama pod pravim uglom, a takođe i kriva 3. reda. Harmonijska simetrija je konformno preslikavanje, ugao između zraka inverzije $S - T_1 - \bar{T}_1$ i tangente elipse u temenu T_1 , jednak je uglu između tog istog zraka (preslikava se u samog sebe) i tangente krive 3. reda u temenu \bar{T}_1 . Pri tome, tangenta se, naravno, ne preslikava u tangentu, nego je ova druga tangenta u stvari tangenta dodirnog kruga u koji se preslikava prva tangenta u T_1). Ovi jednaki uglovi su obeleženi na Sl. 59 (u ovom slučaju to je ugao od 107 stepeni). Dakle, pri ovom preslikavanju veličina ugla ostaje invarijantna, ali se menja njegova orijentacija (konformno preslikavanje druge vrste).

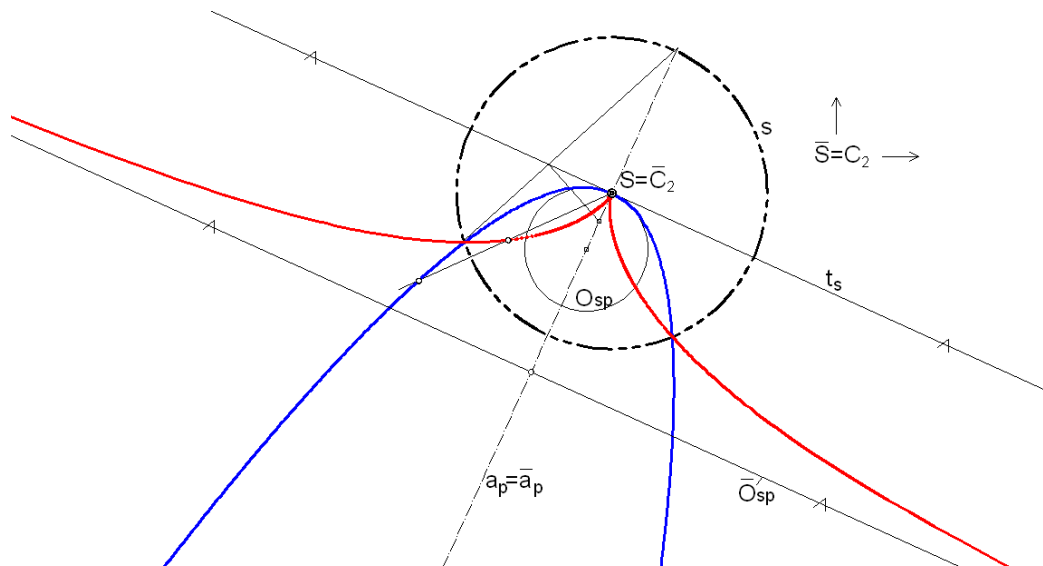
Krug O_{se} je samo jedan krug u paraboličkom pramenu krugova koji dodiruju elipsu u tački S . Krugovi koji dodiruju elipsu sa unutrašnje strane, seku elipsu još u jednom paru tačaka koji može biti realan, imaginaran ili poklopljen, dok oni sa druge strane zajedničke tangente seku elipsu još samo u paru konjugovano imaginarnih tačaka.

Od dodirnih krugova elipse koji se seku još u jednom paru realnih tačaka i onih koji se seku još u paru imaginarnih tačaka, nalaze se dva kruga koji elipsu još jednom dodiruju. Jedan dodiruje elipsu iznutra, u simetričnim tačkama A i S u odnosu na a_e , a drugi spolja, u simetričnim tačkama B i S u odnosu na b_e . Zato, ovim krugovima simetrične "prave" takođe dva puta dodiruju krivu 3. reda (u tačkama \bar{A} i \bar{S} , odnosno u \bar{B} i \bar{S}). To su njene dvostruke tangente (bitangente).

Tačke A i B na elipsi simetrične su preko osa a i b , sa tačkom S . Isto tako su i tačke \bar{A} i \bar{B} na krivoj 3. reda simetrične, preko osa \bar{a}_e i \bar{b}_e , sa tačkom \bar{S} u antipodu, što znači da su tačke \bar{A} i \bar{B} središta krugova \bar{a}_e i \bar{b}_e , kao harmonijskih simetrala krive 3. reda.

Eliptički pramen krugova kroz A i S (to su zraci simetrije elipse upravni na simetralu a) konformno se preslikava u pramen "pravih" kroz \bar{A} i \bar{S} . Taj pramen predstavlja zrake simetrije krive 3. reda koji su upravni na simetralu \bar{a}_e odnosno oni su prečnici kruga \bar{a}_e .

Na Sl. 60 prikazana je uzajamna simetrija parabole iz asimetričnog pramena konika i Dioklove cisoide. Kriva 3. reda ima jednu pravolinijsku osu harmonijske simetrije. Oskulatorni krug u temenu parabole preslikava se u asimptotu krive 3. reda.



Sl. 60 Uzajamna simetrija parabole iz asimetričnog pramena konika i Dioklove cisoide

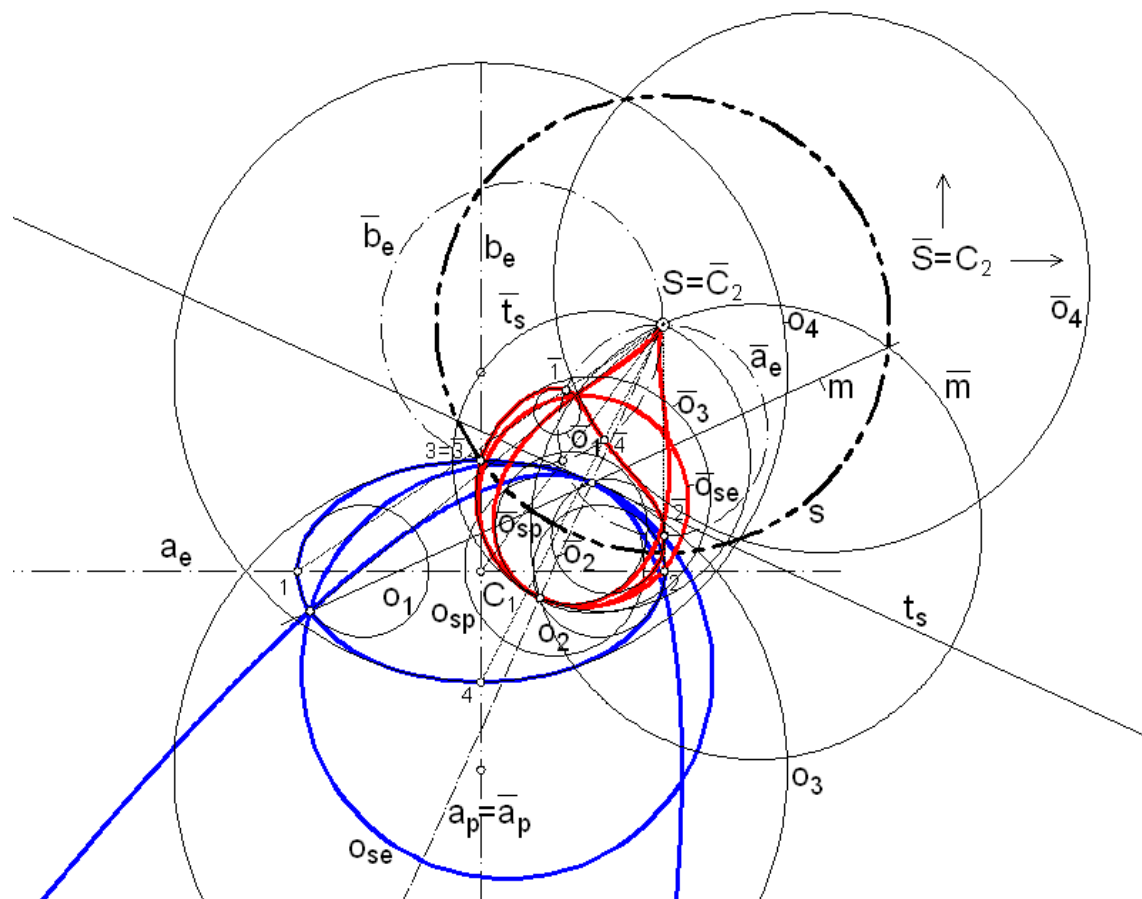
Degenerisane konike pramena su dve prave koje se seku u S , tako da se kao zraci inverzije preslikavaju same u sebe (videti raspored temeljnih tačaka na Sl. 57). Prva prava je tangenta pramena konika u temenu S . Druga prava je spojnica temeljnih tačaka u S (1,2,3) i temeljne tačke 4 asimetričnog pramena konika.

7.2 Centar inverzije izabran je u tački na osi parabole iz P_3H pramena

Asimetrični pramen krivih 4. reda nastao inverzijom asimetričnog pramena konika, prikazan je na Sl. 61. Preslikane su elipsa, parabola i naravno oskulatorni krug u dodirnoj tački pramena konika.

„Asimetrična“ kriva 4. reda, harmonijski simetrična elipsi, prikazana je na Sl. 62. Harmonijskom simetrijom u odnosu na krug s čije se središte S ne nalazi na elipsi, elipsa se preslika u krivu 4. reda. Elipsa se preslika u krivu 4. reda, koja liči na konturu pasulja (pasuljasta kriva) i za koju bi se, u klasičnom smislu, reklo da je asimetrična. Ona je simetrična isto kao i elipsa, ali u odnosu na svoje kružne ose \bar{a}_e i \bar{b}_e preko kojih se preslikava u samu sebe. Kriva je takođe i centralno simetrična u odnosu na tačke \bar{C}_1

i $\bar{C}_2 = S$, kao što je i elipsa u odnosu na C_1 i $C_2 = \bar{S}$ (\bar{S} je antipodna izolovana tačka elipse, a S je izolovana tačka krive 4.reda).



Sl. 61 Asimetrični pramen krivih 4.reda nastao inverzijom asimetričnog pramena konika

Uzajamna simetrija parabole iz asimetričnog pramena konika i krive 4. reda prikazana je na Sl. 63. Dobijena kriva ima jednu pravolinijsku osu harmonijske simetrije. Šiljak iz antipoda se preslikava u tačku S . Raspadnutu konuku pramena čine prava t - tangenta svih konika pramena u S i prava m spojnica temeljnih tačaka pramena. Ove dve prave se preslikaju u krugove \bar{t} i \bar{m} . Tangenta \bar{t} je dodirni krug u pridruženom temenu svih krivih 4. reda iz pramena.

Pojam relativizma u relativističkoj geometriji vezan je za ravnopravnost svih posmatrača i njihovih antipodnih tačaka. Za jednog posmatrača koji se nalazi na površini velike sfere, od svih mogućih krugova na toj sferi, on kao "prave" vidi samo krugove koji prolaze kroz njegov antipod. To znači da drugi posmatrač, koji ima svoju antipodnu tačku, ima druge svoje "prave" koje prolaze kroz tu njegovu antipodnu tačku. Kako svaki posmatrač na "sfernoj ravni" ima svoju antipodnu tačku, jedna ista kriva će za različite posmatrače izgledati različito. Isto tako, ukoliko posmatrač ostaje na istom mestu na sferi, dok krivu harmonijskom simetrijom preslikavamo, posmatrač će sve te krive videti kao uzajamno harmonijski simetrične krive sa ekvivalentnim geometrijskim i konstruktivnim elementima. Sve ove krive koje su "slične u malom" obrazuju grupu harmonijski simetričnih krivih.

Tako da je "asimetrična" pasuljasta kriva 4. reda, harmonijski simetrična elipsi, i za koju bi se, u klasičnom smislu, reklo da je asimetrična, takodje simetrična. Ona je simetrična isto kao i elipsa, ali u odnosu na svoje kružne ose \bar{a}_e i \bar{b}_e preko kojih se preslikava u samu sebe. Kriva je takodje i centralno simetrična u odnosu na tačke \bar{C}_1 i $\bar{C}_2 = S$, kao što je i elipsa u odnosu na C_1 i $C_2 = \bar{S}$ (\bar{S} je antipodna izolovana tačka elipse, a S je izolovana tačka krive 4. reda).

8 Pramenovi krivih 4. reda dobijeni "ravnim" sečenjem pramena površi četvrtog reda koji je ekvivalentan pramenu kvadrika kroz krivu 4. reda 1. vrste

8.1 O pramenovima površi drugog reda kroz prostornu krivu 4. reda 1. vrste

Prostorna kriva 4. reda 1. vrste dobija se presekom dve površi 2. reda i ona određuje čitav pramen površi 2. reda (kao što prava dobijena presekom ravni određuje čitav pramen ravni). Prostornu krivu zato nazivamo temeljna (fundamentalna) kriva pramena kvadrika ili "pramenjača" pramena kvadrika.

Među kvadrikama pramena nalaze se četiri konusa od kojih tri mogu biti i cilindri. Uvek su dva realna konusa, što znači da se prostorna kriva može dobiti presekom dve paraboličke kvadrike, konusa odnosno cilindra, tj. presekom najjednostavnijih površi 2. reda (Dovniković L., 1977).

Proučavanje pramenova konika (i njihovih harmonijskih ekvivalenata) kao ravnih preseka pramenova kvadrika urađeno je na prostornoj krivoj 4. reda 1. vrste koja ima frontalnu ravan simetrije. Poznato je da vrhovi četiri konusa predstavljaju temena autopolaranog tetraedra pramena kvadrika. Samo za pol u temenu ovog tetraedra polarna ravan je ista za sve kvadrike pramena. Za neku proizvoljno izabranu tačku, polarna ravan je različita za svaku kvadriku pramena. Kod pramena kvadrika sa ravni simetrije koja sadrži ose kvadrika jedan vrh autopolaranog tetraedra je u beskonačnosti.

Zajednička polarna ravan seče pramen kvadrika po pramenu njihovih konturnih konika (za pravac projektovanja iz pridruženog pola) koji je određen sa četiri tačke u kojima ta ravan seče prostornu krivu 4. reda 1. vrste. Tri para naspramnih stranica potpunog četvorotemenika (određenog sa te četiri tačke) predstavljaju konturne izvodnice tri konusa. Vrh četvrtog konusa je u pridruženom polu - četvrtom temenu

tetraedra. U implicitnom obliku, pramen površi koji prolazi kroz presečnu krivu 4. reda prve vrste koja je nastala preskom dve date površi određen je jednačinama:

$$F_1(x, y, z) = 0 \quad \text{i} \quad F_2(x, y, z) = 0$$

piše se u obliku:

$$F_1(x, y, z) + \lambda \cdot F_2(x, y, z) = 0.$$

Sama kriva 4. reda 1. vrste dobija se presekom površi (F_1 i F_2), pa je određena obema jednačinama:

$$F_1(x, y, z) = 0$$

$$F_2(x, y, z) = 0.$$

Eliminacijom jedne od koordinata, dobija se projekcija na odgovarajuću projekcijsku ravan.

8.2 Prostorna kriva 4. reda prve vrste sa samopresečnom tačkom (sa dve ravni simetrije) i njen harmonijski ekvivalent

U ovom poglavlju je proučavan harmonijski ekvivalent pramena kvadraka koji je prikazan na Sl. 64. Dati su harmonijski ekvivalenti za četiri grupe površi. Takođe su urađeni i njihovi prostorni modeli, kao i prostorni (3d) model pramena kvadraka i pramena ekvivalentnih kvadraka. Određen je ravan presek pramena kvadraka i presek ekvivalentnih površi sa sferom koja je harmonijski ekvivalent zadate presečne ravni

Kada je pol autopolarog tetraedra pramena kvadraka u fiktivnoj (beskonačno dalekoj) tački prostora, njegova polarna ravan je zajednička simetralna ravan pramena kvadraka na koju se prostorna kriva 4. reda 1. vrste (projektovana iz fiktivnog pola, dakle izvodnicama cilindra kao svojim bisekantama) dvostruko prekriva u koniku.

Postoji sedam vrsta i mogućih rasporeda za četiri temeljne tačke pramena konika (u zajedničkoj polarnoj ravni). U ovom poglavlju istraživana je prostorna kriva koja prolazi kroz dve poklopljene (1=2) i dve razdvojene temeljne tačke (3 i 4), što je prikazano na Sl. 64. Kroz ovu krivu 4 reda 1. vrste prolazi beskonačno mnogo kvadraka od kojih su dva konusa realna i poklopljena (dvostruki konus $V_1 = V_2$), a druga dva (V_3 i V_4) su realna i različita. Zajednički autopolarni tetraedar je degenerisan u zajedničku

dirnu ravan kvadrira. Prostorna kriva je sa samopresečnom dvostrukom tačkom u vrhu konusa $V_1 = V_2$ (dodir 1. reda).

Kroz prostornu krivu 4. reda 1. vrste prolazi beskonačno mnogo kvadrira. U ovom slučaju koji je dat na Sl. 64 iz svake grupe kvadrira (u zavisnosti od položaja ose kvadrirke z pravca) izdvojena je po jedna kvadrira i nacrtane su njihove konture u zajedničkoj simetralnoj ravni. Strelicama su obeležene granice u kojima biranjem vertikalne ose, dobijamo odgovarajuću kvadriru. U pramenu kvadrira su:

- 1) jedan parabolčki cilindar (osa x pravca) PC
- 2) beskonačno jednogranih rotacionih hiperboloida (osa z pravca, $\varphi > \varphi_k$) JRH
- 3) dvostruki rotacioni konus (osa z pravca) RK
- 4) beskonačno jednogranih rotacionih hiperboloida (osa z pravca, $\varphi < \varphi_k$) JRH
- 5) rotacioni cilindar (osa z pravca) RC
- 6) beskonačno izduženih rotacionih elipsoida (osa z pravca) IRE
- 7) jedna lopta L
- 8) beskonačno spljoštenih rotacionih elipsoida (osa z pravca) SRE

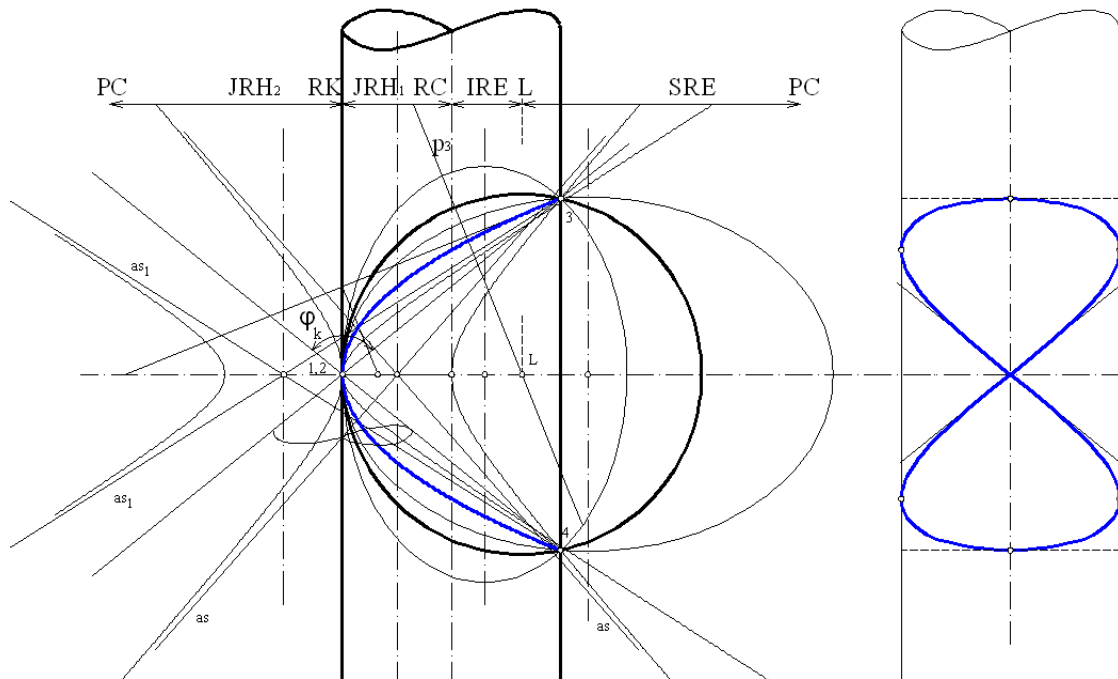
Podela je navedena prema magistarskom radu (Đukanović (Vasiljević) G.,2000).

U ovom pramena kvadrira kroz prostornu krivu 4. reda prve vrste podebljanom linijom su nacrtana lopta i rotacioni cilindar- osa z pravca koji se dodiruju u jednoj tački (Sl. 64).

"U Monžovim projekcijama površi 2. reda su predstavljene svojim konturama, koje su prave linije ili konike. Harmonijskom simetrijom konturnih elemenata površi, dobijaju se harmonijski ekvivalentni elementi, koji predstavljaju konture površi 3. i 4. reda. U zavisnosti od vrste konture na rodonačelnoj površi podela se može izvršiti na harmonijski ekvivalentne grupe:

1. konusa - u kojoj se nalaze površi 2, 3. i 4. reda;
2. cilindra - u kojoj se nalaze površi 2, 3. i 4. reda ;
3. elipsoida - u kojoj se nalaze površi 2, 3. i 4. reda;
4. hiperboloida - u kojoj se nalaze površi 2, 3. i 4. reda;
5. paraboloida - u kojoj se nalaze površi 2, 3. i 4. reda;
6. torusa - u kojoj se nalaze površi 4.reda. "

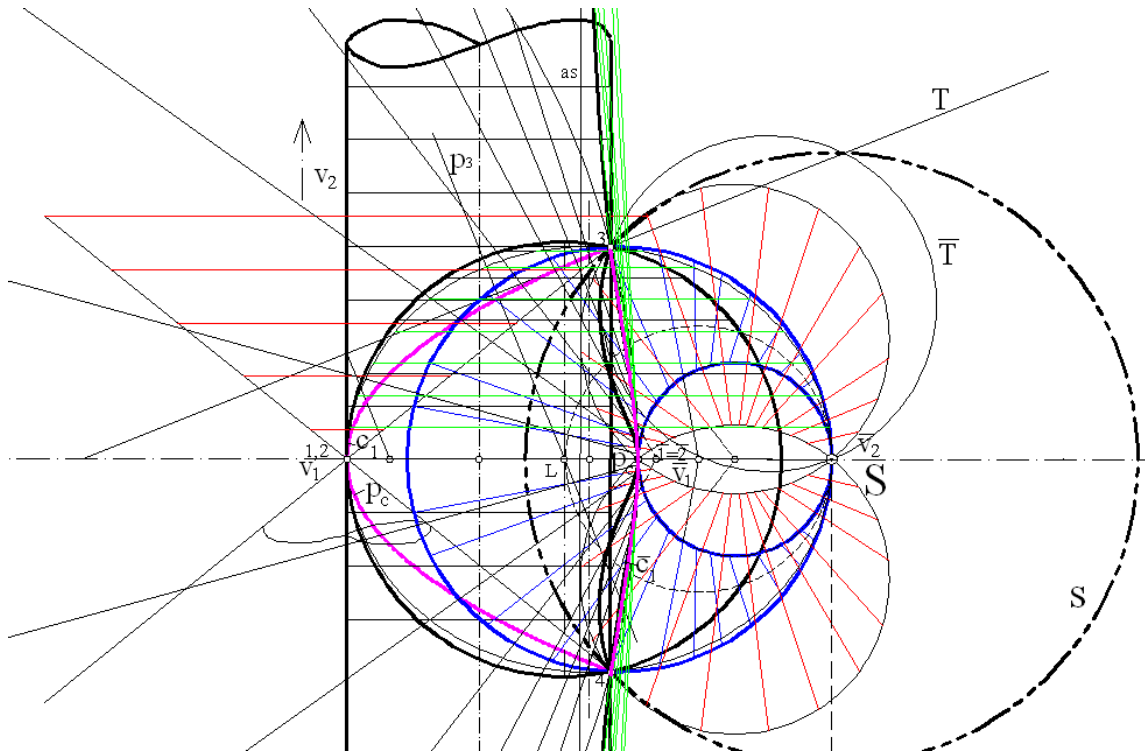
Podela je usvojena prema doktorskom radu (Stavrić M.,2002).



Sl. 64 Pramen kvadrika kroz prostornu krivu 4. reda 1. vrste

Prema osnovnim principima relativističke geometrije prava je ekvivalentna krugu, ravan sferi, konike su ekvivalentne krivim 4. ili 3. reda u "ravni", dok su kvadrike ekvivalentne odgovarajućim površima 3. i 4. reda. Sečenjem harmonijski ekvivalentnih površi sa harmonijski ekvivalentnim sferama dobijaju se harmonijski ekvivalentne presečne krive.

Na Sl. 65 prikazan je pramen kvadrika kroz prostornu krivu 4. reda prve vrste i njegov harmonijski ekvivalent - pramen površi 4. i 3. reda. Prostorna kriva 4. reda 1. vrste (c_1) koja je označena ljubičastom bojom (levo na Sl. 65) preslikava se u harmonijski ekvivalentnu krivu \bar{c}_1 koja je označena istom bojom (desno na Sl. 65). Zbog složenosti samog konstruktivnog postupka, biće posebno izdvojeno objašnjenje nastanka ekvivalentne površi za svaku karakterističnu kvadriku.



Sl. 65 Pramen kvadrika kroz prostornu krivu 4. reda 1. vrste i njemu ekvivalentan pramen površi 4. i 3.reda

8.3 Pojedinačne kvadrike iz pramena kroz prostornu krivu 4. reda 1. vrste i njihovi harmonijski ekvivalenti

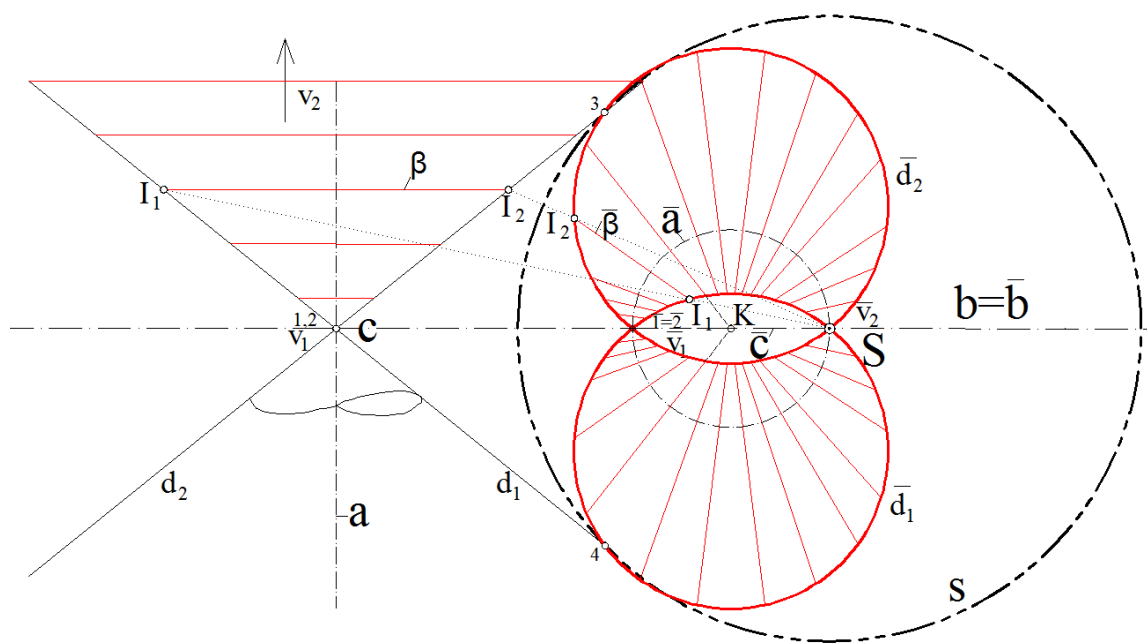
U ovom poglavlju izabrano je pet površi iz pramena kvadrika kroz prostornu krivu 4. reda 1. vrste, koji je dat na Sl. 64 i prikazano je njihovo preslikavanje u površi 4. i 3. reda.

Prvo je preslikan konus koji je rotacioni (Sl. 66) i čije konturne izvodnice prolaze kroz temeljne tačke pramena konika u simetralnoj ravni svih konika ($V_1=V_2$). Konus u relativističkoj geometriji ima dva vrha od kojih je jedan u antipodu. Konture konusa su dve "prave", a pošto je prava ekvivalentna krugu, konture ekvivalentnih površi u harmonijskoj grupi konusa, u zavisnosti od položaja (S, s), biće dva kruga, krug i "prava" ili dve "prave", koji se seku u dva vrha te površi 4. , 3. ili 2. reda. ("reda" u klasičnom smislu).

Rotacioni konus se invertuje u površ 4. reda sa kružnom osom i generatrisama koje se međusobno seku dva puta (u $\bar{1}=\bar{2}$ i u S). Krugovi koji su u horizontalnim ravnima upravnim na kružnu osu rotacione kvadrike, preslikavaju se u krugove koji su

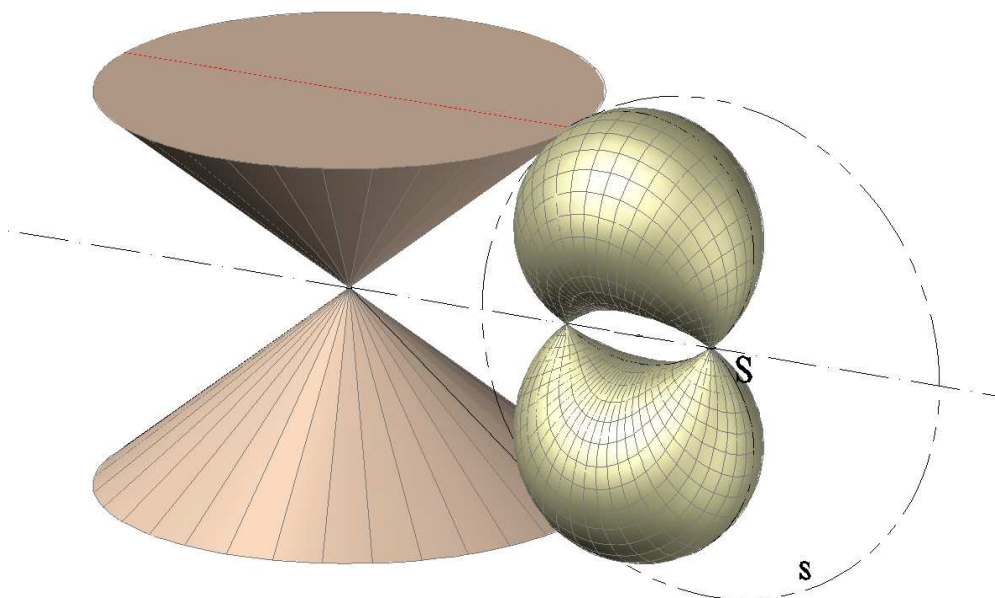
ravnima upravnim na kružnu osu ekvivalentne kvadrike. Konus je definisan krugom u H-ravni (β) i vrhom V_1 . Prostorna harmonijska simetrija konusa se vrši preko sfere- s i centra harmonijske simetrije S . Pri preslikavanju inverzijom koriste se dve prave (d_1 i d_2). (konture konusa u frontalnoj ravni simetrije), osa a koja se nalazi u F-ravni i krugovi u H-ravnima (β). Na Sl. 66, konus, iz pramena kvadrika, je preslikan u površ 4. reda. Rotacioni konus ima sistem krugova u H ravnima (označeni su crvenom bojom i u zračnom su položaju (na primer - β)), koji se preslikava u sistem krugova površi 4. reda (označeni su crvenom bojom ($\bar{\beta}$), u zračnom su položaju i vide se kao duži koje su konkurentne jednoj tački (K), koja je označena na osi simetrije). Dve prave koje su konturne izvodnice (d_1 i d_2) konusa preslikaju se u dva kruga (\bar{d}_1 i \bar{d}_2) koji prolaze kroz tačku $\bar{V}_2 = S$ i kroz preslikanu temeljnu tačku pramena konika \bar{V}_1 . Vrh konusa V_1 , koji se nalazi na krugu harmonijske simetrije, preslika se u pridruženi vrh površi \bar{V}_1 . Ose konusa a (z pravca) i c (osa c u frontalnoj ravni simetrije je u zračnom položaju jer je y pravca) preslikaju se u kružne ose koje prolaze tačkama S i \bar{V}_1 , dok se pravolinijska osa b kao zrak simetrije preslika sama u sebe.

Na osnovu prethodno izloženog možemo zaključiti da će površ 4. reda, koja se dobija harmonijskom simetrijom konusa ($n=2, 2 \times n =4$), za generatrisu i direktrisu imati kružnice u međusobno upravnim ravnima, jednu pravolinijsku i dve kružne ose harmonijske simetrije i dve singularne tačke.



Sl. 66 Konus i njegov harmonijski ekvivalent-površ 4. reda

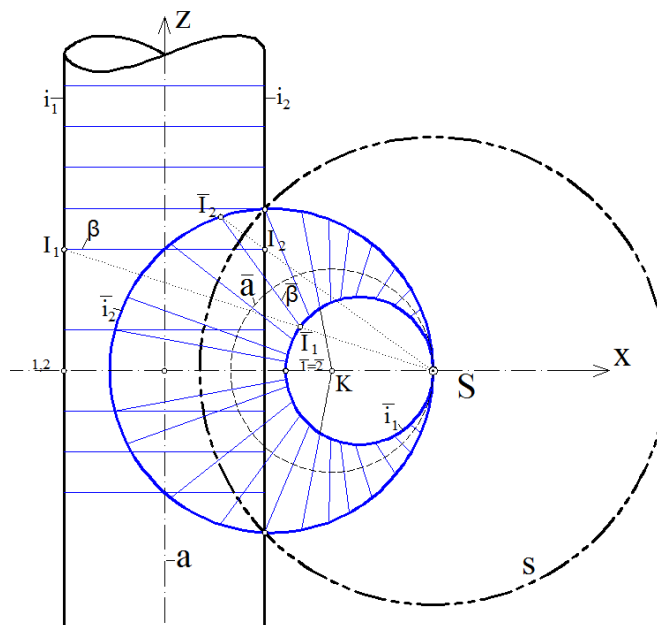
Na Sl. 67 urađen je prostorni model konusa i harmonijski ekvivalentne površi 4. reda (vretenasta ciklida) korišćenjem dva sistema kružnih preseka.



Sl. 67 Konus i njegov harmonijski ekvivalent – vretenasta ciklida (3d model)

Kada se dva vrha konusa poklope u antipodu, nastaje cilindar. Na Sl. 68 prikazan je rotacioni cilindar i njegov harmonijski ekvivalent - Dipenova ciklida. Rotacioni cilindar se preslikava u svoj ekvivalent sa kružnom osom i generatrisama koje

se međusobno dodiruju u S . Izvodnica cilindra se harmonijskom simetrijom preslikava u pravu ili krug. Dve izvodnice, koje se nalaze u istoj ravni, preslikaju se u dva kruga čiji je ugao samopreseka jednak nuli. Sve izvodnice harmonijski invertovane površi će se dodirivati u singularnoj - samododirnoj tački (K).



Sl. 68 Harmonijski ekvivalent cilindra-Dipenova ciklida

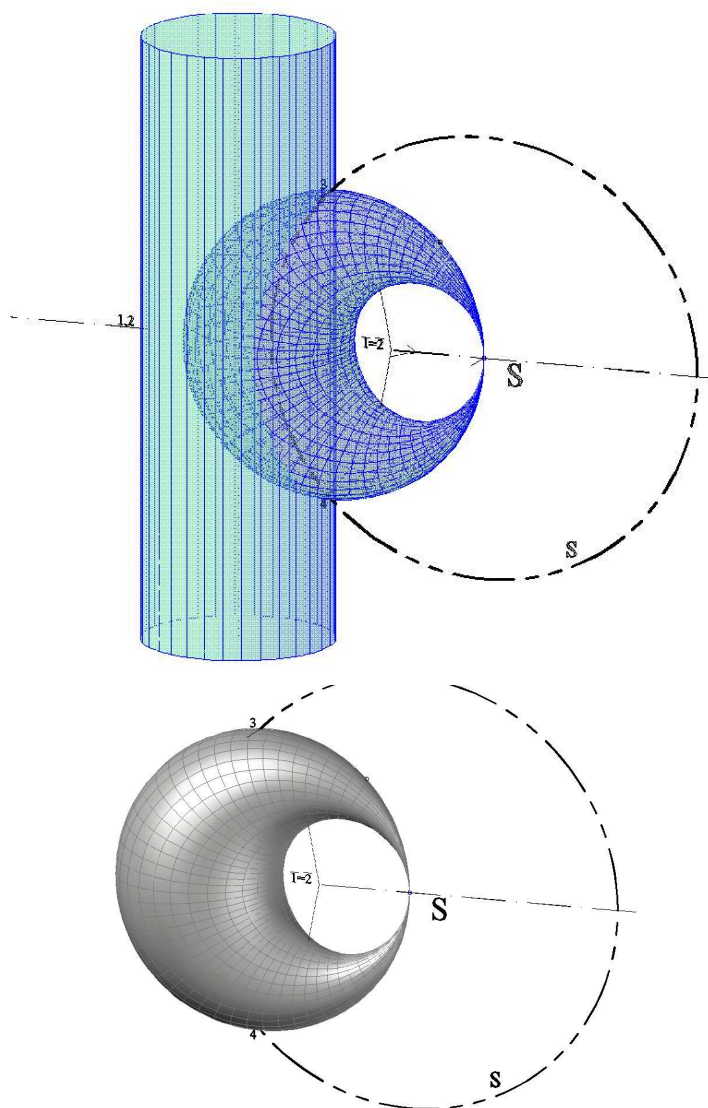
Rotacioni cilindar (Sl. 68) se invertuje u površ 4.reda sa kružnom osom i generatrisama koje se međusobno dodiruju u S . U F-ravni se vrši preslikavanje konturnih izvodnica (i_1 i i_2) u dva kruga koji se dodiruju u singularnoj tacki S (ugao samopreseka jednak je nuli). Svaka izvodnica rotacionog konusa sa centrom harmonijske simetrije obrazuje novu ravan u kojoj se vrši preslikavanje po dve izvodnice. Kao rezultat inverzije, dobijaju se krugovi koji prolaze singularnom tačkom (S) i obrazuju prvi sistem kružnih preseka površi 4. reda (vide se u 3d prikazu). Preslikavanje kružnih preseka cilindra, koji su upravni na osu a , vrši se na isti način kao kod rotacionog konusa, tako da se dobijaju kružni preseci inverzne površi koji su upravni na F-ravan (u zračnom su položaju) i kružnu osu površi a .

Na Sl. 69 prikazan je prostorni model površi 4. reda pod nazivom Dipenova ciklida koja je harmonijski ekvivalent cilindra. Modelovanje je slično kao kod vretenaste ciklide urađeno u AutoCAD-u korišćenjem dva sistema kružnih preseka.

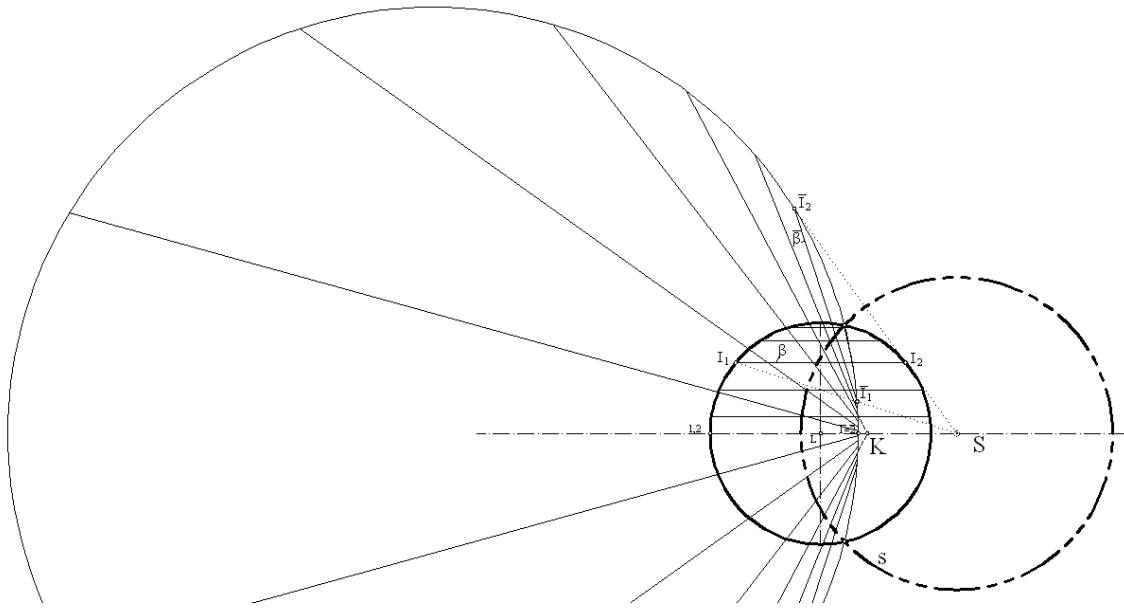
Poznato je da je harmonijski ekvivalent lopte takođe lopta i to je prikazano na Sl. 70. Pokazano je kako se krug lopte- β preslikava u krug - $\bar{\beta}$ preslikane lopte.

Kroz opisani pramen površi 4. reda osim graničnih površi prolazi i jedna površ 3. reda koja je ekvivalent troosnom elipsoidu, a data je na Sl. 71. Pošto je centar inverzije izabran u temenu konturne elipse u zajedničkoj simetralnoj ravni, ona se preslika u krivu 3. reda čija je asimptota označena na crtežu. Oskulatorni krug u tački S elipse preslika se u asimptotu.

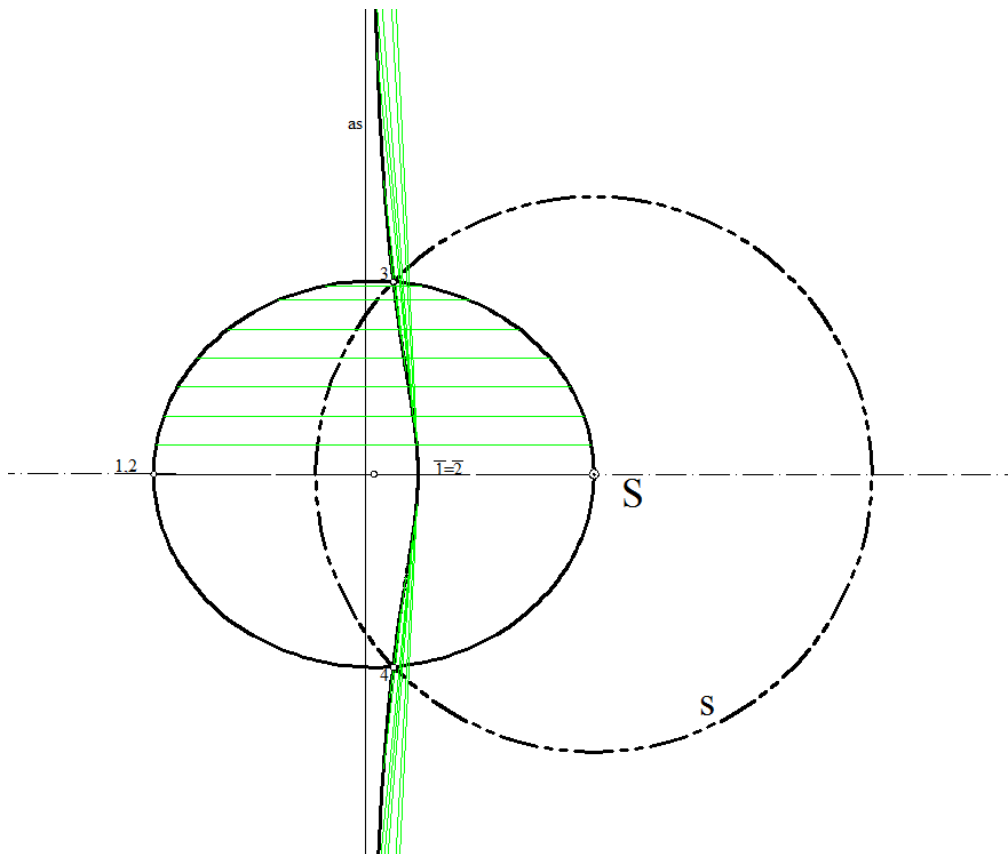
Na Sl. 73 modelovan je pramen konika i harmonijski ekvivalentan pramen površi 4 reda i označena je ljubičastom bojom kriva koja je ekvivalentna prostornoj krivi 4. reda 1. vrste.



Sl. 69 Cilindar i Dipenova ciklida - 3d model

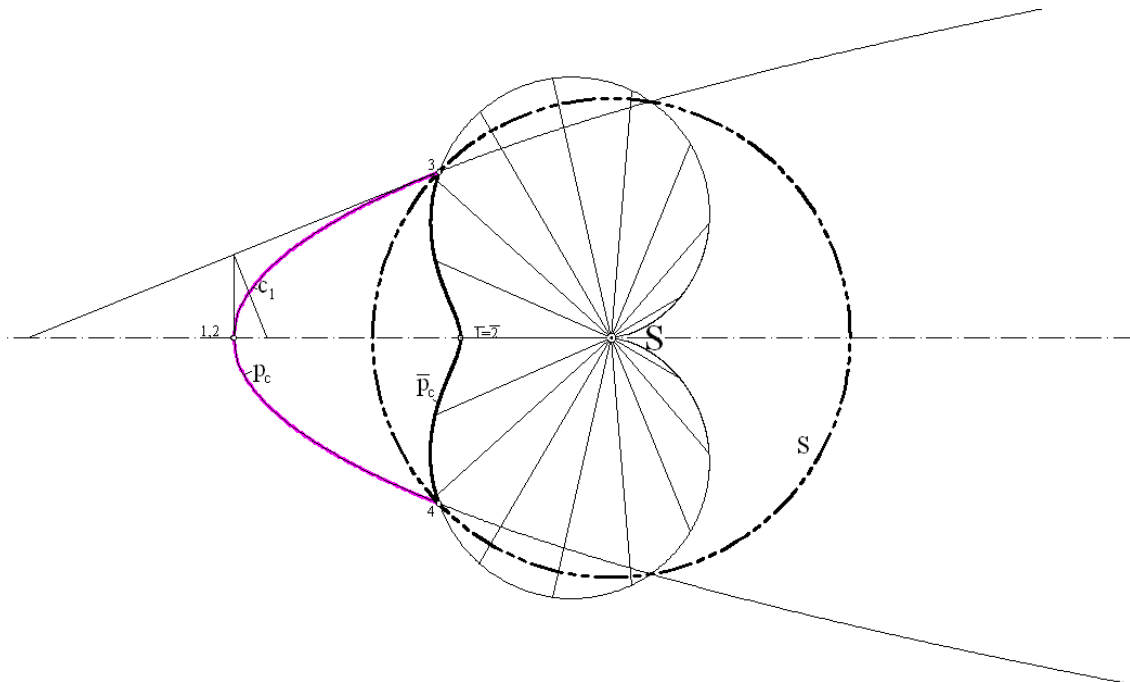


Sl. 70 Lopta iz pramena prostorne krive 4. reda i njen harmonijski ekvivalent takođe lopta

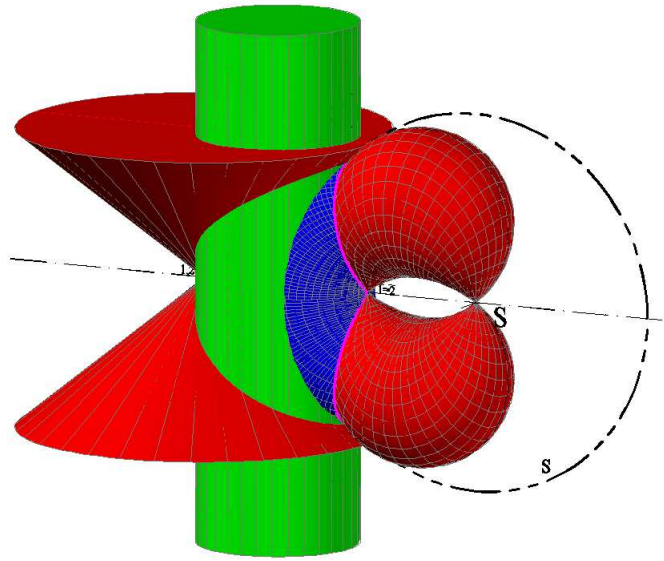


Sl. 71 Rotacioni elipsoid i njegov harmonijski ekvivalent-površ 3. reda

Parabolički cilindar se preslika u svoj ekvivalent, tako što se konturna parabola cilindra preslika u odnosu na centar i sferu inverzije (S, s) u konturnu krivu površi 4. reda. Što je prikazano na Sl. 72. Izvodnice paraboličkog cilindra koje su u projicirajućem položaju prolaze kroz antipod, preslikaju se u krugove (takođe u projicirajućem položaju) čiji su prečnici od S do konturne linije. Ovde se mora napomenuti da iako se kriva 4. reda prve vrste (c_1) i kontura paraboličkog cilindra u simetralnoj ravni svih kvadrika prekrivaju u projekciji na simetralnu ravan, harmonijski ekvivalent krive 4. reda prve vrste neće se u istoj simetralnoj ravni prekrivati sa harmonijskim ekvivalentom paraboličkog cilindra. To se vidi na Sl. 65 gde je harmonijski ekvivalent paraboličkog cilindra - \bar{p}_c , označen crnom bojom, a harmonijski ekvivalent krive 4. reda 1. vrste - \bar{c}_1 , označen ljubičastom bojom.



Sl. 72 Parabolički cilindar i njegov harmonijski ekvivalent površ 4. reda sa šiljkom



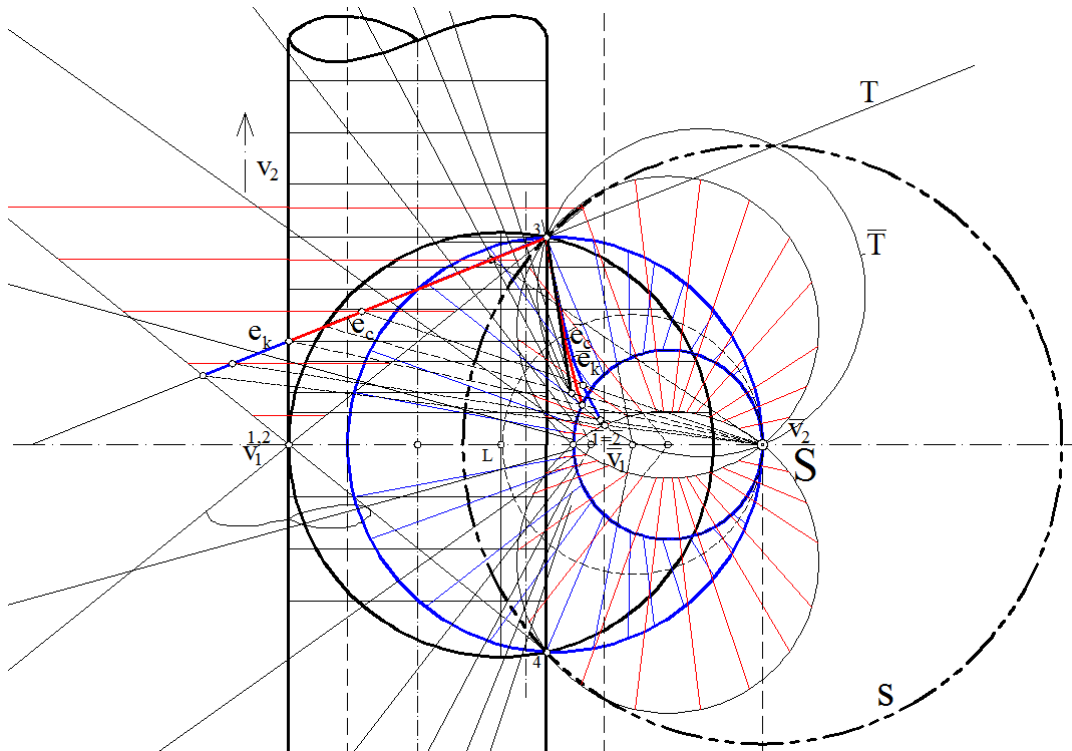
Sl. 73 Pramen konika i harmonijski ekvivalentan pramen površi 4 reda - 3d model

Kroz krivu \bar{c}_1 , osim ekvivalentnog pramena rotacionih kvadraka, prolazi i pramen ekvivalentnih kvadraka koje su harmonijski ekvivalentne svim kvadrikama iz pramena kroz prostornu krivu 4, reda prve vrste.

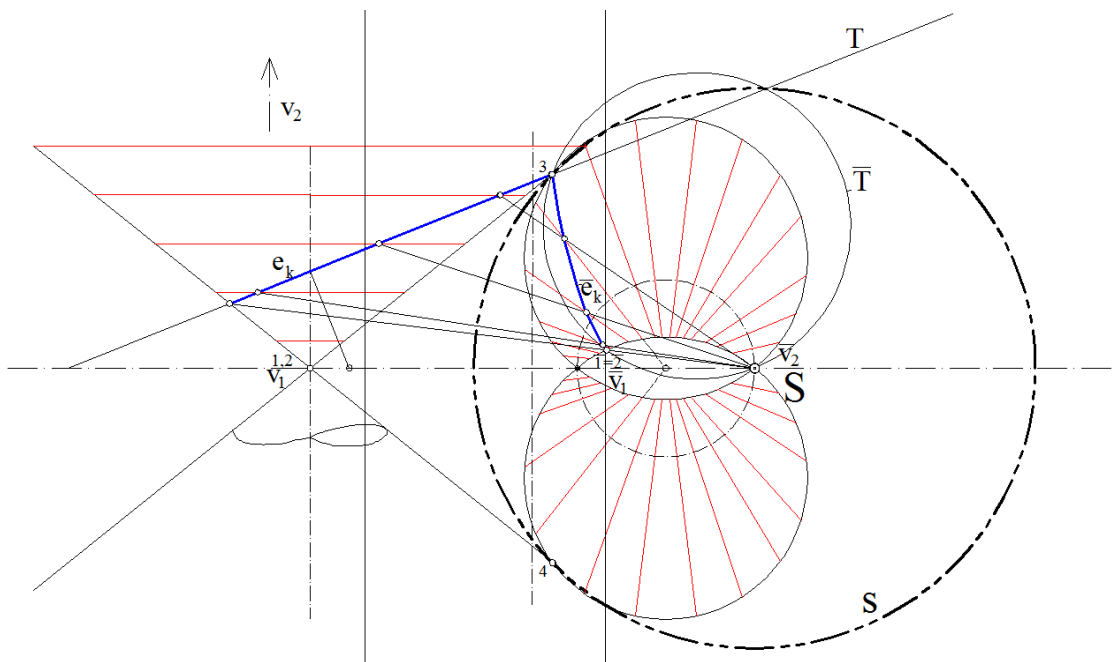
Zaključak: Sve sfere u prostoru mogu biti sfere inverzije za krivu 4. reda 1. vrste i njoj harmonijski ekvivalentnu krivu. Kroz bilo koju od ovih prostornih krivih 4, reda prolazi jedinstven pramen kvadraka, dok kroz ekvivalentnu krivu, s obzirom da bilo koja sfera može biti sfera inverzije, prolazi beskonačno mnogo (∞^3) pramenova površi 4. reda, kojima odgovaraju svi ostali pramenovi kvadraka koji su različiti od polaznog jedinstvenog pramena (Dovniković L., 2004.).

8.4 Ravan presek pramena kvadraka kroz prostornu krivu 4. reda 1. vrste i njegov harmonijski ekvivalent

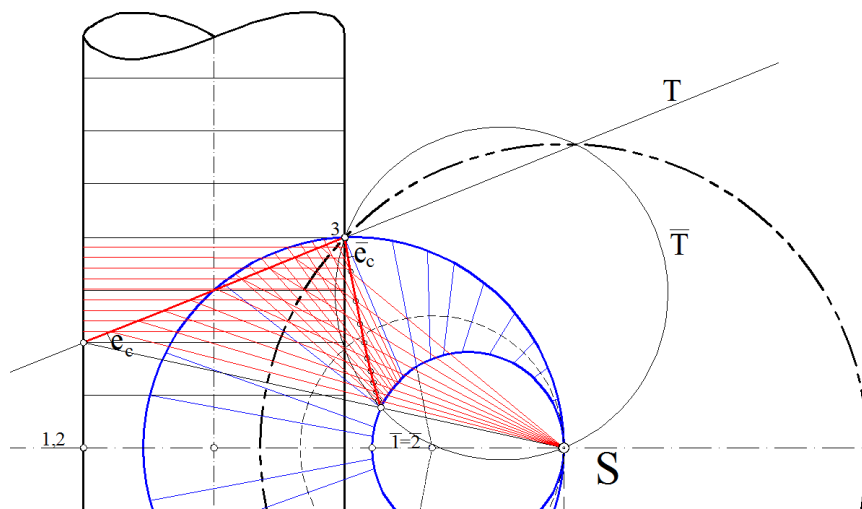
Za sečenje pramena kvadraka izabrana je hiperoskulatorna ravan svih kvadraka - T. Harmonijski ekvivalent ove ravni za pol S i sferu inverzije s je sfera \bar{T} . Posmatrane su kvadrike: konus, cilindar i lopta. Harmonijski ekvivalentna kriva presečnoj elipsi je prostorna kriva koja se dobija presekom sfere \bar{T} i površi koja je harmonijski ekvivalent rotacionog konusa (Sl. 75) (Đukanović(Vasiljević) G., 2002).



Sl. 74 Pramen konika u presečnoj ravni T i njemu ekvivalentan pramen sfernih konika na preslikanoj "ravni" \bar{T}



Sl. 75 Harmonijski ekvivalent elipse (e_k) - eliptička kriva na površi 4.reda (\bar{e}_k)



Sl. 76 Harmonijski ekvivalent elipse (e_c) - eliptička kriva na Dipenovoj ciklidi (\bar{e}_k)

Harmonijski ekvivalent elipse (e_k), koja se dobija presekom ravni T i konusa, je kriva na površi 4. reda koja je na Sl. 75 označena sa \bar{e}_k .

Harmonijski ekvivalent elipse (e_c), koja se dobija presekom ravni T i cilindra, je kriva na Dipenovoj ciklidi koja je na Sl. 76 označena sa \bar{e}_c .

Presekom lopte i ravni dobija se krug čiji je harmonijski ekvivalent opet krug, jer predstavlja presek dve sfere (sfere inverzije i "ravni" \bar{T}).

Može se zaključiti da je harmonijski ekvivalent pramena konika koje se dobijaju u oskulatornoj ravni pramena kvadraka u tački 3, harmonijski ekvivalentan pramenu krivih 4. reda koji takođe ima hiperoskulaciju u tački 3. Sfera inverzije prolazi kroz tačku 3, tako da ta tačka posle inverznog preslikavanja ostaje na svom mestu.

9 Proširenje pojma simetrije i pravci za dalja istraživanja

9.1 Tri najvažnije simetrije

Tri najvažnije simetrije prema (Dovniković L., 2012):

1. Relativistička inverzija (konformna), koja je korišćena u prethodnim poglavljima br. 4. 6 i u poglavlju br. 8.,
2. Relativistička harmonijska homologija (nekonformna), koja je takođe primenjivana u radu u poglavljima br.5 i br.9.
3. Supersimetrija tj. invertovana harmonijska homologija (nekonformna) koja je predmet ovog poglavlja.,

U ovom delu rada prepoznavanjem ekvivalentnosti inverzije sa klasičnom osnom simetrijom (nekonformna simetrija) ukazano je na neograničene mogućnosti za preslikavanje krivih i površi i dobijanje novih oblika koji će biti od koristi i u teoriji geometrije kao i u arhitektonskoj praksi. Istraživanja u oblasti proširenih simetrija biće neiscrpan prostor za dalja otkrića o ravanskim i prostornim oblicima. Prednost i koristi simetrije su da jednu krivu možemo preslikavati mnogo puta i sve dobijene krive biće uzajamno simetrične, a pružaće bogatstvo željenih oblika.

U relativističkoj geometriji prvo je trebalo doći do jedinstvenog pojma prave linije, što je faktički urađeno razdvajanjem pojma relativističke "prave linije" (kao kruga kroz antipodnu tačku posmatrača) od pojma geodezijske linije (kao najkraćeg rastojanja između dve tačke na bilo kojoj površi, merenog duž niti zategnute po toj površi). Pošto je i "ravan" sfera, kroz dve tačke na "ravni" prolazi pramen krugova od kojih je samo jedan veliki krug – geodezik, i njega će kao "pravu liniju" videti samo oni posmatrači čije su stajne tačke, pa time i njihove antipodne tačke, na tom velikom krugu, dok će svaki od ostalih posmatrača videti kao "pravu liniju" samo onaj ne-geodezijski krug koji prolazi kroz njegovu antipodnu tačku, tako da će i pomenuti jedini geodezik za njih biti običan krug.

Kroz stajnu tačku posmatrača na "ravni" prolazi pramen njegovih "pravih" geodezika i svaka od tih "pravih" određuje pramen sebi paralelnih "pravih" koje nisu geodezici jer se, udaljavanjem od geodezika na obe strane, njihov prečnik smanjuje, tako da su sve antipodne "prave" jednog posmatrača – kao od njega najudaljenije "prave" u svim pravcima – infinitezimalni krugovi koji, kao i sve ostale "prave" u toj "ravni", prolaze kroz geometrijsku antipodnu tačku posmatrača. Tako dolazimo do neobičnog zaključka da – za razliku od projektivne ravni koja ima samo jednu beskonačno daleku pravu za sve posmatrača – relativistička "ravan" ima beskonačno mnogo infinitezimalnih antipodnih "pravih" za svakog (od ∞^2) posmatrača ponaosob. Međutim, ma koliko bila čudna, ova činjenica predstavlja ključ koji nam otvara put ka stvaranju jednostavnog mehanizma za konstrukciju i dekonstrukciju singularnih tačaka krivih, pa zatim i površi.

Homologija ili kako je drugačije zovemo perspektivna kolineacija prikazana je na Sl. 77. Koeficijent homologije može biti bilo koji broj dok je kod inverzije on -1. Ako posmatramo sliku u gornjem desnom uglu i posmatrača u S . Sve crvene i zelene linije za njega su "prave", a to su u stvari krugovi kroz njegov antipod.

Najmanja dva kružića su u stvari u samom antipodu. I ovo važi za sve geodezike kroz stajnu tačku posmatrača. Dakle posmatrač za bilo koji pravac kretanja ima svoje beskonačno daleke prave u antipodu, dok je u klasičnoj geometriji postojala samo jedna beskonačno daleka prava za sve posmatrača.

Na Sl. 77 se vidi kako se homologijom stvore singularne tačke. Preslikavanjem ravni (1) u ravan (2). Ako krug koji preslikavamo dodiruje nedoglednicu $u_1=v_2$, on će se preslikati u parabolu, ako je seče u hiperbolu i ako je dodiruje u parabolu. Homologija je centralo osno simetrična. Poklopljene su nedoglednice $u_1=v_2$ tačno na sredini vertikalnog rastojanja od S do obeju ravni 1 i 2. To je prikazano polukrugom na slici.

Pravilo za preslikavanje tačaka je prikazano na Sl. 78. Kroz tačke S i $P(x,y)$ se postavi prava (napisane su jednačine prave i kruga (kroz neku tačku $P(x,y)$) i odredi se presečna tačka sa krugom s . Zatim se rastojanje od tačke P do kružne ose s , prebaci na drugu stranu u pravcu prema centru simetrije S .

Ovo su jednačine za koordinate preslikane tačke $\bar{P}(\bar{x}, \bar{y})$, ako je tačka koja se preslikava $P(x,y)$:

$$\bar{x} = \frac{4rx^2}{x^2 + y^2} - x \qquad \bar{y} = \frac{4rxy}{x^2 + y^2} - y$$

Kada se jedna iz harmonijske četvorke tačaka pošalje u antipod onda će njoj invertovana tačka doći na ivicu kruga. Bilo koja tačka toga kruga može biti centar simetrije. Pravolinijski zraci se preslikaju u krugove i ovi kružni zraci su ravnopravni sa njima. Na Sl. 77 inverzijom osa s se preslika u krug, a nedoglednica u duplo veći krug. Praćeno je preslikavanje tačaka N i M i pokazano je koja se rastojanja prenose od tačke koju preslikavamo do ose simetrije s i od ose s (od te tačke na osi) na drugu stranu zrakom prema S to isto rastojanje.

9.2 Izuzetne mogućnosti nekonformne simetrije

Nekonformna simetrija u odnosu na krug, kao inverzna slika relativističke homologije, omogućava nam da proces formiranja i rasformiranja singularnih tačaka, koji se u homologiji (projiciranjem nedoglednice u antipodnu kružnu tačku) završavao u "beskonačno" dalekom antipodu, sada izvodimo neposredno pred očima posmatrača. Za razliku od inverzije kao konformne simetrije, koja menja samo oblik krive i ništa više, nekonformna simetrija može (ali i ne mora) da menja gotovo sve što je u vezi sa brojem i vrstom singularnih tačaka (Dovniković L., 2010).

Klasične konstrukcije konika, kao i krivih 3. i 4. reda, projektivnim pridruživanjem pramenova krugova i pravih, takođe upućuju na zaključak da su sve tako dobijene krive cirkularne, jer njima pripadaju sve zajedničke tačke parova pridruženih elemenata (krug-krug, "prava"- "prava", ili krug-"prava"), a to su njihov par presečnih tačaka i njihova zajednička cirkularna dvostruka tačka u antipodu. Pošto je jedna presečna tačka svih parova "pravih" u antipodu, očigledno je to singularna tačka svih konika.

Sve te različite klasične konstrukcije "različitih" krivih sada se mogu zameniti jednom konformnom simetrijom (inverzijom), kojom se od jedne konike može proizvesti celokupno mnoštvo njenih konformno ekvivalentnih oblika sačinjeno od cirkularnih krivih 4. i (klasičnog) 3. reda, baš kao što se i od jednog kruga može

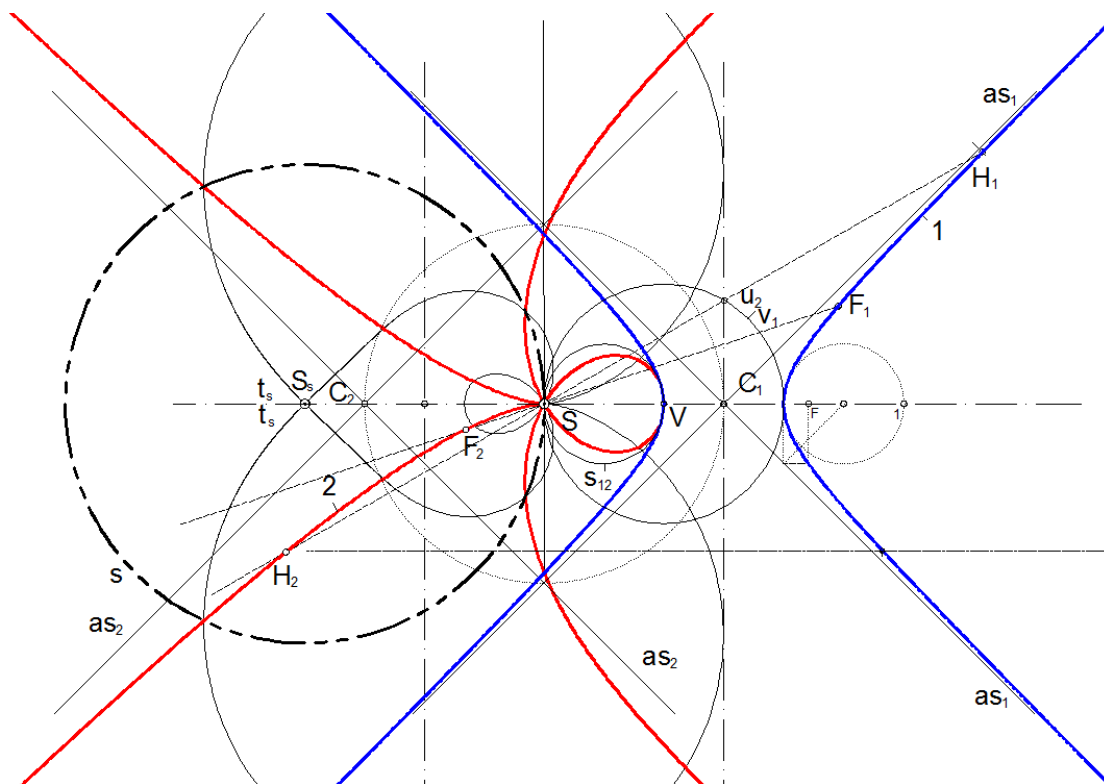
proizvesti celokupno mnoštvo svih ostalih njemu konformno ekvivalentnih krugova i "pravih" na "ravni". S druge strane, mnoštvo cirkularnih krivih 4. i 3. reda u direktnim je nekonformnim simetrijama (to jest invertovanim harmonijskim homologijama) sa mnoštvom krugova i "pravih", pri čemu su krugovi simetrični sa krivim 4. reda, a "prave" sa krivim klasičnog 3. reda, dok zajednička cirkularna dvostruka tačka ostaje nepromenjena u fiksnom antipodnom centru svih ovih nekonformnih simetrija.

Posle svega rečenog evidentno je da je položaj cirkularne tačke kruga neodređen, jer se krug može invertovati u samog sebe u odnosu na bezbrojne polove inverzije, koji su pridruženi antipodnoj dvostrukoj C-tački kruga-konike, što znači da bi svaka C-tačka "ravni" ili sfere sa krugom kao klasičnom krivom 2. reda mogla predstavljati krivu 4. reda.

Ta neodređenost položaja cirkularne tačke se prenosi i na krive viših redova dobijene lancem ovih simetrija. Tako bi, na primer, cirkularna kriva 4. reda, dobijena inverzijom konike imala C-tačku poklopljenu sa svojom singularnom E, P ili H-tačkom, dok bi ista kriva dobijena preslikavanjem kruga nekonformnom simetrijom imala C-tačku u antipodu, dakle odvojenu od te singularne tačke. U stvari, nevolje sa cirkularnim tačkama dolaze od činjenice da su to površinske tačke "ravni" i sfere, tako da – inverzijom ovih površi u same sebe, ili jedne u drugu – pridruženi parovi cirkularnih tačaka samo zamene mesta, bez vidljivih tragova njihove seobe. Pošto su, pri inverzijama, sve C-tačke u polovima inverzije pridružene antipodnoj C-tački, koja se opet nekonformnom simetrijom uvek preslika u samu sebe, sve krive dobijene konformnim i nekonformnim simetrijama koje u antipodu imaju samo tu dvostruku tačku nazivaćemo cirkularnim krivim linijama, ali im tu izolovanu dvostruku tačku (kao svačiju i ničiju) nećemo računavati u totalni red krive (totalni red = klasični red + strukost antipodne tačke), jer bi u tom slučaju redove svih krivih morali uvećati za dva (tako da bi "prave" i krugovi bili krive 4. reda, ostale konike i njihovi ekvivalenti 6. reda, i tako dalje, što bi napravilo nelogičnu prazninu na samom početku niza parnih brojeva).

Da u novoj geometriji sve algebarske krive moraju biti parnog totalnog reda, sledi iz činjenice da sve krive klasičnog neparnog reda uvek imaju barem jednu realnu granu koja prolazi kroz antipodnu tačku "ravni", jer se lanac nekonformno simetričnih krivih neparnog reda dobija upravo polazeći od "prave" čija jedina antipodna tačka uz S^A ostaje fiksna za sve krive u tom lancu. Svaka kriva neparnog reda, kada ne prolazi

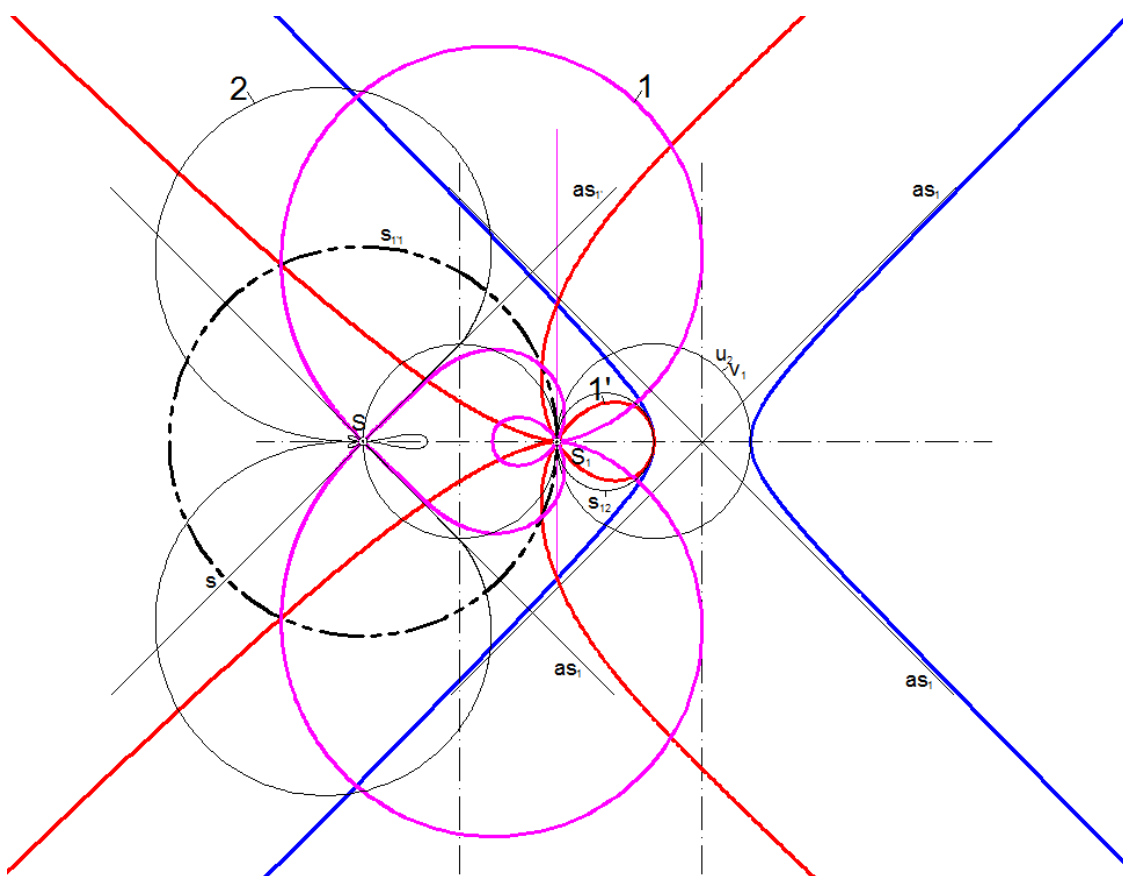
kroz pol inverzije, invertuje se u krivu parnog reda koja ne prolazi kroz antipod, što znači da je njen totalni red jednak klasičnom. To nam pokazuje da "prave" ne seku krivu višeg reda u istom broju tačaka (koji je jednak njenom klasičnom redu), tj. da Bezu-ova teorema u relativističkoj geometriji ne važi.



Sl. 79 Uzajamna simetrija hiperbole i krive 8. reda

Hiperbola **1** (označena je plavom bojom) je nekonformnom simetrijom preslikana u krivu **2** (označena je crvenom bojom), što je prikazano na Sl. 79. U relativističkoj geometriji hiperbola je 4. reda ($2+2^A$) dok je dobijena kriva 8. reda ($6+2^A$) sa 4-strukom tačkom u S . Dvostruka tačka u antipodnom centru simetrije je zajednička za obe krive, i zato su im pripadajuće asimptote paralelne. Pošto v_1 seče i dodiruje hiperbolu, 4-struka tačka je sastavljena od H-tačke (čvora) i P-tačke (šiljka). Totalni redovi dveju krivih povezani su relacijom $n_2 = n_1 - m_{1S} + m_{2S}$, što znači da se red polazne krive smanjuje za strukost njene (eventualne) tačke u S (koja se razvezuje, ili, ako je jednostruka, samo izmešta iz S), a uvećava za strukost novostvorene tačke u S . Pošto su "prava" i krug ekvivalentne krive 2. reda, one seku koniku i njoj ekvivalente krive 4. reda u istom broju tačaka, dakle 4, što znači da je strukost novostvorene tačke

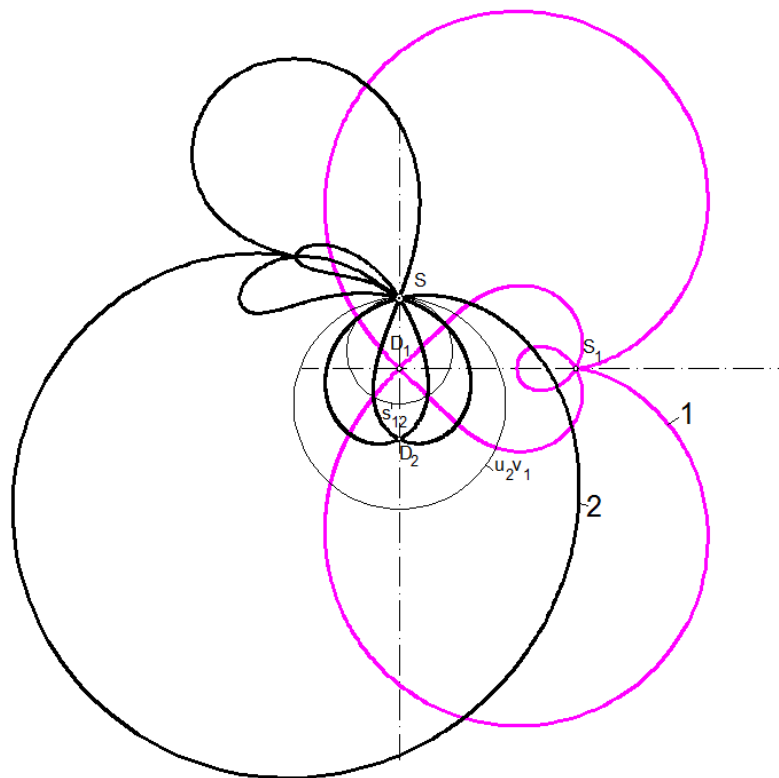
uvek jednaka redu polazne krive umanjenom za broj njenih prolaza kroz S (jer te tačke ne učestvuju u stvaranju nove singularne tačke), to jest $m_{2S} = n_1 - m_{1S}$, iz čega sledi takođe da je $n_2 = 2(n_1 - m_{1S})$, odnosno $n_1 = \frac{1}{2} n_2 + m_{1S}$. Za obrnutu transformaciju važi ista ravnoteža, $n_1 - m_{1S} = n_2 - m_{2S}$, tj. $n_1 = n_2 - m_{2S} + m_{1S}$. Opšti zaključak je da se jednom nekonformnom simetrijom (tj. invertovanom homologijom) red polazne krive može najviše udvostručiti, odnosno prepoloviti (kada je $m_{1S}=0$, tj. $m_{2S}=n_1$), a može ostati i nepromenjen (kada je $m_{1S}=\frac{1}{2} n_1=m_{2S}=\frac{1}{2} n_2$).



Sl. 80 Uzajamna simetrija hiperbole i krivih 8 i 12 reda (relativistički red)

Kriva $1'$ sa čvorom u S^A , tj. kriva 8. reda sa, invertovana je u krivu 1 sa čvorom u polu S , koja je zatim nekonformnom simetrijom (s_{12}, S^A) transformisana u krivu 12. reda sa 6-strukom tačkom u S što je prikazano na Sl. 80. Četvorostruku tačku S_I , zajedno sa tačkama 5_1 i 6_1 , nedogledni krug v_1 steže u 6-struku tačku u S , pri čemu tangente u šiljku S_I ostaju tangente i u šiljku S , tangente u čvoru S_I prelaze u poklopljene tangente u samodirnoj tački S , dok tačke 5_1 i 6_1 daju čvor u S . Dvostruka tačka S krive 1 rasformirana je u obične tačke 7_2 i 8_2 na krivoj 2 .

Ista kriva **1** preslikana je u krivu 16. reda sa 8-strukom tačkom S sastavljenom od šiljka (sa $t_{1S}=t_{2S}$), dva čvora (od 3,4 i 5,6) i jedne izolovane dvostruke tačke (od para k.i. tačaka) što je dato na Sl. 81. Singularne tačke S_1 i D_1 preslikaju se u isto takve singularne tačke S_2 i D_2 sa promenjenim uglom između tangenata u pridruženim čvorovima, dok šiljak u S_1 prelazi u šiljak u S_2 (normala n_{S1} "preslika" se u normalu n_{S2} jer se centar O_{S1} dodirnog kruga dvostruke tangente u S_1 preslika, centralnom simetrijom u odnosu na O_s , u centar O_{S2} dodirnog kruga dvostruke tangente u S_2 pošto oba kruga prolaze i kroz S).

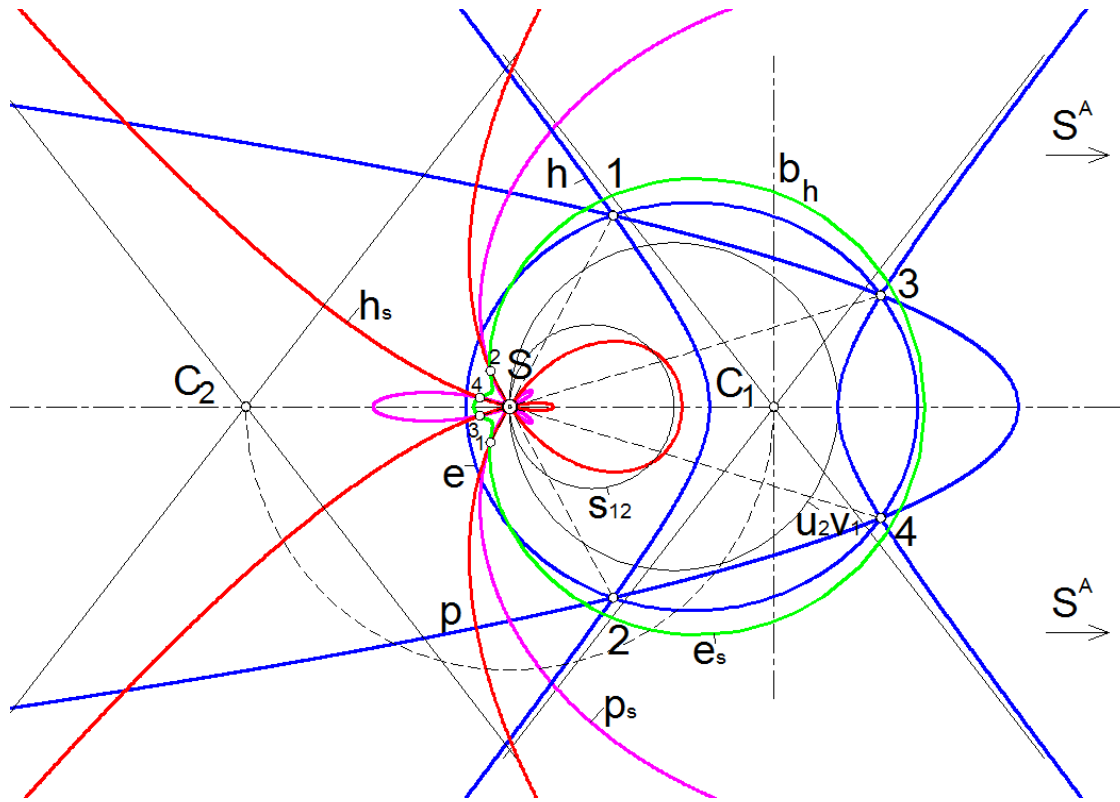


Sl. 81 Kriva 16 reda koja je simetrična polaznoj hiperboli

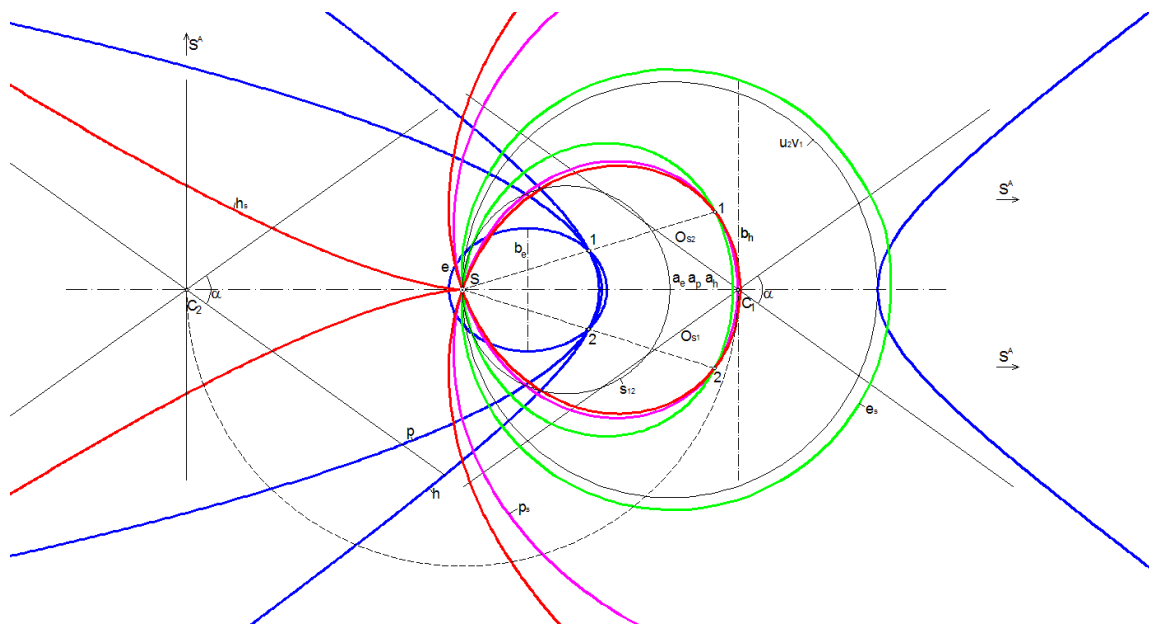
Nekonformnom simetrijom preslikan je HH pramen konika u HH pramen krivih i to je prikazano na Sl. 82. Po klasičnom tumačenju invertovani pramen krivih sastoji se od krivih 4. reda, dok su po relativističkom tumačenju, poštujući prethodno objašnjenje, to krive 8 reda.

Pramen krivih osmog reda nastao preslikavanjem HE pramena konika dat je na Sl. 83. Dobijeni pramen krivih seče se u istom broju temeljnih tačaka kao i polazni

pramen konika, a to su dve realne i razdvojene tačke (1 i 2) i dve konjugovano imaginarne.



Sl. 82 Nekonformnom simetrijom preslikan HH pramen konika i dobijen HH pramen krivih



Sl. 83 Nekonformnom simetrijom preslikan HE pramen konika u HE pramen krivih

10 Kreiranje Visual LISP programa za crtanje krivih i površi harmonijskom simetrijom

Programski paket AutoCAD je najpopularniji i najzastupljeniji grafički paket u svetu i kod nas i predstavlja jednu vrstu nezvaničnog standarda na PC računarima. Moć AutoCAD-a je u njegovoj opštosti i otvorenosti arhitekturi, tako da se uspešno primenjuje u mnogim naučnim i tehničkim oblastima. To se ostvaruje programskim jezikom Visual LISP, koji je podesan za rad sa AutoCAD-ovom bazom podataka.

Postoji više razloga zašto je upravo LISP izabran za prvi AutoCAD-ov aplikativni interfejs:

- LISP je veoma pogodan za rad sa skupovima heterogenih objekata u grupama različitih veličina, koji se koriste u CAD sistemima kao što je AutoCAD;

- LISP interpreter je izuzetno pogodan za nestrukturane interakcije koje karakterišu proces dizajniranja;

- LISP spada u najlakše programske jezike - kako za učenje, tako i za usavršavanje;

- LISP je jezik izabran za istraživanje i razvoj veštačke inteligencije i ekspertnih sistema;

- LISP ima veoma jednostavnu sintaksu, a LISP interpreter je lak za interpretiranje i sasvim je mali.

"U poređenju sa drugim programskim jezicima Visual LISP omogućava lakše baratanje simbolima. Za razliku od programskih jezika koji zahtevaju deklarisanje, LISP dopušta jednostavnu upotrebu simbola, na taj način što im samo dodeljuje imena. Kod drugih programskih jezika, kao što je na primer C, sve promenljive i funkcije u programu moraju se deklarirati pre nego što se upotrebe, tj. mora im se unapred odrediti tip. Kod programskog jezika LISP to nije slučaj, ništa se ne mora deklarirati pre upotrebe." (Janić M. 1994).

10.1 Programi u programskom paketu Visual LISP

Za crtanje pramenova konika, kao i njihovih harmonijskih ekvivalenata korišćen je program AutoCAD. Visual LISP je iskorišćen za pisanje programa za crtanje konika i zatim za preslikavanje krivih drugog reda u krive 4. i 3. reda.

Prvo je napisan program PARABOLA i program HIPERBOLA za crtanje krivih 2. reda, pri čemu se dobijaju polilinije koje se mogu dalje preslikavati. Za elipsu je upotrebljena komanda ELLIPSE koja crta splajn. Potom je taj splajn preveden u poliliniju kako bi se dalje koristio u programu za harmonijsku inverziju. Za pisanje programa korišćena je literatura-(Omura G., 2008) i (Benton B., 2011).

```
defun C:PARABOLA (/ ParametarParabole MinX MaxX korak X Y)
(setvar "PLINETYPE" 0)
  (initget (+ 1 2 4))
  (setq ParametarParabole (getreal "\nParametar parabole?...: "))

  (setq MinX (getreal "\nMinimalna vrednost po X-osi?...<0>: "))
  (if (null MinX) (setq MinX 0))
  (setq MaxX (getreal "\nMaximalna vrednost po X-osi?...<150>: "))
  (if (null MaxX) (setq MaxX 150))
  (setq korak (getreal "\nKorak po X-osi?...<5>: "))
  (if (null korak) (setq korak 5))
  (command "_PLINE")
  (setq X MinX)
  (while (<= MinX X MaxX)
    (setq Y (sqrt (* 2 ParametarParabole X)))
    (command "_none" (list X Y))
    (setq X (+ X korak))
  )
  (command "" "" "")
  (command "_MIRROR" (entlast) "" "_none" "0,0" "_none" "1,0" "_No")
)
(defun C:HIPERBOLA (/ ParametarA ParametarB MinX MaxX korak X Y)
```

```

(setvar "PLINETYPE" 0)
(initget (+ 1 2 4))
(setq ParametarA (getreal "\nParametar a?...: "))
(initget (+ 1 2 4))
(setq ParametarB (getreal "\nParametar b?...: "))
(setq MinX (getreal "\nMinimalna vrednost po X-osi?...<a>: "))
(if (null MinX) (setq MinX ParametarA))
(if (< MinX ParametarA)
  (progn
    (alert "Minimalno X mora biti vece od a")
    (exit)
  )
)
(setq MaxX (getreal "\nMaximalna vrednost po X-osi?...<150>: "))
(if (null MaxX) (setq MaxX 150))
(setq korak (getreal "\nKorak po X-osi?...<5>: "))
(if (null korak) (setq korak 5))
(command "_PLINE")
(setq X MinX)
(while (<= MinX X MaxX)
  (setq Y (* ParametarB (sqrt (1- (expt (/ X ParametarA) 2.0)))))
  (command "_none" (list X Y))
  (setq X (+ X korak))
)
(command "" "" "")
(command "_MIRROR" (entlast) "" "_none" "0,0" "_none" "1,0" "_No")
)

```

Za harmonijsko preslikavanje konika, upotrebom recipročnih radijus vektora inverzije, korišćen je program pod nazivom VPL. Dat je listing za ovaj program.

```
(defun C:vpl (/ S P radijus a b c d xx yy y1 x11 y11)
```

```

(setvar "PLINETYPE" 0)
(setq ptlist '())
(initget 1)
(setq S (getpoint "\nKoordinate tacke S?...: "))
(initget (+ 1 2 4))
(setq radijus (getdist "\nRadijus kruga?...: "))
(setq pl (car (entsel "\nIzaberi poliliniju koje se preslikava...")))
(command "_PLINE")
(setq vertex (entnext pl))
(while (= (cdr (assoc 0 (entget vertex))) "VERTEX")
  (setq P (cdr (assoc 10 (entget vertex))))
  (setq P (trans P 0 1))
  (setq a (car s))
  (setq b (cadr s))
  (setq c (car p))
  (setq d (cadr p))
  (setq xx (- a c))
  (setq yy (- b d))
  (setq x1 (/ (* (expt radijus 2) xx)
              (+ (expt xx 2) (expt yy 2))
              )
  )
  (setq y1 (/ (* (expt radijus 2) yy)
              (+ (expt xx 2) (expt yy 2))
              )
  )
  (setq x11 (- a x1))
  (setq y11 (- b y1))
  (setq ti (list x11 y11 ))
  (command "_none" Ti)
  (setq ptlst (cons Ti ptlst))
  (setq vertex (entnext vertex))
)

```



```
)  
(command "Open")
```

```
(princ)  
)
```

Za preslikavanje pramenova krivih 4. i 3. reda nekonformnom, supersimetrijom korišćen je program čiji je listing dat u daljem tekstu.

```
(defun C:vps (/ S P radijus a b c d xx yy x1 y1 x11 y11)  
  (setvar "PLINETYPE" 0)  
  (setq ptlist '())  
  (initget 1)  
  (setq S (getpoint "\nKoordinate tacke S?...: "))  
  (initget (+ 1 2 4))  
  (setq radijus (getdist "\nRadijus kruga?...: "))  
  (setq pl (car (entsel "\nIzaberi poliliniju koje se preslikava...")))  
  (command "_.PLINE")  
  (setq vertex (entnext pl))  
  (while (= (cdr (assoc 0 (entget vertex))) "VERTEX")  
    (setq P (cdr (assoc 10 (entget vertex))))  
    (setq P (trans P 0 1))  
    (setq a (car s))  
    (setq b (cadr s))  
    (setq c (car p))  
    (setq d (cadr p))  
    (setq xx (+ a c))  
    (setq yy (+ b d))  
    (setq x1 (- (/ (* radijus 4 (expt xx 2))  
                  (+ (expt xx 2) (expt yy 2)))) xx  
    )  
  )  
  (setq y1 (- (/ (* radijus 4 yy xx)  
                (+ (expt xx 2) (expt yy 2)))) yy
```

```

)
)
(setq x11 (+ a x1))
(setq y11 (+ b y1))
(setq ti (list x11 y11 ))
(command "_none" Ti)
(setq ptlst (cons Ti ptlst))
(setq vertex (entnext vertex))
)
(command "Open")
(princ)
)

```

Za crtanje površi 4. reda koja je harmonijski ekvivalent rotacionog konusa napisan je program čiji je listing dat u daljem tekstu:

;DEFINISANJE CENTRA I KRUGA INVERZIJE

```

(setq lay "krugi")
(if (= (tblsearch "layer" lay) nil)
  (progn (command "layer" "n" lay "")
        (command "layer" "c" "green" lay "")
        (command "layer" "lt" "divide" lay ""))
  )
)
(command "layer" "s" "krugi" "")
(command "pdmode" 34 )
(command "ltscale" 2)
(setq S (getpoint "\nOdaberi centar inverzije:"))
(setq c (command "point" s))
(command "circle" s 20)
(setq lokt (polar s -12 1))
(command "text" lokt "1.3" "" "S")
(setq lokt1 (polar s -12 21))

```

```

(command "text" lokt1 "1.3" "" "s")
;DEFINISANJE VRHA KONUSA KOJI SE PRESLIKAVA
;ISCRTAVANJE TACAKA PRESLIKAVANJA
(setq vrh (getpoint "\nUnesi vrh konusa (Y pravca) koji se preslikava:"))
(setq osax (car vrh)
  sy (cadr s)
  vrh (list osax sy)
)
(setq lokt (polar vrh 0 1))
(command "text" lokt "1.3" "" "V")
(setq lay "osak")
(if (= (tblsearch "layer" lay) nil)
  (progn (command "layer" "n" lay "")
    (command "layer" "c" "MAGENTA" lay "")
    (command "layer" "lt" "dashdot" lay ""))
)
)
(command "layer" "s" "OSAk" "")
  (command "line" vrh "@50<90""
    "line" vrh "@50<270""")
  (setq p vrh)
  (setq ugaoko (getstring "\nUnesi ugao nagiba izvodnica prema osi konusa:"))
  (setq ugaokon (atof ugaoko))
  (setq ugaokon (* pi (/ ugaokon 180.0)
    )
  )
)
(setq lay "kon")
(if (= (tblsearch "layer" lay) nil)
  (progn (command "layer" "n" lay "")
    (command "layer" "c" "blue" lay ""))
)
)

```

```

(command "layer" "s" "kon" "")
(setq uik1 (- (/ pi 2) ugaokon)
  uik2 (+ uik1 pi)
  uik3 (+ (/ pi 2) ugaokon)
  uik4 (+ uik3 pi)
  ik1 (polar vrh uik1 50)
  ik2 (polar vrh uik2 50)
  ik3 (polar vrh uik3 50)
  ik4 (polar vrh uik4 50)
)
(command "line" vrh ik1""
  "line" vrh ik2""
  "line" vrh ik3""
  "line" vrh ik4""
)
; PRESLIKAVANJE TACKE P
(vtacka)
; KONSTRUKCIJA POVRSI-OSA POVRSI JE Y PRAVCA
(setq lay "osa")
(if (= (tblsearch "layer" lay) nil)
  (progn (command "layer" "n" lay "")
    (command "layer" "c" "MAGENTA" lay"")
    (command "layer" "lt" "dashdot" lay"")
  )
)
(command "layer" "s" "OSA" "")
(command "circle" "2p" s ti"")
  (setq lokt1 (polar ti pi 2.5))
  (command "text" lokt1 "1.3" ""Vs")
;(command "point" ti "")
(setq rose (/ (distance ti s) 2))
(setq ugao (angle ti s))

```

```

; ODREDJIVANJE CENTRA KRUZNE OSE-CEN
  (setq cen (polar ti ugao rose))
; (command "point" cen "")
; DEFINISANJE LERA INVERZNE POVRSI
  (setq lay "inv-k")
  (if (= (tblsearch "layer" lay) nil)
    (progn (command "layer" "n" lay "")
           (command "layer" "c" "green" lay"")
          )
    )
  )
  (command "layer" "s" "inv-k" "")
; DEFINISANJE KONTURNIH KRUGOVA
; 90 STEPENI U RADIJANIMA
  (setq devr (* pi 0.5))
  (setq u1 (- devr ugaokon))
  (setq u1nor (+ u1 devr))
  (setq u2nor ugaokon)
  (setq w1 (polar s u1nor 20))
  (setq w2 (polar ti u2nor 20))
  (setq cki1 (inters s w1 ti w2 nil))
  (command "circle" cki1 s"")
; (setq ki1 entlast)
  (setq polup (distance cki1 s))
  (setq cki2 (polar s (* -1 u1nor) polup))
  (command "circle" cki2 s"")
; DEFINISANJE SISTEMA KRUZNICA
  (setq z 5 )
  (while (< z 90)
    (setq z1 (* pi (/ z 180.0)
              )
          )
    )
  )
  (setq NT (polar cen z1 20))

```

```

(setq xcen (car cen)
  ycen (cadr cen)
  ux (car NT)
  uy (cadr NT)
)
(setq koly (- uy ycen)
  kolx (- ux xcen)
)
(if (or (= 0 koly) (= 0 kolx)) (setq kol 0)
    (setq kol (/ (- uy ycen)
                  (- ux xcen)
                  )
    )
)
)
;DEFINISANJE PRESECNE TACNIH TACAKA KRUGA I PRAVE
;KRUG CENTRA CKI1 I PRAVA NT NT1
(setq x1 (car cki1)
  y1 (cadr cki1)
  A (- (* kol xcen) ycen)
  F (+ (* -1 (expt polup 2))
    (* 2 A y1)
    (* +1 (expt y1 2))
    (* +1 (expt A 2))
    (* +1 (expt x1 2))
  )
  G (+ 1 (expt kol 2))
)
(setq E (+ (* -2 x1)
  (* -2 kol A)
  (* -2 kol y1)
)
)
)

```



```

y1 (cadr cki2)
A (- (* kol xcen) ycen)
F (+ (* -1 (expt polup 2))
      (* 2 A y1)
      (* +1 (expt y1 2))
      (* +1 (expt A 2))
      (* +1 (expt x1 2))
  )
G (+ 1 (expt kol 2))
)
(setq E (+ (* -2 x1)
           (* -2 kol A)
           (* -2 kol y1)
         )
)
)
(setq lay "sistem1")
(if (= (tblsearch "layer" lay) nil)
    (progn (command "layer" "n" lay "")
           (command "layer" "c" "red" lay""))
    )
)
(command "layer" "s" "sistem1" "")
  (setq x333 (/ (+ (* -1 e) (sqrt (- (expt e 2) (* 4 g f)
                                     )
                                   )
                )
              )
  )
  (* 2 g)
)
)
  (setq x444 (/ (- (* -1 e) (sqrt (- (expt e 2) (* 4 g f)
                                     )
                                   )
                )
              )
  )
)

```



```

        )
        (* 2 g)
    )
)
(setq y333 (- (* kol x333) A)
      y444 (- (* kol x444) A)
      m3 (list x333 y333)
      m4 (list x444 y444)
)
; (command "point" m3 "")
; (command "point" m4 "")
; CRTANJE SISTEMA KRUGOVA I ROTACIJA
; (command "circle" "2p" m1 m3)
(setq rpolup (/ (distance m1 m3) 2))
(setq k1 (polar m3 (angle m3 m1) rpolup))
(setq z11 (polar k1 (+ z1 (/ pi 2)) 20))
(command "ucs" "za" k1 z11)
(command "circle" "0,0,0" rpolup)
(command "ucs" "W")
(setq rpolup (/ (distance m2 m4) 2))
(setq k1 (polar m2 (angle m2 m4) rpolup))
(setq z11 (polar k1 (+ z1 (/ pi 2)) 20))
(command "ucs" "za" k1 z11)
(command "circle" "0,0,0" rpolup)
(command "ucs" "W")
;
(setq z (+ z 5))
)
(setq z 90.001 )
(while (< z 180)
  (setq z1 (* pi (/ z 180.0)
)

```

```

)
(setq NT (polar cen z1 20))
(setq xcen (car cen)
  ycen (cadr cen)
  ux (car NT)
  uy (cadr NT)
)
(setq koly (- uy ycen)
  kolx (- ux xcen)
)
(if (or (= 0 koly) (= 0 kolx)) (setq kol 0)
    (setq kol (/ (- uy ycen)
                 (- ux xcen)
                 )
    )
)
)
;DEFINISANJE PRESECNE TACNIH TACAKA KRUGA I PRAVE
;KRUG CENTRA CKI1 I PRAVA NT NT1
(setq x1 (car cki1)
  y1 (cadr cki1)
  A (- (* kol xcen) ycen)
  F (+ (* -1 (expt polup 2))
      (* 2 A y1)
      (* +1 (expt y1 2))
      (* +1 (expt A 2))
      (* +1 (expt x1 2))
  )
  G (+ 1 (expt kol 2))
)
(setq E (+ (* -2 x1)
          (* -2 kol A)
          (* -2 kol y1)

```

```

)
)
(setq lay "sistem1")
(if (= (tblsearch "layer" lay) nil)
  (progn (command "layer" "n" lay "")
        (command "layer" "c" "red" lay""))
  )
)
(command "layer" "s" "sistem1" "")

(setq x111 (/ (+ (* -1 e) (sqrt (- (expt e 2) (* 4 g f)
)
)
)
(* 2 g)
)
)
(setq x222 (/ (- (* -1 e) (sqrt (- (expt e 2) (* 4 g f)
)
)
)
(* 2 g)
)
)
(setq y111 (- (* kol x111) A)
y222 (- (* kol x222) A)
m1 (list x111 y111)
m2 (list x222 y222)
)
; (command "point" m1"")
; (command "point" m2"")

```

;PRONALAZENJE DRUGE DVE TACKE PRESEKA PRAVE SA DRUGOM
KONTURNOM IZVODNICOM

;KRUG CENTRA CKI2 I PRAVA NT NT1

(setq x1 (car cki2))

y1 (cadr cki2)

A (- (* kol xcen) ycen)

F (+ (* -1 (expt polup 2))

(* 2 A y1)

(* +1 (expt y1 2))

(* +1 (expt A 2))

(* +1 (expt x1 2))

)

G (+ 1 (expt kol 2))

)

(setq E (+ (* -2 x1)

(* -2 kol A)

(* -2 kol y1)

)

)

(setq lay "sistem1")

(if (= (tblsearch "layer" lay) nil)

(progn (command "layer" "n" lay ""))

(command "layer" "c" "red" lay ""))

)

)

(command "layer" "s" "sistem1" ""))

(setq x333 (/ (+ (* -1 e) (sqrt (- (expt e 2) (* 4 g f)

)

)

)

```

        (* 2 g)
    )
)
(setq x444 (/ (- (* -1 e) (sqrt (- (expt e 2) (* 4 g f)
        )
    )
    )
    (* 2 g)
)
)
(setq y333 (- (* kol x333) A)
    y444 (- (* kol x444) A)
    m3 (list x333 y333)
    m4 (list x444 y444)
)
; (command "point" m3 "")
; (command "point" m4 "")
; CRTANJE SISTEMA KRUGOVA I ROTACIJA
; (command "circle" "2p" m1 m3)
(setq rpolup (/ (distance m1 m3) 2))
(setq k1 (polar m3 (angle m3 m1) rpolup))
(setq z11 (polar k1 (+ z1 (/ pi 2)) 20))
(command "ucs" "za" k1 z11)
(command "circle" "0,0,0" rpolup)
(command "ucs" "W")
(setq rpolup (/ (distance m2 m4) 2))
(setq k1 (polar m2 (angle m2 m4) rpolup))
(setq z11 (polar k1 (+ z1 (/ pi 2)) 20))
(command "ucs" "za" k1 z11)
(command "circle" "0,0,0" rpolup)
(command "ucs" "W")

```

```

(setq z (+ z 5))
)
;DEFINISANJE DRUGOG SISTEMA IZVODNICA
(setq j 10.0)
(while (<= j 360.0)
  (setq j1 (* pi (/ j 180.0))
    sinj1 (* rpolup (sin j1))
    cosj1 (* rpolup (cos j1))
    m4prim (polar k1 (angle k1 m4) cosj1)
    m4x (car m4prim)
    m4y (cadr m4prim)
    ss s
    ras (distance ti ss)
    JJ (list m4x m4y sinj1)
    tim4pri (distance ti m4prim)
    utim4pr (angle ti m4prim)
    rastoj (sqrt (+ (expt sinj1 2) (expt tim4pri 2)))
    d4 (polar m4prim (* pi (/ 270 180.0)) 10)
    d44 (inters ti ss m4prim d4 nil)
    rast1 (distance m4prim d44)
    rast2 (sqrt (+ (expt sinj1 2) (expt rast1 2)))
    rast3 (distance ti d44)
    jjj (polar d44 (* pi (/ 90 180.0)) rast2)
    konu (angle ti jjj)
  )
)
(setq lay "sistem2")
(if (= (tblsearch "layer" lay) nil)
  (progn (command "layer" "n" lay "")
    (command "layer" "c" "blu" lay "")
  )
)
)
(command "layer" "s" "sistem2" "")

```

```

; (command "point" m4prim "")
; (command "point" JJ "")
(command "ucs" "3point" ti ss JJ)
(setq ox 0)
(setq oy 0)
(setq oz 0)
(setq oo (list ox oy oz))
(setq Sras (polar oo 0 ras))
; (command "point" sras "")
(setq m4pot (polar oo konu rastoj))
; (command "point" m4pot "")
(command "circle" "3p" oo Sras m4pot)

(command "ucs" "w")
(command "layer" "s" "0" "")
(setq j (+ j 10.0))
)
(command "regen")
(princ)

```

Ovaj program mora biti učitán u AutoCAD-ov fajl u isto vreme sa podprogramom pod nazivom presltačka (preslikava tačke korišćenjem formula za recipročne radijus-vektore inverzije). Listing toga podprograma je sledeći:

```

(defun presltačka ()
  (setq a (car s))
  (setq b (cadr s))
  (setq c (car p))
  (setq d (cadr p))

  (setq xx (- a c))
  (setq yy (- b d))

```

```
(setq x1 (/ (* (expt 20.0 2) xx)
            (+ (expt xx 2) (expt yy 2))
          )
)
(setq y1 (/ (* (expt 20.0 2) yy)
            (+ (expt xx 2) (expt yy 2))
          )
)
(setq x11 (- a x1))
(setq y11 (- b y1))

(setq ti (list x11 y11 ))
;(command "point" ti"")

(setq ptlst (cons ti ptlst))
(princ)
)
```


11 Mogućnosti za primenu krivih i površi višeg reda dobijenih inverzijom u arhitektonskoj praksi

11.1 O primeni krivih i površi u arhitektonskoj praksi

Danas se, širom sveta, timovi arhitekata nadmeću u pronalaženju što atraktivnijih formi budućih objekata koji pored svoje funkcionalnosti moraju da zadovolje i estetsku komponentu. Mnogi arhitektonski objekti predstavljaju umetnička dela i svojom lepotom i oblikom reprezentuju ne samo autore, već su i znak prepoznavanja gradova i država u kojima se nalaze. Da bi projektovani objekti mogli da se realizuju, geometrijski oblici (krive i površi) pored toga što moraju imati jasno definisanu geometriju, moraju zadovoljiti i niz konstruktivnih uslova. Principi konstruisanja i oblikovanja ih kvalifikuju za određenu namenu i pri tome zadaju njihovu upotrebnu vrednost. Najveći problem konstruktorima predstavlja definisanje mehanizma za formiranje oblika površi i njihovih obrisa koji predstavljaju krive različitih redova.



Sl. 84 Feniks Međunarodni Media Centar-konstrukcija

Arhitektura govori konstrukcijom, konstrukcija je jezik arhitekture, ona je "maternji jezik arhitekture" govorio je Ogist Pere.



Sl. 85 Feniks Međunarodni Media Centar-pogled iz aviona

Na osnovu radova (Obradović M. et al., 2011), (Petrović M. et al., 2011) upoređena je geometrija krivih i površi dobijenih inverzijom, sa već izvedenim objektima i mogućnost za primenu tih oblika u arhitektonskoj praksi.

Ako govorimo o upotrebi površi višeg reda u arhitekturi kao prvi primer za površ 4. reda (dat je na Sl. 84 i Sl. 85) navodim Feniks Međunarodni Media Centar u Kini (grad Peking) čija izgradnja je u toku. Sa ukupnim privrednim brzim rastom Kine i eksplozivnom urbanizacijom, poslednjih godina došlo je do burnog razvoja dizajna u arhitekturi. Ovaj objekat ostavlja svoj trag na urbanom pejzažu Pekinga. Fotografije su preuzete sa sajta: <http://www.coolhunting.com/design>. Ovo je površ koja je nastala po ugledu na Mebijusovu traku (August Ferdinand Möbius, 1790.-1868.) koja je 3. reda ali su arhitekta zadržale samo obris ove trake, jer se objekat ne može izvesti kao traka. Projekat je napravljen po vajarskom obliku poznatom kao "Möbius Strip". Objekat je izveden u konstruktivnom sistemu diagrid. O ovom sistemu će biti reči nešto kasnije u istom poglavlju. Glavni pravci rebara konstrukcije su proračunom dobijene izololinije

optimalnog nagiba koji odgovara diagrid konstrukciji. Parametarski projektovane zgrade su danas postale uobičajene, razne geometrijske forme su izvodljive, a diagrid se, kao novi sistem, pojavljuje kao najpogodniji za izvođenje ovakvih objekata.

11.2 Konstruktivni sistemi koji se koriste u arhitektonskoj praksi za površi dobijene harmonijskom simetrijom

Razvoj nauke i tehnologije omogućio je da se u građevinskoj i arhitektonskoj praksi koriste složenije geometrijske forme. Pre svega, za ovaj tehnološki skok treba zahvaliti pojavi građevinskih materijala koji su omogućili savijanje, kao što je čelični lim koji se koristi za zidna platna i krovne pokrivače na objektima koji su za svoju formu iskoristili složene cilindroide. Veliku prekretnicu donela je sve veća upotreba armiranog betona sa prednaprezanjem. To je omogućilo izvođenje dvostruko izvodnih površi velikih raspona. Sem ovih materijala i lamelirano drvo dozvoljava savijanje i primenjivo je za vitoperne pravoizvodne površi. Plastična masa i ojačano impregnirano platno su još neki materijali koji se koriste za šatoraste i pneumatske konstrukcije. I od ovih materijala se mogu oblikovati i jednostavne i složene geometrijske površi. (Krašić S.,2012)

Linearni konstruktivni elementi budućeg konstruktivnog sistema koji se koriste u arhitektonskoj i građevinskoj praksi oblikovani su prema geometriji krivih drugog, trećeg, četvrtog ili višeg reda. Da bi smo površinski modelovali neko geometrijsko telo u programskom paketu AutoCAD može se primeniti nekoliko metoda:

1. Dodavanje debljine ivicama 2D figure (preko osobine Thickness)
2. Komandom loft (izdizanjem nivoa - pogodna za free-form površi)
3. Komandom sweep (zadata putanja / trajektorija kretanja izvodne krive)
4. Korišćenjem mrežnih poligona (Mesh) koji se baziraju na kretanju izvodnice – generatrise date površi, na način određen tipom same površi, a ono može biti: rotaciono, translatorno, ravnomerno i ograničeno vodiljama. Objekat Mesh autoCAD ne tretira kao površ, u starijim verzijama, već kao mrežni poligon. Novije verzije, od 2010. imaju mogućnost prevođenja u surface.
5. Komandom revolve (zadata osa rotacije) dobija se rotaciona površ.

Iako ove komande služe i za zapreminsko modelovanje, njima se dobijaju i krive površi, ukoliko ne zatvorimo krivu - izvodnicu, ili ako posle toga primenimo komandu EXPLODE, kada se čitavo telo razlaze na površi koje ga ograničavaju.

Za oblikovanje objekata mogu da se iskoriste i delovi površi čijim se uklapanjem dobija celina. To su kompleksni konstruktivni sklopovi. Na ovaj način mogu se dobiti slobodne forme, ali u praktičnom pogledu još uvek ih donekle ograničava tehnologija i materijal za građenje objekata, mada u novije vreme sa pojavom novih materijala i novih konstruktivnih sistema koji se koriste u arhitekturi i građevinarstvu, ograničenja su sve manja. Sve više objekata se projektuje u slobodnoj formi (freeform), a mnogi (izgrađeni i projektovani-koji čekaju na izvođenje) objekti plene svojim nesvakidašnjim oblikom i lepotom .

Površni koje su dobijene harmonijskom simetrijom sastoje se iz sistema kružnih preseka koji definišu površ (jedan, dva ili tri), a kružni preseki su jednostavni za primenu (Sl. 67 i Sl. 69). Na osnovu mnogobrojne literature o konstruktivnim sistemima (Konstruktivni sistemi, Nervi, 1963; Siegel, 1965) u daljem tekstu daje se pregled konstruktivnih sistema na kojima je moguće primeniti harmonijski generisane krive i površi.

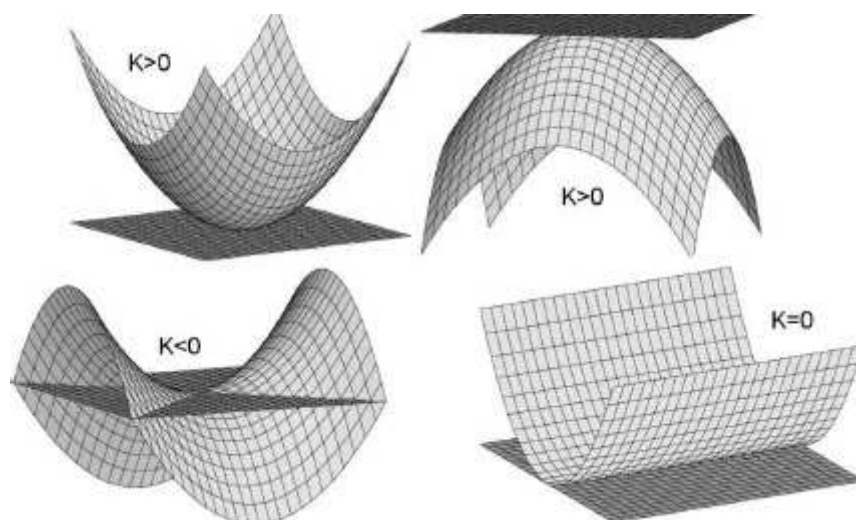
Konstruktivni sistem ljske ima trodimenzionalnu (krutu) noseću strukturu, koja prihvata opterećenje primarno silama u ravni (ravnomerno raspodeljenim po debljini ljske), ali i savijanjem samo u zoni oslanjanja i veze sa drugim elementima. Debljine ljske su manje od 1/50 do 1/100 raspona i u njima se javljaju samo direktni, zatezanje i pritisak (membranski), naponi, bez momenata savijanja (koji se mogu zanemariti) ali samo ako je ljska ravnomerno opterećena i oslonjena, odnosno membranski uravnotežena. Da bi se postiglo približno membransko stanje napona u ljsci pri izboru površi ili njenih delova moraju se uzeti u obzir zahtevi membranske teorije.

Pogodnim izborom geometrije, sa malim debljinama, ljske mogu biti izuzetno racionalni elementi kad je o utrošku materijala reč i zahvaljujući svom obliku i armiranju uprkos neznatnoj debljini imaju veliku nosivost. U opštem slučaju, ljske mogu biti formirane od raznih površi koje karakteriše Gauss-ova mera krivine, proizvod krivina glavnih pravaca K (Sl. 86):

-Eliptičke površi - imaju pozitivnu Gauss-ovu krivinu, odnosno, centri oba poluprečnika glavnih krivina su sa iste strane površi. Ove ljuske ne mogu menjati svoj oblik bez istežanja srednje površi, zbog čega su vrlo krute - $K > 0$.

-Hiperboličke površi - imaju negativnu Gauss-ovu krivinu, odnosno, centri poluprečnika glavnih krivina su na različitim stranama površi - $K < 0$.

-Paraboličke površi - imaju nultu Gauss-ovu krivinu. Jedan od poluprečnika glavne krivine im je beskonačno velik - $K = 0$.



Sl. 86 Gauss-ova mera krivine, proizvod krivina glavnih pravaca K

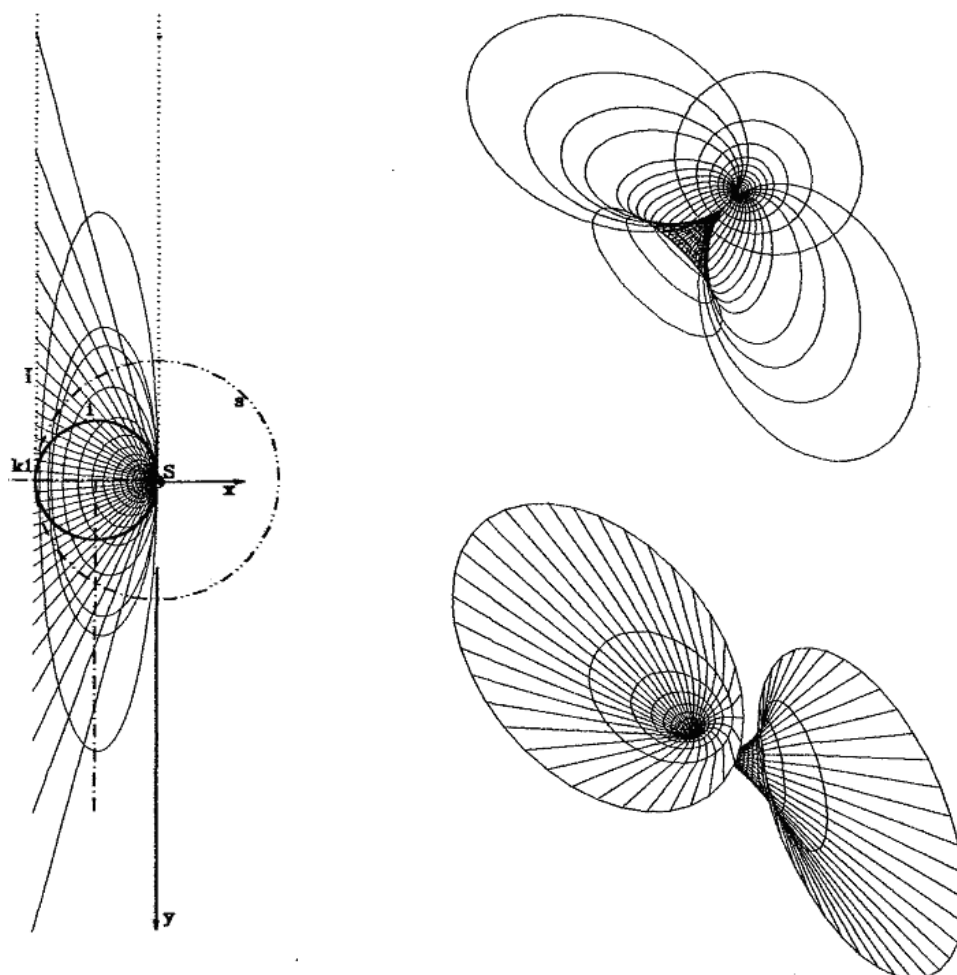
Sl. 86 je preuzeta sa sajta: <http://www.scribd.com/doc/60031339/Bet-konstr-10-Ljuske>

Kada je u pitanju konstruktivni sistem ljuske pojavom prednapregnutog betona kod armiranobetonskih konstrukcija omogućeno je savladavanje velikih raspona, kakvi se sa upotrebom običnog betona nisu mogli ni zamisliti. U ovom poglavlju analiziran je veći broj primera iz savremene arhitektonske prakse i ukazano na mogućnosti dalje primene. Posebna pažnja je usmerena na dvostruko zakrivljene površi koje su nastale harmonijskom simetrijom, sa pozitivnom Gausovom krivinom iz harmonijske grupe cilindara i sa negativnom Gausovom krivinom iz harmonijske grupe paraboloida (Bobenko A., Pinkall U., 1996), (Bracken P, 2011). Dvostruko zakrivljene površi sa pozitivnom Gausovom krivinom nastale harmonijskom inverzijom rotacionog konusavretenasta ciklida (Sl. 67) i rotacionog cilindra-Dipenova ciklida (Sl. 69) su pogodne za konstruktivni sistem ljuske..

Viseće konstrukcije su obešene o čvrste oslonce na visokim tačkama, kod kojih su glavni noseći elementi zategnuti. Noseći elementi imaju male dimenzije i najčešće su

to čelični kablovi visoke zatezne čvrstoće. Ovaj konstruktivni sklop se najčešće primenjuje u krovnoj zoni. Ideja obrnute kupole postoji još od vremena Inka i od doba stare Kine. Površ koja je prikazana na Sl. 72, koja je harmonijski ekvivalent paraboličkog cilindra, može se primeniti za viseće konstrukcije sa dva sistema prednapregnuto španovanih kablova.

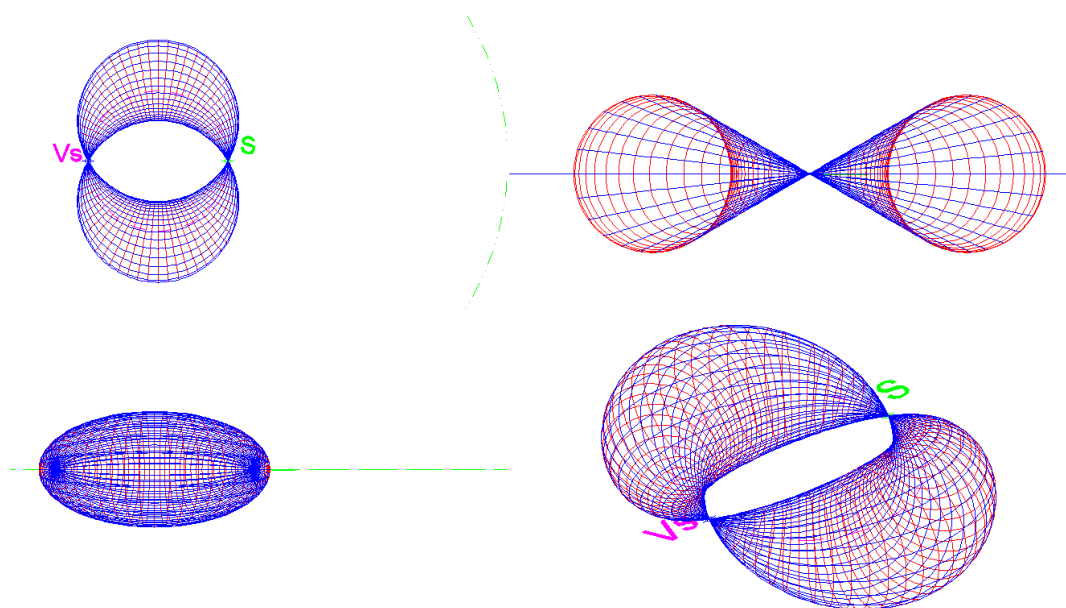
Harmonijskom simetrijom rotacionog cilindra kada je centar inverzije S postavljen na konturnoj izvodnici cilindra, a poluprečnik sfere inverzije s jednak je prečniku kružnog preseka cilindra, dobija se površ 3. reda koja je pogodna za viseće konstrukcije (Sl. 87). Ova slika je preuzeta iz rada - Harmonijska sinteza i konstruktivna obrada površi viših redova (Stavrić M., 2002).



Sl. 87 Harmonijski ekvivalent rotacionog cilindra – površ 3 reda

Pneumatske konstrukcije - Osnovni princip funkcionisanja pneumatskih hala i objekata, uopšte uzev, je svod formiran od membrane, a podržan ili napregnut određenim nad pritiskom u unutrašnjosti objekta. Za pneumatske konstrukcije često se kaže da su nošene vazduhom. Ove konstrukcije spadaju u grupu prirodnih konstruktivnih sistema i rasprostranjene su u zoologiji, botanici, kod čoveka mišićno tkivo i koža su zategnuti pritiskom i poduprti čvrstim skeletom.

Pneumatske konstrukcije su posebna oblast u domenu tekstilne arhitekture. Po mnogo čemu specifični i genijalni ovi objekti su u nekim svojim primenama prosto nezamenljivi. Prvi primeri ovakvih struktura su se pojavili u aeronautici, u vidu dirizabla ili letećih balona. Iako ovi objekti nisu baš zaživeli, svoje novo otelotvorenje su našli u vidu građevinskih objekata, sa punom ekspanzijom tokom 80-tih godina 20. veka. Iako osporavane zbog nekih svojih osobina, objekti pneumatske konstrukcije su i dalje nenadmašni po pitanju brzine montaže i demontaže kao i same cene objekata.



Sl. 88 Površ4. reda harmonijski ekvivalent rotacionog konusa

Za pneumatske konstrukcije može se iskoristiti površ na sa dva sistema kružnih preseka koji su označeni crvenom i plavom bojom. Prikazane su tri projekcije površi i dat je aksonometrijski izgled. Za Površ crtanje ove površi u AutoCAD-u napisan je Visual LISP program i njegov listing je dat u 10.poglavlju ovog rada. Ova površ mogla bi da se iskoristi za projektovanje objekta sa dve simetrične jedinice, na primer dve izložbene hale. Osnovna konstruktivna karakteristika ove površi je dvostruka

zakrivljenost sa pozitivnom Gausovom krivinom (radijusi dvostruko zakrivljene površi se nalaze sa iste strane tangentne ravni). Ova površ zadovoljava uslov upisivanja niza lopti unutar nje, tako da površ tangira površinu lopti. Ovako harmonijski generisana površ zadovoljava oba uslova - kružni sistemi predstavljaju meridijane pojedinih upisanih lopti. (Stavrić M.,2002).

11.3 Primena površi višeg reda dobijenih harmonijskom simetrijom u pejzažnoj arhitekturi i uređenju ambijentalnih celina

"Cloud Gate" je javna skulptura indijsko-britanskog umetnika Anish Kapoor-a. Skulptura se nalazi u Milenijum parku u Čikagu u državi Ilinois, SAD. Izgrađena je između 2004. i 2006. godine i skulptura je nazvana "Bin", zbog oblika pasulja. Sastavljena je od 168 zavarenih ploča od nerđajućeg čelika, a njen visoko polirani eksterijer nema vidljivih šavova. Skulptura je popularna kod turista zbog svojih jedinstvenih reflektujućih svojstava.

U ovom radu je obrađena pasuljasta kriva, prikazana je na Sl. 22, a dobija se harmonijskom simetrijom elipse uz odgovarajući položaj centra i kruga inverzije.

Fotografije naSl. 89, Sl. 90, Sl. 91 i Sl. 92 su preuzete sa sajta:

<http://www.anishkapoor.com/484/Studio.html> i predstavljaju primere površi koje se mogu dobiti harmonijskom simetrijom.



Sl. 89 Površ četvrtog reda Cloud Gate projektovana u studiju Anish Kapoor-a, izvedena u Čikagu u SAD

Na fotografiji skulpture "Cloud Gate" crvenom bojom je označena kontura površi - pasuljasta kriva 4. reda koja se može dobiti kao harmonijski ekvivalent elipse (Sl. 90).

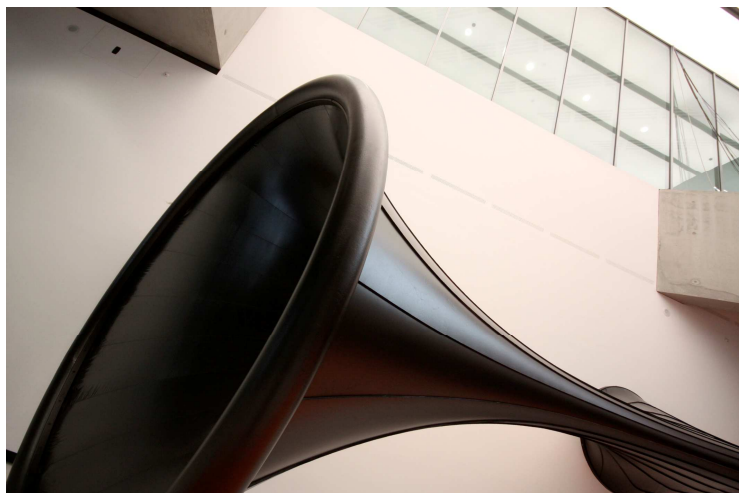
Na slikama Sl. 91 i Sl. 92 prikazane su skulpture istog autora koje takođe mogu krasiti park ili neku drugu ambientalnu celinu.



Sl. 90 Na fotografiji skulpture Cloud Gate crvenom bojom je označena pasuljasta kriva 4. reda koja se dobija kao harmonijski ekvivalent elipse



Sl. 91 Površ je napravljena u studiju Anish Kapoor



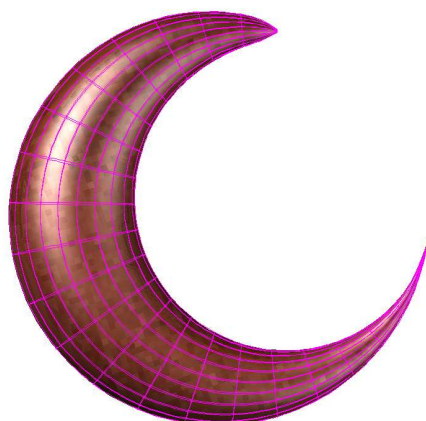
Sl. 92 Površ je harmonijski ekvivalent rotacionog cilindra, urađena u studiju Anish Kapoor

11.4 Izvođenje objekata modelovanih prema geometriji krivih i površi 3. i 4. reda

Postoji neraskidiva veza između arhitekture, prirode i nauke. Znanja iz analitičke geometrije i njihova primena na prirodne forme u arhitekturi dozvoljavaju da se kreiraju ne samo prelepe zgrade po izgledu već one imaju i značajne kvalitete po čvrstoći, krutosti i stabilnosti. To najbolje pokazuju ovakvi objekti kao što je Crescent Moon Tower, u obliku polumeseca, izgrađen u Dubaiju - neki ga i nazivaju Horn (rog) koji je prikazan na Sl. 93. - fotografija je preuzeta iz rada (Shambina S. et al., 2012). Na Sl. 94 prikazana je modelovana površ u AutoCAD-u koja je dobijena harmonijskom simetrijom obrtnog paraboloida, koja isto kao objekat - Horn ima oblik polumeseca i dva sistema kružnih preseka.

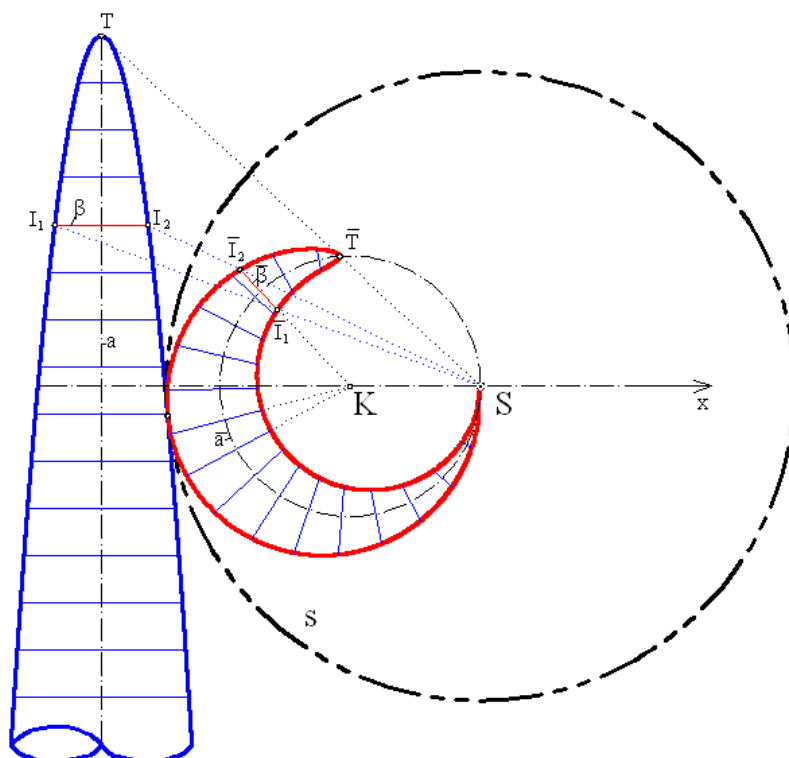


Sl. 93 Crescent Moon Tower izgrađen u Dubaiju



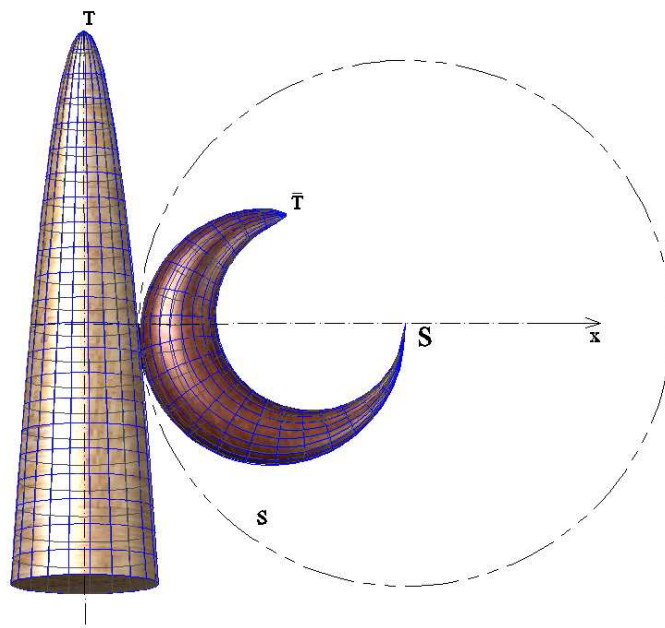
Sl. 94 Površ 4. reda dobijena kao harmonijski ekvivalent rotacionog paraboloida

Rotacioni paraboloid, koji ima osu z pravca, invertuje se u površ 4. reda sa kružnom osom i kružnim generatrisama i to je dato na Sl. 95. Prostorna harmonijska simetrija paraboloida se vrši preko sfere- s i centra harmonijske simetrije S . Krugovi koji su u horizontalnim ravnima, upravnim na kružnu osu rotacione kvadrike (označeni su plavom bojom i u zračnom su položaju (na primer - β), preslikavaju se u krugove($\bar{\beta}$), koji su u ravnima upravnim na kružnu osu ekvivalentne kvadrike i u projekciji u frontalnoj ravni simetrije su u zračnom položaju i konkurentni su tački K . Pri preslikavanju inverzijom koristi se kontura paraboloida u frontalnoj ravni simetrije, osa a koja se nalazi u F-ravni i krugovi u H-ravnima (β). Osa konusa a (z pravca) preslikava se u kružnu osu koje prolazi tačkom S .



Sl. 95 Preslikavanje rotacionog paraboloida u površ 4. reda oblika polumeseca

Različitim izborom sfere- s i centra harmonijske simetrije S mogu se dobiti površi atraktivnih oblika koje su pogodne za izvođenje baš zbog sistema kružnih preseka koji se dobijaju opisanim preslikavanjem. Za izvođenje objekta modelovanog na ovaj način, u npr. dijagrid sistemu, bilo bi potrebno pronaći optimalne pravce izolinija, koje bi predstavljale pravce nosećih rebara dijagrid konstruktivnog sistema, kako bi njegova nosivost bila optimalna.



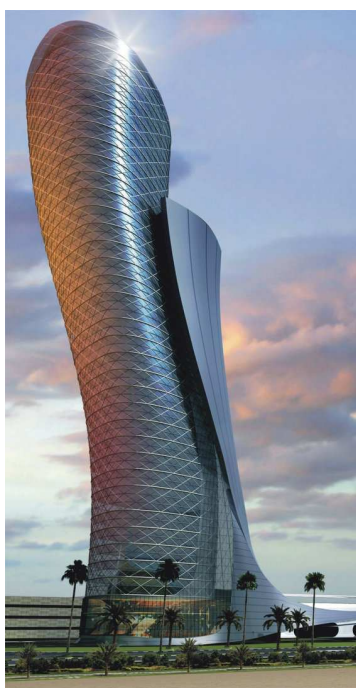
Sl. 96 Prostorni model rotacionog paraboloida i invertovane površi 4. reda oblika polumeseca

11.5 Diagrid konstruktivni sistem

O primeni raznih površi u arhitekturi ne može se pričati, a da se ne pomene diagrid, jer se diagrid, kao što je već rečeno ranije u ovom poglavlju, pokazao kao najoptimalniji novi konstruktivni sistem za izvodjenje slobodnih, parametarski projektovanih formi. To je takav konstruktivni sistem da se njegova dijagonalna mreža ponaša kao tkanje ili pletivo i zato može da "obavije" najrazličitije geometrijske forme bilo da su one dobijene harmonijskom simetrijom ili na neki drugi način.

Diagrid je konstruktivni sistem koji je široko korišćen za nedavno izgrađene visoke zgrade od čelika i njega čine trouglaste strukture sa grednim dijagonalnim podrškama. Ovaj sistem ima izuzetnu strukturnu efikasnost i predstavlja estetski potencijal koji obezbeđuje jedinstvenu geometrijsku konfiguraciju sistema. Za efikasnu raspodelu tereta među svim članovima jedne strukture, ne postoji strukturni sistem superiorniji od Diagrida. Ova inovacija u strukturi dozvoljava izgradnju velikih objekata u formama za koje smo ranije mislili da nisu moguće. Upotrebljava se jedinica koja se ponavlja i čineći mrežu omogućava bezbroj strukturnih mogućnosti, a maksimalizuje efikasnost najčešće korišćenih čeličnih članova. Upotreba ovog sistema zahteva manje konstrukcionog čelika, čime se smanjuje težina i cena zgrada, a u isto vreme omogućava

prenos značajnih vertikalnih opterećenja. Međutim, sama mreža nije dovoljna da izdrži horizontalna opterećenja, tako da treba dodati sistem prstenova da spreči izvijanja. Diagrid se može koristiti za niz geometrijskih oblika i predstavlja veliki potencijal za budućnost arhitekture. To se može videti na Sl. 97 koja je preuzeta sa sajta: <http://plusmood.com/2008/11/capital-gate-rmjm-architects/>. Za ovaj objekat je upotrebljen –Tekle- strukturni softver koji se koristi za modelovanje nekih od najvećih svetskih skoro izgrađenih kulturnih objekata. Ovaj softver koristi trodimenzionalno modeliranje. Trodimenzionalne koordinate za svaku komponentu diagrid mreže izračunavaju se pomoću pomenutog softvera koji osigurava besprekornu integraciju i montažu okvira i pratećih greda (Moon K.2009).



Sl. 97 Kapitalna kapija arhitektonskog biroa RMJM u Abu Dabiju, Ujedinjeni Arapski Emirati

Dijagonalne strukture je otkrio ruski inženjer Vladimir Shukhov. On je pionir nove analitičke metode u različitim oblastima. Shukhov je ostavio trajan pečat u početku konstruktivizma Sovjetske Rusije, a kao vodeći inženjer i matematičar tokom kasnog 18. i ranog 19. veka stvorio je hiperboloid i tanku ljusku zatezne strukture izuzetne prefinjenosti i elegancije.

U svom radu (Chao H. 2010) ispituje nosivost diagrid strukture u zavisnosti od ugla između dijagonala i ta nosivost varira do 30%.

U svetu je sve veći broj visokih zgrada (Ali, M. M. and Moon K. 2007), koje dominiraju pejzažem u kome su napravljene. Upravo to omogućava i diagrid sistem, kao i sve brži razvoj građevinske opreme, mehanizacije i materijala. Efikasne strukturne sisteme u seizmičkim zonama takođe bi trebalo dodatno istražiti.

Prednosti Diagrid sistema u odnosu na klasične sisteme su da ima veliki kapacitet za prihvatanje opterećenja, struktura ljuske omogućava velike otvore na objektima i koristi se 20% manje čelika nego kod izgradnje tradicionalnih čeličnih konstrukcija. Može se zaključiti da bi diagrid sistem bio veoma pogodan za površi dobijene inverzijom, jer one sadrže dva sistema kružnih preseka i od delova ovih površi može se napraviti mreža raznih oblika i slobodnih formi.



Sl. 98 Prototip objekta-Frank Gery

Sledećih nekoliko primera najbolje odslikavaju koliko je popularna primena krivih i površi različitih oblika i formi u svetu. Frank Gery, čuveni arhitekta napravio je prototip objekta koji oblikom podseća na pticu raširenih krila koja sleće na vodu. Objekat bi bio pogodan za muzej na vodi ili luku. Sl. 98 je preuzeta sa sajta:

<http://travelwithfrankgehry.blogspot.com/2009/09/wings-museum-by-asgg.html>



Sl. 99 The Chengdu Contemporary Art Centre (CCAC)- Zaha Hadid Architects

Primeri na slikama Sl. 99 i Sl. 100 preuzete su sa sajta: <http://urbanlabglobalcities.blogspot.com/2011/04/elk-grove-civic-center-design-study-by.html> i dela su čuvene Zaha Hadid. Objekti dominiraju kako svojim strukturnim osobinama, tako i lepotom i vanvremenskim dizajnom. Koriste se oblici iz prirode kako bi se što bolje uklopili u okolinu. Tekla strukturni softver omogućava izradu raznih oblika u poprečnim presecima objekata i konturi objekta kao što dozvoljava bogatstvo formi, koje svakako mogu biti i delovi površi obrađenih u ovom radu.



Sl. 100 Elk Grove Civic Center Zaha- Hadid Architects-pogled odozgo

12 Zaključak

Različiti pramenovi krugova homologijom preslikni su u odgovarajuće pramenove konika, pa su ovi pramenovi konika, zajedno sa drugim pramenovima konika preslikani u pramenove krivih trećeg i četvrtog reda (preslikane su i tri singularne konike raspadnute u odgovarajuće parove "pravih").

Klasični red pojedinačne krive jednak je zajedničkom maksimalnom redu svih krivih u grupi umanjenom za broj prolaza krive kroz posmatračevu antipodnu tačku (tj. za strukost antipodne tačke te krive). Zato elementarnu grupu harmonijski ekvivalentnih linija drugog reda čine "prave" i krugovi, dok svaka hiperbola ili elipsa, kao unikatni oblik, obrazuje svoju grupu karakterisanu antipodnom singularnom dvostrukom tačkom u kojoj se tangente konike, tj. njene realne ili imaginarne asimptote, seku pod uglom koji je invarijantan za celu grupu. Zato sve parabole ulaze u jednu istu grupu, jer su im asimptote poklopljene sa osom parabole u dvostruku tangentu u antipodnom šiljku parabole. (Krug i "prava" bi se mogli tretirati i kao specijalni slučaj elipse ukupnog četvrtog reda, sa antipodnom kružnom tačkom, tj. sa parom izotropnih asimptota, tako da je klasični red kruga drugi, a "prave" prvi, jer ona triput prolazi kroz antipod, jednom realno i dvaput imaginarno.)

Grafički prikaz transformacija (i homologije i inverzije), koji je na crtežu isti u oba geometrijska sistema, interpretiran je klasičnim pojmovima (koji uključuju beskonačnost) i relativističkim pojmovima (koji uključuju posmatrača i njegovu antipodnu tačku), jer se najbitnije razlike između dva sistema kriju upravo u tim "beskonačno dalekim" odnosno "antipodnim" područjima, koja su podjednako van vidokruga posmatrača. Od suštinskog je značaja, takođe, da je ne-cirkularnost konike, cirkularnost ekvivalentne krive trećeg reda i bicirkularnost ekvivalentne krive četvrtog reda u projektivnoj geometriji upoređena sa potpunom uzajamnom simetrijom ovih krivih (bile one na "ravni" ili na sferi) u relativističkoj geometriji, u kojoj su stoga sve one istog, četvrtog reda. Dok klasična inverzija kao kvadratna transformacija nije ni potpuno bijektivna (tri prave se preslikaju u tri tačke, i obrnuto), niti je potpuno konformna jer svezuje ili razvezuje singularne tačke, relativistička inverzija je, kao čista

simetrija, potpuno i bijektivna i konformna, tako da ona obezbeđuje ne samo neuporedivo jednostavnije preslikavanje nego predstavlja i potpuno konzistentnu i grafički preciznu transformaciju. Na osnovu toga nije teško predvideti da će se svako upoređivanje između klasične i relativističke geometrije redovno završavati u korist ove druge.

Inverzija kao kvadratna transformacija u ravni upoređena je sa njenim prostornim izvođenjem u vidu dva stereografska projiciranja, sa "ravni" na sferu i sa sfere na istu "ravan" (iz antipodnog centra projiciranja); dato je i klasično i relativističko tumačenje.

U radu je dokazano da se različite klasične konstrukcije "različitih" krivih mogu zameniti jednom konformnom simetrijom (inverzijom), kojom se od jedne konike može proizvesti celokupno mnoštvo njenih konformno ekvivalentnih oblika sačinjeno od cirkularnih krivih 4. i (klasičnog) 3. reda, baš kao što se i od jednog kruga može proizvesti celokupno mnoštvo svih ostalih njemu konformno ekvivalentnih krugova i "pravih" na "ravni". S druge strane, mnoštvo cirkularnih krivih 4. i 3. reda u direktnim je nekonformnim simetrijama (to jest invertovanim harmonijskim homologijama) sa mnoštvom krugova i "pravih", pri čemu su krugovi simetrični sa krivim 4. reda, a "prave" sa krivim klasičnog 3. reda, dok zajednička cirkularna dvostruka tačka ostaje nepromenjena u fiksnom antipodnom centru svih ovih nekonformnih simetrija.

Analizirani su takođe različiti tipovi simetrija konike, konformne (osne i centralna) i nekonformne (centralno-osna, tj. polaritet), kao i njihove transformacije u odgovarajuće harmonijske simetrije kod ekvivalentnih krivih trećeg i četvrtog reda. Dat je primer kako se specifična konstrukcija jedne krive simetrijama prenosi na njene ekvivalente. Primerima je ilustrovano preslikavanje kruga krivine u temenoj i u običnoj tački krivih, posebno kada se krug krivine transformiše u asimptotu ili u stacionarnu odnosno prevojnu tangentu krive.

Razmotrena je homologija (perspektivna kolineacija) na sferi.

Povezani su "ravni" i sferni preseki kvadrike sa "ravnim" ili sfernim presekom ekvivalentnih površi višeg reda.

Uspostavljena je veza između preseka dve kvadrike (pramen kvadrika) i preseka dve njima ekvivalentne površi (pramen ekvivalentnih površi višeg reda).

Prepoznavanjem ekvivalentnosti inverzije sa klasičnom osnom simetrijom (nekomformna simetrija) ukazano je na neograničene mogućnosti za preslikavanje krivih i površi i dobijanje novih oblika koji će biti od koristi i u teoriji geometrije kao i u arhitektonskoj praksi. Istraživanja u oblasti proširenih simetrija biće neiscrpan prostor za dalja otkrića o ravanskim i prostornim oblicima krivih trećeg, četvrtog i višeg reda.

Analizom većeg broja primera iz savremene arhitektonske prakse ukazano je na velike mogućnosti primene krivih i površi trećeg, četvrtog i višeg reda. Posebna pažnja je usmerena na dvostruko zakrivljene površi koje su nastale harmonijskom simetrijom, sa pozitivnom Gausovom krivinom iz harmonijske grupe cilindara i sa negativnom Gausovom krivinom iz harmonijske grupe paraboloida i istaknut značaj dvostruko zakrivljene površi sa pozitivnom Gausovom krivinom nastale harmonijskom inverzijom rotacionog konusa – vretenasta ciklida i rotacionog cilindra - Dipenova ciklida.

Izdvojeno je posmatran savremeni diagrid konstruktivni sistem i zaključeno je da bi on bio veoma pogodan za površi dobijene inverzijom, jer one sadrže dva sistema kružnih preseka i od delova ovih površi može se napraviti mreža raznih oblika i slobodnih formi.

Reference

1. Ali M. M. and Moon K. (2007): *Structural Developments in Tall Buildings: Currents Trends and Future Prospects*, Architectural Science Review, 50.3, pp 205-223.
2. Benton B. (2011): *Advanced Auto-CAD 2011*, Infinite Skills.
3. Bracken P. (2011): *Surfaces of Arbitrary Constant Negative Gaussian Curvature and Related Sine-Gordon Equations*, Mathematica Aeterna, Vol.1, no. 01, 1-11.
4. Bobenko A.I., Pinkall U. (1996): *Discrete surfaces with constant negative Gaussian curvature and the Hirota equation*, J. Differential Geom., 43(3):527-611.
5. Brieskorn E., Knörrer H. (1986): *Plane Algebraic Curves*, Birkhäuser Verlag, Basel-Boston-Stuttgart.
6. Chao Huang, Xiao-lei Han, Jing Ji, Jia-min Tang (2010): *Behavior of concrete-filled steel tubular planar intersecting connections under axial compression*, Part 1: Experimental study, Engineering Structures 32 (60-68).
7. Dovniković L. (1977): *Nacrtno-geometrijska obrada i klasifikacija ravnih krivih III reda*, doktorski rad, Arhitektonski fakultet, Beograd.
8. Dovniković L. (1988): *Uniformna konstruktivna geometrija racionalnih ravnih krivih* (Uniform constructive geometry of rational plane curves), Summary in English, 33 figures. Matica srpska, Zbornik za prirodne nauke 73, 165-207, Novi Sad.
9. Dovniković L. (1990): *Uniform mechanisms for rational plane curves*, Computer Graphics: A new Vision of Engenereeng, Washington.
10. Dovniković L. (1990): *Uniform mechanisms for rational plane curves*, Proc. 4th ICECGDG, Miami, 125-131.
11. Dovniković L. (1994): *The Relativistic Geometry of Harmonic Equivalents*. Proc. 6th ICECGDG, Tokyo, 305-309.
12. Dovniković L. (1998): *The Realization of the Continuity Principle in the Relativistic Pencils of Circles and Spheres*, Novi Sad J. Math. 29, no. 3, 97-107, XIIth Geometric Seminar, Novi Sad .

13. Dovniković L. (1999): *Hamonija sfera - Relativistička geometrija harmonijskih ekvivalenata*, Matica srpska, Novi Sad.
14. Dovniković L. (2002): *The Relativistic Geometry as the Legendary 'Royal Road' to the Whole of Geometry*. Proc. 10th ICGG, Kiev, 152-161.
15. Dovniković L. (2002): *Perspektivna kolineacija u relativističkoj geometriji*, Zbornik radova XXI konferencije MONGEometrija 2002, Podgorica,
16. Dovniković L. (2004): *A Pencil of Qudrics and Multitude of Pencils of Qudrics Harmonic Equivalents through a Fourth Order Space Curve*, Mongeometrija, predavanje po pozivu , Beograd.
17. Dovniković L.(2004): *Relativistic Homology as a Way of Tying or Untying Singular Points*, Journal for Geometry and Graphics, Vienna.(Volume 8 ,No. 2,151-162);
18. Dovniković L. (2008): *Relativistički proširene simetrije kao suština projektivne komplementarnosti krivih i površi*, Proceedings of 1st International Scientific Conference moNGeometrija 2008., Predavanje po pozivu, Vrnjačka Banja.
19. Dovniković L. (2008): *Geometrijska sinteza principa relativnosti sa principima kvantne teorije*, Proceedings of 1st International Scientific Conference moNGeometrija 2008., Predavanje po pozivu, Vrnjačka Banja.
20. Dovniković L. (2010): *Kvantno-relativistička geometrija kao nova naučna paradigma*, Proceedings of 2nd International Scientific Conference moNGeometrija 2010., Predavanje po pozivu, Beograd, jun 24-27.
21. Dovniković L. (2012): *Geometrijska kvantno-relativistička struktura univerzuma*, Proceedings of 3rd International Scientific Conference moNGeometrija 2012., Predavanje po pozivu, Novi Sad, jun 21-24.
22. Đukanović (Vasiljević) G. (2000): *Prostorna geneza pramenova konika*, magistarski rad, Arhitektonski fakultet, Beograd.
23. Đukanović (Vasiljević)G., Maksić J. (2002): *Pencil of Conics as Different Plane Intersections of Pencil of Quadrics*, Proceedings of 10th ICGG, 28 July - 2 August 2002, Kiev, Ukraine, (177-181).
24. Đukanović (Vasiljević)G. (2004): *Pramenovi krivih trećeg i četvrtog reda dobijeni kao harmonijski ekvivalenti pramenova konika*, Zbornik radova XXII konferencije moNGeometrija 2004, Arhitektonski fakultet, Beograd, (90-95).

25. Đukanović (Vasiljević) G. (2006): *Transformacija eliptičkih pramenova krugova u pramenove konika, a ovih u pramenove krivih četvrtog i trećeg reda*, Zbornik radova XXIII konferencije moNGeometrija 2006, Fakultet tehničkih nauka, Novi Sad, (307-312) ;
26. Đukanović G., Vjačeslava M. (2010): *Graphic transformation of hyperbolic pencils of circles into pencils of conics and these into pencils of curves of the 3rd or 4th order*, Proceedings of 2nd international Scientific Conference moNGeometrija 2010, Beograd, jun 24-27.
27. Đukanović G., Janić M., Matić V.(2012): *Graphic transformation of parabolic pencils of circles into pencils of conics and these into pencils of curves of the 3rd or 4th order*, Proceedings of 3rd International Scientific Conference moNGeometrija 2012., Novi Sad,(297-306)
28. Đukanović G., Janić M., Matić V.(2012): *Pencils of curves of the 3rd and 4th order obtained as harmonic equivalents of HH pencils of conics (obtained by the projection of the flat intersection of one-sheeted hyperboloid through its secant)*, Proceedings of 3rd International Scientific Conference moNGeometrija 2012., Novi Sad,(307-318)
29. Đukanović G., Janić M.,(2012): *Graphic transformation of `asymmetrical` pencils of conics into pencils of curves of the 4th and 3rd order*, Proceedings of 3rd International Scientific Conference moNGeometrija 2012., Novi Sad,(353-360)
30. Godeaux L. (1927): *Les transformations birationnelles du plan*, Geauthier-Villars et C^{ie}, Editeurs, Paris.
31. Hohenberg F. (1966): *Konstruktivna geometrija u tehnici*, Građevinska knjiga, Beograd.
32. Janić M. (1994): *AutoLISP 10,11 i 12 - Tehnike programiranja*, Beograd, Šumarski fakultet.
33. Janić M., Đukanović G., Grujović D. (2008): *Modeling of Elements in Landscape Projection*, Proceedings of 1st International Scientific Conference moNGeometrija 2008, (95-103), Vrnjačka Banja,.
34. Janić M., Đukanović G., Grujović D. (2011): *Modeling of a Divider in the Torrents*, ICEGD 2011- "Sustainable Eco Design", IASI, Romania, THE 4th International Conference on Engineering Graphics and Design,BULETINUL INSTITUTULUI

- POLITEHNIC DIN IAȘI Publicat de Universitatea Tehnică „Gheorghe Asachi” din Iași Tomul LVII (LXI), Fasc. 6, 2011 Secția CONSTRUCȚII DE MAȘINI, pp 263-270.
35. Krsić S. (2012): *Geometrijske površi u arhitekturi*, monografija, Niš, Galaksija, Građevinsko – arhitektonski fakultet Univerzitet u Nišu.
36. Mihajlović L. (1990): *Konstruktivno i analitičko određivanje nekih klasa racionalnih kubika primenom opšte inverzije kao kvadratne transformacije*, Zbornik Matice srpske za prirodne nauke 78, Novi Sad.
37. Nervi P. L. (1956): *Structures*, FW. Dodge Corporations, New York.
38. Moon, K., Connor J. J. and Fernandez J. E (2007): *Diagrid Structural Systems for Tall Buildings: Characteristics and Methodology for Preliminary Design*, The Structural Design of Tall and Special Buildings, Vol. 16.2, pp 205-230.
39. Moon K. (2009): *Design and Construction of Steel Diagrid Structures*, School of Architecture, Yale University, New Haven, USA.
40. Moon K. (2011): *Diagrid Structures for Complex-Shaped Tall Buildings*, Procedia Engineering 14, 1343–1350, The Twelfth East Asia-Pacific Conference on Structural Engineering and Construction.
41. Obradović M., Popkonstantinović B., Mišić S. and Petrović M. (2011): *Possibilities of Deltahedral Concave Cupola Form Application in Architecture*, ICEGD 2011- "Sustainable Eco Design", IASI, Romania, The 4TH International Conference on Engineering Graphics and Design.
42. Petrović M., Obradović M., Mijailovic R.(2011): *Suitability Analysis of Hugel's Egg Curve Application in Architectural Structures' Geometry*, ICEGD 2011- "Sustainable Eco Design", IASI, Romania, The 4TH International Conference on Engineering Graphics and Design.
43. Omura G. (2007): *Introducing AutoCAD 2008*, Wiley Publishing Inc. Indianapolis, Indiana.
44. Petrović M. (2010): *Jajaste krive i generalizacija Hugelšeferove konstrukcije*, Magistarski rad, Arhitektonski fakultet, Beograd.
45. Salmon G. (1965): *A treatise on the Analytic geometry of three Dimensions*, Chelsea Publishing Company, new York, (reprint);
46. Savelov A.A. (1979): *Ravninske krivulje*, Školska knjiga, Zagreb.

47. Skala A. (1986): *Geometrijsko izvođenje biracionalnih kvadratnih transformacija u ravni sa primenom u teoriji krivih 4. reda*, Fakultet tehnickih nauka, Novi Sad.
48. Siegl C.(1956): *Strukturformen der Modern Architektur*, Verlag Georg D. W, Callwey, Munchen.
49. Shambina S., Sazonov K. (2012): *Application of analytic surfaces and bionic forms in architectural design*, Proceedings of 3rd International Scientific Conference moNGeometrija 2012., Novi Sad, (499-506);
50. Stavrić M. (2000): *Prostoma geneza pramenova kvadrika*, magistarski rad, Arhitektonski fakultet u Beogradu, 2000;
51. Stavrić M. (2002): *Harmonijska sinteza i konstruktivna obrada površi viših redova*, doktorska disertacija , Arhitektonski fakultet u Beogradu, 2002;
52. Štulić R. (1997): *Obrada ravnih krivih zasnovana na prostornoj interpretaciji biracionalne kvadratne transformacije*, doktorska disertacija, Arhitektonski fakultet u Beogradu.

BIOGRAFIJA

Mr Gordana Đukanović rođena je 29.08.1963.godine u Šapcu. Osnovnu školu "Jovan Cvijić" završila je u Loznici. U srednjoj školi bila je matematičko-tehnički smer (zanimanje programer) i završila je 1982. godine u Gimnaziji "Vuk Karadžić" u Loznici. Sa svim odličnim ocenama stekla je diplomu "Vuk Karadžić" za osnovno i srednje obrazovanje.

Građevinski fakultet u Beogradu upisala je 1982. godine i diplomirala je u roku- 07. marta 1988.godine (prosečna ocena 8.37 i na diplomskom 10). Na osnovu pokazanog uspeha i proseka ocena preko 9 posle završene prve dve godine fakulteta, tokom treće i četvrte godine studija bila je stipendista Univerziteta u Beogradu.

Juna 1988. zaposlila se u Građevinskom preduzeću "Rad" u Beogradu, na poslovima projektovanja skela i oplata u Tesarskom pogonu. Radila je projekat teške skele za Kristalnu dvoranu hotela Hyatt Regency Belgrade, projekte skela za stambena naselja u ulicama dr Ivan Ribar i .Oblakovska u Beogradu. 13.juna 1990. položila je stručni ispit propisan za diplomiranog inženjera građevine-konstruktivni smer. Od 1994. godine do danas radi na Šumarskom Fakultetu Univerziteta u Beogradu, najpre kao asistent pripravnik (1994-2001) a potom u zvanju asistenta (2001-2012) za predmet Nacrtna geometrija.

Godine 1995. upisala je poslediplomske magistarske studije-kurs "Nacrtna geometrija" na Arhitektonskom fakultetu Univerziteta u Beogradu. Sve programom propisane obaveze (kolokvijume i ispite) obavila je sa uspehom do septembra 1988. godine. Decembra 1998. prijavila je izradu magistarke teze pod nazivom: "Prostorna geneza pramenova konika" i sa uspehom je odbranila decembra 2000. godine. Šest godina učestvovala je u radu na vežbama na predmetima: Nacrtna geometrija, Perspektiva i Geometrija oblika I i II na Arhitektonskom fakultetu Univerziteta u Beogradu (2001.-2006. god.). Na Arhitektonskom fakultetu Univerziteta u Beogradu. prijavila je doktorsku tezu pod nazivom- Pramenovi krivih trećeg i četvrtog reda dobijeni preslikavanjem pramenova konika.

Objavila je 22 naučna (jedan je na SCI listi) i dva stručna rada. Član je Srpskog udruženja za geometriju i grafiku. Aktivno se služi engleskim jezikom.

Vlada tehnikom - AutoCAD 2D i 3D Drafting - crtanje u ravni i prostoru.

Majka je troje dece.

Spisak radova

1. Đukanović (Vasiljević) G. (2000): "*Prostorna geneza pramenova konika*", magistarski rad, Arhitektonski fakultet, Beograd.
2. Đukanović (Vasiljević) G. (2000): "*Pramen konika kao projekcija preseka kvadrice i pramena ravni*", Zbornik radova XX konferencije moNGeometrija 2000, Građevinsko-arhitektonski fakultet, Niš, (118-137) ISBN 86-80295-50-7
3. Đukanović (Vasiljević) G. (2000): "*Pramenovi krugova kao stereografske projekcije pramenova krugova na sferi i njihova prostorna restitucija na kvadrikama i površima višeg reda*", " Zbornik radova XX konferencije moNGeometrija 2000, Građevinsko- arhitektonski fakultet, Niš, (138-152), ISBN 86-80295-50-7
4. Đukanović (Vasiljević) G., Maksić J. (2002): "*Dvanaest perspektivno kolinearnih veza konika u jednom pramenu*", Zbornik radova XXI konferencije moNGeometrija, Podgorica, (57-65), ISBN 86-80295-59-0
5. Maksić J., Đukanović (Vasiljević) G. (2002): "*Zajednički elementi različitih perspektivnih slika dobijeni za isti položaj očne tačke i para likoravni pri kretanju objekta*", Zbornik radova XXI konferencije moNGeometrija, Podgorica, (67-76) ISBN 86-80295-59-0
6. Đukanović (Vasiljević) G., Maksić J., Jović B. (2002): "*Method of 2nd order plane curves mapping in general collinear planes*", Proceedings of 10th ICGG, Kiev, Ukraine, (190-192)
7. Đukanović (Vasiljević) G., Maksić J. (2002): "*Pencil of conics as different plane intersections of pencil of of quadrics*", Proceedings of 10th ICGG, Kiev, Ukraine, (177-181)
8. Đukanović (Vasiljević) G. (2004): "*Pramenovi krivih trećeg i četvrtog reda dobijeni kao harmonijski ekvivalenti pramenova konika*", Zbornik radova XXII konferencije moNGeometrija, Arhitektonski fakultet, Beograd, (90-95), ISBN 86-7395-169-0
9. Đukanović (Vasiljević) G. (2006): "*Transformacija eliptičkih pramenova krugova u pramenove konika, a ovih u pramenove krivih četvrtog i trećeg*

- reda*", Zbornik radova XXIII konferencije moNGeometrija, Fakultet tehničkih nauka, Novi Sad, (307-312) ISBN 86-7892-007-6
10. Maksić J., Đukanović (Vasiljević) G., Jović B. (2006): "*Primena novih metoda u nastavi Nacrtna geometrije usklađenih sa Bolonjskom konvencijom i njihov značaj za razvoj prostorne vizualizacije*", Zbornik radova XXIII konferencije moNGeometrija, Fakultet tehničkih nauka, Novi Sad, (286-292), ISBN 86-7892-007-6
 11. Janić M., Đukanović G., Grujović D. (2008): "*Modeling of Elements in Landscape Projection*", Proceedings of 1st International Scientific Conference moNGeometrija 2008, (95-103), Vrnjačka Banja, ISBN 978- 86-80295-83-1.
 12. Janić M., Đukanović G., Grujović D. (2008): "*Usage of engineering graphics in landscape projection*", Proceedings of 1st International Scientific Conference moNGeometrija 2008, (87-94), Vrnjačka Banja, septembar 25-27.2008. ISBN 978- 86-80295-83-1
 13. Matić V., Đukanović G.(2009): "*Bio-fixing erosion control materials*" Proceedings of International Conference "LAND CONSERVATION" - LANDCON 09-05, May 26-30.2009, Tara Mountain/Serbia
 14. Đukanović G., Matić V. (2010): "Graphic transformation of hyperbolic pencils of circles into pencils of conics and these into pencils of curves of the 3rd or 4th order", Proceedings of 2nd International Scientific Conference moNGeometrija 2010, Beograd, jun 24-27, (81-89).
 15. Đukanović G., Stavrić M., (2010): " *Visualisation and animation of geometric topic*", Proceedings of 2nd International Scientific Conference moNGeometrija 2010, Beograd, jun 24-27.2010 (90-104)
 16. Janić M., Đukanović G., Grujović D., Matić V. (2011): "*Contemporary furniture design* ", Proceedings of first Serbian Forestry Congress, 2011 Belgrade, Faculty of Forestry, (1404-1413)
 17. Matić V., Đukanović G.(2012): "*Modern phytoengineering materials for protection of soil and water*", International Conference "Land Conservation"- LANDCON 1209, 2012
 18. Đukanović G., Janić M., Matić V.(2012): "*Graphic transformation of parabolic pencils of circles into pencils of conics and these into pencils of curves of the 3rd or*

4th order", Proceedings of 3rd International Scientific Conference moNGeometrija 2012., Novi Sad,(297-306)

19. Đukanović G., Janić M., Matić V.(2012): "*Pencils of curves of the 3rd and 4th order obtained as harmonic equivalents of HH pencils of conics (obtained by the projection of the flat intersection of one-sheeted hyperboloid through its secant)*", Proceedings of 3rd International Scientific Conference moNGeometrija 2012., Novi Sad,(307-318)
20. Đukanović G., Janić M.,(2012): "*Graphic transformation of `asymmetrical` pencils of conics into pencils of curves of the 4th and 3rd order*", Proceedings of 3rd International Scientific Conference moNGeometrija 2012., Novi Sad,(353-360)

Radovi u časopisu na SCI listi

1. Matić V., Đukanović G.(2009): "**APPLICATION OF EROSION-CONTROL MATERIALS AND SPONTANEOUS VEGETATION IN THE PROTECTION OF RESERVOIRS IN SOUTHERN AND EASTERN SERBIA**", *Arch. Biol. Sci.*, Belgrade, Vol 61 (3) 2009, 475-482, 2009, DOI:10.2298/ABS0903475M,ISSN0354-4664,

<http://www.doiserbia.nb.rs/img/doi/0354-4664/2009/0354-46640903475M.pdf>

Radovi u časopisu

1. Janić M., Đukanović G., Grujović D. (2011): *Modeling of a Divider in the Torrents*, ICEGD 2011- "Sustainable Eco Design", IASI, Romania, THE 4th International Conference on Engineering Graphics and Design, BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI Publicat de Universitatea Tehnică „Gheorghe Asachi” din Iași Tomul LVII (LXI), Fasc. 6, 2011 Secția CONSTRUCȚII DE MAȘINI, pp 263-270.

Stručni radovi

1. Maksić J., Đukanović (Vasiljević) G.(2006): "*Mogućnosti iskorišćenja drvnog otpada kao materijala u edukaciji učenika*", Časopis Prerada drveta januar-mart 2006, str.53-57, ISSN 1451-401X

2. Maksić J., Đukanović (Vasiljević) G., Jović B.(2006): Maksić J., Đukanović (Vasiljević) G.(2006): "*Mogućnosti iskorišćenja drvnog otpada kao sirovine pri proizvodnji drvne galanterije*", Časopis Prerada drveta jul-decembar 2006, str.52-54 , ISSN 1451-401X

Učešće na projektima

- "Razvoj novih proizvoda u cilju boljeg korišćenja drvne sirovine i unapređenja izvoza prerade drveta Srbije", finansiran od strane Ministarstva za prosvetu i nauku Republike Srbije u okviru Nacionalnog programa - Biotehnologija i agroindustrija, broj BTN 361005, 2005-2008, nosilac projekta Šumarski fakultet Univerziteta u Beogradu, Rukovodilac projekta je prof. dr Zdravko Popović.

- "Novi bioekološki materijali za zaštitu zemljišta i voda", finansiran od strane Ministarstva za prosvetu i nauku Republike Srbije u okviru Nacionalnog programa, broj TR-37002, 2011-2014, nosilac projekta Šumarski fakultet Univerziteta u Beogradu. Rukovodilac projekta je prof. dr Vjačeslava Matić.

Прилог 1.

Изјава о ауторству

Потписани-а Гордана Д. Ђукановић

број уписа _____

Изјављујем

да је докторска дисертација под насловом

Праменови кривих трећег и четвртог реда добијени

пресликавањем праменова коника

- резултат сопственог истраживачког рада,
- да предложена дисертација у целини ни у деловима није била предложена за добијање било које дипломе према студијским програмима других високошколских установа,
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио/ла ауторска права и користио интелектуалну својину других лица.

Потпис докторанда

У Београду, 07.05.2012.год.

Гордана Ђукановић

Прилог 2.

Изјава о истоветности штампане и електронске верзије докторског рада

Име и презиме аутора Гордана Д. Ђукановић

Број уписа _____

Студијски програм _____

Наслов рада Праменови кривих трећег и четвртог реда добијени
пресликавањем праменова коника

Ментор _____

Потписани Гордана Д. Ђукановић

изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предао/ла за објављивање на порталу **Дигиталног репозиторијума Универзитета у Београду**.

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Београду.

Потпис докторанда

У Београду, 07.05.2012.год.

Гордана Ђукановић

Прилог 3.

Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом:

Праменови кривих трећег и четвртог реда добијени
пресликавањем праменова коника

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство
2. Ауторство - некомерцијално
3. Ауторство – некомерцијално – без прераде
4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима
5. Ауторство – без прераде
6. Ауторство – делити под истим условима

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци, кратак опис лиценци дат је на полеђини листа).

Потпис докторанда

У Београду, 07.05.2012.год.