

**Универзитет у Београду
Грађевински факултет
Одсек за геодезију и геоинформатику**

Данило С. Јоксимовић, дипл. инж. геод.

**МОДЕЛИРАЊЕ СИНТЕТИЧКИХ КОЕФИЦИЈЕНАТА СФЕРНО
ХАРМОНИЈСКОГ РАЗВОЈА ПОТЕНЦИЈАЛА ЗЕМЉИНЕ ТЕЖЕ ЗА
ПОТРЕБЕ ОДРЕЂИВАЊА ГЕОИДА У ЛОКАЛНОМ ПОДРУЧЈУ**

Докторска дисертација

Београд, 2025.

**University of Belgrade
Faculty of Civil Engineering
Department of Geodesy and Geoinformatics**

Danilo S. Joksimović MSc in Geodesy and Geoinformatics

**MODELING SYNTHETIC COEFFICIENTS OF SPHERICAL
HARMONIC EXPANSION OF THE EARTH'S GRAVITATIONAL
POTENTIAL FOR THE PURPOSE OF DETERMINING THE GEOID IN
A LOCAL AREA**

Doctoral Dissertation

Belgrade, 2025.

ИНФОРМАЦИЈЕ О МЕНТОРУ И ЧЛАНОВИМА КОМИСИЈЕ

Ментор:

В. проф. др Олег Р. Одаловић, дипл. инж. геод.

Универзитет у Београду, Грађевински факултет

Чланови комисије:

Проф. др Драган М. Благојевић, дипл. инж. геод.

Универзитет у Београду, Грађевински факултет

Доц. др Сања М. Грекуловић, дипл. инж. геод.

Универзитет у Београду, Грађевински факултет

Проф. др Владимир Булатовић, дипл. инж. геод.

Универзитет у Новом Саду, Факултет техничких наука

Датум одбране: _____, Београд.

МОДЕЛИРАЊЕ СИНТЕТИЧКИХ КОЕФИЦИЈЕНАТА СФЕРНО ХАРМОНИЈСКОГ РАЗВОЈА ПОТЕНЦИЈАЛА ЗЕМЉИНЕ ТЕЖЕ ЗА ПОТРЕБЕ ОДРЕЂИВАЊА ГЕОИДА У ЛОКАЛНОМ ПОДРУЧЈУ

РЕЗИМЕ

У оквиру дисертације, приказана је методологија моделирања синтетичких коефицијената сферно хармонијског развоја потенцијала Земљине теже за потребе одређивања геоида у локалном подручју, испуњавајући при том све захтјеве у погледу задатих полазних претпоставки и услова.

За локално подручје је одабрана територија Републике Србије, због своје геолошке разноврсности, што омогућава детаљну анализу локалних варијација гравитационог поља. Такође, доступност репрезентативних терестричких података за цјелокупну територију Србије омогућило је објективну евалуацију и прилагођавање глобалних геопотенцијалних модела.

У току истраживања коришћена су два приступа при моделирању синтетичких коефицијената, који су се односили на директну и индиректну примјену новокреираног модела, као и његову евалуацију у смислу сагласности са терестричким подацима одабраног локалног подручја.

Директни приступ обухватао је директно одређивање аномалија висина за дато подручје из модела, чија примјена омогућава изузетно добра рјешења за прелиминарна истраживања и практичне примјене, док индиректни приступ обухвата добијање резидуалних аномалија убрзања као неизоставни дио при *remove-restore* методи у одређивању геоида центиметарског нивоа апроксимације, у циљу добијања што мање стандардне девијације истих као и њихове централне и симетричне расподеле.

При моделирању синтетичких коефицијената извршено је тестирање свих доступних глобалних геопотенцијалних модела, од којих су одабрана три, EGM2008, GOCO05c и EIGEN 6C4 као најпогоднији за даље моделирање и адаптацију.

Поступак у истраживању је обухватао анализу спектра, дефинисање оптималног реона спектра преко тестирања различитих вриједности степена примјеном вишестепене итеративне анализе у циљу дефинисања оптималног степена модела за територију Републике Србије.

Прилагођавање и моделирање коефицијената новог модела обухватало је више варијанти, укључујући и додавање корекције резидуалног модела терена у циљу побољшања прилагођавања новодобијеног модела.

Методологија описана у раду успјела је да одговори на захтјеве и услове задате темом, развијајући на тај начин методу која даје задовољавајућа рјешења како у директном тако и у индиректном приступу.

У погледу директног приступа, добијена су побољшања у односу на оригинални модел EGM2008 за 44% док у погледу индиректног приступа се може видјети да се аномалијама смањује распон за око 100 mGal, сконцентришући се око средње вриједности 0 mGal, са мањом стандардном девијацијом у односу на оригинални модел (0.071 m), задовољавајући услов централне и симетричне расподеле.

Кључне ријечи: Глобални геопотенцијални модел, геоид, синтетички коефицијенти сферно хармонијског развоја, аномалија висине, аномалија убрзања

MODELING SYNTHETIC COEFFICIENTS OF SPHERICAL HARMONIC EXPANSION OF THE EARTH'S GRAVITATIONAL POTENTIAL FOR THE PURPOSE OF DETERMINING THE GEOID IN A LOCAL AREA

ABSTRACT

Within the framework of the dissertation, the methodology for modeling synthetic coefficients of spherical harmonic development of the Earth's gravity potential for the purposes of determining the geoid in the local area is presented, fulfilling all the conditions of the approach within the dissertation. given initial settings and conditions.

The territory of the Republic of Serbia was selected for the local area, due to its geological diversity, which allows for a detailed analysis of local variations of the gravitational field. Also, the availability of representative terrestrial data for the entire territory of Serbia enabled an objective evaluation and adjustment of global geopotential models.

During the research, two approaches were used in modeling synthetic coefficients, which related to the direct and indirect application of the newly created model, as well as its evaluation in terms of compliance with terrestrial data under the name.

The direct approach includes the direct determination of the height anomaly for a given area from the model, the application of which has enabled exceptionally good solutions for preliminary research and practical application of the obtained approach, while the indirect approach. acceleration anomaly as an indispensable part of the remove-restore method in determining the geoid with centimeter accuracy, in order to obtain the smallest possible standard deviation of the same as their distribution and their centralization.

Synthetic coefficient modeling was performed testing of all available global geopotential models, of which three were selected, EGM2008, GOCO05s and EIGEN 6C4 as the most suitable adaptation for further models.

The research procedure included spectrum analysis, defining the optimal spectrum region through testing different degrees of degree by applying multi-stage iterative analysis in order to define the optimal degree of the published model for the regions.

The adjustment and modeling of the coefficients of the new model included several variants, including adding corrections to the residual terrain model in order to improve the adjusted model of the new arrangement.

The methodology described in the paper managed to respond to the requirements and conditions set by the topic, thus developing a method that provides satisfactory solutions in both the direct and indirect approaches.

In terms of the direct approach, improvements were obtained compared to the original model EGM2008 by 44%, while in terms of the indirect approach it can be seen that the anomalies reduce their range by about 100 mGal, concentrating around mean value 0 mGal, by standard

deviation smaller than original model (0.071 m), satisfying the condition of central and symmetric distribution.

Keywords: Global geopotential model, geoid, synthetic coefficients of spherical harmonic expansion, height anomaly, gravity anomaly

ПРЕДГОВОР

Развој и примјена глобалних геопотенцијалних модела представљају један од најзначајнијих доприноса савремене геодезије, утичући на развој дисциплина попут сателитске геодезије, океанографије и других дисциплина. Савремени глобални модели омогућавају прецизно моделирање Земљиног гравитационог поља, али често показују ограничења у локалним условима гдје је неопходна већа резолуција и тачност.

У данашњим истраживањима и доступним радовима, описани су бројни приступи моделирања коефицијената сферно хармонијског развоја потенцијала модела, као и њихово додатно унапређење ради постизања веће сагласности са локалним подручјем. Међутим, упркос значајном напретку, ови приступи често нису успјели да у потпуности одговоре на изазове који се односе на репрезентацију финих локалних варијација и прилагођавање специфичностима локалног подручја, што ограничава њихову примјену у анализи подручја са комплексним геофизичким карактеристикама.

Циљ ове дисертације је дефинисање методологије за моделирање синтетичких коефицијената сферно хармонијског развоја глобалних модела, која ће омогућити високу прецизност у одређивању геоида локалних подручја и задовољити потребе практичних примјена и других научних истраживања.

При моделирању разматране су постојеће хипотезе и уведене нове, које су представљале основ за усмјеравање моделирања. Примјењени су адекватни математички модели ради прилагођавања коефицијената сферно хармонијског развоја постојећих глобалних модела конкретним терестричким подацима са локалног подручја, и усвојене одређене теоријске поставке и одговарајући математички модели за проширење степена коефицијената сферно хармонијског развоја постојећих модела, што је омогућило креирање проширених модела са већом резолуцијом и већом тачношћу у опису геопотенцијала, интегришући различите изворе података и хипотезе, са циљем унапријеђења глобалних геопотенцијалних модела и њихове примјене.

Дисертација је сачињена из девет поглавља:

1. Увод
2. Основе теорије потенцијала
3. Глобални геопотенцијални модели
4. Преглед постојећих истраживања
5. Моделирање глобалних геопотенцијалних модела
6. Нумеричка истраживања
7. Закључак и перпоруке за даља истраживања
8. Литература
9. Прилози

У поглављу **Основе теорије потенцијала** су изложене основне поставке теорије потенцијала, укључујући дефиниције, основне законе и принципе. Унутар поглавља су објашњени и детљано разрађени појмови реалног и нормалног потенцијала, нормалне Земље и нивоских површи као и аномалијски потенцијал, преко проблема граничних вриједности и сферних хармоника заједно са посебним освртом на развој потенцијала Земљине теже у сферно хармонијски развој.

Кроз поглавље **Глобални геопотенцијални модели** су описани модели гравитационог поља Земље, као и значај глобалних геопотенцијалних модела у различитим научним дисциплинама. Такође у склопу поглавља дат је осврт на различите типове модела, њихова улога и значај спектра при моделирању истих.

Посебан акценат је стављен на детаљно објашњење сектора потенцијала Земљине теже, декомпозиције спектра снаге као и саме технике моделирања и анализе спектра.

У оквиру поглавља **Преглед постојећих истраживања** су анализирана и критички разматрана претходна истраживања у области блиско везаној за моделирање глобалних модела и њихове евалуације за локална подручја, заједно са оствареним резултатима и примјењеним техникама и методама при моделирању истих.

Поглавље **Моделирање глобалних геопотенцијалних модела** обухвата детаљан преглед методологија и математичких техника коришћених за развој и примјену ових модела, који су кључни за разумијевање и анализу Земљиног гравитационог поља. Уводно се разматра процес прилагођавања модела, Стоксова формула, која служи као основа за даљу анализу, Фуријеов интеграл и трансформација, који представљају алате за решавање сложених математичких проблема, преко описаног концепта конволуције који представља везу између просторних и спектралних података.

Заједно са коваријационом функцијом, детаљно се описује примјена ортонормираних релација и Фуријеове анализе у одређивању коефицијената потенцијала, као и метода најмањих квадрата за њихову оптимизацију.

Поглавље **Нумеричка истраживања** представља кључни дио дисертације у коме се теоријски концепти из претходних поглавља примјењују у пракси кроз детаљно објашњење поступака рачунања и анализу резултата у оквиру предложене методологије. Прецизно су објашњени алгоритми и технике, представљени су и резултати у виду табела, графикона и дијаграма, који не само да визуелно илуструју добијене податке, већ и омогућавају њихову детаљну анализу. Добијени резултати су критички размотрени, провјеравана је њихова тачност и дискутовано је о њиховим импликацијама, што доприноси процјени успјешности предложене методологије.

Закључак и препоруке за даља истраживања садржи резиме најважнијих резултата дисертације и указује на њихов значај. Дати су предлози за будућа истраживања у области геодезије и идентификовани су потенцијални изазови и предложене могућности за даља побољшања.

ПРИЗНАЊА

Желим да изразим искрену захвалност свом ментору, проф. др. Олегу Одаловићу, на дугогодишњем несебичном труду, стрпљењу, залагању и вриједним савјетима, не само при изради ове дисертације, већ и за цјелокупан рад и усмјерење током протеклих петнаест година.

Посебну захвалност дугујем члановима комисије проф. др. Драгану Благојевићу и проф. др. Сањи Грекуловић на пажљивом читању текста, конструктивним сугестијама и указивању на могуће грешке, што је значајно допринијело квалитету овог рада.

Такође, желим да се захвалим својим пријатељима на безрезервној подршци, разумијевању и охрабрењу. Хвала што сте вјеровали у мене и што сте дио мог живота.

На крају, најдубљу захвалност дугујем својој породици, која ми је својом безусловном љубављу и подршком била највећи ослонац, не само на овом путу, већ и кроз све животне изазове.

Београд, 2025.

Данило Јоксимовић

СПИСАК СКРАЋЕНИЦА

ASCII	– American Standard Code for Information Interchange
BVP	– Boundary Value Problem
CHAMP	– Challenging Minisatellite Payload
DORIS	– Doppler Orbitography and Radiopositioning Integrated by Satellite
DOT	– Dynamic Ocean Topography
EGM2008	– Earth Gravitational Model 2008
EGM96	– Earth Gravitational Model 1996
EIGEN	– European Improved Gravity Gravity Model
FAQ	– Frequently Asked Questions
FFT	– Fast Fourier Transform
GeoTIFF	– Georeferenced Tagged Image File Format
GGM	– Global Geopotential Model / Global Gravity Model
GNSS	– Global Navigation Satellite System
GOCE	– Gravity field and steady-state Ocean Circulation Explorer
GOCO	– Gravity Observation Combination
GOCO02S	– Gravity Observation Combination model 2002
GPS	– Global Positioning System
GPS/dh	– Global Positioning System Leveling
GPS SST	– Global Positioning System Sea Surface Topography
GRACE	– Gravity Recovery and Climate Experiment
ICGEM	– International Centre for Global Earth Models
IGSN71	– International Gravity Standardization Network 1971
MGIB	– Militärgeographisches Institut Belgrad
MGIV	– Militärgeographisches Institut Vienna
NASA	– National Aeronautics and Space Administration
NetCDF	– Network Common Data Form
NGA	– National Geospatial-Intelligence Agency
RTM	– Residual Terrain Modelling
SGG	– Satellite Gravity Gradiometry

SI	– International System of Units
SLR	– Satellite Laser Ranging
SRTM	– Shuttle Radar Topography Mission
SSH	– Sea Surface Height
SST	– Sea Surface Temperature
SST_PRD	– Sea Surface Temperature Prediction
TDRSS	– Tracking and Data Relay Satellite System
TOPEX	– Topography Experiment
USGS	– United States Geological Survey
XGM2016	– Experimental Gravity Field Model 2016
МНК	– Метод најмањих квадрата
РГЗ	– Републички геодетски завод (Republic Geodetic Authority)
HBT1	– Нивелман високе тачности 1
HBT2	– Нивелман високе тачности 2

СПИСАК СЛИКА

Слика 2-1: Вектор гравитационе силе.....	3
Слика 2-2: Компоненте вектора гравитационе силе.....	4
Слика 2-3: Вектор силе Земљине теже	5
Слика 2-4: Нормална Земља	11
Слика 2-5: Однос референтних површи	13
Слика 2-6: Зонске хармонике $P_{10,0}(t)$, подјела сфере на области са позитивним и негативним знаком и њихова визуализација на сфери полупречника R	19
Слика 2-7: Тесералне хармонике $P_{12,6}(t)\cos 6\lambda$, подјела сфере на области са позитивним и негативним знаком и њихова визуализација на сфери полупречника R	19
Слика 2-8: Секторске хармонике $P_{20,20}(t)\cos 20\lambda$, подјела сфере на области са позитивним и негативним знаком и њихова визуализација на сфери полупречника R	19
Слика 3-1: Скуп K и отворени региони Γ и Ω	32
Слика 3-2: Случај релевантан у геодетском смислу.....	33
Слика 3-3: Спектри снаге за неке моделе до степена 720.....	38
Слика 3-4: Спектри снаге за неке дистрибуције преко сферне капе (аналогне правоугаоним импулсима) са радијусима од $0,5^\circ$ до 8° и за делта функцију (0°). (извор илустрације: "Geoid and its geophysical interpretations, Chapter 6, page 118, Figure 2) ...	39
Слика 3-5: Спектрални коефицијенти који одговарају Слика 3-4 (извор илустрације: "Geoid and its geophysical interpretations, Chapter 6, page 118, Figure 3).	39
Слика 3-6: Приказ графика степених варијасни код модела Еиген (плава линија) и Каула правило (црвена линија).....	43
Слика 4-1: Просторни распоред тачака гравиметријског премјера Црне Горе (лијево) и мјерених Gps/dh аномалија висина (десно) (Joksimović & Odalović, 2025)	50
Слика 5-1: Дефиниција коваријансне функције ако су P и Q ван сфере (Hofmann-Wellenhof & Moritz, 1986)	59
Слика 6-1: Шематски приказ основних приступа истраживања.....	77
Слика 6-2: Визуализација ГГМ-а Мјесеца.....	81
Слика 6-3: Визуализација ГГМ-а Венере	82
Слика 6-4: Визуализација ГГМ-а Марса.....	82
Слика 6-5: - Просторни распоред тачака детаљног гравиметријског премјера Републике Србије.....	84
Слика 6-6: Просторни распоред тачака са одређеним аномалијама висина примјеном GPS/dh методе	87
Слика 6-7: График релативних разлика на растојању до 1 km.....	91
Слика 6-8: График релативних разлика на растојању од 1 km до 2 km.....	91
Слика 6-9: График релативних разлика на растојању од 2 km до 3 km.....	92
Слика 6-10: Шематски приказ методологије моделирања.....	95
Слика 6-11: Шематски приказ одабира оптималног степена у моделу	97
Слика 6-12: Грешка степене варијансе аномалијског потенцијала (GOCO05c).....	98
Слика 6-13: Графички приказ промјене статистичких параметара зависно од степена модела GOCO05c (прилагођавање аномалијама убрзања)	98
Слика 6-14: Графички приказ промјене распона разлика зависно од степена модела ...	99
Слика 6-15: Графички приказ промјене распона разлика од 350-360 степена модела GOCO05c (прилагођавање аномалијама убрзања)	100

Слика 6-16: Графички приказ промјене статистичких параметара зависно од степена модела GOCO05c (прилагођавање аномалијама висина)	101
Слика 6-17: Графички приказ промјене распона разлика зависно од степена модела GOCO05c (прилагођавање аномалијама висина).....	102
Слика 6-18: Хистограм разлика аномалија убрзања из модела A+B+C и терестричких мјерења (GOCO05c).....	104
Слика 6-19: Хистограм аномалија убрзања терестричких мјерења (GOCO05c)	105
Слика 6-20: Хистограм разлика аномалија висина из оригиналног модела и терестричких мјерења (GOCO05c).....	106
Слика 6-21: Хистограм разлика аномалија висина из финалног (A+B) модела и терестричких мјерења (GOCO05c).....	107
Слика 6-22: Грешка степене варијансе аномалија висина (EGM2008)	110
Слика 6-23: Графички приказ промјене статистичких параметара зависно од степена модела EGM2008 (прилагођавање аномалијама убрзања).....	111
Слика 6-24: Графички приказ промјене распона разлика зависно од степена модела EGM2008 (прилагођавање аномалијама убрзања).....	112
Слика 6-25: Графички приказ промјене статистичких параметара зависно од степена модела EGM2008 (прилагођавање аномалијама висина).....	113
Слика 6-26: Графички приказ промјене распона разлика зависно од степена модела EGM2008 (прилагођавање аномалијама висина).....	114
Слика 6-27: Графички приказ промјене статистичких параметара зависно од степена модела EGM2008 (прилагођавање аномалијама убрзања за локално подручје територије Француске)	114
Слика 6-28: Графички приказ промјене распона разлика зависно од степена модела EGM2008 (прилагођавање аномалијама убрзања за локално подручје територије Француске)	115
Слика 6-29: Приказ степене варијансе аномалије висина од 2000. до 2190 степена код модела EGM2008.....	116
Слика 6-30: Каула правило (црвена линија) и спектар степене варијансе са моделираним дијелом од 2120.ог степена (плава линија).....	117
Слика 6-31: Хистограм разлика аномалија висина модела A+B+C и оригиналних мјерења са нормалном расподелом (EGM2008)	118
Слика 6-32: Хистограм разлика транслираних аномалија висина и оригиналних мјерења (EGM2008).....	120
Слика 6-33: Хистограм разлика транслираних аномалија висина и оригиналних мјерења са датом нормалном расподелом (EGM2008)	121
Слика 6-34: Хистограм разлика аномалија убрзања оригиналног модела (EGM2008) и радног скупа са додатом теренском корекцијом	123
Слика 6-35: Хистограм разлика аномалија убрзања A+B модела и радног скупа са додатом теренском корекцијом	124
Слика 6-36: Хистограм разлика аномалија висина транслираног A+B модела и контролног скупа са додатом теренском корекцијом	125
Слика 6-37: Приказ степене варијансе аномалије висина код модела EIGEN6C4.....	126
Слика 6-38: Графички приказ промјене статистичких параметара зависно од степена модела EIGEN 6C4 (прилагођавање аномалијама убрзања).....	127

Слика 6-39: Графички приказ промјене распона разлика зависно од степена модела EIGEN 6C4 (прилагођавање аномалијама убрзања).....	128
Слика 6-40: Хистограм разлика аномалија висина оригиналног модела (EIGEN6C4) и контролног скупа	130
Слика 6-41: Хистограм разлика аномалија висина A+B+C модела (EIGEN6C4) и контролног скупа	130
Слика 6-42: Хистограм разлика аномалија висина транслираног A+B+C модела и контролног скупа	132

СПИСАК ТАБЕЛА

Табела 6.1: Статистички параметри аномалија убрзања срачунатих из радног скупа података	90
Табела 6.2: Статистички параметри резидуалног скупа аномалија (GOCO05c)	102
Табела 6.3: Статистички параметри моделираних аномалија из модела и њихових разлика са терестричким мјерењима (GOCO05c)	103
Табела 6.4: Статистички параметри аномалија висина из модела и њихових разлика са терестричким мјерењима(GOCO05c).....	106
Табела 6.5: Статистички параметри аномалија висина из модела и њихових разлика са терестричким мјерењима (EGM96)	109
Табела 6.6: Статистички параметри аномалија висина из модела и њихових разлика са терестричким мјерењима (EGM2008)	118
Табела 6.7: Статистички параметри разлика транслираних аномалија висина из модела и њихових разлика са терестричким мјерењима.....	119
Табела 6.8: Распон разлика контролног скупа са транслираним вриједностима аномалија висина.....	119
Табела 6.9: Статистички параметри разлика аномалија убрзања након примјене РТМ корекције.....	121
Табела 6.10: Статистички параметри разлика аномалија висина након примјене РТМ корекције (EGM2008)	122
Табела 6.11: Распон разлика контролног скупа са вриједностима аномалија висина након додате РТМ корекције (EGM2008).....	122
Табела 6.12: Статистички параметри разлика транслираних аномалија висина из модела А+В и њихових разлика са терестричким мјерењима након додате теренске корекције	124
Табела 6.13: Статистички параметри аномалија висина из модела и њихових разлика са терестричким мјерењима (EIGEN6C4)	129
Табела 6.14: Статистички параметри разлика транслираних аномалија висина из модела А+В+С и њихових разлика са терестричким мјерењима.....	131
Табела 6.15: Распон разлика контролног скупа са транслираним вриједностима аномалија висина	131

СПИСАК ПРИЛОГА

Прилог 1: Општи облик површи распореда разлика аномалија висина терестричких мјерења и модела A+B+C (EGM2008) – максимални степен и ред – 2500	140
Прилог 2: Општи облик површи распореда разлика аномалија висина терестричких мјерења и модела A+B (GOCO05c) – максимални степен и ред - 720	141
Прилог 3: Општи облик површи распореда разлика аномалија висина терестричких мјерења и модела A+B+C (EIGEN6C4) – максимални степен и ред – 2500	142
Прилог 4: Општи облик површи распореда разлика аномалија убрзања терестричких мјерења и модела A+B+C (GOCO05c) – максимални степен и ред – 720.....	143
Прилог 5: Општи облик површи распореда разлика аномалија убрзања терестричких мјерења и модела A+B (EGM2008) са додатом РТМ корекцијом – максимални степен и ред – 2500.....	144

САДРЖАЈ

1.	УВОД	1
2.	ОСНОВЕ ТЕОРИЈЕ ПОТЕНЦИЈАЛА	3
2.1	Гравитациона сила	3
2.2	Земљина тежа	4
2.3	Потенцијал Земљине теже	6
2.4	Спољашњи и унутрашњи потенцијал убрзања силе Земљине теже	7
2.5	Нормални потенцијал	10
2.6	Нивоске површи	12
2.7	Аномалијски потенцијал	13
2.8	Проблеми граничних вриједности	14
2.9	Сферно-хармонијски развој потенцијала Земљине теже	17
2.9.1	Сферни хармоници	18
2.9.2	Потенцијал Земљине теже у сферним хармоничима	19
2.10	Функционали аномалијског потенцијала	23
3.	ГЛОБАЛНИ ГЕОПОТЕНЦИЈАЛНИ МОДЕЛИ	25
3.1.1	Типови глобалних геопотенцијалних модела	28
3.1.2	Директни приступ моделирања	29
3.1.3	Временски приступ моделирања	29
3.1.4	Просторни приступ моделирања	30
3.1.5	Глобални модели као рјешење проблема граничних вриједности	30
3.1.6	Рунгеова теорема	32
3.2	Спектар потенцијала Земљине теже	34
3.2.1	Спектар снаге	36
3.2.2	Спектралне релације и функције преноса у геодезији	40
3.2.3	Комплексност утицаја изостатичких издизања	40
3.2.4	Физичка интерпретација компоненти спектра	40
3.2.5	Технике филтрирања и њихове примјене	41
3.2.6	Степене варијансе аномалијског потенцијала и његових функционала и њихове оцјене	41
3.2.7	Каула правило	42
3.2.8	Грешка у извршењу и грешка пропуста (Commision and omission error)	44
3.2.9	Уклапање дуготаласних, средњеталасних и краткоталасних карактеристика поља теже	46
4.	ПРЕГЛЕД ПОСТОЈЕЋИХ ИСТРАЖИВАЊА	47
5.	МОДЕЛИРАЊЕ ГЛОБАЛНИХ ГЕОПОТЕНЦИЈАЛНИХ МОДЕЛА	51
5.1.1	Прилагођавање модела	51

5.1.2	Стоксова формула у спектралном домену.....	53
5.1.3	Фуријеов интеграл и Фуријеова трансформација.....	55
5.1.4	Конволуција.....	57
5.1.5	Функција коваријансе и спектар	58
5.1.6	Опште једначине глобалног терестричког поља	60
5.1.7	Примјена ортонормираних релација за одређивање коефицијената	62
5.1.8	Коришћење Фуријеове анализе при одређивању коефицијената потенцијала.....	64
5.1.9	Употреба методе најмањих квадрата при одређивању коефицијената потенцијала.....	65
5.1.10	Предикција методом најмањих квадрата.....	66
5.1.11	Коваријациона функција	67
5.1.12	Колокација са случајним грешкама	69
5.1.13	Рекурентне релације Лежандрових полинома	70
5.1.14	Ортонормирани Лежандрови полиноми.....	74
6.	НУМЕРИЧКА ИСТРАЖИВАЊА	77
6.1.1	Преглед доступних модела	79
6.1.2	Одабир локалног подручја	83
6.2	Расположиви подаци	84
6.2.1	Детаљни гравиметријски премјер	84
6.2.2	GPS/dh дискретне вриједности мјерених аномалија висина	86
6.2.3	Дигитални модел SRTM.....	88
6.3	Припрема и обрада података	89
6.4	Моделирање синтетичких коефицијената	93
6.4.1	Полазна основа методологије моделирања синтетичких коефицијената	93
6.4.2	Одабир глобалног геопотенцијалног модела	95
6.4.3	Дефинисање оптималног степена.....	96
6.4.4	Одабир оптималног степена за прилагођавање модела GOCO05c	97
6.4.5	Прилагођавање модела GOCO05c.....	102
6.4.6	Вишестепена итеративна анализа оптималног степена прилагођавањем модела EGM96.....	108
6.4.7	Одабир оптималног степена за прилагођавање модела EGM2008	109
6.4.8	Провјера одабира оптималног степена са независним скупом података 114	
6.4.9	Прилагођавање и проширење модела EGM2008	115
6.4.10	Прилагођавање и проширење модела са додатком PTM корекције	121
6.4.11	Прилагођавање модела EIGEN6C4	125
6.4.12	Конечан допринос истраживањима	132
7.	ЗАКЉУЧНА РАЗМАТРАЊА.....	133
7.1	Препоруке за будућа истраживања	134
8.	ЛИТЕРАТУРА.....	136

9. ПРИЛОЗИ.....	140
БИОГРАФИЈА АУТОРА	145
ИЗЈАВА О АУТОРСТВУ	146
ИЗЈАВА О ИСТОВЕТНОСТИ ШТАМПАНЕ И ЕЛЕКТРОНСКЕ ВЕРЗИЈЕ ДОКТОРСКОГ РАДА	147
ИЗЈАВА О КОРИШЋЕЊУ	148

1. УВОД

Одређивање поља теже Земље представља један од главних задатака геодезије, пружајући кључне информације о Земљи, њеној унутрашњој структури и течном омотачу, што је од значаја за све научне дисциплине које проучавају Земљино тијело. Истовремено, важно је учинити информације о пољу теже доступним у форми једноставних и примјенљивих геодетских производа.

Сила теже Земље, као резултанта гравитационе силе и центрифугалне силе, дефинисана је правцем, смјером и интензитетом. Њена вриједност зависи од позиције тијела на Земљиној површини, утицаја плима океана и мора, гравитационог дјеловања небеских тијела, као и од промјена густине маса у атмосфери и подземним водама. Ова сила дефинише векторско поље Земљине теже у цијелом простору.

Геометријске особине овог векторског поља могу се анализирати преко његовог убрзања, које је могуће замијенити скаларним пољем. Дефинисањем функције која описује то скаларно поље, дефинише се потенцијал убрзања силе Земљине теже, који представља збир потенцијала убрзања гравитационе и центрифугалне силе (Одаловић, 2010).

Потенцијал убрзања центрифугалне силе има једноставан аналитички облик који је у потпуности одређен угаоном брзином ротације Земље, те се због ове чињенице проучавање убрзања Земљине теже углавном своди на истраживање потенцијала убрзања гравитационе силе.

Потенцијал убрзања гравитационе силе карактерише непрекидност првих парцијалних извода у читавом простору, док други парцијални изводи показују прекиде на физичкој површи Земље. У простору изван физичке површи, потенцијал убрзања гравитационе силе задовољава Лапласову једначину, док у унутрашњости тијела задовољава Пуасонову једначину, чиме ове особине омогућавају разграничење потенцијала убрзања гравитационе силе на спољашњи и унутрашњи потенцијал (Heiskanen & Moritz, 1967).

С обзиром на то да распоред густине масе унутрашњости Земље није познат, истраживања у области физичке геодезије углавном су усмјерена на анализу и одређивање спољашњег потенцијала гравитационог поља.

Свака функција која задовољава Лапласову једначину назива се хармонијском и може се, примјеном Фуријеове методе раздвајања промјенљивих, представити као бесконачни ред просторних сферних хармоника. Потенцијал убрзања Земљине теже такође се развија у овај облик, при чему се од свих могућих решења бирају она која задовољавају унапријед дефинисане граничне услове. У физичкој геодезији разматрају се три врсте граничних услова, чиме се дефинишу први, други и трећи гранични проблем теорије потенцијала (Sanso & Sideris, 2013). Потенцијал изражен облику просторних сферних хармоника, остаје записан као функција познатих координата тачака и непознатих коефицијената сферно хармонијског развоја.

У практичним примјенама, бесконачни ред просторних сферних хармоника своди се на коначан степен, при чему тај степен, као цијели број, представља мјеру укупног доприноса свих просторних хармоника. Ова апроксимација стварног гравитационог потенцијала Земље у простору изван њене физичке површи позната је као глобални

геопотенцијални модел. Коришћењем ових модела могуће је израчунати различите функционале аномалијског потенцијал. Поред тога, глобални геопотенцијални модели омогућавају прецизно одређивање глобалног геоида у свакој тачки на Земљи у односу на референтни нивоски елипсоид.

Истраживање описано у дисертацији фокусира се на одређивање непознатих коефицијената сферно хармонијског развоја, при чему је кључни аспект рада дефинисање методологије моделирања глобалног геопотенцијалног модела за потребе одређеног локалног подручја. У досадашњим истраживањима, различити аутори су користили различите приступе у моделирању коефицијената како би прилагодили моделе специфичним регионалним карактеристикама.

Полазећи од наведеног, циљ је развој проширеног глобалног геопотенцијалног модела који ће пружити оптималну апроксимацију за изабрано подручје, уз минимизацију грешака, као и других фактора који утичу на укупну тачност података модела, чија примјена може послужити као основа за даља истраживања у погледу одређивања геоида локалног подручја и других прелиминарних истраживања геопотенцијалног поља.

2. ОСНОВЕ ТЕОРИЈЕ ПОТЕНЦИЈАЛА

2.1 ГРАВИТАЦИОНА СИЛА

Према Њутновом закону гравитације, тачке А и В са масама m_A , m_B , на међусобном растојању l , привлаче једна другу силом:

$$F_{A,B} = G \frac{m_A m_B}{l^2} \quad (2.1)$$

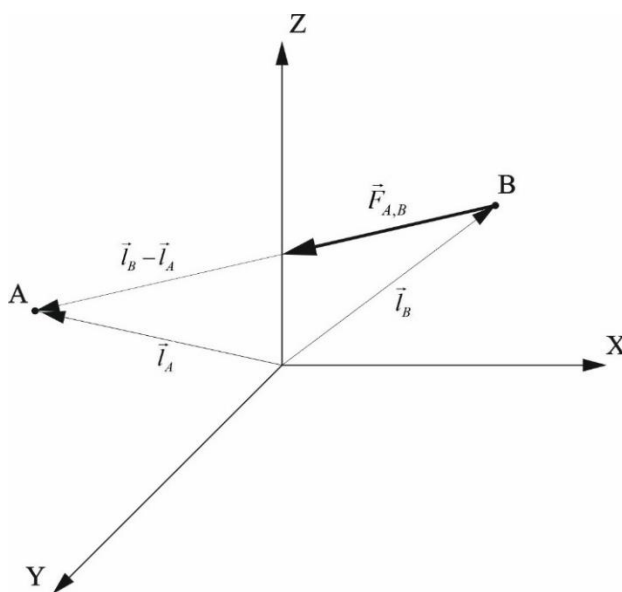
Ова сила усмјерена је дуж праве која спаја те двије тачке, гдје је G Њутнова гравитациона константа, чија вриједност износи

$$G = 6.6742 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2} \quad (2.2)$$

Иако масе m_A , m_B привлаче једна другу на потпуно симетричан начин, погодно је једну од њих назвати привлачећом масом, а другу привлаченом масом. Уколико у правоуглом координатном систему представимо вектор гравитационе силе (Слика 2-1), формула добија следећи облик:

$$\vec{F}_{A,B} = G \cdot \frac{m_A m_B}{|\vec{l}_B - \vec{l}_A|^3} (\vec{l}_B - \vec{l}_A) \quad (2.3)$$

Гдје су $\vec{l}_A$ и $\vec{l}_B$ вектори положаја центара маса тијела А и В, подразумијевајући да су димензије тијела занемарљиво мале у односу на њихово растојање. Смјер силе је усвојен тако да тијело веће масе привлачи тијело мање масе, у овом случају од В ка А.



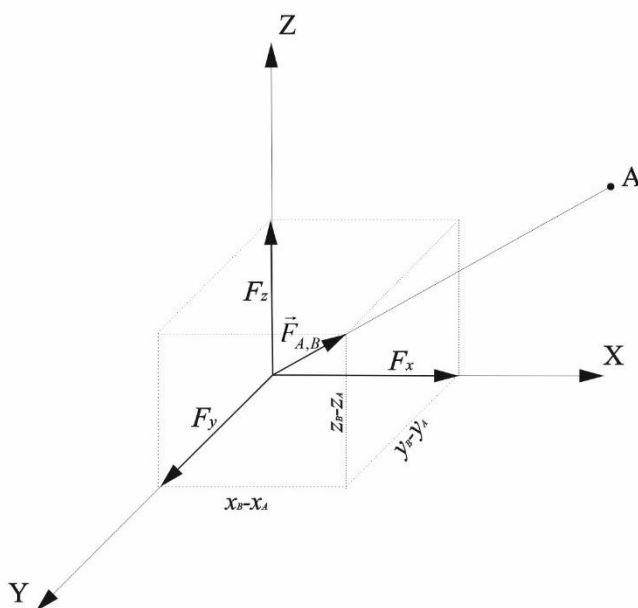
Слика 2-1: Вектор гравитационе силе

Појединачне компоненте вектора гравитационе силе по осама одређују се на основу следећих израза (Слика 2-2):

$$\begin{aligned} F_x &= -F_{A,B} \cos \alpha = -G \frac{m_A m_B}{l^2} \frac{x_B - x_A}{l} = -k m_A m_B \frac{x_B - x_A}{l^3}, \\ F_y &= -F_{A,B} \cos \beta = -G \frac{m_A m_B}{l^2} \frac{y_B - y_A}{l} = -k m_A m_B \frac{y_B - y_A}{l^3}, \\ F_z &= -F_{A,B} \cos \gamma = -G \frac{m_A m_B}{l^2} \frac{z_B - z_A}{l} = -k m_A m_B \frac{z_B - z_A}{l^3}, \end{aligned} \quad (2.4)$$

гдје знак минус даје оријентацију правцу силе у смјеру тијела које привлачи, гдје су $\vec{l}_A$ и $\vec{l}_B$ вектори положаја тела А и В, α, β, γ углови које вектор силе гради са координатним осама, x_A, y_A, z_A и x_B, y_B, z_B координате центара масе тијела А и В, l растојање између центара маса тијела А и В, изражено формулом у правоуглим координатама:

$$l = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2} \quad (2.5)$$



Слика 2-2: Компоненте вектора гравитационе силе

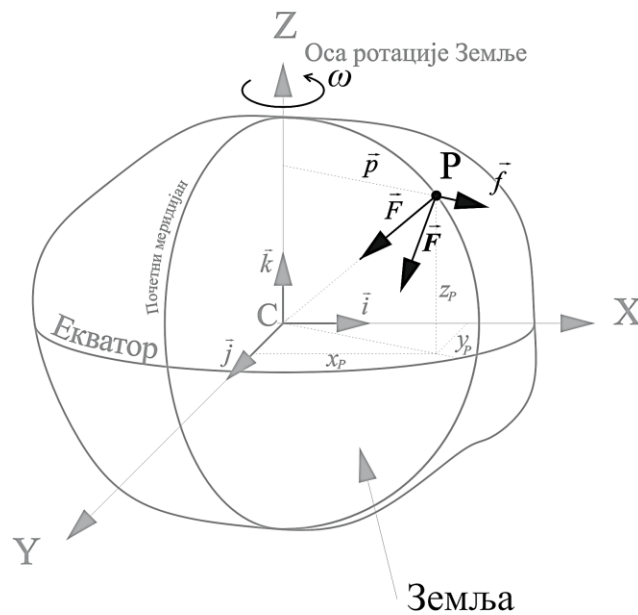
2.2 ЗЕМЉИНА ТЕЖА

Када се проучавају силе које дјелују на материјална тијела, у референтном систему везаном за Земљу немогуће је изоставити још два нелинеарна кретања која дјелују на тијела, а то су кретање Земље око Сунца и сама ротација Земље око своје осе. У циљу поједностављења, сматраће се да су ове двије ротације униформне, наиме да имају константну угаону брзину, и тако чине центрифугалну силу.

Из претходног произилази да на тијело које се налази физичкој површи Земље дјелују двије силе, гравитациона и центрифугална сила, чија резултанта се назива сила Земљине теже, дата у облику:

$$\vec{F} = \vec{F} + \vec{f}, \quad (2.6)$$

гдје је $\vec{F}$ Сила Земљине теже, $\vec{F}$ сила гравитационе силе и $\vec{f}$ центрифугална сила (Слика 2-3):



Слика 2-3: Вектор силе Земљине теже

Векторска једначина силе Земљине теже, као резултанте вектора гравитационе силе и центрифугалне силе, може се приказати у облику:

$$\vec{F} = \vec{F}(\vec{l}_p) = \vec{g}(\vec{l}_p)m_p, \quad (2.7)$$

гдје $\vec{g}(\vec{r}_p)$ представља вектор убрзања силе Земљине теже и има облик:

$$\vec{g}(\vec{l}_p) = G \iiint_{\Omega} \frac{\rho(\vec{r})}{|\vec{l} - \vec{l}_p|^3} (\vec{l} - \vec{l}_p) d\Omega + \vec{p}\omega^2, \quad (2.8)$$

Гдје је G универзална гравитациона константа, ρ густина материје, Ω представља област интеграције која обухвата тијело Земље, ω угаону брзину ротације Земље, $\vec{r}, \vec{r}_p$ вектор положаја диференцијалног елемента запремине $d\Omega$ и уједно вектор положаја тачке P . Вектор $\vec{p}$, управан на осу ротације Земље, одређује се на основу правоуглих геоцентричних координата тачке у којој је дефинисан вектор убрзања теже приказан на слици (Слика 2-3):

$$|\vec{p}| = \sqrt{x_p^2 + y_p^2} \quad (2.9)$$

Правцац и смјер силе Земљине теже одређени су правцем и смјером резултанте гравитационе силе и центрифугалне силе. Интензитет ове силе варира у зависности од положаја тијела на физичкој површини Земље. Јединица за убрзање дефинисана у SI систему је $\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, гдје се такође користи и јединица названа Гал (Gal), у част научника

Галилео Галилеја, при чему је $1 \text{ Gal} = 0.01 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ (Одаловић, 2010).

2.3 ПОТЕНЦИЈАЛ ЗЕМЉИНЕ ТЕЖЕ

Као што је претходно показано, сила Земљине теже дефинише резултанту гравитационе и центрифугалне силе која дјелује на сваки објекат у Земљиним пољу. Векторско поље силе Земљине теже је безвртложно (Vaníček & Krakiwsky, 1982), одакле слиједи да је

$$\text{rot}[\vec{F}] = 0, \quad (2.10)$$

што значи да се вектор теже може изразити као градијент одређеног скаларног потенцијала

$$\vec{F} = \text{grad}[W_{\vec{F}}] = \nabla W_{\vec{F}}, \quad (2.11)$$

гдје ∇ представља Хамилтонов оператор:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right), \quad (2.12)$$

и гдје су $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ јединични вектори координатних оса правоуглог геоцентричног координатног система, гдје се једначина (2.11) може представити у таквом координатном систему у облику:

$$\vec{F} = \text{grad}[W_{\vec{F}}] = \nabla W_{\vec{F}} = \left(\frac{\partial W_{\vec{F}}}{\partial x}, \frac{\partial W_{\vec{F}}}{\partial y}, \frac{\partial W_{\vec{F}}}{\partial z} \right). \quad (2.13)$$

Потенцијал Земљине теже представља скаларну функцију која дефинише скаларно поље убрзања Земљине теже, и представља збир двије скаларне функције:

$$W_{\vec{F}} = V + \Phi, \quad (2.14)$$

гдје је $W_{\vec{F}}$ укупни потенцијал Земљине теже, V потенцијал гравитационе силе, који представља класичан потенцијал који зависи од расподеле густине унутар Земље, дат формулом

$$V = V(x, y, z) = V(\vec{l}_p) = m_p G \iiint_{\Omega} \frac{\rho(x, y, z)}{l} dx dy dz = m_p G \iiint_{\Omega} \frac{\rho(\vec{l})}{|\vec{l} - \vec{l}_p|} d\Omega \quad (2.15)$$

при чему је тијело Земље усвојено као подручје интеграције $d\Omega$, док Φ представља центрифугални потенцијал који се може изразити у зависности од угаоне брзине ротације Земље и растојања од осе ротације

$$\Phi = \Phi(x, y, z) = \Phi(\vec{l}_p) = \Phi(x, y) = m_p \frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2) \quad (2.16)$$

Уколико се дефинишу и потенцијални вектора за гравитациону $\vec{F}$ и центрифугалну $\vec{f}$ силу у форми градијената скаларних поља V и Φ , аналогно једначини (2.6) добија се:

$$\vec{F} = \text{grad}[V] = \nabla V = \left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z} \right) \quad (2.17)$$

$$\vec{f} = \text{grad}[\Phi] = \nabla \Phi = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \frac{\partial \Phi}{\partial y}, 0 \right) \quad (2.18)$$

Аналогно једначинама (2.15) и (2.16), укупни гравитациони потенцијал је дат следећом једначином (Heiskanen & Moritz, 1967):

$$W_{\vec{F}} = W_{\vec{F}}(x, y, z) = m_p G \iiint_{\Omega} \frac{\rho(x, y, z)}{l} dx dy dz + m_p \frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2). \quad (2.19)$$

2.4 СПОЉАШЊИ И УНУТРАШЊИ ПОТЕНЦИЈАЛ УБРЗАЊА СИЛЕ ЗЕМЉИНЕ ТЕЖЕ

Из свега наведеног се може закључити да потенцијал Земљине теже представља основну величину за описивање гравитационог поља Земље.

Уколико се посматра једначина (2.7) и (2.8), види се да једина разлика између векторских поља силе Земљине теже и убрзања теже јесте фактор размјере масе тијела m_p . Из наведеног произилази закључак да проучавање геометријских особина векторског поља силе теже се може у потпуности ослонити на проучавање векторског поља њеног убрзања, гдје се иста аналогија може примијенити и код изучавања потенцијала убрзања теже.

Како убрзање силе Земљине теже представља градијент промјене скаларног поља, слиједи да се компоненте тог вектора могу одредити из релације (Heiskanen & Moritz, 1967)

$$\vec{g} = \text{grad}[W] = \nabla W = \left(\frac{\partial W}{\partial x}, \frac{\partial W}{\partial y}, \frac{\partial W}{\partial z} \right) = \left(\frac{\partial(V+\Phi)}{\partial x}, \frac{\partial(V+\Phi)}{\partial y}, \frac{\partial(V+\Phi)}{\partial z} \right), \quad (2.20)$$

гдје су његове компоненте по координатним осама дате следећим изразима (Heiskanen & Moritz, 1967):

$$g_x = \frac{\partial W}{\partial x} = W_x = -G \iiint_{\Omega} \frac{\rho(x, y, z)}{|\vec{l} - \vec{l}_p|^3} (x_p - x) d\Omega + \omega^2 x_p, \quad (2.21)$$

$$g_y = \frac{\partial W}{\partial y} = W_y = -G \iiint_{\Omega} \frac{\rho(x, y, z)}{|\vec{l} - \vec{l}_p|^3} (y_p - y) d\Omega + \omega^2 y_p, \quad (2.22)$$

$$g_z = \frac{\partial W}{\partial z} = W_z = -G \iiint_{\Omega} \frac{\rho(x, y, z)}{|\vec{l} - \vec{l}_p|^3} (z_p - z) d\Omega + \omega^2 z_p, \quad (2.23)$$

гдје је интензитет вектора $|\vec{l} - \vec{l}_p|$

$$l = |\vec{l} - \vec{l}_p| = \sqrt{(x - x_p)^2 + (y - y_p)^2 + (z - z_p)^2}. \quad (2.24)$$

Потенцијал убрзања Земљине теже $W_{\vec{F}}$ представља непрекидну функцију у цијелом простору, укључујући и његове прве парцијалне изводе, док други парцијални изводи показују прекиде на физичкој површи Земље. У спољашњем простору, изван маса Земљиног тијела, други парцијални изводи потенцијала задовољавају једначину Лапласа, те важи релација:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} = 2\omega^2, \quad (2.25)$$

гдје је ω угаона брзина ротације Земље. Насупрот томе, у унутрашњем простору Земљиног тела, потенцијал убрзања задовољава Пуасонову једначину, која укључује густину масе $\rho(x, y, z)$ и ефекат ротације, те се добија:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} = -4\pi G \rho(x, y, z) + 2\omega^2. \quad (2.26)$$

Ова разлика у понашању потенцијала у спољашњем и унутрашњем простору доводи до прекида у другим парцијалним изводима на физичкој површи Земље. Прекид је последица транзиције услова између простора са масом и простора без масе, што наглашава значај физичке површи у анализи гравитационог поља. Ови прекиди имају кључну улогу у теоријском моделирању и практичном проучавању Земљиног гравитационог поља, укључујући одређивање аномалија убрзања и других геофизичких параметара.

Сабирањем других парцијалних извода потенцијала Земљине теже, односно гравитационог и центрифугалног потенцијала

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 (V + \Phi)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (V + \Phi)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 (V + \Phi)}{\partial z^2}, \quad (2.27)$$

и усвајањем Лапласовог оператора

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad (2.28)$$

збир других парцијалних извода потенцијала Земљине теже је могуће записати у облику

$$\Delta W = \Delta V + \Delta \Phi \quad (2.29)$$

гдје су

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}, \quad (2.30)$$

$$\Delta \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}. \quad (2.31)$$

Уколико постоји функција која је двоструко диференцијабилна, и чији збир других парцијалних извода задовољава Лапласову једначину

$$\nabla^2 f = \partial^2 f / \partial x^2 + \partial^2 f / \partial y^2 + \partial^2 f / \partial z^2 = 0, \quad (2.32)$$

онда се та функција назива *хармонијском функцијом*.

Ако се једначине (2.25) и (2.26) анализирају, може се закључити да прекид других парцијалних извода потенцијала Земљине теже настаје искључиво као посљедица гравитационог потенцијала, односно важи за тачке у спољашњем простору

$$\Delta V = 0, \quad \Delta \Phi = 2\omega^2, \quad (2.33)$$

односно за тачке у унутрашњем простору

$$\Delta V = -4\pi G\rho(x, y, z), \quad \Delta \Phi = 2\omega^2. \quad (2.34)$$

На овај начин је извршена подјела на спољашњи и унутрашњи потенцијал, при чему се посебна пажња у истраживањима посвећује спољашњем потенцијалу, имајући у виду да је могуће ријешити једначину (2.33) у свим тачкама спољашњег простора док за једначину (2.34) услед непознатих густина у свакој тачки у унутрашњости Земље није могуће наћи рјешење.

2.5 НОРМАЛНИ ПОТЕНЦИЈАЛ

Нормални потенцијал представља теоријски дефинисан потенцијал убрзања теже који произлази из референтног модела Земље, познатог као *нормална Земља* (Одаловић,

2010). Овај модел подразумејева обртни елипсоид који је у потпуности испуњен масом еквивалентном маси Земље, при чему се центар масе елипсоида поклапа са центром масе Земље. Уједно, претпоставља се да елипсоид ротира око своје мање осе, која се подудара са осом ротације Земље, са угаоном брзином идентичном стварној угаоној брзини ротације Земље.

Овако дефинисан референтни модел нормалне Земље представља поједностављени приказ гравитационог поља Земље, а потенцијал који произлази из њега назива се *нормалним потенцијалом* или *нормалним пољем*, дефинисан скаларном функцијом

$$U(x_p, y_p, z_p) = U_0 = \text{const}, \quad (2.35)$$

док се градијент овако дефинисане функције

$$\vec{\gamma} = \text{grad}(U) = \nabla U(\vec{r}_p) = \left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z} \right), \quad (2.36)$$

назива нормалним убрзањем $\vec{\gamma}$.

Овај концепт служи као основа за истраживање и анализу гравитационог поља Земље, омогућавајући поређење са реалним гравитационим утицајима услед неравномерне расподеле масе унутар Земље и других геофизичких фактора.

Нормално убрзање теже на елипсоиду, рачуна се према изразу Сомиланија (Torge, 2001):

$$\gamma_0 = \frac{ay_a \cos^2 B + by_b \sin^2 B}{\sqrt{a^2 \cos^2 B + b^2 \sin^2 B}}, \quad (2.37)$$

гдје су:

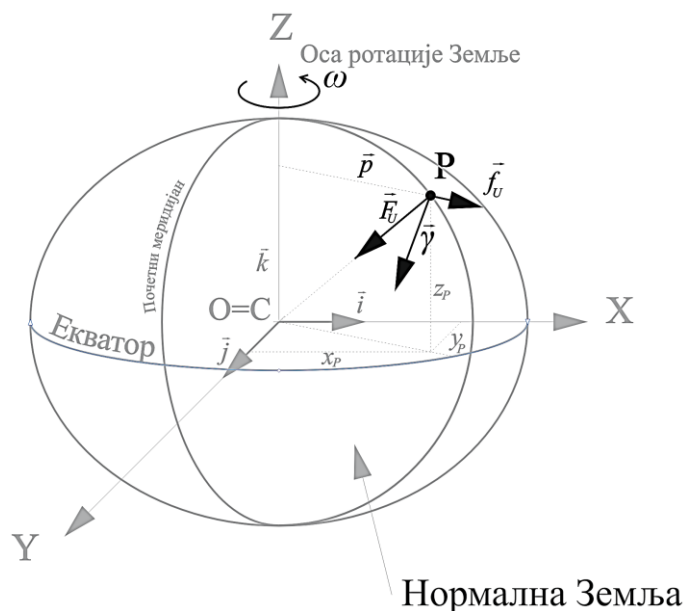
- a и b полуосе елипсоида (велика и мала полуоса),
- γ_a, γ_b одговарајуће вриједности убрзања на екватору и половима, док B представља географску ширину од кога и зависи сама вриједност нормалног убрзања.

Као и у случају реалног потенцијала, нивоске површи нормалног потенцијала представљају геометријска мјеста тачака у којима је потенцијал константан, односно дуж којих не долази до промјене вриједности потенцијала и називају се *нормалним нивоским површима*, а линије сила нормалног поља, које су дефинисане као правци максималног опадања нормалног потенцијала, називају се *нормалним вертикалама*.

У контексту нормалне Земље, истиче се феномен *обртне симетрије* нормалног поља, који је директна последица специфичног распореда масе и густине унутар модела нормалне Земље, означене као ρ_E . Ова симетрија омогућава да нивоска површ нормалног поља, односно нормалног потенцијала, добије облик обртног елипсоида. Такав елипсоид, који представља нивоску површ нормалног потенцијала, назива се *нивоски елипсоид*. Математички, овај концепт се описује следећом једначином

$$U(x_p, y_p, z_p) = U_0 = W_0 = \text{const}, \quad (2.38)$$

док је његова геометријска интерпретација приказана на слици (Слика 2-4).



Слика 2-4: Нормална Земља

Нивоски елипсоид је геометријски дефинисан као елипсоид чије мала и велика полуоса најбоље апроксимирају површ геоида, а физички параметри који дефинишу додатно нивоски елипсоид су маса елипсоида и угаона брзина ротације, које су идентичне параметрима реалне Земље.

Уколико се узме у разматрање једначина реалног потенцијала (2.14), користећи аналогију и поставке изнесе у претходном тексту, нормални потенцијал се може дефинисати на сличан начин:

$$U = V_U + \Phi_U, \quad (2.39)$$

гдје је V_U потенцијал убрзања гравитационе силе нормалне Земље, а Φ_U потенцијал убрзања центрифугалне силе. Као и код реалне Земље, и овдје све наведене релације у погледу спољашњег и унутрашњег потенцијала важе, па аналогно томе нормални потенцијал се дијели на:

- унутрашњи потенцијал за који важи $\Delta U = -4\pi G\rho_E + 2\omega^2$, односно функцију потенцијала U која задовољава једначину Пуасона и
- спољашњи потенцијал за који важи $\Delta U = 2\omega^2$, односно функцију потенцијала U која задовољава једначину Лапласа.

2.6 НИВОСКЕ ПОВРШИ

Нивоске површи су дефинисане као замишљене површи на којима потенцијал силе теже има константну вриједност. У идеалном случају, ове површи су управне на правац силе теже у свакој својој тачки. Најпознатија и најзначајнија нивоска површ је *геоид*, нивоска површ која у смислу методе најмањих квадрата апроксимира најбоље средњи ниво океана и мора за одређени временски период. Одсјечак вертикале од геоида до тачке на физичкој површи Земље се назива *ортометријска висина*, док растојање од нивоског елипсоида до геоида се назива *ундулацијом геоида* (Moritz, 2015).

Поред геоида, значајне улоге имају и површи које не представљају нивоске површи, као што су телуроид и квазигеоид. Поред геоида, постоји и нивоска површ названа нивоски елипсоид, о чему је било ријечи у претходном поглављу..

Ако свакој тачки P на физичкој површи Земље придружимо тачку Q која лежи на нормали референтног елипсоида, тако да је вриједност нормалног потенцијала у тачки Q једнака вриједности реалног потенцијала у тачки P , добијена површ дефинисана овим поступком назива се *телуроид*.

Растојање између тачке Q и тачке Q_0 , израчунато дуж нормалне вертикале из тачке P , назива се нормална висина, док се растојање од тачке P до тачке Q назива аномалија висине (означена са ζ , Слика 2-5).

Међутим, како није уобичајено да се висина једне тачке одређује дужином линије која не допире до саме тачке P , нормална висина се може пренијети дуж нормалне вертикале, тако што срачуната аномалија висине и нормална висина замијене мјеста дуж вертикале, и на тај начин растојање од тачке Q_0 до Q'_0 представља аномалију висине, а растојање од тачке Q'_0 нормалну висину. Геометријско мјесто свих тако добијених тачака формира површ која се назива *квазигеоид* (Heiskanen & Moritz, 1967).

Важно је поново истаћи да ни телуроид ни квазигеоид нису геопотенцијалне површи, јер нису дефинисане као површи једнаког гравитационог потенцијала.

С обзиром на то да Земљино гравитационо поље није хомогено због неравномјерне расподеле маса како у унутрашњости тако и на површини Земље, различите нивоске површи међусобно се разликују и нису паралелне.

Из свега наведеног могу се извести следеће релације:

$$N = h - H^O, \quad (2.40)$$

$$\zeta = h - H^N, \quad (2.41)$$

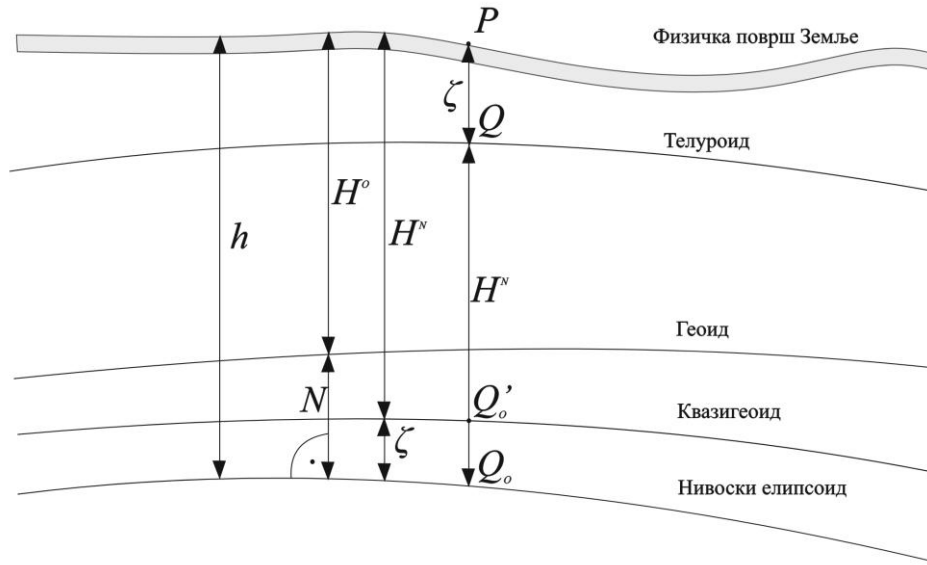
гдје се јасно са слике види повезаност у геометријском смислу између елипсоидних висина са ортометријским висинама и њиховом разликом, ундулацијом, односно нормалним висинама и њиховом разликом аномалијом висине.

Такође, још један начин на који се могу израчунати вриједности ундулација или аномалије висина јесте теорема Брунса (Heiskanen & Moritz, 1967), на основу следећих једначина:

$$N = \frac{T_{P_0}}{\gamma_{Q_0}} \quad \zeta = \frac{T_P}{\gamma_Q}, \quad (2.42)$$

гдје су T_{P_0} и T_P вриједности аномалијског потенцијала у тачки P_0 на геоиду и тачки P на физичкој површи Земље, док су γ_{Q_0} и γ_Q вриједности нормалног убрзања силе теже на елипсоиду и телуроиду (Sansò, et al., 2019).

У суштини, Брунсова формула је фундаментална у физичкој геодезији јер повезује геометријски облик Земље са њеним гравитационим пољем



Слика 2-5: Однос референтних површи

2.7 АНОМАЛИЈСКИ ПОТЕНЦИЈАЛ

Анализирајући претходно усвојен концепт нормалне Земље, и полазећи од усвојене хипотезе да је у свакој тачки нормалне Земље, нормални потенцијал једнак реалном потенцијалу, неминовно је да се због постојања топографских маса, распореда густина маса тијела Земље као и разлике стварног облика тијела Земље и усвојеног тијела нормалне Земље, јављају разлике између реалног и нормалног потенцијала:

$$T = W - U, \quad (2.43)$$

гдје је са T означен аномалијски потенцијал који се дефинише као разлика стварног и реалног потенцијала.

Ако претходна једначина (2.43) се напише у пуном облику, изражавајући потенцијале преко реалног и нормалног гравитационог, односно центрифугалног потенцијала, добија се релација облика (Bjerhamer, 1969):

$$T = W - U = V + \Phi - V_U - \Phi_U \quad (2.44)$$

Узимајући у обзир да су центрифугални потенцијални, како реалне тако и нормалне Земље једнаки, једначина (2.44) се своди на

$$T = V - V_U \quad (2.45)$$

Како је збир других парцијалних извода гравитационог потенцијала реалне и нормалне Земље је једнак нули

$$\Delta T = \Delta(V - V_U) = \Delta V - \Delta V_U = 0 \quad (2.46)$$

слиједи да аномалијски потенцијал задовољава услове Лапласове једначине, односно да је аномалијски потенцијал хармонијска функција.

Истовремено аналогно потенцијалу унутар тијела Земље и нивоског елипсоида, аномалијски потенцијал има следећи облик (Одаловић, 2005):

$$\Delta T = -4\pi G \rho + -4\pi G \rho_E = -4\pi G (\rho - \rho_E) \quad (2.47)$$

2.8 ПРОБЛЕМИ ГРАНИЧНИХ ВРИЈЕДНОСТИ

У рјешавању геодетских задатака који се односе на граничне вриједности, од кључног значаја је потенцијал убрзања Земљине теже W . Ова величина се рачуна помоћу функционала аномалијског потенцијала T .

Рјешење оваквих задатака подразумијева дефинисање граничних услова и приближног облика Земље. Сви односи између аномалијског потенцијала T и његових функционала, како у теоријским тако и у практичним примјенама, ослања се на Стоксову теорему.

Хармонијска функција ван задате површи S може се недвосмислено одредити ако су на тој површи познате њене вриједности (Sanso & Sideris, 2013).

Први проблем граничних вриједности, познат као Дирихлеов проблем, за граничне вриједности задате на сфери V_S , представља проблем одређивања хармонијске функције V на сфери, која задовољава услов

$$V = V_S \quad (2.48)$$

Рјешавање проблема Дирихлеових граничних услова на сфери представља фундаментални задатак у теорији потенцијала. Суштина овог проблема је одређивање функције (потенцијала) која задовољава Лапласову једначину, узимајући вриједности на површи сфере дефинисане једначином (2.48).

Класичан приступ рјешавању оваквих проблема подразумијева примјену методе сепарације промјенљивих, која омогућава да се парцијална диференцијална једначина

сведе на систем обичних диференцијалних једначина. Рјешења ових обичних диференцијалних једначина се затим комбинују у опште рјешење, а непознате константе се одређују из граничних услова.

Уколико функцију V примјеном Фуријеове методе представимо у облику производа три независне функције f, g, h у произвољним ортогоналним координатама x_1, x_2, x_3 , тј. другим ријечима развијањем произвољних функција на површини сфере у ред тригонометријских функција у облику (Одаловић, 2010):

$$V(x_1, x_2, x_3) = f(x_1)g(x_2)h(x_3), \quad (2.49)$$

гдје се дужина лука може приказати у произвољним ортогоналним координатама у облику

$$ds^2 = h_1^2 dx_1^2 + h_2^2 dx_2^2 + h_3^2 dx_3^2, \quad (2.50)$$

тада једначина

$$\Delta V = 0, \quad (2.51)$$

се може представити у форми:

$$\Delta V = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial V}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial V}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial V}{\partial x_3} \right) \right] = 0, \quad (2.52)$$

У процесу рјешавања Дирихлеовог проблема, кључна је сепарација промјенљивих. Замјена (2.54) у (2.52) омогућава да се ова парцијална диференцијална једначина сведе на систем обичних диференцијалних једначина. Рјешавањем овог система добија се бесконачно много рјешења. Међутим, само једно од тих рјешења ће задовољити прописане граничне услове на површини сфере, дате са (2.48).

Да би се олакшало рјешавање овог проблема, често се прелази на сферни координатни систем, који је природнији за описивање проблема са сферном симетријом, дефинисањем система сферних координата: радијус вектор r , поларни угао θ и геоцентрична дужина λ , који су повезани са правоуглим координатама x, y , и z следећим релацијама:

$$x = r \sin \theta \cos \lambda, \quad y = r \sin \theta \sin \lambda, \quad z = r \cos \theta. \quad (2.53)$$

Обрнуте трансформације се изражавају као:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \theta = \arctan \left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \right), \quad \lambda = \arctan \left(\frac{y}{x} \right). \quad (2.54)$$

Преласком у сферне координате, једначина (2.49) добија облик:

$$V(r, \theta, \lambda) = f(r)g(\theta)h(\lambda), \quad (2.55)$$

а елемент лука у сферним координатама

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\lambda^2. \quad (2.56)$$

Овај израз указује на ортогоналност сферних координата, гдје се сфере $r = \text{const.}$ конуси $\theta = \text{const.}$ и равни $\lambda = \text{const.}$ сијекну под правим угловима. Уопштени облик елемента лука у ортогоналним координатама q_1, q_2, q_3 гласи:

$$ds^2 = h_1^2 dq_1^2 + h_2^2 dq_2^2 + h_3^2 dq_3^2 \quad (2.57)$$

гдје су h_1, h_2, h_3 фактори размјере за одговарајуће координате. У случају сферних координата важи

$$h_1 = 1, h_2 = r, h_3 = r \sin \theta. \quad (2.58)$$

Коначно, након проширивања израза, добија се:

$$\Delta V \equiv \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial V}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \lambda^2} = 0. \quad (2.59)$$

Рјешавањем наведених једначина добијају се рјешења облика:

$$V(r, \theta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n \sum_{m=0}^n [A_{nm} \cos(m\lambda) + B_{nm} \sin(m\lambda)] P_{nm}(t), \quad (2.60)$$

$$V(r, \theta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \sum_{m=0}^n [A_{nm} \cos(m\lambda) + B_{nm} \sin(m\lambda)] P_{nm}(t)$$

гдје су A_{nm} и B_{nm} константни коефицијенти а $P_{nm}(t)$ Лежандрове функције облика

$$P_{nm}(t) = \frac{1}{2^n n!} (1-t^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^{n+m}}{dt^{n+m}} (t^2-1)^n, \quad (2.61)$$

гдје је

$$t = \cos \theta. \quad (2.62)$$

Дакле, ако су граничне вриједности дате изразом

$$V_s = V(R, \theta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\theta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n [A_{nm} \cos(m\lambda) + B_{nm} \sin(m\lambda)] P_{nm}(t), \quad (2.63)$$

Рјешења Дирихлеовог проблема се могу одредити из једначина и то рјешење за простор унутар сфере:

$$V(r, \theta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{R} \right)^n [A_{nm} \cos(m\lambda) + B_{nm} \sin(m\lambda)] P_{nm}(t), \quad (2.64)$$

и рјешење за простор ван сфере:

$$V(r, \theta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r} \right)^{n+1} [A_{nm} \cos(m\lambda) + B_{nm} \sin(m\lambda)] P_{nm}(t). \quad (2.65)$$

Као што се може видјети, рјешење првог граничног проблема је у ствари основа развоја сферно-хармонијског развоја у начелу.

Када су познате вриједности првог парцијалног извода хармонијске функције T у правцу нормале на површ S , **представља други проблем граничних вриједности** у теорији потенцијала, познат као Нојманов проблем.

У спољашњем простору изван тела S , аномалијски потенцијал T може се израчунати на основу познатих вриједности његовог првог извода на граничној површи. Ово је у директној вези са одређивањем поремећајног убрзања силе теже δg , које представља градијент аномалијског потенцијала (Bjerhamer, 1969).

$$\frac{\partial T}{\partial n} \rightarrow \delta g = -\frac{\partial T}{\partial r} \quad (2.66)$$

Трећи проблем граничних вриједности представља одређивање функције која је хармонијска у простору изван или унутар површи S . То се постиже линеарном комбинацијом вриједности аномалијског потенцијала и његовог нормалног извода на површ S .

2.9 СФЕРНО-ХАРМОНИЈСКИ РАЗВОЈ ПОТЕНЦИЈАЛА ЗЕМЉИНЕ ТЕЖЕ

Хармонијске функције су посебна врста функција које имају важну улогу у многим областима математике и физике, које задовољавају услове *Лапласове једначине*. Дефиниција хармонијске функције је ближе дата у поглављу 0 једначином (2.32).

Хармонијске функције имају широку примјену у различитим областима математике и физике, гдје је акценат њихов тренутно постављен на теорији потенцијала, гдје се хармонијске функције користе за моделирање потенцијалних поља, као што је гравитационо поље.

2.9.1 Сферни хармоници

Сферни хармоници представљају рјешења Лапласове једначине у сферним координатама, што их чини корисним за моделирање феномена који имају сферну симетрију. Рјешења првог граничног проблема (2.64) и (2.65) се називају *сферно-*

хармонијским развојем потенцијала убрзања гравитационе силе, гдје је у ствари потенцијал убрзања приказан као функција сферних хармоника (Rexer & Hirt, 2015).

Рјешавањем Лапласове једначине (2.59) методом раздвајања промјенљивих, и увођењем ознака

$$\begin{aligned} R_{nm}(\theta, \lambda) &= R_{nm}^{(\theta, \lambda)} = A_{nm} \cos(m\lambda) P_n(t), \\ S_{nm}(\theta, \lambda) &= S_{nm}^{(\theta, \lambda)} = B_{nm} \sin(m\lambda) P_n(t), \\ Y_n(\theta, \lambda) &= \sum_{m=0}^n (C_{nm} + S_{nm}), \end{aligned} \quad (2.67)$$

једначине (2.64) и (2.65) добијају следећи облик:

$$V(r, \theta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{R} \right)^n Y_n(\theta, \lambda), \quad (2.68)$$

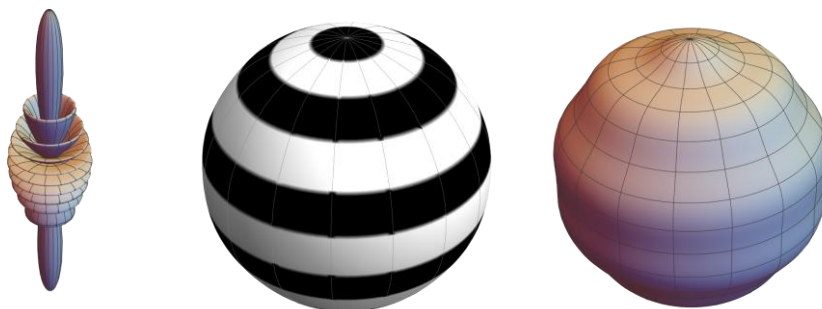
$$V(r, \theta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r} \right)^{n+1} Y_n(\theta, \lambda). \quad (2.69)$$

Просторне сферне хармонике су дате изразом (2.67) док изрази (2.68) и (2.69) представљају површинске сферне хармонике.

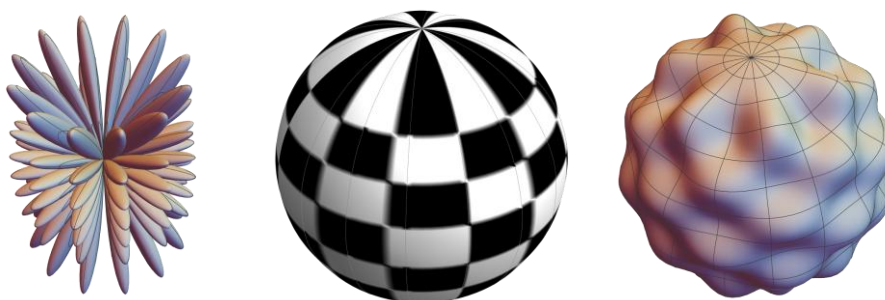
Као што се може закључити, просторни сферни хармоници представљају математичке функције које се користе за рјешавање диференцијалних једначина у сферним координатама када је потребно узети у обзир и **радијалну компоненту** поред угаоних. Они су проширење класичних сферних хармоника и примјењују се у тродимензионалном простору гдје се величина функције мијења и унутар и ван сфере.

Површински сферни хармоници су специфична примјена сферних хармоника која се фокусира на функције дефинисане **на површини сфере** и користе се за описивање варијација величина које су ограничене на сферну површину, као што су гравитациони потенцијал или ундулација геоида.

Површинске сферне хармонике дијеле сферу на области са позитивним и негативним знаком, гдје сагласно начину дијелења се разликују зонске (Слика 2-6), тесералне (Слика 2-7) и секторске (Слика 2-8) површинске хармонике.



Слика 2-6: Зонске хармонике $P_{10,0}(t)$, подјела сфере на области са позитивним и негативним знаком и њихова визуализација на сфери полупречника R



Слика 2-7: Тесералне хармонике $P_{12,6}(t)\cos 6\lambda$, подјела сфере на области са позитивним и негативним знаком и њихова визуализација на сфери полупречника R



Слика 2-8: Секторске хармонике $P_{20,20}(t)\cos 20\lambda$, подјела сфере на области са позитивним и негативним знаком и њихова визуализација на сфери полупречника R

2.9.2 Потенцијал Земљине теже у сферним хармоникама

Потенцијал теже W , како је раније дефинисано, састоји се од два дијела:

- гравитационог потенцијала V и
- центрифугалног потенцијала Φ ,

при чему је центрифугални потенцијал Φ једноставна аналитичка функција. Међутим, гравитациони потенцијал V представља сложенији дио и може бити погодније обрађен

захваљујући чињеници да је изван привлачећих маса хармонијска функција. Због тога се V може развити у ред сферних хармоника.

Израз за гравитациони потенцијал V је:

$$V = V(\vec{r}_B) = k \iiint_{\tau} \frac{\rho(\vec{r})}{|\vec{r} - \vec{r}_B|} d\tau, \quad (2.70)$$

или у скраћеном облику:

$$V = k \iiint_{\tau} \frac{dM}{r}, \quad (2.71)$$

гдје је dM елемент масе, а интеграција се спроводи преко цјелокупне Земље.

Уводећи развој за $\frac{1}{l}$:

$$\frac{1}{l} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r'^n}{r^{n+1}} P_n(\cos \psi), \quad (2.72)$$

гдје су:

- P_n Лежандрови полиноми,
- r радијус-вектор фиксне тачке P у којој се одређује V ,
- r' радијус-вектор варијабилног елемента масе dM ,
- ψ угао између r и r' .

Како је r константа у односу на интеграцију по Земљи, може се извући испред интеграла, што доводи до израза:

$$V = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} k \iiint_{\tau} r'^n P_n(\cos \psi) dM. \quad (2.73)$$

Овај израз може се записати као ред просторних сферних хармоника:

$$V = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Y_n(\theta, \lambda)}{r^{n+1}}, \quad (2.74)$$

гдје су Лапласови површински сферни хармоници $Y_n(\theta, \lambda)$ дати изразом:

$$Y_n(\theta, \lambda) = k \iiint_{\tau} r'^n P_n(\cos \psi) dM, \quad (2.75)$$

а угао ψ је дефинисан преко сферних координата θ и λ :

$$\cos \psi = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\lambda - \lambda'). \quad (2.76)$$

Развијајући Лежандров полином за угао ψ у функцији сферних хармоника

$$P_n(\cos \psi) = P_n(\cos \theta)P_n(\cos \theta') + 2 \sum_{m=0}^n \left(\frac{(n-m)!}{(n+m)!} \right) \left[\bar{R}_{nm}(\theta, \lambda) \bar{R}_{nm}(\theta', \lambda') + \bar{S}_{nm}(\theta, \lambda) \bar{S}_{nm}(\theta', \lambda') \right], \quad (2.77)$$

гдје се нешто једноставнији облик полинома добија у функцији ортонормираних хармоника

$$P_n(\cos \psi) = \frac{1}{2n+1} \sum_{m=0}^n \left[\bar{R}_{nm}(\theta, \lambda) \bar{R}_{nm}(\theta', \lambda') + \bar{S}_{nm}(\theta, \lambda) \bar{S}_{nm}(\theta', \lambda') \right] \quad (2.78)$$

Из (2.78) слиједи да се (2.72) у може написати у облику

$$\frac{1}{l} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{1}{2n+1} \left[\frac{\bar{R}_{nm}(\theta, \lambda)}{r^{n+1}} \cdot r'^n \bar{R}_{nm}(\theta', \lambda') + \frac{\bar{S}_{nm}(\theta, \lambda)}{r^{n+1}} \cdot r'^n \bar{S}_{nm}(\theta', \lambda') \right]. \quad (2.79)$$

Ако се овај израз убади у интеграл (2.71) и испред интеграла се извуку чланови који зависе од r , θ и λ , добија се:

$$V = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{1}{r^{n+1}} \left[A_{nm} \bar{R}_{nm}(\theta, \lambda) + B_{nm} \bar{S}_{nm}(\theta, \lambda) \right], \quad (2.80)$$

гдје су константни коефицијенти A_{nm} и B_{nm} дати са:

$$\begin{aligned} (2n+1)A_{nm} &= k \iiint_{\tau} r'^n \bar{R}_{nm}(\theta', \lambda') dM, \\ (2n+1)B_{nm} &= k \iiint_{\tau} r'^n \bar{S}_{nm}(\theta', \lambda') dM. \end{aligned} \quad (2.81)$$

Елемент масе је дат као:

$$dM = \rho dx' dy' dz' = \rho r'^2 \sin \theta' dr' d\theta' d\lambda', \quad (2.82)$$

Да би се интегрални успјешно израчунали, потребно је да густина буде описана као функција промјенљивих r' , θ' и λ' . Иако тренутно не постоји модел који би омогућио такву прецизну интерпретацију, ова ограничења не умањују ни теоријски ни практични значај сферних хармоника. Коефицијенти A_{nm} и B_{nm} могу се утврдити из граничних вриједности потенцијала теже на Земљиној површини (Stiefel, 1965). Рјешавање овог проблема повезано је са примјеном сферних хармоника у оквиру Дирихлеовог проблема.

Узимајући у обзир везе између конвенционалних и ортонормираних сферних хармоника, (2.80) и (2.81) се могу представити у облику конвенционалних сферних хармоника, што доводи до израза:

$$V = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left[\frac{A_{nm} R_{nm}(\theta, \lambda)}{r^{n+1}} + \frac{B_{nm} S_{nm}(\theta, \lambda)}{r^{n+1}} \right], \quad (2.83)$$

гдје су

$$\begin{aligned} A_{n0} &= k \iiint_{\tau} r^n P_n(\theta', \lambda') dM \\ A_{nm} &= 2 \frac{(n-m)!}{(n+m)!} k \iiint_{\tau} r^n R_{nm}(\theta', \lambda') dM \quad (m \neq 0), \\ B_{nm} &= 2 \frac{(n-m)!}{(n+m)!} k \iiint_{\tau} r^n S_{nm}(\theta', \lambda') dM \quad (m \neq 0). \end{aligned} \quad (2.84)$$

Потенцијал V се, у вези са сателитском динамиком, често пише у облику:

$$V = \frac{kM}{r} \left[1 - \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{a}{r} \right)^n (J_{nm} R_{nm}(\theta, \lambda) + K_{nm} S_{nm}(\theta, \lambda)) \right], \quad (2.85)$$

гдје је a екваторијални полупречник Земље, тако да је:

$$A_{nm} = -kMa^n J_{nm} \quad (n \neq 0), \quad (2.86)$$

$$B_{nm} = -kMa^n K_{nm} \quad (n \neq 0). \quad (2.87)$$

Одговарајући ортонормирани коефицијенти:

$$\bar{J}_{n0} = \frac{1}{\sqrt{2n+1}} J_{n0}, \quad (2.88)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{J}_{nm} \\ \bar{K}_{nm} \end{array} \right\} = \sqrt{\frac{(n+m)!}{2(2n+1)(n-m)!}} \frac{J_{nm}}{K_{nm}} \quad (m \neq 0), \quad (2.89)$$

су такође у употреби.

Ако Земља посједује потпуну ротациону симетрију, незонски чланови (тј. чланови са $m \neq 0$) не би били присутни у развоју, јер они зависе од дужине λ . Код ротационо симетричних тијела, не постоји зависност од λ због еквивалентности свих лонгитуда. Ипак, тесерални и секторски хармоници су мали јер су одступања од ротационе симетрије Земље такође мала.

Посебан акценат ставља се на анализу конвергенције реда (2.80), као и на одговарајуће редове који описују развој Земљиног потенцијала. Ови редови представљају серију развоја по степенима $1/r$, што подразумијева бољу конвергенцију за веће вриједности r . Супротно томе, за мање вриједности r , ред није увијек конвергентан. За произвољно тијело, сферно-хармонијски развој потенцијала V увијек конвергира изван најмање сфере са радијусом $r=r_0$. У случају да је Земља хомогени елипсоид исте величине, ред за V би остао конвергентан чак и на самој њеној површини.

Међутим, због неправилног распореда маса на Земљи, ред стварног потенцијала V се сматра дивергентним на Земљиној површини (Moritz, 1961). Ова чињеница умањује значај сферно-хармонијског развоја потенцијала V у терестричкој геодезији. Ипак, овај развој има велики теоријски и практични значај у области сателитске динамике.

Вриједно је нагласити да сферно-хармонијски развој увијек изражава хармонијску функцију. То значи да се он односи искључиво на потенцијал изван привлачећих маса, али никада унутар њих.

2.10 ФУНКЦИОНАЛИ АНОМАЛИЈСКОГ ПОТЕНЦИЈАЛА

Веза између аномалијског потенцијала и његових линеарних функционала представља кључни аспект у изучавању гравитационог поља Земље и његовог математичког моделирања. Ови функционали, који укључују ундулације геоида N , поремећајно убрзање δg , аномалију убрзања Δg и компоненте одступања вертикале у правцу меридијана ξ и првог вертикала η , могу се аналитички повезати у оквиру сферне апроксимације референтног елипсоида изразима датим у наставку текста (Hofmann-Wellenhof & Moritz, 2006).

Ундулације геоида, дефинише се кроз однос између аномалијског потенцијала T и нормалног убрзања силе теже γ_0 на референтном елипсоиду, чиме се успоставља веза

$$N = \frac{T}{\gamma_0} . \quad (2.90)$$

Ова релација показује директну зависност ундулација од аномалијског потенцијала у датој тачки, што омогућава њихово израчунавање кроз глобалне геопотенцијалне моделе.

Поремећајно убрзање δg представља градијент аномалијског потенцијала, односно

$$\delta g = -\frac{\partial T}{\partial r} . \quad (2.91)$$

Аномалија убрзања Δg , као друга изведена компонента, може се изразити кроз други парцијални извод аномалијског потенцијала, чиме се добија

$$\Delta g = -\frac{\partial T}{\partial r} - \frac{2}{r}T = -\frac{\partial T}{\partial r} - \frac{2}{a}T . \quad (2.92)$$

Одступања вертикале, компоненте у правцу меридијана ξ и првог вертикала η директно се односе на изводе аномалијског потенцијала у правцима географске ширине ϕ и дужине λ :

$$\xi = \frac{1}{r\gamma_0} \frac{\partial T}{\partial \theta} = \frac{1}{a\gamma_0} \frac{\partial T}{\partial \theta}, \quad \eta = -\frac{1}{r\gamma_0 \sin \theta} \frac{\partial T}{\partial \lambda} = -\frac{1}{a\gamma_0 \sin \theta} \frac{\partial T}{\partial \lambda} . \quad (2.93)$$

Као што је већ познато, аномалијски потенцијал представља разлику између стварног гравитационог потенцијала Земље и нормалног потенцијала, гдје одражава одступања у расподјели масе унутар Земље и њене површине. Представљање аномалијског потенцијала у функцији сферних хармоника омогућава детаљну анализу гравитационог поља и његових неправилности, и у функцији сферних хармоника може се изразити у облику (Sansò, et al., 2019):

$$T_n(\theta, \lambda) = \sum_{m=0}^n \left[(\bar{J}_{nm} - \bar{J}_{nm}^U) \cos(m\lambda) + \bar{K}_{nm} \sin(m\lambda) \right] \bar{P}_{nm}(\cos(\theta)) \quad (2.94)$$

Функционали аномалијског потенцијала у сферно хармонијском развоју су дати следећим изразима у наставку текста.

Ундулација геоида N

$$N = \frac{GM}{r\gamma_0} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R}{r} \right)^n \sum_{m=0}^n \left[(\bar{J}_{nm} - \bar{J}_{nm}^U) \cos(m\lambda) + \bar{K}_{nm} \sin(m\lambda) \right] \bar{P}_{nm}(\cos(\theta)) \quad (2.95)$$

аномалија висине ζ

$$\zeta = \frac{GM}{r\gamma} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R}{r} \right)^n \sum_{m=0}^n \left[(\bar{J}_{nm} - \bar{J}_{nm}^U) \cos(m\lambda) + \bar{K}_{nm} \sin(m\lambda) \right] \bar{P}_{nm}(\cos(\theta)) \quad (2.96)$$

аномалија убрзања силе теже Δg

$$\Delta g = \frac{GM}{r^2} \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) \left(\frac{R}{r} \right)^n \sum_{m=0}^n \left[(\bar{J}_{nm} - \bar{J}_{nm}^U) \cos(m\lambda) + \bar{K}_{nm} \sin(m\lambda) \right] \bar{P}_{nm}(\cos(\theta)) \quad (2.97)$$

поремећајно убрзање силе теже δg

$$\delta g = \frac{GM}{r^2} \sum_{n=2}^{\infty} (n+1) \left(\frac{R}{r} \right)^n \sum_{m=0}^n \left[(\bar{J}_{nm} - \bar{J}_{nm}^U) \cos(m\lambda) + \bar{K}_{nm} \sin(m\lambda) \right] \bar{P}_{nm}(\cos(\theta)) \quad (2.98)$$

компоненте одступања вертикала у правцу меридијана ξ

$$\xi = \frac{GM}{Rr\gamma} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R}{r} \right)^n \sum_{m=0}^n \left[(\bar{J}_{nm} - \bar{J}_{nm}^U) \cos(m\lambda) + \bar{K}_{nm} \sin(m\lambda) \right] \frac{\partial \bar{P}_{nm}(\cos(\theta))}{\partial \theta} \quad (2.99)$$

и компоненте одступања вертикала у правцу првог вертикала η ,

$$\eta = \frac{GM}{Rr\gamma \sin(\theta)} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R}{r} \right)^n \sum_{m=0}^n \left[m(\bar{J}_{nm} - \bar{J}_{nm}^U) \sin(m\lambda) - \bar{K}_{nm} \cos(m\lambda) \right] \bar{P}_{nm}(\cos(\theta)) \quad (2.100)$$

3. ГЛОБАЛНИ ГЕОПОТЕНЦИЈАЛНИ МОДЕЛИ

У циљу моделирања гравитационог поља на глобалном нивоу, развијени су глобални геопотенцијални модели (*енгл. GGM – Global Geopotential Models*), које чине коефицијенти развоја потенцијала убрзања Земљине теже у ред по сферно-хармонијским функцијама и који представљају математичку апроксимацију спољашњег гравитационог потенцијала. Ови модели комбинују различите изворе података, попут сателитских мјерења, терестричких гравиметријских података и података о нивоу мора, како би се постигло најпрецизније могуће описивање сложене структуре гравитационог поља (Sanso & Sideris, 2013).

Развој у редове сферних хармоника произилази из рјешавања првог проблема граничних вриједности у теорији потенцијала (*енгл. Boundary Value Problem, BVP*). Глобални геопотенцијални модели омогућавају прорачун свих функционала аномалијског потенцијала, као што су аномалије убрзања, поремећајно убрзање силе теже, аномалијске висине, компоненте отклона вертикале и ундулације геоида. На овај начин могуће је одредити глобални геоид у било којој тачки на Земљи у односу на референтни нивоски елипсоид.

Са повећањем степена и реда у развоју коефицијената сферно-хармонијских функција, очекује се већи степен апроксимације глобалног модела геоида. Међутим, максималан степен и ред глобалног геопотенцијалног модела условљени су бројним факторима. Просторна резолуција глобалног модела геоида одређује се формулом

$$\frac{180^\circ}{N_{\max}}, \quad (3.1)$$

гдје $N_{\max}$ представља максималан степен развоја модела.

Квалитет апроксимације и прецизност глобалног геопотенцијалног модела нису хомогене на читавој површини Земље. Оне зависе од густине и квалитета података коришћених за одређено подручје. С обзиром на то да квалитет апроксимације геопотенцијалног модела варира у зависности од региона, значајно је испитати квалитет расположивих модела до одређеног степена и реда. Ово се може постићи поређењем геоида или квазигеоида израчунатог из одређеног модела у односу на терестричка мјерења на основу GPS/dh података за конкретну територију.

Глобални геопотенцијални модели се моделирају на основу различитих извора података који доприносе њиховој тачности и резолуцији. Кључни извори података укључују:

1. Сателитска мјерења,
2. Терестричка гравиметријска мјерења,
3. Астрономско-гравиметријска мјерења,
4. Мјерења нивоа мора и нивелманска мјерења.

Глобални геопотенцијални модел (ГГМ) мора бити у стању да подржи прорачуне на произвољним тачкама које се налазе на или изнад површине Земље. Поред тога, ГГМ

мора испуњавати одређене услове који проистичу из основних принципа физике. Конкретно, модел треба да представља скаларну функцију положаја која је хармонична у областима изван маса које генеришу привлачење и да на бесконачности тежи нули као реципрочна вриједност растојања између тачке и масеног елемента који привлачи.

Даље, ГГМ мора омогућити израчунавање свих функционала гравитационог поља уз задржавање самоконзистентности. Ово подразумијева да модел очува релације између различитих функционала, било да су оне диференцијалне или интегралне природе. Таква досљедност је кључна како би се осигурала физичка исправност и тачност резултата (Tscherning, 1983).

Сферни хармоници, који чине низове коефицијената као што су C_{nm} и S_{nm} , узимају у обзир географске дужине, ширине и дубине Земље, као и дисторзије које проистичу из неједнаке расподеле маса на планети. Ови коефицијенти су кључни за тачну репрезентацију Земљиног гравитационог поља.

Површинске сферне хармонијске функције дефинисане су као (Heiskanen & Moritz, 1967)

$$Y_{nm}(\theta_p, \lambda_p) = \bar{P}_{n|m}(\cos \theta_p) \cdot \begin{cases} \cos m \lambda_p & \text{if } m \geq 0 \\ \sin |m| \lambda_p & \text{if } m < 0 \end{cases}, \quad (3.2)$$

гдје је $P_{nm}(\cos \theta)$ је ортонормирана придружена Лежандрова функција прве врсте, степена n и реда m . У пракси, сумирање по степену се прекида на неком коначном степену N , који зависи од резолуције доступних података. Заузврат, N дефинише (приближно) резолуцију ГГМ-а. Циљ глобалног високорезолуционог гравитационог моделирања је да се што прецизније оцијене коефицијенти C_{nm} , кроз оптималну комбинацију информација из различитих извора података. Једнако је важно одређивање грешке за вриједности C_{nm} . Оцијењене вриједности C_{nm} се затим могу користити за израчунавање функционала поља, док се њихове повезане грешке (и корелација грешака, када је доступна) могу пропагирати да би се добиле грешке изведених функционала.

Прије новијих сателитских мисија, најчешће су четири врсте гравитационих информација биле уобичајено доступне за развој високостепених комбинованих гравитационих модела као што је EGM96 (Lemoine, et al., 1998):

1. Информације добијене из анализе пертурбација сателитских орбита које се изводе из података праћења путања сателита. Ово је од критичног значаја за тачно одређивање нижих степена дијела спектра модела. Сателитски модели (*satellite only models*) су напредовали од рјешења до степена 4 у раним 1960-им, до модела комплетних до степена 70 или 90 који су данас доступни. Овај напредак је остварен кроз доступност све тачнијих података праћења путања сателита, прикупљених са стално растуће констелације Земљиних сателита. Подаци праћења са приближно 40 сателита су коришћени у развоју сателитског рјешења унутар EGM96 модела (означено као EGM96S) (Lemoine, et al., 1998). Ови подаци укључују радио доплеровска и радио интерферометријска мјерења, сателитско ласерско мјерење растојања (SLR), Доплерово одређивање орбите и радиопозиционирање интегрисано на сателиту (DORIS) као и праћење сателита са сателита (SST) из констелација Глобалног позиционог система (GPS) и система

за праћење и пренос података (*TDRSS*) до сателита у ниској орбити око Земље. Упркос овим напрецима, ове врсте сателитских података нису у стању да ријеше фину структуру поља, због слабљења гравитационог сигнала са висином. Штавише, доступни сателити не узоркују равномјерно опсег инклинација и висина, што је неопходан услов за декорелацију хармонијских коефицијената оцијењених само из података сателитског праћења. Ово узрокује јаку корелацију, посебно међу коефицијентима виших степена, и захтјева употребу априорних ограничења у развоју сателитских модела (Lerch, et al., 1971).

2. Терестрички гравиметријски подаци (копно, море, ваздух) који садрже дуготаласне и краткоталасне карактеристике гравитационог поља. Међутим, ово захтјева униформну и хомогену глобалну покривеност гравиметријским подацима високе тачности. Најбољи доступни скупови података око 1996. године (Kenyon & Pavlis, 1996) представљају информације изведене из преко 4.000 извора детаљних гравиметријских података прикупљених током неколико деценија. Тачност и густина ових података значајно варирају у зависности од географске регије, при чему су простране регије (нпр. Антарктик) практично лишене гравиметријских мјерења. Подаци о аномалијама убрзања су подложни различитим систематским грешкама. Ове грешке, у комбинацији са неравномјерном и неправилном покривеношћу подацима, смањују интегритет дуготаласних карактеристика које се могу добити из терестричких гравиметријских података. Ипак, копнена и ваздушна гравиметрија тренутно пружају једине податке који могу да рјешавају краткоталасне карактеристике, посебно над копненим подручјима.
3. Подаци добијени сателитском алтиметријом омогућили су до сада непревазиђено мапирање поља над океанима, како по тачности, тако и по резолуцији. TOPEX/Poseidon (T/P) (Fu, et al., 1994) (као и његове наредне мисије *Jason-1* и *Jason-2*) редовно пружају оцјене висине морске површине (*SSH*), које, по први пут нису значајно оптерећене радијалном грешком. Имајући у виду да су алтиметријска мјерења ограничена само на океанске области, посматрано са тог аспекта ово слаби допринос алтиметријских података у одређивању дуготаласне карактеристике гравитационог поља и захтијева одговарајуће моделирање и процјену динамичке топографије океана (*DOT*) када се подаци о *SSH*-у алтиметра користе у комбинованим рјешењима. Међутим, постоји још један начин укључивања алтиметријских података у високим степенима спектра ГТМ-а, о чему ће бити ријечи у наставку.
4. Комбинација података алтиметрије из више мисија, обезбиједила је густо узорковање већине површине океана. Ови подаци, могу се користити за оцјену скупова аномалија убрзања широм океана, на врло финој резолуцији (нпр. 2' x 2' и 1' x 1').

Сателитско праћење, алтиметријски и терестрички гравиметријски подаци су комплементарни како у спектралном, тако и у географском смислу. Њихова комбинација омогућава одређивање гравитационог поља, преко ширег опсега његовог спектра, са побољшаном тачношћу, него што се може постићи коришћењем било ког од три типа

података појединачно. Конкретан начин комбиновања ових података, ради развоја ГГМ-а високог степена, представља стратегију рјешења (Rapp, 1993).

Мјерења унутар горе наведене четири категорије садрже информације не само о гравитационом пољу, већ и о многим другим ефектима. Неки од ових ефеката су сами по себи од интереса (нпр. информације о DOT садржане у алтиметријском SSH), док други представљају, барем што се тиче гравитационог моделирања, (више или мање) систематски шум. У сваком случају, укључивање одређеног типа података у комбиновано рјешење захтјева прецизно моделирање и оптимално оцјењивање свих ефеката и сигнала садржаних у мјерењима. У супротном, оцијењени гравитациони модел може бити озбиљно нарушен погрешно моделираним (или немоделираним) систематским ефектима.

3.1.1 Типови глобалних геопотенцијалних модела

У контексту ових истраживања, указује се на потребу за прецизним одређивањем глобалног гравитационог поља ради различитих геодетских и геофизичких примјена. За ту сврху, користе се различите методе сателитских мисија које омогућавају прикупљање података на различитим географским локацијама, што је од великог значаја за процесирање и калибрацију глобалних геопотенцијалних модела.

Постоје три основна типа глобалних геопотенцијалних модела који се разликују у зависности од приступа који се користи при обради података и начину који се примјењује за прецизно моделирање Земљиног гравитационог поља (Pail, et al., 2011):

1. **Директни приступ (Direct approach - DIR)** – Овај приступ подразумева коришћење директних мјерења поља Земљине теже у циљу добијања геопотенцијалних модела. Користи се за добијање што прецизнијих података о структури гравитационог поља на различитим дјеловима планете, користећи непосредна мјерења сателитима.
2. **Временски приступ (Time-wise approach - TM)** – Временски приступ се користи за анализу података добијених у временским серијама. Овај метод се ослања на процесе који се мијењају током времена и анализу варијација у дугорочном периоду, што омогућава дубље разумијевање динамике Земљиног гравитационог поља.
3. **Просторни приступ (Space-wise approach - SPW)** – Просторни приступ се користи када се анализирају подаци који се односе на различите просторне аспекте Земљиног гравитационог поља. Овај метод омогућава прецизно моделирање аномалија убрзања на глобалном нивоу, користећи податке који су прикупљени сателитима у различитим географским ширинама и дужинама.

3.1.2 Директни приступ моделирања

Моделирање гравитационог поља коришћењем директног приступа заснива се на рјешавању инверзног проблема методом најмањих квадрата. Парцијални изводе за све параметре који треба да буду прилагођени, тј. сферно-хармонијске коефицијенте, се израчунавају, а нормалне једначине се генеришу обрадом података у групама од 24 сата, односно у дневним луковима. Дневне нормалне једначине се затим комбинују за цио период, а резултујућа нормална матрица се инвертује примјеном Холецове декомпозиције.

Израчунавање нормалних једначина чини овај приступ веома захтјевним у смислу времена рада процесора, броја процесора, меморије и употребе меморијског простора. То је последица великог броја непознатих (и самим тим величине нормалне матрице), око 40.000 за степен 200, што је праћено великом количином мјерења.

Редукција података се врши у два одвојена корака због различите природе техника обраде *SST (Satellite-to-Satellite Tracking)* и *SGG (Satellite Gravity Gradiometry)*. GPS SST мјерења се у ствари не користе директно, већ су замијењена положајима орбите добијеним из модела редукване динамике прецизне орбите за научне сврхе (*SST_PRD*).

Обрада података вршена је у дневним луковима у класичној шеми орбиталних пертурбација, користећи динамичко израчунавање орбите путем итеративног прилагођавања методом најмањих квадрата, након чега слиједи израчунавање нормалних једначина. Основни модел гравитационог поља био је **EIGEN-5C** (Förste, et al., 2008) до степена/реда 200, док су негравитационе силе одређене коришћењем мјерења у режиму заједничког мода акцелерометра.

3.1.3 Временски приступ моделирања

Временски приступ разматра гравитационе градијенте и орбитална мјерења као временске серије измјерене дуж орбите сателита. Овај приступ је посебно користан с обзиром на високо корелисана гравитациона градијентна мјерења.

Главна филозофија обраде је развој чистог GOCE модела, односно модела који не укључује никакве информације о гравитационом пољу из претходних извора, чак ни као референтни модел. Сходно томе, коефицијенти гравитационог поља одређују се од нуле, а развијене су посебне стратегије обраде како би се гарантовала независност од априорних информација о гравитационом пољу. Главна идеја овог чистог GOCE модела је да се процијени шта GOCE може самостално да уради. Корисно је имати GOCE рјешење које је потпуно независно од GRACE мисије и терестричких података, јер се на тај начин може извршити директно поређење са допунским информацијама о гравитационом пољу, чиме се могу открити потенцијални недостаци.

3.1.4 Просторни приступ моделирања

Главна идеја овог приступа је оцјена сферно-хармонијских коефицијената геопотенцијалног модела коришћењем просторне корелације Земљиног гравитационог поља. У ту сврху развијено је рјешење колокације (Moritz, 1980), које моделира коваријансу сигнала као функцију просторне удаљености, а не временске удаљености, као што је то случај за коваријансу шума. На овај начин, подаци који су блиски у простору, али удаљени у времену, могу бити филтрирани, чиме се превазилазе проблеми везани за јаку временску корелацију шума у мјерењима.

Иако је теоријски чисто и пожељно, јединствено рјешење колокације није рачунарски изводљиво због огромне количине података GOCE мисије. Димензија система који треба ријешити била би једнака броју обрађених података.

Из тог разлога, просторни приступ је имплементиран као вишестепени поступак колокације (Reguzzoni & Tselfes, 2008), који се у основи састоји од:

- **Винеров филтер** (Paroulis, 1984) дуж орбите, који смањује високо корелисани шум градиометра.
- **Интерполација на сферној мрежи** на средњој висини сателита примјеном колокације на локалним дјеловима података (Migliaccio, et al., 2007).
- **Хармонијска анализа** нумеричком интеграцијом (Colombo, 1981) ради извођења геопотенцијалних коефицијената.

Цио поступак се понавља до конвергенције како би се повратиле фреквенције сигнала које су поништене Винеровим орбиталним филтером и како би се исправила ротација од градиометра до локалног орбиталног референтног оквира. Напомиње се да је модел гравитационог поља добијен из SST података коришћен као почетни модел за редукцију просторне корелације сигнала, што је неопходно приликом примјене колокације на мрежама локалних дјелова података.

Може се показати да је овај итеративни поступак, осим нумеричких апроксимација услед локалног умрежавања, еквивалентан јединственој и директној колокацији од оригиналних података до сферно-хармонијских коефицијената (Reguzzoni & Tselfes, 2008).

С обзиром на то да је резултујућа стратегија прилично сложена, тачно прорачунавање пропагације коваријансе грешке није изводљиво. Као посљедица тога, коваријантна матрица грешке оцијењених коефицијената добија се примјеном Монте Карло техника.

3.1.5 Глобални модели као рјешење проблема граничних вриједности

Глобални модели омогућавају представљање аномалијског потенцијала гравитационог поља кроз линеарну комбинацију хармонијских функција, које су хармоничне у спољашњем простору и дефинисане на површини Земље. Централно мјесто овог проблема јесте развој модела који са високим степеном прецизности репрезентују просторне варијације гравитационог поља на глобалном нивоу.

Глобални геопотенцијални модел заснива се на функцијама, које су регуларно хармоничне у спољашњем простору, и обезбјеђује да модел може репрезентовати аномалијски потенцијал на површини Земље као и у ширем окружењу.

Сферни хармоници су најчешће коришћене базне функције у изради глобалних модела због њихове нумеричке једноставности у односу на елипсоидне хармонике. Они омогућавају лакшу трансформацију и обраду података, као и прецизније прорачуне за различите примјене.

Прецизност глобалног модела такође зависи од резолуције мреже података. На примјер подаци који су доступни у резолуцији 0.5×0.5 степени омогућавају креирање модела до степена и реда 360, док доступни подаци са просторном резолуцијом од $5' \times 5'$ омогућавају максимални степен и ред од 2160.

Одређивање аномалијског потенцијала T формулише се као рјешење проблема граничних вриједности, уз примјену следећих услова:

1. Услове за унутрашњост простора Ω :

$$\Delta T = 0 \quad \text{у } \Omega, \quad (3.3)$$

што указује да је потенцијал T хармонична функција унутар простора Ω .

2. Гранични услови на копненим областима S_L :

$$-\frac{\partial T}{\partial n} + \frac{\gamma'}{\gamma} T = \Delta g \quad \text{у } S_L, \quad (3.4)$$

гдје су укључени градијент потенцијала и аномалија убрзања Δg .

3. Гранични услови на океанским областима S_O :

$$T = \gamma(h_0 - \eta) \quad \text{у } S_O, \quad (3.5)$$

4. Услов на бесконачности:

$$T \rightarrow 0, \quad r \rightarrow \infty, \quad (3.6)$$

Глобални модели омогућавају високопрецизно репрезентовање гравитационог поља захваљујући интеграцији различитих извора података. Коришћењем метода најмањих квадрата, могуће је рјешавање комплексних система до степена 360, док се за обраду високих степена користе комплексније нумеричке методе и алгоритми. Иако тренутни модели пружају високу резолуцију, постоје изазови у обради података на поларним подручјима и у случајевима неравномјерне дистрибуције података.

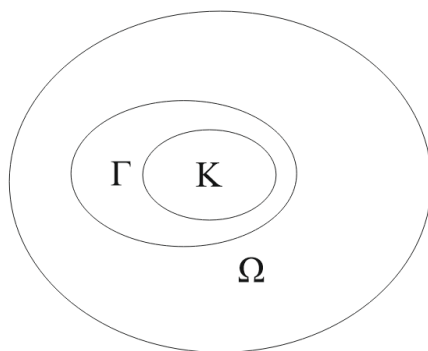
3.1.6 Рунгеова теорема

Нека је K компактан скуп и Γ и Ω отворени скупови у $\mathbb{R}^3$ такви да су њихове границе хомеоморфне сфери и да је $K \subset \Gamma$ и $\Gamma \subset \Omega$. Ако је функција ϕ хармонијска у Γ и ако је $\varepsilon > 0$ произвољно мало, онда постоји функција ψ хармонијска у Ω таква да (Moritz, 1980):

$$|\phi - \psi| < \varepsilon$$

униформно на K .

Региони K , Γ и Ω су илустровани на Слици 3-1. Скуп K је компактан (тј. затворен и ограничен), док су Γ и Ω отворени скупови. Затварање $\bar{\Gamma}$ обухвата отворени скуп Γ заједно са његовом границом. Услов да је гранична површина хомеоморфна сфери значи да се она може континуално деформисати у сферу (на примјер, елипсоид или површина Земље). Услов $K \subset \Gamma$ значи да је K потпуно садржан у отвореном скупу Γ , и слично за $\bar{\Gamma} \subset \Omega$. Ова два услова спречавају да се граничне површи додирују или сијеку.

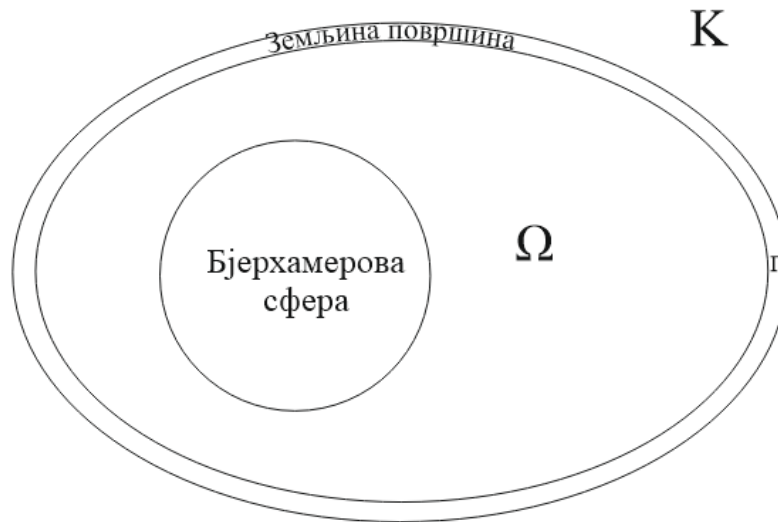


Слика 3-1: Скуп K и отворени региони Γ и Ω

Ако се каже да је функција хармонијска у региону, подразумеје се да је она регуларна у том региону. Рунгеова теорема стога каже да функција која је хармонијска у Γ (чак и ако има сингуларитете на граници Γ) може бити произвољно добро апроксимирана функцијом која је хармонијска у већем региону Ω .

Суштина Рунгеове теореме је да се може апроксимирати гравитационо поље Земље једноставнијим функцијама (хармонијским функцијама) са произвољно малом грешком, чак и ако те функције нису дефинисане свуда гдје је дефинисано само гравитационо поље.

Рунгеова теорема важи и када су региони K , Γ и Ω који се могу идентификовати са спољашњошћу физичке површине Земље, са спољашњошћу неке сфере која је потпуно унутар Земље (Бјерхамарова сфера) и са спољашњошћу неке површине која потпуно обухвата Земљу (прецизније дефинисано, K је спољашњост са граничном површи, пошто је K затворен скуп) Слика 3-2.



Слика 3-2: Случај релевантан у геодетском смислу

Означавајући границе K , Γ и Ω са ∂K , $\partial \Gamma$ и $\partial \Omega$ респективно, онда је $\partial \Gamma$ површина Земље, $\partial \Omega$ је површина Бјерхаммерове сфере, а ∂K је површина која потпуно окружује Земљину површину и произвољно је близу ње.

Тада имамо *геодетску* верзију Рунгеове теореме, познатију као Рунге-Крарупова теорема (Kragur, 2006):

Свака хармонијска функција, регуларна изван Земљине површине, може се униформно апроксимирати хармонијским функцијама регуларним изван произвољно дате сфере унутар Земље, у смислу да за свако дато $\varepsilon > 0$, релација

$$|\phi - \psi| < \varepsilon$$

важи свуда изван и на било којој затвореној површини која потпуно окружује Земљину површину.

Број ε може бити произвољно мали, а спољашња површина K може бити произвољно близу Земљиној површини $\partial \Gamma$; двије површине могу, на примјер, нигдје се не разликовати за више од 0.1 mm. Ово је јасно довољно за било коју практичну примјену, али ако је Земљина површина довољно регуларна (нпр. непрекидно диференцијабилна), површина ∂K може чак и да се поклопи са $\partial \Gamma$. Тада добијамо Келиш-Лаврентијеву теорему (Bjerhammar, 1975):

Свака функција, хармонијска изван Земљине површине и непрекидна изван и на њој, може се униформно апроксимирати хармонијским функцијама регуларним изван произвољно дате сфере унутар Земље, у смислу да за свако дато $\varepsilon > 0$, релација

$$|\phi - \psi| < \varepsilon$$

важи свуда изван и на Земљиној површини.

3.2 СПЕКТАР ПОТЕНЦИЈАЛА ЗЕМЉИНЕ ТЕЖЕ

Главна сврха спектралне декомпозиције потенцијала Земљине теже је инхерентно повезана са природом проблема одређивања спољашњег потенцијала у сферној апроксимацији, из мјерења на сферној референтној површи Земље. Математички, овај проблем се рјешава Фуријеовом методом у смислу скупа Y_{nm} сопствених функција (ортонормираних површинских сферних хармоника $y_{nm}(\theta, \lambda) = \bar{P}_{nm}(\cos\theta)e^{im\lambda}$ са ортонормираним Лежандровим функцијама $\bar{P}_{nm}$ степена n и реда m). Одређивањем коефицијената спектра V_{nm} из мјерења, потенцијал гравитационе силе се може описати као

$$V(\theta, \lambda) = \frac{GM}{R} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n V_{nm} Y_{nm}(\theta, \lambda) \right), \quad (3.7)$$

гдје се проширена формула може записати у облику:

$$V_{nm} Y_{nm} + V_{n,-m} Y_{n,-m} = (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\cos\theta). \quad (3.8)$$

Слично, раздвајајући потенцијал Земљине теже W на нормални потенцијал U и аномалијски потенцијал T , може се написати у проширеном облику:

$$T(\theta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n T_{nm} Y_{nm}(\theta, \lambda). \quad (3.9)$$

Декомпозиција се до сада могла посматрати само као погодан начин за моделирање, смањивањем серије и апроксимацијом потенцијала (Svenson, 1994). Међутим, користећи се Фуријеовим трансформацијама, са веома једноставним манипулацијама формуле, може се израчунати, на примјер, спољашњи потенцијал у радијусу r

$$T(r, \theta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{m=-n}^n \frac{R}{r} \right)^{n+1} T_{nm} Y_{nm}(\theta, \lambda), \quad (3.10)$$

или аномалија убрзања

$$\Delta g(\theta, \lambda) = \frac{1}{R} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n (n-1) T_{nm} Y_{nm}(\theta, \lambda). \quad (3.11)$$

Спектрална декомпозиција представља изузетно занимљив и интригантан приступ у истраживању гравитационог поља, посебно у контексту његових релација са различитим геофизичким параметрима, као што су изостатичко стање коре, аномалије густине, дубина мохо дисконтинуитета, Земљин магнетизам, температура и топлотни ток. Ови геофизички феномени се могу, у мањој или већој мјери, анализирати и описати коришћењем сферних хармоника. Потенцијалне везе између ових феномена и гравитационог поља могу се идентификовати у спектралном домену, при чему је вјероватноћа детекције таквих веза већа за одређене степене сферних хармоника, него за друге.

У овом контексту, Лавови бројеви (*Love numbers*) играју важну улогу као класичан инструмент анализе. Оригиналнo су развијени за описивање земаљских плима у условима еластичне, сферно слојевите Земље (Jeffreys, 1970). Додатно, за описивање ефеката услед примјене површинских оптерећења, уведени су такозвани Лавови бројеви површинског оптерећења (Farrell, 1972). Генерално, за сваки степен сферних хармоника постоје три Лавова броја, означена као h_n , k_n , l_n . Ови бројеви одређују релативне промјене у компонентама сферних хармоника које описују вектор помјерања (h_n и l_n) и потенцијал $V(k_n)$.

Овај приступ нуди дубљи увид у динамичке процесе у унутрашњости Земље и њену интеракцију са гравитационим пољем, што га чини посебно релевантним за савремена геофизичка истраживања.

Постоје бројни случајеви у којима анализе постају сложеније, нарочито када у процесима доминирају нелинеарности, као што су нелинеарни токови у омотачу Земље или фазни прелази у њеним унутрашњим слојевима. Ситуација је додатно отежана када структура Земље показује значајне бочне варијације, које нарушавају једноставност модела. Ипак, чак и у тако компликованим случајевима, коришћење спектралне декомпозиције или филтрирања, које укључује задржавање само одређених компоненти у изабраном фреквентном опсегу, може бити од великог значаја.

Важно је нагласити да су спектралне декомпозиције, попут оних изведених у оквиру сферних хармоника, глобалне природе. Оне пружају рјешења која су примјенљива на глобалном нивоу, али могу бити мање корисне за локалне анализе. У локалним случајевима, често се користе апроксимације у равни, гдје се умјесто сферних хармоника примјењују методе засноване на Фуријеовој трансформацији. У том контексту, директна или брза Фуријеова трансформација (*FFT – Fast Fourier Transformation*) се може користити у нумеричке сврхе како би се обрада података убрзала и поједноставила. (Jeffreys, 1970).

Мјешовита примјена употребе развоја у сферно-хармонијске редове, као метод апроксимације и као природно рјешење физичко-математичких проблема, има своје предности, првенствено у смислу да постоје већ готови скупови података који садрже оцијењене коефицијенте спектра. Бројни данашњи глобални геопотенцијални модели који се састоје од коефицијената сферно-хармонијског развоја до одређеног степена и реда, са својом различитом резолуцијом података су управо примјер тога.

Оно што је потребно истаћи, јесте да, када се користе ови модели за анализу спектра, треба имати на уму да су ови модели првенствено моделирани како би што вјерније описали поље теже Земље, насупрот томе да су моделирани да оцјењују коефицијенте са што већом прецизношћу. На примјер, модел може веома добро описивати поље теже на копненом дијелу а да међутим оцјена коефицијената понаособ буде лошија. Дакле, прије употребе спектра глобалног геопотенцијалног модела у геофизичке сврхе, треба пажљиво размотрити грешке коефицијената.

Што се тиче различитих метода које се користе за оцјену спектралних коефицијената, суштински метод који се користи је метода најмањих квадрата. Скуп података је обично хетероген. Типичан примјер је примјена терестричких аномалија убрзања као и мјерења

добијена сателитском алтиметријом познатија још и као гравиметријска алтиметрија. Чак и у случају хомогеног скупа података, мјерења су обично веома неравномјерно распоређена по површини Земље. Обично се за те потребе прави мрежа правилно распоређених секундарних тачака мјерења путем прорачуна средњих вриједности аномалија убрзања. Посебан изазов је коришћење модела апроксимације који, с једне стране, узима у обзир што је могуће више информација, али истовремено не ствара нове карактеристике самог модела, као што је алијасинг (осцилације између тачака мјерења).

У принципу, површински ортонормирани сферни хармоници Y_{nm} се могу користити за израчунавање спектралних коефицијената. Ако је

$$f(\theta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n c_{nm} Y_{nm}(\theta, \lambda) \quad (3.12)$$

слиједи

$$c_{nm} = \iint_S Y_{nm}(\theta, \lambda) f(\theta, \lambda) \sin \theta d\theta d\lambda \quad (3.13)$$

Покушај дискретизације интеграла и његове нумеричке апроксимације на основу мјерења функције f представља инфериорнији приступ у поређењу са методом коју је развио Ф. Нојман (F. Neumann). Ради се о аналогу дискретне Фуријеове трансформације у равни, као и нумеричке технике познате као брза Фуријеова трансформација, али изведене у сегментима. Детаљан приказ овог метода може се пронаћи у раду Ленса (Lense, 1950)

Метод Нојмана треба разликовати од примјене брзе Фуријеове трансформације у равни, која се нумерички користи у одређеним прорачунима геоида или гравитационог поља, гдје је површина Земље репрезентована правоугаоном мрежом. Додатне детаље и референце у вези са овом техником пружају радови (Vassiliou, 1985), као и (Arabelos & Tziavos, 1987).

Један од кључних изазова спектралне декомпозиције представља спљоштеност Земље. Наиме, могуће је примјенити елипсоидне (или сфероидне) хармонике као алтернативу сферним хармоникима, чиме се успјешно приступа рјешавању овог проблема (Heiskanen & Moritz, 1967).

3.2.1 Спектар снаге

Спектрална декомпозиција потенцијала V се може написати у облику

$$V(\theta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} V_n(\theta, \lambda) \quad (3.14)$$

гдје је V_n површински хармоник степена n :

$$V_n(\theta, \lambda) = \sum_{m=-n}^n V_{nm} Y_{nm}(\theta, \lambda) \quad (3.15)$$

За многе сврхе једноставније је разматрати низ бројева који формира спектар снаге функције потенцијала V :

$$c_n^2 = \iint_S |V_n(\theta, \lambda)|^2 d\theta = \sum_{m=-n}^n |V_{nm}|^2 \quad (3.16)$$

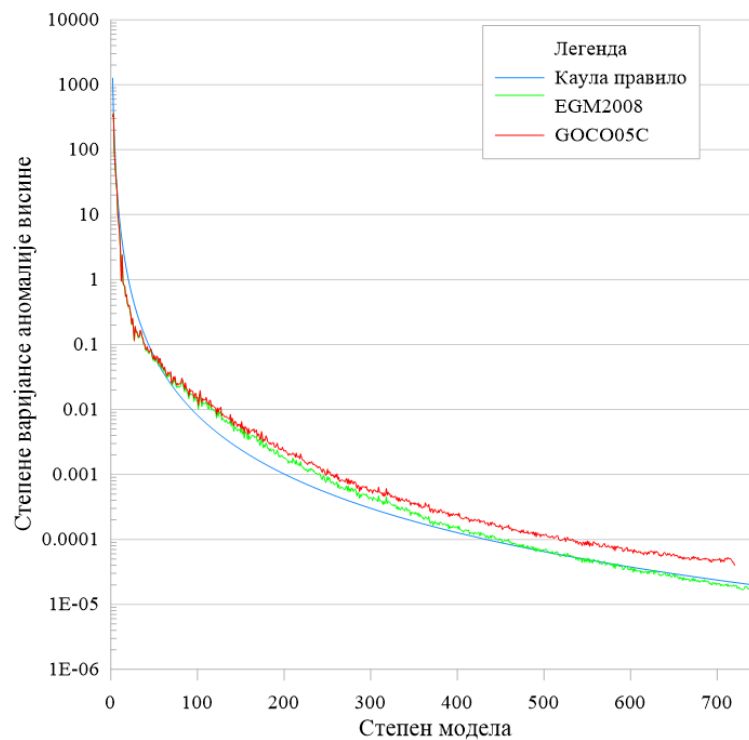
гдје c_n^2 се називају *степенним варијансама*. Степене варијансе описују опадање гравитационог сигнала у некој спектралној репрезентацији. Оне су углавном емпиријске природе и одражавају уочене варијације у скупу глобалних сферних хармонијских коефицијената. Као такве, степене варијансе су бездимензионалне (без јединица). Дефинишу се као сума квадрата сферних хармонијских коефицијената по степену сферног хармоника као

$$c_n^2 = \sum_{m=0}^n (\Delta \bar{C}_{nm}^2 + \Delta \bar{S}_{nm}^2) \quad (3.17)$$

Другим ријечима, степена варијанса степена n одражава снагу сигнала садржану у свим коефицијентима истог степена (и различитих редова m).

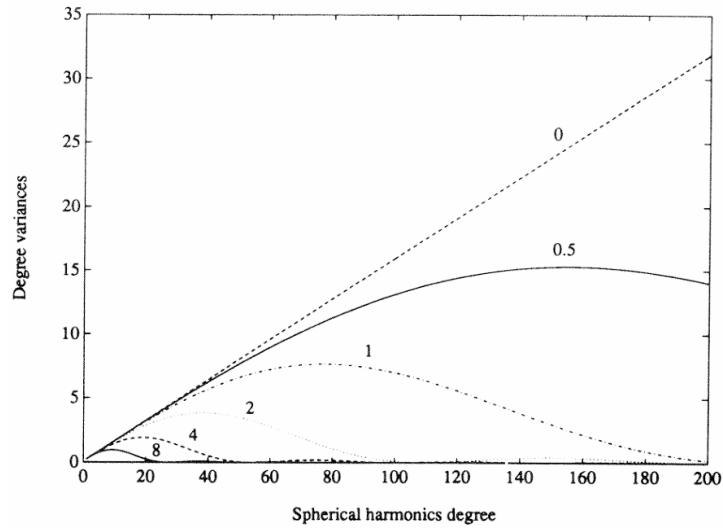
На Слици 3-3 приказан је дијаграм спектра снаге аномалија висине глобалних геопотенцијалних модела EGM2008 (Pavlis, et al., 2012) и GOCO05C паралелно са Каула правилем (Kaula, 1966), емпиријским правилем, које потврђује да су c_n^2 бездимензионалне варијансе степена гравитационог потенцијала, чије величине су дате формулом

$$(2n+1)10^{-10} n^{-4} \quad (3.18)$$



Слика 3-3: Спектри снаге за неке моделе до степена 720

Када се користи спектрална анализа у геофизици, природно је покушати пронаћи карактеристичан опсег таласних дужина у спектру. Генерално, ово се може урадити само на веома груб начин, тако да алтернативно рјешење јесте проналажење *карактеристичног пречника*. Слика 3-4 показује како пречник униформне дистрибуције јединичне масе на сферичној капи утиче на спектар снаге. Када пречник тежи нули, у граници добијамо тачкасту масу

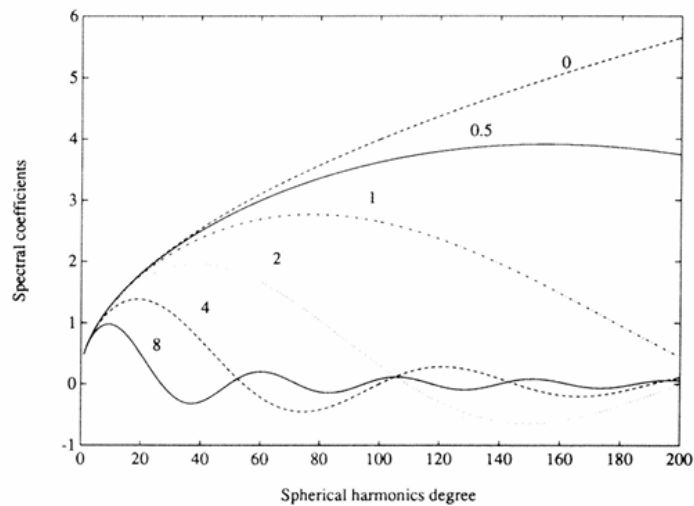


Слика 3-4: Спектри снаге за неке дистрибуције преко сферне капе (аналогне правоугаоним импулсима) са радијусима од $0,5^\circ$ до 8° и за делта функцију (0°). (извор илустрације: "Geoid and its geophysical interpretations, Chapter 6, page 118, Figure 2)

$$\delta_r(\psi) = \sum_l \sqrt{(2l+1)/4\pi} Y_l(\psi) \quad (3.19)$$

гдје ψ је угаоно растојање до тачке P . Спектар снаге δ_r одговара кривој од 0° на Слици 3-5, гдје показује да је карактеристични пречник d (у степенима) приближно повезан са максималним степеном n у спектру снаге према формули

$$n \approx 160/d \quad (3.20)$$



Слика 3-5: Спектрални коефицијенти који одговарају Слици 3-4 (извор илустрације: "Geoid and its geophysical interpretations, Chapter 6, page 118, Figure 3).

3.2.2 Спектралне релације и функције преноса у геодезији

Када се разматрају спектри који су повезани са спектром ундулација, постоје одређени случајеви гдје се јасно може дефинисати функција преноса између различитих величина. Примјер за то су аномалије убрзања, компоненте одступања вертикала и градијенти.

Један занимљив приступ је интеграција функције преноса од Хелмертове једнослојне аномалије масе на површини до ундулације геоида. Овим се може добити свеобухватна функција преноса од аномалије масе до аномалије убрзања.

Аномалије масе представљају варијације у расподјели масе Земље које одступају од идеализованог или референтног модела. Ове аномалије узрокују локалне промјене у гравитационом пољу Земље и могу се детектовати и анализирати коришћењем различитих техника. Оне пружају важне информације о унутрашњој структури Земље, процесима на њеној површини и динамици.

Изузимајући компоненте ниског степена, аномалије убрзања су у суштини пропорционалне аномалијама масе, док су компоненте високог степена значајно потиснуте у спектру ундулација геоида (Svenson, 1994).

3.2.3 Комплексност утицаја изостатичких издизања

Када се разматрају други спектри који могу утицати на спектар ундулација геоида, ситуација постаје знатно сложенија. Аномалије масе на већим дубинама се временом дјелимично компензују изостазијом, што отежава њихово детектовање кроз мјерења убрзања. За изостатичка издизања је такође изазовно утврдити да ли су уочени ефекти у гравитационом пољу резултат некомпензованих аномалија маса након деглацијације или других узрока, као што су токови плашта, тектонска кретања, или дуготрајно еластично понашање коре.

3.2.4 Физичка интерпретација компоненти спектра

Компоненте нижих степена гравитационог потенцијала имају јасне физичке интерпретације. Нулти степен је пропорционалан производу Њутнове гравитационе константе и масе Земље (GM), али може варирати у складу са промјеном средњег нивоа мора. Компоненте првог степена, које су теоријски "забрањени хармоници" у систему гдје центар масе Земље у ствари дефинише почетак координатног система, ипак треба узети у обзир код упоређивања геоида из различитих епоха.

Компоненте другог степена, као што су оне повезане са екваторијалним избочењем, треба да буду апсорбоване у нормалном потенцијалу. Компоненте високог степена одражавају густинске аномалије у Земљиној литосфери и могу укључивати доприносе конвекције у горњем плашту.

3.2.5 Технике филтрирања и њихове примјене

Филтрирање у спектралном простору омогућава уклањање небитних дјелова спектра. Нископропусни и високопропусни филтери могу бити примјењени у различите сврхе, од уклањања високофреквентних сметњи до изоловања специфичних компоненти спектра. Филтери се често заснивају на функцијама преноса које се примјењују у спектралној декомпозицији. За практичне примјене, филтери морају бити прилагођени доступним локалним подацима.

У статистици је уобичајено да се под филтером подразумева метода или уређај који је описан функцијом преноса у спектралном домену, док се у овом случају под филтером подразумева операција примјене функције преноса

$$f_n = \begin{cases} 1 & \text{ако } n_1 \leq n \leq n_2 \\ 0 & \text{у осталим случајевима} \end{cases} \quad (3.21)$$

или апроксимација такве функције преноса. Уопштено, потенцијал се сматра нископропусном филтрираном сликом расподеле масе. С друге стране, гравитациони потенцијал се може сматрати високопропусном филтрираном сликом потенцијала, а исто важи чак и у већем степену за градиометријске податке (Schwartz, 1985). Циљ примјене филтера на функцију f је уклањање небитних дјелова из спектра. У случају постојања спектралне декомпозиције од f , ово представља сувишан корак. Иначе, није потребно прво израчунати спектралну декомпозицију, пошто филтер можемо изразити помоћу интегралног оператора

$$V_{n_1, n_2} = \iint_S K_{n_1, n_2}(\psi) V(\theta, \lambda) dS, \quad (3.22)$$

гдје језгро K_{n_1, n_2} одговара функцији преноса k_n и дато је са

$$K_{n_1, n_2}(\psi) = \sum_{n_1}^{n_2} \sqrt{\frac{(l+1)}{4\pi}} Y_l(\psi) \quad (3.23)$$

3.2.6 Степене варијансе аномалијског потенцијала и његових функционала и њихове оцјене

Степене варијансе представљају мјеру утицаја појединачних сферних хармоника на варијабилност аномалијског потенцијала и његових функционала. Функционали, као што су аномалије убрзања, ундулација геоида и отклони вертикале, често се изражавају преко сферних хармоника, гдје сваки степен хармоника доприноси одређеној компоненти просторне структуре гравитационог поља. Анализа степена варијансе омогућава детаљно испитивање како различити хармоници учествују у формирању ових функционала, што је од значаја за развој високопрецизних глобалних геопотенцијалних модела. У наставку текста су дати изрази за степене варијансе аномалијског потенцијала и његових функционала са оцјеном истих.

Степене варијансе аномалијског потенцијала и њихова оцјена:

$$c_n^2(T) = \left(\frac{GM}{R} \right)^2 \left(\frac{a}{R} \right)^{2n} \sum_{m=0}^n (\Delta \bar{C}_{nm}^2 + \Delta \bar{S}_{nm}^2) \quad (3.24)$$

$$\sigma_n^2(\epsilon_T) = \left(\frac{GM}{R} \right)^2 \left(\frac{a}{R} \right)^{2n} \sum_{m=0}^n (\sigma_{\Delta \bar{C}_{nm}}^2 + \sigma_{\Delta \bar{S}_{nm}}^2) \quad (3.25)$$

Степена варијанса аномалије убрзања и њихова оцјена:

$$c_n^2(\Delta g) = (n-1)^2 \left(\frac{GM}{R^2} \right)^2 \left(\frac{a}{R} \right)^{2n} \sum_{m=0}^n (\Delta \bar{C}_{nm}^2 + \Delta \bar{S}_{nm}^2) \quad (3.26)$$

$$\sigma_n^2(\epsilon_{\Delta g}) = (n-1)^2 \left(\frac{GM}{R^2} \right)^2 \left(\frac{a}{R} \right)^{2n} \sum_{m=0}^n (\sigma_{\Delta \bar{C}_{nm}}^2 + \sigma_{\Delta \bar{S}_{nm}}^2) \quad (3.27)$$

Степена варијанса ундулације геоида и њихова оцјена:

$$c_n^2(N) = \left(\frac{GM}{\gamma a} \right)^2 \left(\frac{a}{R} \right)^{2n} \sum_{m=0}^n (\Delta \bar{C}_{nm}^2 + \Delta \bar{S}_{nm}^2) \quad (3.28)$$

$$\sigma_n^2(\epsilon_N) = \left(\frac{GM}{\gamma a} \right)^2 \left(\frac{a}{R} \right)^{2n} \sum_{m=0}^n (\sigma_{\Delta \bar{C}_{nm}}^2 + \sigma_{\Delta \bar{S}_{nm}}^2) \quad (3.29)$$

гдје је

$$\gamma = \frac{GM}{a^2}. \quad (3.30)$$

3.2.7 Каула правило

Каула правило, или још познато под именом *rule of thumb*, представља један од најзначајнијих концепата у анализи геопотенцијалног поља, пружајући емпиријски и теоријски основ за разумијевање степених варијанси у спектралној расподјели геопотенцијала Земље. Ово правило је први пут формулисао *W. M. Kaula* у свом раду (Kaula, 1966) као начин за описивање како се допринос различитих сферних хармоника геопотенцијалном моделу смањује са повећањем степена хармоника. У овом поглављу, разматрају се теоријска основа, примјена, и импликације Каула правила засноване на његовом оригиналном раду. Сличне законитости су утврђене и за друга тијела у свемиру попут Мјесеца, Марса (Rexer & Hirt, 2015) и Венере (Turcotte, 1997).

Каула правило дефинише како се варијансе степена σ_n^2 , које представљају допринос сваког степена l у спектру геопотенцијала, смањују са повећањем степена. Емпиријска формула за варијансе степена је:

$$\bar{\sigma}_n^2 = \frac{(2n+1)}{n^2} 10^{-10} = (2n+1) \sigma_n^2, \quad (3.31)$$

гдје је:

σ_n^2 - степена варијанса за степен n ,

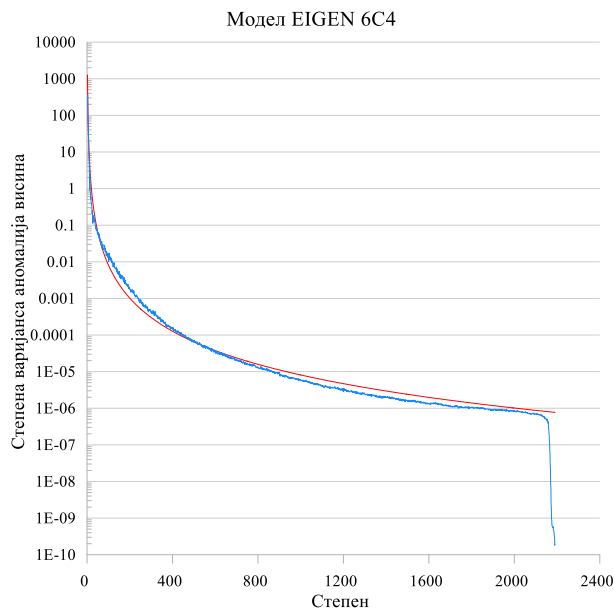
$\bar{\sigma}_n^2$ - степена варијанса пуног степена,

n - степен сферних хармоника,

што имплицира да се енергија виших степени брзо смањује. Ово смањење је кључно за разумијевање како шумови и грешке у мјерењима постају доминантни у хармоничима високог степена.

У раду *W. M. Kaula* (Kaula, 1966), степене варијансе су дефинисане као збир квадратних вриједности хармонијских коефицијената за дати степен n , дат формулом (3.17).

Ова формула осигурава да се узимају у обзир доприноси свих компоненти (редова m) за одређени степен. У спектралној анализи гравитационог поља, ова мјера пружа увид у расподјелу енергије по различитим просторним фреквенцијама, гдје је примјер дат на слици.



Слика 3-6: Приказ графика степених варијанси код модела Еиген (плава линија) и Каула правило (црвена линија)

Примјена Каула правила је широко распрострањена у области геодезије и геофизике, нарочито у анализи глобалних геопотенцијалних модела. Неке од главних примјена такође укључују:

Редукцију шума - Каула правило омогућава идентификацију и филтрирање компоненти високог степена које су често оптерећене шумом.

Оптимизацију модела - У процесу конструисања геопотенцијалних модела, правило се користи за оцјену грешака и побољшање квалитета апроксимације модела.

Комбинацију података - Приликом интеграције сателитских и терестричких података, правило служи као водич за одређивање тежина различитих извора информација.

Каула правило представља основни принцип у анализи и примјени геопотенцијалних модела, међутим, највећа неслагања даје када су у питању већи степени у сферно-хармонијском развоју, што значи да са теоретске тачке гледишта, правило некада не мора у потпуности да одговара рјешењу у пракси, о чему ће бити касније ријечи у практичном дијелу овог рада.

3.2.8 Грешка у извршењу и грешка пропуста (Commision and omission error)

Проблем који треба ријешити, је како оцијенити квалитет модела, односно како одговорити на питање колико добро аномалијски потенцијал из модела T_m одговара стварном аномалијском потенцијалу T .

Како стохастичка природа грешака није савршено описана, тј. како је распоред остатака минимизован, долази до појаве да дуготаласна карактеристика присутна у подацима буде апсорбована од стране оцијењених коефицијената (Sanso & Sideris, 2013).

Ти остаци садрже двије врсте грешака:

1. **Грешка мјерења:** Ова грешка се преноси у оцјене коефицијената T_{lm} до максималног степена M .
2. **Грешка моделирања:** Ова грешка произилази из чињенице да истинска вриједност T садржи компоненте које није могуће моделирати користећи коначан број хармоника.

Циљ је разликовати ове двије врсте грешака и оцијенити их.

У сврху квантификације овог случаја, претпостављајући да се истинска вриједност T може уједначено проширити на сферу S , са радијусом $\bar{R}$, у том случају може се записати:

$$T(P) = \frac{GM}{\bar{R}} \sum_{\ell=1}^{+\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} T_{lm} S_{lm}(r, \vartheta, \lambda), \quad (3.32)$$

$$S_{lm}(r, \vartheta, \lambda) = \left(\frac{\bar{R}}{r} \right)^{\ell+1} Y_{lm}(\vartheta, \lambda), \quad (3.33)$$

$$T_M(P) = \frac{GM}{\bar{R}} \sum_{\ell=1}^M \sum_{m=-\ell}^{\ell} T_{lm} S_{lm}(r, \vartheta, \lambda), \quad (3.34)$$

$$\hat{T}_{lm} = T_{lm} + \tau_{lm}, \quad (3.35)$$

гдје су τ_{lm} грешке оцјене коефицијената T_{lm} . Треба напоменути да у формулама (3.32) и (3.34) редови почињу од L , што одговара идеји да су хармоници нижег реда савршено познати и одузети свуда, како из података, тако и из модела.

Са оваквим формулама може се израчунати норма резидуалног аномалијског потенцијала:

$$T - T_M = T_{res} = \frac{GM}{\bar{R}} \sum_{\ell=L}^M \sum_{m=-\ell}^{\ell} \tau_{lm} S_{lm}(r, \vartheta, \lambda) + \frac{GM}{\bar{R}} \sum_{\ell=M+1}^{+\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} T_{lm} S_{lm}(r, \vartheta, \lambda). \quad (3.36)$$

Норма T_{res} се узима у смислу $L^2(\bar{S})$, тј.:

$$\|T_{res}\|_{L^2(\bar{S})}^2 = \left(\frac{GM}{\bar{R}}\right)^2 \sum_{\ell=L}^M \sum_{m=-\ell}^{\ell} \tau_{lm}^2 + \left(\frac{GM}{\bar{R}}\right)^2 \sum_{\ell=M+1}^{+\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} T_{lm}^2. \quad (3.37)$$

Као што се види, ова норма зависи од случајних промјенљивих τ_{lm} , које у крајњој линији зависе од грешке мјерења, па је природно користити је као индекс укупне грешке просјеком (3.157) у односу на варијабилност шума.

Пошто је $E\{\tau_{lm}\} = 0$, слиједи:

$$E\{\tau_{lm}^2\} = \sigma^2(\tau_{lm}). \quad (3.38)$$

Тада, узимајући математичко очекивање из претходне формуле, добија се:

$$\mathcal{E}_{tot}^2 = E\{\|T_{res}\|_{L^2(\bar{S})}^2\} = \left(\frac{GM}{\bar{R}}\right)^2 \sum_{\ell=L}^M \sum_{m=-\ell}^{\ell} \sigma^2(\tau_{lm}) + \left(\frac{GM}{\bar{R}}\right)^2 \sum_{\ell=M+1}^{+\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} T_{lm}^2. \quad (3.39)$$

Први члан у десној страни једначине (3.38) назива се **грешка у извршењу (commission error)**, док се други назива **грешка пропуста (omission error)**, јер први зависи од грешака које правимо мјерењем, док други зависи од степена које изостављамо из модела.

Оне се означавају на следећи начин:

$$\mathcal{CE}^2 = \left(\frac{GM}{\bar{R}}\right)^2 \sum_{\ell=L}^M \sum_{m=-\ell}^{\ell} \sigma^2(\tau_{lm}), \quad (3.40)$$

$$\mathcal{OE}^2 = \left(\frac{GM}{\bar{R}}\right)^2 \sum_{\ell=M+1}^{+\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} T_{lm}^2. \quad (3.41)$$

Да бисмо приступили евалуацији ових грешака, са једне стране треба описати пропагацију шума мјерења, док са друге стране је потребно имати неку претпоставку о реду величине T_{lm} . О детаљном поступку се може више наћи у књизи (Sanso & Sideris, 2013).

3.2.9 Уклапање дуготаласних, средњеталасних и краткоталасних карактеристика поља теже

Гравитационо поље Земље састоји се од компоненти које имају различите таласне дужине, од дуготаласних компоненти који описују глобалну структуру Земље, до краткоталасних који се односе на локалне варијације.

Дуготаласне компоненте су углавном повезане са глобалним карактеристикама, које се најчешће анализирају коришћењем сателитских података, **средњеталасне компоненте** укључују варијације регионалног карактера, док **краткоталасне компоненте** описују локалне карактеристике гравитационог поља, укључујући топографске ефекте, густину седимената и друге геолошке детаље.

Процес уклапања ових компоненти подразумева интеграцију података из различитих извора, као што су сателитска мјерења, подаци теренских мјерења и доступних модела. Неки од процеса уклапања поменутих компоненти поља теже су:

1. **Филтрирање сигнала по таласним дужинама** – Коришћење спектралних анализа, као што су Фуријеова анализа и сферни хармоници, за раздвајање компоненти различитих таласних дужина.
2. **Комбинација сателитских и теренских података** – Сателитски подаци пружају информације о дуготаласним карактеристикама, док се теренска мјерења користе за краткоталасне и средњеталасне компоненте.

Иако су модерне технологије омогућиле значајан напредак у овој области, постоје бројни изазови:

- **Резолуција података** – Сателитски подаци често имају ограничену резолуцију за краткоталасне компоненте, док теренска мјерења нису увијек доступна за глобалну анализу.
- **Хетерогеност података** – Комбинација података из различитих извора захтјева високо прецизну нормализацију и корекцију.
- **Сложеност рачунских операција** – Моделирање и инверзија гравитационог поља захтијевају велике рачунарске ресурсе.

4. ПРЕГЛЕД ПОСТОЈЕЋИХ ИСТРАЖИВАЊА

Први радови моделирања глобалних геопотенцијалних модела за локална подручја започети су крајем двадесетог вијека. Једни од првих радова представљен широј јавности јесте метод заснован на интегралним формулама који омогућава побољшање глобалних геопотенцијалних модела коришћењем локално дистрибуираних аномалија убрзања. Овај приступ је примијењен за подручје Ирана, гдје су комбиновани глобални геопотенцијални модел GPM2 и доступни регионални гравитациони подаци ради одређивања геоида. Тачност одређеног геоида процијењена је поређењем са Доплеровим и нивелманским подацима, показујући одступање од $\pm 1,4$ метра (Weber & Zomorodian, 1988).

Регионални гравиметријски подаци (аномалије убрзања) су коришћене за локално побољшање ГТМ-а. Аутори су користили **Стоксову интегралну формулу** за рачунање побољшаног геоида. Ова формула омогућава интеграцију локалних аномалија убрзања са глобалним моделом, што повећава тачност у региону од интереса.

Рачунате су корекције глобалног модела на основу густо распоређених регионалних података. Закључци који су изведени из истраживања су следећи:

- Метод је примјенљив у различитим регионима, под условом да постоје довољно густо распоређени локални подаци.
- У вријеме писања рада (1988), глобални модели нису имали високу резолуцију. Додавање локалних података значајно је побољшало представљање гравитационог поља.
- Тачност побољшаног модела директно зависи од квалитета и густине локалних мјерења. Ако су подаци ријетки или неквалитетни, побољшање може бити ограничено.
- Примјена Стоксове формуле захтјева прецизну обраду и корекцију локалних података (нпр. редуције у односу на топографију, плиму, атмосферске ефекте).
- Упркос побољшању, постоје резидуалне грешке у моделу које могу потицати из недостатака у глобалном моделу или пропуста у уклањању ефеката као што су плиме и атмосферски утицаји.

У раду (Mosayebzadeh, 2019) циљ истраживања био је побољшање глобалних геопотенцијалних модела, попут EGM2008, у регионалним областима коришћењем GPS/dh података.

У истраживању је коришћен глобални геопотенцијални модел EGM2008 као полазна тачка. Услед недостатка довољне резолуције у одређеним регионима, укључени су локални GPS/dh подаци. Подаци су кориговани ради уклањања систематских грешака попут геодетског датума, референтних система и локалних аномалија.

Након корекције, ундулације одређене из GPS/dh података трансформисане су у сферне хармонице ради математичког моделирања. Додати су псеудо подаци генерисани из EGM2008 модела, распоређени по цијелој Земљиној површини, како би се избјегле нумеричке нестабилности у израчунавању сферних хармоника. Релативна тежина

између GPS/dh података и псеудо података одређена је на основу квалитета података и њиховог прилагођавања глобалном моделу. На основу интеграције GPS/dh и псеудо података израчунати су сферно хармонијски коефицијенти који дефинишу регионално побољшани геопотенцијални модел.

Предложени метод примијењен је на два региона: Сједињене Америчке Државе и Иран. За оба региона коришћени су доступни GPS/dh подаци, док је глобални модел EGM2008 служио као основа за даља побољшања. У случају САД-а, побољшани модел показао је смањење грешке од 23% у односу на оригинални EGM2008, што указује на значајан утицај локалних података у побољшању тачности. За Иран је забиљежено смањење грешке од 8%, што је објашњено мањом густином и квалитетом доступних GPS/dh података у том региону. Тачност побољшаног модела процијењена је упоређивањем са независним мјерењима и показала је бољу апроксимацију у односу на глобални модел. Ови резултати показују да комбинација глобалног модела и GPS/dh података представља ефикасан начин за побољшање регионалних геопотенцијалних модела.

Ипак, овај приступ има одређена ограничења. Тачност побољшаног модела директно зависи од густине и квалитета GPS/dh података, што може утицати на резултате у регионима са недовољно података. Додатно, одређивање оптималне релативне тежине између GPS/dh и псеудо података може бити изазовно и захтјева пажљиву анализу.

У раду „Оцјена перформанси глобалних геопотенцијалних модела високог/ултра-високог степена над Вијетнамом коришћењем GPS/dh података” (Thi Pham, et al., 2023) аутори су се фокусирали на процјену тачности и поузданости глобалних геопотенцијалних модела (ГГМ) високог и ултра-високог степена у региону Вијетнама. ГГМ-ови су кључни за различите геодетске и геофизичке примјене, али њихова тачност може варирати у зависности од региона, посебно у областима са сложенom топографијом или недовољним подацима.

Аутори су анализирали више ГГМ-а, укључујући моделе високог степена (до степена 2190) и ултра-високог степена (до степена 5540). За процјену њихове тачности коришћени су GPS/dh подаци из Вијетнама, који пружају независну референтну основу за поређење. Методологија је обухватала израчунавање ундулација геоида из ГГМ-а и њихово поређење са ундулација геоида добијеним из GPS/dh података. Разлике између ових вриједности коришћене су за процјену перформанси сваког модела.

Резултати су показали да ГГМ-и високог степена пружају боље резултате у поређењу са моделима ултра-високог степена у региону Вијетнама. Конкретно, модели високог степена су показали мању средњу квадратну грешку у поређењу са GPS/dh подацима, што указује на њихову већу тачност у овом региону. С друге стране, модели ултра-високог степена нису показали очекивана побољшања, што може бити посљедица недовољне резолуције или квалитета улазних података у том региону.

Аутори су закључили да, иако ГГМ-и високог и ултра-високог степена пружају детаљну глобалну покривеност, њихова тачност може варирати у зависности од региона. Стога је неопходно спровести регионалне процјене перформанси прије њихове примјене.

У раду „*Evaluation of global gravity models from absolute gravity and vertical gravity gradient measurements in Turkey*” (Akdoğan, et al., 2019) аутори су се фокусирали на процјену глобалних гравитационих модела у Турској.

У овом истраживању, аутори су користили апсолутна гравиметријска мјерења и мјерења вертикалних градијената прикупљена у периоду од 2016. до 2018. године у оквиру пројекта модернизације турског висинског система и пројекта ажурирања гравиметријских мрежа. Циљ је био да се процјени који од 19 најновијих сателитских и комбинованих ГГМ-а (развијених у периоду од 2004. до 2018. године) најбоље одговара гравитационом пољу Турске.

Резултати су показали да мјерења вертикалних градијената могу послужити као независни подаци за регионалну валидацију ГГМ-а. Међу анализираним моделима, комбиновани модел XGM2016 (Pail, et al., 2018), базиран на подацима мисије GOCE, и сателитски модел GO_CONS_GCF_2_TIM_R5 показали су најбоље резултате. Ови модели су надмашили широко коришћени EGM2008 до сферног степена 270 за подручје Турске. Побољшања су била нарочито изражена у планинским областима, као што су региони Црног мора, Егејског мора, дјелови Медитерана и југоисточне Анадолије, са највећим побољшањима у приобалним областима источног Црног мора.

У раду (Ustun & Abbak, 2010) аутори се фокусирају на спектралну евалуацију глобалних геопотенцијалних модела како би се идентификовале предности и слабости различитих модела у глобалном и регионалном контексту, процијенио утицај сателитских мисија (CHAMP, GRACE, GOCE) на унапређење гравитационих модела и уочиле разлике између модела у нискофреквентном и високофреквентном дијелу спектра.

Евалуација је рађена комбиновањем модела (EGM2008, EGM96), који су поређени са моделима базираним само на сателитским рјешењима (CHAMP, GRACE, GOCE). Разматрана је прецизност модела кроз сигнале и грешке у сферним хармонијским коефицијентима.

Директна метода користила је процјену односа сигнала и шума (*signal-to-noise ratio*), а друга, релативна метода укључује упоређивање разлика између коефицијената модела.

За подручје од интереса је одабрана територија Турске, гдје су анализиране разлике између модела у односу на локалне податке (GPS/dh и ундулације геоида).

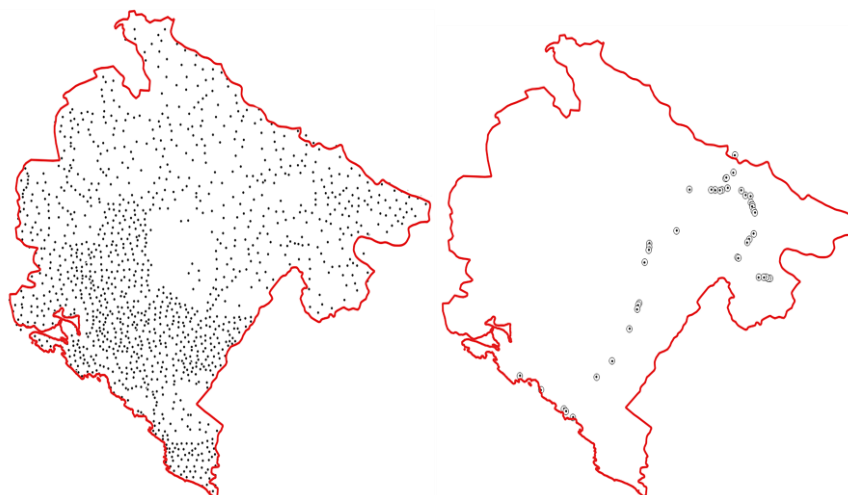
У погледу резултата, GRACE модели показали су значајно бољу тачност у нискофреквентном спектру, док су комбиновани модели који користе и сателитске и терестричке податке пружили најбоље комбиноване резултате.

Модели базирани на GRACE подацима показали су боље уклапање у регионалне податке у поређењу са старијим моделима као што је EGM96. Разлике у ундулацијама геоида између модела достижу неколико метара, нарочито у регионима са неправилном топографијом и без локалних гравиметријских података. Комбиновани модели, попут EGM2008, значајно су побољшали прецизност интеграцијом локалних података.

Спектрална анализа показала је да GRACE модели доминирају до сферног степена 150, док комбиновани модели пружају супериорније резултате на вишим фреквенцијама. Старији модели, као што је EGM96, имају брз пад тачности изнад сферног степена 30. Генерално, GRACE мисија је значајно унаприједила тачност нискофреквентних компоненти гравитационог поља, док је EGM2008 препознат као најбољи свеобухватни модел због комбинације сателитских и локалних података. Квалитет модела у

регионалним апликацијама зависи од доступности локалних података, а њихов недостатак узрокује систематске грешке.

Када се говори о истраживањима везаним за регионално подручје, у раду „*First look inside the gravity field of Montenegro*” (Joksimović & Odalović, 2025) коришћени су модели SGG-UGM-2, EGM2008, XGM2019e и EIGEN-6C4 за добијање аномалија слободног ваздуха и аномалија висина на територији Црне Горе. Поређењем са терестричким мјерењима, утврђено је да модел XGM2019e најбоље апроксимира аномалије слободног ваздуха са стандардном девијацијом од 17.24 mGal, док је модел EIGEN-6C4 најпрецизнији у моделирању аномалија висина, са стандардном девијацијом од 0.044 m. Ови резултати потврђују корисност ГГМ-а у геодетским истраживањима, али и указују на њихова ограничења, нарочито у подручјима са сложеном топографијом. Услед недостатка репрезентативног скупа терестричких података (Слика 4-1), као и чињенице да сам ГГМ не може са довољно високим степеном апроксимације описати само гравитационо поље, низ предлога је дат од стране аутора за будућа истраживања.



Слика 4-1: Просторни распоред тачака гравиметријског премјера Црне Горе (лијево) и мјерених Gps/dh аномалија висина (десно) (Joksimović&Odalović, 2025)

5. МОДЕЛИРАЊЕ ГЛОБАЛНИХ ГЕОПОТЕНЦИЈАЛНИХ МОДЕЛА

Приступ моделирања синтетичких коефицијената сферно хармонијског развоја потенцијала убрзања гравитационе силе Земље у овом раду обухвата коришћење коефицијената сферно хармонијског развоја постојећих глобалних геопотенцијалних модела као и њихово додатно моделирање у циљу постизања што веће сагласности са терестричким мјерењима одабраног локалног подручја.

Прије почетка моделирања неопходно је било дефинисати хипотезе о маси тијела Земље, као и о распореду густина маса унутар горњег слоја Земљине коре, закључно са потребним просторним распоредом терестричких резултата опажања параметара потенцијала Земљине теже и квалитету свих расположивих терестричких података,

Примјена адекватног математичког модела у циљу прилагођавања коефицијената сферно хармонијског развоја постојећих глобалних геопотенцијалних модела терестричким подацима локалног подручја је од суштинске важности за овај процес.

Посебно је потребно напоменути да се у процесу одређивања коефицијената сферно хармонијског развоја степена већег од степена постојећих глобалних модела користи Каула правило (Kaula, 1966) које је и довело до спектралне декомпозиције и третирања потенцијала убрзања гравитационог поља путем дуготаласних, средњеталасних и краткоталасних карактеристика (Barthelmes, 2014).

Посебна пажња је такође посвећена тачности одређивања Лежандрових полинома високог степена и реда, у циљу проналажења нумерички бољег рјешења за добијање Лежандрових полинома, јер имајући у виду ограничења која су постављена тренутно доступном технологијом и ресурсима, постоји оправдан разлог за јављање грешке приликом одређивања истих.

Комбинацијом података из сателитских мисија, терестричких података, функционала аномалијског потенцијала, доступних геоида и глобалних геопотенцијалних модела као и дигиталних модела терена омогућено је креирање модела који у најбољој могућој мјери описује гравитационо поље посматраног локалног подручја.

5.1.1 Прилагођавање модела

Прилагођавање глобалног геопотенцијалног модела значи адаптацију постојећег скупа коефицијената користећи терестричке податке са локалног подручја, попут аномалија убрзања или аномалија висина.

Процедура прилагођавања обухвата дијелење локалне територије на l квази-квадратних подзона Δ , ограничених географским ширинама и дужинама, са просторном резолуцијом зависно од одабраног модела у правцу исток-запад и сјевер-југ. Резолуција може бити 5'x5', 10'x10' и слично (Одаловић, et al., 2018).

Сви подаци се дијеле у l скупова према позицијама унутар формираних подзона. За сваки скуп рачуна се средња вриједност коришћењем следеће релације:

$$\begin{aligned}\overline{\Delta g} &= \frac{1}{N_A} \sum_{i=1}^{N_A} \Delta g_i, \\ \overline{\Delta \xi} &= \frac{1}{N_A} \sum_{i=1}^{N_A} \Delta \xi_i.\end{aligned}\tag{5.1}$$

Средње вриједности функционала аномалијског потенцијала се такође могу израчунати користећи коефицијенте глобалног геопотенцијалног модела примјеном следеће формуле:

$$\overline{\Delta g}_{GGM} = \frac{GM}{r^2} \sum_{n=2}^{N_{\max}} (n-1) \left(\frac{a}{r} \right)^n \beta_n \sum_{m=0}^n \left(\bar{C}_{nm}^{ELL} \cos(m\lambda) + \bar{S}_{nm}^{ELL} \sin(m\lambda) \right) \bar{P}_{nm}(\cos \theta) \tag{5.2}$$

гдје је β_n дефинисано као:

$$\beta_n = \frac{1}{1 - \cos(\psi_0)} \int_{\cos(\psi_0)}^1 P_n(t) dt \tag{5.3}$$

Разлика између терестричких вриједности и ГГМ-а вриједности је дата као:

$$\delta = \overline{\Delta g} - \overline{\Delta g}_{GGM} \tag{5.4}$$

Ова разлика је коришћена као основа за прилагођавање коефицијената ГГМ-а према терестричким аномалијама примјеном следеће формуле:

$$\begin{Bmatrix} \delta \mathcal{C}_{nm}^{ELL} \\ \delta \mathcal{S}_{nm}^{ELL} \end{Bmatrix} = \frac{1}{4\pi G M a} \int \frac{F_i^2}{a} \left(\frac{n}{n-1} \right) \delta_{ni} \begin{Bmatrix} \cos(ml_i) \\ \sin(ml_i) \end{Bmatrix} P_{nm} \cos(\theta_i) d\sigma_i \tag{5.5}$$

За l подзона, ефекти свих разлика се сабирају, што даје:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \delta \mathcal{C}_{nm}^{ELL} \\ \delta \mathcal{S}_{nm}^{ELL} \end{Bmatrix} &= \frac{1}{4\pi G M a} \sum_{i=1}^I \int \frac{F_i^2}{a} \left(\frac{n}{n-1} \right) \delta_{ni} \begin{Bmatrix} \cos(ml_i) \\ \sin(ml_i) \end{Bmatrix} P_{nm} \cos(\theta_i) d\sigma_i, \\ \begin{Bmatrix} \delta \mathcal{C}_{nm}^{ELL} \\ \delta \mathcal{S}_{nm}^{ELL} \end{Bmatrix} &= \frac{1}{4\pi G M a} \sum_{i=1}^I \int \frac{F_i^2}{a} \left(\frac{n}{n-1} \right) \delta_{ni} \cdot \begin{Bmatrix} \int_{\alpha_{si}}^{\beta_{si}} \cos(ml) dl \\ \int_{\alpha_{si}}^{\beta_{si}} \sin(ml) dl \end{Bmatrix} P_{nm} \cos(\theta_i) \int_{\theta_{ni}}^{\theta_{ni}} \sin(\theta) d\theta d\sigma_i \end{aligned} \tag{5.6}$$

Коначни скуп прилагођених коефицијената је:

$$\begin{Bmatrix} \mathcal{C}_{nm}^{ELL} \\ \mathcal{S}_{nm}^{ELL} \end{Bmatrix}^T = \begin{Bmatrix} \mathcal{C}_{nm}^{ELL} \\ \mathcal{S}_{nm}^{ELL} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \delta \mathcal{C}_{nm}^{ELL} \\ \delta \mathcal{S}_{nm}^{ELL} \end{Bmatrix} \tag{5.7}$$

У даљим поглављима су дате релевантне теорије и поставке, која садрже одговарајуће математичке изразе, системе и неопходна теоријска објашњења за дубље разумијевање методологије.

5.1.2 Стоксова формула у спектралном домену

Разматрањем Стоксове формуле за израчунавање ундулације геоида N , која је дата изразом

$$N = \frac{R}{4\pi G} \iint_{\sigma} \Delta g S(\varphi) d\sigma, \quad (5.8)$$

гдје је σ јединична сфера, Δg је аномалија убрзања а $S(\varphi)$ је Стоксова функција, прецизније, формула се може представити у облику:

$$N(P) = \frac{R}{4\pi G} \iint_{\sigma} S(\varphi_{PQ}) \Delta g(Q) d\sigma_Q, \quad (5.9)$$

гдје је P тачка рачунања а Q је променљива тачка која се креће по цијелој јединичној сфери. Уводећи смјене

$$\frac{R}{4\pi G} S(\varphi) = a(P, Q), \quad (5.10)$$

и

$$\iint_{\sigma} \cong \int_{\sigma}, \quad (5.11)$$

што доводи до

$$N(P) = \int_{\sigma} a(P, Q) \Delta g(Q) d\sigma, \quad (5.12)$$

И аналогно је

$$y(i) = \sum_{j=1}^3 a(i, j) x(j), \quad (5.13)$$

гдје сума одговара интегралу, x мијења Δg , а матрица $a(i, j)$ одговара $a(P, Q)$. Ово представља типичан примјер конволуције на сфери, гдје конволуција је сада множење

$$a(P, Q) \cdot \Delta g(Q),$$

праћено интеграцијом

$$\int_{\sigma},$$

гдје је $a(P, Q)$ **језгро или кернел конволуције**. Језгро (кернел) је изотропно јер $S(\varphi)$ зависи само од растојања, а не од смјера.

Уколико једначину представимо у облику сферно хармонијских функција, уводећи основне функције $R_{nm}(\vartheta, \lambda), S_{nm}(\vartheta, \lambda)$ гдје су ϑ, λ независне промјенљиве, слиједи:

$$\begin{aligned} R_{nm}(\vartheta, \lambda) &= P_{nm}(\cos \vartheta) \cos m\lambda \quad n = 0, 1, \dots, \infty \\ S_{nm}(\vartheta, \lambda) &= P_{nm}(\cos \vartheta) \sin m\lambda \quad m = 0, 1, \dots, n \end{aligned} \quad (5.14)$$

Као што је назначено, n и m су цијели бројеви, што узрокује бесконачни цијели спектар. $P_{nm}(\cos \vartheta)$ представљају већ сада добро познате Лежандрове функције. Развој ундулације геоида N у одговарајући ред гласи:

$$N(\vartheta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left[N_{nm} R_{nm}(\vartheta, \lambda) + \bar{N}_{nm} S_{nm}(\vartheta, \lambda) \right] \quad (5.15)$$

а такође се често пише:

$$N(\vartheta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} N_n(\vartheta, \lambda) \quad (5.16)$$

гдје је

$$N_n(\vartheta, \lambda) = \sum_{m=0}^n \left[N_{nm} R_{nm}(\vartheta, \lambda) + \bar{N}_{nm} S_{nm}(\vartheta, \lambda) \right] \quad (5.17)$$

На исти начин поступа се и са Δg , стога се добија с једне стране:

$$\Delta g(\vartheta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left[G_{nm} R_{nm}(\vartheta, \lambda) + \bar{G}_{nm} S_{nm}(\vartheta, \lambda) \right] \quad (5.18)$$

односно:

$$\Delta g_n(\vartheta, \lambda) = \sum_{m=0}^n \left[G_{nm} R_{nm}(\vartheta, \lambda) + \bar{G}_{nm} S_{nm}(\vartheta, \lambda) \right] \quad (5.19)$$

Финално, формуле за развој N и Δg на сфери гласе:

$$\begin{aligned} N(\vartheta, \lambda) &= \sum_{n=0}^{\infty} N_n(\vartheta, \lambda), \\ \Delta g(\vartheta, \lambda) &= \sum_{n=0}^{\infty} \Delta g_n(\vartheta, \lambda). \end{aligned} \quad (5.20)$$

Стоксова формула је еквивалентна:

$$N_n(\vartheta, \lambda) = \frac{R}{G(n-1)} \Delta g_n(\vartheta, \lambda), \quad n \geq 2 \quad (5.21)$$

Ова једначина је дата сада у виду производа, међутим, с обзиром да N_n и даље зависи од ϑ, λ , ова једначина још увијек није у фреквентном домену. Користећи (5.17) и (5.19), слиједи

$$N_{nm} = \frac{R}{G(n-1)} G_{nm},$$

$$\bar{N}_{nm} = \frac{R}{G(n-1)} \bar{G}_{nm}, \text{ за } n \geq 2,$$
(5.22)

гдје је зависност од $\mathcal{A}, \lambda$ нестаје. Ово се може написати на општији начин, на примјер, за прву од двије једначине:

$$N(n, m) = H(n, m) \cdot G(n, m),$$
(5.23)

гдје је

$$H(n, m) = \frac{R}{G(n-1)}.$$
(5.24)

Ово је најједноставнији случај функције преноса или системске функције. Основна конволуција се замјењује чистим множењем у спектралном домену (Hofmann-Wellenhof & Moritz, 1986).

5.1.3 Фуријеов интеграл и Фуријеова трансформација

Примјењујући следећи принцип, постављањем Фуријеовог низа и ако $\lambda \rightarrow \infty$, формула за једнодимензионални Фуријеов ред са периодом λ гласи:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i \frac{2\pi}{\lambda} nx}$$

$$c_n = \frac{1}{\lambda} \int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} f(x) e^{-i \frac{2\pi}{\lambda} nx} dx.$$
(5.25)

Уколико би се у овом случају пустило да $\lambda \rightarrow \infty$, то не би дало резултат, али се може увести одговарајућа размјера у фреквентном домену (то јест, спектралном домену). Размјера се дефинише са:

$$2\pi n = \lambda u,$$
(5.26)

усвајањем да је:

$$\frac{2\pi}{\lambda} = \Delta u,$$
(5.27)

што имплицира да је $\Delta n = 1$, онда је утицај размјере на коефицијенте:

$$c_n = c(u) \cdot \Delta u \quad \text{тј.,} \quad c(u) = \frac{c_n}{\Delta u},$$
(5.28)

тада умјесто једначине (5.25) за једнодимензионални Фуријеов ред се добија:

$$f(x) = \sum_{u=-\infty}^{\infty} c(u) e^{iux} \Delta u \quad (5.29)$$

За коефицијенте, замјеном (5.28) у (5.25) добија се:

$$c(u) \cdot \Delta u = \frac{\Delta u}{2\pi} \int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} f(x) e^{-iux} dx \quad (5.30)$$

Имајући у виду да се Δu налази са обје стране једначине, његовим елиминисањем могуће је извршити прелаз до лимита. Ако је:

$$\lambda \rightarrow \infty \quad \text{и} \quad \sum \Delta u \rightarrow \int du \quad (5.31)$$

Добија се коначно:

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} c(u) e^{iux} du \\ c(u) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-iux} dx \end{aligned} \quad (5.32)$$

Спектар $c(u)$ је сада континуалан, формуле су потпуно симетричне, изузев поремећајног фактора $\frac{1}{2\pi}$. Просторни домен се простире од $-\infty < x < +\infty$ а спектрални домен од $-\infty < u < \infty$.

Уколико се запише другачији (конвенционалнији) облик:

$$F(u) = 2\pi c(u)$$

гдје је $F(u)$ Фуријеова трансформација и спектар $f(x)$, добијају се једначине трансформације:

$$\begin{aligned} F(u) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-iux} dx, \\ f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(u) e^{iux} du. \end{aligned} \quad (5.33)$$

У симболичком облику, једначине трансформације се могу записати као:

$$\begin{aligned} F(u) &= \mathcal{F}(f(x)), \\ f(x) &= \mathcal{F}^{-1}(F(u)). \end{aligned} \quad (5.34)$$

гдје $\mathcal{F}$ је Фуријеов (линеарни) оператор.

Како се фреквенција често означава са ω , слиједи:

$$u = \omega = 2\pi, \quad (5.35)$$

гдје важи да је:

$$F(u) = F(v), \quad (5.36)$$

одакле је:

$$\frac{1}{2\pi} du = dv. \quad (5.37)$$

Одговарајуће једначине трансформације су сада:

$$\begin{aligned} F(v) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-2\pi i v x} dx, \\ f(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} F(v) e^{2\pi i v x} dv, \end{aligned} \quad (5.38)$$

односно коришћењем кружне фреквенције $\omega = 2\pi dv$ добија се:

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx, \\ f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{i\omega x} d\omega. \end{aligned} \quad (5.39)$$

5.1.4 Конволуција

Конволуција је разлог зашто се користи Фуријеова трансформација. Разматрајући линеарну трансформацију вектора f, g у $\mathbb{R}^3$, добија се једначина:

$$g = \mathbf{H} f. \quad (5.40)$$

Матрица $\mathbf{H}$ описује линеарну трансформацију. Аналогно формули (5.13) израз се може записати у облику:

$$g_i = \sum_{j=1}^3 h_{ij} f_j. \quad (5.41)$$

или у облику гдје се индекси сматрају промјенљивима:

$$g(i) = \sum_{j=1}^3 h(i, j) \cdot f(j). \quad (5.42)$$

Ова једначина представља конволуцију у $\mathbb{R}^3$ у облику множења праћено сабирањем.

Конверзијом једначине у континуирани аналог, мијењањем индекса i у промјенљиву k и индекс j у променљиву ξ , као и суму интегралом, сходно томе континуирани аналог гласи:

$$g(x) = \int_a^b h(x, \xi) f(\xi) d\xi. \quad (5.43)$$

Посебно је важан случај:

$$h(x, \xi) = h(x - \xi), \quad (5.44)$$

што је функција само разлике $x - \xi$ (ово је случај хомогености).

Узимајући у обзир још једну генерализацију гдје $a, b \rightarrow \infty$, добија се:

$$g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x - \xi) f(\xi) d\xi, \quad (5.45)$$

што представља класичну формулу конволуције, која се може записати у једноставнијем облику:

$$g(x) = h(x) * f(x). \quad (5.46)$$

Фуријеова трансформација замјењује конволуцију једноставним множењем.

5.1.5 Функција коваријансе и спектар

Термин "спектар" ће се сада разматрати у смислу "спектра снаге", тј. као Фуријеова трансформација функције коваријансе. Нека s означава стохастички процес на сфери (или у равни или на правој линији), гдје стохастички грубо значи нерегуларно или случајно.

У физичкој геодезији кажемо да су аномалије убрзања стохастички процес као и аномалијски потенцијал. Аномалијски потенцијал T је посебно згодан примјер пошто Лапласова једначина важи у спољашњем простору сфере због хармоничности.

Функција коваријансе је дефинисана са:

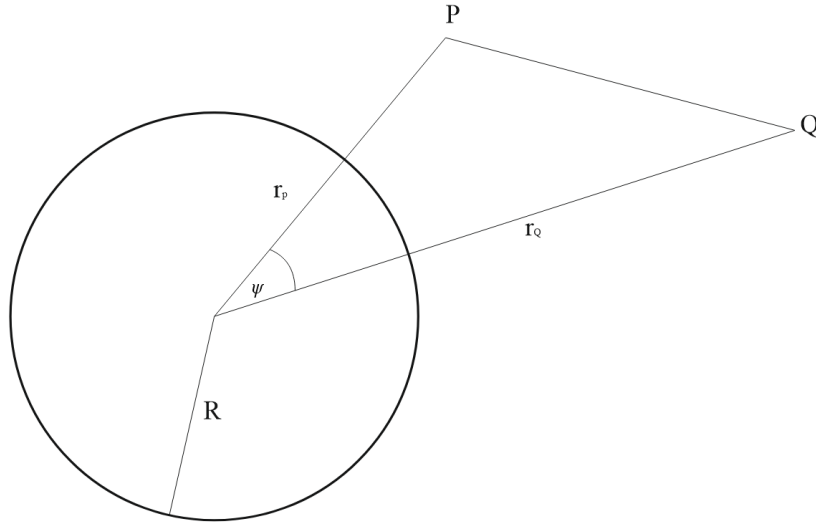
$$K(P, Q) = M(s(P)s(Q)), \quad (5.47)$$

ако:

$$M(s) = 0. \quad (5.48)$$

M може бити нпр. просјек по сфери тако да су P и Q тачке на сфери. Просјек се добија тако што се дозвољава да P и Q варира по цијелој сфери на такав начин да је њихова сферна удаљеност ψ константна (чиме се постиже и **изотропија**).

Узимајући у обзир тачке P и Q ван сфере, онда имамо ситуацију илустровану на Слици 5-1.



Слика 5-1: Дефиниција коваријансне функције ако су P и Q ван сфере (Hofmann-Wellenhof & Moritz, 1986)

гдје је:

$$K(P, Q) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R^2}{r_p r_q} \right)^{n+1} k_n P_n(\cos \psi) = K(r_p, r_q, \psi) \quad (5.49)$$

је одговарајући аналитички приказ функције коваријансе пошто хармоничност у спољашњем простору увијек имплицира зависност од $1/r^{n+1}$. Функција $K(P, Q)$ мора бити хармонична у P и Q.

За изотропну функцију, зависност од азимута мора бити одсутна, стога сферни хармоници:

$$\begin{aligned} R_{nm} &= P_{nm}(\cos \varphi) \cos m\alpha, \\ S_{nm} &= P_{nm}(\cos \varphi) \sin m\alpha, \end{aligned} \quad (5.50)$$

не могу зависити од азимута α . Ово је могуће само за $m=0$, што значи да ће се од свих P_{nm} појавити само P_n .

На сфери имамо:

$$r_p = r_q = R, \quad 0 \leq \psi \leq \pi, \quad (5.51)$$

одакле:

$$K(P, Q) = K(\psi) = \sum_{n=0}^{\infty} k_n P_n(\cos \psi) \quad (5.52)$$

Проширење у простору ван сфере се врло једноставно постиже множењем са фактором $\frac{R^2}{r_p r_q}$. Стога је довољно проучити ситуацију на сфери. Означавамо са $k_n = k(n)$ **спектар** функције коваријансе. Спектар се сада мора посматрати у смислу спектра моћи стохастичког процеса s , дефинисаног као Фуријеова трансформација функције коваријансе.

Нешто прецизније, спектар „стационарног“ стохастичког процеса је Фуријеова трансформација функције коваријансе. **У овом смислу, "стационарно" значи хомогено и изотропно.**

Треба свакако истаћи и разлику између конвенционалног спектра и спектра снаге. Спектар у претходном смислу се уопште не може формирати за временску серију. На сфери ако T има конвенционални спектар a_{nm}, b_{nm} (који се састоји од сферних хармонијских коефицијената T), онда:

$$k_n = \frac{1}{4n+2} \left\{ 2a_n^2 + \sum_{m=1}^n \frac{(n+m)!}{(n-m)!} (a_{nm}^2 + b_{nm}^2) \right\}, \quad (5.53)$$

је спектар снаге (Heiskanen & Moritz, 1967).

5.1.6 Опште једначине глобалног терестричког поља

Гравитациони потенцијал је представљен на следећи начин у функцији сферних хармоника:

$$V(r, \theta, \lambda) = \frac{KM}{r} \left[1 + \sum_{l=2}^{\infty} \left(\frac{a}{r} \right)^l \sum_{m=0}^l (C_{lm} \cos m\lambda + S_{lm} \sin m\lambda) P_{lm}(\cos \theta) \right], \quad (5.54)$$

гдје су r, θ, λ поларне координате тачке у којој се потенцијал треба одредити, a је параметар размјере повезан са коефицијентима потенцијала, C и S су потпуно ортонормирани коефицијенти, P_{lm} су потпуно ортонормиране придружене Лежандрове функције.

Компактнији облик за потенцијал се добија увођењем следећих замјена:

$$C_{lm}^{\alpha} = \begin{cases} C_{lm}, & \alpha = 0 \\ S_{lm}, & \alpha = 1 \end{cases}, \quad (5.55)$$

$$Y_{lm}^{\alpha}(\theta, \lambda) = \begin{cases} P_{lm}(\cos \theta) \cos m\lambda, & \alpha = 0 \\ P_{lm}(\cos \theta) \sin m\lambda, & \alpha = 1 \end{cases}, \quad (5.56)$$

гдје је

$$V(r, \theta, \lambda) = \frac{KM}{r} \left[1 + \sum_{l=2}^{\infty} \left(\frac{a}{r} \right)^l \sum_{m=0}^l \sum_{\alpha=0}^1 C_{lm}^{\alpha} Y_{lm}^{\alpha}(\theta, \lambda) \right]. \quad (5.57)$$

Аномалијски потенцијал у функцији сферних хармоника се може приказати помоћу следеће једначине

$$T(r, \theta, \lambda) = \frac{KM}{r} \sum_{l=2}^{\infty} \left(\frac{a}{r} \right)^l \sum_{m=0}^l \sum_{\alpha=0}^1 C_{lm}^{\alpha} Y_{lm}^{\alpha}(\theta, \lambda), \quad (5.58)$$

а у сферној апроксимацији, аномалија убрзања се може изразити на следећи начин (Heiskanen & Moritz, 1967)

$$\Delta g(r, \theta, \lambda) = -\frac{\partial T}{\partial r} - \frac{2}{r} T(r, \theta, \lambda). \quad (5.59)$$

Замјеном (5.58) у (5.59):

$$\Delta g(r, \theta, \lambda) = \frac{KM}{r^2} \sum_{l=2}^{\infty} (l-1) \left(\frac{a}{r} \right)^l \sum_{m=0}^l \sum_{\alpha=0}^1 C_{lm}^{\alpha} Y_{lm}^{\alpha}(\theta, \lambda). \quad (5.60)$$

Једначина (5.60) на сфери полупречника a добија облик:

$$\Delta g(a, \theta, \lambda) = \gamma \sum_{l=2}^{\infty} (l-1) \sum_{m=0}^l \sum_{\alpha=0}^1 C_{lm}^{\alpha} Y_{lm}^{\alpha}(\theta, \lambda), \quad (5.61)$$

гдје је:

$$\gamma = \frac{KM}{a^2}.$$

Што омогућава рачунање аномалија убрзања на сфери за задати полупречник a .

5.1.7 Примјена ортонормираних релација за одређивање коефицијената

Под претпоставком да су дате вриједности Δg на сфери и да треба пронаћи коефицијенте функције потенцијала, користећи ортонормиране релације (Heiskanen & Moritz, 1967) за рачунање коефицијената добија се следећа релација:

$$C_{lm}^{\alpha} = \frac{1}{4\pi\gamma(l-1)} \iint_{\sigma} \Delta g(a, \theta, \lambda) Y_{lm}^{\alpha}(\theta, \lambda) d\sigma \quad (5.62)$$

Ако су вриједности Δg дате као континуирана функција на сфери, могу се израчунати коефицијенти функције потенцијала. Треба истаћи да је (5.62) апроксимација јер је постављен сферни гранични услов и уведена је претпоставка за познато Δg на сфери полупречника a .

Стварна процјена (5.62) се врши замјеном интеграције збиром тачака аномалија на гриду или над скупом средњих аномалија. Средња аномалија се може израчунати из (5.61) на следећи начин (Colombo, 1981):

$$\overline{\Delta g} = \frac{\gamma}{\sigma_{ij}} \sum_{l=2}^{\infty} (l-1) \sum_{m=0}^l \sum_{\alpha=0}^1 C_{lm}^{\alpha} \iint_{\sigma_{ij}} Y_{lm}(\theta, \lambda) d\sigma \quad (5.63)$$

гдје је σ_{ij} површина блока за коју се рачуна средња аномалија:

$$\sigma_{ij} = \Delta\lambda(\cos\theta_i - \cos(\theta_i + \Delta)) \quad (5.64)$$

Ако се размотри евалуација (5.62) са вриједностима гравитације у тачакама датим на гриду дефинисаном са θ_i, λ_j , и нека интервал грида буде исти у θ и λ . Постављањем броја паралелних редова на N и број блокова географске дужине по реду на $2N$, формула добија следећи облик

$$C_{lm}^{\alpha} = \frac{1}{4\pi\gamma(l-1)} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{2N-1} Y_{lm}^{\alpha}(\theta_i, \lambda_j) \Delta g(\theta_i, \lambda_j) \sigma_{ij} \quad (5.65)$$

Највећи коефицијенти l степена који се могу одредити из (5.62) могу се одредити из Никвистове фреквенције аналогно у Фуријеовој анализи. Ако је Δ размак/интервал у гриду, слиједи:

$$l_{\max} = \frac{180^{\circ}}{\Delta} \quad (5.66)$$

Под претпоставком да су средње аномалије дате тако да постоје N вриједности у географској ширини и $2N$ вриједности у географској дужини, гдје се ове вриједности се сматрају једнакоугоним, тада се једначина (5.62) може апроксимирати са:

$$C_l^\alpha = \frac{1}{4\pi\gamma(\alpha-1)q_l} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{2N-1} \overline{\Delta g_{i,j}} \iint_{\sigma_{i,j}} Y_{lm}^\alpha(\theta, \lambda) d\sigma \quad (5.67)$$

Гдје је q_l количина уведена да би се смањила апроксимација у датој једначини. Ова апроксимација произилази из два извора:

- Грешка узорковања – Грешка узрокована коначном величином блока у којем је дата аномалија.
- Проблем заглађивања – Проблем произилази из процеса усредњавања који се користи за одређивање средњих аномалија.

Усредњавање инхерентно пригушује више фреквенције, чинећи опоравак таквих фреквенција тежим од нижих фреквенција.

За процјену q_l може се користити више различитих процедура. Један од поступака користи следећи однос (Meissl, 1971):

$$\frac{1}{\sigma_{ij}} \iint Y_{lm}^\alpha(\theta, \lambda) d\sigma = \beta_l(\psi_0) Y_{lm}^\alpha(\theta_i, \lambda_j) \quad (5.68)$$

гдје је θ_i, λ_j локација центра сферне капе полупречника ψ_0 . Подручје капе је σ_{ij} , а β_l је Пелиненов оператор заглађивања. β_l се може израчунати коришћењем следеће формуле:

$$\beta_l = \frac{1}{1 - \cos \psi_0} \frac{1}{\sqrt{2l+1}} [P_{l-1}(\cos \psi_0) - P_{l+1}(\cos \psi_0)] \quad (5.69)$$

или користећи рекурентну релацију (Sjöberg, 1980). Иако (5.68) важи само за кружну капу, она је такође добра апроксимација за правоугаони блок када су површине блока и капе једнаке (Katsambalos, 1979). Ако је θ блок страна екватора, одговарајуће вриједности ψ_0 се израчунавају из:

$$\sin\left(\frac{\psi_0}{2}\right) = \left(\frac{\theta \sin \theta}{4\pi}\right)^{1/2} \quad (5.70)$$

Наведени однос и једначина (5.68) је само апроксимација јер је површина једнакоугаоних блокова функција географске ширине.

Ако се ријеши (5.68) за $P_{lm}(\cos \theta)(\cos m\lambda, \sin m\lambda)$ и изврши замјена у (5.65) добија се (узимајући Δg за средњу аномалију (Δg) блока):

$$C_{lm}^\alpha = \frac{1}{4\pi\gamma\beta_l(l-1)} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{2N-1} \Delta \bar{g}(\theta_i, \lambda_j) \iint Y_{lm}^\alpha(\theta, \lambda) d\sigma \quad (5.71)$$

5.1.8 Коришћење Фуријеове анализе при одређивању коефицијената потенцијала

Преформулација једначине (5.71) врши се с циљем постизања знатно ефикаснијих прорачуна. Поступак је заснован на раду (Gleason, 1985). Интеграција појмова који су дио Y_{lm}^α започиње се следећим изразом:

$$\begin{aligned} \int_{\lambda_j}^{\lambda_j+\Delta\lambda} \cos(m\lambda) d\lambda &= A(m) \cos(mj\Delta\lambda) + B(m) \sin(mj\Delta\lambda) \\ \int_{\lambda_j}^{\lambda_j+\Delta\lambda} \sin(m\lambda) d\lambda &= -B(m) \cos(mj\Delta\lambda) + A(m) \sin(mj\Delta\lambda) \end{aligned} \quad (5.72)$$

гдје су

$$\begin{aligned} A(m) &= \begin{cases} \frac{\sin(m\Delta\lambda)}{m}, & \text{if } m \neq 0 \\ \Delta\lambda, & \text{if } m = 0 \end{cases} \\ B(m) &= \begin{cases} \frac{\cos(m\Delta\lambda) - 1}{m}, & \text{if } m \neq 0 \\ 0, & \text{if } m = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (5.73)$$

гдје је $j = 0, 1, 2, \dots, 2N-1$. Интеграл придружене Лежандрове функције дефинише се на следећи начин:

$$I_{l+1}(\theta) = \int_{\theta_j}^{\theta_j+1} P_{lm}(\cos \theta) \sin \theta d\theta \quad (5.74)$$

Једначина (5.67) сада се изражава као:

$$\begin{Bmatrix} C_{lm} \\ S_{lm} \end{Bmatrix} = \frac{1}{4\pi\gamma(l-1)q_l} \sum_{i=0}^{N-1} \left[I_{lm}^i(\theta) \begin{Bmatrix} \begin{Bmatrix} A(m) \\ -B(m) \end{Bmatrix} \sum_{j=0}^{2N-1} \Delta\bar{g}_{ij} \cos(mj\Delta\lambda) \\ + \begin{Bmatrix} B(m) \\ A(m) \end{Bmatrix} \sum_{j=0}^{2N-1} \Delta\bar{g}_{ij} \sin(mj\Delta\lambda) \end{Bmatrix} \right] \quad (5.75)$$

Суме по j у (5.75) пореде се са дискретном комплексном Фуријеовом трансформацијом секвенце $X(k)$, гдје је k таласни број. За P комплексне бројеве користи се следећи облик:

$$X(k) = \sum_{l=0}^{P-1} y(l) \left[\cos\left(\frac{2\pi kl}{P}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi kl}{P}\right) \right] \quad (5.76)$$

Конкретно, $y(l)$ се сматра реалним и једнаким Δg_{ij} . Даље, повезује се P са $2N$, k са m , l са j , и $2\pi/P$ са $\Delta\lambda$.

Комплексна секвенца Фуријеове трансформације $X_g^i(m)$ дефинише се за $2N$ средњих аномалија дуж i -те ширине према следећем изразу:

$$\text{REAL}(X_j(m)) = \sum_{j=0}^{2N-1} \Delta g_{ij} \cos(mj\Delta\lambda) \quad (5.77)$$

$$\text{IMAG}(X_j(m)) = \sum_{j=0}^{2N-1} \Delta g_{ij} \sin(mj\Delta\lambda) \quad (5.78)$$

Упоредивањем са (5.75) добија се:

$$\begin{Bmatrix} C_{lm} \\ S_{lm} \end{Bmatrix} = \frac{1}{4\pi\gamma(l-1)q_l} \sum_{i=0}^{N-1} I_{lm}^i(\theta) \left[\begin{Bmatrix} A(m) \\ -B(m) \end{Bmatrix} \text{REAL}(X_g^i(m)) + \begin{Bmatrix} B(m) \\ A(m) \end{Bmatrix} \text{IMAG}(X_g^i(m)) \right] \quad (5.79)$$

Критични корак у процјени једначине (5.79) јесте израчунавање дискретне Фуријеове трансформације улазног скупа средњих аномалија убрзања у појасу ширине. Ове аномалије третирају се као комплексни бројеви са имагинарним дјелом једнаким нули. Овај поступак омогућава изузетно ефикасно израчунавање сферних хармонијских проширења високог степена глобалног поља аномалија. Додатна ефикасност постиже се препознавањем (Rapp, 1986):

$$\begin{aligned} I_{lm}^i(\theta) &= I_{lm}^i(-\theta) \quad \text{if } l+m \text{ је парно,} \\ I_{lm}^i(\theta) &= -I_{lm}^i(-\theta) \quad \text{if } l+m \text{ је непарно.} \end{aligned}$$

Сходно томе, интегрисане Лежандрове функције потребно је израчунати само за сјеверну хемисферу.

Такође, Фуријеова трансформација има значајну улогу у израчунавању аномалија убрзања на глобалном гриду из скупа коефицијената потенцијала. Ова процедура омогућава брзо израчунавање глобалног скупа вриједности из експанзије високог степена (Colombo, 1981) (Gleason, 1985).

5.1.9 Употреба методе најмањих квадрата при одређивању коефицијената потенцијала

Претпоставља се да средње аномалије убрзања треба да буду представљене скраћеном сферном хармонијском експанзијом. У овом случају, однос између аномалија и коефицијената може бити представљен једначином (5.60) за вриједности у тачкама или једначином (5.63) за средње вриједности у сферној апроксимацији, замјењујући збир од 3 до ∞ сумањем до N_{max} . N_{max} се може поставити и према правилу (5.66).

Основни метод подразумијева да се једначине (5.60) или (5.63) посматрају као једначине мјерења са остатком који је везан за "мјерену" аномалију. Рјешење најмањих квадрата примјењује се ради одређивања коефицијената потенцијала. При томе се може узети у обзир процјена тачности појединачних аномалија за потребе пондерисања, или се тежине могу прогласити јединицом. Коефицијенти се могу оцијенити прилагођавањем само познатим средњим аномалијама, што је у супротности са односом ортогоналности гдје је неопходна глобална покривеност и гдје се процјена тачности података не узима у обзир. Коефицијенти вишег степена подложни су спектралном преклапању.

Ова процедура прилагођавања може имати одређене недостатке, јер се прилагођава коначан број коефицијената подацима који потенцијално садрже готово све фреквенције. У неким случајевима, то доводи до тога да информације о вишој фреквенцији апсорбују коефицијенти који се рјешавају.

5.1.10 Предикција методом најмањих квадрата

Претпоставимо два скупа случајних величина: скуп "мјерења" $l_1, l_2, \dots, l_q$ који формирају k - вектор

$$l = [l_1 \quad l_2 \quad \dots \quad l_q]^T \quad (5.80)$$

и скуп „ сигнала “ $s_1, s_2, \dots, s_m$ који формирају m - вектор

$$s = [s_1 \quad s_2 \quad \dots \quad s_m]^T \quad (5.81)$$

Претпоставља се да свако од ових величина има очекивану вриједност једнаку нули :

$$\begin{aligned} E\{l\} &= 0, \\ E\{s\} &= 0, \end{aligned} \quad (5.82)$$

гдје очекивање $E\{\cdot\}$ представља просјечну или средњу вриједност у смислу теорије вјероватноће. Величине које имају средњу вриједност нула, као што је (5.82), називају се центриране .

Такође разматрањем коваријационе матрице

$$\begin{aligned} C_{ll} &= \text{cov}(l, l), \\ C_{sl} &= \text{cov}(s, l), \\ C_{ss} &= \text{cov}(s, s). \end{aligned} \quad (5.83)$$

C_{ll} и C_{ss} су аутоковаријационе матрице вектора l и s , респективно, а C_{sl} је унакрсна коваријациона матрица између l и s . Елементи $q \times q$ матрице C_{ll} су просјечни производи

$$E\{l_i l_j\} \quad i, j = 1, 2, \dots, q; \quad (5.84)$$

а елементи $m \times q$ матрица C_{sl} су

$$E\{s_k l_i\} \quad k = 1, 2, \dots, m; \quad (5.85)$$

а елементи матрица C_{ss} димензија $m \times m$ су

$$E\{s_k s_h\} \quad k, h = 1, 2, \dots, m. \quad (5.86)$$

У векторском запису може се писати :

$$\begin{aligned}C_{ll} &= E\{ll^T\}, \\C_{sl} &= E\{sl^T\}, \\C_{ss} &= E\{ss^T\}.\end{aligned}\tag{5.87}$$

Претпоставља се да ове коваријационе матрице имају пун ранг. Матрица A димензија $m \times n$ има пун ранг ако је $\text{rang}(A) = m$ или n .

Вектор мјерења l се сматра познатим, вектор сигнала s је непознат. Неопходно је наћи најбољу оцјену за s на основу датог скупа мјерења.

Веза између s и l је дата, не функционалном везом, већ само преко коваријационих матрица (5.87).

Линеарна оцјена за вектор s има облик

$$\hat{s} = Hl, \tag{5.88}$$

гдје је H матрица димензија $m \times q$; гдје се свака компонента вектора s се апроксимира линеарном комбинацијом података l .

Вектор грешке ϵ је дат са

$$\epsilon = \hat{s} - s. \tag{5.89}$$

А његова коваријациона матрица

$$C_{\epsilon\epsilon} = \text{cov}(\epsilon, \epsilon) = E\{\epsilon\epsilon^T\} = E\{(\hat{s} - s)(\hat{s} - s)^T\} \tag{5.90}$$

се назива коваријациона матрица грешке. Дијагонални чланови ове матрица су варијансе грешака σ_k^2 оцијењених сигнала $\hat{s}_k$, који су компоненте вектора $\hat{s}$:

$$\sigma_k^2 = E\{\epsilon_k^2\} = E\{(\hat{s}_k - s_k)^2\} \tag{5.91}$$

Као најбољу линеарну оцјену вектора s по вектору l дефинишемо минималном линеарном непристрасном оцјеном варијансе.

Формирајући средњу вриједност израза (5.88) добијамо, имајући у виду (5.82)

$$E\{\hat{s}\} = HE\{l\} = 0 = E\{s\}. \tag{5.92}$$

Ово је природан услов за непристрасност у овом случају. Дакле, израз (5.88) се може сматрати непристрасним за било коју матрицу H .

5.1.11 Коваријациона функција

Како је показано у претходном поглављу, коваријациона функција аномалија убрзања је суштинска за предикцију убрзања методом најмањих квадрата.

Нека су $T(P)$ и $T(Q)$ аномалијски потенцијали T у двије тачке P и Q у простору. Коваријациона функција $K(P, Q)$ је тада дефинисана:

$$K(P, Q) = M\{T(P)T(Q)\} \quad (5.93)$$

гдје је $M\{\cdot\}$ одговарајући оператор усредњавања. Ова дефиниција је аналогна са формулама као што је (5.84), гдје средња вриједност $M\{\cdot\}$ замјењује математичко очекивање $E\{\cdot\}$ (Погледати поглавље 5.1.5).

Вриједност оператора M се дефинише као просјек по цијелој сфери и по свим азимутима (Heiskanen & Moritz, 1967). Када се обје тачке P и Q налазе на површини сфере полупречника $r=R$ који представља средњу терестричку сферу која одговара референтном елипсоиду као сферној апроксимацији. Пошто је оператор M **хомоген** (дефинисана вриједност је просјек по цијелој сфери) и **изотропан** (дефинисана вриједност је просјек по свим азимутима), функција $K(P, Q)$ ће тада бити функција само сферног растојања Ψ између P и Q :

$$K(P, Q) = K(\Psi) = M\{T(P)T(Q)\} = \frac{1}{8\pi^2} \int_{\lambda=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\alpha=0}^{2\pi} T(\theta, \lambda) T(\theta', \lambda') \sin \theta d\theta d\lambda d\alpha \quad (5.94)$$

Овдје су θ, λ сферне координате тачке $P(\theta, \lambda)$ и $Q(\theta', \lambda')$ које се налазе на сфери $r = R$, а λ означава азимут. Координате (θ', λ') се подразумевају као повезане са (θ, λ) по

$$\cos \Psi = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\lambda - \lambda') \quad (5.95)$$

са $\Psi = \text{const.}$, али да буде произвољна иначе.

Интеграција по (θ, λ) изражава хомогеност, а интеграција по азимуту означава изотропију.

У складу са (5.82) захтјева се

$$M(T) = 0 \quad (5.96)$$

Сада

$$\begin{aligned} M(T) &= \frac{1}{8\pi^2} \int_{\lambda=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\alpha=0}^{2\pi} T(\theta, \lambda) \sin \theta d\theta d\lambda d\alpha \\ &= \frac{1}{8\pi^2} \int_{\lambda=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} T(\theta, \lambda) \sin \theta d\theta d\lambda \int_0^{2\pi} d\alpha \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{\lambda=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} T(\theta, \lambda) \sin \theta d\theta d\lambda \end{aligned} \quad (5.97)$$

Овај интеграл је нула ако $T(\theta, \lambda)$ не садржи хармонике нултог степена, што се постиже дефинисањем масе референтног елипсоида да буде једнака маси Земље (Heiskanen & Moritz, 1967). Слично томе, члан хармоника првог степена $T_1(\theta, \lambda)$ може се дефинисати нулом одговарајућим избором координатног почетка (Heiskanen & Moritz, 1967).

Дакле, развој T у сферне хармонике има облик

$$T(\theta, \lambda) = \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left[\bar{a}_{nm} \bar{R}_{nm}(\theta, \lambda) + \bar{b}_{nm} \bar{S}_{nm}(\theta, \lambda) \right] \quad (5.98)$$

користећи потпуно нормализоване хармонике. Развој функције (5.94) у сферне хармонике може се записати као

$$K(\Psi) = \sum_{n=2}^{\infty} k_n P_n(\cos \Psi) \quad (5.99)$$

гдје су $P_n(\cos \Psi)$ (обични или "конвенционални") Лежандрови полиноми, док k_n се може изразити преко $\bar{a}_{nm}$ и $\bar{b}_{nm}$ као

$$k_n = \sum_{m=0}^n (\bar{a}_{nm}^2 + \bar{b}_{nm}^2) \quad (5.100)$$

5.1.12 Колокација са случајним грешкама

Ако су мјерења оптерећена случајним грешкама слиједи

$$l_i = t_i + n_i \quad (5.101)$$

гдје је l_i вектор мјерења а n_i вектор случајних грешака мјерења.

На овај начин l_i мјерења су разложена на "сигнал" t_i и "шум" n_i .

У симболичкој нотацији ове једначине се пишу :

$$\begin{aligned} l &= BT + n \\ BT &= t \\ l &= t + n \end{aligned} \quad (5.102)$$

Шум је права случајна (стохастичка) величина. Она има расподјелу вјероватноће са математичким очекивањем које се означава са E . За разлику од тога, статистичка обрада s има формалнији карактер. **Оператор M означава хомогени и изотропни просјек по сфери**, дефинисан са (5.93), а не математичко очекивање у пробабилистичком смислу : M описује просјечно глобално понашање аномалијског поља убрзања .

Како је познато да

$$M\{t\} = 0 \quad (5.103)$$

за све сигнале t , односно, све елементе гравитационог поља, под условом да се референтно поље изабере тако да аномалијски потенцијал T не садржи хармонике нултог степена слиједи:

$$M\{t\} = M\{BT\} = BM\{T\} = 0. \quad (5.104)$$

Исто важи и за сигнале који се оцјењују

$$M\{s\} = 0. \quad (5.105)$$

С друге стране, сигнали нису стохастичке величине у истом смислу као шум n ; поновљена мјерења исте величине дају различите n али s остаје исти. Дакле, математичко очекивање E не утиче на сигнале, одакле је

$$E(s) = s, \quad E(t) = t. \quad (5.106)$$

Међутим, за шум имамо

$$E\{n\} = 0, \quad (5.107)$$

јер случајне грешке мјерења имају математичко очекивање нула по дефиницији.

Оператор сферног просјека M над шумом још није дефинисан. Најједноставнија и најпогоднија дефиниција је да M оставља шум непромјењеним :

$$M\{n\} = n. \quad (5.108)$$

На основу свега се дефинише укупни просјек или *хомогено изотропно очекивање*:

$$\bar{E} = EM, \quad (5.109)$$

гдје се, узима просјек и по пробабилистичкој расподјели n и по сфери. Из дате дефиниције даље слиједи

$$\begin{aligned} \bar{E}\{s\} &= EM\{s\} = 0 \\ \bar{E}\{t\} &= 0 \\ \bar{E}\{n\} &= EM\{n\} = E\{n\} = 0 \\ \bar{E}\{l\} &= \bar{E}\{t\} + \bar{E}\{n\} = 0. \end{aligned} \quad (5.110)$$

одакле произилази да су све величине центриране.

5.1.13 Рекурентне релације Лежандрових полинома

Рекурентне релације у овом поглављу су дате на основу рада (Paul, 1978). У наставку су дате све формуле преузете из истог са њиховим објашњењима, како је аутор то у свом раду презентовао. Као што је познато, рекурентне релације Лежандрових полинома користимо јер пружају ефикасан начин да се полиноми рачунају без потребе за директним рјешавањем диференцијалне једначине.

Употреба сферних хармоника добија на значају у представљању и анализи посматраних података у областима физичке и сателитске геодезије. Поуздани резултати за хармонике

виших степена могу се добити из података прикупљених из различитих сателитских мисија. Сталним унапрјеђењима рачунарских могућности, анализа сферних хармоника је данас могућа до високог степена и реда.

Такве анализе захтијевају израчунавање интеграла облика C_{nm} и S_{nm} , гдје је $f(\theta, \lambda)$ нека посматрана величина (као што су гравитација, надморска висина, итд.) на јединичној сфери σ која представља модел Земље, а $P_{nm}(\cos \theta)$ је придружени Лежандров полином степена n и реда m .

$$\begin{aligned} C_{nm} &= \int_{\sigma} f(\theta, \lambda) P_{nm}(\cos \theta) \cos(m\lambda) d\sigma \\ S_{nm} &= \int_{\sigma} f(\theta, \lambda) P_{nm}(\cos \theta) \sin(m\lambda) d\sigma \end{aligned} \quad (5.111)$$

Када се површина јединичне сфере подијели на сегменте произвољне резолуције (нпр. $10^\circ \times 10^\circ$, $5^\circ \times 5^\circ$) и ако се претпостави да је функција $f(\theta, \lambda)$ константна унутар сваког таквог сегмента, једначина (2.1) се може представити у облику:

$$\begin{aligned} C_{nm} &= \sum_{k=1}^K f_k \int_{\sigma_k} P_{nm}(\cos \theta) \cos(m\lambda) d\sigma \\ S_{nm} &= \sum_{k=1}^K f_k \int_{\sigma_k} P_{nm}(\cos \theta) \sin(m\lambda) d\sigma \end{aligned} \quad (5.112)$$

за свако $m = 0, 1, \dots, n$, $n = 0, 1, \dots, N$, са

$$\sigma = \sum_{k=1}^K \sigma_k \quad (5.113)$$

гдје је f_k константна вриједност за $f(\theta, \lambda)$ на сегменту σ_k , док K представља укупан број сегмената.

Поново, када је површина сегмента σ_k релативно мала, а укупни број сегмената није превелик (рецимо, мањи од 30), варијација функције $P_{nm}(\cos \theta) \cdot [\sin(m\lambda)]$ или $\sin(m\lambda)$ на сегменту σ_k може се занемарити и замијенити константном вриједношћу $P_{nm}(\cos \theta_k) \cdot [\sin(m\lambda_k)]$ или $\sin(m\lambda_k)$, гдје је (θ_k, λ_k) нека одговарајућа тачка у блоку σ_k , најчешће његов центар. Тада се једначина (5.112) своди на једначину:

$$\begin{aligned} C_{nm} &= \sum_{k=1}^K f_k P_{nm}(\cos \theta_k) \cos(m\lambda_k) \sigma_k \\ S_{nm} &= \sum_{k=1}^K f_k P_{nm}(\cos \theta_k) \sin(m\lambda_k) \sigma_k, \\ m &= 0, 1, \dots, n \quad n = 0, 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (5.114)$$

За веће вриједности N , неопходно је развити тачније и прецизније методе за израчунавање интеграла у датој једначини:

$$\begin{aligned} C_{knm} &= \int_{\sigma_k} P_{nm}(\cos \theta) \cos(m\lambda) d\sigma, \\ S_{knm} &= \int_{\sigma_k} P_{nm}(\cos \theta) \sin(m\lambda) d\sigma, \\ k &= 1, 2, \dots, K, \quad m = 0, 1, \dots, n, \quad n = 0, 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (5.115)$$

Када је сегмента σ_k ограничен паралелама $(\theta = \theta_{1k}, \theta = \theta_{2k})$ и меридијанима $(\lambda = \lambda_{1k}, \lambda = \lambda_{2k})$, једначина (5.115) се може трансформисати у једначину:

$$\frac{C_{knm}}{S_{knm}} = -I_{knm} \cdot \frac{J_{knm}}{K_{knm}} \quad (5.116)$$

гдје је:

$$I_{knm} = - \int_{\theta_{1k}}^{\theta_{2k}} P_{nm}(\cos \theta) \sin \theta d\theta, \quad (5.117)$$

$$\frac{J_{km}}{K_{km}} = \int_{\lambda_{1k}}^{\lambda_{2k}} \frac{\cos(m\lambda)}{\sin(m\lambda)} d\lambda. \quad (5.118)$$

Пошто се једначина (5.118) може лако израчунати, једини проблем је израчунавање једначине (5.117) која, након изостављања индекса k и увођењем смјене $t = \cos \theta$, $t_1 = \cos \theta_1$ и $t_2 = \cos \theta_2$, добија облик

$$I_{nm}(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} P_{nm}(t) dt. \quad (5.119)$$

Стога, препознаје се потреба за израчунавањем једначине (5.117) при извођењу анализе сферног хармоника високог реда за било које посматране податке.

Увођењем рекурентних релација број чланова у овим релацијама остаје непромењен како се степен повећава на веће и веће вриједности. Питање грешке у нумеричкој интеграцији је такоређи у потпуности елиминисано.

Лежандрове полиноме и придружене Лежандрове функције које се најчешће користе су:

$$P_{nm}(t) = y^m \frac{d^m P_n(t)}{dt^m} . \quad (5.120)$$

$$P_{n-1,m}(t) - P_{n-3,m}(t) = (2n-3)yP_{n-2,m-1}(t) . \quad (5.121)$$

$$P_{n,m+1}(t) + (n-m+1)(n+m)P_{n,m-1}(t) = 2m \frac{t}{y} P_{nm}(t) . \quad (5.122)$$

$$(n-m)P_{n-1,m-1}(t) + (n+m-3)P_{n-3,m-1}(t) = (2n-3)tP_{n-2,m-1}(t) . \quad (5.123)$$

гдје је

$$y^2 = 1 - t^2 . \quad (5.124)$$

Најприје се дефинишу двије различите врсте $J_{nm}(t_1, t_2)$ и $I_{nm}(t_1, t_2)$ интеграла који укључују Лежандрове полиноме. Циљ је да се ови интегрални повежу један са другим користећи рекурентне релације.

$$\begin{aligned} (m+1)J_{nm}(t_1, t_2) &\equiv (m+1) \int_{t_1}^{t_2} \frac{t}{y} P_{nm}(t) dt = -(m+1) \int_{y=y_1}^{y_2} y^m \frac{d^m P_n(t)}{dt^m} dy \\ &= -yP_{nm}(t) \Big|_{t_1}^{t_2} + I_{n,m+1}(t_1, t_2) . \end{aligned} \quad (5.125)$$

Интеграљењем (5.122) по промјењивој t од t_1 до t_2 , може се записати

$$2mJ_{nm}(t_1, t_2) \approx I_{n,m+1}(t_1, t_2) + (n-m+1)(n+m)I_{n,m-1}(t_1, t_2) . \quad (5.126)$$

Елиминацијом $I_{n,m-1}(t_1, t_2)$ из једначина (5.125) и (5.126) добија се:

$$(m-1)J_{nm}(t_1, t_2) = (n-m+1)(n+m)I_{n,m-1}(t_1, t_2) + yP_{nm}(t) \Big|_{t_1}^{t_2} . \quad (5.127)$$

Сада, замјењом (5.120) и (5.121) у (5.123), може се написати:

$$(n-m)P_{n-1,m-1}(t) + (n+m-3)P_{n-3,m-1}(t) = \frac{t}{y} [P_{n-1,m}(t) - P_{n-3,m}(t)] . \quad (5.128)$$

Гдје се након сличне интеграције као изнад добија:

$$(n-m)I_{n-1,m-1}(t_1, t_2) + (n+m-3)I_{n-3,m-1}(t_1, t_2) = J_{n-1,m}(t_1, t_2) - J_{n-3,m}(t_1, t_2) . \quad (5.129)$$

Замјењом (5.127) у (5.129) добија се:

$$I_{n-1,m-1}(t_1, t_2) = \frac{(n-3)(n+m-3)}{n(n-m)} I_{n-3,m-1}(t_1, t_2) - \frac{(2n-3)}{n(n-m)} y^2 P_{n-2,m-1}(t) \Big|_{t_1}^{t_2} \quad (5.130)$$

Због сингуларности у $m=n$, горња релација се не може користити за израчунавање $I_{n-1, n-1}(t_1, t_2)$. Као таква, рекурзивна релација за $I_{n-1, n-1}(t_1, t_2)$ је изведена одвојено од релације.

$$P_{n-1, n-1}(t) = (2n-3)y P_{n-2, n-2}(t) \quad (5.131)$$

Интеграљењем сличним као изнад, добије се

$$I_{n-1, n-1}(t_1, t_2) = \frac{(n-1)(2n-3)(2n-5)}{n} I_{n-3, n-3}(t_1, t_2) + \frac{2n-3}{n} y^2 P_{n-2, n-3}(t) \Big|_{t_1}^{t_2} \quad (5.132)$$

Проширењем интеграла

$$I_{n-1, n-1}(t_1, t_2) = (2n-3)(2n-5) \dots 3 \int_{t_1}^{t_2} y^{n-1} dt = -(2n-3)(2n-5) \dots 3 \int_{y_1}^{y_2} y^n (1-y^2)^{-\frac{1}{2}} dy \quad (5.133)$$

са десне стране у степени ред по у и извршавајући интеграцију члан по члан, добија рекурзивна се:

$$I_{n-1, n-1}(t_1, t_2) = -(2n-3)(2n-5) \dots 3 y^{n+1} \left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{2} \frac{y^2}{n+3} + \frac{1.3}{2.4} \frac{y^4}{n+5} + \frac{1.3.5}{2.4.6} \frac{y^6}{n+7} + \dots \right] \Big|_{y_1}^{y_2} \quad (5.134)$$

који брзо конвергира у предложеном опсегу примјене.

Дакле, једначине (5.122), (5.130), (5.131), (5.132) и (5.134) заједно са следећим почетним вриједностима омогућиће нам да израчунамо вриједности $P_{nm}(t)$ и $I_{nm}(t_1, t_2)$ до било ког потребног степена и за све вриједности θ :

$$\begin{aligned} P_{00}(t) &= 1, P_{10}(t) = t, P_{11}(t) = y, \\ P_{20}(t) &= \frac{3t^2-1}{2}, P_{21}(t) = 3ty, P_{22}(t) = 3y^2, \\ I_{00}(t_1, t_2) &= t_2 - t_1, I_{10}(t_1, t_2) = \frac{t_2^2 - t_1^2}{2}, I_{11}(t_1, t_2) = \frac{t_2 y_2 - \theta_2 - t_1 y_1 + \theta_1}{2}, \\ I_{20}(t_1, t_2) &= \frac{t_1 y_1^2 - t_2 y_2^2}{2}, I_{21}(t_1, t_2) = y_1^3 - y_2^3, I_{22}(t_1, t_2) = 3t_2 - t_2^3 - 3t_1 + t_1^3 \end{aligned} \quad (5.135)$$

5.1.14 Ортонормирани Лежандрови полиноми

Ортонормирани Лежандрови полиноми и њихове везе са неортонормираним дати су релацијама:

$$\begin{aligned}\bar{P}_{n0}(t) &= H_{n0}P_{n0}(t), \quad \bar{I}_{n0}(t_1, t_2) = H_{n0}I_{n0}(t_1, t_2), \\ \bar{P}_{nm}(t) &= H_{nm}P_{nm}(t), \quad \bar{I}_{nm}(t_1, t_2) = H_{nm}I_{nm}(t_1, t_2), \quad m \neq 0\end{aligned}\tag{5.136}$$

гдје је

$$\begin{aligned}H_{n0} &= \sqrt{2n+1} \\ H_{nm} &= \sqrt{2(2n+1) \frac{(n-m)!}{(n+m)!}}, \quad m \neq 0\end{aligned}\tag{5.137}$$

Уколико напишемо потпуне изразе са претходно датим изразима добија се:

$$\begin{aligned}\bar{P}_{n-1, m-1}(t) &= \left[\frac{(2n-1)(2n-3)}{(n-m)(n+m-2)} \right]^{\frac{1}{2}} t \bar{P}_{n-2, m-1}(t) \\ &- \left[\frac{(2n-1)(n+m-3)(n-m-1)}{(2n-5)(n+m-2)(n-m)} \right]^{\frac{1}{2}} \bar{P}_{n-3, m-1}(t), \quad m \neq n,\end{aligned}\tag{5.138}$$

$$\bar{P}_{n-1, n-1}(t) = \sqrt{\frac{2n-1}{2n-2}} y \bar{P}_{n-2, n-2}(t),\tag{5.139}$$

$$\begin{aligned}\bar{I}_{n-1, m-1}(t_1, t_2) &= -\frac{1}{n} \left[\frac{(2n-1)(2n-3)}{(n-m)(n+m-2)} \right]^{\frac{1}{2}} y^2 \bar{P}_{n-2, m-1}(t) \Big|_{t_1}^{t_2} \\ &+ \frac{n-3}{n} \left[\frac{(2n-1)(n+m-3)(n-m-1)}{(2n-5)(n+m-2)(n-m)} \right]^{\frac{1}{2}} \bar{I}_{n-3, m-1}(t_1, t_2), \quad m \neq n\end{aligned}\tag{5.140}$$

$$\begin{aligned}\bar{I}_{n-1, n-1}(t_1, t_2) &= \frac{1}{2n} \left[\frac{2n-1}{(n-1)(n-2)} \right]^{\frac{1}{2}} y^2 \bar{P}_{n-2, n-3}(t) \Big|_{t_1}^{t_2} \\ &+ \frac{1}{2n} \left[\frac{(n-1)(2n-1)(2n-3)}{n-2} \right]^{\frac{1}{2}} \bar{I}_{n-3, n-3}(t_1, t_2),\end{aligned}\tag{5.141}$$

$$\begin{aligned}\bar{I}_{n-1, n-1}(t_1, t_2) &= - \left[\frac{(2n-1)(2n-3) \dots 3}{(2n-2)(2n-4) \dots 4} \right]^{\frac{1}{2}} y^{n+1} \\ &\cdot \left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{2} \frac{y^2}{n+3} + \frac{1.3}{2.4} \frac{y^4}{(n+5)} + \frac{1.3.5}{2.4.6} \frac{y^6}{(n+7)} + \dots \right] \Big|_{y_1}^{y_2}\end{aligned}\tag{5.142}$$

Одакле се добијају вриједности ортонормираних полинома:

$$\begin{aligned}
\bar{P}_{00}(t) &= 1, \quad \bar{P}_{10}(t) = \sqrt{3}t, \quad \bar{P}_{11}(t) = \sqrt{3}y, \\
\bar{P}_{20}(t) &= \frac{\sqrt{5}}{2}(3t^2 - 1), \quad \bar{P}_{21}(t) = \sqrt{15}ty, \quad \bar{P}_{22}(t) = \frac{\sqrt{15}}{2}y^2, \\
\bar{I}_{00}(t_1, t_2) &= t_2 - t_1 \bar{I}_{10}(t_1, t_2) = \frac{\sqrt{3}}{2}(t_2^2 - t_1^2), \quad \bar{I}_{11}(t_1, t_2) = \frac{\sqrt{3}}{2}(t_2 y_2 - \theta_2 - t_1 y_1 + \theta_1) \\
\bar{I}_{20}(t_1, t_2) &= \frac{\sqrt{5}}{2}(t_1 y_1^2 - t_2 y_2^2), \quad \bar{I}_{21}(t_1, t_2) = \sqrt{\frac{5}{3}}(y_1^3 - y_2^3), \\
\bar{I}_{22}(t_1, t_2) &= \sqrt{\frac{5}{12}}(3t_2 - t_2^3 - 3t_1 + t_1^3)
\end{aligned} \tag{5.143}$$

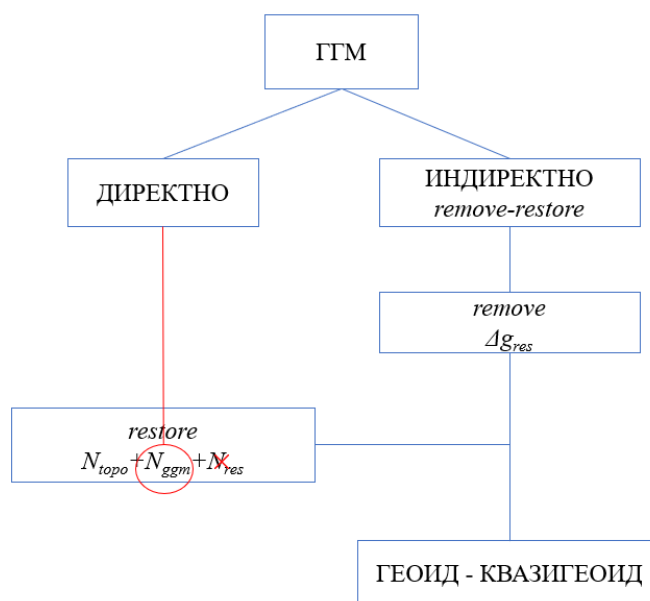
6. НУМЕРИЧКА ИСТРАЖИВАЊА

Нумеричка истраживања у склопу ове дисертације су изведена на основу изложених теоријских поставки, приказаних у првом (теоријском) дијелу дисертације, гдје је крајњи циљ био формирање прилагођеног глобалног геопотенцијалног модела за локално подручје, са синтетички моделираним коефицијентима сферно-хармонијског развоја.

Сви прикази и анализе које су дио овог рада имају за циљ да директно укажу на значај истраживања и развијених метода у области моделирања глобалних геопотенцијалних модела. Циљ овог рада је да кроз синтетичко моделирање коефицијената уз коришћење коефицијената доступних модела, њихово проширивање, као и прилагођавање и побољшање метода за специфичне примјене, пружи кроз два основна приступа значајна побољшања у смислу прецизности одређивања функционала аномалијског потенцијала за дато локално подручје.

Два основна приступа, чији је шематски приказ дат на Слици 6-1, који су били полазна тачка за ово истраживање су:

1. **Директни приступ** - Омогућава директну компарацију функционала аномалијског потенцијала, попут аномалија висина са терестричким вриједностима, што омогућује изузетно добра рјешења за практичне примјене у геодезији као и прелиминарна истраживања и резултате приликом процеса одређивања геоида на локалном подручју и
2. **Индиректни приступ** - чији се значај огледа у методи *remove-restore* (Barzaghi, 2016) методологије, гдје кључну улогу имају резидуалне аномалије убрзања чији је циљ добијање што мање стандардне девијације истих као и њихова централизованост и симетричност, како би се у даљем поступку омогућила примјена колокације за даље одређивање геоида високе резолуције.



Слика 6-1: Шематски приказ основних приступа истраживања

Прилагођавање и проширење модела кроз ово истраживање подразумијевало је финално прилагођавање спектра кроз интеграцију физичких и геометријских величина специфичних за подручје Републике Србије, на основу расположивих терестричких података. На овај начин, модел се није само прилагодио локалним условима већ и побољшао своју примјенљивост у практичним задацима.

Процес прилагођавања је укључивао употребу специфичних алгоритама за оптимизацију модела. Умјесто ослањања искључиво на математичке функције, приступ је подразумијевао интеграцију физичких карактеристика које обезбјеђују бољу примјену модела у локалним условима.

Главна предност огледа се у могућности да се ундулације геоида директно израчунавају за било које локално подручје, што је и дио директног приступа описаног у претходном тексту. Основна идеја лежи у коришћењу синтетичких коефицијената модела како би се обезбједио висок ниво квалитета апроксимације поља теже Земље.

Индиректан приступ као други аспект овог процеса је примјена глобалног геопотенцијалног модела у оквиру *remove-restore* методе, која се користи за одређивање геоида са тачношћу на центиметарском нивоу. Овај метод подразумијева уклањање глобалних компоненти гравитационог поља из улазних података, затим анализу резидуалних вриједности аномалија убрзања, и коначно њихово враћање ради добијања финалног рјешења.

Неизоставан дио процеса, а може се рећи и централно мјесто представља спектрална анализа као кључ за разумијевање расподјеле геопотенцијалних коефицијената и њиховог утицаја на квалитет апроксимације модела, као што на примјер локалне аномалије могу значајно утицати на различите фреквенције компоненти спектра. Анализа ових компоненти омогућава боље разумијевање односа између локалних и глобалних параметара и њихову корекцију.

- *Краткоталасна карактеристика* захтијева детаљну анализу и корекцију како би се уклонили ефекти локалних аномалија, гдје аналогно томе се односи на локалне утицаје на поље теже.
- *Средњеталасна карактеристика* представља компоненту која описује регионалне варијације поља теже, и најчешће су садржане у аномалијама убрзања.
- *Дуготаласна карактеристика* одражава глобалне карактеристике гравитационог поља.

У наставку рада приказани су сви кораци у циљу моделирања коефицијената сферно хармонијског развоја за потребе одређивања геоида у локалном подручју, чија теоријска позадина је дата у првом дијелу дисертације са релевантним формулама и изворима за даља разматрања. Методологија одређивања истих, је процес који је укључивао избор и анализу глобалног геопотенцијалног модела и његово прилагођавање локалном подручју. Сваки од ових корака представља неизоставан дио слагалице при креирању финалног модела.

6.1.1 Преглед доступних модела

На глобалном нивоу тренутно постоји јавно доступних 180 глобалних геопотенцијалних модела. Ови модели су резултат деценијског развоја и користе податке прикупљене са различитих сателитских мисија и геодетских мрежа.

Сви модели који су до сада развијени се могу преузети на веб страници ICGEM (*International Centre for Global Earth Models*), развијеној од стране ГФЗ Потсдам-а, која представља кључну платформу за приступ геопотенцијалним моделима Земље. Њен главни циљ је омогућавање приступа статичким и временски варијабилним моделима гравитационог поља Земље, као и алатима за њихову анализу и преузимање.

На почетној страници се налази преглед функционалности и услуга које овај портал нуди. Корисници могу пронаћи брзи приступ најновијим глобалним геопотенцијалним моделима, линкове ка алатима за преузимање и визуализацију, вијести о најновијим истраживањима и ажурирањима модела.

Статички модели (Static Models)

Подстраница **Статички модели** представља кључну платформу за приступ детаљним информацијама о статичким моделима геопотенцијалног поља Земље. Корисници могу приступити моделима и преузети детаљне информације као и сазнати више о практичној примјени ових података у различитим областима истраживања и развоја. Такође могу преузети моделе у различитим форматима, што омогућава њихову лаку интеграцију у радне токове и научне пројекте.

Подстраница такође садржи техничке детаље о доступним моделима, укључујући специфичности њихове израде и примјене, чиме корисницима обезбјеђује свеобухватан увид у могућности које нуде модели.

Временски модели (Temporal Models)

Подстраница **Временски модели** посвећена је моделима који приказују временске варијације геопотенцијалног поља Земље. Ови модели су од кључног значаја за праћење динамичких процеса унутар Земљиног система, као што су кретања масе у атмосфери, океанима и криосфери, као и промјена водених резерви на копну.

Временски модели омогућавају анализу дугорочних и краткорочних промјена у тежинском пољу, што их чини примјенљивим у областима као што су климатске студије, мониторинг нивоа мора и истраживање тектонских активности. Ови подаци су доступни у различитим форматима, што корисницима омогућава једноставну интеграцију у њихове пројекте. Поред тога, подстраница пружа техничке информације и ресурсе који доприносе бољем разумијевању временских промјена геопотенцијалног поља и њиховог значаја у истраживању глобалних геофизичких процеса.

Симулирани модели (Simulated Models)

Подстраница **Симулирани модели** садржи modele геопотенцијалног поља који се добијају симулацијом, а не директним мјерењима. Ови модели пружају вриједан алат за истраживање хипотетичких сценарија и за симулацију сложених динамичких процеса унутар Земљиног система, као што су кретања масе у атмосфери, океанима и слично.

Симулирани модели се широко користе у развоју и тестирању алгоритама, валидацији сателитских мисија, као и за предвиђање ефеката глобалних и локалних промјена у гравитационом пољу.

Топографски модели (Topographic Models)

На овој подстраници се могу наћи модели који описују топографске карактеристике Земље у односу на геопотенцијално поље. Ови модели обезбјеђују податке о релативним промјенама у терену, који се користе за прецизно моделирање и анализу гравитационог утицаја терена, што је од суштинског значаја у геодезији, геофизици и геотехничком инжењерингу.

Релативни топографски модели служе као основа за анализу аномалија убрзања, процјену масених токова и проучавање утицаја топографских варијација на локалном и глобалном нивоу.

Сервис за рачунање (Calculation Service)

Сервис за рачунање на ICGEM платформи представља напредан алат за израчунавање параметара геопотенцијалног поља Земље. Овај сервис обухвата три главне компоненте: **CalcGrid**, **CalcPoints** и **G3-Browser**, од којих свака пружа јединствене могућности за анализу геопотенцијалног поља у зависности од потреба корисника. Ове услуге омогућавају израчунавање различитих параметара, укључујући аномалије убрзања, ундулације геоида и друге функционале аномалијског потенцијала, на основу свих доступних глобалних модела гравитационог поља.

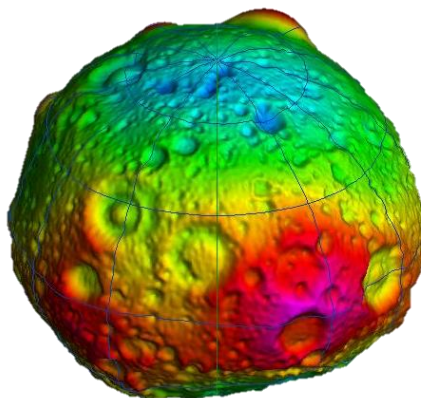
CalcGrid омогућава израчунавање параметара геопотенцијалног поља у правилној мрежи. Корисници могу дефинисати географски опсег, референтни ниво и резолуцију мреже како би генерисали податке прилагођене својим потребама. Ова услуга је идеална за анализу великих географских подручја и пружа податке у форматима као што су ASCII, NetCDF или GeoTIFF, који су погодни за даљу обраду у софтверским алатима. Иако је погодан за свеобухватне анализе, **CalcGrid** може захтијевати значајну рачунарску снагу за обраду података високих резолуција и често генерише сувишне податке ако су потребне само одређене тачке интереса.

CalcPoints је алат који омогућава израчунавање параметара геопотенцијалног поља за специфичне, кориснички дефинисане тачке. Корисници могу уносити координате ручно или постављати датотеке са листом тачака за које желе анализу. Ова услуга је посебно погодна за циљана истраживања. Пружа прецизне резултате у текстуалним и табеларним форматима, чиме се штеди вријеме и ресурси.

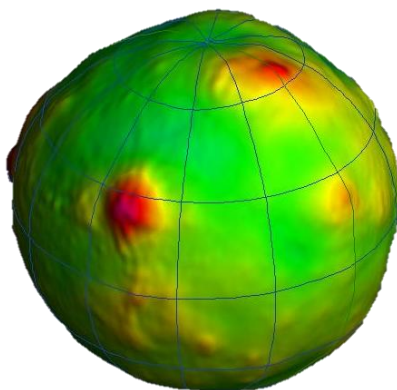
G3-Browser је интерактивна веб апликација која омогућава визуализацију и истраживање геопотенцијалног поља у реалном времену. Платформа је корисна за брзо истраживање модела и визуелизацију параметара као што су тежинске аномалије и висине геоида. Захваљујући свом интуитивном интерфејсу, ова услуга је погодна и за кориснике без напредних техничких вјештина. Међутим, будући да се налази у бета фази, G3-Browser има ограничене функционалности и захтијева стабилну интернет конекцију, што може бити ограничавајуће у неким случајевима.

Оно што је веома важно напоменути јесте да сервиси за рачунање омогућују за мања истраживања доста добре резултате и прорачуне, међутим, у склопу овог сервиса није доступно било прилагођавање модела или неки захтјевнији прорачун, па је с тога потребно за неке компликованије примјене да се развију самостални софтвери, што је био случај и при изради ове дисертације.

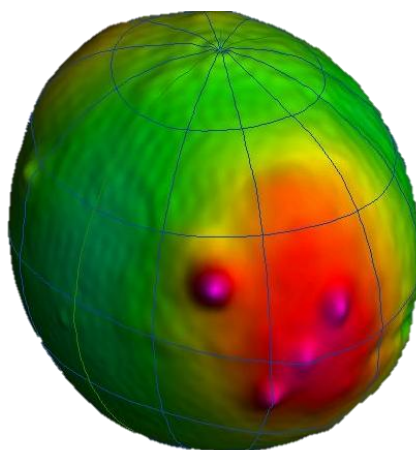
Поред модела за Земљу, посљедњих година развијају се гравитациони модели за друга небеска тијела, као што су Марс, Мјесец и Венера чија се визуелна репрезентација модела може видјети на сликама Слика 6-2, Слика 6-3 и Слика 6-4. Ови модели имају кључну улогу у разумијевању топографије и унутрашње структуре ових тијела, што доприноси развоју планетарних наука. Готово идентични поступци као код моделирања гравитационог поља Земље се примјењују при моделирању ових тијела.



Слика 6-2: Визуализација ГГМ-а Мјесеца



Слика 6-3: Визуализација ГГМ-а Венере



Слика 6-4: Визуализација ГТМ-а Марса

Секција, под називом **Documentation**, представља комплетну збирку информација која корисницима пружа подршку у коришћењу ICGEM платформе и алата. Она обухвата пет различитих категорија:

FAQ (Frequently Asked Questions) – Садржи најчешће постављана питања и одговоре који помажу корисницима да разријеше недоумице о функционисању платформе и њеним алатима. Ова секција је корисна за брзо рјешавање основних питања.

Theory – Пружа теоријску основу за разумијевање концепата који стоје иза геопотенцијалних модела, рачунарских метода и параметара. Ова секција је посебно вриједна за кориснике који желе дубље разумијевање научних принципа платформе.

References – Укључује научне изворе, публикације и линкове који су коришћени за развој модела и алгоритама. Корисно за истраживаче који желе да прошире своје знање или цитирају ICGEM у својим радовима.

Latest Changes – Ова категорија обавјештава кориснике о најновијим измјенама, ажурирањима или додацима на платформи, чиме се осигурава да увијек користе најновију верзију са свим релевантним информацијама.

Discussion Forum – Омогућава интерактивну комуникацију међу корисницима и са тимом платформе.

Свака од ових секција је дизајнирана да обезбиједи свеобухватну подршку корисницима, било да су нови или искусни у раду са геопотенцијалним моделима.

6.1.2 Одабир локалног подручја

Локално подручје од интереса за даља истраживања у овом раду су фокусирана на територију Републике Србије. Одабир Србије као региона за истраживање и прилагођавање глобалних геопотенцијалних модела оправдан је низом практичних разлога.

Србија се налази на Балканском полуострву, једном од геолошки најсложенијих региона у Европи, гдје се сусрећу различити геолошки комплекси, од Панонског басена на сјеверу до планинских и вулканских структура на југу и истоку. Ова разноврсност терена чини Србију идеалним подручјем за тестирање и прилагођавање глобалних геопотенцијалних модела, јер омогућава детаљну анализу локалних варијација у гравитационом пољу. Поред тога, Србија посједује релативно добру доступност терестричких података, што је и описано у поглављу које се односи на доступност и квалитет података, који покривају цијелу територију на репрезентативан начин, што омогућава детаљнију и вјеродостојнију анализу и тестирање модела.

Овај аспект је посебно значајан у контексту јавних података из других региона, који често нису репрезентативни за реалну евалуацију модела. У многим случајевима, подаци који су јавно доступни за друге локалитете представљају подскупове из оригиналних база података, одабране тако да дају најбоље могуће резултате. Овај селективни приступ може довести до пристрасности у оцјени прецизности модела и не одражава реалне услове у тим регионима. Насупрот томе, подаци доступни за Србију обезбјеђују правилну покривеност цјелокупне територије, чиме се избјегава ова врста пристрасности и омогућава објективнија евалуација и прилагођавање модела.

Због своје географске позиције и различитих геофизичких карактеристика, Србија може послужити као референтни примјер за шири Балкански регион, доприносећи развоју модела за сусједне земље и подстицању регионалне сарадње у области геодезије и геофизике. У Србији такође постоји ограничен број савремених истраживања која се баве локалном примјеном глобалних модела, а ова дисертација би попунила ту празнину, допринијела развоју науке и омогућила изградњу домаћих капацитета за геодетска и геофизичка истраживања.

6.2 РАСПОЛОЖИВИ ПОДАЦИ

6.2.1 Детаљни гравиметријски премјер

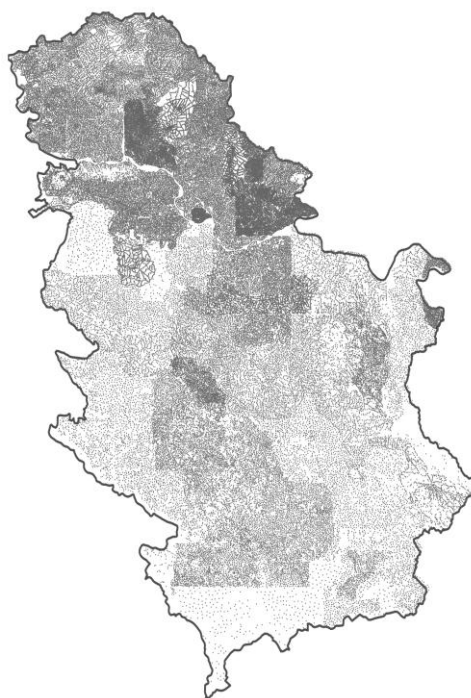
Историјат и развој мрежа

Гравиметријска мјерења на територији Србије започета су 1951. године у оквиру ширег програма гравиметријских истраживања који је реализован на простору тадашње Социјалистичке Федеративне Републике Југославије (СФРЈ). Иницијативу за спровођење ових мјерења покренули су Географски институт Југословенске народне армије и Главна геодетска управа Федеративне Народне Републике Југославије (ФНРЈ), чиме је постављен темељ за систематска гравиметријска истраживања у земљи.

У периоду од 1951. до 1953. године остварени су кључни кораци у успостављању прецизног гравиметријског система, при чему су дефинисани апсолутни нивои и размјера мјерења. Истовремено са овим калибрационим активностима, изграђена је гравиметријска мрежа 1. реда, која је представљала основу за све даље гравиметријске радове. У циљу постизања вишег степена детаљности, приступило се проширивању ове

мреже формирањем гравиметријске мреже 2. реда. Развој мреже 2. реда одвијао се парцијално и углавном је био усмјерен на испуњавање специфичних потреба различитих институција, без јасно утврђеног глобалног плана.

На Слици 6-5 дат је просторни приказ тачака детаљног гравиметријског премјера.



Слика 6-5: - Просторни распоред тачака детаљног гравиметријског премјера Републике Србије

Комплетирање основне гравиметријске мреже реализовано је у периоду од 1964. до 1967. године. Ова мрежа је обезбиједила хомогену и високо прецизну основу за научна истраживања и практичне примјене, чиме је значајно унапријеђена геодетска инфраструктура Србије. Истовремено са формирањем референтних гравиметријских мрежа, континуирано је спровођен и детаљни гравиметријски премјер, који је обухватао локална и регионална мјерења. Ови премјери одиграли су кључну улогу у рјешавању различитих геолошких и геодетских задатака, укључујући истраживање подземних структура и других аспеката земљине гравитационе појаве.

На тај начин је постављена свеобухватна гравиметријска база која је омогућила прецизно и поуздано моделирање гравитационог поља Србије и пружила подршку научно-истраживачким активностима у области геодезије, геофизике и сродних дисциплина.

Гравиметријска мјерења у Србији пратила су строго утврђене методолошке принципе у погледу одређивања координата и висина тачака детаљног премјера, као и дефинисања референтног нивоа убрзања земљине тежа.

Мјерења, квалитет и доступност података

Одређивање координата тачака детаљног премјера реализовано је примјеном различитих метода, у зависности од доступности и конфигурације геодетске основе на терену. Положај тачака је у првом реду дефинисан њиховим везивањем за постојећу геодетску основу. У случајевима гдје геодетска основа није била доступна, приступало се развијању бусолних и полигонских влакова, који су се ослањали на тригонометријске тачке. Ове тачке су обезбјеђивале прецизно позиционирање и оријентацију. Додатно, у појединим ситуацијама, идентификација тачака вршена је на картама ситнијих размјера, најчешће 1:25000, што је омогућавало довољну прецизност у складу са потребама детаљног премјера.

Висинске компоненте тачака детаљног премјера дефинисане су у односу на нулту нивоску површ, која пролази кроз референтни репер у Трсту (познат као референтна површ Нивелмана високе тачности 1 - НВТ1). Метода одређивања висина зависила је од топографских карактеристика терена. У равничарским предјелима примјењиван је геометријски нивелман, који је обезбјеђивао високу прецизност висинских разлика. С друге стране, у планинским теренима коришћен је тригонометријски нивелман, који је омогућавао ефикасно одређивање висина на већим дистанцама. Везивање висинских тачака реализовано је на репере свих редова, док су у појединим случајевима висине одређиване и на основу тригонометријских тачака.

Посебно је важно истаћи да је референтни ниво убрзања Земљине теже, који се примјењивао током свих наведених гравиметријских одређивања, дефинисан вриједношћу апсолутног убрзања на референтној тачки у Потсдаму. Овај ниво је служио као међународно призната стандардна референтна вриједност, чиме је обезбијеђена конзистентност резултата мјерења и њихова компатибилност са глобалним гравиметријским истраживањима.

У оквиру пројекта "*Capacity Building for Serbia, Phase II, Real Estate and Registration Project*", који је спровео Републички геодетски завод у сарадњи са шведским стручњацима из организације Swedesurvey-Lantmäteriet, одређене су прецизне вриједности убрзања Земљине теже на три референтне тачке на територији Србије.

Мјерења су реализована примјеном апсолутног гравиметра, гдје је постигнута тачност мјерења износила је 4 μGal (Odalović, et al., 2012).

Паралелно са реализацијом апсолутних гравиметријских мјерења, у периоду од 2004. до 2009. године, успјешно је спроведена израда Основне гравиметријске мреже Србије. Мрежа је развијана у форми затворених полигона и обухватала је укупно 75 тачака, 137 страна и 60 полигона. Посебно је значајно да је при изравнању разлика убрзања Земљине теже, мрежа ослоњена на вриједности које су претходно одређене апсолутним гравиметрима, чиме је обезбијеђена висока тачност и конзистентност резултата. Просјечна вриједност убрзања, након изравнања, износила је 33.13 μGal , што потврђује прецизност и хомогеност мреже.

Након завршетка Основне гравиметријске мреже 2007. године, приступило се реализацији новог регионалног гравиметријског премјера Србије. Пројектом је предвиђено да се територија Србије покрије са 2655 тачака, постављених на просјечном међусобном растојању од 5 km. Овај премјер представљао је важан корак у детаљном

истраживању гравитационог поља и омогућио је значајно унапређење постојећих гравиметријских података.

Подаци прикупљени током детаљног гравиметријског премјера архивирани су у текстуалним датотекама које садрже информације о око 90000 тачака. За сваку тачку у бази података доступни су подаци о њеним координатама, висинама и вриједностима убрзања земљине теже.

6.2.2 GPS/dh дискретне вриједности мјерених аномалија висина

Поред података детаљног гравиметријског премјера, на располагању су били и подаци добијени GPS/dh методом у 1001 тачки нивелмана високе тачности Републике Србије. Ови подаци су служили као екстерни скуп података за евалуацију модела добијеног у поступку описане методологије. За сваку тачку у бази података доступни су подаци о називу тачке, њеним координатама, елипсоидној висини и вриједности аномалија висина. Просторни распоред овог скупа података дат је на Слици 6-6.



Слика 6-6: Просторни распоред тачака са одређеним аномалијама висина примјеном GPS/dh методе

Подаци се везују за нивелман високе тачности, гдје је важно напоменути и кратак историјат ове мреже. Први радови на стварању нивелманске мреже на подручју бивше СФРЈ започели су у периоду од 1873. до 1909. године од стране Војногеографског института из Беча (MGIV), а покривали су територије Словеније, Хрватске, Војводине, Западне Босне и Далмације. Вертикални датум базиран је на нултој нивоској површи

мареографа у Трсту. Након 1905. године, развијена је нивелманска мрежа за Србију, Македонију и источну Босну, на чему су радили Топографско одјељење српске војске и Војногеографски институт из Београда (MGIB). У периоду између два свјетска рата мреже MGIV и MGIB су обједињене, чиме је настала мрежа Нивелмана високе тачности 1 (НВТ1), покривајући територију Краљевине Југославије. Радови су настављени после Другог свјетског рата, али је уочено велико оштећење репера, па је 1967. године пројектована нова мрежа Нивелмана високе тачности 2 (НВТ2), са циљем успостављања савремене референтне мреже и повезивања са Европском нивелманском мрежом. Иако је НВТ2 мрежа урађена по свим стандардима задовољавајући све параметре квалитета, никада није званично уведена у употребу. Тренутно се у Србији користи мрежа НВТ1.

Просторни распоред тачака на територији Србије даје уочљиве обрасце као и ограничења у поменутом скупу података. Тачке су углавном распоређене дуж главних путних праваца, што указује на практичност приступа током њиховог прикупљања, међутим овакав распоред оставља значајне празнине у простору између линија тачака, посебно у руралним и планинским подручјима. Сјевероисточни и дјелови јужне Србије показују мању густину тачака, што указује на могући недостатак података у тим областима и потенцијалне проблеме са тачношћу евалуације гравитационог поља. Расподјела тачака није равномјерна, већ је јасно да је логистика прикупљања података играла значајну улогу у избору тачака, што је резултирало непотпуном покривеношћу цјелокупне територије. Подаци су боље заступљени у централним и густо насељеним дјеловима Србије, што може указивати на тадашње приоритете истраживања.

С обзиром на то да су подаци прикупљени прије више од 50 година, њихов квалитет и релевантност могу бити ограничени због неколико кључних фактора. Промјене у геолошким структурама током времена, као што су тектонски покрети, ерозија, седиментација и други природни процеси, као и друга геодинамичка дешавања која могу довести до помјерања терена или промјене релативних висинских разлика, што потенцијално чини оригиналне податке мање тачним за савремена истраживања. Иако су подаци вриједни за историјску анализу, њихова употреба за савремено моделирање гравитационог поља захтијевала би додатну провјеру и евентуално ажурирање новијим мјерењима. Као што је већ поменуто, промјене у Земљиној кори, као и природни процеси попут ерозије и земљотреса, могли су утицати на вриједности измјерених параметара.

Иако 1001 тачка представља значајан узорак, прије коришћења ових података за било које савремено моделирање, неопходно је извршити провјеру тачности и релевантности у поређењу са савременим мјерењима. Такође, потребно је спровести нова мјерења у слабо покривеним областима како би се обезбиједила равномјерна покривеност.

Као добра страна ових података може се истаћи њихова историјска вриједност, јер представљају значајну основу за поређење и омогућавају анализу дугорочних геодинамичких промјена и еволуције терена на територији Србије. База података обухвата 1001 тачку, што представља обиман узорак, чак и ако су неке области мање покривене. Подаци су прикупљени у складу са стандардима и методологијама свог времена, што их чини систематичним и конзистентним за анализе. Додатно, могу се интегрисати са савременим мјерењима како би послужили као референтни скуп за побољшање тачности и калибрацију актуелних модела. Иако су подложни ограничењима због старости и густине распореда, њихова обимна и систематска

природа чине их вриједним ресурсом за одређене типове истраживања, јер се може говорити о тачности података ± 10 cm.

6.2.3 Дигитални модел SRTM

SRTM (*Shuttle Radar Topography Mission, SRTM*) је пројекат спроведен у фебруару 2000. године од стране НАСА, Националне геопросторне обавештајне агенције (NGA), као и њемачке и италијанске свемирске агенције. Главни циљ ове мисије био је генерисање најкомплетније и најпрецизније дигиталне топографске базе података Земље до тада. Овај модел обухвата око 80% копнене површине Земље (између 60° сјеверне и 56° јужне географске ширине) са просторном резолуцијом од 30 метара (Farr, et al., 2007).

Дигитални модел терена и Дигитални модел површине, са 30 метара просторне резолуције (1 лучна секунда) за податке доступне изван САД и 90 метара (3 лучне секунде) за глобалне податке у оригиналној верзији, са ± 16 метара (стандардна девијација) вертикалне тачности јавно су доступни за преузимање преко платформи као што су:

- NASA Earthdata: <https://earthdata.nasa.gov>
- USGS EarthExplorer: <https://earthexplorer.usgs.gov>

SRTM је користио двије радарске антене (једна на шатлу и друга на 60-метарском продужном јарболу) за снимање површине Земље из два угла. Техника интерферометрије обрађује разлике између ових снимака како би генерисала висинске податке.

Документација и упутства за коришћење података из SRTM модела су дата у следећој литератури:

- "SRTM Data Products Specifications" (NASA JPL, 2005) – Детаљан водич о формату и употреби SRTM података.
- "SRTM User Guide" – Упутство за коришћење, доступно на вебсајтовима NASA и USGS.

Овај модел терена представља кључни ресурс за истраживаче, инжењере и доносиоце одлука у широком спектру области.

6.3 ПРИПРЕМА И ОБРАДА ПОДАТАКА

Иницијални скуп података са којим је започето истраживање односи се на детаљни гравиметријски премјер Републике Србије, за који су срачунате аномалије слободног ваздуха Δg_{ASV} на основу мјерених терестричких вриједности. У склопу овог скупа података, кога сачињава 85372 тачке са датим вриједностима измјереног убрзања у систему IGSN71 и датим координатама за референтни елипсоид GRS80.

Упоредном анализом разлика висина из овог скупа података и висина добијених из дигиталног модела терена Републике Србије, из оригиналног скупа података је одстрањен дио мјерења, гдје је за граничну вриједност узета разлика од ± 15 метара.

Разлог за уклањање дијела мјерења из оригиналног скупа података на основу граничне вриједности разлике од ± 15 метара између висина добијених из терестричких мјерења и дигиталног модела терена јесте обезбјеђивање тачности и квалитета података који се користе у истраживању. Разлике веће од ± 15 метара могу указивати на грешке у терестричким мјерењима или недоследности у дигиталном моделу терена, које могу бити последица техничких грешака, погрешно забиљежених координата или неслагања између референтних система. Смањивањем разлика на прихватљив опсег осигурава се конзистентност са стандардним референтним моделима, што је кључно за прецизно моделирање. Избацивањем података са великим разликама смањује се утицај погрешних вриједности на резултате анализа и статистичке процјене. На овај начин избјегава се увођење систематских грешака у моделирање, чиме се значајно повећава поузданост и тачност коначних резултата истраживања. Овај корак представља неопходан дио процеса филтрирања и контроле квалитета података у истраживању које се ослања на велики број терестричких и дигиталних мјерења. Овим поступком одстрањено је из скупа података 3168 тачака, што чини приближно 3.7% података од иницијалног скупа. Овај скуп података у даљем тексту ће се означавати као *радни скуп података*, чији статистички параметри аномалија убрзања, срачунати на основу датих података, дати у Табели 6.1.

Табела 6.1: Статистички параметри аномалија убрзања срачунатих из радног скупа података

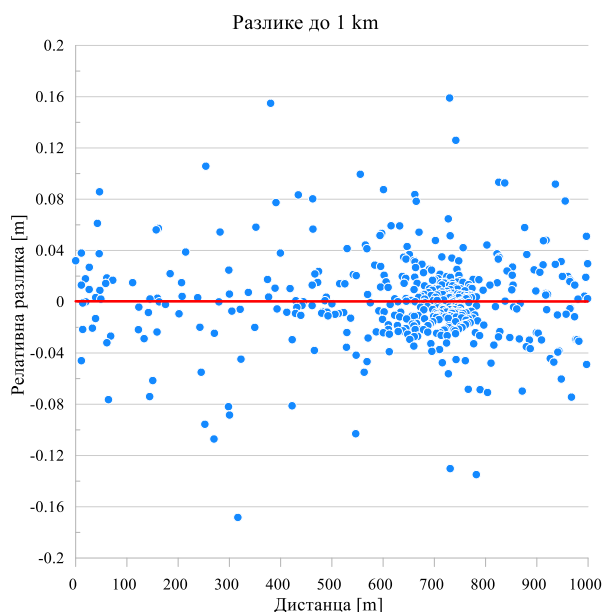
Параметар	X_{min}	X_{max}	$X_{max} - X_{min}$	$\bar{X}$	σ
$\Delta g [mGal]$	-42.74	209.14	251.88	22.95	22.52

Поред наведеног скупа података, такође је извршена и анализа скупа података који се односи на 1001 тачку аномалија висина одређених GPS/dh методом, у циљу испитивања квалитета података који ће у наставку текста бити означен као *контролни скуп података*.

Анализа контролног скупа података служи као кључни корак у верификацији квалитета и тачности основног скупа података коришћених у истраживању. Геоид, као фина и глатка еквипотенцијална површ без екстремних локалних варијација, подразумева да су разлике аномалија висина између блиских тачака (до 1 km) минималне. Проширење очекиваних вриједности релативних разлика на 8–10 cm узима у обзир реалне услове, укључујући варијације топографских маса и временске промјене. Испитивање разлика у аномалијама висина у зависности од растојања омогућава идентификацију потенцијалних недоследности у подацима. Графички прикази разлика у односу на растојање визуелно представљају трендове и одступања, чиме олакшавају интерпретацију података. Ако се разлике налазе унутар очекиваних граница, то потврђује поузданост мјерења и квалитет контролног скупа. Овај скуп података је кључан за независну провјеру глобалних геопотенцијалних модела, чиме се потврђује

њихова примјена у реалним условима. Значајне разлике изван очекиваног интервала могу указивати на грешке у мјерењима или на потребу за додатним корекцијама.

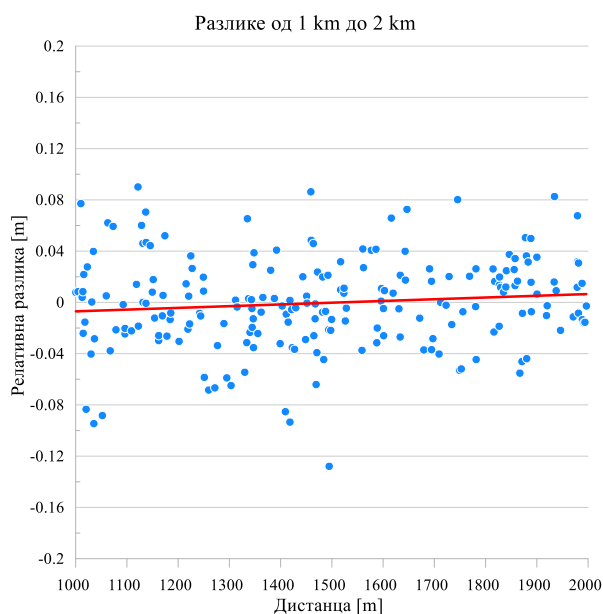
У наставку су дати графици са приказом релативних разлика аномалија висина у зависности од њиховог растојања до прве најближе тачке, за интервале до 1 километра, од 1 до 2 километра и од 2 до 3 километра (Слика 6-7, Слика 6-8, Слика 6-9).



Слика 6-7: График релативних разлика на растојању до 1 km

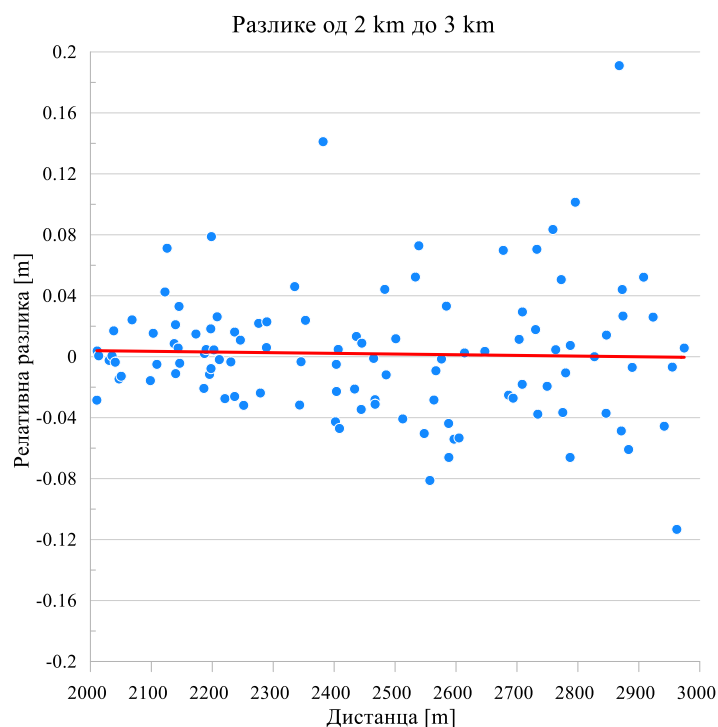
График који је приказан за интервал од 0 до 1 километар указује на релативне разлике аномалија висина у односу на њихову удаљеност од најближе тачке. Подаци су углавном концентрисани у опсегу од ± 5 cm, што указује на досљедност и конзистентност у подацима. Неколико одступања достиже границе од ± 10 cm, док је такође евидентно да постоји и пар релативних разлика које прелазе дозвољени лимит, гдје се може сумњати да дате тачке могу бити оптерећене грешкама.

Црвена тренд линија, која представља просјечну вриједност релативних разлика, остаје готово равна, што сугерише да нема значајне тенденције или систематске грешке у мјерењима у овом интервалу. Ова стабилност указује на то да мјерења унутар 1 километра показују конзистентност.



Слика 6-8: График релативних разлика на растојању од 1 km до 2 km

График за интервал од 1 до 2 километра приказује релативне разлике аномалија висина у односу на растојање до најближе тачке. Већина података се налази у опсегу од ± 5 cm, што указује на задовољавајућу прецизност скупа података, иако је распон разлика нешто већи у поређењу са интервалом од 0 до 1 километар, што је и очекивано. Црвена тренд линија показује благу тенденцију повећања разлика са растојањем, међутим, највећи дио података остаје близу тренд линије.



Слика 6-9: График релативних разлика на растојању од 2 km до 3 km

У интервалу од 2 до 3 километра разлике показују већу дисперзију у поређењу са претходним интервалима, али већина података остаје унутар прихватљивих граница. Црвена тренд линија показује стабилност без значајних систематских одступања, што указује на то да разлике у овом интервалу задржавају задовољавајућу тачност. Ипак, присуство неколико изолованих одступања изван граница од ± 10 cm указује на потребу за додатном провјером тих специфичних тачака. Такође може се закључити да релативне разлике нису зависне од растојања између тачака, што би требало да буде по природи ствари.

У свим интервалима, подаци сугеришу да релативне разлике нису значајно зависне од растојања између тачака, што је у складу са природом геоида као глатке еквипотенцијалне површи. Ова анализа потврђује да су мјерења генерално прецизна, али такође указује на потребу за провјером изолованих тачака које показују већа одступања.

6.4 МОДЕЛИРАЊЕ СИНТЕТИЧКИХ КОЕФИЦИЈЕНАТА

6.4.1 Полазна основа методологије моделирања синтетичких коефицијената

Као што је раније напоменуто, моделирање синтетичких коефицијената заснива се на теоријским основама развоја сферно-хармонијских функција, које омогућавају описивање комплексних поља потенцијала кроз математички развој у функцијама са сферном симетријом. Полазећи од особина сферно-хармонијских функција, узимајући принцип адитивности у контексту рјешавања диференцијалних једначина у системима са сферном симетријом, може се показати да рјешење диференцијалне једначине представљено као сума сферно-хармонијских функција, представља укупно рјешење сума појединачних доприноса сваке компоненте.

Ако имамо двије функције:

$$f_1(\theta, \phi) = \sum_{l,m} s_{l,m}^2 Y_l^m(\theta, \phi), \quad f_2(\theta, \phi) = \sum_{l,m} c_{l,m}^2 Y_l^m(\theta, \phi), \quad (6.1)$$

њихова сума се такође може представити у виду сферно-хармонијске функције:

$$f_1(\theta, \phi) + f_2(\theta, \phi) = \sum_{l,m} (s_{l,m}^2 + c_{l,m}^2) Y_l^m(\theta, \phi). \quad (6.2)$$

Сферно-хармонијске функције су линеарно адитивне, што значи да се свака функција дефинисана на сфери може представити као линеарна комбинација сферно-хармонијских функција

$$f(\theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l c_l^m Y_l^m(\theta, \phi) \quad (6.3)$$

Методологија примјењена у раду при моделирању синтетичких коефицијената сферно-хармонијског развоја глобалних геопотенцијалних модела заснована је на систематском и постепеном приступу који укључује следеће кораке:

1. Одабир постојећег модела као полазне тачке за даље прилагођавање.
2. Дефинисање оптималног степена модела примјеном нумеричких метода, са циљем одређивања границе изнад које је потребно вршити прилагођавање спектра.
3. Израчунавање резидуала у односу на терестричка мјерења и креирање прилагођеног модела.
4. Ремоделирање резидуала на основу терестричких података ради побољшања усклађености са локалним специфичностима.
5. Комбиновање прилагођеног модела и резидуалног модела у синтетички проширени модел, уз поновно моделирање преосталих резидуала.
6. Формирање коначног модела, који је збир свих компоненти: прилагођеног модела, резидуалног модела и резидуалног синтетичког модела.

Овај поступак осигурава постепено побољшање прецизности модела кроз адаптацију и интеграцију његових компоненти. Моделирање синтетичких коефицијената омогућава детаљно описивање дистрибуције енергије гравитационог поља, што је кључно за квалитетно моделирање геопотенцијала.

Степене варијансе представљају основни алат за анализу доприноса сваке компоненте укупној прецизности модела. Ови параметри омогућавају детаљан увид у просторну дистрибуцију аномалијског потенцијала. Иако модели са већим степенима пружају детаљнији спектрални приказ, важно је разумјети да повећање степена не гарантује боље резултате. Прецизност модела зависи од квалитета улазних података, адекватности методе и усклађености са локалним гравитационим карактеристикама. На примјер, у подручјима са густим терестричким мјерењима, модели вишег степена могу пружити детаљнији приказ, док у подручјима са ограниченим подацима могу створити лажну слику и дати детаље који нису физички утемељени.

Такође, модели са бољим спектралним приказом могу изгледати прецизнији, али њихова предност је често ограничена на одређени степен и варијансу. Након одређеног прага, повећање степена не само да не побољшава резултате, већ може довести до нумеричких нестабилности и повећане комплексности модела. Због тога је кључно постићи баланс између степена модела, његовог спектралног приказа и специфичних захтјева истраживања.

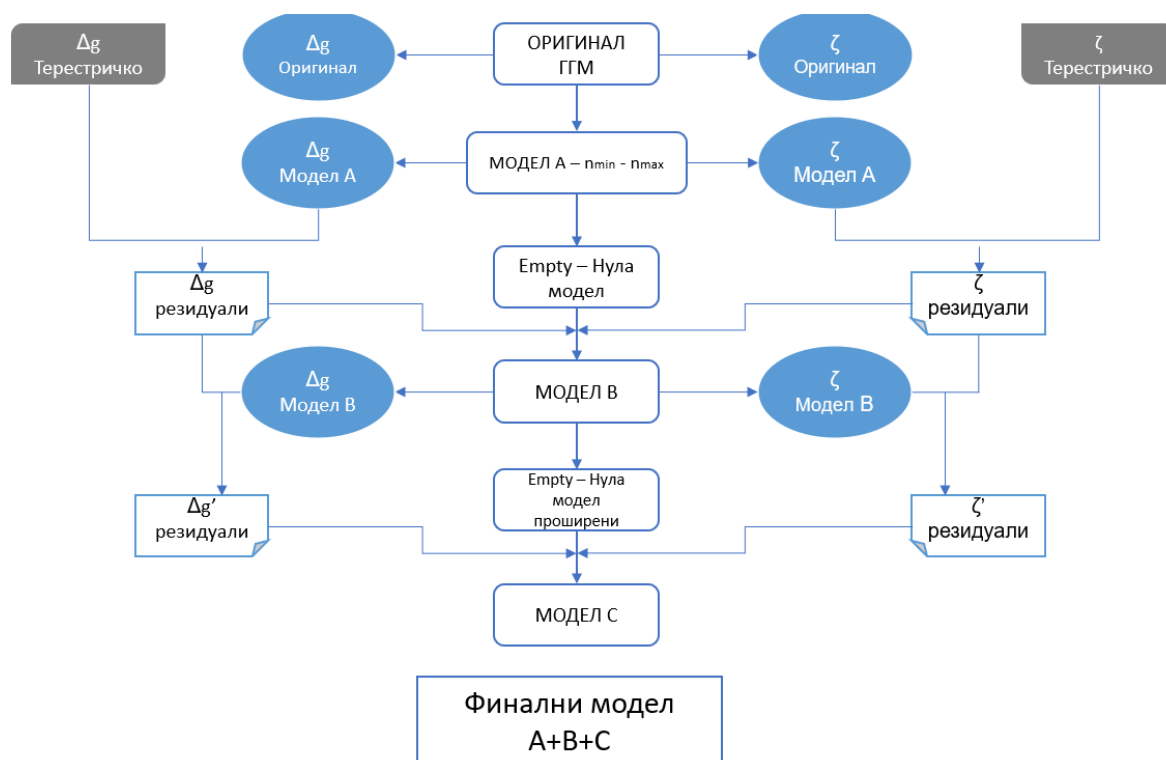
Један од највећих изазова у моделирању синтетичких коефицијената јесте проналажење оптималног степена модела. Ово се постиже анализом спектралних карактеристика и поређењем са референтним подацима, као што су мјерења из сателитских мисија или терестрички подаци. Посебно је значајна примјена модела на аномалије висина, јер

омогућава практичну примјену у одређивању ундулација геоида, као и у анализи геодинамичких процеса.

Правилно дефинисана методологија моделирања синтетичких коефицијената омогућава креирање поузданих модела који задовољавају и локалне и глобалне потребе. Пажљив избор степена модела и спектралне резолуције, уз детаљну анализу података, кључ је за постизање равнотеже између тачности, сложености и практичне примјенљивости. Овај приступ обезбјеђује поуздане резултате у истраживањима гравитационог поља.

Детаљан шематски приказ цјелокупног поступка моделирања синтетичких коефицијената, који илуструје све кључне кораке укључене у процес, укључујући избор модела, прилагођавање спектра, израчунавање резидуала и формирање финалног синтетичког модела, дат је на Слици 6-10. Овај дијаграм служи као визуелни водич који омогућава боље разумијевање методологије и њене примјене у креирању прилагођених глобалних геопотенцијалних модела.

Приказ директно кореспондира са описаним корацима у методологији и представља основу за детаљну анализу ефеката сваке фазе у каснијим дјеловима истраживања. Поред илустрације корака, овај шематски приказ омогућава увид у међусобне односе између различитих компоненти процеса, што је од посебног значаја за разумијевање динамике моделирања.



Слика 6-10: Шематски приказ методологије моделирања

6.4.2 Одабир глобалног геопотенцијалног модела

Први корак у поступку моделирања био је избор најприкладнијег глобалног геопотенцијалног модела, што представља основу за прецизно дефинисање геопотенцијалне површи у региону од интереса. Овај процес је укључивао систематску анализу свих доступних модела кроз оцјену њихових кључних карактеристика: степена и реда сферно-хармонијских коефицијената, просторне резолуције, извора података и њихове примјенљивости у специфичном локалном контексту. Посебан акценат стављен је на способност модела да прецизно репрезентују локалне варијације у пољу теже, истовремено задржавајући висок ниво глобалне конзистентности.

На основу ове анализе, одабрани су модели EGM2008, GOCO05c и EIGEN 6C4 као најпогоднији за даље моделирање. Одабир ових модела базиран је на њиховим специфичним предностима:

- **EGM2008** се издваја својом детаљном резолуцијом и великим бројем сферно-хармонијских коефицијената. Захваљујући овим карактеристикама, овај модел је изузетно погодан за анализу локалних варијација у гравитационом пољу и примјену у регионалним и локалним истраживањима.
- **GOCO05c** представља комбинацију података из више сателитских мисија, као што су GRACE, GOCE и CHAMP, што обезбјеђује високу глобалну конзистентност. Овај модел је нарочито погодан због своје тачности на већим просторним размјерама, што га чини изузетним избором за глобалне анализе.
- **EIGEN 6C4** интегрише сателитске и терестричке податке, обезбјеђујући баланс између глобалне тачности и локалних варијација. Његов висок степен и ред сферно-хармонијских коефицијената омогућавају детаљну анализу гравитационог поља, док истовремено одржава висок ниво конзистентности у глобалним размјерама.

Иако су разматрани и други модели, они су углавном ограничени на специфичне аспекте гравитационог поља и нису понудили исту ширину примјене као одабрани модели.

Историјски значај модела **EGM96** такође је препознат, јер је у тренутку објављивања представљао значајан напредак у области геопотенцијалних модела. Са сферно-хармонијским развојем до степена и реда 360, EGM96 је омогућио детаљну глобалну резолуцију, али је његова примјена ограничена напредком новијих модела као што је EGM2008. У овом истраживању, EGM96 је служио као користан референтни оквир за поређење са савременијим моделима.

Избор модела EGM2008, GOCO05c и EIGEN 6C4 представља темељ за прецизно дефинисање геопотенцијалне површи и омогућава спровођење детаљних анализа у региону од интереса. Детаљне информације о овим моделима, укључујући њихове техничке карактеристике и додатне примјере примјене, могу се пронаћи на званичним интернет страницама.

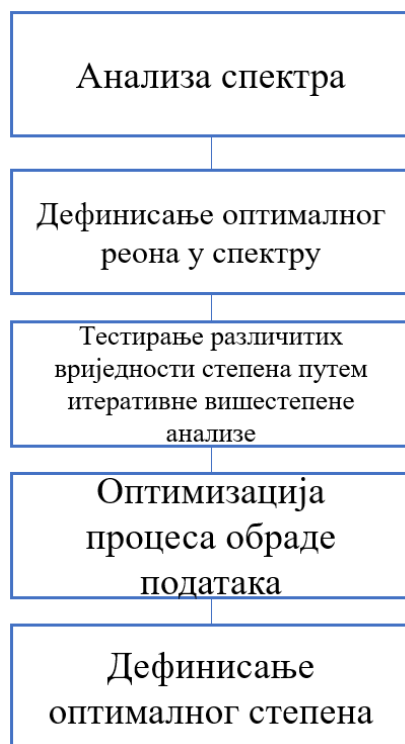
6.4.3 Дефинисање оптималног степена

Анализа спектра глобалних геопотенцијалних модела игра кључну улогу у разумијевању дистрибуције енергије у спектралним компонентама, што представља основу за прилагођавање модела специфичностима одређеног региона. Прецизно дефинисање степена и реда у којима глобални модел најбоље репрезентује геопотенцијално поље омогућава постизање оптималног баланса између резолуције и тачности, посебно у локалним контекстима као што је Србија. Комплексна геолошка структура региона захтјева високу резолуцију, али истовремено треба избјежавати прекомјерно наглашавање шума.

Сprovedена анализа показала је да различити модели, као што су EGM2008, GOCO05c и EIGEN 6C4, имају специфичне спектралне карактеристике које директно утичу на њихову примјенљивост. Кључни корак у овом истраживању био је проналажење оптималног степена модела за локалну адаптацију, што је постигнуто вишестепеном анализом. Овај процес је укључивао тестирање различитих комбинација степена и реда сферно-хармонијских коефицијената примјеном нумеричких метода. Такве методе омогућиле су поређење резултата глобалних модела са локалним подацима, при чему је идентификована комбинација параметара која најбоље одговара специфичностима региона.

Резултати анализе показали су да модели са већим степенима могу пружити већу просторну детаљност, али истовремено постоји ризик од наглашавања шума у подручјима са недовољно густим терестричким подацима. Утврђено је да је неопходно ограничити степен до нивоа који обезбјеђује најбољу сагласност између глобалних модела и локалних мјерења, чиме се осигурава тачност без губитка стабилности. Ова анализа је кључна за прилагођавање глобалних модела специфичностима региона и ствара основу за њихову даљу примјену у истраживањима гравитационог поља.

Шематски приказ корака овог процеса приказан је на Слици 6-11, која илуструје основне фазе, од анализе спектра до дефинисања оптималног степена.



Слика 6-11: Шематски приказ одабира оптималног степена у моделу

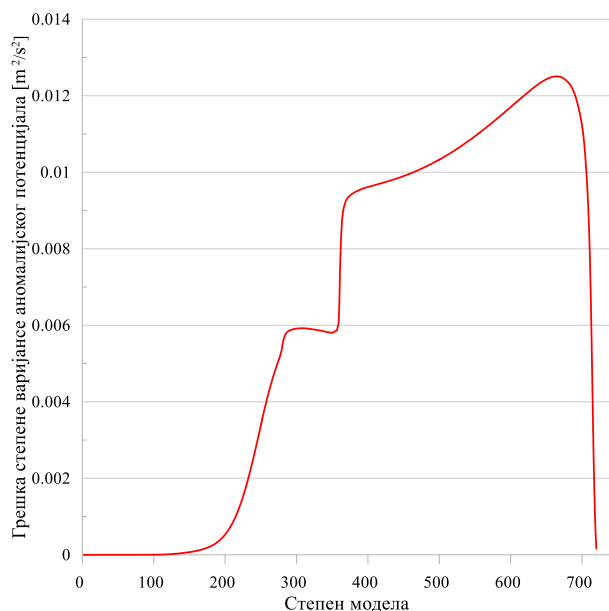
Степене варијансе, као формална карактеристика глобалних геопотенцијалних модела, представљају вриједан индикатор у анализи спектралне дистрибуције енергије у моделу, али често остају у домену општих показатеља који дају ширу слику, а не конкретне смјернице. Иако пружају значајан увид у глобалне особине модела и омогућавају поређење различитих модела, степене варијансе саме по себи нису водиле директно ова истраживања. Њихова примјена се огледала у идентификацији опадајућих или растућих трендова у грешкама у зависности од степена, али недостаје им прецизност да дефинишу специфичне параметре који се могу примјенити у локалним контекстима. Као такве, степене варијансе служе као полазна тачка за даље анализе, али кључни кораци у истраживањима, попут одабира оптималног степена модела, заснивају се на конкретнијим статистичким и нумеричким методама.

6.4.4 Одабир оптималног степена за прилагођавање модела GOCO05c

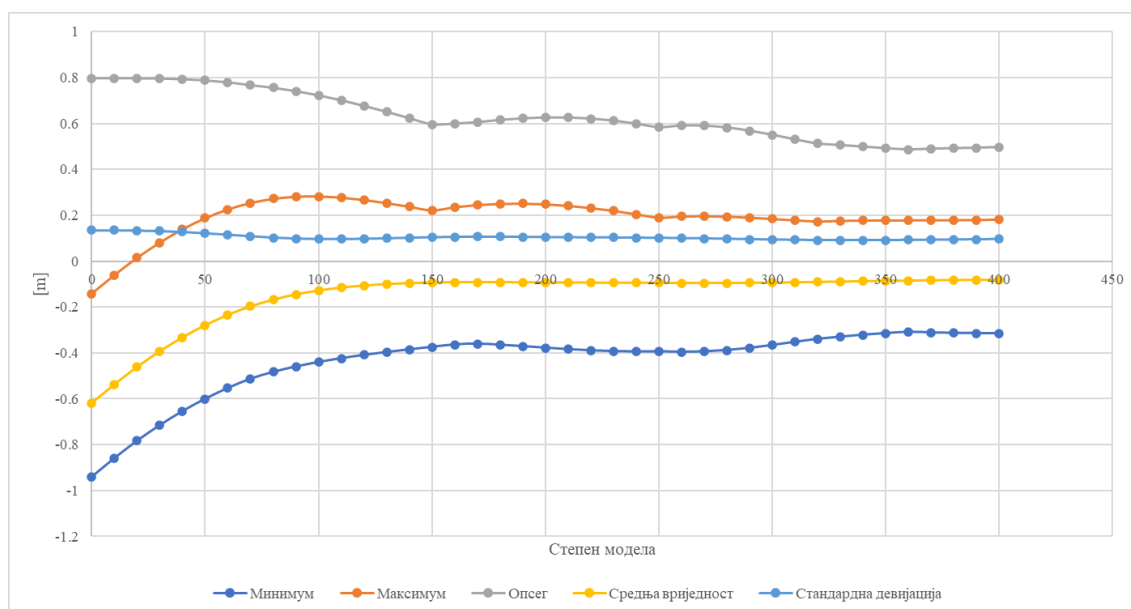
Први модел анализиран у истраживању био је GOCO05c, гдје је тестирана примјена предложене методологије и дефинисање оптималног степена за локално прилагођавање. Модел је потун до степена и реда 720, а кроз анализу степених варијанси и статистичких параметара, одређено је да је оптималан степен за прилагођавање 359. Овај степен обезбјеђује најбољи баланс између сложености и тачности модела.

На основу спектра грешке степених варијанси аномалијског потенцијала, датог на Слици 6-12, уочено је да грешка расте након локалног минимума на степену 351, што је указало на неопходност додатне анализе у интервалу између 350 и 360. Комплекснија нумеричка

анализа, спроведена повећањем степена модела од 0 до 400 са инкрементом од 20 показала је стабилност параметара након степена 350, што се јасно може видјети на сликама Слика 6-13 и Слика 6-14.



Слика 6-12: Грешка степене варијансе аномалијског потенцијала (GOCO05c)

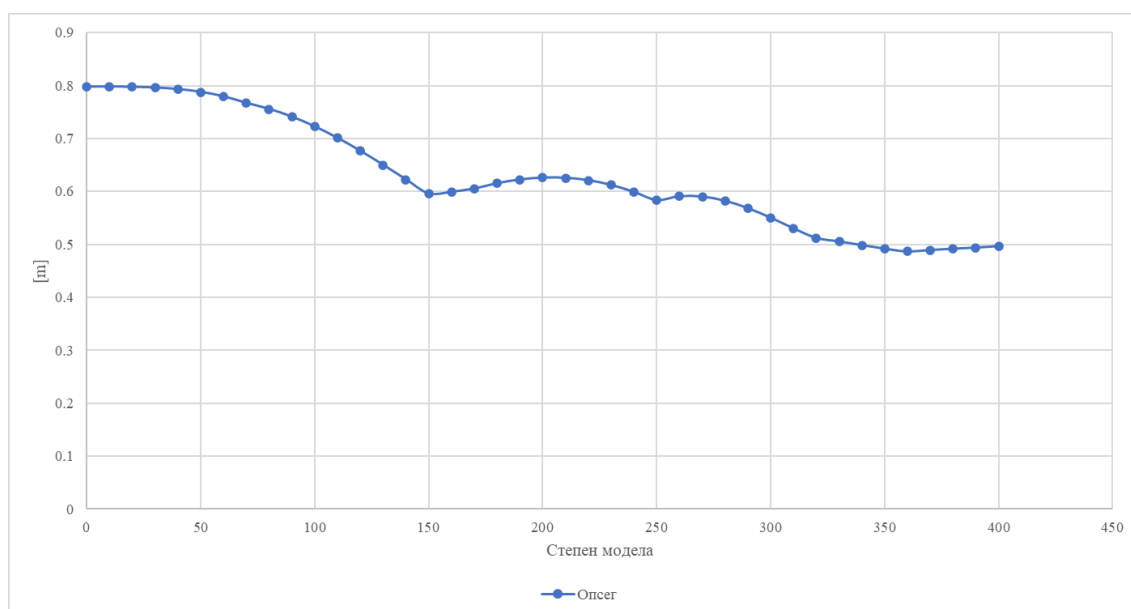


Слика 6-13: Графички приказ промјене статистичких параметара зависно од степена модела GOCO05c (прилагођавање аномалијама убрзања)

У анализи статистичких параметара разлика аномалија висина, утврђено је да минимум вриједности разлика аномалија висина се смањује са повећањем степена модела. Максималне вриједности такође постепено расту, што сугерише побољшану

репрезентацију позитивних аномалија. Распон вриједности, који представља разлику између минималних и максималних вриједности, показује опадајући тренд, што указује на тачност претходне претпоставке о одабиру већег степена модела као оптималног. Средња вриједност разлика се приближава нули и благо расте са повећањем степена, указујући на смањење грешке модела и боље симетричну расподелу аномалија око нуле. Стандардна девијација, као мјера дисперзије, такође опада са повећањем степена модела, потврђујући побољшање квалитета апроксимације и стабилности модела. Ова анализа потврђује да повећање степена геопотенцијалног модела доводи до значајног побољшања у тачности израчунавања аномалија висина.

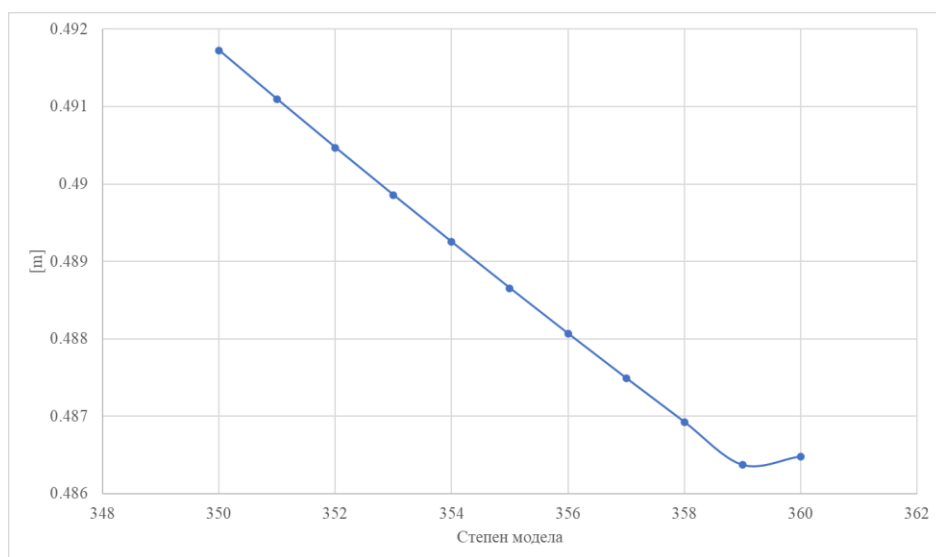
На следећој слици је дат изолован статистички параметар распона разлика аномалија висина као једног од важнијих параметара при анализи и одабиру оптималног степена за прилагођавање модела.



Слика 6-14: Графички приказ промене распона разлика зависно од степена модела

Анализа распона разлика аномалија висина показује значајан опадајући тренд са повећањем степена модела, што указује на све већу усклађеност модела са стварним вриједностима мјерења. Најзначајније смањење распона уочено је у интервалу првих 200 степени, након чега се тренд стабилизовао. У области након степена 350, распон се задржава у опсегу од 0.4 m до 0.5 m, што упућује на то да даље повећање степена модела доноси минимално побољшање у квалитету апроксимације. Овај резултат указује на то да је интервал између 350 и 400 степена најпогоднији за идентификацију оптималног степена модела.

С обзиром да је инкремент у овој вишестепеној анализи био 20, урађена је још једна анализа за интервал од 350-360.-ог степена. У наставку је на Слици 6-15 приказан само статистички параметар опсега, који јасно показује да коначан оптималан степен за прилагођавање модела је 359.

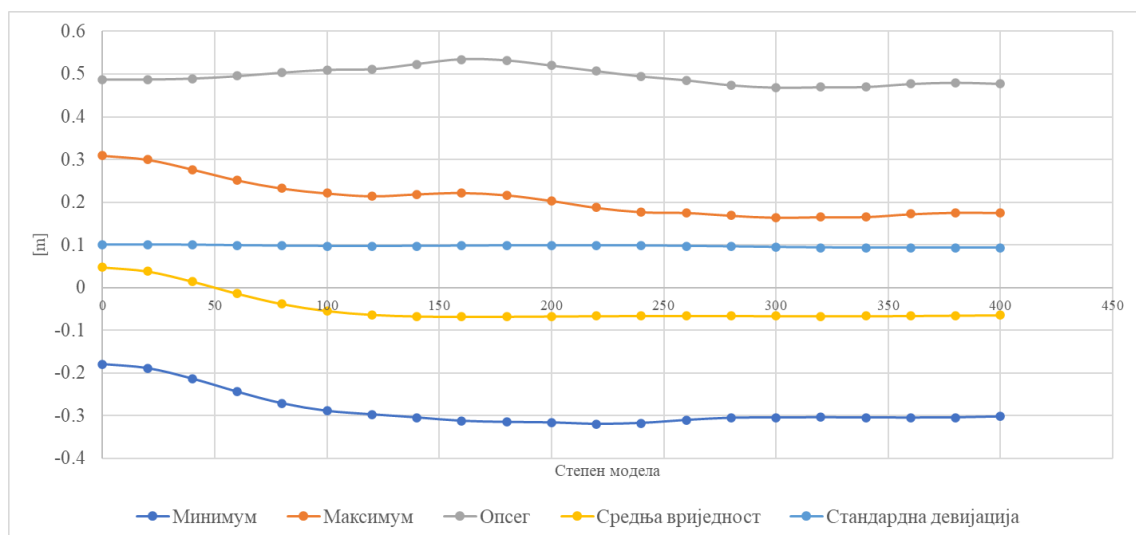


Слика 6-15: Графички приказ промјене распона разлика од 350-360 степена модели GOCO05c (прилагођавање аномалијама убрзања)

Детаљна анализа распона разлика аномалија висина у ужем интервалу степена глобалног геопотенцијалног модела од 350 до 360, спроведена са мањим инкрементом, показала је да се распон поступно смањује до степена 359, након чега благо расте. Ово указује да степен 359 представља оптималан избор за прилагођавање модела, јер минимизује распон разлика и осигурава најбољу усклађеност модела са стварним вриједностима. Одабрани степен успоставља оптималну равнотежу између комплексности и нивоа квалитета апроксимације модела, избегавајући претјерано прилагођавање које би могло негативно утицати на резултате. Резултати истичу кључну улогу прецизног одређивања корака приликом избора најпогоднијег степена, посебно у оваквим анализама.

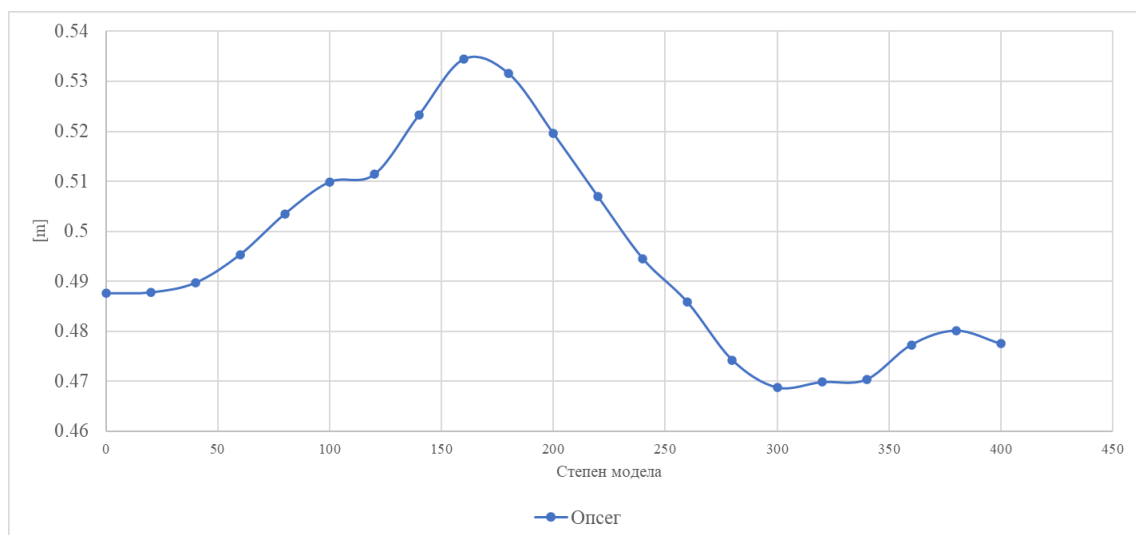
Важно је напоменути да ова анализа узима у обзир моделе добијене прилагођавањем аномалија убрзања из терестричких података, те се приказани резултати односе искључиво на избор оптималног степена за аномалије убрзања. Паралелно, идентичан поступак примјењен је за моделе добијене прилагођавањем аномалија висина како би се дефинисао оптимални степен у контексту.

Слика 6-16 приказује промјену статистичких параметара (минимум, максимум, распон, средња вриједност и стандардна девијација) разлика аномалија висина у односу на степен глобалног геопотенцијалног модела. Уочено је да минимум и максимум вриједности имају опадајући тренд и стабилизују се након степена 200, што указује на побољшање репрезентације екстремних вриједности. Распон значајно опада до степена између 150 и 300, након чега остаје стабилан уз мање варијације, што указује на смањење одступања између моделираних и стварних вриједности. Средња вриједност аномалија остаје близу нуле, што указује на симетричну расподелу грешака.



Слика 6-16: Графички приказ промјене статистичких параметара зависно од степена модела GOCO05c (прилагођавање аномалијама висина)

Слика 6-17 приказује промјену опсега разлика аномалија висина у зависности од степена глобалног геопотенцијалног модела. Опсег расте до степена 150, што указује на смањену прецизност модела у нижим степенима. Након достизања максимума, опсег значајно опада, а стабилизација се примјећује око степена 300, што указује на постизање оптималног квалитета апроксимације модела у репрезентацији аномалија висина. Благо повећање опсега након степена 350 указује на могућу деградацију модела услед прекомјерне сложености. С обзиром на резултате, степен између 300 и 350 се може сматрати оптималним за постизање баланса између сложености модела и његове прецизности у апроксимацији геопотенцијалног поља.



Слика 6-17: Графички приказ промјене распона разлика зависно од степена модела GOCO05c (прилагођавање аномалијама висина)

6.4.5 Прилагођавање модела GOCO05c

Примјеном физичких принципа и корекције спектралних компоненти које одступају од реалних вриједности у датом региону, извршено је прилагођавање модела GOCO05c и креиран је прилагођени модел који представља основу за даље моделирање.

У наредном кораку, иницијално је извршено прилагођавање глобалног модела терестричким подацима аномалија убрзања, чиме се глобални модел усклађује са мјерењима терестричких података локалног подручја. Након тога, на основу разлика аномалија убрзања између новодобијеног глобалног модела и вриједности аномалија убрзања из радног скупа, креиран је резидуални модел. Разлике добијене из ова два скупа података представљају резидуале који садрже информације о геопотенцијалном пољу које глобални модел није у могућности адекватно да репрезентује, чији су статистички параметри дати у Табели 6.2.

Табела 6.2: Статистички параметри резидуалног скупа аномалија (GOCO05c)

Параметар	X_{min}	X_{max}	$X_{max} - X_{min}$	$\bar{X}$	σ
Δg_{Ares} [mGal]	-42.74	209.14	251.88	24.95	22.52

Формирани скуп резидуалних података служи као основа за моделирање коефицијената сферно хармонијског развоја новог модела, који се може дефинисати као резидуални модел. Овај модел обједињује информације о преосталим резидуалима и омогућава додатно побољшање у репрезентацији локалних и регионалних варијација у геопотенцијалном пољу.

Након креирања резидуалног модела, урађена је даља анализа и оптимизација. Овим поступком добијен је нови модел који додатно побољшава претходно креирани резидуални модел. При томе су коефицијенти спектра додатно прилагођени, што је допринијело већем нивоу сагласности модела са терестричким подацима. Финални резултат овог поступка је модел који је прецизније прилагођен терестричким подацима и боље репрезентује локалне и регионалне карактеристике геопотенцијалног поља, користећи вишестепену интеграцију глобалних и локалних информација, са посебним нагласком на коришћење резидуалних података за оптимизацију и унапређење модела.

Завршни корак представља сабирање коефицијената прилагођеног и резидуалног модела у циљу креирања обједињеног модела и моделирању преосталих разлика како би се добио нови резидуални модел који би додатно прилагодио коефицијенте.

Моделирањем теренских података аномалија убрзања и прилагођавањем истих претходно описаном методологијом, добијени су резултати приказани у Табели 6.3.

Табела 6.3: Статистички параметри моделираних аномалија из модела и њихових разлика са терестричким мјерењима (GOCO05c)

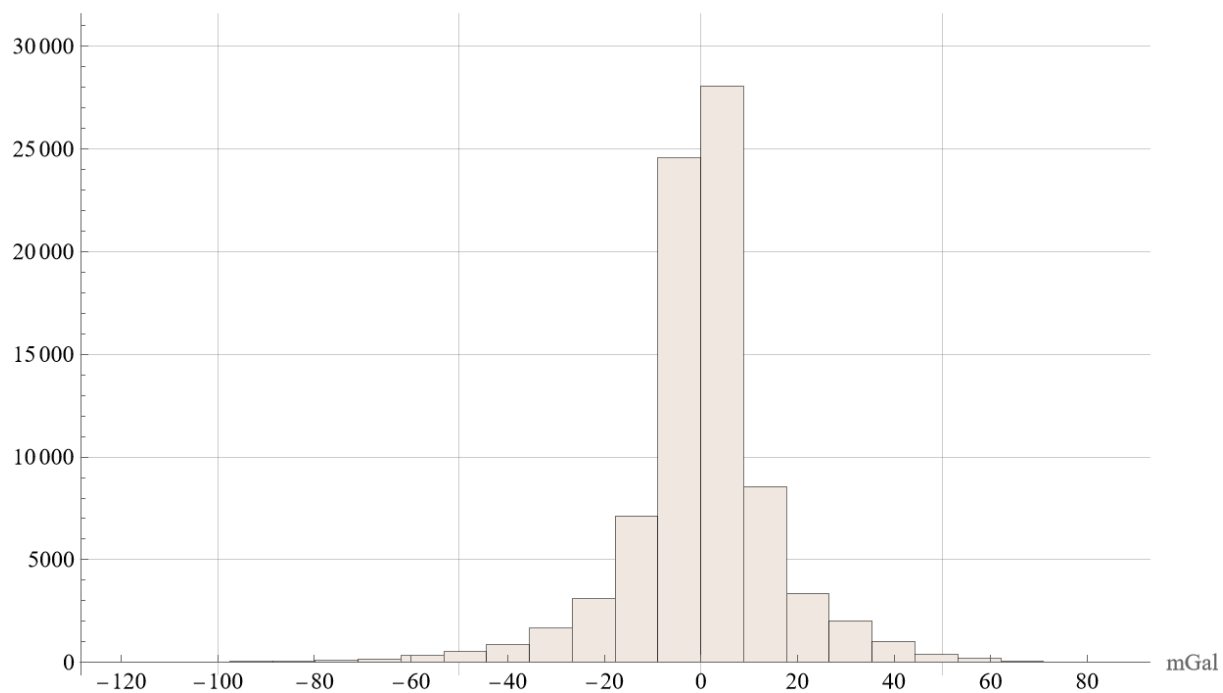
Параметар	Број	X_{min}	X_{max}	$X_{max} - X_{min}$	$\bar{X}$	σ
Δg [mGal]	82204	-42.74	209.14	251.88	24.95	22.52
$\Delta g_{GOCO05c-T}$ [mGal]		-142.96	106.04	248.99	2.60	16.30
Δg_{A-T} [mGal]		-113.46	87.49	200.95	2.64	15.80
Δg_{A+B-T} [mGal]		-123.97	87.02	210.98	0.33	15.46
$\Delta g_{A+B+C-T}$ [mGal]		-124.17	88.70	212.88	0.27	15.42

Анализом параметара аномалија убрзања Δg и њихових разлика у односу на различите моделе, обрађено је укупно 82.204 податка. Минимална вриједност Δg износи -42.74 mGal, док је максимална 209.14 mGal, што представља укупни распон од 251.88 mGal. Стандардна девијација овог скупа података износи 24.95 mGal, а средња вриједност разлике је 22.52 mGal. Разлике између глобалног модела GOCO05c и терестричких података показују шири распон вриједности, који се креће од -142.96 mGal до 106.04 mGal, са укупним распоном од 248.99 mGal, али уз знатно нижу стандардну девијацију од 16.30 mGal.

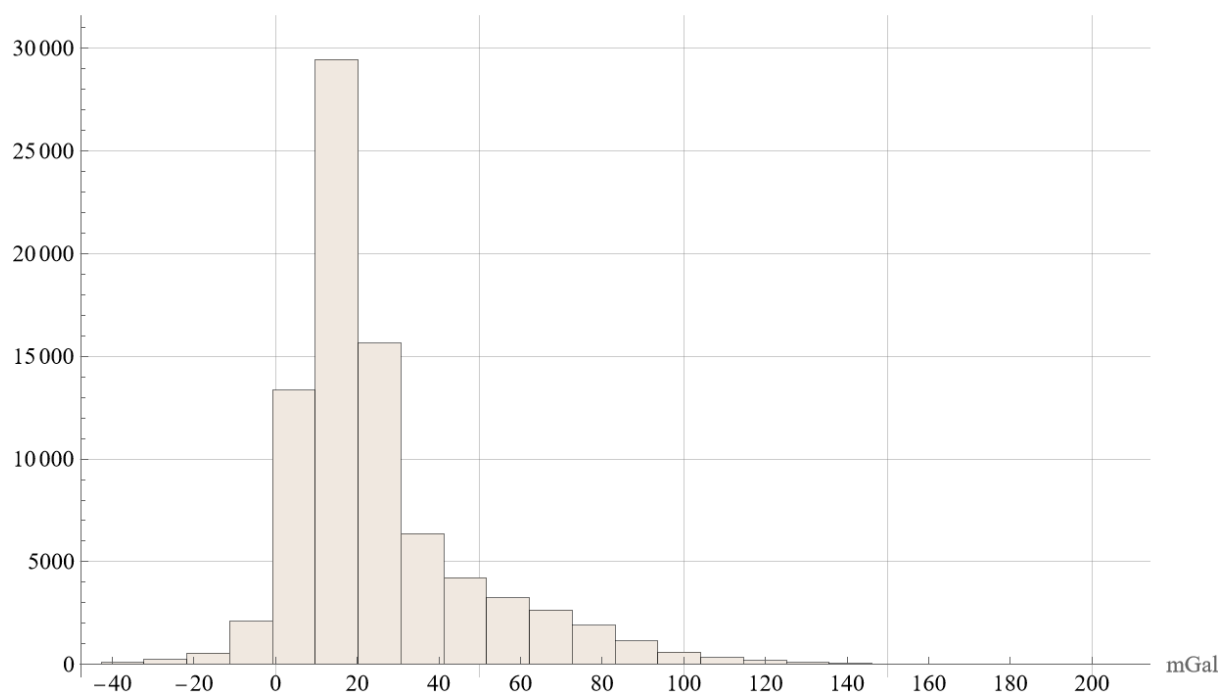
Даље унапређење модела кроз примјену додатних резидуалних информација довело је до прогресивног смањења распона и стандардне девијације. Најзначајније побољшање постигнуто је моделом који укључује компоненте А, В и С, са средњом вриједношћу од 0.27 mGal и најнижом стандардном девијацијом од 15.42 mGal. Ови резултати указују на значајно повећање усклађености модела са терестричким подацима кроз процес резидуалног прилагођавања.

Анализа јасно показује ефекат поступног побољшања модела додавањем додатних компоненти, што резултира прецизнијим представљањем гравитационог поља. У погледу индиректног приступа резидуално прилагођавање показало се успјешним, јер свака додатна компонента модела (А, В, С) доводи до умјереног смањења распона (до 20.22%) и значајног смањења стандардне девијације (за готово 33%) резидуалних аномалија убрзања.

На Слици 6-18, приказан је хистограм разлика аномалија убрзања добијеног примјеном модела А+В+С, док је на Слици 6-19 дат приказ аномалија убрзања оригиналних терестричких мјерења. Општи облик површи разлика аномалија убрзања је дат у Прилогу 4.



Слика 6-18: Хистограм разлика аномалија убрзања из модела $A+B+C$ и терестричких мјерења (GOCO05c)



Слика 6-19: Хистограм аномалија убрзања терестричких мјерења (GOCO05c)

Хистограми на приложеним сликама указују на значајне разлике у расподјели аномалија убрзања. Први хистограм, који приказује разлике аномалија убрзања добијене

примјеном модела $A+B+C$ у односу на терестричке аномалије, показује готово симетричну расподелу која је концентрисана око централне вриједности од 0 mGal, са уском дисперзијом. Овакав облик расподеле може указивати на то да је модел $A+B+C$ у добром сагласју са терестричким аномалијама, уз минималне систематске грешке или одступања. Централност је изражена у форми јасног шпица, што указује на присуство малих разлика у великом броју мјерења, односно висок ниво прецизности у израчунавању.

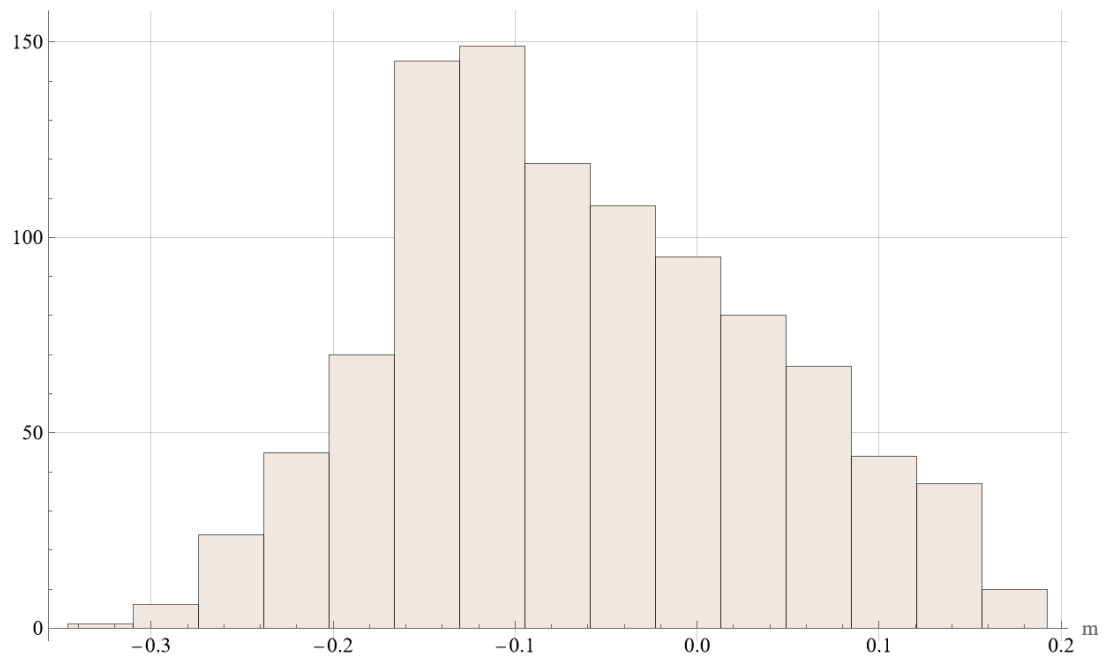
С друге стране, хистограм терестричких аномалија (Слика 6-19) показује асиметричну расподелу са позитивним издужењем. Централна вриједност је помјерена ка десној страни, што указује на то да већина терестричких аномалија има позитивне вриједности, али са ширим спектром расподеле и већим екстремним вриједностима у позитивном смјеру. Овакав облик расподеле сугерише да терестричке аномалије укључују различите геолошке карактеристике које утичу на локалне и регионалне вриједности убрзања.

У наставку текста су дати и модели добијени прилагођавањем аномалија висина из терестричких података у циљу моделирања синтетичких сферно-хармонијских коефицијената за дато локално подручје. Узимајући у обзир претходно наведене поступке методологије, идентичан принцип је примијењен и код аномалија висина, у циљу евалуације резултата добијених из модела.

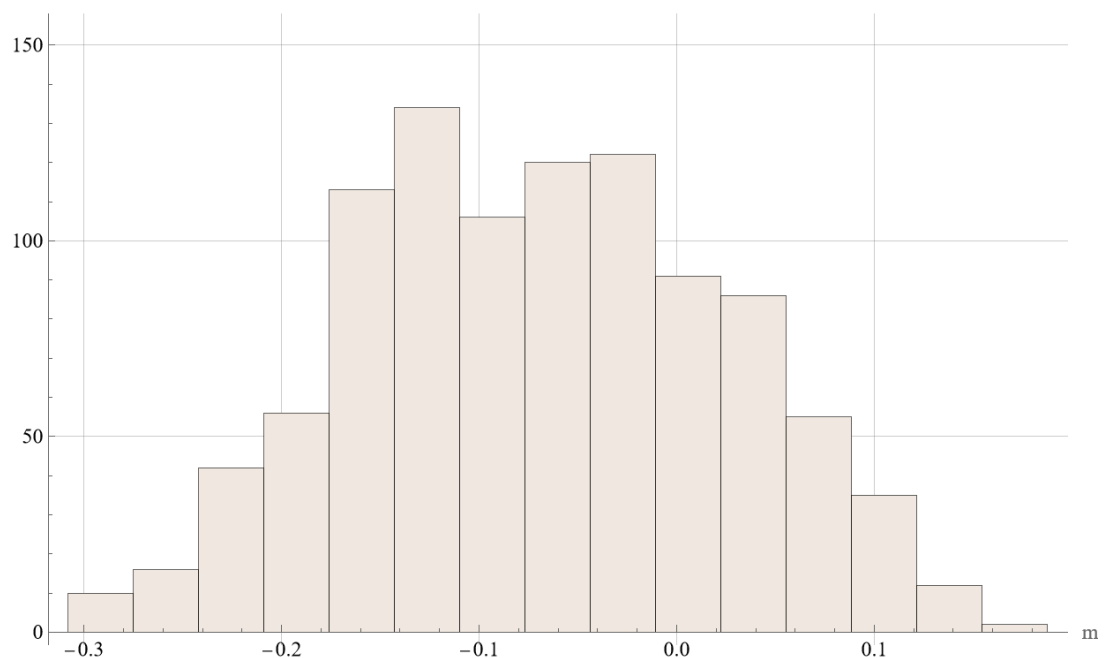
У Табели 6.4 су дати статистички параметри разлика аномалија висина оригиналног и новодобијеног-финалног модела са терестричким вриједностима аномалија висина из контролног скупа као и хистограми разлика приказани на Слици 6-20 и Слици 6-21. Општи облик површи распореда разлика аномалија висина дат је у Прилогу 2.

Табела 6.4: Статистички параметри аномалија висина из модела и њихових разлика са терестричким мјерењима(GOCO05c)

Параметар	Број	X_{min}	X_{max}	$X_{max} - X_{min}$	$\bar{X}$	σ
$\zeta_{GOCO05c} - \zeta^{GPS/dh}$ [m]	1001	-0.346	0.192	0.538	-0.064	0.102
$\zeta_A - \zeta^{GPS/dh}$ [m]		-0.305	0.172	0.477	-0.066	0.093
$\zeta_{A+B} - \zeta^{GPS/dh}$ [m]		-0.308	0.188	0.496	-0.069	0.094



Слика 6-20: Хистограм разлика аномалија висина из оригиналног модела и терестричких мјерења (GOCO05c)



Слика 6-21: Хистограм разлика аномалија висина из финалног (A+B) модела и терестричких мјерења (GOCO05c)

На основу приказаних статистичких параметара и хистограма, може се закључити да финални модел показује побољшање у односу на оригинални модел у смислу

прилагођавања терестричким вриједностима аномалија висина. Разлике терестричких мјерења са оригиналним моделом ($\zeta_{GOCO05c} - \zeta_T$) имају широку дистрибуцију разлика са опсегом вриједности од -0.346 m до 0.192 m и већом стандардном девијацијом, што указује на већу варијабилност и присуство одступања у подацима. Насупрот томе, разлике код финалног модела ($\zeta_{A+B} - \zeta_T$) показују ужа ограничења у распону вриједности, мању стандардну девијацију и уједначенију дистрибуцију разлика, што указује на боље прилагођавање терестричким подацима. Хистограми такође потврђују овај закључак, јер је први хистограм, који представља разлике са оригиналним моделом, шири са израженим реповима, нарочито на негативној страни, што указује на присуство већих одступања од терестричких вриједности. Насупрот томе, хистограм финалног модела је симетричнији и више концентрисан око средње вриједности, што одражава стабилније и уједначеније разлике у резултатима. Поред тога, средња вриједност разлика у финалном моделу сугерише благи систематски помак, али је он мањег интензитета у поређењу са оригиналним моделом који има средњу вриједност разлика ближу негативним одступањима. Уопштено, финални модел показује побољшање у свим анализираним аспектима, укључујући смањену варијабилност, боље усклађивање са терестричким вриједностима и већу симетричност у расподјели разлика.

У погледу директног приступа, поређењем модела А и модела А+В, може се закључити да је дошло до одређених промјена, али не и до значајнијег побољшања у погледу укупне статистичке прецизности. Иако финални модел показује уједначенију расподјелу разлика у односу на претпоследњи, смањење варијабилности није довољно значајно да би се могло говорити о драстичном побољшању. Стога, финални модел представља унапређење у смислу симетричности и боље средње вриједности, али у погледу укупне статистичке прецизности, разлике између модела А и модела А+В су релативно мале.

Боље прилагођавање модела са аномалијама убрзања у односу на аномалије висина у оквиру GOCO05c модела може се објаснити, прије свега, тиме да аномалије убрзања директно одражавају варијације у гравитационом пољу, што их чини осјетљивијим на локалне промјене масе и структуре Земље. С друге стране, аномалије висина су интегралне мјере које обухватају кумулативне ефекте поља теже, што може довести до губитка детаља и мање прецизности у моделирању.

Поред тога, мјерења убрзања, као што су подаци добијени из сателитских мисија попут GRACE или GOCE, често имају већу просторну резолуцију и квалитет апроксимације у поређењу са мјерењима висина. Ово омогућава прецизније моделирање и боље прилагођавање модела када се користе аномалије убрзања.

На крају, квалитет и количина доступних података о аномалијама убрзања могу бити супериорни у односу на податке о аномалијама висина, што омогућава боље статистичке анализе и прецизније моделирање. Сви ови фактори заједно могу објаснити зашто је прилагођавање модела са аномалијама убрзања било успјешније у односу на аномалије висина у оквиру GOCO05c модела.

6.4.6 Вишестепена итеративна анализа оптималног степена прилагођавањем модела EGM96

У оквиру овог дијела истраживања извршено је прилагођавање глобалног геопотенцијалног модела EGM96 примјеном вишестепене итеративне анализе како би се утврдио оптималан степен модела за територију Србије. Током сваке итерације, у тачкама са познатим вриједностима аномалија висина, израчунаване су нове вриједности примјеном добијених скупова коефицијената, што је омогућило формирање разлика између познатих и моделираних вриједности. Ове разлике су анализирани кроз постављене критеријуме прихватљивости како би се одабрали оптимални параметри модела.

Услови који су морали бити задовољени за успјешну итерацију подразумијевали су да просјечна вриједност апсолутних разлика не прелази дефинисани праг, као и да стандардна девијација разлика буде у оквиру прихватљивих граница. Након сваке итерације, нови скуп коефицијената је процјењиван, а уколико су испуњени сви критеријуми, он је усвајан као побољшани модел.

Посебан акценат у истраживању стављен је на утврђивање оптималног степена модела, који се добија кроз итеративни процес. Докторска дисертација професора Одаловића (Одаловић, 2005), која је указивала на оптимални степен 37 за овај модел, служила је као полазна тачка, али је додатним итерацијама показано да је степен 31 дао боље резултате, кроз четврту итерацију прилагођавања. Треба напоменути да су поновљени исти резултати при прорачунима за степен 37. Статистички параметри разлика аномалија висина из прилагођеног модела A+B добијеног помоћу EGM96 су дати у Табели 6.5.

Табела 6.5: Статистички параметри аномалија висина из модела и њихових разлика са терестричким мјерењима (EGM96)

Параметар	Број	X_{min}	X_{max}	$X_{max} - X_{min}$	$\bar{X}$	σ
$\zeta_{EGM96} - \zeta^{GPS/dh}$ [m]	1001	-2.016	0.384	2.400	-0.863	0.606
$\zeta_A - \zeta^{GPS/dh}$ [m]		-1.109	-0.036	1.074	-0.541	0.201
$\zeta_{A+B} - \zeta^{GPS/dh}$ [m]		-1.087	-0.017	1.070	-0.531	0.200

Имајући у виду да модел EGM96 у погледу квалитета апроксимације не даје задовољавајуће резултате, због свог ниског степена и реда, у овом дијелу рада приступљено је тестирању методологије описане у раду из другачијег угла и са алтернативним приступом. Циљ истраживања био је унапређење прецизности примјеном вишестепене итеративне анализе оптималног степена модела како би се одредио најоптималнији ниво за рад са овим моделом и направила компаративна анализа у смислу ефикасности методологије.

Упоредјујући резултате са оригиналним моделом, видљиво је да је опсег вриједности смањен за више од 55%, док је средња вриједност коригована за око 38%, а варијанса је смањена за чак 67%. Ови резултати указују на значајно унапређење приликом моделирања са оптималним степеном.

Моделирањем резидуалног модела нису се постигла значајнија побољшања, иако је у минималном смислу дошло до напретка.

У погледу директног и индиректног приступа, такође се може рећи да су постигнута побољшања, посебно кроз оптимизацију параметара, међутим просторна резолуција и квалитет апроксимације модела су значајно мањи у поређењу са новијим моделима.

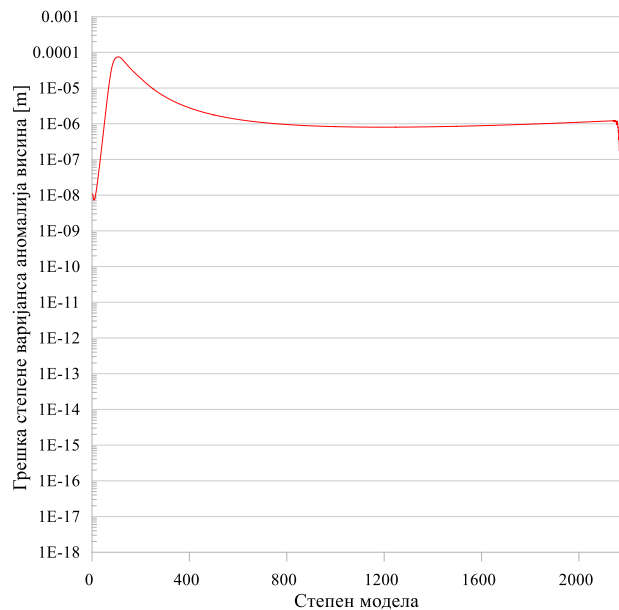
Иако се показало да EGM96 може унаприједити примјеном ове методологије, чак и побољшани модел остаје испод стандарда савремених геопотенцијалних модела. Стога се употреба EGM96 у савременој геодезији, хидрографији и другим сродним дисциплинама не препоручује, осим у специфичним случајевима гдје новији модели нису доступни. Напредак у сателитској технологији и развој новијих модела, као што су EGM2008 и EIGEN-6C4, омогућили су много већу прецизност и бољу просторно-временску резолуцију.

6.4.7 Одабир оптималног степена за прилагођавање модела EGM2008

Примјењујући идентичне поступке као и са моделом GOCO05c, модел EGM2008 је прилагођен терестричким подацима путем аномалија убрзања и аномалија висина, користећи новодефинисану методологију.

Познато је да EGM2008 представља један од најчешће коришћених глобалних геопотенцијалних модела у савременим геодетским и геофизичким истраживањима, који се одликује високом резолуцијом и прецизношћу на глобалном нивоу, међутим, његов ниво апроксимације геопотенцијалног поља може бити ограничен у локалним подручјима услед комплексности поља теже и недовољне репрезентације регионалних варијација. Примјеном поступка претходно описаног у раду, постигнута је значајна усклађеност између новодобијеног модела из EGM2008 и локалних терестричких података, гдје је овакав приступ омогућио бољу репрезентацију регионалних варијација гравитационог поља.

Анализом спектра грешке степене варијансе аномалије висине, представљеној на Слици 6-22, показује да модел EGM2008 има различиту динамику у поређењу са анализом грешке степене варијансе код GOCO05c модела.



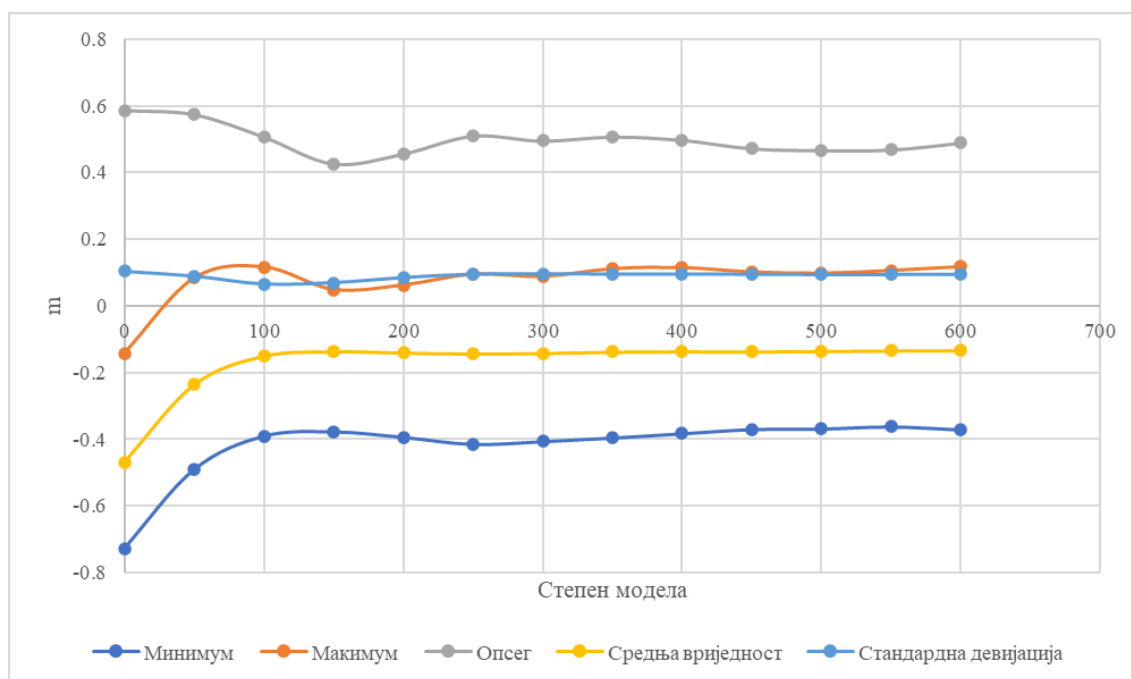
Слика 6-22: Грешка степене варијансе аномалија висина (EGM2008)

Посматрањем графика примјећује се следеће:

1. Локални максимум грешке се јавља на око 100. степену, након чега грешка нагло опада. Ово указује да моделирање у интервалу испод 200. степена носи значајне грешке у аномалији висине, док се стабилност и прецизност повећавају за више степене модела.
2. Након почетног опадања, грешка остаје релативно стабилна до око 2100. степена, што указује на висок ниво апроксимације модела у овом интервалу. Ово представља значајну разлику у односу на GOCO05с модел, гдје је након локалног минимума грешка расла.
3. На крају спектра, блиско максималном степену од 2190, грешка нагло опада, што је разлог непотпуног степена модела, имајући у виду да је модел комплетан до 2190. степена и 2159. реда.
4. Коначни закључци о оптималном степену модела се тешко могу донијети само анализом графикона, па чак и претпоставити у ком опсегу би било оптимално тражити исти, тако да је следећи корак примјена нумеричке методе тражења оптималног степена за даље прилагођавање овог модела, јер као што је истакнуто раније у тексту, степене варијансе више служе у сврху информативног карактера него као правац који води ово истраживање.

Спроводећи детаљну нумеричку анализу повећањем степена глобалног геопотенцијалног модела EGM2008, у интервалу од 0 до 600 са инкрементом од 50, упоређивањем статистичких параметара разлика аномалија висина у контролним тачкама, на основу Слици 6-23 закључено је да:

1. Минималне вриједности разлика аномалија висина су негативне и постепено се стабилизују са повећањем степена модела, гдје овај тренд указује на смањење екстремних негативних одступања како модел постаје детаљнији.
2. Максималне вриједности су позитивне и мање осцилирају у поређењу са минималним вриједностима. Оне остају стабилне након одређеног степена, што указује на досљедност модела у представљању позитивних варијација.
3. Опсег показује постепено смањење до око 100-ог степена модела, након чега остаје релативно стабилан, док локални минимум достиже око 160.-ог степена. Ово указује на побољшање модела у смањивању укупних варијација.
4. Средња вриједност остаје близу нуле, што је пожељно и указује на то да модел нема систематска одступања у просјечном смислу. Благо осцилирање је примјетно у нижим степенима, али се стабилизује са повећањем степена.
5. Стандардна девијација остаје готово у свим степенима приближно иста.

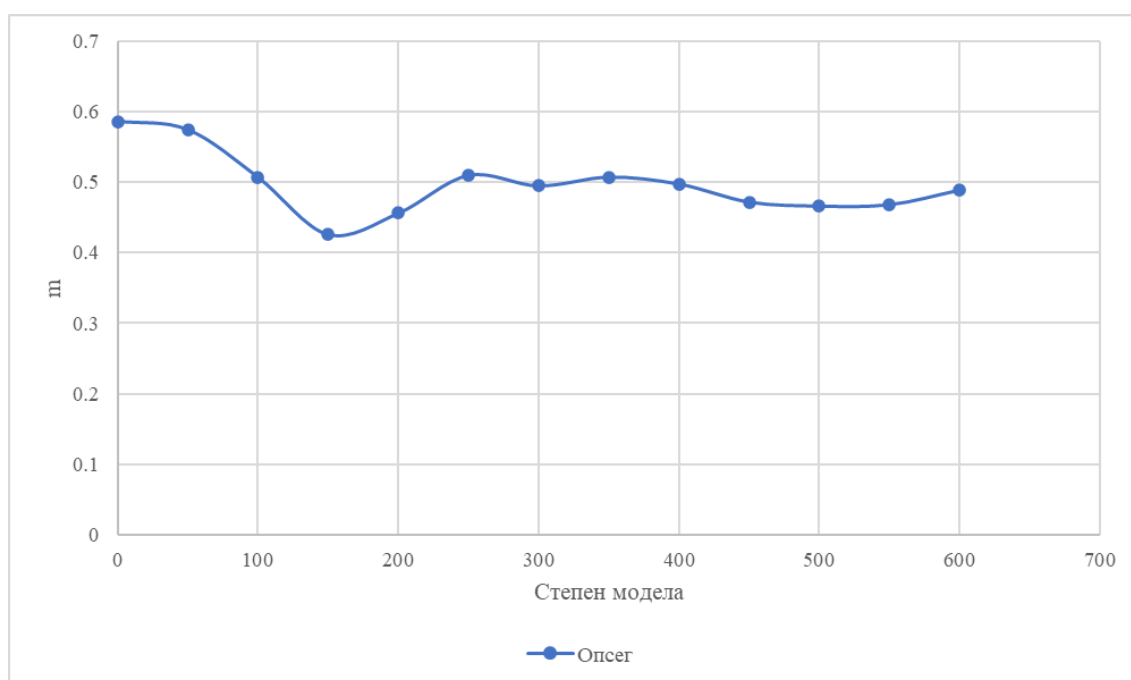


Слика 6-23: Графички приказ промјене статистичких параметара зависно од степена модела EGM2008 (прилагођавање аномалијама убрзања)

Оптималан интервал за моделирање је дефинисан између 100-ог и 200-ог степена, гдје статистички параметри достижу своје минимуме, што указује на високу прецизност модела у том опсегу. Као што се види, побољшања у моделу су најизраженија у нижим степенима (0-200), док се након тога варијације значајно смањују.

Анализом опсега, независно од осталих статистичких параметара, такође се може доћи до закључака који се односе на одабир оптималног степена за даље прилагођавање модела и моделирање синтетичких коефицијената.

На Слици 6-24 график показује динамику промјене варијација у зависности од степена модела. У нижим степенима (до 160-ог степена) опсег значајно опада, сугеришући да су нижи степени модела мање прецизни у репрезентацији локалног геопотенцијалног поља, док повећање степена до 200 доводи до значајног побољшања у нивоу апроксимације. Након 200-ог степена, опсег постаје релативно стабилан, са минималним осцилацијама између 200-ог и 600-ог степена, показујући висок степен конзистентности у моделирању. Благи пораст опсега након 500-ог степена може се приписати утицају виших фреквенција које додају fine варијације у моделу, али без значајног утицаја на општу стабилност. С обзиром на резултате, степен између 150 и 200 се може сматрати оптималним за постизање баланса између сложености модела и његове тачности за моделирање коефицијената будућег синтетичког модела.

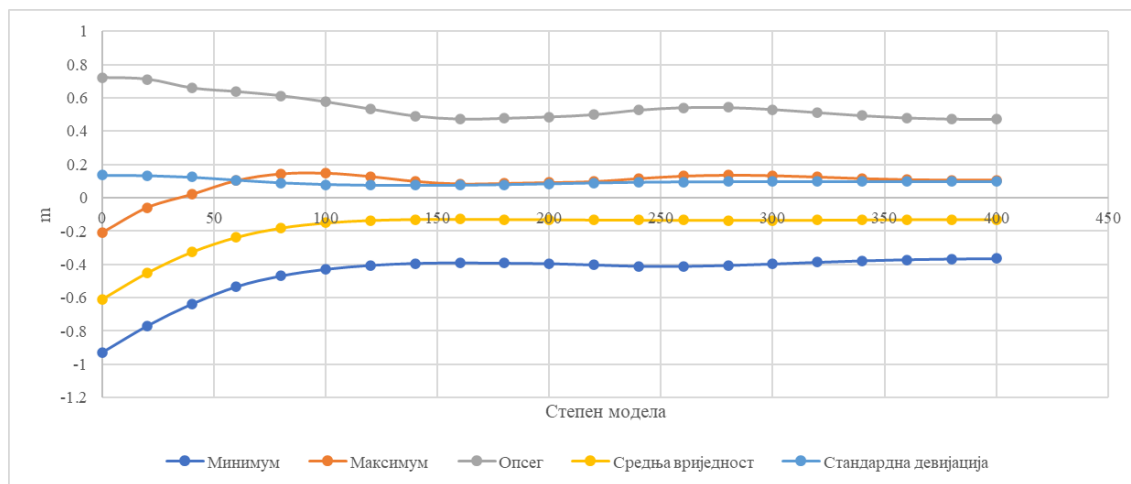


Слика 6-24: Графички приказ промјене распона разлика зависно од степена модела EGM2008 (прилагођавање аномалијама убрзања)

Базирајући одабир оптималног степена на прилагођавању модела аномалијама убрзања, исти поступак је поновљен али са прилагођавањем модела аномалијама висина у циљу анализе да ли се исти степен може узети у разматрање приликом прилагођавања модела аномалијама висина. Анализа је фокусирана на разлике између прилагођеног модела и терестричких вриједности аномалија висина.

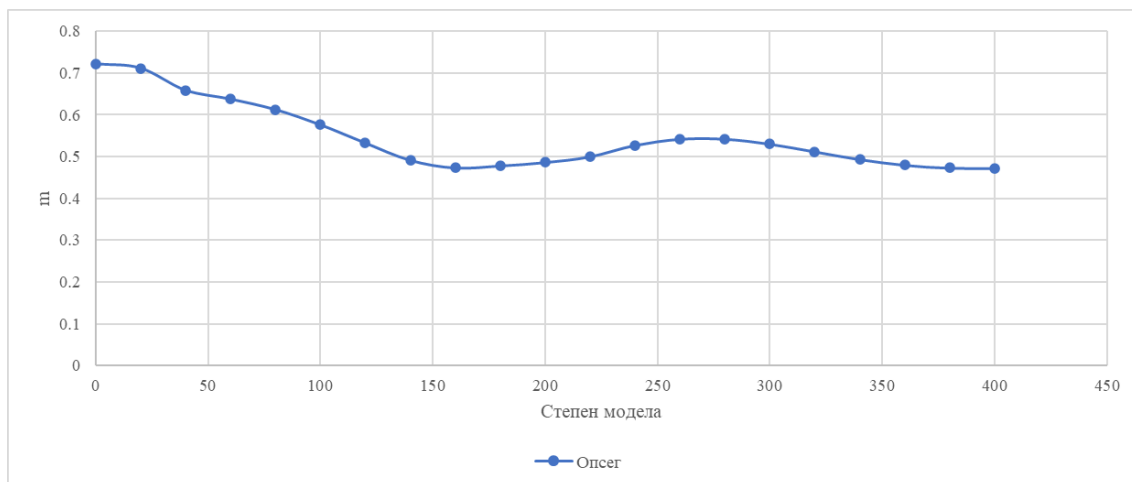
На Слици 6-25 се види динамика промјене статистичких параметара разлика аномалија висина приликом прилагођавања модела EGM2008 терестричким подацима. Уочава се да минималне вриједности постепено опадају, достижући стабилност након око 200-ог степена модела, што указује на смањење екстремних негативних одступања. Слично томе, максималне вриједности показују стабилан тренд, без значајних осцилација након првих 100 степени, што указује на добру репрезентацију позитивних варијација. Опсег варијација показује иницијално смањење до 200-ог степена, након чега остаје релативно

стабилан, што сугерише да модел постиже оптималну стабилност у том интервалу. Средња вриједност остаје близу нуле током цијелог распона, што указује на одсуство систематских грешака, док стандардна девијација постепено опада до 200-ог степена, након чега се стабилизује, што потврђује смањење варијација и побољшање квалитета апроксимације модела. Ова анализа указује да је интервал од 150-ог до 200-ог степена оптималан за примјену модела EGM2008 у контексту локалног прилагођавања, јер пружа висок степен стабилности и прецизности у репрезентацији локалног геопотенцијалног поља.



Слика 6-25: Графички приказ промјене статистичких параметара зависно од степена модела EGM2008 (прилагођавање аномалијама висина)

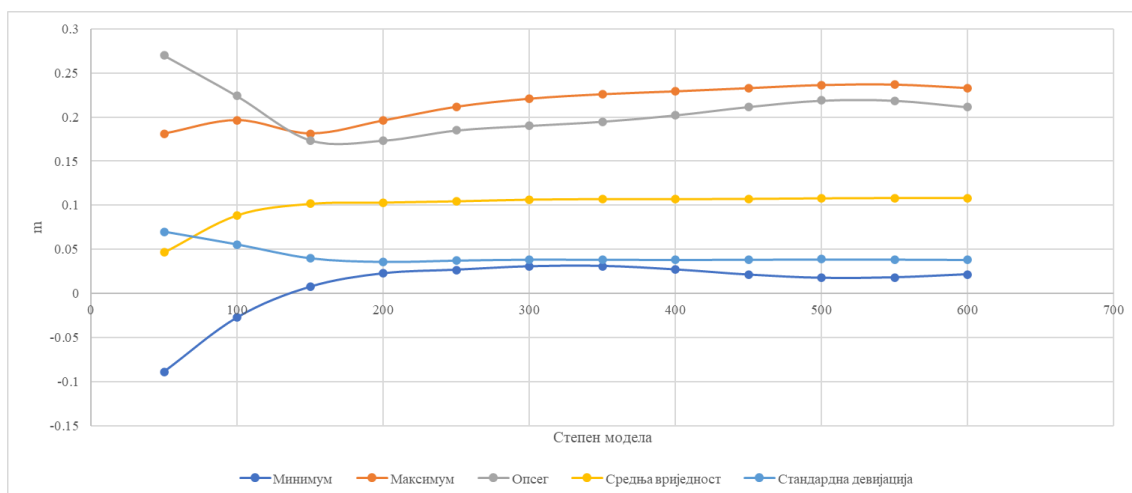
Слика 6-26 приказује динамику промјене опсега разлика аномалија висина у процесу прилагођавања модела EGM2008 терестричким подацима, у зависности од степена модела. Уочава се да опсег иницијално опада у интервалу од 0 до 200-ог степена, што указује на смањење варијација између модела и терестричких података. Ово смањење сугерише да се прецизност модела значајно побољшава са повећањем степена у овом интервалу. Након 200-ог степена, опсег се стабилизује са благим осцилацијама, што указује на постизање конзистентности у прилагођавању модела. Поред тога, благи тренд смањења опсега након 300-ог степена сугерише додатно унапређење у прецизности модела на вишим степенима, међутим на основу ових резултата, као и код аномалија убрзања, интервал од 150-ог до 200-ог степена представља оптимални распон за одабир оптималног степена, јер се у овом интервалу постиже стабилност и минималне варијације.



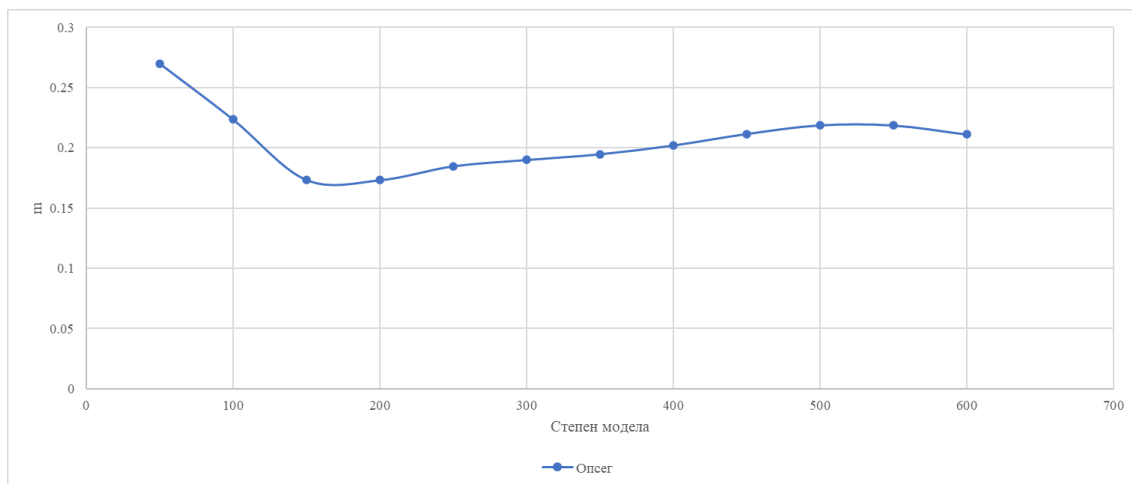
Слика 6-26: Графички приказ промјене распона разлика зависно од степена модела EGM2008 (прилагођавање аномалијама висина)

6.4.8 Провјера одабира оптималног степена са независним скупом података

У циљу потврде избора оптималног степена глобалног геопотенцијалног модела EGM2008 и његове примјенљивости у различитим регионима, извршена је анализа независног скупа података за подручје Француске. Овај скуп података, који обухвата прецизна терестричка мјерења, служио је као референтна основа за процјену модела у различитим условима. Анализа је спроведена примјеном исте нумеричке методологије као и у претходним истраживањима. Графикони у наставку (Слика 6-27 и Слика 6-28) илуструју варијације и статистичке карактеристике аномалија висина за сваки од тестираних модела.



Слика 6-27: Графички приказ промјене статистичких параметара зависно од степена модела EGM2008 (прилагођавање аномалијама убрзања за локално подручје територије Француске)



Слика 6-28: Графички приказ промјене распона разлика зависно од степена модела EGM2008 (прилагођавање аномалијама убрзања за локално подручје територије Француске)

Резултати су показали да оптимални степен глобалног геопотенцијалног модела, који је идентификован током претходних анализа, даје најбоље резултате и у контексту независног скупа података. Графикони приказују стабилну дистрибуцију вриједности, уз минималну варијабилност и високу корелацију са терестричким подацима за подручје Француске, што потврђује квалитет модела. Посебно је значајно то што је анализа показала да избор оптималног степена модела није искључиво условљен специфичностима почетног скупа података који је коришћен у процесу оптимизације. Независни подаци за Француску указују на универзалност оптималног степена модела и његову примјенљивост у различитим регионима, што је од изузетног значаја за глобалне и регионалне примјене.

Ова анализа потврђује да је одабрани степен глобалног геопотенцијалног модела довољно робустан и да може успјешно репрезентовати геопотенцијално поље без обзира на географске и топографске разлике у доступним подацима. Универзалност оптималног степена наглашава значај примјене добро избалансираних метода оптимизације у креирању глобалних модела, уз истовремено одржавање високе прецизности у локалним и регионалним анализама.

6.4.9 Прилагођавање и проширење модела EGM2008

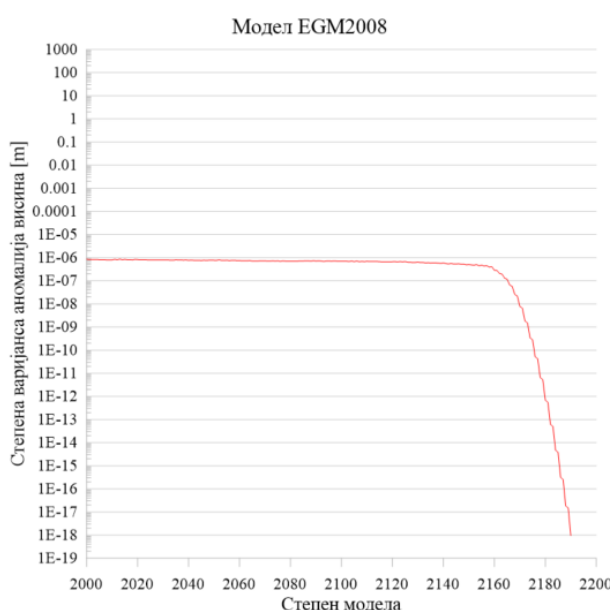
За разлику од претходног модела, GOCO05с, узимајући у обзир степен и ред модела EGM2008, у поступку прилагођавања модела и даљег креирања резидуалног модела, урађено је и проширење модела синтетички моделираним коефицијентима сферно хармонијског развоја до 2500.-ог степена и реда.

На основу анализе, како је приказано на Слици 6-22, након 2120 степена грешка степене варијансе нагло опада што није погодно за даље моделирање спектра примјеном Каула правила, јер се идентичан пад јавља и код спектра приказаног у виду степене варијансе модела на Слици 6-29, па је у те сврхе неопходно "скратити" модел до поменутог

степенa, а остатак спектра је моделиран путем Каула правила, у циљу одређивања приближних вриједности коефицијената за њихово даље моделирање.

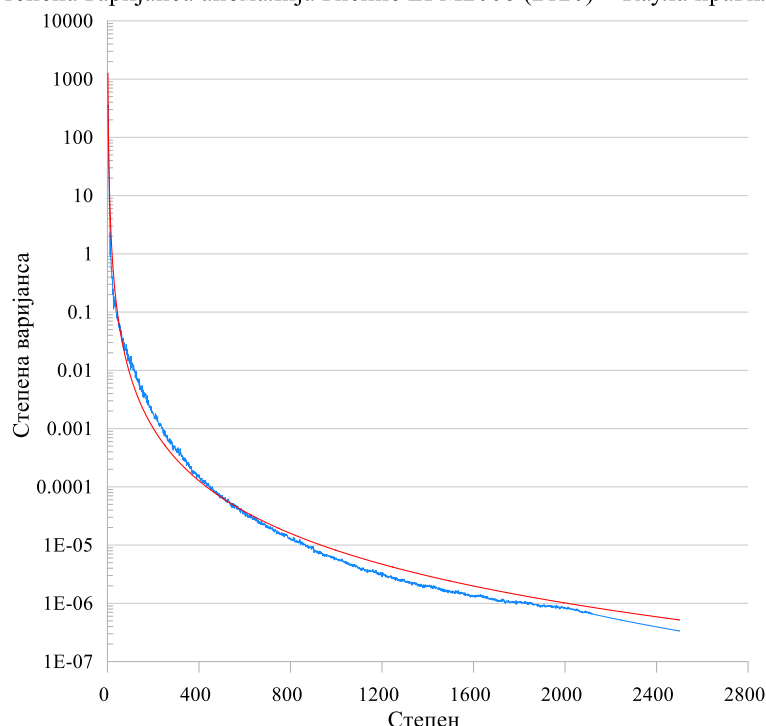
Јасно се види постепено смањење вриједности степене варијансе са повећањем степена модела. У домену од 2000. до 2160. степена, варијанса остаје релативно стабилна и константно мала. Након 2160. степена, примјећује се нагли пад спектра.

Моделирањем математичке функције и коришћењем Каула правила за проширени дио спектра, усвојен је одређени фактор опадања функције који је у сагласности са Каула правилом у циљу одређивања приближних вриједности коефицијената за даље моделирање. Као што се може видјети на Слици 6-30, дат је приказ теоријске вриједности Каула правила као и дио оригиналног спектра са моделираним наставком Каула правилом који прати тренд самог спектра.



Слика 6-29: Приказ степене варијансе аномалије висина од 2000. до 2190 степена код модела EGM2008

Степен варијанса аномалија висине ЕГМ2008 (2120) + Каула правило



Слика 6-30: Каула правило (црвена линија) и спектар степене варијансе са моделираним дијелом од 2120.ог степена (плава линија)

Процес прилагођавања ЕГМ2008 модела заснован је на методолошком приступу описаном у претходном поглављу, који обухвата интеграцију глобалних и терестричких података, формирање резидуалног модела и оптимизацију коефицијената сферно хармонијског развоја. Примјеном истих основних принципа, нови модел је прилагођен специфичностима локалног подручја, узимајући у обзир одговарајуће аномалије убрзања и њихове разлике.

Анализа новог модела укључивала је обраду укупно 82204 податка аномалија убрзања из радног скупа, које су коришћене за прилагођавање модела.

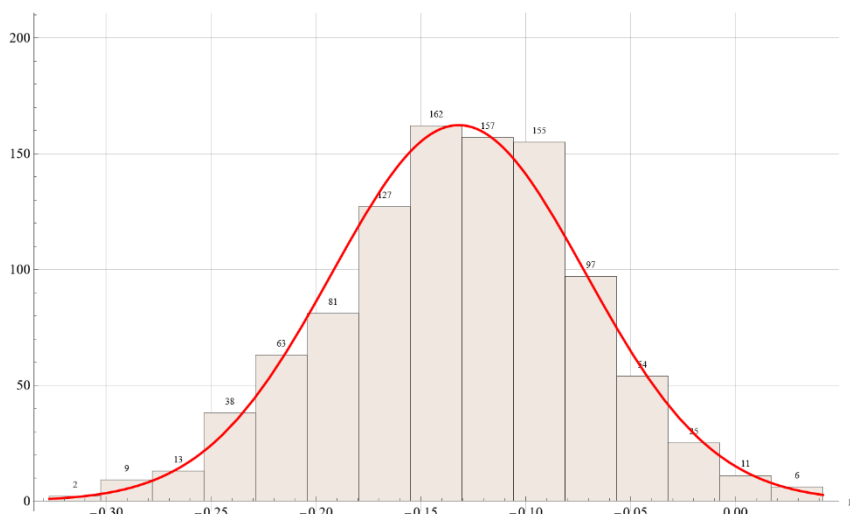
У погледу директног приступа у процесу прилагођавања модела аномалијама убрзања и анализе разлика аномалија висина $\zeta^{GGM} - \zeta^{GPS/dh}$, постигнуто је значајно побољшање усклађености модела са терестричким подацима кроз фазе прогресивног прилагођавања и моделирања коефицијената. Анализа је показала да оригинални модел (EGM2008) има распон разлика од 0.66 m, док је код синтетички проширеног модела A+B+C овај распон смањен на 0.369 m, што представља побољшање од 44.09%. Средња вриједност разлика је благо коригована са -0.13 m код оригиналног модела на -0.132 m код финалног модела, што указује на бољу стабилност прилагођеног модела. Стандардна девијација је смањена са 0.092 m на 0.060 m код модела A+B+C, што представља побољшање од 34.78%. Ови резултати јасно показују да је укључивање резидуалних модела у поступку прилагођавања омогућило значајну редукцију варијација и повећало прецизност у репрезентацији локалних карактеристика геопотенцијалног поља. Финални модел A+B+C остварио је најбоље резултате у смислу усклађености са терестричким подацима, чиме је демонстрирана ефикасност примјене резидуалног моделирања и

корекције спектралних компоненти у процесу усклађивања глобалног модела са локалним условима. Статистички параметри аномалија висина из модела и њихових разлика са терестричким мјерењима дати су у Табели 6.6.

Табела 6.6: Статистички параметри аномалија висина из модела и њихових разлика са терестричким мјерењима (EGM2008)

Параметар	Степен	Број	X_{min}	X_{max}	$X_{max} - X_{min}$	$\bar{X}$	σ
$\zeta^{EGM2008} - \zeta^{GPS/dh}$ [m]	2190	1001	-0.488	0.172	0.660	-0.130	0.092
$\zeta^A - \zeta^{GPS/dh}$ [m]	2120		-0.354	0.044	0.398	-0.127	0.069
$\zeta^{A+B} - \zeta^{GPS/dh}$ [m]	2120		-0.343	0.042	0.385	-0.131	0.061
$\zeta^{A+B+C} - \zeta^{GPS/dh}$ [m]	2500		-0.327	0.042	0.369	-0.132	0.060

Хистограм на Слици 6-31 представља расподелу разлика између аномалија висина добијених из модела A+B+C и оригиналних мјерења, нацртањен преко криве нормалне расподеле ради боље интерпретације података. Јасно уочена симетричност и облик у складу са Гаусовом кривом указују на то да су разлике у великој мјери у складу са нормалном расподелом, што сугерише добру кохерентност модела са оригиналним мјерењима. Централна вриједност расподеле, која се налази на -0.13, представља средњу разлику, док ограничено ширење података (опсег од -0.33 до 0.04) указује на релативно ниску варијабилност. Ови резултати потврђују да моделирање успјешно описује аномалије висина у анализи. У Прилогу 1 дат је просторни приказ разлика аномалија висина $\zeta^{A+B+C} - \zeta^{GPS/dh}$ проширеног модела.



Слика 6-31: Хистограм разлика аномалија висина модела A+B+C и оригиналних мјерења са нормалном расподелом (EGM2008)

Након добијеног финалног модела, извршена је транслација добијених резултата помоћу терестричких мјерених аномалија висина у циљу додатног прилагођавања модела локалном подручју, примјењујући чисто математички приступ. Овај корак омогућава

интеграцију модела са реалним терестричким подацима и доприноси оптимизацији његове употребе у прелиминарним истраживањима, као и у техничким примјенама које захтијевају прецизну репрезентацију геопотенцијалног поља.

Сви подаци садрже одређене случајне или систематске компоненте које захтијевају прилагођавање и оптимизацију. Транслација података се користи за издвајање локалних карактеристика из глобалних трендова, чиме се обезбјеђује прецизнија репрезентација геопотенцијалног поља.

Процес транслације обухвата рачунање параметара транслације и њихову примјену над контролним скупом података. Коначан скуп транслираних аномалија висина и њихових разлика са контролним скупом дат је у Табели 6.7 приказујући статистичке параметре за дате разлике.

Табела 6.7: Статистички параметри разлика транслираних аномалија висина из модела и њихових разлика са терестричким мјерењима

Параметар	Степен	Број	X_{min}	X_{max}	$X_{max} - X_{min}$	$\bar{X}$	σ
$\zeta^{A+B+C} - \zeta^{GPS/dh}$ [m]	2500	1001	-0.227	0.224	0.451	-0.000	0.053

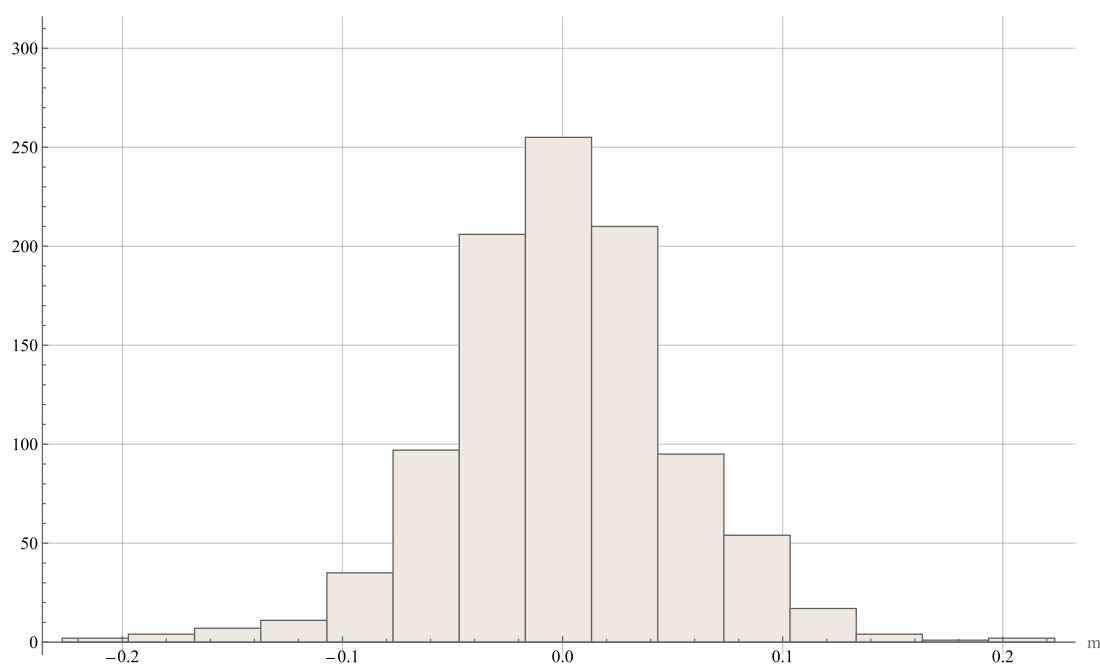
Анализом разлика аномалија висина за територију Србије извршена је класификација укупног броја тачака из контролног скупа на основу интервала вриједности разлика. Резултати показују да око **71%** скупа припада интервалу вриједности од -0.05 m до 0.05 m, што указује на релативно високу усклађеност модела са терестричким подацима. Интервал од -0.10 m до 0.10 m обухвата приближно **94%** скупа, што указује на добру усклађеност у већини скупа. Вриједности разлика у интервалу од -0.15 m до 0.15 m подразумијевају око **98%** разлика из контролног скупа, док интервал од -0.20 m до 0.20 m обухвата чак **99.6%**. Преосталих **0.4%** показује разлике изван ових интервала, углавном на локалитетима са изразито специфичним геофизичким карактеристикама. У Табели 6.8 је дат приказ података разлика распона у различитим интервалима .

Табела 6.8: Распон разлика контролног скупа са транслираним вриједностима аномалија висина

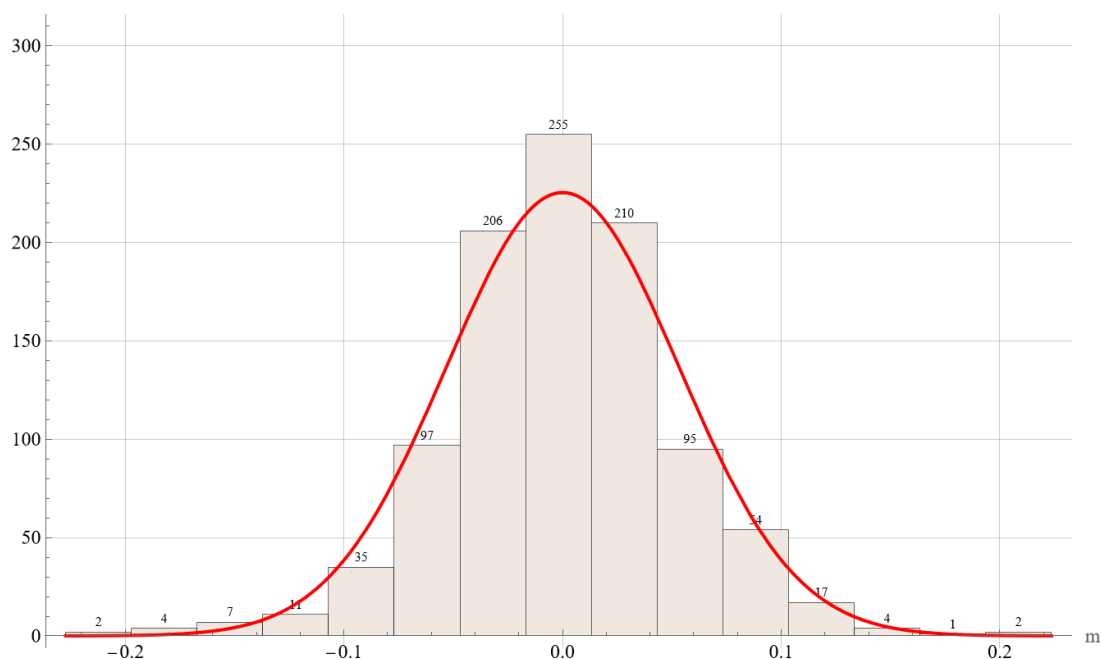
Распон разлика [m]	Број тачака	[%]
$-0.05 < \Delta\zeta < 0.05$	712	71.13
$-0.10 < \Delta\zeta < 0.10$	940	93.91
$-0.15 < \Delta\zeta < 0.15$	984	98.30
$-0.20 < \Delta\zeta < 0.20$	997	99.60

Хистограми приказани на сликама Слика 6-32 и Слика 6-33 представљају расподелу разлика аномалија висина за територију Србије, са додатком криве нормалне расподеле и вриједностима фреквенције у интервалима за другу слику. Анализа ових података указује на то да су разлике већим дијелом концентрисане око средње вриједности, која је веома близу нуле, што имплицира висок степен усклађености модела са терестричким подацима у већини подручја. Хистограм има симетричан облик са изразитим врхом, док раширени опсег вриједности, од око -0.2 m до 0.2 m, указује на присуство мањег броја

екстремних одступања. Друга слика са додатом криве нормалне расподеле показује да се подаци добро уклапају у нормалну расподелу, са највећом фреквенцијом у интервалу блиском нули, што сугерише да су системске грешке минималне. Вриједности на крајевима распона (-0.2 до -0.1 и 0.1 до 0.2) указују на одређене регионалне аномалије, које могу бити посљедица специфичних локалних геофизичких или топографских услова. Подаци из хистограма, у комбинацији са нормалном расподелом, пружају јасну слику да је већина територије Србије добро репрезентована моделом, али истовремено истичу потребу за додатним прилагођавањем у подручјима са израженим одступањима.



Слика 6-32: Хистограм разлика транслираних аномалија висина и оригиналних мјерења (EGM2008)



Слика 6-33: Хистограм разлика транслираних аномалија висина и оригиналних мјерења са датом нормалном расподелом (EGM2008)

6.4.10 Прилагођавање и проширење модела са додатком РТМ корекције

У наставку анализе модела A+B+C, који је показао значајна побољшања усклађености са терестричким подацима и редуцију варијација у репрезентацији локалних карактеристика геопотенцијалног поља, уведена је РТМ корекција како би се додатно унаприједила његова прецизност. РТМ корекција омогућава компензацију утицаја топографских маса и боље прилагођавање модела локалним условима. Овај процес је спроведен додавањем теренских ефеката уклоњених током иницијалних фаза анализе, чиме је финални модел додатно оптимизован. Укључивање теренске корекције има за циљ побољшање усклађености између глобалног модела и терестричких података, као и повећање квалитета апроксимације у опису поља теже у сложеним топографским условима.

У Табели 6.9 су дати статистички параметри срачунатих аномалија убрзања а у Табели 6.10 аномалија висина након додавања теренске корекције

Табела 6.9: Статистички параметри разлика аномалија убрзања након примјене РТМ корекције

Параметар	Број	X_{min}	X_{max}	$X_{max} - X_{min}$	$\bar{X}$	σ
Δg [mGal]	82204	-42.74	209.14	251.88	22.95	22.52
$\Delta g - \Delta g_{EGM2008} - \Delta g_{RTM}$ [mGal]		-67.87	83.96	151.83	-0.71	9.14
$\Delta g - \Delta g_A - \Delta g_{RTM}$ [mGal]		-46.23	106.42	152.66	-0.64	7.46
$\Delta g - \Delta g_{A+B} - \Delta g_{RTM}$ [mGal]		-49.38	100.07	149.45	-0.35	7.40

На Слици 6-34 хистограм приказује дистрибуцију теренских мјерења аномалија убрзања, гдје се уочава широк опсег варијација (251.88 mGal) са високим стандардним одступањем од 22.95 mGal. Ове вриједности сугеришу да сирови подаци садрже значајне локалне и регионалне аномалије које не могу бити адекватно објашњене без додатних корекција и модела. Додавањем теренске корекције код оригиналног модела долази до значајног побољшања, што је рефлектовано у сужавању дистрибуције вриједности опсега (151.83 mGal) и редукцији стандардног одступања на 9.14 mGal. Ово указује на побољшање репрезентације гравитационог поља кроз елиминацију великих систематских грешака.

Додавање теренске корекције моделима А и А+В, резултује даљим редукцијама варијација опсега (149.45 mGal) и додатним смањењем стандардног одступања на 7.40 mGal. Посебно је значајно увођење теренске корекције у финални модел (А+В), која компензује утицаје топографских маса, чиме се значајно побољшава усклађеност глобалног модела са терестричким подацима и повећава прецизност у сложеним топографским условима. Хистограм (Слика 6-35) јасно илуструје сужење дистрибуције и већу концентрацију вриједности око средње вриједности, чиме се постиже већи степен прецизности и смањује вјероватноћа екстремних одступања. Ово је директан показатељ успјешности примјене ових корекција.

Табела 6.10: Статистички параметри разлика аномалија висина након примјене РТМ корекције (EGM2008)

Параметар	Број	X_{min}	X_{max}	$X_{max} - X_{min}$	$\bar{X}$	σ
$\zeta_{EGM2008} - \zeta^{GPS/dh}$ [m]	1001	-0.488	0.172	0.660	-0.130	0.092
$\zeta_{A+B+C} + \zeta_{RTM} - \zeta^{GPS/dh}$ [m]		-0.278	0.192	0.470	-0.051	0.089

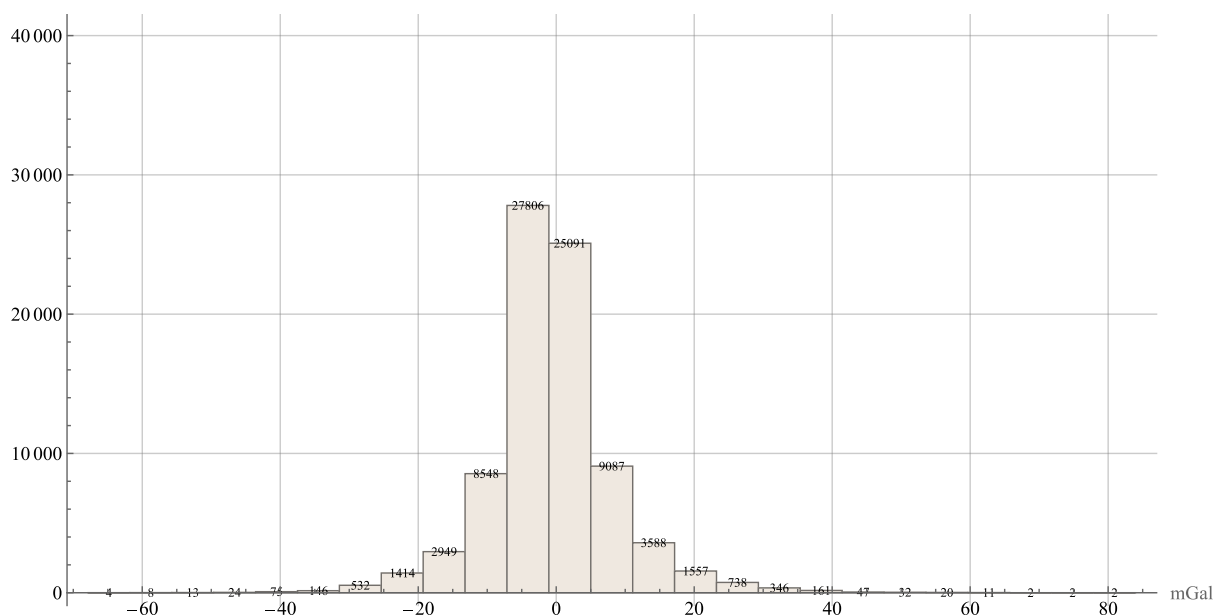
Табела 6.11: Распон разлика контролног скупа са вриједностима аномалија висина након додате РТМ корекције (EGM2008)

Распон разлика [m]	Број тачака	[%]
$-0.05 < \Delta\zeta < 0.05$	325	32.47
$-0.10 < \Delta\zeta < 0.10$	623	62.24
$-0.15 < \Delta\zeta < 0.15$	850	84.92
$-0.20 < \Delta\zeta < 0.20$	975	97.40
$-0.25 < \Delta\zeta < 0.25$	994	99.30

Анализом резултата из табела након примјене РТМ корекције добијају се значајнија побољшања, како у погледу директног тако и у погледу индиректног приступа, што се јасно може уочити из резултата приказаних у табелама. Када се посебно говори о директном приступу, може се истаћи да иако су резултати показали боље резултате у односу на оригинални модел, након примјене РТМ корекције над већ новокреираним моделом, нису се добила значајнија побољшања.

Код индиректног приступа јасно се види јасно веће побољшање стандардне девијације, што указује на висок степен сагласности и примјене у *remove-restore* методи, што и

представља централно мјесто у примјени ове методе. Расподјела је централизована и симетрична у односу на средњу вриједност, која је блиска нули.

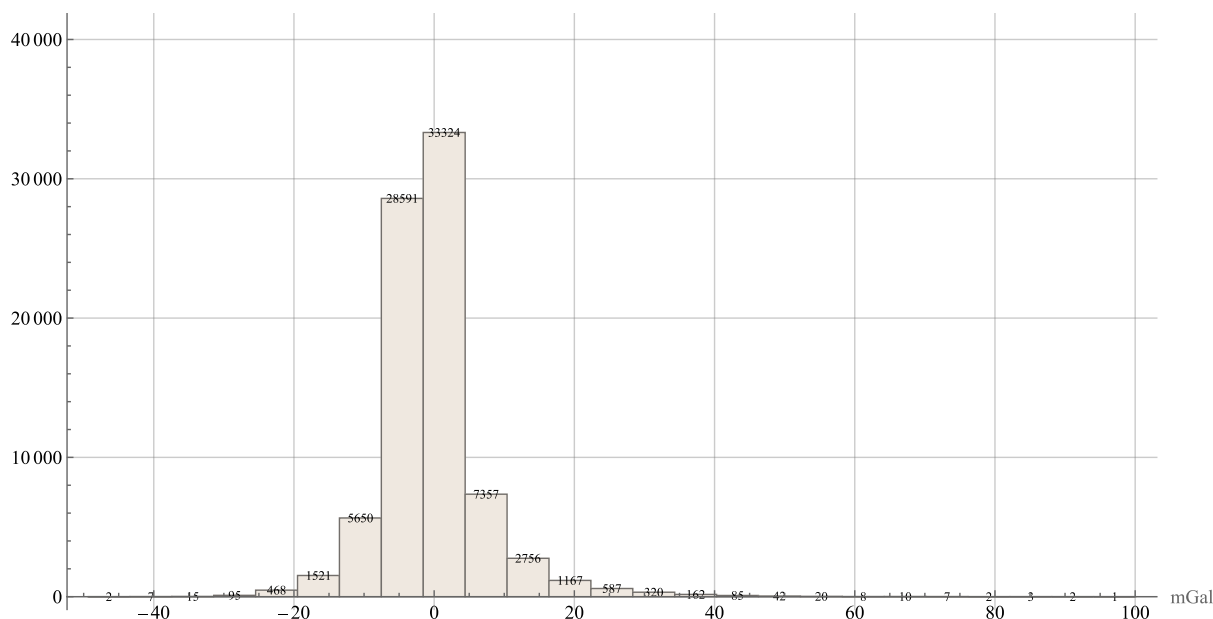


Слика 6-34: Хистограм разлика аномалија убрзања оригиналног модела (EGM2008) и радног скупа са додатом теренском корекцијом

Хистограм на Слици 6-35 приказује дистрибуцију података након примјене модела A+B са теренском корекцијом, гдје се веома висок проценат података налази унутар ужих интервала око средње вриједности, док је мали број података присутан на екстремним крајевима дистрибуције. Ово јасно показује ефикасност модела у редукцији варијација и побољшању усклађености са терестричким подацима. У Прилогу 5 је дат општи облик површи разлика аномалија убрзања терестричких мјерења и модела A+B (EGM2008) са додатом РТМ корекцијом.

Највећи дио података (87.82%) налази се у уском интервалу $[-10, 10]$ mGal, што указује на високу прецизност модела у опису геопотенцијалног поља у том распону. Ширењем интервала на $[-20, 20]$ mGal, обухвата се 97.40% података, док интервал $[-30, 30]$ mGal обухвата чак 99.30% података. У интервалу $[-40, 40]$ mGal обухваћено је 99.77% података, док се скоро сви подаци (99.92%) налазе унутар интервала $[-50, 50]$ mGal. Ово оставља само 0.08% података изван интервала $[-50, 50]$ mGal, што одговара око 72 податка од укупно 82204.

Подаци на крајевима хистограма, који чине свега 0.09% укупне дистрибуције, представљају изузетке и могу бити посљедица локалних аномалија или недовољно моделираних топографских услова.



Слика 6-35: Хистограм разлика аномалија убрзања $A+B$ модела и радног скупа са додатом теренском корекцијом

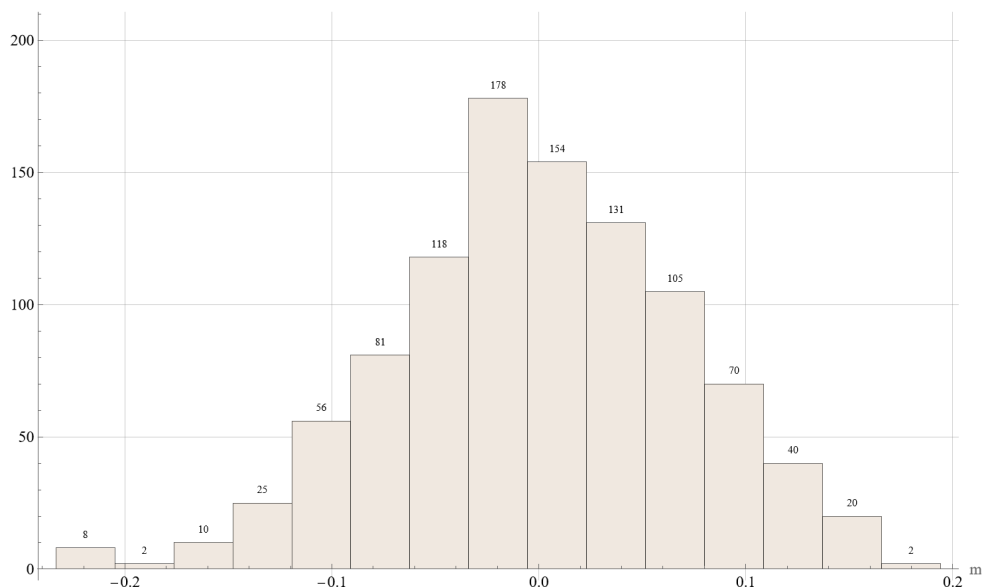
Поред примјене теренске корекције на аномалије убрзања, овај поступак је примјењен и на аномалије висина, са циљем да се додатно побољша репрезентација локалних топографских карактеристика у моделирању геопотенцијалног поља. Аномалије висина су осјетљиве на варијације терена, посебно у областима са сложеном топографијом, гдје топографске масе значајно утичу на резултујуће вриједности геопотенцијала. Увођењем теренске корекције у анализу аномалија висина омогућено је елиминисање утицаја ових маса, чиме се постигла боља усклађеност са терестричким подацима и смањење систематских грешака.

Након примијењене теренске корекције извршена је транслација аномалија висина и разлике са терестричким мјерењима су поново срачунате гдје су статистички параметри дати у Табели 6.12 а хистограм на Слици 6-36.

Табела 6.12: Статистички параметри разлика транслираних аномалија висина из модела $A+B$ и њихових разлика са терестричким мјерењима након додате теренске корекције

Параметар	Степен	Број	X_{min}	X_{max}	$X_{max} - X_{min}$	$\bar{X}$	σ
$\zeta^{A+B+C} - \zeta^{GPS/dh}$ [m]	2500	1001	-0.233	0.194	0.428	-0.000	0.071

Додавање теренске корекције је резултовао значајним сужењем распона дистрибуције аномалија висина, што указује на повећану прецизност модела. Резултати анализе показују да је доминантан број података концентрисан у веома уским интервалима око нуле, док је само минималан број података присутан на крајевима дистрибуције. Ово сугерише да је теренска корекција успјешно компензовала локалне топографске утицаје, чиме су постигнуте вриједности ближе реалним условима на терену.



Слика 6-36: Хистограм разлика аномалија висина транслираног $A+B$ модела и контролног скупа са додатом теренском корекцијом

На приказаном хистограму (Слика 6-36), види се изузетна усклађеност са терестричким подацима, што указује на високу прецизност модела након примјене теренске корекције. Хистограм указује на јасну концентрацију података око средње вриједности, што је карактеристика високо прецизног модела. У најужем интервалу $[-0.05, 0.05]$ m регистровано је 525 података, што представља 52.45% укупног скупа, док проширење интервала на $[-0.1, 0.1]$ m обухвата чак 83.12% података. Даљим ширењем интервала на $[-0.15, 0.15]$ m обухваћено је 97% података, а у интервалу $[-0.2, 0.2]$ m чак 99.10%, што указује на минималну количину изузетних вриједности у дистрибуцији.

Потпуно укључивање свих података (100%) постиже се у интервалу $[-0.25, 0.25]$ m, што показује да су сви преостали подаци ограничени у веома узак распон вриједности, са изузетно малим одступањима. Ова дистрибуција одражава успјех теренске корекције у елиминацији систематских грешака и редукцији варијација које настају услед топографских маса. Средишњи дио хистограма доминира, са највећим бројем података концентрисаних око нуле, што додатно указује на ефикасност модела у компензацији локалних аномалија.

Крајеви хистограма, који обухватају изузетке у интервалу између $[-0.2, 0.2]$ и $[-0.25, 0.25]$, представљају само 0.9% укупног скупа података. Ови изузеци могу бити резултат специфичних локалних услова или варијација у теренским карактеристикама које нису у потпуности обухваћене корекцијама. Њихова маргинална заступљеност указује на то да модел не само да исправно репрезентује геопотенцијално поље, већ и да је високо примјенљив у различитим топографским и геолошким условима.

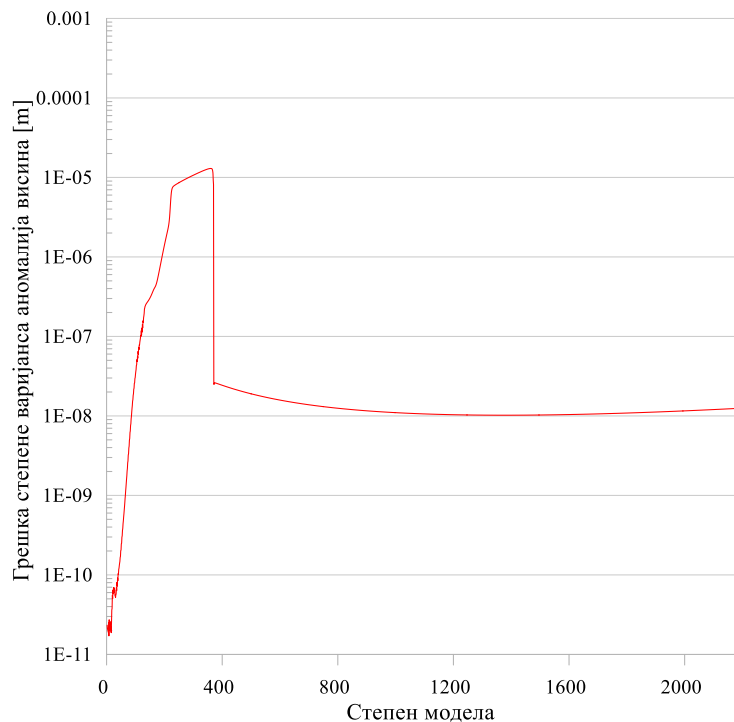
6.4.11 Прилагођавање модела EIGEN6C4

Истраживање је настављено кроз прилагођавање модела EIGEN6C4. Овај глобални геопотенцијални модел, који представља један од најсавременијих и најпрецизнијих модела своје врсте, комбинује сателитске податке из различитих мисија са терестричким мјерењима, пружајући високу резолуцију и ниво апроксимације поља. Упркос његовим значајним предностима у глобалним примјенама, модел EIGEN6C4, као и његови претходници, може показати ограничења у локалним подручјима услед недовољне репрезентације регионалних варијација гравитационог поља.

У анализи модела EIGEN6C4 примјењен је поступак који укључује прилагођавање глобалног модела са терестричким подацима коришћењем аномалија убрзања и аномалија висина. Сprovedена је анализа степене варијансе грешака аномалија висина у циљу утврђивања динамике прецизности модела у зависности од степена хармоника.

Графички приказ на Слици 6-37 спектра грешке степене варијансе за модел EIGEN6C4 откривају неколико значајних трендова:

1. **Иницијални максимум грешке:** Примјећује се локални максимум грешке у интервалу до 360. степена. Овај тренд указује на присуство значајних варијација у овом опсегу, што је последица недостатка финијег моделирања регионалних карактеристика гравитационог поља.
2. **Стабилизација грешке:** Након почетног опадања грешке, уочава се релативна стабилност у интервалу од 400. до 2000. степена, са минималним осцилацијама. Овај интервал представља зону најбољег квалитета апроксимације модела за глобалне примјене.
3. **Крај спектра:** У интервалу изнад 2000. степена, уочава се благи пад грешке, док након 2200. степена грешка нагло опада, што је типично за моделе који укључују фино структуриране варијације.



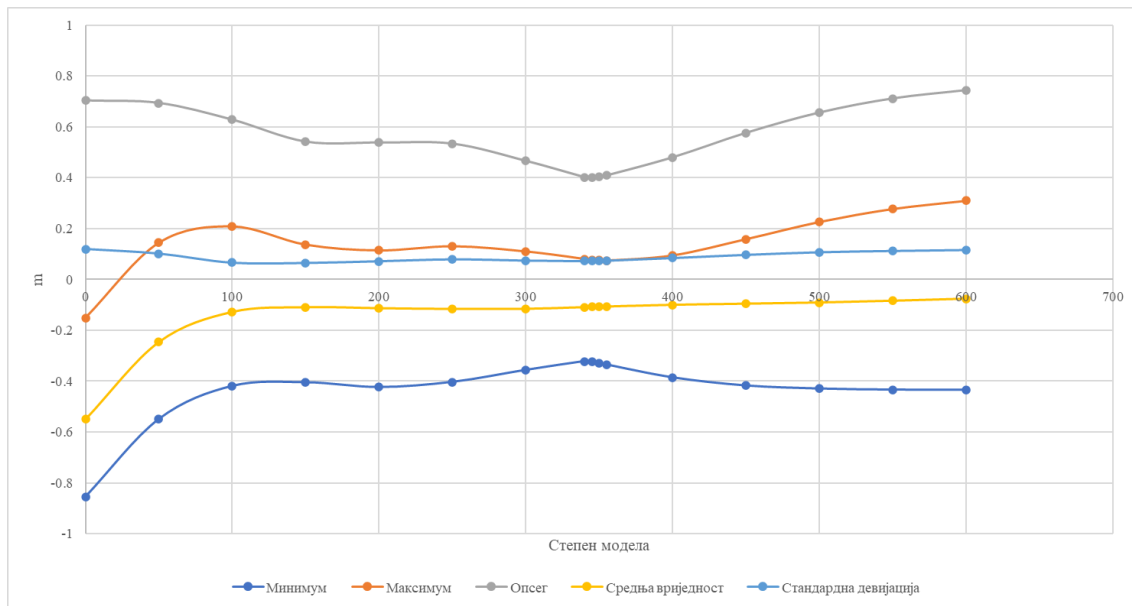
Слика 6-37: Приказ степене варијансе аномалије висина код модела EIGEN6C4

Оптимални степен за примјену модела EIGEN6C4 у контексту локалног прилагођавања се претпоставља да би могао да се налази у опсегу локалних минимума и максимума, односно до 400.-ог степена.

Примјеном нумеричких метода и упоређивањем статистичких параметара разлика аномалија висина у контролним тачкама, извршена је анализа спектра модела EIGEN6C4 у интервалу од 0 до 600 степени са инкрементом од 50. Графички прикази (Слика 6-38 и Слика 6-39) и анализа резултата показују следеће закључке:

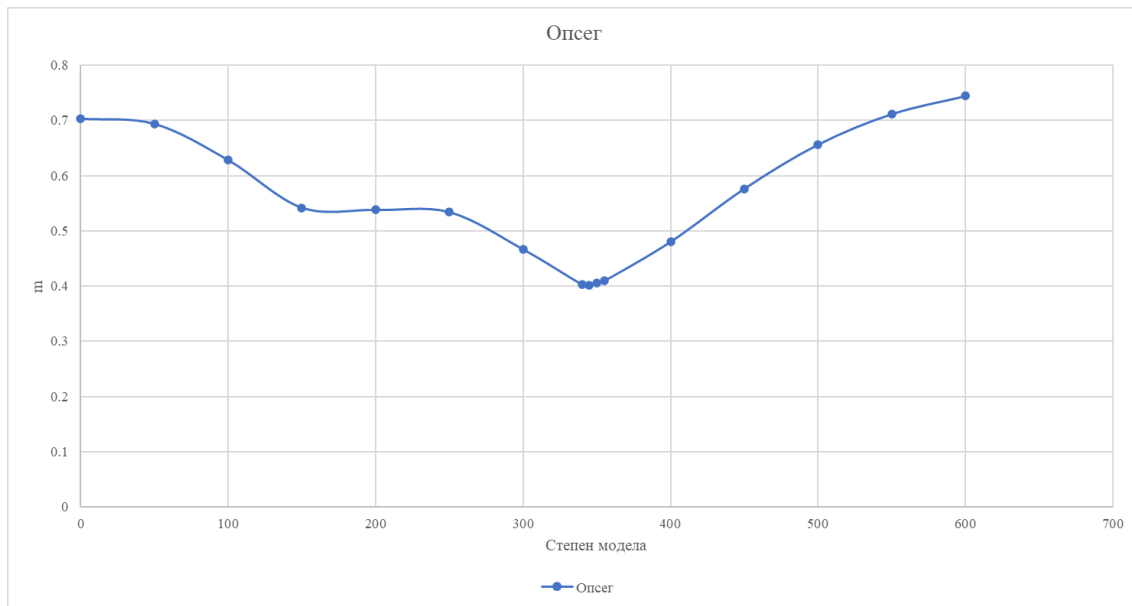
1. **Минималне вриједности разлика:** Постепено опадају са повећањем степена модела, достижући стабилност у интервалу између 340. И 350. Степена.
2. **Максималне вриједности разлика:** Остају релативно стабилне након почетних 100 степени, што указује на досљедност модела у репрезентацији позитивних варијација.
3. **Опсег разлика:** Смањује се у нижим степенима и остаје стабилан до 350. степена након чега почиње поново да расте.
4. **Средња вриједност и стандардна девијација:** Средња вриједност остаје близу нуле, док стандардна девијација показује тренд стабилизације са повећањем степена модела.

На основу извршене анализе, оптимални степен за примјену модела EIGEN6C4 у контексту локалног прилагођавања је 345.-и степен.



Слика 6-38: Графички приказ промјене статистичких параметара зависно од степена модела EIGEN 6C4 (прилагођавање аномалијама убрзања)

Графички приказ опсега разлика у зависности од степена модела EIGEN6C4 указује на значајне трендове у динамици прецизности модела. У интервалу од 0 до 350 степени уочава се континуирано смањење опсега, што рефлектује побољшање усклађености модела са терестричким подацима и смањење варијација. Минимум опсега је достигнут у интервалу између 340. и 350. степена, што означава оптималну тачку стабилности модела са најмањим варијацијама. Након 350.-ог степена примјетан је постепени раст опсега, који указује на повећање утицаја високофреквентних компоненти и финог структуралног детаља, али и на могућност смањења стабилности модела у том домену. Континуирани пораст опсега у високим степенима, изнад 500, може се приписати сложенијој репрезентацији гравитационог поља, али са ограниченом промјенљивошћу у практичним истраживањима. Ова анализа показује да је одабир 345. степена оптималан за примјену модела, јер обезбјеђује најбољи баланс између квалитета апроксимације и стабилности у репрезентацији локалног гравитационог поља.



Слика 6-39: Графички приказ промјене распона разлика зависно од степена модела EIGEN 6C4 (прилагођавање аномалијама убрзања)

Нови модел је укључивао обраду истог сета података са укупно 82204 аномалије убрзања из радног скупа, које су коришћене за прилагођавање модела. У процесу прилагођавања модела аномалијама убрзања, постигнуто је значајно побољшање. Оригинални модел (EIGEN6C4) има распон разлика од 0.570 m, док је код синтетички проширеног модела A+B+C овај распон смањен на 0.482 m, што представља побољшање од 15.44%. Средња вриједност разлика је благо коригована са -0.121 код оригиналног модела на -0.133 m код финалног модела, што указује на бољу стабилност прилагођеног модела. Стандардна девијација је смањена са 0.074 m на 0.076 m код модела A+B+C, што представља благо повећање од 2.7%, али овај резултат сугерише да је модел задржао високу стабилност упркос сложености усклађивања са терестричким подацима. Ови резултати показују да је укључивање резидуалних модела допринијело смањењу варијација и очувању прецизности у репрезентацији локалних карактеристика геопотенцијалног поља. Статистички параметри моделирања коефицијената са овим моделом су дати у Табели 6.13.

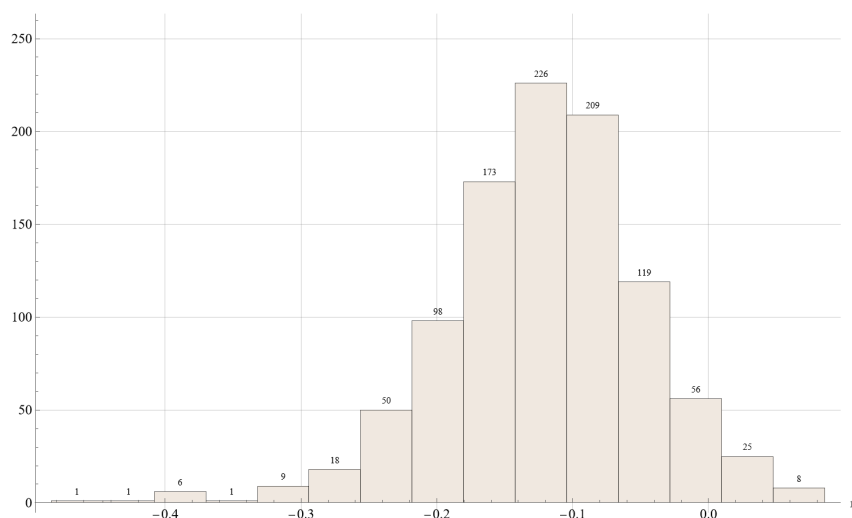
Табела 6.13: Статистички параметри аномалија висина из модела и њихових разлика са терестричким мјерењима (EIGEN6C4)

Параметар	Степен	Број	X_{min}	X_{max}	$X_{max} - X_{min}$	$\bar{X}$	σ
$\zeta^{EIGEN6C4} - \zeta^{GPS/dh}$ [m]	2190	1001	-0.484	0.186	0.570	-0.121	0.074
$\zeta^A - \zeta^{GPS/dh}$ [m]	2190		-0.353	0.085	0.438	-0.118	0.072
$\zeta^{A+B} - \zeta^{GPS/dh}$ [m]	2190		-0.386	0.083	0.469	-0.133	0.076
$\zeta^{A+B+C} - \zeta^{GPS/dh}$ [m]	2500		-0.401	0.081	0.482	-0.133	0.076

Компаративна анализа параметара из Табеле 6.13 и Табеле 6.6 указује на значајне разлике у статистичким карактеристикама, иако постоје и одређене сличности, имајући

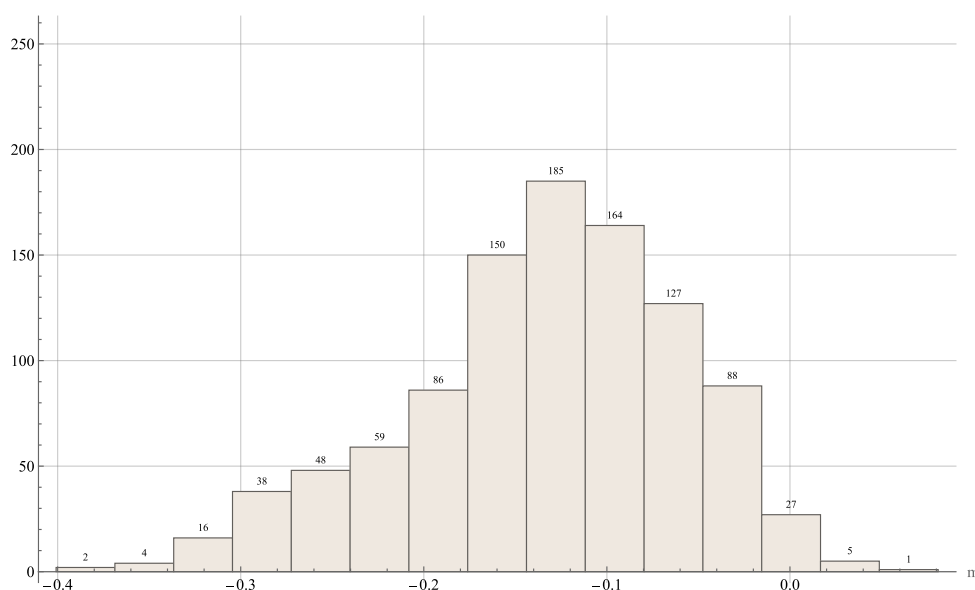
у виду да је дио података из модела EGM2008 коришћен за моделирање EIGEN6C4 модела. Упоредивањем оригиналних модела показује се да EGM2008 има нешто ниже вриједности минималних и максималних вриједности у односу на EIGEN6C4, али већи опсег вриједности (0.660 и 0.570 респективно), као и већу стандардну девијацију (0.092 према 0.074). Упоредивањем првог прилагођеног модела А, минималне вриједности су сличне, али EGM2008 показује значајно ужи опсег (0.398 према 0.438), те мању стандардну девијацију (0.069 према 0.072). Додатним моделирањем са првим резидуалним моделом наставља се сличан тренд, у односу на EIGEN6C4, што резултира ужим опсегом и мањом варијабилношћу. Финално, показује се да EGM2008 има ниже вриједности екстремних вриједности, као и мањи опсег и нешто мању стандардну девијацију. Као што се да закључити, EGM2008 даје боље резултате у поступку прилагођавања у односу на нови модел, али с обзиром да сама методологија има за циљ моделирање коефицијената модела, треба истаћи да је предложени приступ показао значајан напредак у самом моделирању синтетичких коефицијената. У Прилогу 3 приказан је просторни распоред разлика терестричких мјерења и модела у анализираном подручју.

На Слици 6-40 је дат хистограм који представља разлике између EIGEN6C4 модела и терестричких мјерења, који показује приближно симетричну расподелу са највећом концентрацијом вриједности у интервалу од -0.2 m до -0.1 m, што указује на добру конзистентност модела са већином терестричких података. Средња вриједност разлика и релативно уска стандардна девијација указују на висок степен прецизности модела, са већином вриједности концентрисаних у централном дијелу расподеле. Изразито мањи број екстремних вриједности на оба краја сугерише присуство репова који одражавају мање локалне варијације или грешке у мјерењима. Највећа фреквенција је забиљежена у централном интервалу са 226 вриједности, док се фреквенције постепено смањују ка крајевима расподеле. Ова расподела указује на добру поузданост EIGEN6C4 модела у већем дијелу анализираног подручја, са ријетким, али присутним значајнијим одступањима, која би могла бити предмет даљег истраживања ради унапрјеђења модела.



Слика 6-40: Хистограм разлика аномалија висина оригиналног модела (EIGEN6C4) и контролног скупа

Хистограм дат на Слици 6-41 који представља разлике за модел A+B+C показује расподелу која је приближно симетрична, али са благом асиметријом према позитивним вриједностима. Највећа концентрација података налази се у интервалу од -0.2 m до -0.1 m, са максималном фреквенцијом од 164 вриједности, што одражава доминантну усаглашеност модела са мјерењима у овом опсегу. Средња вриједност разлика указује на лагано помјерање према негативним вриједностима, док стандардна девијација сугерише умјерену варијабилност у подацима. Лијеви дио расподеле садржи минималан број фреквенција, док десни дио показује нешто веће фреквенције, али остаје релативно мање заступљен са само неколико. Ова расподела указује на високу прецизност модела у већем дијелу података, док присуство репова и екстремних вриједности сугерише могућност локалних одступања или грешака у мјерењима.



Слика 6-41: Хистограм разлика аномалија висина A+B+C модела (EIGEN6C4) и контролног скупа

Након добијања иницијалног модела за друго поглавље, извршена је додатна анализа и трансформација резултата. Примјењен је математички приступ који обухвата израчунавање корекционих параметара на основу контролног скупа, како би се обезбиједила боља усаглашеност модела са реалним терестричким мјерењима. Овај корак је кључан јер омогућава уклањање систематских грешака, минимизовање одступања и побољшање прецизности модела у контексту специфичних географских и геодетских услова анализираних подручја.

На основу добијених резултата, извршена је верификација примјеном статистичке анализе разлика између оригиналног и коригованог скупа података. У Табели 6.14 дати су статистички параметри који описују разлике након трансформације.

Табела 6.14: Статистички параметри разлика транслираних аномалија висина из модела $A+B+C$ и њихових разлика са терестричким мјерењима

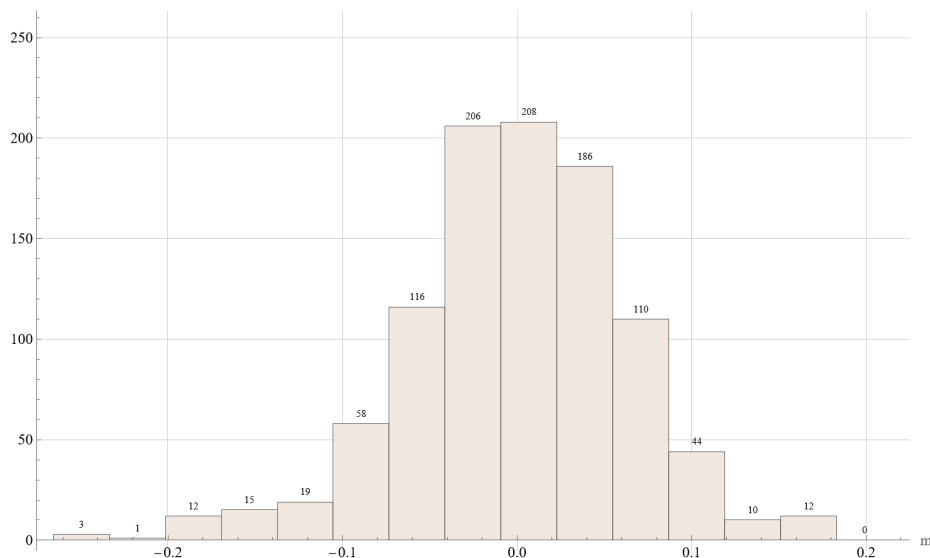
Параметар	Степен	Број	X_{min}	X_{max}	$X_{max} - X_{min}$	$\bar{X}$	σ
$\zeta^{A+B+C} - \zeta^{GPS/dh}$ [m]	2500	1001	-0.266	0.215	0.481	-0.000	0.064

Након спроведене транслације модела, добијени подаци у Табели 6.15 указују на унапређење прецизности и усаглашености модела са терестричким мјерењима. Уочава се да је 60.74% вриједности концентрисано у уском интервалу од $[-0.05, 0.05]$, што указује на висок квалитет апроксимације и сагласност већег дијела резултата, док чак 90.41% вриједности пада у шири, али и даље уски интервал од $[-0.1, 0.1]$, чиме се потврђује ефикасност оптимизације модела у смањивању систематских грешака. Даље, 96.10% вриједности налази се унутар интервала $[-0.15, 0.15]$, што одражава минимално присуство већих одступања, док се 99.50% вриједности налази унутар интервала $[-0.2, 0.2]$, показујући готово потпуну покривеност података у практичном распону за техничке примјене. У најширем интервалу $[-0.25, 0.25]$, 99.80% вриједности додатно потврђује да су екстремна одступања сведена на минимум.

Табела 6.15: Распон разлика контролног скупа са транслираним вриједностима аномалија висина

Распон разлика [m]	Број тачака	[%]
$-0.05 < \Delta\zeta < 0.05$	608	60.74
$-0.10 < \Delta\zeta < 0.10$	905	90.41
$-0.15 < \Delta\zeta < 0.15$	962	96.10
$-0.20 < \Delta\zeta < 0.20$	996	99.50

У наставку на Слици 6-42 приказан је хистограм са расподјелом резултата након транслације модела, са централном концентрацијом вриједности око нуле, што указује на висок степен прецизности и усаглашености модела са терестричким мјерењима. Највећа фреквенција је забележена у интервалима близу средње вриједности, гдје се налази већина вриједности. Са смањењем фреквенција на обе стране централне вриједности, расподјела показује благе репове, што указује на минимално присуство већих одступања. Крајеви расподјеле, који садрже најмањи број вриједности налазе се у екстремним интервалима, што сугерише да је већина одступања ограничена на уски распон. Ова расподјела указује на успјешну интеграцију модела са локалним терестричким подацима, при чему је централна тенденција резултата уско концентрисана око нуле, а одступања сведена на минимум.



Слика 6-42: Хистограм разлика аномалија висина транслираног $A+B+C$ модела и контролног скупа

6.4.12 Коначан допринос истраживањима

Након спроведених истраживања, примјене детаљне методологије и реализације нумеричких анализа, може се рећи да је ово истраживање постигло успјех и дало значајно боље резултате у односу на досадашња истраживања у овој области.

Примјењени приступ је обухватио како теоријске аспекте, тако и нумеричка истраживања заснована на синтетичким и реалним подацима, што је омогућило свеобухватну евалуацију предложене методологије. Резултати истраживања су показали значајна побољшања у односу на досадашње методе и процедуре, као и потврду ефикасности предложеног метода у односу на традиционалне приступе. Примјена РТМ корекције довела је до смањења распона вриједности, побољшала тачност и омогућила стабилније и прецизније резултате, као и симетричне и централније резидуалне аномалије убрзања, заједно са симетричном расподелом. Постигнута прецизност и унапријеђене методе представљају скроман допринос у побољшању и у даљем развоју ове области.

7. ЗАКЉУЧНА РАЗМАТРАЊА

Новокреирани модел пружа значајне могућности за примјену у одређивању локалних нивоских површи. Његова директна примјена као довољне мјере показала се ефикасном за многе активности, укључујући и поступке *remove-restore* методе. Овако припремљени ГГМ-и предуслов су за постизање центиметарског нивоа апроксимације геоида при примјени ове методе, а сам модел је више него адекватан за прелиминарне анализе и бројне практичне активности путем примјене у директном приступу.

За прецизније примјене, као што је постизање центиметарског нивоа апроксимације у одређивању геоида, *remove-restore* метода остаје незамјенљива. Међутим, ново моделирани синтетички модел је довољан за прелиминарне анализе и активности које не захтијевају високу резолуцију и већи ниво апроксимације. Његова примјена је посебно корисна у почетним фазама истраживања, гдје је потребно брзо и ефикасно одредити локалне карактеристике геопотенцијалне површи.

Проширење и побољшање модела захтијевају интеграцију физичких карактеристика које су кључне за моделирање коефицијената сферно-хармонијског развоја. Строго математички приступ, без узимања у обзир физичких својстава, може довести до одступања од самог концепта физичке геодезије. Примјер за то је моделирање остатка спектра помоћу Каула правила, које генерално пружа добру сагласност са теоријским вриједностима коефицијената. Међутим, показало се да да употреба приближних вриједности коефицијената (нпр. узимањем вриједности нула умјесто теоријских вриједности) доводи до значајно боље сагласности модела са локалним подручјем.

Такође, анализом свих података евидентно је постојање тренда у подацима који се могу моделирати и отклонити. Међутим, у таквим случајевима, моделира се искључиво математичка површ која не одражава стварне физичке особине Земље и њеног гравитационог поља.

Примјена новодобијеног модела је двострука и може се користити директно, за одређивање површи геоида као и индиректно у интеграцији процеса *remove-restore* методе.

Remove-restore подразумијева уклањање дуготаласних компоненти гравитационог поља, које су представљене глобалним моделима попут ГГМ-а, као и топографских ефеката, прије него што се изврши локална анализа података. Након обраде, уклоњене компоненте се поново додају како би се добио коначни модел. Овај приступ омогућава фокусирање на резидуалне аномалије гравитационог поља, које садрже информације о локалним варијацијама.

У овом контексту, директно коришћење ГГМ-а је могуће без примјене брзих Фуријеових трансформација, што представља специфичан приступ који заобилази традиционалне методе обраде и отвара нове могућности за анализу података.

Посебно значајан аспект је РТМ (*Residual Terrain Model*) корекција, која подразумијева уклањање топографских ефеката са циљем да се добију резидуалне аномалије. Ове аномалије треба да буду симетричне, са централизованом расподелом. РТМ подразумијева израчунавање разлике између стварне топографије и референтне површине, чиме се добијају резидуалне вриједности које представљају локалне

варијације терена. Ове резидуалне вриједности се затим користе за корекцију података, што омогућава прецизније моделовање локалних аномалија гравитационог поља.

На основу спроведеног истраживања и добијених резултата, јасно је да предложена методологија резидуалног прилагођавања и примјена синтетичких модела значајно доприноси унапрјеђењу прецизности и усклађености глобалних модела гравитационог поља са терестричким подацима.

Анализа прилагођавања модела GOCO05с показала је поступно побољшање кроз додавање додатних компоненти, што је резултирало прецизнијим представљањем гравитационог поља. Индиректни приступ резидуалног прилагођавања довео је до смањења распона вриједности за 20.22% и значајног смањења стандардне девијације за скоро 33% код резидуалних аномалија убрзања.

Код директног приступа, евалуацијом аномалија висина, иако су финални модели показали уједначенију расподелу разлика и смањење варијабилности, укупно побољшање статистичке прецизности није било изразито значајно.

Синтетички проширени модели засновани на EGM2008 показали су најбоље резултате. Примјеном теренске корекције у прилагођеним моделима А и А+В, у погледу индиректног приступа, постигнуто је додатно унапређење резултата код индиректног приступа, смањењем распона варијација на 149.45 mGal и стандардне девијације на 7.40 mGal.

Синтетички проширени модел А+В+С код директног приступа показао је значајно побољшање, смањујући распон разлика на 0.369 m, указујући на побољшање од 44.09% за дати параметар. Средња вриједност разлика благо је коригована са -0.13 m на -0.132 m, што указује на већу стабилност прилагођеног модела, док је стандардна девијација смањена са 0.092 m на 0.060 m, што представља побољшање од 34.78%.

Компаративна анализа EGM2008 и EIGEN6C4 модела показала је да EGM2008 генерално даје боље резултате у процесу прилагођавања. EGM2008 има ниже минималне и максималне вриједности у поређењу са EIGEN6C4, али и већи распон вриједности, као и већу стандардну девијацију. Прилагођавањем модела, EGM2008 даје ужи распон и мању стандардну девијацију, гдје су ови трендови задржани и при додатном моделирању резидуалним компонентама.

7.1 ПРЕПОРУКЕ ЗА БУДУЋА ИСТРАЖИВАЊА

На основу претходних закључака, могу се предложити правци даљих истраживања како у циљу унапрјеђења постојеће методологије, тако и кроз дефинисање нових приступа за моделирање коефицијената будућих геопотенцијалних модела. Ове препоруке усмјерене су ка побољшању квалитета апроксимације и резолуције модела, што би омогућило значајан допринос у области геодезије, нарочито у:

- моделирању топографије терена и топографских маса,
- одређивању геоида,
- моделирању гравитационог поља у приобалним подручјима океана и мора,

- побољшању примјене глобалних геопотенцијалних модела у регионалним истраживањима.

Препоруке за будуће геопотенцијалне моделе у циљу њиховог адекватног моделирања и унапријеђења су (Joksimović & Odalović, 2025):

- Обезбиједити гравиметријска мјерења са одговарајућом просторном резолуцијом (3 лучна минута у оба правца, сјевер–југ и исток–запад, уз тачност већу од 0.03mGal. Ова тачност мјерења произилази из чињенице да узимајући природу феномена и динамичких процеса који се одвијају на Земљи, овај праг се узима као релевантан за тачност гравиметријских мјерења који описује у набољој мјери примјене у пољу теже Земље (Sanso & Sideris, 2013)).
- Дигитални модел терена резолуције најмање једне лучне секунде у оба правца, са тачношћу не мањом од десет метара.
- Дискретне вриједности аномалија висина или ундулација геоида распоређене унутар локалног подручја, са просторном резолуцијом од 10 km у оба правца.
- Аномалије слободног ваздуха одређене изнад водених површи примјеном сателитске алтиметрије, чиме би се повећала прецизност гравитационих модела у приобалним зонама.
- Батиметријски модели високе резолуције, који би омогућили боље моделирање гравитационог поља у приобалним и другим подручјима покривеним водом.
- Међународну размјену података са сусједним државама ради побољшања квалитета регионалних модела, нарочито у граничним зонама гдје би интеграција података довела до прецизнијих резултата.
- Коришћење других извора података и њихово комбиновање (гравиметријска мјерења, сателитска алтиметрија, батиметрија, нови глобални геопотенцијални модели) ради боље интеграције и повећања тачности.
- Примјена високорезолуционих регионалних модела у комбинацији са глобалним моделима ради побољшања просторне резолуције и тачности предикције параметара гравитационог поља.
- Успостављање механизма интердисциплинарне и међудржавне сарадње кроз размену података, заједничке пројекте и примјену стандардизованих протокола у обради и анализи геопотенцијалних података.

Ове препоруке имају за циљ побољшање квалитета геопотенцијалних модела и проширење њихове примјене у геодезији, геофизици и другим научним дисциплинама, у циљу добијања готовог производа изузетно високе тачности за будућа истраживања, гдје је важно напоменути да ниво апроксимације глобалних геопотенцијалних модела не зависи примарно од територије, већ од дистрибуције и карактеристика топографских маса.

8. ЛИТЕРАТУРА

- Akdoğan, Y. A., Yildiz, H. & Ahi, G. O., 2019. Evaluation of global gravity models from absolute gravity and vertical gravity gradient measurements in Turkey. *Measurement Science and Technology*, 30(11).
- Arabelos, D. & Tziavos, I. N., 1987. A comparison of two methods to compute degree variances of the gravity field. *Manuscr. Geod.*, Том 12.
- Barthelmes, F., 2014. Global Models. *У: Encyclopedia of Geodesy*. s.l.:Springer International Publishing, pp. 120-128.
- Barzaghi, R., 2016. The Remove-Restore Method. *У: M. G. Sideris, yp. Encyclopedia of Geodesy*. s.l.:Springer International Publishing, pp. 57-60.
- Bjerhamer, A., 1969. *On the boundary value problem of physical geodesy*. s.l., Royal Institute of Technology, Stockholm.
- Bjerhammar, A., 1975. Discrete solutions of the boundary value problem in physical geodesy.
- Colombo, O. L., 1981. *Numerical methods for harmonic analysis on the sphere*, Ohio: Report No. 310, Department of Geodetic Science and Surveying, The Ohio State University, Columbus,.
- Farrell, W. E., 1972. Deformation of the earth by surface loads. *Rev. Geophys. Space Phys*, Том 10.
- Farr, T. G. и други, 2007. The Shuttle Radar Topography Mission. *Reviews of Geophysics*, 45(2).
- Förste, C. и други, 2008. A new global combined high-resolution GRACE-based gravity field model of the GFZ-GRGS cooperation. *Geophys Res Abstr*.
- Fu, L. L. и други, 1994. TOPEX/POSEIDON: mission overview. *J Geophys Res*.
- Gleason, D., 1985. *Using the Fast Fourier Transform and FORTRAN 77 in Gravimetric Spherical Harmonic Expansions*, Ohio: Term Paper, GS 871, Dept. of Geodetic Science and Surveying, The Ohio State University, Columbus.
- Heiskanen, W. A. & Moritz, H., 1967. *Physical Geodesy*. 1st yp. San Francisco and London: W. H. Freeman and Company.
- Hofmann-Wellenhof, B. & Moritz, H., 1986. *Introduction to spectral analysis (Lecture Notes in Earth Science)*. s.l.:Springer-Verlag.
- Hofmann-Wellenhof, B. & Moritz, H., 2006. *Physical Geodesy*. 2nd, corrected yp. Wien - New York: Springer.
- Jeffreys, H., 1970. *The Earth*,. 5th ed yp. s.l.:Cambridge University Press, Cambridge, MA..
- Joksimović, D., Odalović, O., 2025, *First look inside the gravity field of Montenegro*, Survey Review

- Katsambalos, K., 1979. *Effect of the Smoothing Operator on Potential Coefficient Determinations*, Ohio: Report No. 287, Dept. of Geodetic Science, The Ohio State University, Columbus.
- Kaula, W. M., 1966. Tests and Combination of Satellite Determinations of the Gravity Field with Gravimetry. *JOURNAL OF GEOPHYSICAL RESEARCH*, 71(22).
- Kenyon, S. & Pavlis, N., 1996. *The development of a global surface gravity data base to be used in the joint DMA/GSFC geopotential model*. s.l., Springer, Berlin.
- Krarp, T., 2006. *Mathematical foundations of geodesy*. s.l.:Springer, Berlin.
- Lemoine, F. и други, 1998. *The development of the joint NASA GSFC and the National Imagery and Mapping Agency*, s.l.: Goddard Space Flight Center.
- Lense, J., 1950. Kugelfunktionen. *Akademische Verlagsgesellschaft Geest und Portig KG, Leipzig..*
- Lerch, F., Klosko, S., Laubscher, R. & Wagner, C., 1971. Gravitymodel improvement using GEOS. *J Geophys*, Том 84.
- Meissl, P., 1971. *Study of Covariance Functions Related to the Earth's Disturbing Potential*, Ohio: Report 151, Dept. of Geodetic Science, The Ohio State University, Columbus.
- Migliaccio, F., Reguzzoni, M., F., S. & Tselfes, N., 2007. On the use of gridded data to estimate potential coefficients. In: *Proceedings 3rdGOCE user workshop, Frascati, ESRIN, November 2006, ESA SP-627. European Space Agency, Noordwijk, pp 311–318. ISBN:92-9092-938-3; ISSN:1609-042X.*
- Moritz, H., 1961. Über die Konvergenz der Kugelfunktionsentwicklung für das Aussenraumpotential an der Erdoberfläche. *Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen*, Том 49, pp. 11-26.
- Moritz, H., 1980. *Advanced Physical Geodesy*. Karlsruhe (DE) / Royal Tunbridge Wells, Kent (GB): Herber Wichmann Verlag (DE) / Abacus Press (GB).
- Moritz, H., 2015. *Classical Physical Geodesy*. s.l.:Springer-VerlagBerlinHeidelberg.
- Mosayebzadeh, M. A. A. & K. R., 2019. Regional improvement of global geopotential models using GPS/Leveling data. *Stud Geophys Geod*, 63(<https://doi.org/10.1007/s11200-017-1084-9>), pp. 169-190.
- Odalović, O. et al., 2012. The Establishment Of A New Gravity Reference Frame For Serbia. *Survey Review*, Volume 44, pp. 272-281.
- Одаловић, О., 2005. *Методологија одређивања геоида високе резолуције центиметарске тачности за територију Републике Србије (докторска дисертација)*. Београд: s.n.
- Одаловић, О., 2010. *Физичка геодезија*. прво ур. Београд: Грађевински факултет Универзитета у Београду.
- Одаловић, О., Грекуловић, С. & Васиљевић, И., 2018. *Глобални геопотенцијални модели*. Београд: Грађевински факултет, Одсек за геодезију и геоинформатику.

- Pail, R. и други, 2011. First GOCE gravity field models derived by three different approaches. *Journal of Geodesy*, Том 85, p. 819–843.
- Pail, R., Fecher, T. & Barnes, D. e. a., 2018. Short note: the experimental geopotential model XGM2016.. *J Geod*, Том 92, pp. 443–451.
- Papoulis, A., 1984. *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes*. New York: McGraw Hill.
- Paul, M., 1978. RECURRENCE RELATIONS FOR INTEGRALS OF ASSOCIATED LEGENDRE. *Bulletin Géodésique*.
- Pavlis, N. K., Holmes, S. A., Kenyon, S. C. & Factor, J. K., 2012. The development and evaluation of the Earth Gravitational Model 2008 (EGM2008). *Journal of Geophysical Research*, 117(B4).
- Rapp, R., 1993. Use of altimeter data in estimating global gravity models. In: satellite in geodesy and oceanography. *Lecture notes in earth sciences, Springer, Berlin*, Том 50.
- Rapp, R. H., 1986. *Global Geopotential Solutions (Lecture Notes in Earth Science)*. s.l.:Springer-Verlag.
- Reguzzoni, M. & Tselfes, N., 2008. Optimal multi-step collocation: application to the space-wise approach for GOCE data analysis. *Journal of Geodesy*.
- Rexer, M. & Hirt, C., 2015. Ultra-high-Degree Surface Spherical Harmonic Analysis Using the Gauss–Legendre and the Driscoll/Healy Quadrature Theorem and Application to Planetary Topography Models of Earth, Mars and Moon. Том 36, p. 803–830.
- Sansò, F., Reguzzoni, M. & Barzaghi, R., 2019. *Geodetic Heights - Series: Springer Geophysics*. Cham: Springer International Publishing.
- Sanso, F. & Sideris, M., 2013. *Geoid Determination - Theory and Methods*. s.l.:Springer.
- Schwartz, K. P., 1985. *Data types and their spectral properties*. s.l., Division of Surveying Engineering, The University of Calgary..
- Sjöberg, L., 1980. A Recurrence Relation for the P_n Function. *Bulletin Geodesique*, 54(69).
- Stiefel, E., 1965. Expansion of spherical harmonics on a satellite orbit based on spinor algebra. *Mathematische Methoden der Himmelsmechanik und Astronautik*, p. 341–350.
- Svenson, S., 1994. Spectral decomposition of the geoid.
- Thi Pham, H., Claessens, S., Kuhn, M. & Awange, J., 2023. Performance evaluation of high/ultra-high-degree global geopotential models over Vietnam using GNSS/leveling data. *Geodesy and Geodynamics*, 14(5), pp. 500–512.
- Torge, W., 2001. *Geodesy*. s.l., Walter de Gruyter, Berlin-New York.
- Tscherning, C. C., 1983. *The role of high degree spherical harmonic expansions in solving geodetic problems*. s.l., In: Proceedings of the international association of geodesy symposia, IUGG XVII general assembly, vol 1. Reports of the department of geodesy science and survey. Ohio State University, Columbus, p. 431–441.

Turcotte, D. L., 1997. *Fractals and Chaos in Geology and Geophysics*. 2nd edition yp. New York: Cambridge University Press.

Ustun, A. & Abbak, R. A., 2010. On global and regional spectral evaluation of global geopotential models. *J. Geophys. Eng.*

Vaniček, P. & Krakiwsky, E. J., 1982. *Geodesy: The Concepts*. 1st. yp. North-Holland, Amsterdam: s.n.

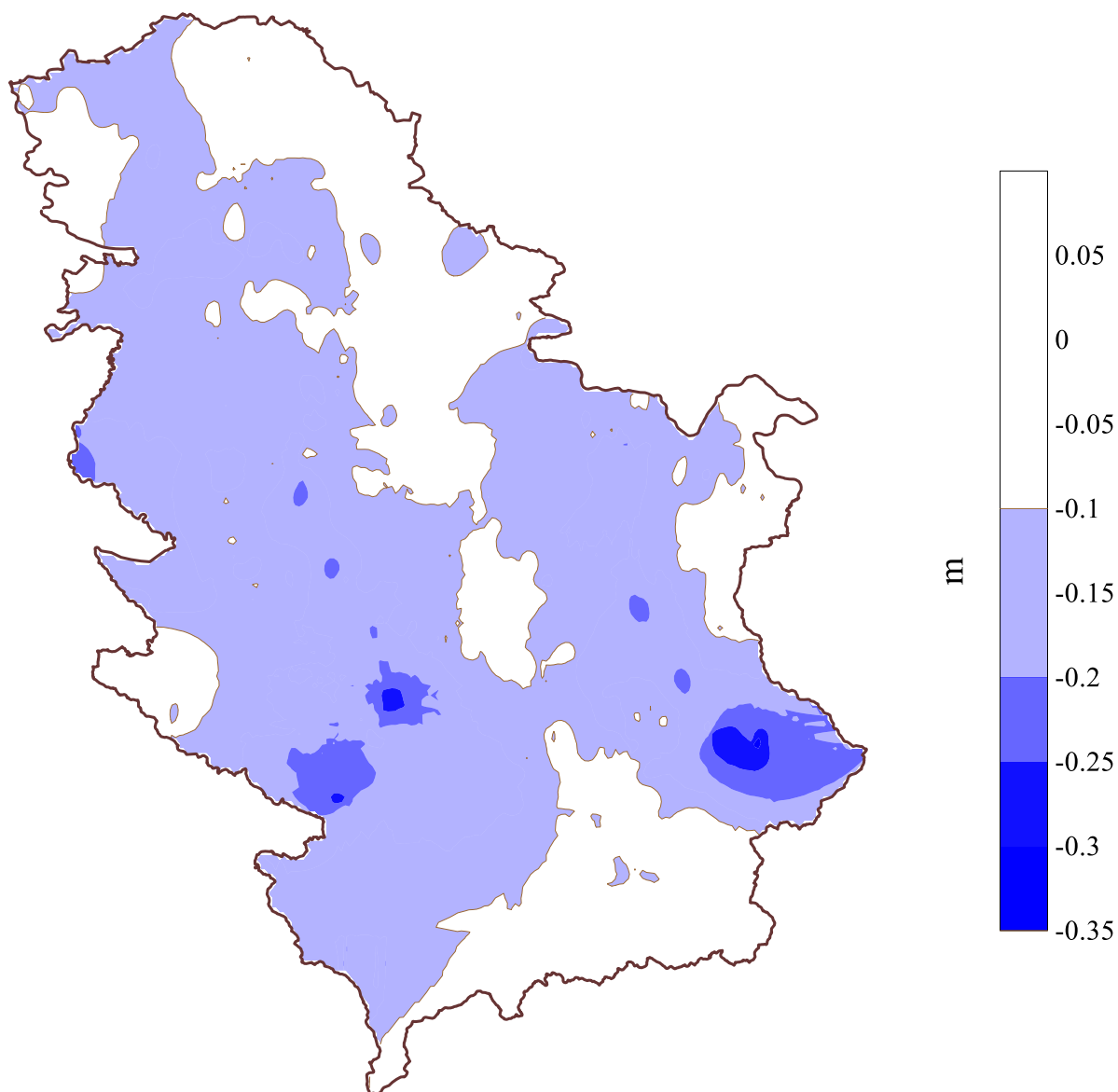
Vassiliou, A. A., 1985. The use of spectral methods for the spatial modelling of gravity data. *Manuscr. Geod.*, Tom 4.

Weber, G. & Zomorrodian, H., 1988. Regional geopotential model improvement for the Iranian geoid determination. *Bull. Geodesique*, 62(<https://doi.org/10.1007/BF02519221>), p. 125–141.

9. ПРИЛОЗИ

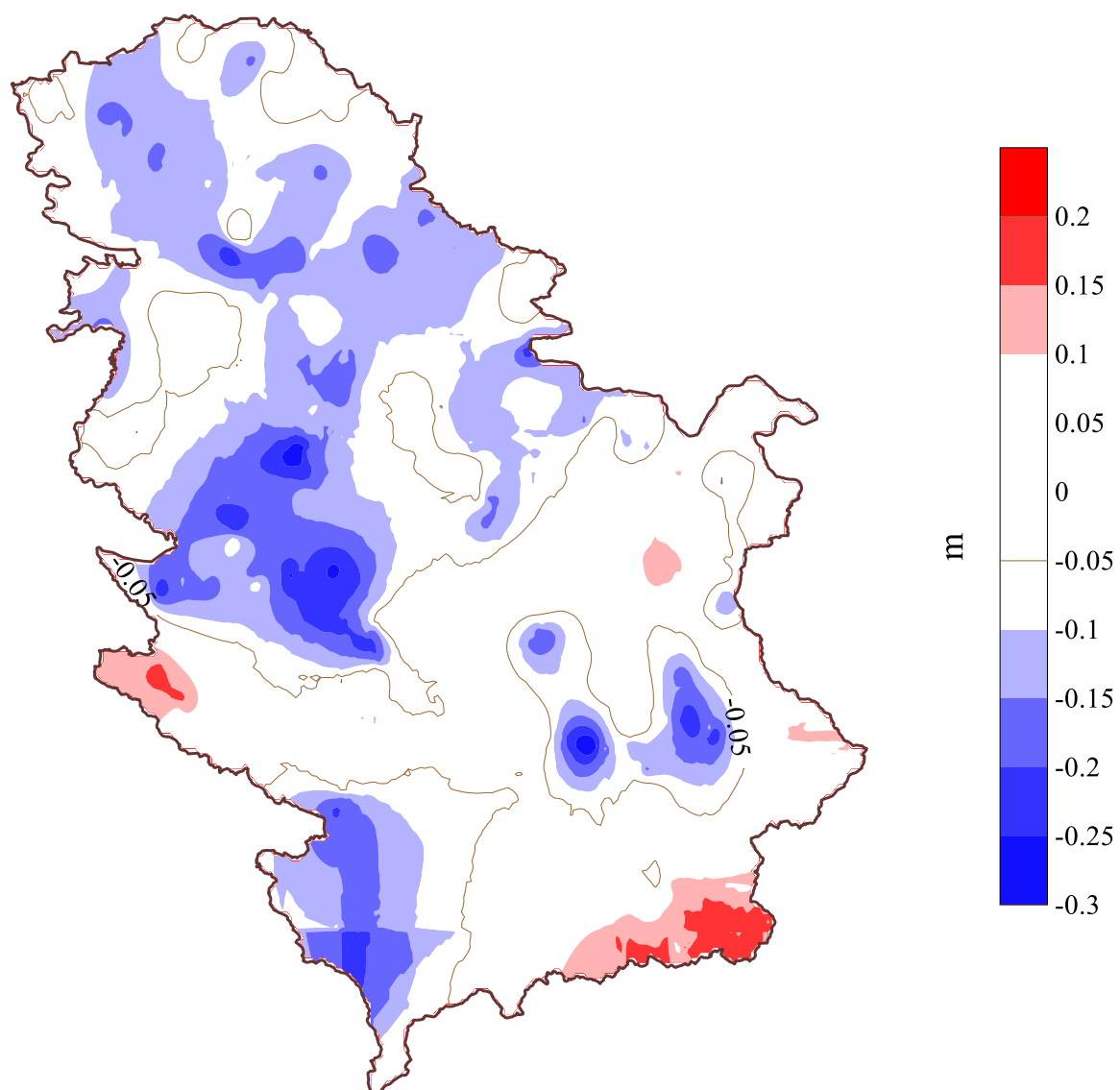
Прилог 1: Општи облик површи распореда разлика аномалија висина терестричких мјерења и модела $A+B+C$ (EGM2008) – максимални степен и ред – 2500

Еквидистанца 5 cm



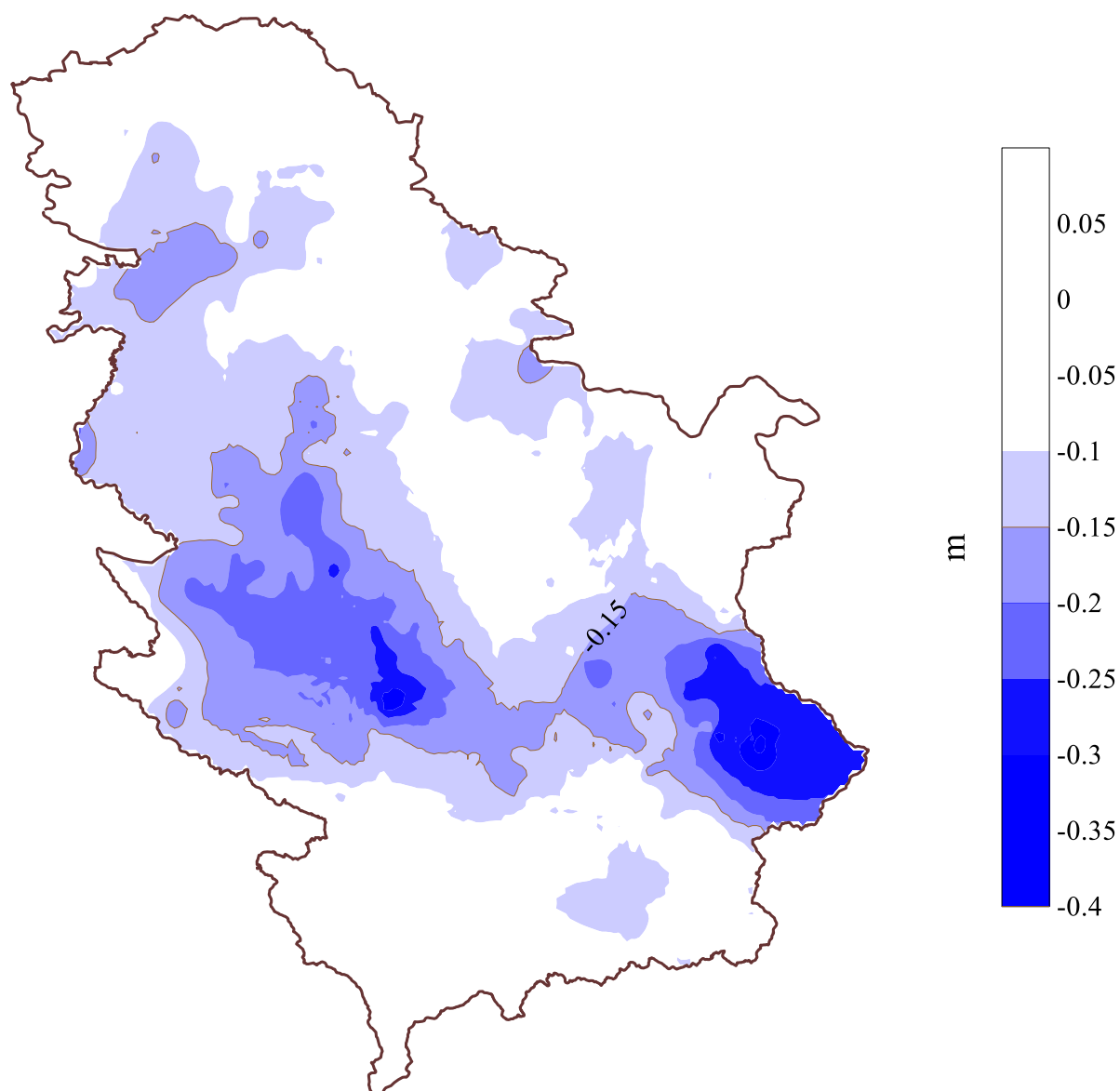
Прилог 2: Општи облик површи распореда разлика аномалија висина терестричких мјерења и модела $A+B$ (GOCO05c) – максимални степен и ред - 720

Еквидистанца 5 cm



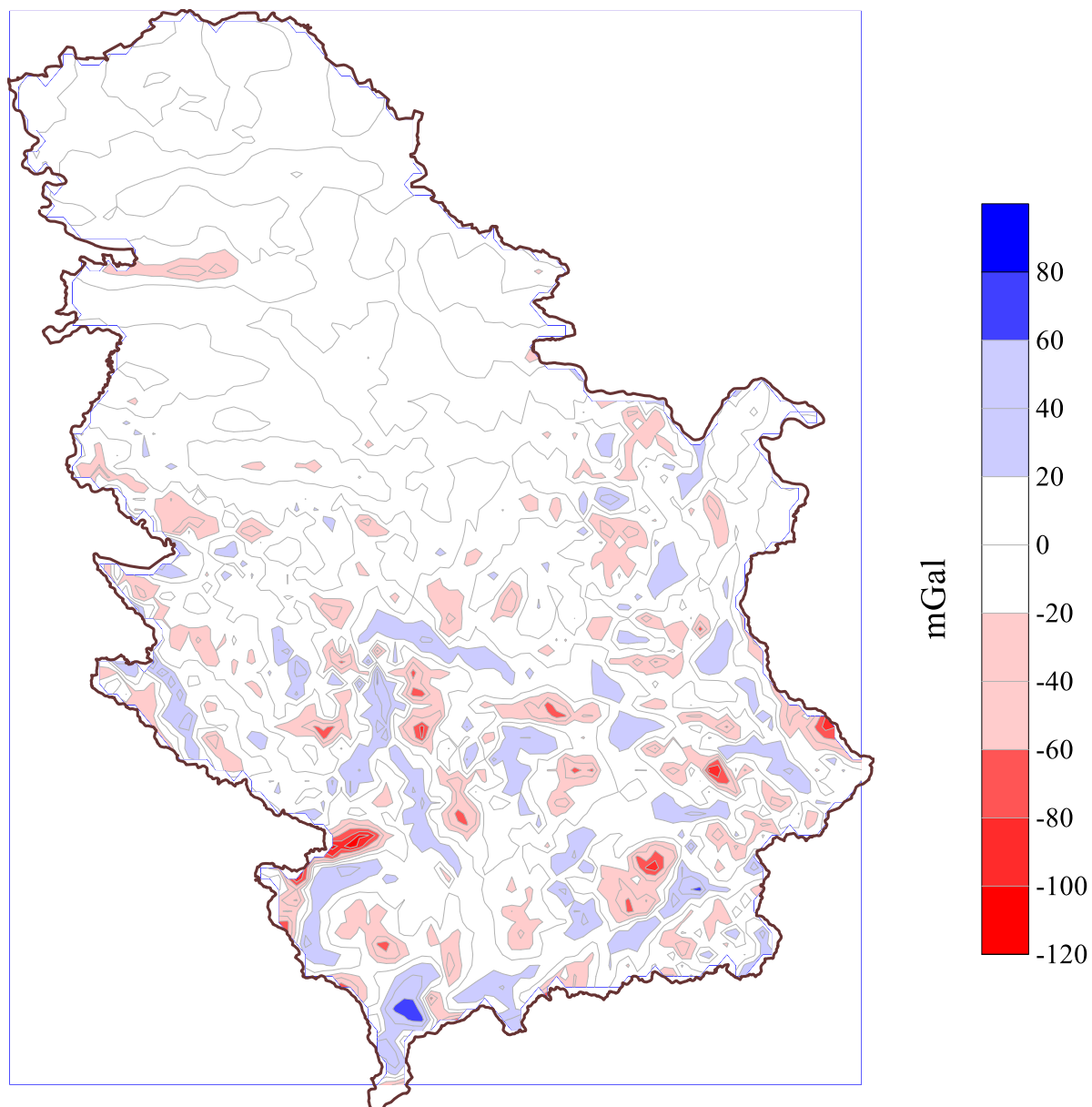
Прилог 3: Општи облик површи распореда разлика аномалија висина терестричких мјерења и модела $A+B+C$ (EIGEN6C4) – максимални степен и ред – 2500

Еквидистанца 5 cm



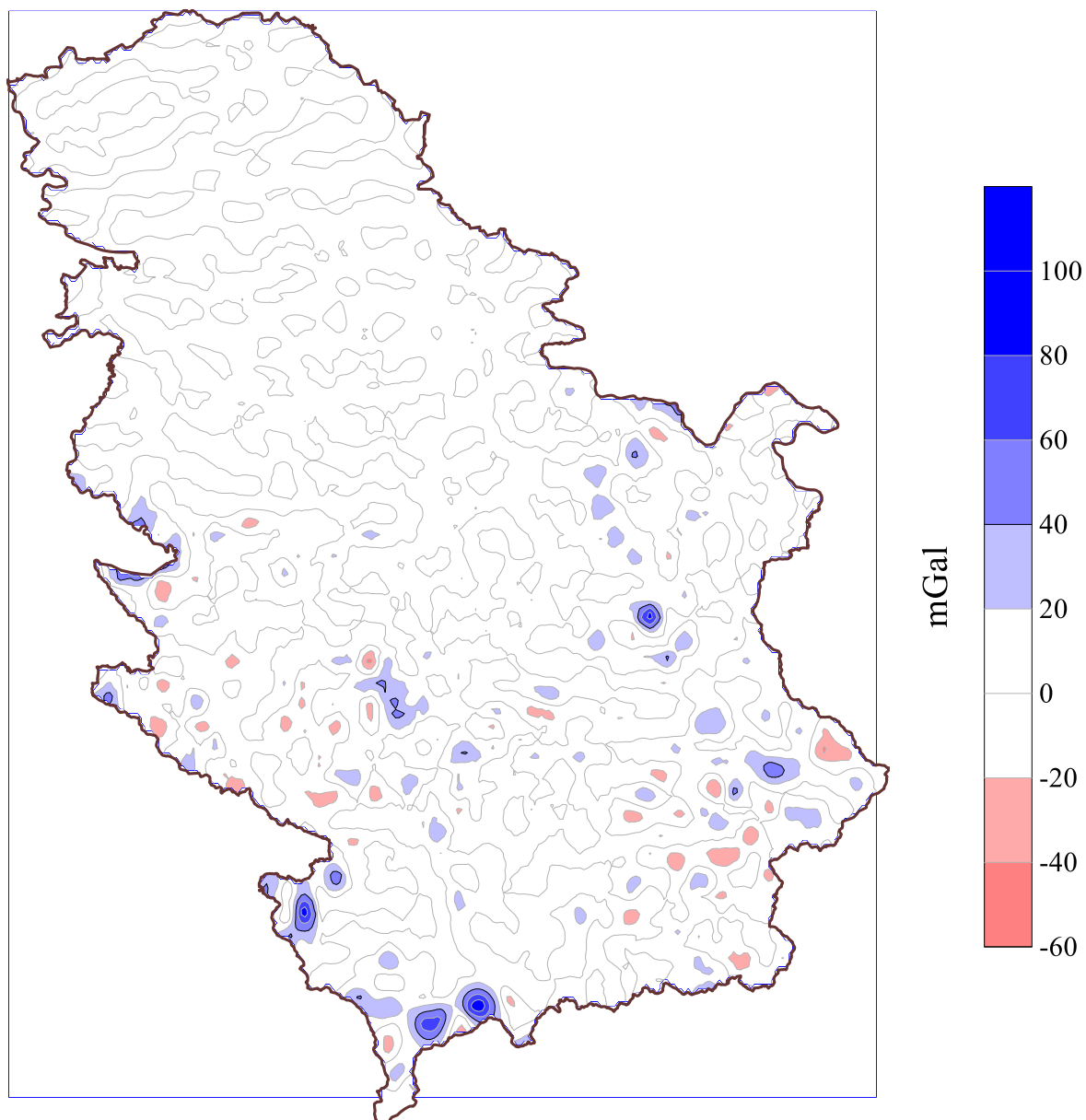
Прилог 4: Општи облик површи распореда разлика аномалија убрзања терестричких мјерења и модела A+B+C (GOCO05c) – максимални степен и ред – 720

Еквидистанца 20 mGal



Прилог 5: Општи облик површи распореда разлика аномалија убрзања терестричких мјерења и модела A+B (EGM2008) са додатом PTM корекцијом – максимални степен и ред – 2500

Еквидистанца 20 mGal



БИОГРАФИЈА АУТОРА

Данило (Славко) Јоксимовић је рођен 09.12.1991. године у Бијелом Пољу, Република Црна Гора. Основну школу "Марко Миљанов" у Бијелом Пољу завршио је 2006. године. Од 2006. до 2010. године је похађао Гимназију "Милоје Добрашиновић" у Бијелом Пољу. Носилац је дипломе "Луча" у основној и средњој школи. Основну и средњу школу је завршио са највишом просечном оценом.

На основне академске студије (у трајању од 3 године) на Грађевинском факултету Универзитета у Београду, смер геодезија и геоинформатика, уписао се 2010. године. Основне академске студије је завршио 30.09.2013. године, са синтезним радом под називом *„Детекција грубих грешака у подацима гравиметријског премера Србије“* и стекао звање инжењера геодезије са просечном оценом 9.71.

Добитник је награде за студента генерације на студијском програму Геодезија за школску 2012/13 годину, као и похвалница од стране декана Грађевинског факултета за изузетан успех током прве и друге године студија.

Мастер академске студије (у трајању од 2 године) на одсеку за геодезију и геоинформатику Грађевинског факултета Универзитета у Београду (смер геодезија) уписао је 2013. године. Мастер студије завршио је 30.09.2015. године са мастер радом под називом *„Одређивање геоида на локалном подручју примјеном глобалних геопотенцијалних модела“* и стекао звање мастер инжењера геодезије са просечном оценом 9.83.

Добитник је награде из фонда Института за геодезију и геоинформатику за најбољи мастер рад на Одсеку за геодезију и геоинформатику одбраћен школске 2014/2015. године.

Докторске академске студије на Одсеку за геодезију и геоинформатику Грађевинског факултета Универзитета у Београду уписао је школске 2015/2016. Током докторских студија положио је све предмете са просечном оценом 10.00. Добитник је награде од компаније "Belgrade Waterfront" у оквиру пројекта "BW Exceptional" као један од најбољих докторанада са четири факултета.

У оквиру својих истраживања, аутор или коаутор је једанаест научних радова. Четири рада су објављена у међународним научним часописима на SCI листи (категорија M22 – рад у истакнутом међународном часопису и M23 – рад у међународном часопису), пет радова су објављени у зборницима међународних научних скупова (категорија M33 – саопштење са међународног скупа штампано у целини), док су два објављена у водећим националним часописима (категорија M51 – рад у водећем часопису националног значаја).

У току досадашњег рада учествовао је у различитим пројектима, како у привреди тако и у научним областима у земљи и иностранству.

Течно говори и пише енглески језик, користи се руским и немачким језиком. Поседује и основно знање шпанског језика.

ИЗЈАВА О АУТОРСТВУ

Име и презиме аутора: Данило Јоксимовић

Број индекса: 917/15

Изјављујем

да је докторска дисертација под насловом

МОДЕЛИРАЊЕ СИНТЕТИЧКИХ КОЕФИЦИЈЕНАТА СФЕРНО ХАРМОНИЈСКОГ РАЗВОЈА ПОТЕНЦИЈАЛА ЗЕМЉИНЕ ТЕЖЕ ЗА ПОТРЕБЕ ОДРЕЂИВАЊА ГЕОИДА У ЛОКАЛНОМ ПОДРУЧЈУ

- резултат сопственог истраживачког рада,
- да дисертација у целини ни у деловима није била предложена за стицање друге дипломе према студијским програмима других високошколских установа,
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио ауторска права и користио интелектуалну својину других лица.

У Београду, 13.03.2025.

Потпис аутора

ИЗЈАВА О ИСТОВЕТНОСТИ ШТАМПАНЕ И ЕЛЕКТРОНСКЕ ВЕРЗИЈЕ ДОКТОРСКОГ РАДА

Име и презиме аутора: Данило Јоксимовић
Број индекса: 917/15
Студијски програм: Геодезија и геоинформатика
Наслов рада: МОДЕЛИРАЊЕ СИНТЕТИЧКИХ КОЕФИЦИЈЕНАТА
СФЕРНО ХАРМОНИЈСКОГ РАЗВОЈА ПОТЕНЦИЈАЛА
ЗЕМЉИНЕ ТЕЖЕ ЗА ПОТРЕБЕ ОДРЕЂИВАЊА ГЕОИДА
У ЛОКАЛНОМ ПОДРУЧЈУ
Ментор: В. проф. др Олег Р. Одаловић, дипл. инж. геод.

Изјављујем

да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предао ради похрањивања у **Дигиталном репозиторијуму Универзитета у Београду**. Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског назива доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада. Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Београду.

У Београду, 13.03.2025.

Потпис аутора

ИЗЈАВА О КОРИШЋЕЊУ

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом:

МОДЕЛИРАЊЕ СИНТЕТИЧКИХ КОЕФИЦИЈЕНАТА СФЕРНО ХАРМОНИЈСКОГ РАЗВОЈА ПОТЕНЦИЈАЛА ЗЕМЉИНЕ ТЕЖЕ ЗА ПОТРЕБЕ ОДРЕЂИВАЊА ГЕОИДА У ЛОКАЛНОМ ПОДРУЧЈУ

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао сам у електронском формату погодном за трајно архивирање. Моју докторску дисертацију похрањену у Дигиталном репозиторијуму Универзитета у Београду и доступну у отвореном приступу могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (*Creative Commons*) за коју сам се одлучио.

1. Ауторство (CC BY)
2. Ауторство – некомерцијално (CC BY-NC)
- ③ Ауторство – некомерцијално – без прерада (CC BY-NC-ND)
4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима (CC BY-NC-SA)
5. Ауторство – без прерада (CC BY-ND)
6. Ауторство – делити под истим условима (CC BY-SA)

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци. Кратак опис лиценци је саставни део ове изјаве).

У Београду, 13.03.2025.

Потпис аутора
