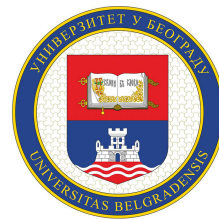




Универзитет у Београду
Машински факултет



Невена Росић

**Простирање таласа кроз метаструктуре од
спрегнутих еластичних, вискоеластичних и
крутих сегмената**

Докторска дисертација

Београд, 2025.



University of Belgrade
Faculty of Mechanical Engineering



Nevena Rosić

Wave Propagation in Metastructures Consisting Elastic, Viscoelastic and Rigid Segments

Doctoral Dissertation

Belgrade, 2025

Комисија за преглед, оцену и одбрану докторске дисертације

Ментори: др Михаило Лазаревић, редовни професор,
Универзитет у Београду, Машински факултет
др Милан Цајић, виши научни сарадник,
Математички институт САНУ

Чланови комисије: др Александар Обрадовић, редовни професор,
Универзитет у Београду, Машински факултет
др Александар Томовић, ванредни професор,
Универзитет у Београду, Машински факултет
др Данило Карличић, виши научни сарадник,
Математички институт САНУ

Датум одбране:

Изјаве захвалности

Захваљујем се менторима, проф. др Михаилу Лазаревићу и др Милану Цајићу, в. науч. сар. Математичког института САНУ, за стручно вођство и све добронамерне савете, инспиративне разговоре, стрпљење и подршку.

Такође желим да се захвалим в. науч. сар. др Данилу Карличићу, МИ САНУ, за вишегодишњу сарадњу, мноштво корисне литературе и сву подстицајну критику.

Част ми је што сам као студент докторских студија имала прилике да радим и сарађујем са свим члановима Катедре за механику, као и због тога што и сама припадам том колективу који дубоко осећа свој наставни и научни позив. Захвална сам за велико знање и многе савете које су сви чланови катедре несебично поделили са мном, а нарочито сам захвална проф. др Александру Томовићу, проф. др Зорану Митровићу и проф. др Александру Обрадовићу који су увек имали јасне одговоре на сва моја питања и недоумице.

Посебно желим да се захвалим проф. др Оливери Јеремић која је била моја стална сапутница, увек спремна да ме саслуша, разуме и охрабри.

Коначно, велику захвалност дугујем Ђорђу и Оливеру Росићу, које бих волела да одликујем најблиставијим орденом за стрпљење, моралну подршку и смисао за хумор. Хвала вам за терет који сте поделили са мном и срећу коју сте ми пружали свакога дана.

Резиме

У оквиру ове докторске дисертације обухваћена су истраживања простирања механичких таласа кроз различите периодичне структуре, које се превасходно састоје од еластичних греда. Посматране периодичне структуре показују корисне особине које нису присутне код њихових градивних елемената, те се, узимајући у обзир и релативну величину њихове јединичне ћелије, у постојећој литератури класификују као метаматеријали или мета-структуре. Просторна периодичност структуре постиже се понављањем јединичних ћелија које се састоје од еластичних греда, повезаних крутим сегментима, уз присуство различитих ослонаца и дискретних механичких подсистема, као што су опруге, пригушивачи, масени резонатори и инертери. У том контексту разматране су и такозване квазипериодичне структуре, које настају понављањем јединичних ћелија које се међусобно разликују на прецизно дефинисан начин, чиме се у систем уводи контролисана (дизајнирана) неуређеност. Такође су проучене и фононске структуре од паралелно нанизаних витких греда, које су аксијално оптерећене и повезане различитим еластичним и вискоеластичним слојевима, чије се карактеристике мењају у току времена, а услед чега долази до једносмерног (нереципрочног) простирања таласа.

Развијени су математички модели и нумерички прорачуни за ефикасно одређивање дисперзних карактеристика посматраних периодичних структура. За формирање математичког модела еластичних структура које садрже и крута тела примењена је метода трансфер матрице. Коришћене су Ојлер-Бернулијева и Тимошенкова теорија осциловања греда, док су општи закони динамике примењени при разматрању крутог тела и различитих дискретних механичких подсистема. Уз помоћ Блох-Флокетове теореме и периодичних граничних услова, омогућено је проучавање дисперзне карактеристике теоретски бесконачне периодичне структуре на основу њене јединичне ћелије, чиме је обим нумеричких прорачуна значајно умањен. Софтверска имплементација алгоритама за нумеричке прорачуне урађена је у *MATLAB* софтверском окружењу, док је валидација постигнута поређењем са доступним резултатима за специјалне случајеве приказане у литератури, као и уз коришћење методе коначних елемената применом комерцијалног софтвера *COMSOL Multiphysics*. Детаљно су анализирани услови под којима долази до феномена значајног пригушења или потпуног заустављања простирања (пропагације) механичких таласа. Проучени су и ефекти до којих доводи спрезање осцилација у различитим правцима. При свему томе је дат и допринос бољем разумевању утицаја различитих механизма који доводе до расипања енергије механичких таласа, као што су Брегово расејање и локална резонанција. Визуализација добијених резултата омогућена је уз помоћ дијаграма дисперзне карактеристике, функције фреквентног одзива померања и дијаграма на којима је приказано простирање таласа карактеристичних фреквенција. У оквиру различитих прорачуна примењене су метода спектралних елемената, метода коначних разлика и метода бисекције. При решавању парцијалних диференцијалних једначина кретања коришћена је Галеркинова метода.

Утемељеност обављених истраживања огледа се у присуству периодичних материјала и структура у свим гранама инжењерске праксе. Нарочито се могу истаћи структуре које се састоје од еластичних греда повезаних знатно крућим елементима, као што су мостови, вишеспратнице, дугачки цевоводи за транспорт течности и гасова итд. Одређивање утицаја различитих параметара на положај и ширину фреквентног опсега на коме долази до заустављања пропагације таласа је од кључног значаја за функционални дизајн разматраних структура. У том смислу, може се искористити и њихов проводни фреквентни опсег, уколико је потребно спровођење таласа жељених фреквенција, као и једносмерно

простирање таласа. Појава локализације одређених модова осциловања, која је, између осталог, карактеристична за квазипериодичне структуре, такође има интересантне примене при спровођењу таласа одређених фреквенција, а могуће је постићи и нерцепрочно простирање таласа услед једносмерне рефлексије. Проучавање дисперзне карактеристике метаматеријала и метаструктура нарочито је актуелно у истраживањима везаним за звучну изолацију, изолацију осетљивих мерних инструмената од шума одређених фреквенција, као и изолацију стамбених зграда и других грађевинских конструкција од градске буке, сеизмичких поремећаја и олујних ветрова.

Кључне речи: метаструктуре, фононске структуре, Ојлер-Бернулијева теорија греде, Тимошенкова теорија греде, метода трансфер матрице, Блох-Флокетова теорема, дисперзне особине периодичних структура, једносмерно простирање таласа, инерцијални амплификатор

Научна област: Машинско инжењерство

Ужа научна област: Механика

УДК број: 535.52:62-422.2(043.3)

Abstract

This doctoral dissertation explores the propagation of mechanical waves through various periodic structures, primarily composed of elastic beams. The studied periodic structures display useful properties that are absent in their individual components. Based on the relative size of their unit cell, these structures are classified in literature as metamaterials or metastructures. Their spatial periodicity is achieved by repeating unit cells composed of elastic beams connected with rigid segments, which also contain different supports and discrete mechanical components, such as springs, dashpots, mass resonators and inerters. By tessellating unit cells that differ from one another in a carefully defined manner, a controlled disorder is introduced into the system, resulting in a quasiperiodic structure, which is also investigated. Furthermore, phononic structures composed of parallel slender beams, subjected to axial loads and interconnected by elastic and viscoelastic layers with time-dependent properties, have been studied. The resulting space-time modulation of material properties leads to unidirectional (non-reciprocal) wave propagation.

Mathematical models and numerical methods have been developed to efficiently determine the dispersion characteristics of the analyzed periodic structures. The transfer matrix method is employed to model mechanical systems that include both elastic and rigid segments. The Euler-Bernoulli and Timoshenko beam theories are used, and fundamental laws of dynamics are applied to analyze rigid bodies and various discrete mechanical systems. The Bloch-Floquet theorem and periodic boundary conditions enable the analysis of dispersion characteristics in theoretically infinite periodic structures based on a single unit cell, significantly reducing computational effort. Numerical algorithms were implemented in the *MATLAB* environment, and validation was carried out by comparing results with available data from the literature for special cases and by using the finite element method in the commercial software *COMSOL Multiphysics*. The conditions for significant attenuation or complete suppression of elastic wave propagation have been thoroughly analyzed. Additionally, the effects of coupled oscillations in different directions have been examined. The research contributes to a better understanding of various mechanisms leading to wave energy dissipation, including Bragg scattering and local resonance. Results are presented using dispersion diagrams, frequency response functions, and wave propagation diagrams at characteristic frequencies. Various numerical methods were employed, including the spectral element method, the finite difference method, the bisection method, and the Galerkin method which was used to discretize the partial differential equations of motion.

The significance of this research lies in the presence of periodic materials and structures in all engineering fields. Notable examples include structures formed by elastic beams connected with much stiffer elements, such as bridges, high-rise buildings, and long pipelines used for fluid and gas transport. Understanding the impact of various parameters on the position and width of the frequency bands where wave propagation is suppressed is essential for designing the studied structures to optimize their efficiency. Similarly, their pass bands can be utilized to enable the transmission of waves at desired frequencies, as well as to achieve unidirectional wave propagation. The emergence of mode localization in quasiperiodic structures also has interesting applications in wave guiding and can also lead to non-reciprocal wave propagation due to one-way reflection. The study of dispersion characteristics in metamaterials and metastructures is especially relevant for research on sound insulation, isolating sensitive measuring instruments from noise at specific frequencies, and protecting residential buildings and other structures from urban noise, seismic disturbances, and strong winds.

Key words: metastructures, phononic structures, Euler-Bernoulli beam theory, Timoshenko beam theory, transfer matrix method, Bloch-Floquet theorem, dispersion characteristics of periodic structures, unidirectional wave propagation, inertial amplifier

Scientific discipline: Mechanical engineering

Scientific subdiscipline: Mechanics

UDC number: 535.52:62-422.2(043.3)

Сви смо рођени да се боримо и истрајемо. - „Џејн Ејр“, Шарлот Бронте

Садржај

1	Увод	10
1.1	Утемељеност и мотивација	10
1.2	Преглед литературе и поставка проблема	12
1.3	Садржај дисертације	17
2	Општа разматрања	18
2.1	Основни појмови и феномени при проучавању простирања таласа	18
2.2	Динамичке карактеристике периодичних структура	20
2.3	Метода трансфер матрице	20
2.4	Дисперзна карактеристика периодичне структуре	23
2.5	Блох-Флокетова теорема	24
2.6	Функција фреквентног одзива померања	25
2.7	Сопствене фреквенције осциловања механичког система	25
2.8	Парцијалне диференцијалне једначине кретања еластичних греда	26
2.8.1	Ојлер-Бернулијева теорија	27
2.8.2	Тимошенкова теорија	29
3	Периодичне структуре које се састоје од редно везаних еластичних греда, крутих тела и дискретних механичких подсистема	31
3.1	Трансфер матрица за Тимошенкову греду	31
3.2	Трансфер матрица за круто тело	34
3.3	Дискретни механички подсистеми и еластична подлога	37
3.3.1	Еластична подлога (Винклеров еластични модел)	38
3.3.2	Масени резонатор	38
3.3.3	Инертер	39
3.3.4	Инерцијални амплификатор: први модел	40
3.3.5	Инерцијални амплификатор: други модел	42
3.4	Валидација модела заснованог на трансфер матрици јединичне ћелије	43
3.5	Нумерички прорачуни	45
3.5.1	Дисперзне карактеристике структура које се састоје од Тимошенко-вих греда и крутих тела	46
3.5.2	Утицај еластичне подлоге и дискретних механичких подсистема на дисперзну карактеристику разматраних структура	54
4	Квазипериодичне структуре које се састоје од редно везаних еластичних греда и крутих тела	61
4.1	Образац и процедура формирања фамилије квазипериодичних структура	62
4.2	Нумерички прорачуни	62
4.2.1	Пример квазипериодичне структуре са варијацијом модула еластичности греда	63
4.2.2	Пример квазипериодичне структуре са варијацијом масе крутог тела	66
5	Периодичне структуре које се састоје од еластичних греда спрегнутих дискретним механичким елементима са еластичним и вискоеластичним својствима	69
5.1	Структура са Пастернаковим вискоеластичним слојевима	73
5.2	Структура са Пастернаковим еластичним слојевима	75
5.3	Структура са Винклеровим еластичним слојевима	76
5.4	Нумерички прорачуни	77

5.4.1	Пример структуре са Пастернаковим вискоеластичним слојем (ПВС)	78
5.4.2	Пример стурктуре са Пастернаковим еластичним слојем (ПЕС) . . .	83
5.4.3	Пример стурктуре са Винклеровим еластичним слојем (ВЕС)	84
5.4.4	Упоредна анализа добијених резултата	85
6	Закључак	86
7	Литература	88
	Биографија аутора	96

1 Увод

1.1 Утемељеност и мотивација

Простирање таласа је опчињавало људе од самог зачетка цивилизације, много раније него што су развили неопходна знања и могућности да их разумеју и опишу, а почевши већ од детињства и првог каменчића који баце у воду. Разни феномени у природи као што је таласање воде, светлост и звук, одвијају се простирањем таласа [1]. По истом принципу функционишу многи изуми и открића у науци и технологији, као и нежељена дејства која желимо да умањимо, како у индустрији, тако и у свакодневном животу. Научна истраживања која се баве различитим аспектима таласних феномена присутна су у скоро свим гранама науке и технике, од кретања плућа при дисању, до чувених случајева пада мостова услед појаве резонанције [2-5]. Људи су врло рано почели да користе и да на неки начин, пре свега кроз музику, управљају уоченим феноменима, али и да их се плаше. Путем простирања таласа могуће је преношење енергије на изузетно велика растојања, за шта су најбољи пример сеизмички таласи који доводе до појаве земљотреса.

Услед простирања таласа долази до осцилаторног кретања средине кроз коју се талас простире, тј. кретања које се потпуно или делимично понавља у истим или различитим временским интервалима [3,6]. Свака машина или уређај има бар неки део чије кретање има осцилаторни карактер [3]. Већина ломова у машинској индустрији потиче од нежељених вибрација које доводе до замора материјала у деловима као што су зупчаници и лежајеви, или до одвијања завртања или навртки [2]. Међутим, у савременом свету, потреба за смањењем нежељених вибрација постаје све већа и више није ограничена само на области у којима се већ традиционално примењује (грађевинарство, космологија, авиоиндустрија, аутоиндустрија и друге). На пример, од посебног интереса за квалитет људског живота је смањење вибрација ниских фреквенција које се јављају због саобраћаја и осталих извора градске буке [7]. Такође, са напретком технологије значајно је повећана осетљивост мерних инструмената, али за њихово исправно функционисање неопходно је елиминисати вибрације које потичу од носеће конструкције, као и разне врсте шума [8,9].

Дизајн великог броја конструкција са којима се сусрећемо у инжењерској пракси има карактеристике просторне периодичности (нпр. стамбене зграде, мостови, цевоводи и разне решеткасте конструкције). При проучавању периодичних структура, примећене су аналогije са кристалном решетком и карактеристичним појавама које су проучаване у теорији кристалографије [10]. Због тога је у литератури постало уобичајено да се периодичне структуре називају фононским структурама, на основу термина „фонон” који формално представља квант вибрације кристалне решетке [10]. С обзиром на то да примећени феномени, као што је Брегово расејање, нису уобичајени у макроскопском свету, постоји све веће интересовање за њихову експлоатацију када је у питању индустријски дизајн и примена периодичних материјала и конструкција [10,11].

Међутим, код периодичних материјала и структура јављају се и друге необичне особине и могућности, које превазилазе особине њихових компоненти. Оне првенствено потичу од њихових структурних, а не од материјалних својстава. То су, на пример, појава локалне резонанције и негативне ефективне особине материјала (густине, крутости, Поасоновог коефицијента итд.) [12-14]. Услед тога су такви материјали сврстани у нову категорију вештачки створених материјала, под назвом „метаматеријали” (грч. *μετα*, са значењем нечега што надмашује очекивано) [10]. Аналогно томе, назив је добила и нова класа периодичних структура већих размера, такозваних „метаструктура”. Међусобно повезане градивне целине, такозване „јединичне ћелије”, које имају одређену геометрију и састоје се од пажљиво одабраних материјала, правилним распоредом формирају периодичну струк-

туру. У том смислу, метаматеријале и метаструктуре можемо разликовати и по томе што је код метаматеријала величина јединичне ћелије мања од таласне дужине посматраних таласа, док код метаструктура важи обратно [10].

Метаматеријали и метаструктуре имају изузетан значај у областима прикупљања енергије, примењени су за неинвазивно испитивање материјала, а такође је примену нашла и могућност за остваривање ефективног негативног преламања [12-18]. Један од веома интересантних и несвакидашњих феномена који се јавља у овој области је могућност неречипрочног простирања тј. пропагације таласа. Наиме, уобичајено је да се таласи кроз одређену средину равномерно простиру од свог извора у свим доступним правцима и смеровима [19-31]. Неречипрочна пропагација таласа представља нарушавање те симетрије у односу на извор, при чему је могуће остварити и једносмерно простирање таласа.

Дизајн саме јединичне ћелије је у практичном смислу ограничен само у погледу тренутних технолошких могућности за њихову израду, које теоријска разматрања у овој области често превазилазе [32,33]. Међутим, без обзира на изобиље нових и занимљивих могућности које ову област чине врло актуелном, у научној и инжењерској пракси је највише пажње посвећено пригушењу нежељених вибрација [5,7-15,34-55]. При наиласку упадног таласа на границе између различитих делова структуре, долази до њиховог одбијања и преламања, као и до интерференције резултујућих таласа са упадним таласом [5,10,12,36]. Када је таласна дужина упадног таласа упоредива са дужином јединичне ћелије структуре, долази до појаве Бреговог расејања, при чему се услед деструктивне интерференције формирају такозване „зоне заустављања“ на одређеним опсезима таласних дужина, тј. фреквенција [5,10,12,36]. Таласи чија фреквенција припада неком зауставном опсегу не могу да се простиру кроз такву структуру јер долази до њиховог значајног пригушења, тј. „заустављања“. Преостале фреквенције припадају тзв. проводном опсегу, с обзиром на то да такви таласи могу неометано да се простиру кроз посматрану структуру [10]. У вези са тим, веома је интересантан и утицај локалне резонанције, која се јавља услед присуства дискретних механичких подсистема (као што су различити масени резонатори и инертери) [16-18,56-83]. Локална резонанција доводи до појаве зоне заустављања у околини сопствене фреквенције осциловања, те утиче и на зауставне, тј. проводне зоне у својој непосредној близини [56-83].

Периодични материјали и структуре се могу врло практично искористити уз сврсисходан дизајн, са посебном пажњом усмереном на одређене параметре система, уз помоћ којих можемо одабрати фреквентни опсег пригушења. У том смислу, они се могу искористити и за спровођење жељених таласа, коришћењем њиховог проводног фреквентног опсега [10,14]. Производњу и примену у индустрији олакшава то што је показано да нечистоће у материјалу и грешке у геометрији, као и неке друге врсте одступања од строге периодичности, не утичу значајно на њихову ефикасност [84]. Штавише, може се формирати и аperiodична структура понављањем јединичних ћелија које се међусобно разликују на дефинисан начин. Дакле, у разматрани механички систем се уводи контролисана неуређеност, чиме се формира такозвана квазипериодична структура [84-92]. За такве структуре је карактеристична појава локализације одређених модова осциловања [84-92]. Проучавање дисперзне карактеристике периодичних материјала и структура нарочито је актуелно у истраживањима везаним за звучну изолацију и заштиту различитих инструмената осетљивих на вибрације и шум, као и изолацију стамбених зграда и других грађевинских конструкција од градске буке, сеизмичких поремећаја и олујних ветрова [5,8,9,12].

У савременом добу смо више него икада суочени са контрадикторним питањима даљег напретка науке и технике и њиховог штетног утицаја на животну средину и човека, а метаматеријали и метаструктуре су већ постали део одговора на многа од тих питања.

1.2 Преглед литературе и поставка проблема

С обзиром на универзалну распрострањеност осцилаторног кретања у природи, многа велика имена у домену природних наука су дала значајан допринос у овој области. Најранија разматрања те врсте потичу из 6. века пре нове ере, када је грчки филозоф Питагора анализирао изворе звука и вибрације жице [2]. Он је показао да дужина жице утиче на висину тона коју она производи када је окината. Међутим, тек почевши од времена Галилеја (*Galileo Galilei*, 1564.-1642.) се овакви феномени систематски проучавају. Према записаној анегдоти, он је приметио уличну светиљку која се њихала и одлучио да уз помоћ опипавања пулса на својој руци измери период њеног осциловања [2]. Тада је дошао до закључка да период осциловања не зависи од амплитуде. Он је такође вршио разне експерименте са математичким клатном и утврдио везу између фреквенције осциловања и његове дужине, којој је француски математичар Мерсен (*Marin Mersenne*, 1588.-1648.) дао и аналитички облик [2]. Убрзо након тога Хајгенс (*Christian Huygens*, 1629.-1695.) конструира први часовник који је функционисао на основу осциловања клатна [2]. Од тада осцилаторно кретање постаје основ скоро свих наредних техничких решења [2]. Изузетан развој науке и технике који се одиграо у наредним вековима, био је подстакнут многобројним доприносима које су дала нека од највећих имена физике и математике, међу којима се налазе и [1,2]:

- Њутн (*Isaac Newton*, 1642.-1727.) који је уобличио законе кретања и, упоредо са Лајбницом (*Gottfried Wilhelm Leibniz*, 1646.-1716.) развио диференцијални рачун,
- Хук (*Robert Hooke*, 1635.-1703.) који је дефинисао закон еластичности, Бернули (*Daniel Bernoulli*, 1700.-1782.) који је извео парцијалне диференцијалне једначине кретања еластичне греде (теорија танких греда), док је Ојлер (*Leonhard Euler*, 1707.-1783.) одредио њихова прва решења узимајући у обзир различите граничне услове,
- Тимошенко (*Степан Прокофјевич Тимошенко*, 1878.-1972.) који је развио такозвану теорију дебелих греда, узимајући у обзир утицај смичућих сила и инерцијалне силе до које долази услед обртања елемента попречног пресека при савијању греде [3].

Као и у свим осталим научним областима, човечанство је начинило велики скок од зачетака конструисања музичких инструмената и стварања музике, до звучне изолације и елиминације нежељених вибрација у савременом свету. Док су се у античкој Кини људи бавили проналажењем мерних инструмената за рано откривање земљотреса, у савременом свету истраживачи се баве заштитом стамбених зграда и других грађевинских конструкција од сеизмичких таласа [2,8]. У овим, као и у многим другим сферама инжењерске праксе, актуелна је примена метаматеријала и метаструктура.

Предмет истраживања обухваћених овом дисертацијом односи се на развој математичког модела, као и нумеричког прорачуна, који би био користан за ефикасно и сврсисходно одређивање дисперзних карактеристика аналитички описаних периодичних структура (фононских структура и метаструктура).

До данас је публиковано мноштво истраживачких радова и докторских дисертација, уз реализацију великог броја пројеката, у којима су коришћени различити приступи проучавању поменутих појава и њихове примене у различитим сферама инжењерске праксе [5,10,12,36,37,40,48,64,84,93].

Положај зона заустављања зависи од величине јединичне ћелије, те се метаматеријали и метаструктуре различитих особина свакако могу остварити изменом просторних димензија, али овај приступ је често ограничен у смислу дизајна и прилагодљивости [10,12,30]. Самим тим, научна истраживања су усмерена на откривање нових могућности којима се

могу постићи жељени ефекти код периодичних структура, као што је нелинеарност материјала и квазипериодичност [52,84-92]. Као главни правци истраживања се могу издвојити дефинисање закона промене одређеног својства структуре у простору или времену, примена различитих иновативних идеја у погледу геометријских односа у оквиру саме јединичне ћелије, а примењен је чак и контраст између различитих врста деформисања [57]. У највећем делу доступних истраживања проучаване су теоретски бесконачне периодичне структуре. Међутим, постоје и истраживања која се баве проучавањем утицаја коначног броја јединичних ћелија на жељене особине структура [11].

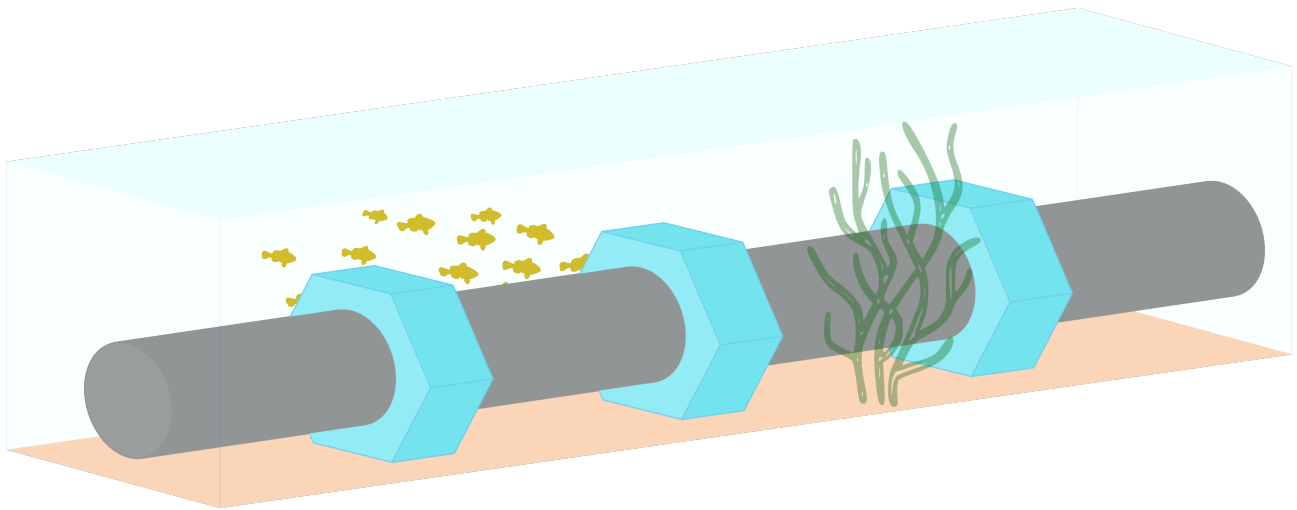
Разноврсност примењених идеја постоји у истраживањима која су усмерена на дизајн метаматеријала, и то нарочито у погледу њихове структуре, међу којима се истичу решеткасте, оригами и хиралне структуре [14]. Такви метаматеријали се одликују различитим несвакидашњим особинама, као што су истовремено мала маса и велика крутост, као и тзв. негативна крутост при којој се материјал под оптерећењем понаша тако да допринеси повећању деформација [14]. Јављају се и многи други феномени који нису присутни у природи, као што су тзв. негативна густина и негативан Поасонов коефицијент, као и негативна групна брзина и негативно преламање таласа при простирању кроз њих [12,14,15]. Захваљујући томе нашли су примену у прикупљању енергије [16-18], а могу се употребити и у виду сензора за регистровање таласа одређених фреквенција [10].

У контексту истраживања које обухвата ова докторска дисертација, као један од значајних праваца се може издвојити истраживање метаструктура које су састављене од различитих типова структурних елемената (као што су штапови, греде, плоче и мембране) [5,8,10,12,19-26,37-46,57-74,93-103]. У литератури су нарочито проучаване дисперзне карактеристике и простирање таласа кроз различите типове структура које се састоје од еластичних греда, чији је научни допринос у предметној области развој методологије за формирање математичког модела понашања структура уз примену општих теорема динамике и методе трансфер матрице [10,46,58,64,69,93,95]. Ојлер-Бернулијева греда (теорија танких греда) је нарочито присутна у овим истраживањима и на њој је показано да периодичним просторним варирањем параметара којима је дефинисан материјал или геометрија греда може доћи до раздвајања дисперзних кривих при чему настају зоне заустављања [10,12,58]. У овој дисертацији разматране су хомогене еластичне греде константног попречног пресека, а просторна периодичност структуре постиже се понављањем јединичних ћелија које се састоје од истих или различитих еластичних греда, повезаних крутим, еластичним или вискоеластичним сегментима, уз присуство дискретних механичких подсистема.

Примењене су и нумеричке методе као што је метода коначних елемената [10,54,96,101], али и делимично аналитичке методе, као што је метода спектралних елемената [13,43]. Блох-Флокетова теорема и периодични гранични услови користе се ради одређивања дисперзних карактеристике разматраних структура [10-53,56-76,79-96,104]. Такође је честа и примена функције фреквентног одзива, ради визуализације положаја и величине различитих зона заустављања, а на чијем дијаграму се зоне заустављања могу разликовати према механизму њиховог настанка [95].

У литератури су разматране динамичке карактеристике периодичних структура од еластичних греда које су круто везане под различитим угловима, тако да формирају тестерасте облике, при чему је коришћена Тимошенкова теорија греде [43]. Потребу за коришћењем Тимошенкове теорије представља повећање фреквентног опсега тачности резултата [1,46,103,105,106], што је јасно показано на дијаграмима упоредних резултата који су добијени коришћењем обе теорије [58,105].

У инжењерској пракси постоји велика заступљеност периодичних структура од спрегнутих сегмената који се знатно разликују по крутости, те се могу разматрати као еластични



Слика 1.1: Илустративни приказ подводног ценовода за транспорт гаса, као пример периодичне структуре која се састоји од еластичних елемената повезаних знатно крућим спојницама. Извор илустрације је [46].

и крути сегменти [8,107,108]. Претходна истраживања вишестепених греда повезаних крућим телима су вршена у циљу одређивања особина слободних и принудних осцилација таквих структура, као што су сопствене фреквенције осциловања и облици модова осциловања [38,97,100]. У наведеној литератури приказан је дијаграм крутог тела ослобођеног од веза са еластичним гредама, а метода трансфер матрице је коришћена за одређивање сопствених фреквенција осциловања система. При томе су за формирање математичког модела коришћене Ојлер-Бернулијева теорија и опште теореме динамике. У области грађевинских конструкција, где су високе зграде проучаване као периодичне структуре које се састоје од Тимошенкових греда и крутих плоча, простирање таласа је проучавано уз помоћ матрица пропагације, чиме је направљен искорак у односу на поступке хомогенизације чија употреба је уобичајена у том домену научних истраживања [8]. Такође су изучавани периодични темељи који се састоје од низа наизменично постављених материјала чије се карактеристике значајно разликују (на пример, бетон и гума, са модулом еластичности бетона који је 10^4 пута већи), и то у циљу сеизмичке изолације [107]. Сличне анализе рађене су и на мостовима са вишеструким распонима [108]. Периодичне еластичне структуре су присутне и у великим постројењима за космичка истраживања, која се налазе у Земљиној орбити или у свемиру, а која се често састоје од цеви повезаних знатно крућим спојницама [9]. Сличне структуре круто везаних цеви јављају се и у дугачким ценоводима, налик илустрацији приказаној на Сл. 1.1 [46,77,78]. Резултати свих наведених истраживања указују на то да ће присуство крутих тела, као и неких периодично постављених дискретних механичких подсистема, изазвати стварање зона заустављања видљивих на дисперзном дијаграму, а чији фреквентни опсег се може контролисати пажљивим одабиром параметра при дизајнирању тих конструкција.

У овој дисертацији разматране су метаструктуре које се састоје од редно везаних еластичних греда које се могу међусобно разликовати и не морају бити коаксијалне, а крута тела којима су повезане могу имати произвољан облик [46,97,98]. За описивање понашања еластичних греда коришћене су Ојлер-Бернулијева и Тимошенкова теорија греда, у зависности од разматраног проблема. Кретање дискретних механичких подсистема и крутог тела описано је уз помоћ општих теорема динамике и геометријске анализе померања [10,38,46,97,100]. Динамичка анализа крутог тела ослобођеног од веза спроведена је за општи случај када се оно налази између две греде које нису коаксијалне [46,97,98].

За одређивање математичког модела примењена је метода трансфер матрице [46,97,98]. Трансфер матрица за круто тело индиферентна је у односу на теорију која је примењена при формирању математичког модела кретања греда са којима је круто тело повезано, а чиме је постигнуто значајно побољшање ефикасности нумеричких прорачуна [46]. Разматране су мале осцилације у равни кретања, а с обзиром на то да суседне греде нису коаксијалне, детаљно је анализирано спрезање осцилација у аксијалном (подужном) и трансверзалном (попречном) правцу, као и ефекти које оно има на дисперзну карактеристику разматраних периодичних структура [41, 46].

У циљу додатне контроле над положајем и ширином зауставних зона код анализираних структура, размотрено је коришћење различитих дискретних механичких подсистема, нпр. опруга и масених резонатора, као и инертера и инерцијалних амплификатора¹, код којих услед начина на који је конструисан механизам долази до ефективног увећања инерцијалних карактеристика [16-18,56-83]. Увођење дискретних масених резонатора доводи до дисипације механичке енергије на фреквенцијама блиским сопственој фреквенцији резонатора [58,79-83]. У случајевима када је потребно остварити зауставну зону на веома ниским фреквенцијама то подразумева релативно велику масу самих резонатора, чиме се значајно увећава и маса саме конструкције [79-83]. Услед тога су веома актуелна истраживања везана за конструисање и моделирање различитих инерцијалних елемената, тзв. инертера, као и инерцијалних амплификатора чија сопствена фреквенција осциловања одговара резонаторима значајно веће масе [16-18,79-83]. Као посебну врсту инертера, у оквиру ове дисертације уведена су два различита модела инерцијалних амплификатора, те је извршена упоредна анализа њиховог утицаја на дисперзну карактеристику периодичне структуре [79-83].

Ради постизања зона заустављања на нижим фреквенцијама, а посебно почевши од нулте фреквенције, коришћени су и различити модели еластичних и вискоеластичних ослонаца којима се посматрана структура може везати за непокретну подлогу [58]. У литератури је честа употреба Винклеровог еластичног модела, али показано је ефекти дисипације који у том моделу нису узети у обзир значајно утичу на сопствене фреквенције осциловања система, тако да је неопходно разматрати и сложеније моделе, као што су Пастернакови дво-параметарски еластични и вискоеластични модели [109,110]. Такође је интересантан и утицај преднапрезања, уз помоћ дејства аксијалне силе, при чему долази до снижавања фреквентног нивоа зона заустављања [111]-[113].

Разматране су и апериодичне, тј. квазипериодичне структуре, које се формирају низањем јединичних ћелија са релативно малим разликама одређеним на основу задатог обрасца у коме фигурише такозвани параметар квазипериодичности. На тај начин се у периодичну структуру уводи контролисана (дизајнирана) неуређеност [86]. Када су у питању једнодимензионалне структуре, у литератури се често примењује Фибоначијев низ, при чему је вредност одређене карактеристике јединичне ћелије једнака збиру њених вредности у претходне две јединичне ћелије [87]. Међутим, када су у питању неке материјалне и геометријске карактеристике, мора се применити образац који не може довести до неограниченог раста разматране карактеристике [85,88,89,86]. У литератури су, на пример, растојања између опруга којима је структура везана за подлогу одређена на основу дужина лука кружнице која се котрља по правој линији а које зависе од параметра квазипериодичности [88,89,86]. Такве структуре су такође дисперзивне, а нарочито је интересантна зависност дисперзне карактеристике од вредности параметра квазипериодичности. Фрактални спектар који је видљив на том дијаграму подсећа на облик Хофстадтеровог лептира познатог у

¹За превод енглеског термина *inertial amplifier* искоришћен је англицизам „амплификатор“, с обзиром на то да израз „појачивач“, у контексту науке и технике на српском језику асоцира на појмове из области електронике и аутоматског управљања.

квантној механици [88]. Показано је да се уз помоћ таквог дијаграма може извршити анализа проучаваних структура, при чему је од великог значаја појава локализације таласа на крајевима и границама структуре [85]. Уз помоћ локализације таласа се могу спречити потенцијално штетна дејства у неким деловима структуре, али се могу користити и за прикупљање енергије [88,16-18]. У том смислу су представљени и различити експериментални резултати [90-92]. У литератури су проучаване различите квазипериодичне структуре које се превасходно састоје од еластичних греда, при чему је коришћена Ојлер-Бернулијева теорија греде [86-89]. У оквиру истраживања представљеног у овој дисертацији, формирана је квазипериодична структура од Тимошенкових греда и крутих тела, при чему се квазипериодичност структуре постиже варијацијом модула еластичности греда и масе крутог тела. На дијаграмима су уочени карактеристични парови сопствених фреквенција и параметра квазипериодичности, при којима долази до локализације таласа, што је и потврђено на дијаграмима на којима су приказани одговарајући облици модова осциловања.

Значајан део истраживања у доступној литератури усмерен је на могућност остваривања неречипрочне пропагације таласа, када је нарушено правило симетрије при простирању таласа из његовог извора у свим доступним правцима [19-31]. У природи се такве појаве могу приметити код структура које врше ротационо кретање, услед дејства Кориолисове силе [19,20]. Од нарочите важности у индустрији представља могућност управљања правцем простирања таласа [10,12]. На пример, акустични метаматеријали су врло успешно примењени у облику плоча и мембрана за звучну изолацију, нарочито у погледу заштите звучног извора од његовог еха [12,20]. У научној литератури су изучаване различите стратегије уз помоћ којих је могуће изазвати неречипрочно простирање таласа, те је показано да до њега може доћи када се разматрају материјали чије карактеристике су нелинеарне или зависе од времена [19,20]. Временском модулацијом одређених параметара структуре може се постићи периодичност у времену, при чему је за одређене вредности параметара модулације могуће остварити чак и једносмерно простирање таласа [19-31]. Експериментално је показано да се применом пиезоелектричних актуатора може извршити активна модулација особина материјала еластичне греде у времену, и то тако да дође до једносмерног простирања механичких таласа, што је већ искоришћено за филтрирање механичких таласа уз могућност одабирања излазне фреквенције [24,27]. Показано је и да је могуће изазвати неречипрочну пропагацију таласа уз помоћ низа резонатора периодично везаних за еластичну греду, при чему се просторна модулација постиже различитом оријентацијом призматичних еластичних елемената резонатора, док се временска модулација постиже њиховом константном ротацијом [25]. У оквиру ове дисертације примењена је временска модулација одређених параметара фононске структуре сачињене од аксијално оптерећених паралелних еластичних греда које су повезане различитим еластичним слојевима, чиме је постигнута неречипрочна пропагација таласа. Према уобичајеној процедури која је примењена у предметној литератури, математички модел понашања таквих фононских структура представљен је системом парцијалних диференцијалних једначина спрегнутих по контурним условима, на основу којих се формира матрична једначина. При томе се матрице, које су функције времена (као што је матрица крутости), могу развити у Фуријеов ред [23,28,31]. С обзиром на природу проблема, решење за вектор померања се претпоставља у Флокетовом облику [20,23,28,31]. Применом описане процедуре може се формулисати проблем сопствених вредности који представља функцију фреквенције и таласног броја (дисперзну релацију) [20,23,28,31].

Уопштавањем разматраних структура, омогућена је упоредна анализа утицаја различитих параметара на простирање таласа, уз допринос бољем разумевању различитих механизма који доводе до феномена значајног пригушења или потпуног заустављања таласа, као и једносмерне (неречипрочне) пропагације таласа на одређеним фреквентним опсезима.

1.3 Садржај дисертације

У *првом* поглављу дисертације дат је увод у предметну научну област, уз историјски развој и преглед научне литературе. Такође је извршена поставка разматраних проблема и истакнут је допринос припадајућој истраживачкој области.

У *другом* поглављу дисертације дата су општа разматрања која су од суштинске важности у оквиру представљених истраживања. Детаљно су приказане главне научне методе које су коришћене, као и приступ формирању математичког модела понашања разматраних периодичних структура. Разјашњена је метода трансфер матрице, уз Блох-Флокетову теорему и начин на који се она примењује у постојећој научној литератури. Уведен је појам дисперзије и дисперзне карактеристике периодичних структура, а истакнут је и значај дијаграма дисперзне карактеристике и функције фреквентног одзива при визуализацији и анализи механизма који доводе до појаве зона заустављања. С обзиром на то да се разматране структуре преваходно састоје од еластичних греда, изведене су парцијалне диференцијалне једначине кретања греда у аксијалном и трансверзалном правцу, према Ојлер-Бернулијевој и Тимошенкој теорији.

У *трећем* поглављу су разматране периодичне структуре чије јединичне ћелије се састоје од две еластичне греде под произвољним углом, које су повезане крутим телом произвољног облика, а могу да буду ослоњене на различите начине, као и да садрже дискретне механичке подсистеме (масене резонаторе и инертере). Математички модел такве сложене структуре формиран је уз помоћ методе трансфер матрице, а валидација модела је урађена поређењем са одређеним резултатима доступним у научној литератури, као и уз помоћ методе коначних елемената, применом комерцијалног софтвера *COMSOL Multiphysics*. Затим је извршена параметарска анализа понашања разматраних неограничених периодичних структура уз помоћ нумеричких прорачуна у софтверском окружењу *MATLAB*.

У *четвртом* поглављу су разматране квазипериодичне структуре чије јединичне ћелије се састоје од еластичне греде и крутог тела. Квазипериодичност структуре огледа се у просторној варијацији модула еластичности греде, као и масе крутог тела. Дијаграм зависности сопствених фреквенција осциловања таквих структура од параметра квазипериодичности подсећа на облик Хофстадтеровог лептира. Показано је да код таквих сложених структура долази до локализације таласа која је условљена материјалним карактеристикама саме структуре.

У *петом* поглављу су разматране структуре чије се јединичне ћелије састоје од паралелно нанизаних, аксијално оптерећених еластичних греда, повезаних различитим везивним слојевима. При томе су разматрани Винклеров и Пастернаков еластични слој, као и Пастернаков вискоеластични слој. Аксијално оптерећење и карактеристике везивних слојева су задати у облику хармонијских функција времена, чиме је поред постојеће просторне периодичности остварена и периодичност у времену. Математички модел таквих фононских структура формиран је уз помоћ система спрегнутих парцијалних диференцијалних једначина. Упоредна анализа резултата нумеричких прорачуна показује утицај параметара система на његове динамичке карактеристике, и то пре свега на могућност појаве нересипрочне, као и једносмерне пропагације таласа.

Резултати који су изложени у трећем, четвртом и петом поглављу представљају оригинални научни допринос. Део тих резултата објављен је у радовима [23,46].

У *шестом* поглављу дата су закључна разматрања анализираних проблема, а такође су представљене и смернице за будућа научна истраживања.

2 Општа разматрања

2.1 Основни појмови и феномени при проучавању простирања таласа

У природи постоји широк спектар таласних феномена. У оквиру ове дисертације разматрају се механички таласи који се простиру кроз чврсте средине [1]. У најужем смислу, поремећај који настаје услед неког механичког дејства преноси се кроз средину услед међусобног дејства елементарних честица, које својим кретањем побуђују суседне честице [1]. Силе којима елементарне честице међусобно интерагују имају реституциони карактер, услед чега долази до њиховог осцилаторног кретања, а кроз посматрану средину се простира механички талас. Самим тим и брзина таласа зависи од особина средине кроз коју се талас простира [1,2].

Међутим, разматране чврсте средине се са становишта механике континуума могу посматрати као континуалне средине. У оквиру теорије еластичности су, под одређеним претпоставкама о оптерећењима и деформацијама, развијени различити модели којима је описано понашање стандардних структурних елемената, као што су штапови и греде [1,2]. На основу тих модела се могу формирати парцијалне диференцијалне једначине кретања структурних елемената [1,6]. На тај начин се долази до задовољавајућих решења у одређеном фреквентном опсегу, те кретања елементарних честица не разматрају [1].

Свако кретање у природи изложено је неком отпору, који се у одређеним случајевима може занемарити, те се након дејства поремећаја успоставља осцилаторно кретање које се у теорији може одвијати неограничено дуго, при чему се говори о слободним осцилацијама конзервативних система [1,2]. Уколико отпор кретању није занемарен, потребно је стално дејство побуде како би се укупна енергија система одржавала, а осцилаторно кретање одвијало на исти начин [1,2]. Посебно се проучава такозвани пролазни одзив структуре при дејству иницијалне побуде, као што је краткотрајно дејство силе, при чему релативно брзо долази до поновног успостављања равнотеже [1].

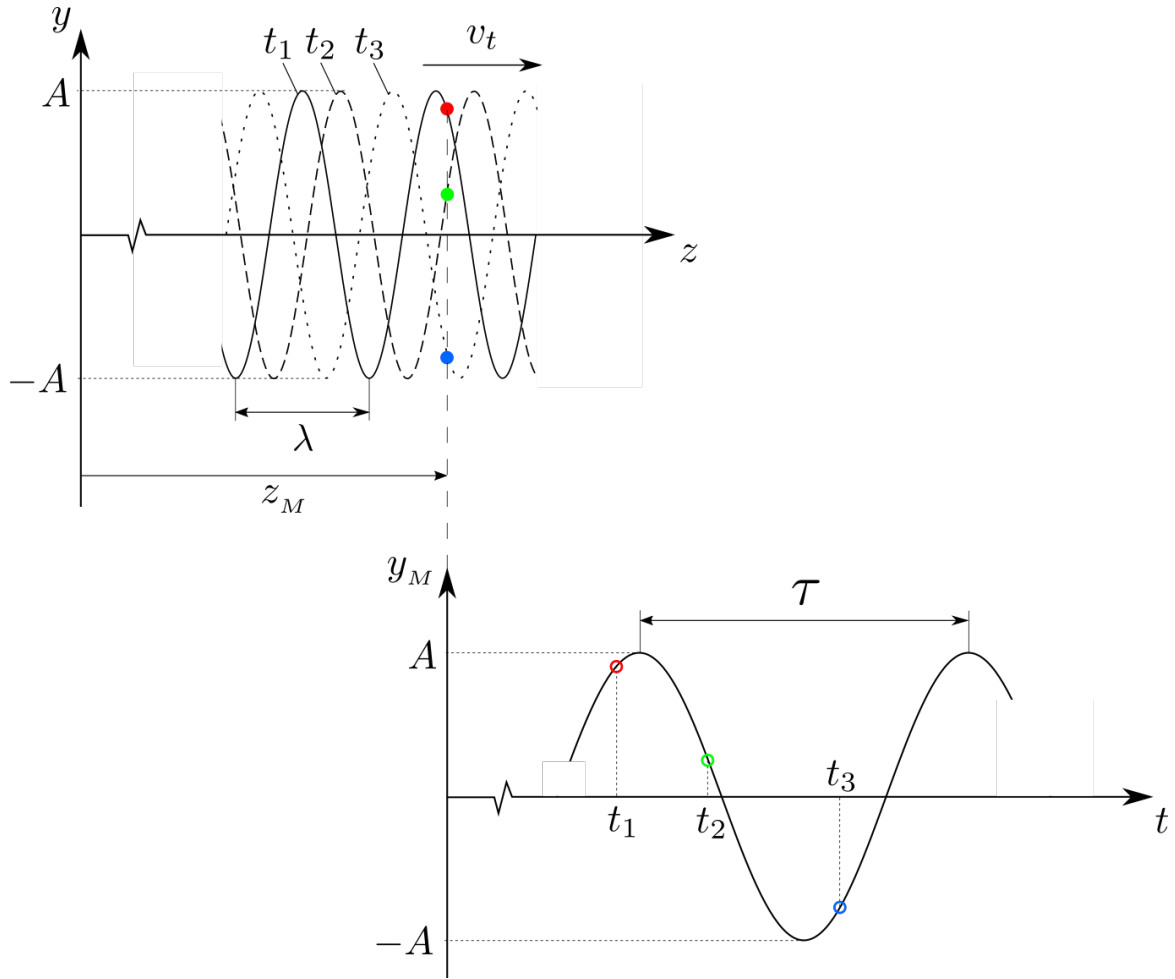
Ради увођења неких основних појмова који се користе при проучавању таласних феномена, разматра се простирање механичког таласа кроз материјални систем, чије се материјалне тачке у равнотежном стању налазе дуж осе z , а могу се кретати (осциловати) у ортогоналном правцу (дуж осе y). На Сл. 2.1 приказано је простирање механичког таласа у дводимензионалном простору одређеном подужном координатом z и попречном координатом y , у три различита временска тренутка, при чему важи $t_1 < t_2 < t_3$. Разматрани материјални систем је конзервативан и просторно неограничен, што је симболично приказано на Сл. 2.1.

Издвојена је једна, произвољна материјална тачка M , чији је положај одређен координатом z_M . Посебно је приказано њено осциловање између два положаја највећег одклона од равнотежног положаја (амплитудна положаја), $y_M = A$ и $y_M = -A$. Проток времена мери се уз помоћ координате t [s], а период τ [s] означава време које протекне између два узастопна проласка материјалне тачке кроз исти положај, истом брзином у истом смеру, при чему она изврши једну пуну осцилацију (на Сл. 2.1 је означен период између два проласка кроз амплитудни положај) [4]. Фреквенција осциловања представља број пуних осцилација у јединици времена $f = 1/\tau$ [Hz]. Међутим, у инжењерској пракси се чешће користи појам кружне фреквенције $\omega = 2\pi f$ [rad/s].

Механички талас је приказан у виду хармонијске функције која је симетрична у односу на осу z , а њене вредности се крећу између два екстрема $y \in [-A, A]$. Растојање између две суседне материјалне тачке које пролазе кроз исти положај, истом брзином у истом

смеру, представља таласну дужину λ [m] (на Сл. 2.1 је означена таласна дужина између две тачке које се налазе у амплитудном положају $y = -A$). У контексту представљених истраживања важан је и појам таласног броја $\kappa = 2\pi/\lambda$ [rad/s], који по аналогији са кружном фреквенцијом представља просторну фреквенцију таласа [1,2]. Брзина простирања таласа се може одредити као однос његове кружне и просторне фреквенције $v_t = \omega/\kappa$ [1,2].

С обзиром на то да кретање материјалних тачака има осцилаторни карактер, функција померања се претпоставља у хармонијском облику $y(z, t) = Ae^{i(\kappa z - \omega t)}$. При томе је линија путање сваке тачке материјалног система права линија управна на осу z , услед чега се формира такозвани „раван талас“ који се простира у једном правцу (у правцу осе z) [2].



Слика 2.1: Илустративни приказ три узастопна положаја механичког таласа који се креће брзином v_t , при чему доводи до осцилаторног кретања тачке M чији је положај одређен координатом z_M . Тачка M осцилује око свог равнотежног положаја у току времена.

У чврстим срединама се поремећај може преносити у више ортогоналних праваца, те се у случају еластичних греда говори о аксијалним (подужним), трансверзалним (попречним), као и торзионим (увојним) осцилацијама, које су описане парцијалним диференцијалним једначинама кретања [1]. У општем случају долази и до спрезања кретања у различитим правцима. Решавањем парцијалних диференцијалних једначина кретања система, уз узимање у обзир граничних и контурних услова, може се одредити коначна једначина кретања којом је дефинисан положај система у сваком временском тренутку. Добијени резултати морају да задовоље одређене критеријуме тачности, тј. не смеју да одступају од дефинисаног опсега у односу на оно што се може измерити у стварности, а то зависи од уведених претпоставки, тј. апроксимација уведених у оквиру разматране теорије [6].

2.2 Динамичке карактеристике периодичних структура

При простирању механичких таласа кроз периодичне структуре долази до феномена дисперзије, при чему таласи одређених таласних дужина, тј. фреквенција, бивају пригушени. Ради проучавања таквих појава потребно је формирати математички модел понашања периодичне структуре, након чега је могуће анализирати њену дисперзну карактеристику и механизме који доводе до појаве зауставних зона.

Јединична ћелија периодичне структуре се у општем случају састоји из више целина, те се према природи проблема може одабрати аналитички приступ који је адекватан за његово решавање. Уколико се кретање периодичне структуре може описати системом диференцијалних једначина, уобичајено је да се формира матрична диференцијална једначина:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = 0, \quad (2.1)$$

где је $\mathbf{q}$ вектор померања, $\mathbf{M}$ матрица инерције, $\mathbf{C}$ матрица пригушења, а $\mathbf{K}$ матрица крутости система [10,23,31]. С обзиром на то да величина вектора померања одговара броју степени слободе механичког система, самим тим и ред добијених матрица може бити веома велики. Услед тога се за формирање математичког модела периодичних структура често примењује метода трансфер матрице на врло ефикасан начин [10,46,58,64,69,93,95]. Уз примену Блох-Флокетове теореме, могуће је одредити дисперзну карактеристику периодичне структуре на основу разматрања њене јединичне ћелије, те ред трансфер матрице одговара броју величина којима је дефинисан вектор стања [10-53,56-76,79-96,104].

У оквиру ове дисертације разматране су периодичне структуре које се превасходно састоје од еластичних греда, а њихово кретање је описано уз помоћ два различита математичка модела, тј. коришћењем Ојлер-Бернулијеве и Тимошенкове теорије греда. Након одређивања математичког модела понашања разматраних структура, могуће је одредити њихову дисперзну карактеристику и облик модова еластичних таласа одабраних фреквенција, као и сопствене фреквенције осциловања и функцију фреквентног одзива коначне структуре са одређеним граничним условима [10].

2.3 Метода трансфер матрице

Метода трансфер матрице је аналитичка метода која се користи како би се одредила функционална веза између вектора стања дефинисаних за два краја јединичне ћелије периодичне структуре. У контексту истраживања представљених у оквиру ове дисертације, вектор стања у општем случају садржи шест компоненти: трансверзално и аксијално померање, угао ротације, момент савијања, као и трансверзалну и аксијалну силу. Када су осцилације у различитим правцима независне, при разматрању аксијалних осцилација могу се узети у обзир само аксијално померање и аксијална сила, док се при разматрању трансверзалних осцилација оне могу искључити. Међутим, уколико долази до спрезања аксијалних и трансверзалних осцилација, морају се узети у обзир свих шест компоненти вектора стања [46].

Трансфер матрица одређеног механичког система је функција фреквенције, а свака уведена апроксимација смањује опсег фреквенција у којима ће добијени математички модел дати тачне резултате. Услед тога је при моделирању динамичког понашања јединичне ћелије најбоље приступити са становишта механике континуума [9,64]. Самим тим се она, за разлику од методе коначних елемената, не ослања на апроксимативне методе просторне дискретизације [94]. Трансфер матрица јединичне ћелије се може одредити и трансформацијом њене матрице крутости, добијене аналитички или уз помоћ методе коначних

елемената [10]. На тај начин се, за коначне периодичне структуре које се састоје од n јединичних ћелија, избегава формирање глобалне матрице крутости великих димензија које би она имала након дискретизације у оквиру методе коначних елемената [94].

Трансфер матрица $\mathbf{T}$ је квадратна матрица чији ред одговара величини вектора стања, дакле, у општем случају $r(\mathbf{T}) = 6$ [37,40,69,48]. Уколико јединична ћелија није континуална целина, већ се састоји из s различитих градивних делова, могу се одредити трансфер матрице $\mathbf{T}_i$, $i = 1, 2, \dots, s$, за сваки део јединичне ћелије, а свака од њих ће представљати везу између узастопних вектора стања:

$$\Psi_i'' = \mathbf{T}_i \Psi_i', \quad (2.2)$$

где је Ψ_i' вектор стања на крајње левој страни i -те градивне целине јединичне ћелије, док је Ψ_i'' вектор стања на њеној крајње десној страни. С обзиром на то да важи:

$$\Psi_i'' = \Psi_{i+1}', \quad (2.3)$$

следи да се трансфер матрица јединичне ћелије $\mathbf{T}$ може одредити узастопним множењем трансфер матрица појединих делова:

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_s \mathbf{T}_{s-1} \cdots \mathbf{T}_2 \mathbf{T}_1. \quad (2.4)$$

Добијена трансфер матрица представља везу између вектора стања дефинисаних на два супротна краја јединичне ћелије:

$$\Psi(\xi = \Lambda) = \mathbf{T} \Psi(\xi = 0), \quad (2.5)$$

где је ξ подужна оса везана за леви крај јединичне ћелије, док је Λ дужина јединичне ћелије. Услед тога, примена ове методе ограничена је на једнодимензионалне и квази-једнодимензионалне проблеме [10,58,46]. Аналогно томе, трансфер матрица периодичне структуре може се одредити узастопним множењем трансфер матрица јединичних ћелија. С обзиром на то да су трансфер матрице квадратне матрице, уколико у периодичној структури има n јединичних ћелија, трансфер матрица периодичне структуре се може одредити као $\mathbf{T}^n$.

Предност методе трансфер матрице је у њеној ефикасности при прорачунима, у односу на друге методе код којих величина матричних једначина зависи од броја степена слободе целокупног система, као што је нпр. метода коначних елемената. Међутим, под одређеним околностима, нпр. када се множи већи број матрица како би се одредила трансфер матрица коначне периодичне структуре, може доћи до нумеричке нестабилности прорачуна. У литератури су развијене различите нумеричке процедуре за превазилажење таквих потешкоћа [9,93]. Такође се, у комбинацији са методом трансфер матрице, може применити и метода спектралних елемената.

Метода спектралних елемената садржи општи приступ методе коначних елемената, али се на целом прорачунском домену користе функције вишег реда, услед чега спада у тзв. спектралне методе [13,43,75]. С обзиром на аналитички приступ формирању математичког модела понашања појединих делова јединичне ћелије, њена трансфер матрица (2.4) се може искористити за формирање матрице крутости [13,43,45,74].

С обзиром на то да је трансфер матрица веза између два вектора стања, док матрица крутости представља везу између вектора померања $\mathbf{q}$ и вектора сила $\mathbf{f}$, трансфер матрицу можемо представити у следећем облику:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{11} & \mathbf{T}_{12} \\ \mathbf{T}_{21} & \mathbf{T}_{22} \end{bmatrix}, \quad (2.6)$$

а израз (2.5) можемо написати на следећи начин:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{q}(\xi = \Lambda) \\ \mathbf{f}(\xi = \Lambda) \end{Bmatrix} = \mathbf{T} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}(\xi = 0) \\ \mathbf{f}(\xi = 0) \end{Bmatrix}. \quad (2.7)$$

Матрична једначина (2.7) може се написати у облику еквивалентног система две матричне једначине:

$$\mathbf{q}(\xi = \Lambda) = \mathbf{T}_{11}\mathbf{q}(\xi = 0) + \mathbf{T}_{12}\mathbf{f}(\xi = 0), \quad (2.8)$$

$$\mathbf{f}(\xi = \Lambda) = \mathbf{T}_{21}\mathbf{q}(\xi = 0) + \mathbf{T}_{22}\mathbf{f}(\xi = 0). \quad (2.9)$$

Уколико се механички систем састоји од n јединичних ћелија, једначине (2.8) и (2.9) се уз помоћ матричне алгебре могу трансформисати како би се формирала следећа веза између вектора сила и вектора померања j -те јединичне ћелије ($j = 1, \dots, n$):

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{f}_j(\xi = 0) \\ \mathbf{f}_j(\xi = \Lambda) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{12}^{-1}\mathbf{T}_{11} & -\mathbf{T}_{12}^{-1} \\ \mathbf{T}_{21} - \mathbf{T}_{22}\mathbf{T}_{12}^{-1}\mathbf{T}_{11} & \mathbf{T}_{22}\mathbf{T}_{12}^{-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_j(\xi = 0) \\ \mathbf{q}_j(\xi = \Lambda) \end{Bmatrix}. \quad (2.10)$$

С обзиром на то да између две узастопне јединичне ћелије важе следећи гранични услови:

$$\mathbf{q}_j(\xi_j = \Lambda) = \mathbf{q}_{j+1}(\xi_{j+1} = 0), \quad (2.11)$$

$$\mathbf{f}_j(\xi_j = \Lambda) = \mathbf{f}_{j+1}(\xi_{j+1} = 0), \quad (2.12)$$

следи:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{f}_j(0) \\ \mathbf{f}_{j+1}(0) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{12}^{-1}\mathbf{T}_{11} & -\mathbf{T}_{12}^{-1} \\ \mathbf{T}_{21} - \mathbf{T}_{22}\mathbf{T}_{12}^{-1}\mathbf{T}_{11} & \mathbf{T}_{22}\mathbf{T}_{12}^{-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_j(0) \\ \mathbf{q}_{j+1}(0) \end{Bmatrix}, \quad (2.13)$$

где је:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{12}^{-1}\mathbf{T}_{11} & -\mathbf{T}_{12}^{-1} \\ \mathbf{T}_{21} - \mathbf{T}_{22}\mathbf{T}_{12}^{-1}\mathbf{T}_{11} & \mathbf{T}_{22}\mathbf{T}_{12}^{-1} \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

матрица крутости јединичне ћелије периодичне структуре. С обзиром на то да је трансфер матрица јединичне ћелије функција фреквенције, исто важи и за матрицу крутости.

Даља процедура подразумева формирање глобалне матрице крутости $\mathbf{D}_G$ за коначну периодичну структуру која се састоји од n јединичних ћелија. Поступак формирања глобалне матрице крутости у оквиру методе спектралних елемената је потпуно исти као и код методе коначних елемената. Она се формира водећи рачуна о одговарајућим степенима слободe и условима континуалности који морају бити задовољени између јединичних ћелија [101]. Међутим, полазећи од аналитичке методе трансфер матрице, добија се глобална матрица крутости која има значајно мање димензије него што би то био случај код методе коначних елемената код које се као последица дискретизације система јавља веома велики број степени слободe. Мана ове методе је што тачност резултата зависи од претпоставки које су уведене приликом аналитичког поступка описивања кретања појединих делова структуре [9,64,94]. Математички модел понашања разматраног система добија облик:

$$\mathbf{D}_G \mathbf{V} = \mathbf{F}, \quad (2.15)$$

где је $\mathbf{V}$ вектор померања, а $\mathbf{F}$ вектор сила.

2.4 Дисперзна карактеристика периодичне структуре

Дисперзија је појам познат у теорији кристалографије, као својство кристала код којих индекс преламања зависи од таласне дужине светлости [15]. Услед тога при проласку светлосног зрака кроз кристалну призму, долази до његовог разлагања на више боја светлосног спектра које се карактеришу различитим таласним дужинама [15], као што је приказано на Сл. 2.2. Код периодичних структура које се разматрају у оквиру ове дисертације постоји нелинеарна веза између таласног броја механичких таласа и њихове фреквенције. Услед тога долази до значајног пригушења, тј. до ефективног заустављања, простирања механичких таласа одређених фреквенција. У том смислу се може рећи да је периодична структура дисперзивна тј. говори се о дисперзној карактеристици структуре која се може представити уз помоћ дијаграма на коме се јасно уочавају фреквентни опсези у оквиру којих нема простирања таласа (зауставне зоне) [10]. За разлику од тога, код структура које нису периодичне се на дијаграму дисперзне карактеристике могу уочити линије које се укрштају у оквиру целокупног прорачунског домена (дозвољено је простирање таласа свих фреквенција) [10,20].



Слика 2.2: При проласку светлосног зрака кроз кристалну призму, долази до његовог разлагања на више боја светлосног спектра које се карактеришу различитим таласним дужинама. Извор илустрације: *Pink Floyd - The Dark Side of the Moon*, преузето са адресе: <https://shop.pinkfloyd.com>.

Дисперзна карактеристика код разматраних механичких система представља функцију фреквенције и таласног броја [10]. У литератури је најзаступљенија функција бездимензионог таласног броја $\tilde{\kappa}$ и бездимензионе фреквенције Ω [10]. У свим случајевима када важи реципрочна пропација таласа, функција дисперзне карактеристике (тзв. „дисперзна релација“) $f(\tilde{\kappa}, \Omega)$ је симетрична у односу на осу $\tilde{\kappa} = 0$ и има карактеристику периодичности са периодом 2π [10,20]. Стога се дефинише прва Брилунова зона (ПБЗ), која представља основни интервал $\tilde{\kappa} \in [-\pi, \pi]$ [10]. Негативни и позитивни део интервала односе се на смер простирања таласа (унапред и уназад), што управо одговара правилу реципрочности (симетрије) при простирању таласа. У контексту изложених истраживања која обухватају једнодимензионалне и квази-једнодимензионалне проблеме, таласи који одговарају негативним вредностима $\tilde{\kappa}$ простиру се улево, док за $\tilde{\kappa} > 0$ важи обратно.

Дијаграм дисперзне карактеристике представља визуализацију дисперзне релације до које се долази проналажењем корена функције $f(\tilde{\kappa}, \Omega) = 0$, при чему број добијених решења зависи од величине вектора стања. У литератури се при решавању тог проблема разликују директан и инверзни метод [10]. Директан метод подразумева задавање опсега бездимензионе фреквенције, при чему се одређују вредности бездимензионог таласног

броја, а добијена решења су у општем случају конјуговано-комплексна [10]. Услед тога је потребно извршити додатну обраду добијених резултата и издвојити реалне и имагинарне делове решења $\tilde{\kappa}$. Инверзни метод подразумева задавање бездимензионог таласног броја на основном интервалу ПБЗ, при чему се одређују вредности бездимензионе фреквенције, а узимају се у обзир само позитивне реалне вредности [10].

При осциловању разматраних структура, долази до формирања равног таласа, те се функција померања може претпоставити у облику $q(Z, \tau) = Ce^{i(\tilde{\kappa}Z - \Omega\tau)}$, где је Z бездимензиона просторна координата, τ бездимензиони временски параметар, а C је интеграциона константа [20]. Може се закључити да реални делови добијених решења $\tilde{\kappa}$ одговарају равним таласима који се простиру кроз посматрану структуру без слабљења, док имагинарни делови одговарају таласима чија се амплитуда смањује експоненцијално, те долази до њиховог потпуног пригушења [10]. Када се на дијаграму дисперзне карактеристике прикажу реалне вредности добијених резултата, јасно се могу уочити зоне пропагације у којима постоје дисперзне линије, као и зоне заустављања механичких таласа у којима оне нису присутне [37,40,48,69]. Уобичајено је да се реалне вредности приказују на позитивном, а имагинарне на негативном делу апсцисе, захваљујући симетрији у односу на осу $\tilde{\kappa} = 0$. Дакле, приказује се само део решења који одговара половини прве Брилунове зоне, која се назива и нередуцибилном Брилуновом зоном (НБЗ) [10].

2.5 Блох-Флокетова теорема

Блох-Флокетовом теоремом дефинисана је законитост која се односи на простирање таласа кроз периодичне средине, а која се може утврдити на основу разматрања јединичне ћелије [10,104,53]. У периодичним структурама је померање било које тачке у јединичној ћелији једнако померању исте те тачке у претходној јединичној ћелији помноженом са $e^{i\tilde{\kappa}}$, где је $\tilde{\kappa}$ бездимензиони таласни број који се односи на простирање таласа кроз јединичну ћелију као целину [37].

Примена Блох-Флокетове теореме у оквиру методе трансфер матрице Према Блох-Флокетовој теорему, узимајући у обзир да важи релација (2.3), између вектора стања на крајевима јединичне ћелије постоји следећа веза:

$$\Psi(\xi = \lambda) = e^{i\tilde{\kappa}} \Psi(\xi = 0). \quad (2.16)$$

Из једнакости левих страна релација (2.5) и (2.16) следи проблем сопствених вредности:

$$\mathbf{T}(\Omega) \Psi(\xi = 0) - e^{i\tilde{\kappa}} \mathbf{I} \Psi(\xi = 0) = \mathbf{0}, \quad (2.17)$$

где је $\mathbf{I}$ јединична матрица одговарајућег реда, а $\mathbf{0}$ нула вектор.

Примена Блох-Флокетове теореме у оквиру методе спектралних елемената Полазећи од израза (2.13), Блох-Флокетова теорема се може применити на две узастопне јединичне ћелије:

$$\mathbf{q}_{j+1}(0) = e^{i\tilde{\kappa}} \mathbf{q}_j(0), \quad -\mathbf{f}_{j+1}(0) = e^{i\tilde{\kappa}} \mathbf{f}_j(0), \quad (2.18)$$

при чему важи $\mathbf{f}_j(\Lambda) + \mathbf{f}_{j+1}(0) = 0$. Узимајући у обзир изразе (2.11), (2.13) и (2.18), следи:

$$(e^{i2\tilde{\kappa}} \mathbf{I} - e^{i\tilde{\kappa}} \mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2) \mathbf{q}_j(0) = \mathbf{0}, \quad (2.19)$$

што се може трансформисати у проблем сопствених вредности [45,74]:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{P}_2 & \mathbf{P}_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_j(0) \\ e^{i\tilde{\kappa}} \mathbf{q}_j(0) \end{Bmatrix} - e^{i\tilde{\kappa}} \mathbf{I} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_j(0) \\ e^{i\tilde{\kappa}} \mathbf{q}_j(0) \end{Bmatrix} = \mathbf{0}, \quad (2.20)$$

где је $\mathbf{0}$ нула-матрица одговарајућег реда, док су:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_1 &= \mathbf{T}_{11} + \mathbf{T}_{12}\mathbf{T}_{22}\mathbf{T}_{12}^{-1}, \\ \mathbf{P}_2 &= \mathbf{T}_{12}\mathbf{T}_{21} - \mathbf{T}_{12}\mathbf{T}_{22}\mathbf{T}_{12}^{-1}\mathbf{T}_{11}.\end{aligned}$$

С обзиром на то да добијени проблем сопствених вредности, (2.17) тј. (2.20), представља функцију бездимензионе фреквенције и таласног броја, самим тим је дефинисана дисперзна релација разматраног механичког система. За решавање дисперзне релације која је добијена полазећи од методе трансвер матрице погодна је директна метода [10].

2.6 Функција фреквентног одзива померања

У литератури се често за валидацију резултата добијених на дијаграму дисперзне карактеристике користи одзив померања коначне периодичне структуре која се састоји од n јединичних ћелија, при дејству јединичне силе [10,95]. У овом случају је погодно коришћење методе спектралних елемената, како би се избегло множење n трансфер матрица. Уобичајено је да се, ради одређивања функције фреквентног одзива померања (ФФОП), структура на једном крају оптерети јединичном силом задатом на одговарајућој позицији у оквиру вектора силе $\mathbf{F}$ (нпр. на позицији која одговара трансверзалној сили на десном крају механичког система). Затим се, полазећи од матричне једначине (2.15), може одредити вектор померања структуре $\mathbf{V} = \mathbf{D}_G^{-1}\mathbf{F}$ [74]. Први и последњи елемент вектора померања $\mathbf{V}$ представљају улазни W_1 и излазни W_N параметар, уз помоћ којих се може одредити амплитуда ФФОП:

$$\log_{10} \frac{|W_1|}{|W_N|} [\text{dB}], \quad (2.21)$$

при чему се логаритамска скала користи ради боље визуализације добијених резултата [74,95]. Функција фреквентног одзива померања одређује се за сваку фреквенцију из опсега приказаног на дијаграму дисперзне карактеристике [74]. На дијаграму зависности амплитуда ФФОП од фреквенције се у опсегу зона пропагације могу уочити скокови којима су представљене сопствене фреквенције осциловања разматране коначне структуре [10]. Када су у питању зауставне зоне, оне се могу уочити на фреквентним опсезима где постоји велики пад амплитуде ФФОП, док облици зауставних зона указују на механизам њиховог настанка, те се могу разликовати зоне до којих долази услед Бреговог расејања и локалне резонанције [70,73,76,78].

2.7 Сопствене фреквенције осциловања механичког система

Појам сопствене фреквенције се пре свега односи на фреквенцију слободних осцилација система са једним степеном слободе [1,2,6]. У систему са више степени слободе број сопствених фреквенција осциловања одговара броју степени слободе, док је у континуалним системима број сопствених фреквенција бесконачан [1].

Сопствене фреквенције осциловања одређене су за слободан систем, на који не делују спољашње силе. На основу матричне једначине (2.15), следи:

$$\mathbf{D}_G \mathbf{V} = \mathbf{0}, \quad (2.22)$$

при чему се не разматра тривијални случај када систем мирује ($\mathbf{V} = \mathbf{0}$). Матрична једначина (2.22) је задовољена када је глобална матрица крутости $\mathbf{D}_G$ сингуларна, тј. када је њена детерминанта једнака нули:

$$\det(\mathbf{D}_G) = 0. \quad (2.23)$$

Када су у питању сложене структуре које се састоје од еластичних и крутих сегмената, детерминанта глобалне матрице крутости представља трансценденталну функцију фреквенције $f(\Omega)$ [102]. Она је једнака нули управо за вредности које одговарају сопственим фреквенцијама система, али до решења се не може доћи аналитичким путем. Уместо тога се могу употребити различите нумеричке методе, као што је метода бисекције [101].

Метода бисекције је итеративна нумеричка метода која се заснива на чињеници да функција при свом проласку кроз нулу мора да промени знак [101]. Дакле, уколико је функција $f(x)$ реална и непрекидна на интервалу $x \in [x_1, x_2]$, можемо одредити њене вредности $f(x_1)$ и $f(x_2)$, а затим и знак њиховог производа. Уколико важи:

$$f(x_1)f(x_2) < 0, \quad (2.24)$$

тада постоји макар једно решење $x_r \in [x_1, x_2]$ за које важи $f(x_r) = 0$ [101].

Алгоритам уз помоћ кога се може одредити нула функције заснива се на узаступном поло-
вљењу интервала, при чему се у свакој итерацији проверава на којој половини интервала
долази до промене знака функције [101]. Резултат сваке итерације је средња вредност на
том интервалу:

$$x_r = \frac{x_1 + x_2}{2}. \quad (2.25)$$

Итеративни поступак се зауставља када је релативна грешка између тренутног x_r^t и прет-
ходног x_r^p резултата мања од задате толеранције δ [101]:

$$\frac{x_r^t - x_r^p}{x_r^t} 100\% < \delta. \quad (2.26)$$

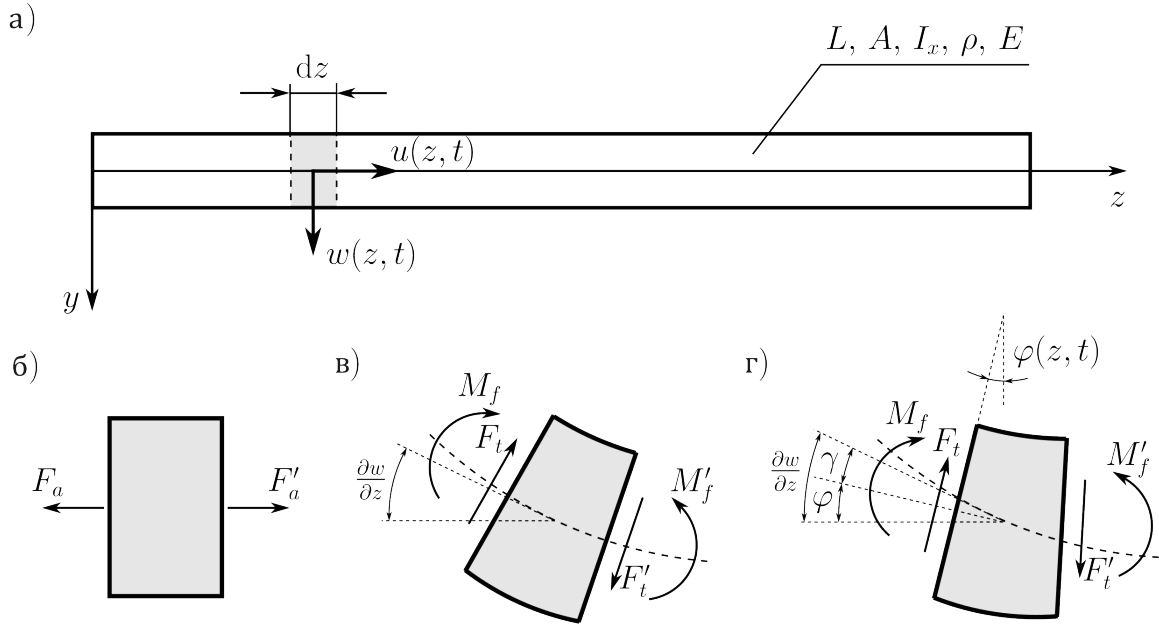
2.8 Парцијалне диференцијалне једначине кретања еластичних греда

Посматра се еластична греда приказана на Сл.2.3.а која може да осцилује у уздужном и попречном правцу, тј. у правцу оса z и y , респективно. Претпоставља се да је греда израђена од хомогеног материјала густине $\rho \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right]$ и модула еластичности $E \left[\frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right]$, а познат је и модуо клизања $G \left[\frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right]$. Геометријске карактеристике греде константног попречног пресека дефинисане су њеном дужином $L \text{ [m]}$, површином попречног пресека $A \text{ [m}^2\text{]}$ и момента инерције попречног пресека за његову централну осу паралелну оси Ox , $I_x \text{ [m}^4\text{]}$.

Може се уочити елементарни делић греде, чији је положај дуж греде одређен координатом z , а карактеришу га његова дужина dz и маса $dm = \rho A dz$. Применом теореме о промене количине кретања на елементарни делић ослобођен веза са гредом могу се одредити парцијалне диференцијалне једначине кретања греде.

Под утицајем оптерећења еластична греда може да осцилује у одговарајућим правцима. Притом је облик греде у сваком тренутку одређен померањем њених елементарних делића [1]. Разматрају се само мале деформације (померања елементарног делића су мала у поређењу са дужином греде) [1,2].

У литератури постоји више теорија на основу којих се може формирати математички модел осциловања греда. Најзаступљеније су Ојлер-Бернулијева и Тимошенкова теорија [1,2], које су коришћене и у овиру ове дисертације. Наведене теорије се не разликују у погледу моделовања уздужних (аксијалних) осцилација греде. Међутим, када су у питању попречне (трансверзалне) осцилације, постоје кључне разлике у претпоставкама које се уводе при њиховом разматрању, те се о томе мора водити рачуна како би тачност добијених резултата била задовољавајућа [2].



Слика 2.3: а) Еластична греда и њен елементарни делић, б) случај аксијалног напрезања, в) случај савијања, према Ојлер-Бернулијевој теорији, г) случај савијања, према Тимошенковој теорији.

2.8.1 Ојлер-Бернулијева теорија

Према Ојлер-Бернулијевој теорији сматра се да попречни пресеци греде приликом осциловања остају равни и управни на њену уздужну осу [1,2]. Самим тим је занемарена деформација попречних пресека при трансверзалним осцилацијама, те се приликом прорачуна може применити само на мале осцилације витких греда².

Уздужне осцилације греде

Под дејством аксијалне силе, која је у општем случају функција уздужне координате греде $F_a = F_a(z)$ [1]. С обзиром на то да се разматрају мале деформације, занемарују се промене димензија попречног пресека услед Поасоновог ефекта [1]. Може се дефинисати функција померања елементарног делића греде у уздужном правцу $u = u(z, t)$. Код посматране греде константног попречног пресека, може се у сваком попречном пресеку дефинисати нормални напон $\sigma_n(z) = \frac{F_a(z)}{A}$, директно пропорционалан релативној деформацији $\varepsilon(z) = \frac{\partial u(z, t)}{\partial z}$ (Хуков закон) [1,2]:

$$\sigma_n(z) = E\varepsilon(z) = E \frac{\partial u(z, t)}{\partial z}. \quad (2.27)$$

Дакле:

$$F_a(z) = EA \frac{\partial u(z, t)}{\partial z}. \quad (2.28)$$

На елементарни делић греде делују унутрашње силе $F_a(z)$ и $F'_a(z) = F_a(z) + dz F_a(z)$, приказане на Сл. 2.3.б. У циљу одређивања парцијалне диференцијалне једначине кретања делића греде, може се применити теорема о промени количине кретања [1,6]:

$$\frac{\partial^2 u(z, t)}{\partial t^2} dm = dz F_a(z), \quad (2.29)$$

²Под појмом витке греде сматра се да однос њене карактеристичне уздужне и попречне димензије није мањи од 10 [2].

тј.

$$\frac{\partial^2 u(z, t)}{\partial t^2} \rho A dz = \frac{\partial F_a(z)}{\partial z} dz. \quad (2.30)$$

С обзиром на (2.28), следи:

$$\frac{\partial^2 u(z, t)}{\partial t^2} - \varsigma_0^2 \frac{\partial^2 u(z, t)}{\partial z^2} = 0, \quad (2.31)$$

где је $\varsigma_0^2 = \frac{E}{\rho}$ брзина простирања таласа при аксијалним осцилацијама. Једначина (2.31) представља парцијалну диференцијалну једначину аксијалних осцилација греде.

Попречне осцилације греде

Померање средишта елементарног делића греде при њеним трансверзалним деформацијама дефинисано је функцијом $w = w(z, t)$. Као последица претпоставке о малим еластичним деформацијама греде, еластична линија се поклапа са њеном главном централном осом [1]. У свакој тачки се може дефинисати угао нагиба еластичне линије греде као парцијални извод трансверзалног померања по подужној координати $\frac{\partial w(z, t)}{\partial z}$.

На елементарни делић греде делују унутрашње трансверзалне силе $F_t(z)$ и $F'_t(z) = F_t(z) + d_z F_t(z)$, као и моменти савијања $M_f(z)$ и $M'_f(z) = M_f(z) + d_z M_f(z)$, приказани на Сл. 2.3.в. Момент савијања пропорционалан је парцијалном изводу угла нагиба попречног пресека по подужној координати [1,2]:

$$M_f = -EI_x \frac{\partial^2 w(z, t)}{\partial z^2}, \quad (2.32)$$

док се трансверзална сила може одредити као парцијални извод момента савијања по подужној координати [1,2]:

$$F_t = \frac{\partial M_f}{\partial z}. \quad (2.33)$$

Применом теореме о промени количине кретања долази се до парцијалне диференцијалне једначине кретања греде у трансверзалном правцу:

$$\frac{\partial^2 w(z, t)}{\partial t^2} \rho A dz = d_z F_t(z). \quad (2.34)$$

тј.

$$\frac{\partial^2 w(z, t)}{\partial t^2} + \varsigma^2 \frac{\partial^4 w(z, t)}{\partial z^4} = 0, \quad (2.35)$$

где је $\varsigma^2 = \frac{EI_x}{\rho A}$.

Попречне осцилације греде под утицајем континуалног оптерећења и аксијалних сила

До трансверзалног померања греде може доћи и под утицајем континуалног оптерећења $Q(z, t)$, као и аксијалних сила које посредно утичу на крутост саме греде. Елементарни делић тако оптерећене греде приказан је на Сл. 2.4. Применом теореме о промени количине кретања следи:

$$\rho A \frac{\partial^2 w(z, t)}{\partial t^2} dz = -F_t + F'_t - F_a \sin \frac{\partial w}{\partial z} + F'_a \sin \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)' + Q(z, t) dz, \quad (2.36)$$

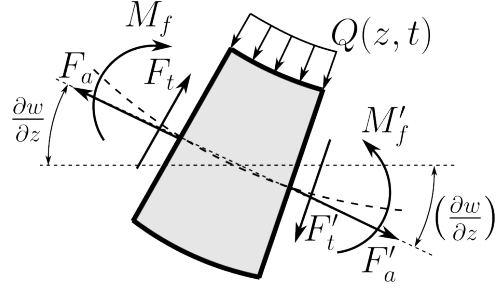
при чему се за мала померања може сматрати да је угао нагиба еластичне линије такође мали, као и да је вредност синусне функције малог угла приближно једнака том углу.

Узимајући у обзир разлику између уведених унутрашњих сила, а занемаривањем малих величина вишег реда и применом правила о изводу производа две функције, добија се:

$$\rho A \frac{\partial^2 w(z, t)}{\partial t^2} dz = d_z F_t(z) + d_z \left(F_a \frac{\partial w}{\partial z} \right) + Q(z, t) dz. \quad (2.37)$$

Претпостављајући да је аксијално оптерећење константно дуж греде, следи:

$$\rho A \frac{\partial^2 w(z, t)}{\partial t^2} + EI_x \frac{\partial^4 w}{\partial z^4} - F_a \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - Q(z, t) = 0. \quad (2.38)$$



Слика 2.4: Елементарни делић континуално оптерећене греде, на коју делују и аксијалне силе.

2.8.2 Тимошенкова теорија

Приликом попречних осцилација греде долази до смичућих деформација и ротације њених попречних пресека. Оба ефекта утичу на угао нагиба еластичне линије. На Сл. 2.3.г се може видети да је попречни пресек закренут за угао $\varphi = \varphi(z, t)$, који се уводи као други степен слободе елементарног делића. Као последица смицања попречни пресеци не остају управни на еластичну линију, што је на Сл. 2.3.г представљено угаоном деформацијом γ . Угао нагиба еластичне линије греде једнак је збиру тих двају углова:

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \varphi + \gamma \quad (2.39)$$

Као и у Ојлер-Бернулијевој теорији, претпоставља се да је момент савијања пропорционалан градијенту угла закретања попречног пресека:

$$M_f = -EI_x \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \quad (2.40)$$

Међутим, трансверзална сила се одређује као површински интеграл смичућег напона τ , који је пропорционалан угаоној деформацији γ , са коефицијентом пропорционалности G :

$$F_t = \int_A G \gamma dA. \quad (2.41)$$

Као решење датог интеграла се узима апроксимација:

$$F_t = \mu GA \gamma, \quad (2.42)$$

где је введен Тимошенков коефицијент смицања μ , као корекција услед неравномерне расподеле смичућег напона по попречном пресеку. Коефицијент μ зависи од облика попречног пресека и одређује се анализом расподеле напона [1,105,106].

Из једначина (2.39) и (2.42) следи зависност трансверзалне силе од угла нагиба еластичне линије и угла закретања попречног пресека:

$$F_t = \mu GA \left[\frac{\partial w(z, t)}{\partial z} - \varphi(z, t) \right]. \quad (2.43)$$

Применом теореме о промени количине кретања добија се парцијална диференцијална једначина кретања елементарног делића:

$$\mu GA \left[\frac{\partial^2 w(z, t)}{\partial z^2} - \frac{\partial \varphi(z, t)}{\partial z} \right] - \rho A \frac{\partial^2 w(z, t)}{\partial t^2} = 0. \quad (2.44)$$

С обзиром на то да је кретање елементарног делића одређено са два степена слободе, потребно је одредити још једну парцијалну диференцијалну једначину његовог кретања. На основу теореме о промени момента количине кретања следи [1]:

$$\rho I_x \frac{\partial^2 \varphi(z, t)}{\partial t^2} dz = M_f - \left(M_f + \frac{\partial M_f}{\partial z} dz \right) + F_t \frac{dz}{2} + \left(F_t + \frac{\partial F_t}{\partial z} dz \right) \frac{dz}{2}, \quad (2.45)$$

тј.

$$\rho I_x \frac{\partial^2 \varphi(z, t)}{\partial t^2} = F_t - \frac{\partial M_f}{\partial z}, \quad (2.46)$$

где су занемарене мале величине вишег реда. Узимајући у обзир изразе (2.43) и (2.40), добија се друга парцијална диференцијална једначина кретања елементарног делића:

$$\rho I_x \frac{\partial^2 \varphi(z, t)}{\partial t^2} - \mu GA \left[\frac{\partial w(z, t)}{\partial z} - \varphi(z, t) \right] - EI_x \frac{\partial^2 w(z, t)}{\partial z^2} = 0. \quad (2.47)$$

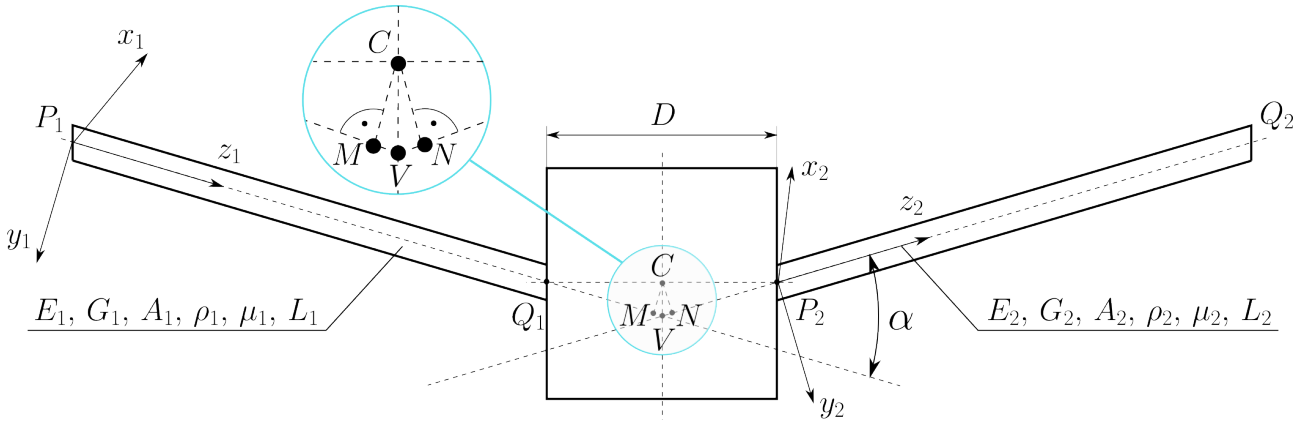
Парцијалне диференцијалне једначине другог реда (2.44) и (2.47), које се односе на хомогену греду константног коначног пресека, могу се свести на једну парцијалну диференцијалну једначину четвртог степена за трансверзална померања греде:

$$\frac{ER_g^2}{\rho} \frac{\partial^4 w}{\partial z^4} - R_g^2 \frac{\mu G + E}{\mu G} \frac{\partial^4 w}{\partial z^2 \partial t^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\rho R_g^2}{\mu G} \frac{\partial^4 w}{\partial t^4} = 0, \quad (2.48)$$

где је $R_g = \sqrt{\frac{I_x}{A}}$ полупречник инерције за осу x , која је управна на посматрану раван кретања греде.

3 Периодичне структуре које се састоје од редно везаних еластичних греда, крутих тела и дискретних механичких подсистема

На Сл. 1.1 је приказан пример периодичне структуре која се састоји од еластичних сегмената повезаних знатно крућим спојницама [46]. Физички модел таквих структура се може представити као систем еластичних греда повезаних крутим телима. Јединичну ћелију чине две греде између којих се налази круто тело. Разматра се општи случај у коме греде не морају бити коаксијалне, већ се налазе под произвољним углом α , као што је приказано на Сл. 3.1 [46,97,98]. Такве структуре су, услед просторне периодичности, дисперзивне. Међутим, интересно је размотрити и утицај еластичног ослоња на њихову дисперзну карактеристику, као и различитих дискретних механичких подсистема. С обзиром на разноврсност сегмената од којих је формирана јединична ћелија, математички модел кретања таквих структура може се одредити на врло ефикасан начин коришћењем методе трансфер матрице.



Слика 3.1: Две еластичне греде које се, у општем случају, у потпуности разликују и налазе под произвољним углом, са крутим телом између њих. На увеличаном приказу може се уочити положај карактеристичних тачака, које леже на пресеку оса које се подударају са еластичним линијама греда.

3.1 Трансфер матрица за Тимошенкову греду

При осциловању греде у трансверзалном правцу може се претпоставити решење парцијалне диференцијалне једначине (2.48) у облику:

$$w(z, t) = D e^{i(kz - \omega t)}, \quad (3.1)$$

где је k таласни број, ω кружна фреквенција осциловања, а D интеграциона константа [58]. Може се применити метода раздвајања просторне и временске променљиве, z и t :

$$w(z, t) = D e^{ikz} e^{-i\omega t} = W(z) T(t), \quad (3.2)$$

где је $W(z) = D e^{ikz}$ просторна функција, а $T(t) = e^{-i\omega t}$ временска функција [58]. Када се претпостављено решење (3.2) уврсти у једначину (2.48), добија се карактеристична једначина која има облик полинома четвртог степена:

$$k^4 - \frac{\mu G + E}{\varsigma^2 \mu G} \omega^2 k^2 + \frac{\rho \omega^2 - \mu A}{\varsigma^2 \mu G} \omega^2 = 0, \quad (3.3)$$

која представља функцију кружне фреквенције и таласног броја, тј. дисперзну релацију [58]. Решења карактеристичне једначине се могу написати у следећем облику [46]:

$$\begin{aligned} k_1 &= \sqrt{\frac{\mu G + E}{2\zeta^2 \mu G} \omega^2 - \sqrt{\left(\frac{\mu G + E}{2\zeta^2 \mu G}\right)^2 \omega^4 - \frac{\rho \omega^2 R_g^2 - \mu G}{\zeta^2 R_g^2 \mu G} \omega^2}} = -k_3, \\ k_2 &= \sqrt{\frac{\mu G + E}{2\zeta^2 \mu G} \omega^2 + \sqrt{\left(\frac{\mu G + E}{2\zeta^2 \mu G}\right)^2 \omega^4 - \frac{\rho \omega^2 R_g^2 - \mu G}{\zeta^2 R_g^2 \mu G} \omega^2}} = -k_4. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Општи облик просторне функције трансверзалног померања може се трансформисати у хармонијску функцију:

$$\begin{aligned} W(z) &= D_j e^{ik_j z} = D_1 e^{ik_1 z} + D_2 e^{ik_2 z} + D_3 e^{-ik_1 z} + D_4 e^{-ik_2 z} \\ &= C_1 \cos(k_1 z) + C_2 \sin(k_1 z) + C_3 \cos(k_2 z) + C_4 \sin(k_2 z), \end{aligned} \quad (3.5)$$

где су C_1 , C_2 , C_3 и C_4 интеграционе константе [58].

Аналогно томе, претпоставља се решење за угао ротације попречног пресека греде и врши се раздвајање променљивих:

$$\varphi(z, t) = B_j e^{i(k_j z - \omega t)} = B_j e^{ik_j z} e^{-i\omega t} = \Phi(z)T(t). \quad (3.6)$$

Заменом претпостављених решења (3.1) и (3.6) у парцијалну диференцијалну једначину кретања (2.44), могу се одредити коефицијенти S_j , који представљају везу између интеграционих константи B_j и C_j , [58]:

$$\begin{aligned} S_1 &= i \frac{\mu G A k_1^2 - \rho A \omega^2}{\mu G A k_1} = -S_3, \\ S_2 &= i \frac{\mu G A k_2^2 - \rho A \omega^2}{\mu G A k_2} = -S_4, \end{aligned} \quad (3.7)$$

те се просторни део функције угла ротације попречног пресека може написати у следећем облику:

$$\Phi(z) = i [S_1 C_1 \sin(k_1 z) - S_1 C_2 \cos(k_1 z) + S_2 C_3 \sin(k_2 z) - S_2 C_4 \cos(k_2 z)]. \quad (3.8)$$

Коначно, претпоставља се решење за аксијална померања греде и врши се раздвајање променљивих:

$$u(z, t) = H e^{i(pz - \omega t)} = H e^{ipz} e^{-i\omega t} = U(z)T(z), \quad (3.9)$$

где је p параметар који одговара аксијалном простирању таласа, а H је интеграциона константа [58]. Заменом у једначину (2.31) добија се карактеристична једначина, у облику полинома другог степена:

$$p^2 - \frac{1}{\zeta_0^2} \omega^2 = 0, \quad (3.10)$$

чија решења се могу написати у следећем облику:

$$p_1 = \frac{\omega}{\zeta_0} = -p_2. \quad (3.11)$$

Опште решење за просторну функцију аксијалног померања се може написати у хармонијском облику:

$$U(z) = C_5 \cos(p_1 z) + C_6 \sin(p_1 z), \quad (3.12)$$

где су C_5 и C_6 интеграционе константе [58].

На основу релација (2.28), (2.40) и (2.43), може се формирати вектор стања Ψ , који садржи трансверзално и аксијално померање, угао ротације попречног пресека, момент савијања (2.40), као и трансверзалну (2.33) и аксијалну силу (2.28). Веза између вектора стања и интеграционих константи C_j , $j = 1, 2, \dots, 6$, је [46]:

$$\Psi(z) = \begin{Bmatrix} W(z) \\ U(z) \\ \Phi(z) \\ M_f(z) \\ F_t(z) \\ F_a(z) \end{Bmatrix} = \mathbf{U}(z) \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \end{Bmatrix} = \mathbf{U}(z) \mathbf{C}, \quad (3.13)$$

где је $\mathbf{U}(z)$ квадратна матрица реда $r(\mathbf{U}) = 6$, а њени елементи, који нису једнаки нули, су:

$$\begin{aligned} U_{11} &= \cos k_1 z, U_{12} = \sin k_1 z, U_{13} = \cos k_2 z, U_{14} = \sin k_2 z, \\ U_{25} &= \cos p_1 z, U_{26} = \sin p_1 z, \\ U_{31} &= iS_1 \sin k_1 z, U_{32} = -iS_1 \cos k_1 z, U_{33} = iS_2 \sin k_2 z, U_{34} = iS_2 \cos k_2 z, \\ U_{41} &= -iEI_x S_1 k_1 \cos k_1 z, U_{42} = -iEI_x S_1 k_1 \sin k_1 z, \\ U_{43} &= -iEI_x S_2 k_2 \cos k_2 z, U_{44} = -iEI_x S_2 k_2 \sin k_2 z, \\ U_{51} &= -\mu GA (k_1 + iS_1) \sin k_1 z, U_{52} = \mu GA (k_1 + iS_1) \cos k_1 z, \\ U_{53} &= -\mu GA (k_2 + iS_2) \sin k_2 z, U_{54} = \mu GA (k_2 + iS_2) \cos k_2 z, \\ U_{65} &= -EAp_1 \sin p_1 z, U_{66} = EAp_1 \cos p_1 z. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Вектор стања се може дефинисати за леви крај греде ($z = 0$) и десни крај греде ($z = L$), а везу између њих представља трансфер матрица греде $\mathbf{T}_g$:

$$\Psi(L) = \mathbf{T}_g \Psi(0). \quad (3.15)$$

С обзиром на то да важи:

$$\Psi(0) = \mathbf{U}(0) \mathbf{C}, \quad (3.16)$$

$$\Psi(L) = \mathbf{U}(L) \mathbf{C}, \quad (3.17)$$

следи да је:

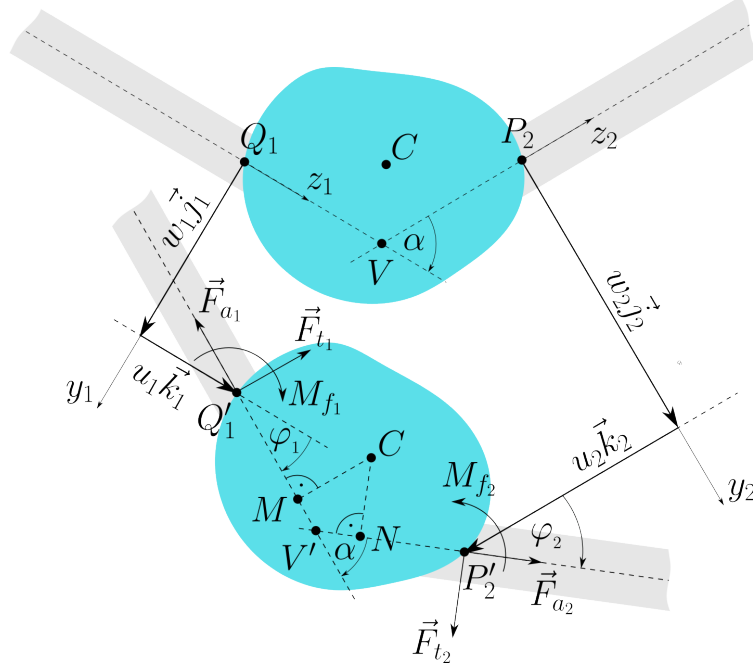
$$\Psi(L) = \mathbf{U}(L) \mathbf{U}(0)^{-1} \Psi(0). \quad (3.18)$$

Дакле, трансфер матрица за греду је одређена са:

$$\mathbf{T}_g = \mathbf{U}(L) \mathbf{U}(0)^{-1}. \quad (3.19)$$

3.2 Трансфер матрица за круто тело

На Сл. 3.2 је илустровано круто тело произвољног облика, ослобођено од веза са околним гредама (чији положај је симболично приказан у сивој боји). На греду са леве стране односи се индекс 1, док се на греду са десне стране односи индекс 2. Леви и десни крајеви греда означени су тачкама P_n и Q_n , $n = 1, 2$, респективно. Самим тим, уводи се покретни (локални) координатни систем везан за леву греду $P_1x_1y_1z_1$, док је код десне греде то $P_2x_2y_2z_2$.



Слика 3.2: Круто тело произвољног облика, ослобођено од веза са околним гредама (чији положај је симболично приказан у сивој боји). Круто тело је приказано у равнотежном и произвољном положају. Извор илустрације је [46].

Еластичне линије двају греда секу се у тачки V , као што је приказано на Сл. 3.2. При кретању система у посматраној равни, пресечна тачка прелази у нови положај који је на Сл. 3.2 обележен са V' [46,97,98]. По истом принципу, обележени су и нови положаји заједничких тачака у којима је круто тело спојено са гредама Q'_1 и P'_2 , а чије су локалне координате одређене са $z_1 = L_1$ и $z_2 = 0$, респективно. Под претпоставком о малим деформацијама, може се одредити померај пресечне тачке еластичних линија $\overrightarrow{VV'}$, у функцији одговарајућих померања w_n и u_n , као и угла закретања попречних пресека φ_n посматраних крајева греда [46,97,98]:

$$\overrightarrow{VV'} = w_1(L_1, t) \vec{j}_1 + u_1(L_1, t) \vec{k}_1 + \overline{Q'_1V'} \varphi_1(L_1, t) \vec{j}_1, \quad (3.20)$$

$$\overrightarrow{VV'} = w_2(0, t) \vec{j}_2 + u_2(0, t) \vec{k}_2 - \overline{P'_2V'} \varphi_2(0, t) \vec{j}_2, \quad (3.21)$$

где су $\overline{Q'_1V'}$ и $\overline{P'_2V'}$ растојања између одговарајућих тачака крутог тела.

С обзиром на круту везу између елемената јединичне ћелије, може се сматрати да ће угао обртања крутог тела бити једнак углу ротације попречних пресека на суседним крајевима греда, услед чега важи [46,97,98]:

$$\varphi_2(0, t) = \varphi_1(L_1, t). \quad (3.22)$$

Из једнакости левих страна једначина (3.20) и (3.21), а након скаларног производа са јединичним векторима оса локалног координатног система десне греде, тј. $\vec{j}_2$ и $\vec{k}_2$, следи:

$$u_2(0, t) = -w_1(L_1, t) \sin \alpha + u_1(L_1, t) \cos \alpha - \varphi_1(L_1, t) \overline{Q'_1 V'} \sin \alpha, \quad (3.23)$$

$$w_2(0, t) = w_1(L_1, t) \cos \alpha + u_1(L_1, t) \sin \alpha + \varphi_1(L_1, t) (\overline{P'_2 V'} + \overline{Q'_1 V'} \cos \alpha). \quad (3.24)$$

Применом теореме о промени момента количине кретања, и то за главну централну осу крутог тела која је управна на раван кретања, добија се [46,97,98]:

$$J_{C_x} \varepsilon = M_{f_1}(L_1, t) - M_{f_2}(0, t) + \overline{Q'_1 M} F_{t_1}(L_1, t) + \overline{C M} F_{a_1}(L_1, t) + \overline{P'_2 N} F_{t_2}(0, t) - \overline{C N} F_{a_2}(0, t), \quad (3.25)$$

где је J_{C_x} аксијални момент инерције за главну централну осу Cx крутог тела, а ε је његово угаоно убрзање, које је једнако угаоном убрзању попречног пресека краја суседне греде. С обзиром на релацију (3.22), следи:

$$\varepsilon = \frac{\partial^2 \varphi_1(L_1, t)}{\partial t^2} = -\omega^2 \varphi_1(L_1, t), \quad (3.26)$$

при чему је узет у обзир угао закретања попречног пресека на крају греде са леве стране $\varphi_1(L_1, t)$.

Применом теореме о кретању центра масе добија се векторска једначина:

$$m \vec{a}_C = \vec{F}_{a_1} + \vec{F}_{t_1} + \vec{F}_{a_2} + \vec{F}_{t_2}, \quad (3.27)$$

где се вектор убрзања центра масе крутог тела може одредити методом растављања, као векторски збир убрзања заједничке тачке P_2 и обртне компоненте убрзања тачке C око тачке P_2 [46,97,98]:

$$\vec{a}_C = \vec{a}_{P_2} + \vec{a}_C^{P_2}. \quad (3.28)$$

Убрзање тачке P_2 може се одредити на следећи начин:

$$\vec{a}_{P_2} = a_{P_{2y}} \vec{j}_2 + a_{P_{2z}} \vec{k}_2, \quad (3.29)$$

где су:

$$a_{P_{2y}} = \frac{\partial^2 w_2(0, t)}{\partial t^2} = -\omega^2 w_2(0, t), \quad (3.30)$$

$$a_{P_{2z}} = \frac{\partial^2 u_2(0, t)}{\partial t^2} = -\omega^2 u_2(0, t). \quad (3.31)$$

Обртна компонента $\vec{a}_C^{P_2}$ се може одредити као збир тангенцијалног и нормалног убрзања тачке C око тачке P_2 , која се могу одредити на следећи начин [46,97,98]:

$$\vec{a}_{C_t}^{P_2} = \vec{\varepsilon} \times \overrightarrow{P_2 C}, \quad (3.32)$$

$$\vec{a}_{C_n}^{P_2} = \overrightarrow{\Phi} \times \overrightarrow{\Phi} \times \overrightarrow{P_2 C}, \quad (3.33)$$

где је $\overrightarrow{\Phi}$ вектор угаоне брзине крутог тела. При малим деформацијама, може се занемарити нормално убрзање јер се ради о малој величини вишег реда [46,97,98,99].

Пројекције једначине (3.27) на осе локалног координатног система десне греде $P_2 x_2 y_2 z_2$, а који је везан и за круто тело, су:

$$m a_{C_{y_2}} = F_{t_2}(0, t) - F_{a_1}(L_1, t) \sin \alpha - F_{t_1}(L_1, t) \cos \alpha, \quad (3.34)$$

$$m a_{C_{z_2}} = F_{a_2}(0, t) - F_{a_1}(L_1, t) \cos \alpha + F_{t_1}(L_1, t) \sin \alpha, \quad (3.35)$$

где су, на основу релација (3.28)-(3.33):

$$a_{c_{y_2}} = -\omega^2 w_2(0, t) + \overline{P_2' N} \omega^2 \varphi_1(L_1, t), \quad (3.36)$$

$$a_{c_{z_2}} = -\omega^2 u_2(0, t) - \overline{C N} \omega^2 \varphi_1(L_1, t). \quad (3.37)$$

Ради формирања матрице трансформације, једначине (3.34) и (3.35) се могу написати на следећи начин:

$$F_{t_2}(0, t) = m a_{c_{y_2}} + F_{a_1}(L_1, t) \sin \alpha + F_{t_1}(L_1, t) \cos \alpha, \quad (3.38)$$

$$F_{a_2}(0, t) = m a_{c_{z_2}} + F_{a_1}(L_1, t) \cos \alpha - F_{t_1}(L_1, t) \sin \alpha. \quad (3.39)$$

Веза између вектора стања дефинисаних у тачкама P_1 и P_2 је трансфер матрица крутог тела $\mathbf{T}_t$:

$$\Psi_2(0) = \begin{Bmatrix} U_2(0) \\ W_2(0) \\ \Phi_2(0) \\ M_{f_2}(0) \\ F_{t_2}(0) \\ F_{a_2}(0) \end{Bmatrix} = \mathbf{T}_t \begin{Bmatrix} U_1(L_1) \\ W_1(L_1) \\ \Phi_1(L_1) \\ M_{f_1}(L_1) \\ F_{t_1}(L_1) \\ F_{a_1}(L_1) \end{Bmatrix} = \mathbf{T}_t \Psi_1(L_1), \quad (3.40)$$

при чему је матрична једначина подељена са временском функцијом $T(t) = e^{-i\omega t}$. Матрица $\mathbf{T}_t$ је:

$$\mathbf{T}_t = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & \overline{P_2' V'} + \overline{Q_1' V'} \cos \alpha & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & -\overline{Q_1' V'} \sin \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -m\omega^2 \overline{P_2' N'} & -m\omega^2 \overline{C' N'} & J_C \omega^2 + m\omega^2 B_1 & 1 & B_2 & B_3 \\ -m\omega^2 \cos \alpha & -m\omega^2 \sin \alpha & -m\omega^2 B_4 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ m\omega^2 \sin \alpha & -m\omega^2 \cos \alpha & m\omega^2 B_5 & 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}. \quad (3.41)$$

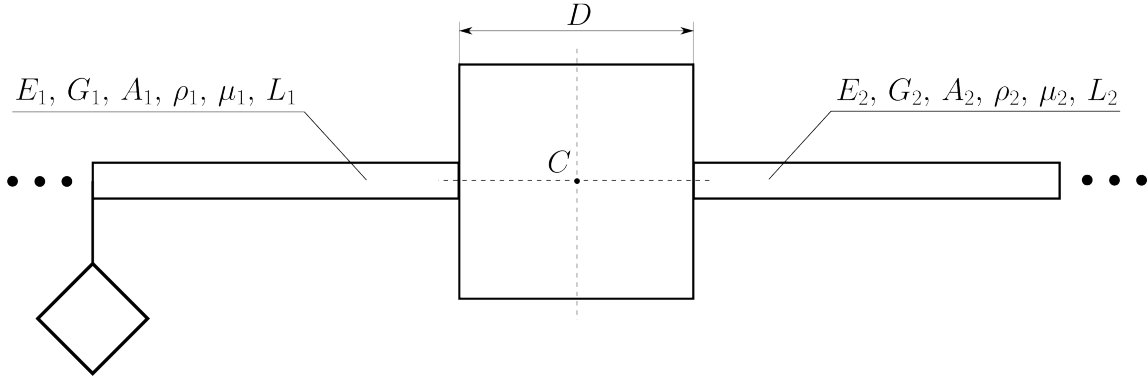
где су:

$$\begin{aligned} B_1 &= \overline{P_2' C'^2} - \overline{P_2' N'} (\overline{P_2' V'} + \overline{Q_1' V'}), \\ B_2 &= \overline{Q_1' M'} + \overline{P_2' N'}, \\ B_3 &= \overline{C' M'} + \overline{C' N'}, \\ B_4 &= \overline{P_2' V'} + \overline{Q_1' V'} \cos \alpha - \overline{P_2' N'}, \\ B_5 &= \overline{Q_1' V'} \sin \alpha - \overline{C' N'}. \end{aligned}$$

Елементи матрице одређене на овај начин зависе од масе и геометрије крутог тела, као и од међусобног угла подужних оса греда. Може се приметити да је већина елемената константна или једнака нули, док је само девет елемената матрице функција кружне фреквенције ω [46]. У случају када је круто тело занемарљиве масе и димензија, добијена матрица се своди на матрицу трансформације координата из координатног система $P_1 x_1 y_1 z_1$ у координатни систем $P_2 x_2 y_2 z_2$.

3.3 Дискретни механички подсистеми и еластична подлога

Разматране периодичне структуре су често ослоњене на неку врсту подлоге, при чему се најчешће узима у обзир еластична подлога [58,109]. Она се може моделирати низом еластичних опруга којима је систем везан за непокретну подлогу. Разматрају се и различити дискретни механички подсистеми који се, у најужем смислу, могу поделити на резонаторе и инертере (инерцијалне елементе). Полазећи од масеног резонатора, као најједноставнијег механичког система који може да осцилује независно од носеће структуре, биће уведен принцип динамичке анализе кретања дискретних механичких подсистема. Затим ће бити размотрени инертер и два модела такозваног инерцијалног амплификатора, код којих се услед структуре самог механизма постижу слични ефекти.



Слика 3.3: Јединична ћелија, која се у општем случају састоји од различитих коаксијалних еластичних греда повезаних крутим телом, са дискретним механичким подсистемом који се налази на њеном левом крају.

Разматране јединичне ћелије садрже коаксијалне греде, како би се избегло спрезање осцилација у различитим правцима, те су узете обзир само трансверзалне осцилације. Тиме је поједностављена анализа утицаја разматраних дискретних механичких подсистема на дисперзну карактеристику периодичне структуре. Њихово динамичко дејство на структуру узима се у обзир у виду трансверзалне силе у тачки везивања $\mathbf{f}_t$ [58]. С обзиром на то да постоји периодично понављање дејства силе на границама између јединичних ћелија, оно се може узети у обзир множењем трансфер матрице јединичне ћелије са трансфер матрицом за дискретан механички подсистем $\mathbf{K}$, која има облик [58]:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ f_t & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

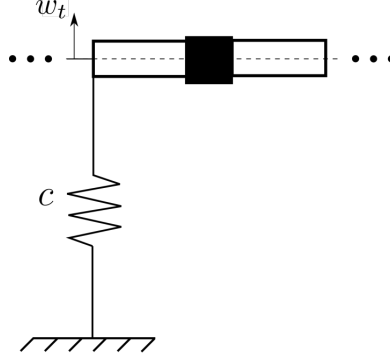
Трансфер матрица јединичне ћелије, приказане на Сл. 3.3, која се састоји из две греде повезане крутим телом, а на чијем левом крају је везан дискретан механички подсистем, може се, на основу израза (2.4), одредити на следећи начин:

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_g \mathbf{T}_t \mathbf{T}_g \mathbf{K}, \quad (3.43)$$

где су одговарајуће трансфер матрице за греде и круто тело одређене на основу (3.19) и (3.41).

3.3.1 Еластична подлога (Винклеров еластични модел)

Уколико је периодична структура ослоњена на еластичну подлогу, она може бити представљена опругама крутости c , којима је свака јединична ћелија везана за непокретну подлогу, као што је приказано на Сл. 3.4. Према резултатима изложеним у постојећој литератури, може се очекивати да ће присуство еластичне подлоге имати утицај на дисперзну карактеристику на нижим фреквенцијама, и то почевши од нулте фреквенције [58].



Слика 3.4: Јединична ћелија периодичне структуре која је на свом левом крају везана еластичном опругом за непокретну подлогу.

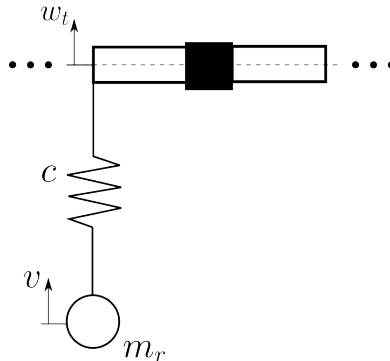
С обзиром на то да до деформације опруге долази услед трансверзалног померања греде у тачки везивања $w_t = w_1(0, t)$, јавља се сила у опрузи пропорционална том померању:

$$f_t = -cw_t, \quad (3.44)$$

На Сл. 3.4 је приказано да се тачка везивања налази на левом крају греде са леве стране крутог тела.

3.3.2 Масени резонатор

Разматра се физички модел механичког система који може да се веже за јединичну ћелију периодичне структуре, и да осцилује независно од ње. Модел се састоји од еластичне опруге крутости c , којом је материјална тачка масе m_r везана за јединичну ћелију, као што је приказано на Сл. 3.5. Опруга се уводи као еластична веза занемарљиве масе [94].



Слика 3.5: Јединична ћелија периодичне структуре са масеним резонатором на левом крају.

На материјалну тачку масе m_r може се применити Други Њутнов закон:

$$m_r \ddot{v} = c(w_t - v) = f_t, \quad (3.45)$$

где је $f_t = c(w_t - v)$ реституциона сила која се јавља у опрузи услед њене деформације, а до које долази трансверзалним померањем w_t краја греде за који је везана и независног померања v масе m_r у истом правцу. Функција померања v се може претпоставити у облику $v(t) = Ke^{-i\omega t}$, где је K интеграциона константа. Након раздвајања променљивих и одговарајућих извода по времену добија се једначина:

$$-m_r\omega^2 v = c(w_t - v), \quad (3.46)$$

из које следи веза између померања v и w_t :

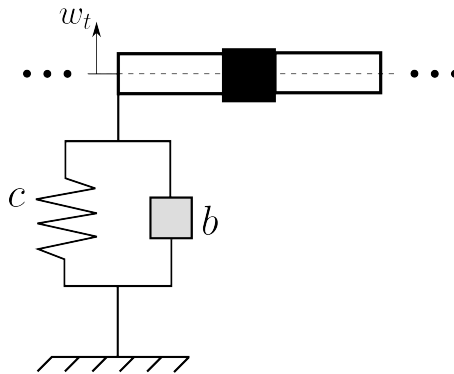
$$v = \frac{c}{c - m_r\omega^2} w_t, \quad (3.47)$$

те се може одредити сила којом резонатор делује на греду у функцији трансверзалног померања греде:

$$f_t = -\frac{cm_r\omega^2}{c - m_r\omega^2} w_t. \quad (3.48)$$

3.3.3 Инертер

Разматра се општи принцип функционисања инертера, механизма који се у пракси често реализује спрегом зупчаника и зупчасте летве, при чему је омогућено претварање транслаторног кретања у ротационо [61,62]. На Сл. 3.6 је један такав механизам симболично приказан у виду дискретног механичког подсистема који се налази у паралелној вези са опругом крутости c , а уз помоћ кога је јединична ћелија периодичне структуре везана за непокретну подлогу. У идеалном инертеру се јавља сила отпора пропорционална релативном убрзању његових супротних крајева (терминала), са коефицијентом пропорционалности b [kg], који се у литератури често помиње и као виртуална маса инертера [31,61,62].



Слика 3.6: Јединична ћелија периодичне структуре са механичким подсистемом на левом крају, који се састоји од еластичне опруге и инертера.

С обзиром на паралелну везу између опруге и инертера, сила којом разматрани дискретни механички подсистем делује на јединичну ћелију у тачки везивања је:

$$f_t = -cw_t - b\ddot{w}_t, \quad (3.49)$$

при чему се, узимајући у обзир други извод по времену функције трансверзалног померања, добија:

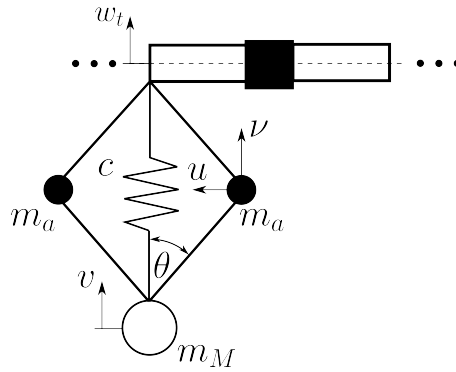
$$f_t = (b\omega^2 - c)w_t = k_e w_t. \quad (3.50)$$

Сила f_t је функција квадрата кружне фреквенције ω , те се може очекивати да ће, за разлику од еластичне подлоге, инертер имати утицај на дисперзну карактеристику и на вишим фреквенцијама.

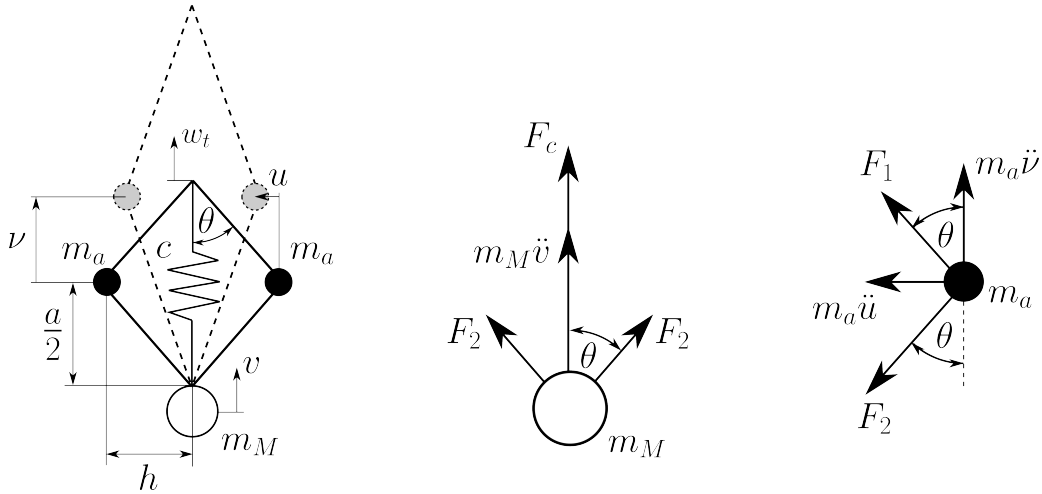
3.3.4 Инерцијални амплификатор: први модел

Први разматрани модел инерцијалног амплификатора (ИА1), који је приказан на Сл. 3.7, састоји се од главне материјалне тачке, масе $m_M = 0.5m_r$, која је повезана са периодичном структуром уз помоћ опруге крутости c . У оквиру посматраног механичког система постоје и две споредне материјалне тачке маса $m_a = 0.25m_r$, које су повезане са главном материјалном тачком и периодичном структуром уз помоћ крутих штапова, као што је приказано на Сл. 3.7. Укупна маса инерцијалног амплификатора једнака је маси резонатора $m_M + 2m_a = m_r$. Угао између осе опруге и штапова је θ .

Дијаграм сила које делују на поједине материјалне тачке, када се оне ослободе од свих веза, приказан је на Сл. 3.8. Овде такође важи претпоставка о малим деформацијама, тако да се може сматрати да је угао θ константан за време осциловања инерцијалног амплификатора, као и да не долази до нарушавања његове структурне симетрије [79].



Слика 3.7: Јединична ћелија периодичне структуре са инерцијалним амплификатором на левом крају (први модел, ИА1).



Слика 3.8: Дијаграм деформисања првог инерцијалног амплификатора (ИА1), и главна и помоћна маса ослобођене од веза.

Уколико се примени други Њутнов закон, може се одредити диференцијална једначина кретања главне масе m_M :

$$m_M \ddot{v} = 2F_2 \cos \theta + F_c = 2F_2 \cos \theta + c(w_t - v) = f_t, \quad (3.51)$$

док су диференцијалне једначине кретања споредних маса m_a одређене у два ортогонална

правца:

$$m_a \ddot{u} = F_1 \sin \theta + F_2 \sin \theta \quad \Rightarrow \quad -m_a \omega^2 u = (F_1 + F_2) \sin \theta, \quad (3.52)$$

$$m_a \ddot{\nu} = F_1 \cos \theta - F_2 \cos \theta \quad \Rightarrow \quad -m_a \omega^2 \nu = (F_1 - F_2) \cos \theta. \quad (3.53)$$

С обзиром на симетричност механизма, довољно је разматрати једну од споредних маса m_a . Потребно је одредити везу између померања споредних маса u и ν , и померања главне масе и тачке везивања на јединичној ћелији v and w_t [79]. На Сл. 3.8 је приказан дијаграм деформисања инерцијалног амплификатора, на коме су сва померања преувеличана ради лакше визуализације, те важи претпоставка да не долази до промене угла θ . На Сл. 3.8 се могу уочити карактеристичне дужине h и $a/2$. Померање u се може одредити на следећи начин:

$$u = h - h', \quad (3.54)$$

где h' представља карактеристичну дужину h у деформисаном стању механизма. Практично је, уместо разлике $h - h'$, одредити разлику квадрата тих дужина [79]. Уколико се узме да је дужина једног крутог штапа l , важи да је $l^2 = h^2 + (a/2)^2$. С обзиром на то да штапови нису деформабилни, следи:

$$h^2 - (h')^2 = \left(l^2 - \frac{a^2}{4}\right) - \left(l^2 - \frac{a'^2}{4}\right) = \frac{a'^2}{4} - \frac{a^2}{4}, \quad (3.55)$$

где је $a' = a + w_t - v$ растојање између главне масе и тачке везивања на јединичној ћелији, у деформисаном стању. Након трансформације разлике квадрата:

$$h^2 - (h')^2 = (h - h' + u)(h + h' - u) = u(2h - u), \quad (3.56)$$

а узимајући у обзир да је $h = (a/2) \tan \theta$ (где је $\theta \approx \text{const}$ због претпоставке о малим деформацијама), следи да је:

$$h^2 - (h')^2 = \frac{1}{4} [2a(w_t - v) + (w_t - v)^2] = u(a \tan \theta - u). \quad (3.57)$$

Такође, услед претпоставке о малим деформацијама може се узети да је $(w_t - v)^2 \ll 2a(w_t - v)$ и $u \ll a \tan \theta$, те је померање u одређено са:

$$u = \frac{w_t - v}{2 \tan \theta}. \quad (3.58)$$

На сличан начин одређује се и ортогонално померање ν :

$$\nu = \frac{a'}{2} - \frac{a}{2} = \frac{w_t - v}{2}. \quad (3.59)$$

Из једначина (3.52), (3.53), (3.58) и (3.59) следи:

$$F_1 = m_a \frac{\ddot{w}_t - \ddot{v}}{4} \frac{1}{\sin^2 \theta \cos \theta}, \quad (3.60)$$

$$F_2 = m_a \frac{\ddot{w}_t - \ddot{v}}{4} \frac{\cos 2\theta}{\sin^2 \theta \cos \theta}. \quad (3.61)$$

Коначно, на основу израза (3.51) и (3.61) важи да је:

$$-m_M \omega^2 v = \left(c - \frac{m_a \cos 2\theta}{2 \sin^2 \theta} \omega^2\right) (w_t - v) = k_e (w_t - v) = f_t, \quad (3.62)$$

где је уведен параметар k_e :

$$k_e = c - \frac{m_a \cos 2\theta}{2 \sin^2 \theta} \omega^2 = c - \frac{1}{2} m_a \omega^2 (\cot^2 \theta - 1) = c - b_e \omega^2, \quad (3.63)$$

а где $b_e = m_a (\cot^2 \theta - 1) / 2$ представља коефицијент пропорционалности посматраног инертера (ИА1). Дакле, однос између померања v и w_t је:

$$v = \frac{k_e}{k_e - m_M \omega^2} w_t. \quad (3.64)$$

Коначно, из једначина (3.64) и (3.62) следи да је сила којом инерцијални амплификатор делује на јединичну ћелију у тачки везивања:

$$f_t = -\frac{k_e m_M \omega^2}{k_e - m_M \omega^2} w_t. \quad (3.65)$$

Може се приметити да добијени израз има исту структуру као и за силу која се јавља код масеног резонатора (3.44), али је разлика у параметру k_e који је код масеног резонатора једнак крутости опруге c , док је маса резонатора двоструко већа од масе m_M . Такође, у случају инерцијалног амплификатора параметар k_e је функција масе споредне материјалне тачке m_a , угла θ и квадрата кружне фреквенције ω , што указује на то да ће ИА1 имати утицај на дисперзну карактеристику и на вишим фреквенцијама (због четвртог степена кружне фреквенције у бројиоцу).

На основу израза (3.63) се може закључити да нису дозвољене вредности угла θ за које је $\sin \theta = 0$, док се на основу разматрања физичког модела приказаног на Сл. 3.7 може приметити и да важи ограничење $\theta \neq 0$. Такође, у случају када је $\theta = 45^\circ$, следи да је $k_e = c$ (јер је коефицијент пропорционалности у том случају $b = 0$), чиме се разматрани механички систем суштински редукује на масени резонатор сачињен од опруге крутости c за коју је везана материјална тачка масе $m_M = 0.5m_r$.

3.3.5 Инерцијални амплификатор: други модел

Други модел инерцијалног амплификатора (ИА2) је представљен на Сл. 3.9. Као и у случају ИА1, може се приметити да је главна маса $m_M = 0.5m_r$ повезана са јединичном ћелијом уз помоћ опруге крутости c . Међутим, споредне масе, $m_a = 0.25m_r$, су повезане крутим штаповима са главном масом и са непокретном подлогом. Диференцијална једначина кретања главне масе је:

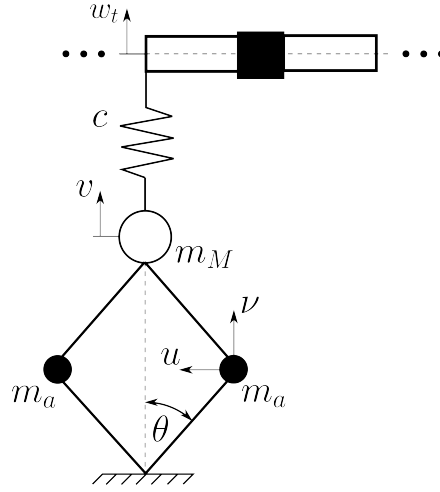
$$m_M \ddot{v} = -2F_1 \cos \theta + F_c = -2F_1 \cos \theta + c(w_t - v) = f_t, \quad (3.66)$$

Аналогно поступку изведеном за први модел инерцијалног амплификатора, узимајући у обзир (3.52) и (3.53), могу се одредити неопходне релације $u = v/2 \tan \theta$ и $\nu = v/2$, а затим и сила F_1 која се јавља у крутим штаповима којима су споредне масе везане за главну масу:

$$F_1 = m_a \frac{\ddot{v}}{4 \sin^2 \theta \cos \theta}. \quad (3.67)$$

Коначно, на основу једначина (3.66) и (3.67), може се одредити веза између померања главне масе v и трансверзалног померања w_t тачке везивања јединичне ћелије:

$$-m_M \omega^2 v = c(w_t - v) + m_a \frac{v}{2 \sin^2 \theta} \omega^2 \Rightarrow v = \frac{c}{k_e^* - m_M \omega^2} w_t, \quad (3.68)$$



Слика 3.9: Јединична ћелија периодичне структуре са инерцијалним амплификатором на левом крају (други модел, ИА2).

где је уведен параметар k_e^* :

$$k_e^* = c - \frac{m_a}{2 \sin^2 \theta} \omega^2 = c - b^* \omega^2, \quad (3.69)$$

а $b^* = m_a / 2 \sin^2 \theta$ је коефицијент пропорционалности посматраног инертера (ИА2). Може се закључити да у овом случају мора бити задовољено $\theta \neq 0$. Сила којом ИА2 делује на јединичну ћелију у тачки везивања је:

$$f_t = - \frac{c m_M \omega^2}{k_e^* - m_M \omega^2} w_t. \quad (3.70)$$

Може се приметити да добијени израз нема исту структуру као што је био случај код масеног резонатора (3.44) и првог модела инерцијалног амплификатора (3.62).

3.4 Валидација модела заснованог на трансфер матрици јединичне ћелије

Валидација добијеног математичког модела у виду трансфер матрице разматране јединичне ћелије биће урађена на основу поређења сопствених фреквенција осциловања за два модела репрезентативне структуре која има уклештење на свом левом крају. Први разматрани модел се састоји од две коаксијалне еластичне греде истих материјалних карактеристика и крутог тела које се налази између њих. У литератури су представљени резултати за прве три сопствене фреквенције осциловања таквог механичког система, са уклештењем на левом крају, те се могу искористити за поређење резултата добијених уз помоћ представљеног аналитичког модела трансфер матрице јединичне ћелије [97,100]. Други разматрани модел се састоји од две еластичне греде истих геометријских, а различитих материјалних карактеристика, које се налазе под углом. Уз помоћ методе коначних елемената (МКЕ), у комерцијалном софтверу *COMSOL Multiphysics*, одређене су прве три фреквенције осциловања таквог механичког система, које су затим упоређене са резултатима добијеним на основу аналитичког модела.

Материјалне карактеристике греда у оквиру првог модела механичког система су дефинисане модулом еластичности $E = 206,9 \text{ GPa}$, Поасоновим коефицијентом $\nu = 0,33$ и густинском $\rho = 7836,7 \text{ kg/m}^3$. Греде имају исти кружни попречни пресек, пречника $R = 0,025 \text{ m}$, али су различитих дужина $L_1 = 0,8 \text{ m}$ и $L_2 = 1,2 \text{ m}$. Тимошенков коефицијент смицања

за кружни попречни пресек је одређен у литератури [105], а његова вредности је $\mu = 0,9$. Раван пресек крутог тела, приказан на Сл. 3.1, има облик правоугаоника, а његове карактеристике су дефинисане масом $m = 15,3873 \text{ kg}$, аксијалним моментом инерције за главну централну осу $J_{C_x} = 12,3099 \text{ kgm}^2$, дужином стране $D = 0,6 \text{ m}$, и карактеристичним растојањима $\overline{Q_1V} = \overline{Q_1M} = 0,4 \text{ m}$, $\overline{P_2V} = \overline{P_2N} = 0,2 \text{ m}$ и $\overline{CM} = \overline{CN} = 0,2 \text{ m}$.

Резултати сопствених фреквенција осциловања из литературе [97,100] одређени су уз примену Ојлер-Бернулијеве теорије греда, а приказани су у Табели 3.1, у колони „лит. [97,100]”, где је:

$$\lambda = 2\sqrt{\frac{\omega}{\zeta_0 R_g}}$$

бездимензиона сопствена фреквенција, а ζ_0 брзина простирања таласа при аксијалним осцилацијама греде. У суседној колони „Тимошенко” приказани су резултати добијени на основу аналитичког модела, при чему је за израчунавање сопствених фреквенција коришћена метода бисекције. Разматрани аналитички модел у оквиру кога је коришћена Тимошенкова теорија при савијању греде узима у обзир утицај смицања и ротације попречних пресека, услед чега добијени резултати имају нешто ниже вредности, уз шири фреквенцијски опсег њихове тачности. Самим тим, са повећањем фреквенције расте и релативна разлика између добијених резултата (од 0,3% за λ_1 до 1,5% за λ_3).

Табела 3.1: Поређење бездимензионих сопствених фреквенција одређених уз помоћ аналитичког модела који узима у обзир Тимошкову теорију греде, са резултатима из литературе [97,100].

	лит. [97,100]	Тимошенко
λ_1	1,41935	1,413796
λ_2	3,79667	3,782816
λ_3	4,68999	4,622142

У оквиру комерцијалног софтвера *COMSOL Multiphysics* извршен је прорачун за други механички систем са гредама квадратног попречног пресека, при чему је коришћен *2D Solid Mechanics Module*. Урађен је прорачун сопствених фреквенција осциловања (*Eigenfrequency study*), са уклештењем на левом крају система. Геометријске нелинеарности при томе нису узете у обзир. Коришћена је аутоматски генерисана мрежа коначних елемената троугаоног облика (*Physics-controlled, extremely fine mesh*) максималне величине 0,0528 m. Квалитет мреже је тестиран поређењем са резултатима добијеним за мрежу која се састоји од 10 пута мањих, као и од 100 пута мањих елемената, при чему није уочена значајна разлика између добијених резултата. Параметри аутоматски генерисане мреже су такође у сагласности са препорукама које се односе на сличне прорачуне описане у литератури, а које указују на то да је потребно минимално 6 до 10 елемената по таласној дужини како би се таласни број одредио са задовољавајућом тачношћу [54].

Када је у питању други модел механичког система, геометријске карактеристике греда су исте, али се њихове подужне осе налазе под међусобним углом $\alpha = 10^\circ$. Попречни пресек греда има облик квадрата дужине стране d . Тимошенков коефицијент смицања за квадратни попречни пресек има вредност $\mu = \frac{5}{6}$ [58]. Материјалне карактеристике греда се разликују, а одређене су модулом еластичности, модулом смицања и густином. Раван пресек крутог тела има облик квадрата, а његов центар масе се налази на оси која пролази кроз тачке Q_1 и P_2 , као што је приказано на Сл. 3.1. Аксијални момент инерције за главну централну осу крутог тела одређен је са $J_{C_x} = \frac{mD^2}{6}$. Карактеристична растојања на крутом телу, у односу на тачке обележене на Сл. 3.1, су: $\overline{Q_1V} = \overline{P_2V} = \frac{D}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$, $\overline{Q_1M} = \overline{P_2N} =$

$D/2 \cos \frac{\alpha}{2}$ и $\overline{CM} = \overline{CN} = \frac{D}{2} \sin \frac{\alpha}{2}$. Релевантни параметри којима су дефинисани материјал и геометрија греда, као и круто тело, приказани су у Табели 3.2. Греди са леве стране крутог тела одговара индекс 1, док греди са десне стране одговара индекс 2.

Табела 3.2: Параметри којима је дефинисан други механички систем.

греда 1	греда 2	круто тело
$E_1 = 70 \text{ GPa}$,	$E_2 = 2,3 \text{ GPa}$	$m = 1 \text{ kg}$
$G_1 = 26 \text{ GPa}$	$G_2 = 0,827 \text{ GPa}$	$D = 0,3 \text{ m}$
$\rho_1 = 2713 \text{ kg/m}^3$	$\rho_2 = 1050 \text{ kg/m}^3$	
$d_1 = 0,25 \text{ m}$	$d_2 = 0,25 \text{ m}$	
$L_1 = 2,5 \text{ m}$	$L_2 = 2,5 \text{ m}$	

За описани систем, који такође има уклештење на свом левом крају, одређене су прве три сопствене фреквенције осциловања, а резултати су такође приказани у Табели 3.3. При томе је бездимензиона сопствена фреквенција осциловања одређена са:

$$\lambda^* = \sqrt{\frac{\omega}{c_1 R_g}},$$

где је c_1 брзина простирања таласа при аксијалним осцилацијама греде са леве стране (греде означене индексом 1). Резултати добијени методом коначних елемената представљени су у колони „МКЕ (*COMSOL*)”. Резултати добијени представљеном аналитичком методом трансфер матрице, уз примену методе бисекције, су дати у суседној колони „Тимошенко”.

Табела 3.3: Поређење бездимензионих сопствених фреквенција одређених уз помоћ аналитичког модела који узима у обзир Тимошкову теорију греде, са резултатима добијеним методом коначних елемената у софтверу *COMSOL Multiphysics*.

	МКЕ (<i>COMSOL</i>)	Тимошенко
λ_1^*	0,383957	0,363132
λ_2^*	0,694471	0,662581
λ_3^*	1,117899	1,052507

Може се приметити да постоји задовољавајуће слагање добијених резултата, као и то да резултати добијени уз помоћ аналитичке методе имају нешто ниже вредности у односу на резултате добијене уз помоћ МКЕ. С обзиром на уведене претпоставке у овире аналитичког приступа математичком моделирању понашања разматраних система, метода коначних елемената даје тачне резултате на вишим фреквенцијским нивоима. Релативна разлика између добијених резултата представљених у Табели 3.3 варира од 4,5% за λ_2 до 5,8% за λ_3 .

3.5 Нумерички прорачуни

Нумерички прорачуни имплементирани су у оквиру комерцијалног софтвера *MATLAB*, са циљем одређивања дијаграма дисперзне карактеристике, функције фреквентног одзива померања, као и облика модова механичких таласа одређених фреквенција. Применом методе коначних елемената у комерцијалном софтверу *COMSOL Multiphysics* биће извршено поређење добијених резултата, како би се утврдио фреквенцијски опсег на ком формиран математички модел даје резултате задовољавајуће тачности. Визуализацијом и параметарском анализом резултата нумеричких прорачуна ствара се могућност за функционални дизајн разматраних периодичних структура.

3.5.1 Дисперзне карактеристике структура које се састоје од Тимошенкових греда и крутих тела

Уопштени облик јединичне ћелије периодичне структуре приказан је на Сл. 3.1, а њена укупна дужина одређена је са:

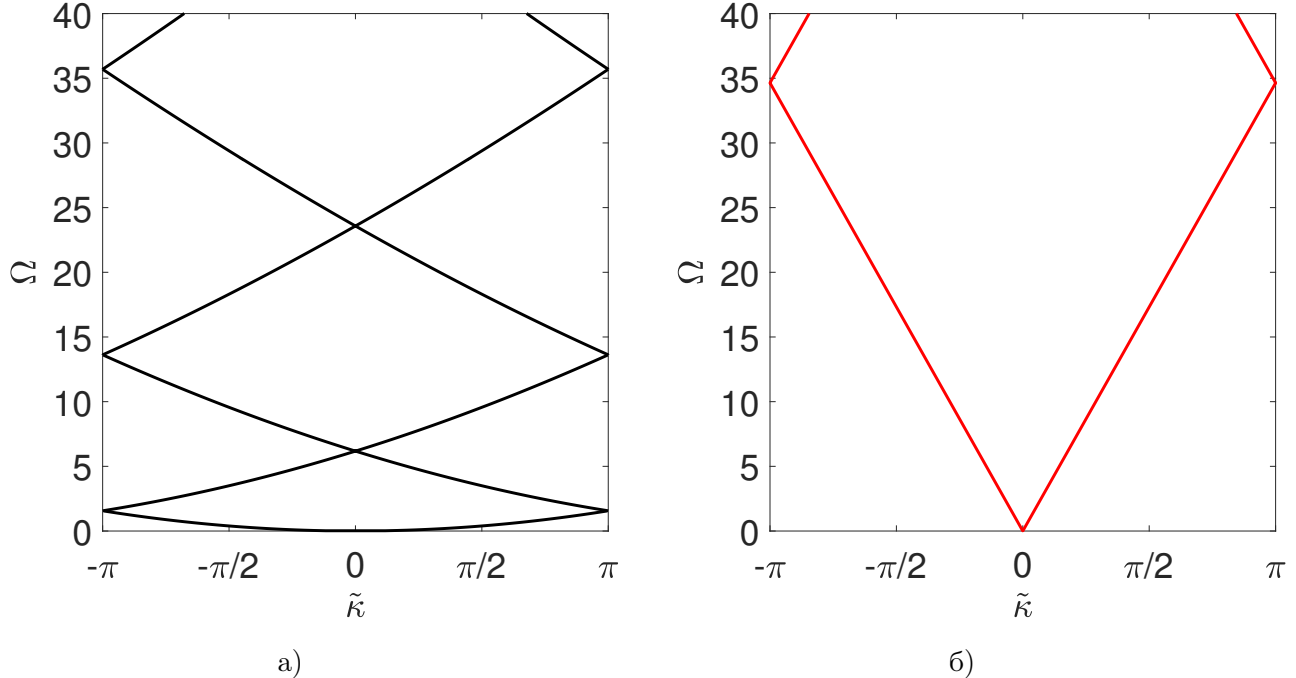
$$\Lambda = L_1 \cos \frac{\alpha}{2} + D + L_2 \cos \frac{\alpha}{2}. \quad (3.71)$$

На свим дијаграмима дисперзне карактеристике бездимензиони таласни број $\tilde{\kappa} = \kappa \Lambda$ је дат у функцији бездимензионе фреквенције:

$$\Omega = \frac{\omega \Lambda^2}{2\pi \varsigma_1 R_g}.$$

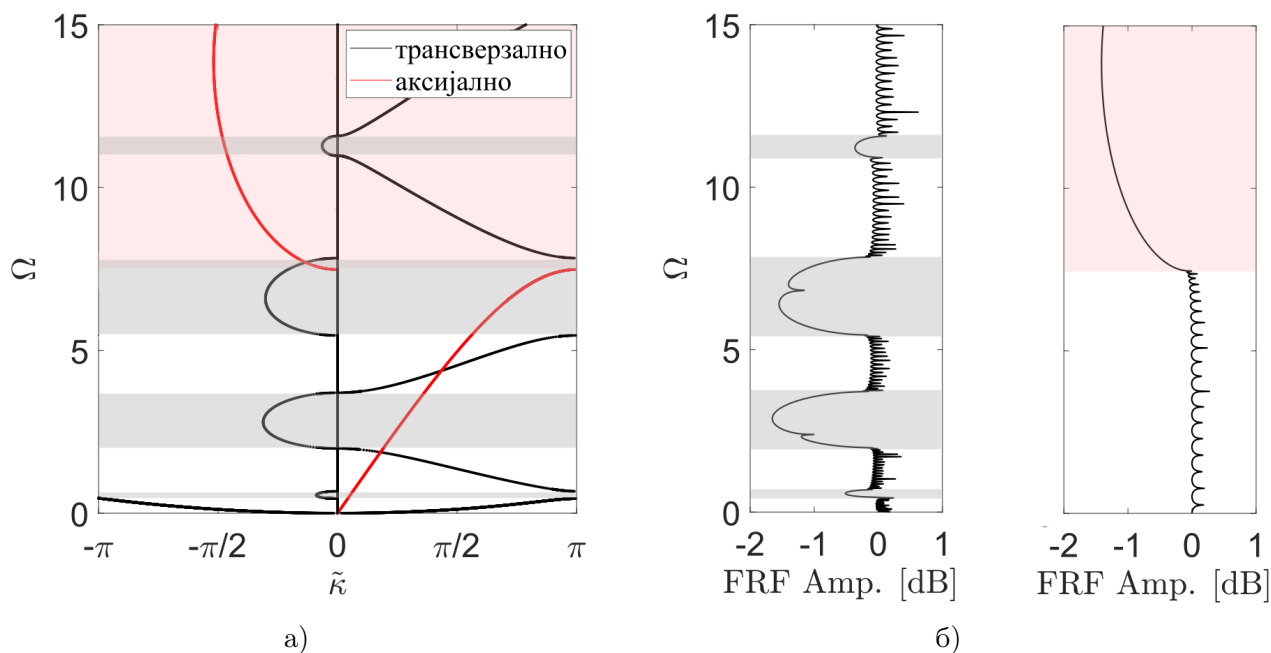
Ради сажетијег излагања, у даљем тексту ће бити изостављен термин „бездимензиони“.

Уколико се из јединичне ћелије приказане на Сл. 3.1 уклоне круто тело и једна греда, просторним понављањем такве јединичне ћелије формира се еластична греда која нема карактеристику просторне периодичности. Дијаграм дисперзне карактеристике за хомогену греду константног попречног пресека, чије карактеристике су дате у првој колони Табеле 3.2 („греда 1“), приказан је на Сл. 3.10а за трансверзални, а на Сл. 3.10б за аксијални правац. С обзиром на то да свакој фреквенцији у прорачунском домену одговарају две вредности таласног броја, које се односе на два могућа смера реципрочне пропагације таласа дуж греде, може се закључити да се механички таласи свих фреквенција могу неометано простирати кроз хомогену греду константног попречног пресека.



Слика 3.10: Дијаграм дисперзне карактеристике хомогене еластичне греде константног попречног пресека за: а) трансверзални, и б) аксијални правац. Резултати који се односе на трансверзални правац означени су црном бојом, а аксијални црвеном. С обзиром на то да таква структура нема особине просторне периодичности, механички таласи свих фреквенција се могу неометано простирати кроз њу (не долази до формирања зауставних зона на дијаграму дисперзне карактеристике).

Интересантно је размотрити и дисперзну карактеристику периодичне структуре чија јединична ћелија се састоји од две коаксијалне еластичне греде истих геометријских, а различитих материјалних карактеристика, чије особине су дефинисане у прве две колоне („греда 1“ и „греда 2“) Табеле 3.2 [58]. Применом директне методе решавања дисперзне релације, добијају се конјуговано-комплексне вредности таласног броја $\tilde{\kappa}$. На Сл. 3.11а налази се дијаграм дисперзне карактеристике на коме су црном бојом приказани резултати за трансверзални, а црвеном бојом за аксијални правац. На негативном делу апсцисе се могу уочити дисперзне криве које одговарају имагинарном делу решења. На тим фреквентним опсезима налазе се зоне заустављања на којима долази до значајног пригушења (заустављања) механичких таласа.

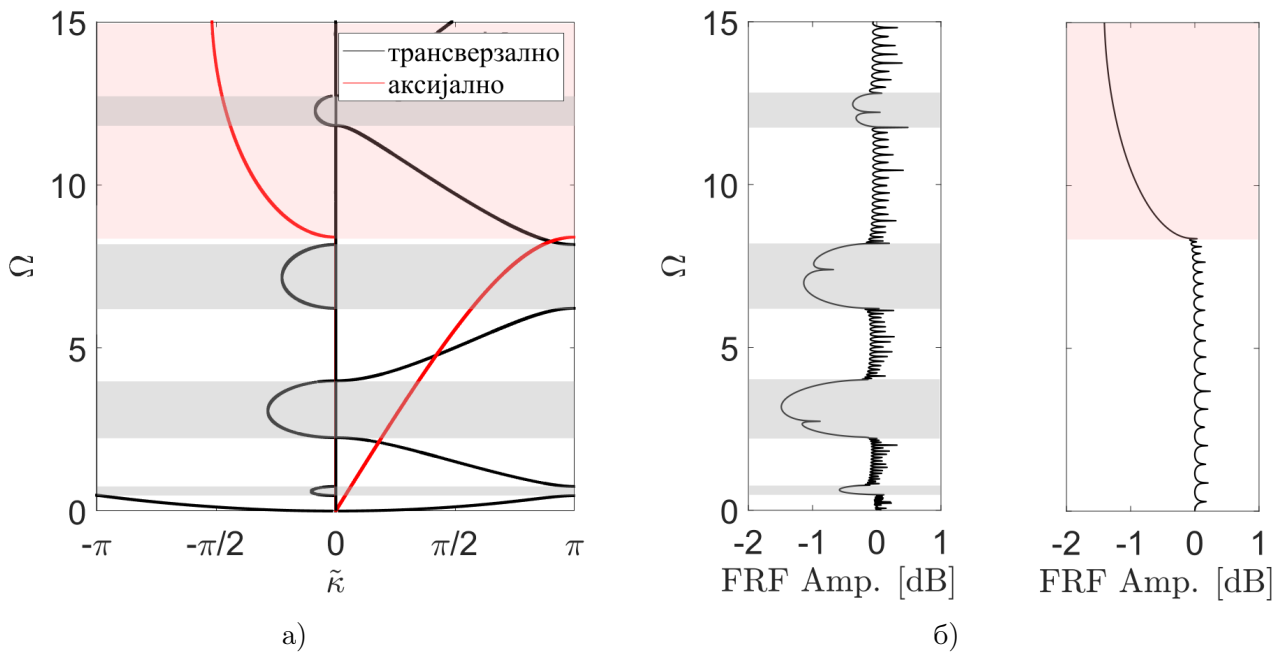


Слика 3.11: а) Дијаграм дисперзне карактеристике за периодичну структуру, чије јединичне ћелије се састоје од две коаксијалне греде истих геометријских, а различитих материјалних карактеристика [58]. На негативном делу апсцисе су приказани имагинарни делови резултата таласног броја, а на позитивном делу реални делови. Резултати који се односе на трансверзални правац означени су црном бојом, а аксијални црвеном. Зоне заустављања су такође освенчене одговарајућим бојама. б) Дијаграми функција фреквентног одзива померања за трансверзални правац (лево) и аксијални правац (десно), са освенченим зауставним зонама.

Дакле, периодично смењивање материјала од кога је сачињена еластична гредa доводи до раздвајања такозваних грана дисперзне карактеристике, при чему настају зоне заустављања. Кроз такву структуру је онемогућено простирање механичких таласа са фреквенцијама из одговарајућих опсега [58]. На Сл. 3.11б приказани су дијаграми функције фреквентног одзива померања (ФФОП) за трансверзални и аксијални правац осциловања периодичне структуре која се састоји од 20 разматраних јединичних ћелија. На дијаграмима функције фреквентног одзива померања се јасно уочавају освенчене зоне заустављања. Може се приметити да оне одговарају зауставним зонама на дијаграму дисперзне карактеристике.

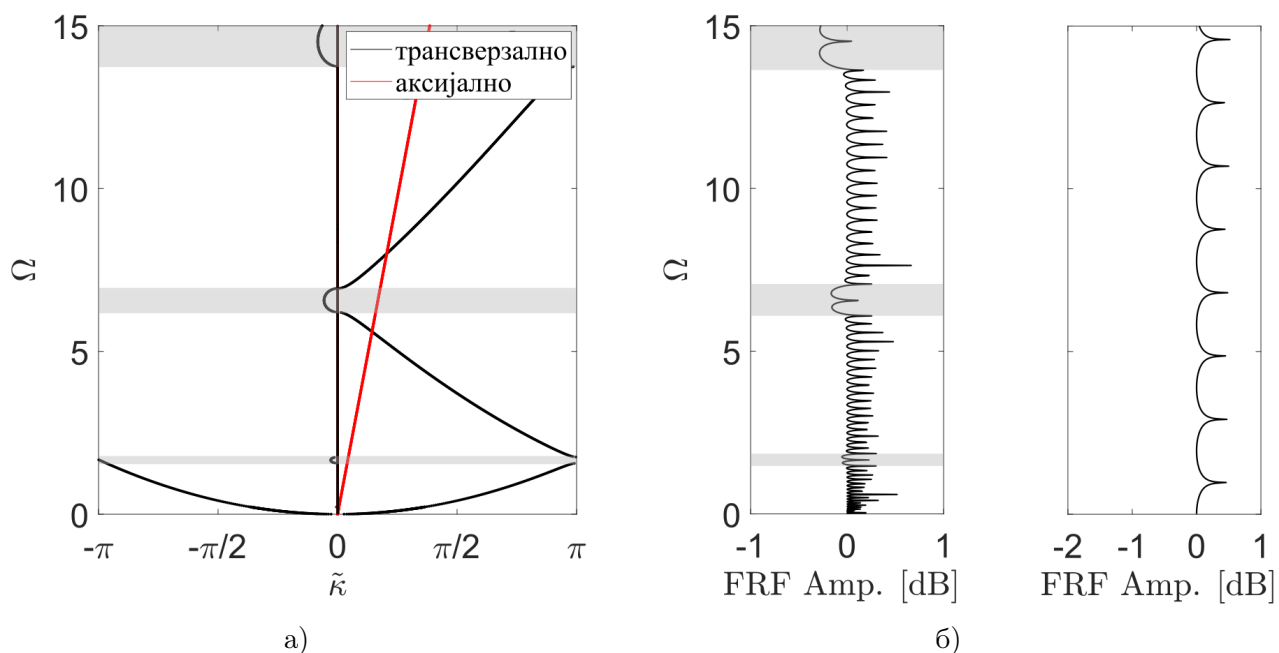
Између две коаксијалне еластичне греде различитих материјалних карактеристика се може поставити круто тело које је описано у оквиру другог механичког система у претходном поглављу, а чије карактеристике су дате у трећој колони Табеле 3.2 („круто тело“). Дија-

грам дисперзне карактеристике и функције фреквентног одзива померања за периодичну структуру насталу просторним понављањем такве јединичне ћелије приказани су на Сл. 3.12. Поређењем Сл. 3.11 и 3.12, може се приметити да услед присуства крутог тела долази до незнатног повећања фреквентног опсега зона заустављања, тј. да је доминантан утицај различитих материјалних карактеристика греда. Разматрани механички таласи се простиру кроз деформибилне средине тј. еластичне греде, док се уз помоћ крутих тела кретање преноси са једне еластичне греде на следећу. Аксијална померања се преносе неометано. Међутим, крута тела пружају отпор ротационом кретању, до кога долази услед трансверзалних померања и ротације попречних пресека на крајевима суседних греда. Тај отпор се огледа у њиховом моменту инерције, а услед њега долази до рефлексије таласа одређених фреквенција. Осим тога, крута тела својим масеним и инерцијалним карактеристикама утичу на сопствене фреквенције осциловања разматраних периодичних структура, које припадају зонама проводног фреквентног опсега, те самим тим такође утичу на структуру дијаграма дисперзне карактеристике (у оба правца).

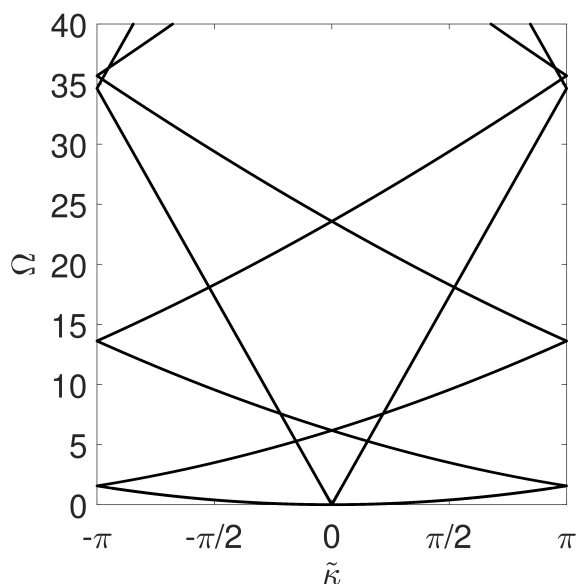


Слика 3.12: а) Дијаграм дисперзне карактеристике за периодичну структуру, чије јединичне ћелије се састоје од коаксијалних греда истих геометријских, а различитих материјалних карактеристика, и крутог тела које се налази између њих [46]. На негативном делу апсцисе су приказани имагинарни делови резултата таласног броја, а на позитивном делу реални делови. Резултати који се односе на трансверзални правац означени су црном бојом, а аксијални црвеном. Зоне заустављања су такође освенчене одговарајућим бојама. б) Дијаграми функција фреквентног одзива померања за трансверзални правац (лево) и аксијални правац (десно), са освенченим зауставним зонама.

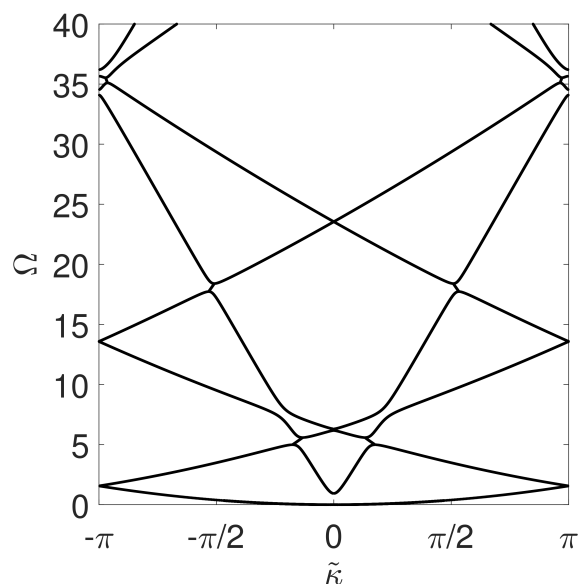
Уколико се обе греде у разматраној јединичној ћелији састоје од истог материјала, дефинисаног у првој колони Табеле 3.2 („греда 1“), у том случају је структура периодична само услед присуства крутих тела. Резултати нумеричких прорачуна за такву структуру су приказани на Сл. 3.13. Може се приметити да су фреквентни опсеги зона заустављања знатно ужи, као и то да у разматраном прорачунском домену не долази до формирања зона заустављања у аксијалном правцу. Дакле, крута тела пружају отпор простирању механичких таласа у трансверзалном правцу, а услед њихове просторне периодичности и негативне интерференције долази до настанка одговарајућих зауставних зона.



Слика 3.13: а) Дијаграм дисперзне карактеристике за периодичну структуру, чије јединичне ћелије се састоје од две идентичне коаксијалне еластичне греде повезане крутим телом. На $\tilde{\kappa} < 0$ су приказани имагинарни делови резултата таласног броја, а на $\tilde{\kappa} > 0$ реални делови. Зауставне зоне које се формирају за трасверзални правац осциловања освенчене су сивом бојом. б) Дијаграми функција фреквентног одзива померања за трансверзални (лево) и аксијални (десно) правац. Не долази до формирања зауставних зона за аксијални правац осциловања.



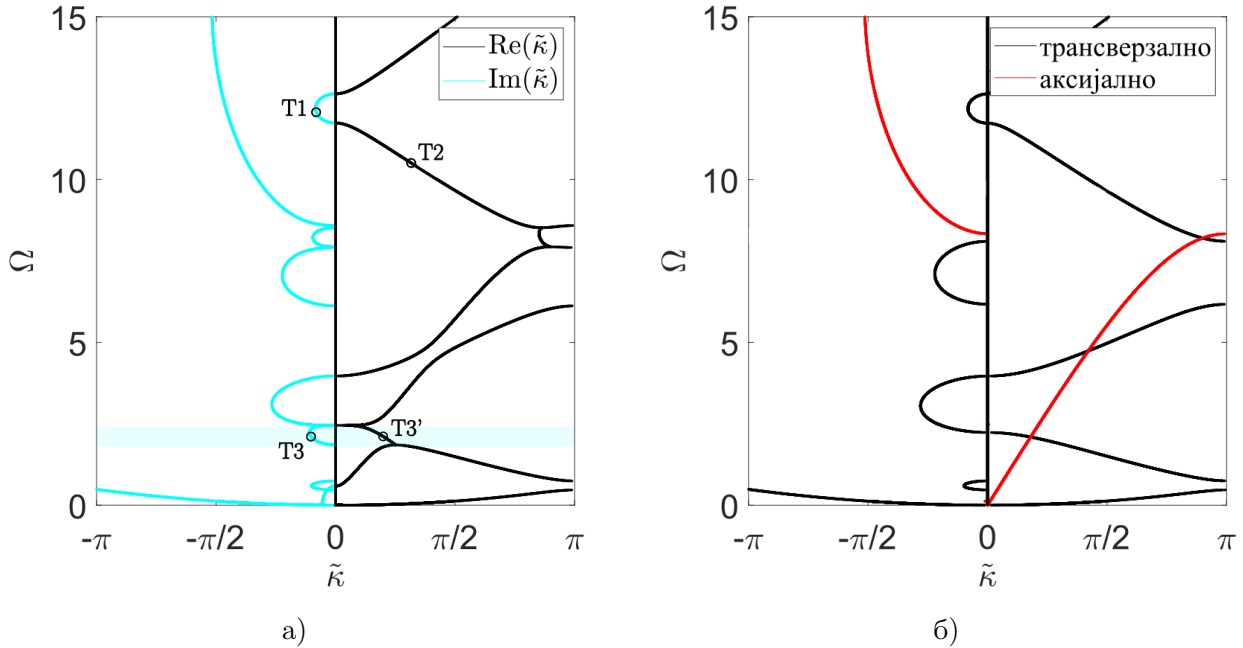
Слика 3.14: Дијаграм дисперзне карактеристике за структуру чија јединична ћелија се састоји од две идентичне греде под углом $\alpha = 0^\circ$. Не долази до спрезања између осцилација у аксијалном и трансверзалном правцу.



Слика 3.15: Дијаграм дисперзне карактеристике за структуру чија јединична ћелија се састоји од две идентичне греде под углом $\alpha = 5^\circ$. Долази до спрезања између осцилација у аксијалном и трансверзалном правцу.

Када гредe нису коаксијалне, већ се налазе под углом α , назначеним на Сл. 3.1, долази до спрезања између њихових аксијалних и трансверзалних осцилација. Ефекти које спрезање има на дисперзну карактеристику могу се уочити на једноставном примеру јединичне ћелије која се састоји од две идентичне еластичне гредe, које се налазе под углом α . На Сл. 3.14 представљена је дисперзна карактеристика за два ортогонална правца (трансверзални и аксијални), за случај када је $\alpha = 0^\circ$ (на Сл. 3.10а и 3.10б су исти резултати приказани одвојено за оба правца). На Сл. 3.15 је приказана дисперзна карактеристика за случај када је $\alpha = 5^\circ$. Може се приметити да је структура дијаграма другачија, а спрезање осцилација у различитим правцима огледа се у спрезању правих линија које се односе на аксијални правац и кривих које одговарају трансверзалном правцу. Такође се може уочити да је описано спрезање интензивније на нижим фреквенцијама [46].

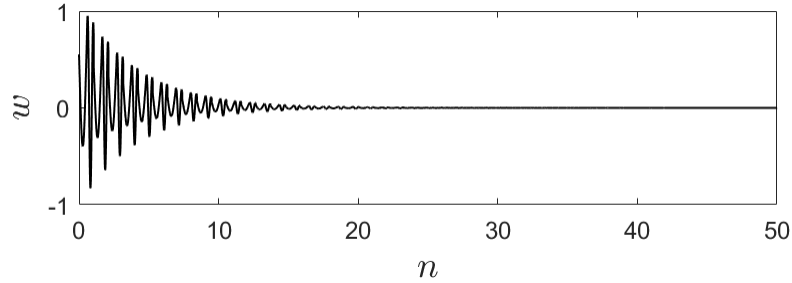
Уколико се разматра систем чије јединичне ћелије се састоје од гредe различитих материјалних карактеристика, а између којих се налази круто тело (систем дефинисан у Табели 3.2), при чему је угао између гредe $\alpha = 10^\circ$, дијаграм дисперзне карактеристике приказан на Сл. 3.16а је знатно сложенији. Реални део решења за таласни број је приказан црном бојом на позитивном делу апсцисе ($\tilde{\kappa} > 0$), док је имагинарни део приказан плавом бојом на $\tilde{\kappa} < 0$.



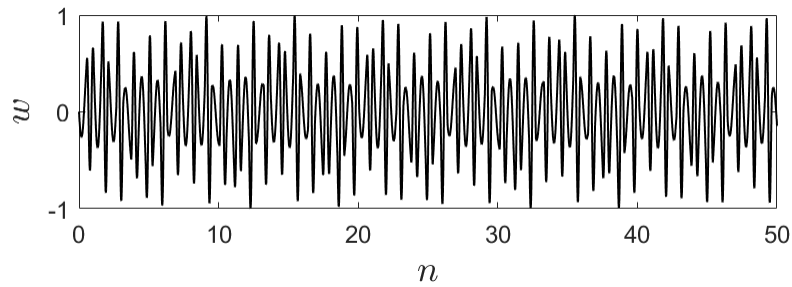
Слика 3.16: а) Дијаграм дисперзне карактеристике за структуру чија јединична ћелија се састоји од две гредe различитих материјалних карактеристика које се налазе под углом $\alpha = 10^\circ$, са крутим телом између њих. На негативном делу апсцисе је плавом бојом приказан имагинарни део решења за таласни број, док је на позитивном делу црном бојом приказан реални део решења. Услед тога што гредe нису коаксијалне долази до спрезања осцилација у ортогоналним правцима, као и до формирања такозване специјалне зауставне зоне спрезања, која је освенена плавом бојом. б) Дијаграм на коме су гране дисперзне карактеристике за трансверзални правац (црна боја) и аксијални правац (црвена боја) приказане одвојено.

Ако се у оквиру методе трансфер матрице у векторима стања елиминишу аксијално померање и сила, а затим и одговарајући редови и колоне трансфер матрице јединичне ћелије, може се приказати дијаграм дисперзне карактеристике само за трансверзални правац, као на Сл. 3.16б (обележено црном бојом). Насупрот томе, када се разматрају само аксијал-

но померање и сила, може се приказати дисперзна карактеристика за тај правац, што је на Сл. 3.16б означено црвеном бојом. У реалности није могуће изазвати само аксијалне или само трансверзалне осцилације таквог механичког система. Међутим, иако дијаграм приказан на Сл. 3.16б нема физички смисао, уз помоћ њега је омогућена идентификација правца осциловања којима одговарају неки делови грана дисперзне карактеристике које су приказане на Сл. 3.16а, као и визуализација спрезања које доводи до тог специфичног облика дијаграма.



Слика 3.17: Облик мода Блоховог таласа за фреквенцију и таласни број који одговарају тачки Т1 у зауставној зони на дијаграму дисперзне карактеристике. Долази до значајног пригушења при простирању механичког таласа кроз структуру са $n = 50$.

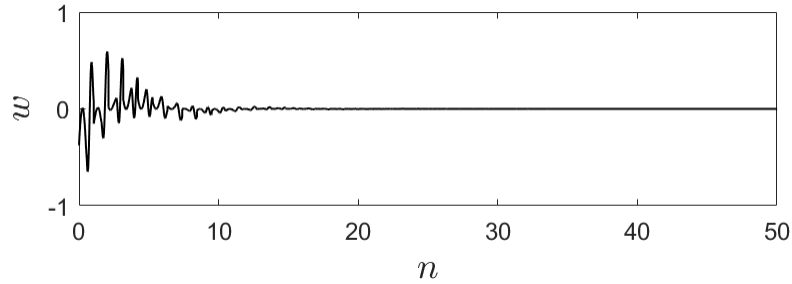


Слика 3.18: Облик мода Блоховог таласа за фреквенцију и таласни број који одговарају тачки Т2 у зони проводног опсега на дијаграму дисперзне карактеристике. Такав механички талас може неометано да се простира кроз структуру.

Дакле, упоредном анализом реалних делова добијених решења на Сл. 3.16а и 3.16б (за $\tilde{\kappa} > 0$), може се уочити како долази до формирања дисперзних кривих услед спрезања осцилација у разматраним ортогоналним правцима. На Сл. 3.16а се на негативном делу апсцисе могу приметити различите зоне заустављања, пре свега оне које се односе на аксијалне и трансверзалне осцилације, а које се могу разликовати на Сл. 3.16б. Тачком Т1 обележена је позиција на Сл. 3.16а, која се налази у зауставној зони за трансверзални правац (што се може закључити поређењем са Сл. 3.16б). Облик мода Блоховог таласа који одговара фреквенцији и таласном броју дефинисаним тачком Т1 може се видети на Сл. 3.17, за талас који се простира кроз структуру од $n = 50$ јединичних ћелија. С обзиром на то да се тачка Т1 налази у зауставној зони, долази до значајног опадања амплитуде механичког таласа, а његово простирање је заустављено на самом почетку структуре. За разлику од тога, облик мода Блоховог таласа који одговара тачки Т2, која се налази у зони проводног фреквентног опсега, приказан је на Сл. 3.18. Може се приметити да се такав механички талас неометано простира кроз идентичну структуру.

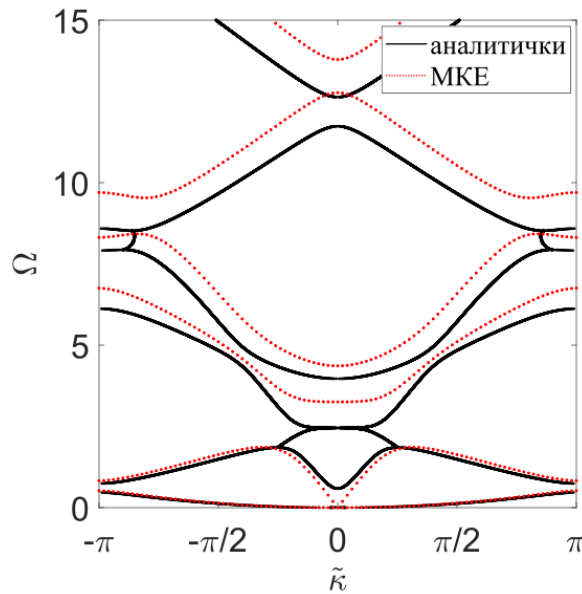
Међутим, могу се уочити фреквентни опсези на којима постоје криве дисперзне карактеристике и на позитивном и на негативном делу апсцисе. То су „специјалне зауставне зоне спрезања” (СЗЗС) које настају као последица једнаких сопствених вектора који одговарају аксијалном и трансверзалном правцу осциловања [46,41]. Дакле, на фреквентном

опсегу најниже СЗЗС, која је осенчена плавом бојом, имагинарни и реални део таласног броја нису једнаки нули, нити имају вредност $\pm\pi$. Услед тога су на $\tilde{\kappa} > 0$ видљиве линије којима су повезане суседне гране дисперзне карактеристике. Обележене су тачке ТЗ и ТЗ', које одговарају имагинарном и реалном делу таласног броја одређеног за једну вредност фреквенције. Облик мода Блоховог таласа за тај случај је приказан на Сл. 3.19 и може се приметити да долази до значајног пригушења тог механичког таласа.



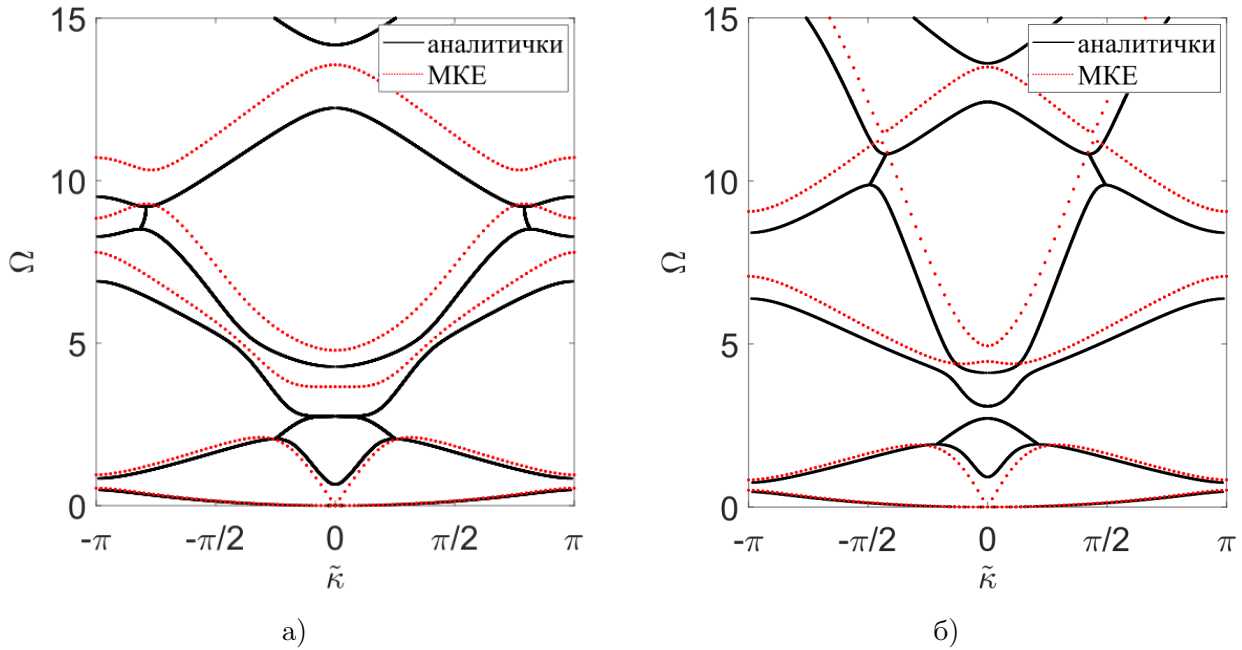
Слика 3.19: Облик мода Блоховог таласа за фреквенцију и таласни број чији имагинарни и реални део одговара тачкама ТЗ и ТЗ' у специјалној зауставној зони спрезања на дијаграму дисперзне карактеристике. Долази до значајног пригушења механичког таласа.

Резултати за исти периодични механички систем могу се одредити уз помоћ методе коначних елемената у комерцијалном софтверу *COMSOL Multiphysics*. Како би се одредила дисперзна карактеристика, коришћени су периодични гранични услови *Periodic boundary condition - Floquet periodicity*, при чему је k -вектор одређен у подужном правцу јединичне ћелије, као функција таласног броја. Проблем сопствених вредности (*Eigenfrequency study*) је решен у опсегу прве Брилунове зоне, тј. директним методом, те се за задате реалне вредности таласног броја добијају реалне вредности фреквенције [46].



Слика 3.20: Поређење резултата аналитичке методе и МКЕ, за јединичну ћелију која се састоји од две греде различитих материјалних карактеристика које се налазе под углом $\alpha = 10^\circ$, а између којих се налази круто тело. Аналитичка метода резултује нижим фреквенцијским нивоима, док се у решењу добијеном уз помоћ МКЕ не уочавају специјалне зауставне зоне спрезања.

На Сл. 3.20 су упоређени резултати добијени аналитичком методом (само реални део решења), и методом коначних елемената. Може се видети да се у оквиру првог мода добија одлично поклапање резултата, док на вишим модовима МКЕ предвиђа зауставне зоне на нешто вишим фреквенцијама. Међутим, сама ширина зауставних, тј. проводних зона, је приближно иста. Дакле, услед апроксимација уведених коришћењем теорије греде, примене методе трансфер матрице на квази-једнодимензионални механички систем, као и претпоставке о малим померањима, аналитичка метода резултује нижим фреквенцијским нивоима на којима се јављају дисперзне криве [46]. Интересантно је и то што се у резултатима добијеним директним методом (уз помоћ МКЕ), не уочавају линије које спајају дисперзне криве у оквиру СЗЗС, што се може сматрати предношћу аналитичке методе.



Слика 3.21: Поређење резултата аналитичке методе и МКЕ, за структуру чија јединична ћелија се састоји од две греде различитих материјалних карактеристика које се налазе под углом $\alpha = 10^\circ$, а између којих се налази круто тело: а) када је узето у обзир веће круто тело ($D = 0,6$ m и $m = 4$ kg), б) када су узете у обзир тање греде ($d_1 = d_2 = 0,125$ m). Метода коначних елемената даје решења на вишим фреквенцијским нивоима, него што је то случај код аналитичке методе.

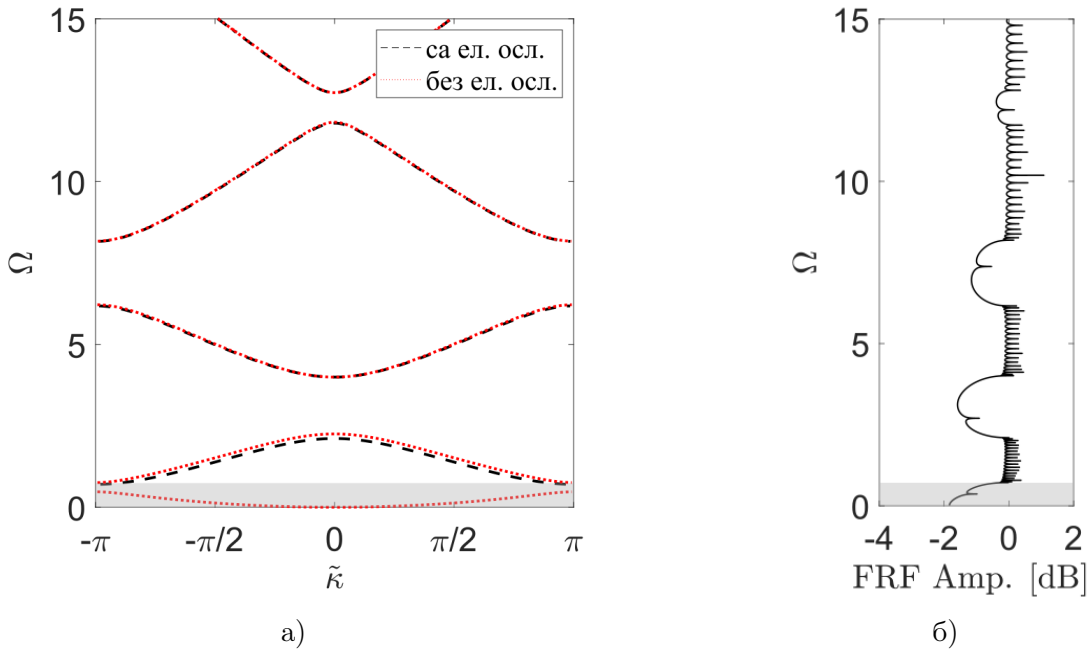
Уколико се узме у обзир веће круто тело, чија величина је одређена димензијом $D = 0,6$ m (масе $m = 4$ kg), може се приметити на Сл. 3.21а да се на вишим фреквенцијским нивоима добијају знатно шире зауставне зоне, али на нижим фреквенцијама не долази до промена. За разлику од тога, уколико се разматрају греде мањег попречног пресека, дефинисаног димензијом $d_1 = d_2 = 0,125$ m, добија се знатно другачија дисперзна карактеристика, приказана на Сл. 3.21б. На нижим фреквенцијама се појављује зона заустављања, док на вишим фреквенцијама преостаје једна специјална зауставна зона спрезања. У оба разматрана случаја, МКЕ даје решења на вишим нивоима фреквенције, него што је то случај код аналитичке методе.

3.5.2 Утицај еластичне подлоге и дискретних механичких подсистема на дисперзну карактеристику разматраних структура

Разматра се јединична ћелија приказана на Сл. 3.3, која се састоји од две коаксијалне греде повезане крутим телом, чије карактеристике су дефинисане у Табели 3.2. На левом крају јединичне ћелије везан је дискретан механички подсистем (ДМП), симболично приказан на Сл. 3.3.

С обзиром на то да су греде коаксијалне, не може доћи до спрезања трансверзалних и аксијалних осцилација, те су сви резултати приказани само за трансверзални правац, ради боље прегледности. На дијаграмима дисперзне карактеристике је приказан само реални део решења бездимензионог таласног броја, у првој Брилуновој зони, тј. $\text{Re}(\tilde{\kappa}) \in [-\pi, \pi]$. Дијаграми дисперзне карактеристике, који су добијени за јединичну ћелију са ДМП, приказани су црном бојом. Они су упоређени са резултатима за случај без ДМП, обележеним црвеном бојом. Резултати добијени за систем без ДМП су приказани и на Сл. 3.12.

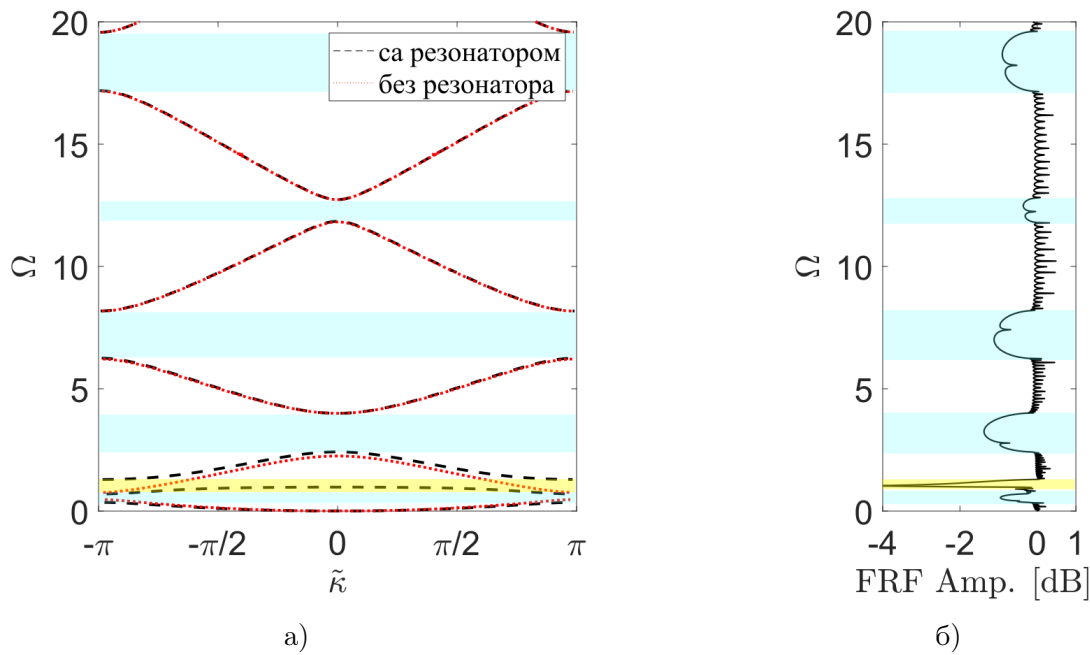
Уколико се разматра периодична структура ослоњена на еластичну подлогу, она се може моделирати системом паралелних, периодично постављених опруга (на левом крају сваке јединичне ћелије). У оквиру нумеричких прорачуна, крутост опруге је одређена као 80% крутости на савијање греде, која се налази са леве стране крутог тела, тј. $c = 0,8E_1I_{x1}/L_1^3$. На Сл. 3.22, приказани су дијаграми дисперзне карактеристике и функције фреквентног одзива померања. Поређењем са резултатима за јединичну ћелију без еластичне опруге (црвено), може се приметити да се услед ослањања на еластичну подлогу прва зона заустављања формира на изузетно ниским фреквенцијама, и то почевши од нулте фреквенције. То је и очекивано, на основу резултата који су већ познати у литератури [58].



Слика 3.22: а) Дијаграм дисперзне карактеристике за трансверзалне осцилације разматране периодичне структуре ослоњене на еластичну подлогу. б) Дијаграм функције фреквентног одзива померања. Услед ослањања на еластичну подлогу, јавља се зона заустављања на веома ниским фреквенцијама (осенчено сивом бојом), и то почевши од нулте фреквенције.

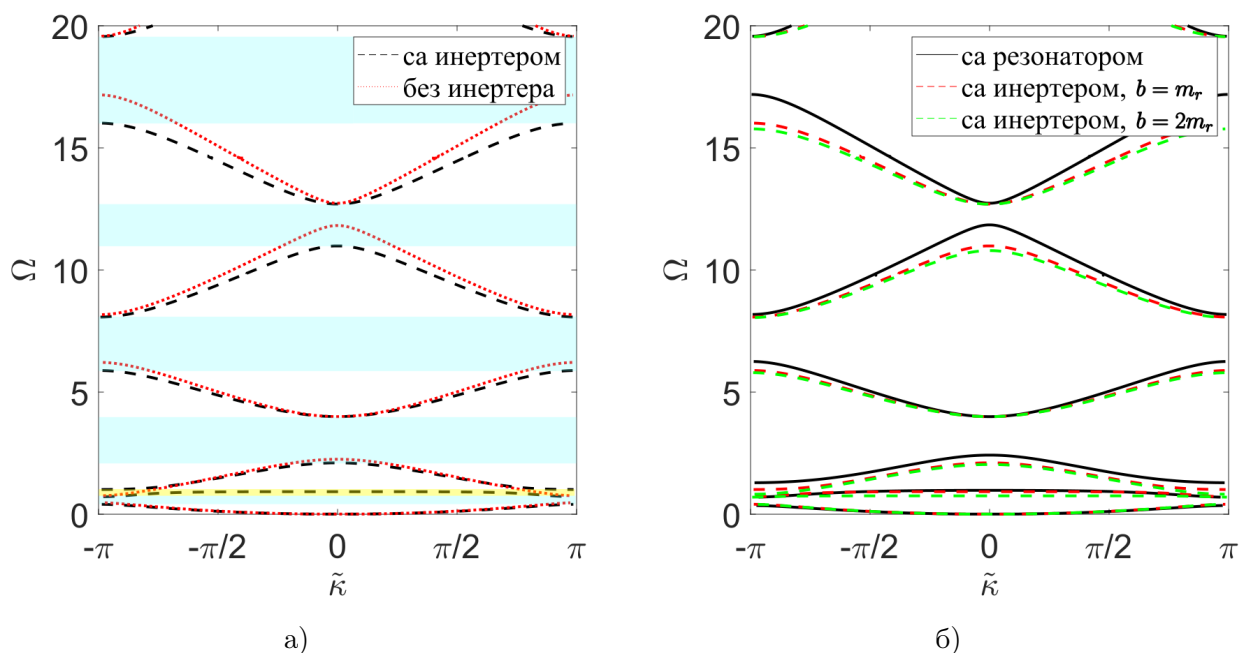
Везивањем масе m_r на други крај опруге, добија се масени резонатор са сопственом фреквенцијом осциловања $\omega_r = \sqrt{c/m_r}$. Узето је да је маса резонатора двоструко мања од

месе „греде 1“, тј. $m_r = 0,5\rho_1 A_1 L_1$. На Сл. 3.23а приказан је дијаграм дисперзне карактеристике за такав механички систем, на коме су осенчене зоне заустављања. На основу дијаграма функције фреквентног одзива померања, приказаног на Сл. 3.23б, може се закључити да постоје два различита механизма формирања зауставних зона. То је такође очекивано, на основу резултата који су изложени у литератури [47,57,65-73,75,76]. Плавом бојом су осенчене зауставне зоне које се формирају услед Бреговог расејања (БРЗЗ). Заустановка зона до које долази услед локалне резонанције (ЛРЗЗ), осенчена је жутом бојом. Она се јавља због осциловања масеног резонатора сопственом фреквенцијом ω_r , при чему долази до дисипације енергије механичког таласа у околини те фреквенције. Услед тога је ЛРЗЗ на Сл. 3.23 видљива у нивоу одговарајуће фреквенције Ω_r . Поређењем са резултатима добијеним без масеног резонатора, може се приметити да ЛРЗЗ такође утиче на смањење ширине прве БРЗЗ.



Слика 3.23: а) Дијаграм дисперзне карактеристике за трансверзалне осцилације разматране периодичне структуре са масеним резонатором на левом крају. б) Дијаграм функције фреквентног одзива померања. Као последица локалне резонанције јавља се зона заустављања (осенчена жутом бојом) у околини сопствене фреквенције осциловања резонатора. Зоне заустављања које се јављају услед Бреговог расејања осенчене су плавом бојом. Поређењем добијених резултата (црно), са резултатима добијеним без резонатора (црвено) може се закључити да нема других последица присуства резонатора у структури.

С обзиром на то да сопствена фреквенција осциловања резонатора зависи од његове масе и крутости, такав ДМП није увек погодан за коришћење услед разних ограничења која постоје при одабиру тих параметара, као и због могућности прекомерног увећања масе целокупног система. Уместо тога, жељени инерцијални ефекти могу се остварити коришћењем инертера у оквиру ДМП приказаног на Сл. 3.6 у паралелној вези са опругом крутости s . Дијаграм дисперзне карактеристике приказан је на Сл. 3.24а, упоредо са резултатима добијеним за структуру без ДМП. Може се приметити да, осим појаве ЛРЗЗ, долази и до ширења зауставних зона, као и да је тај ефекат израженији на вишим фреквенцијама. Утицај величине коефицијента пропорционалности b приказан је на Сл. 3.24б, за $b = m_r$ и $b = 2m_r$, упоредо са резултатима добијеним са резонатором масе m_r (који су приказани и на Сл. 3.23а). Повећањем коефицијента пропорционалности b долази до сужавања ЛРЗЗ, као и до незнатног повећања БРЗЗ.

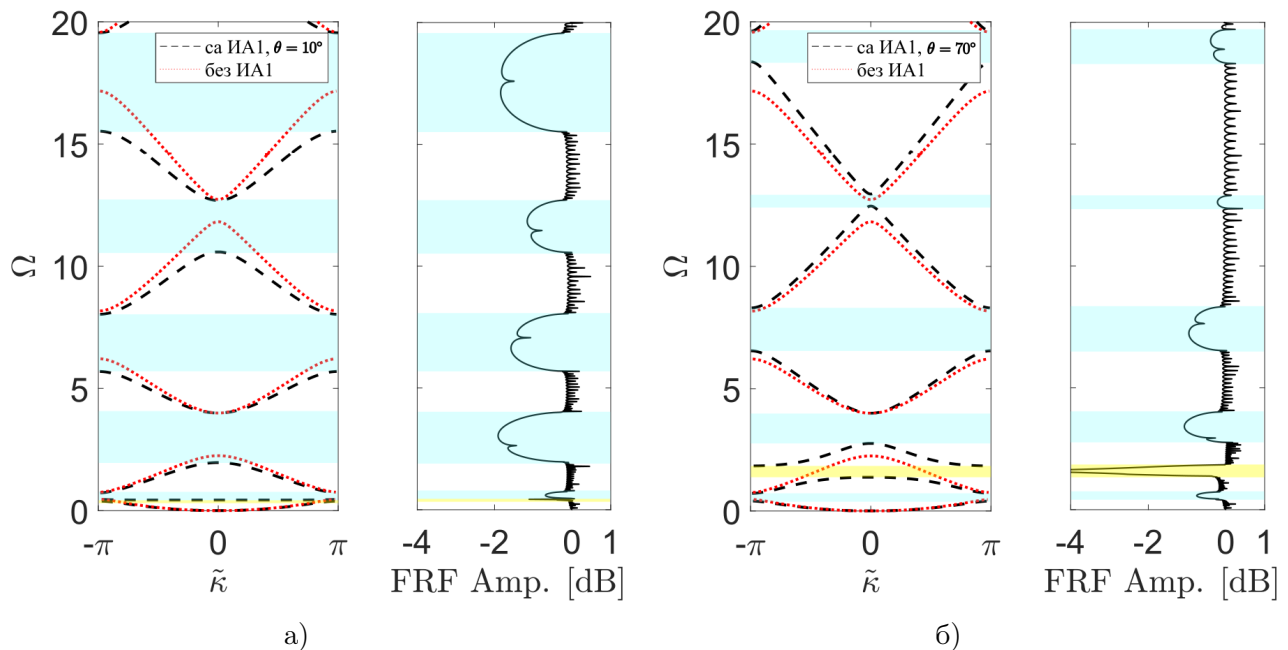


Слика 3.24: а) Дијаграм дисперзне карактеристике за трансверзалне осцилације разма-
трране периодичне структуре са ДМП на левом крају, који се састоји од паралелно везане
опруге и инертера ($b = m_r$), а чији је други крај везан за непокретну тачку. Добијени ре-
зултати су упоређени са резултатима за структуру без ДМП (назначени црвеном бојом).
Зоне заустављања које се јављају услед Бреговог расејања осенчене су плавом бојом, док
су зоне заустављања до којих долази услед локалне резонанције осенчене жутом бојом.
Уочава се да, осим појаве ЛРЗЗ, долази и до ширења БРЗЗ. б) Поређење дијаграма дис-
перзне карактеристике за структуру са масеним резонатором (означено црном бојом) и
структуру са инертером, и то са коефицијентом пропорционалности који је једнак маси
резонатора ($b = m_r$, означено црвеном бојом), као и за његову двоструко већу вредност
($b = 2m_r$, означено зеленом бојом). Са повећањем коефицијента пропорционалности b до-
лази до сужавања ЛРЗЗ, као и до већег ширења БРЗЗ.

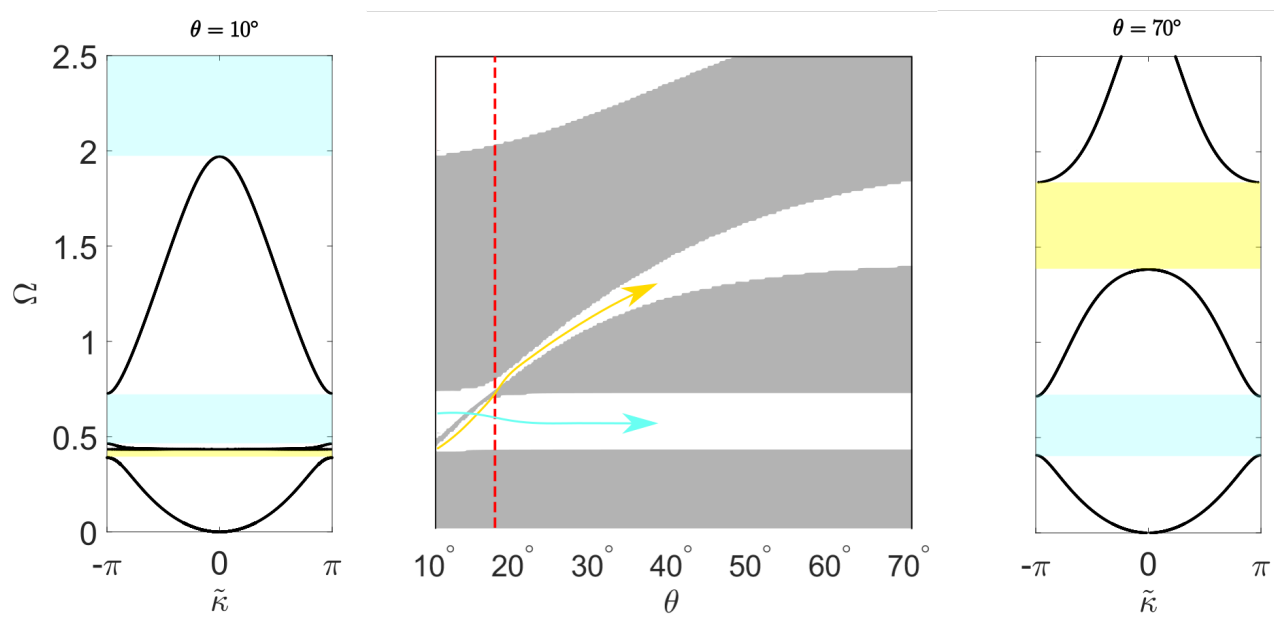
Сила којом инертер делује на носећу структуру у тачки везивања пропорционална је ре-
лативном убрзању његових крајева и доводи до такозваног анти-резонантног ефекта, при
чему долази до ефективног поништавања еластичне силе до које долази услед деформиса-
ња греде [79,81]. Као последица тога, долази до рефлексије и деструктивне интерференције
механичких таласа на одређеним фреквентним опсезима, тј. до појаве зона заустављања.
С обзиром на то да је сила у инертеру функција убрзања, она самим тим зависи од фре-
квенције, услед чега се утицај инертера може приметити на свим фреквентним нивоима,
а нарочито је изражен на вишим фреквенцијама. Слични инерцијални ефекти постижу
се применом инерцијалних амплификатора, на чије динамичке карактеристике се може
утицати одабиром вредности различитих структурних параметара. На Сл. 3.7 је приказан
модел првог инерцијалног амплификатора (ИА1), а на Сл. 3.9 други модел инерцијалног
амплификатора (ИА2). Један од параметера којима је дефинисана геометрија оба моде-
ла је угао θ . Услед претпоставке о малим осцилацијама може се сматрати да је у току
кретања $\theta = const$, а одабиром његове вредности се може значајно утицати на дисперзну
карактеристику периодичне структуре.

На Сл. 3.25 приказани су резултати за ИА1, за $\theta = 10^\circ$ и $\theta = 70^\circ$. Може се приметити
да ИА1 такође омогућава контролу над ширином зауставних зона на свим фреквентним
нивоима. При релативно малим вредностима угла θ , зоне заустављања које настају услед

Бреговог расејања се шире, као што је приказано на Сл. 3.25а. За разлику од инертера, чијом употребом се може постићи само ширење одговарајућих зауставних зона, повећањем вредности угла θ код ИА1 постиже се и супротан ефекат (Сл. 3.25б).



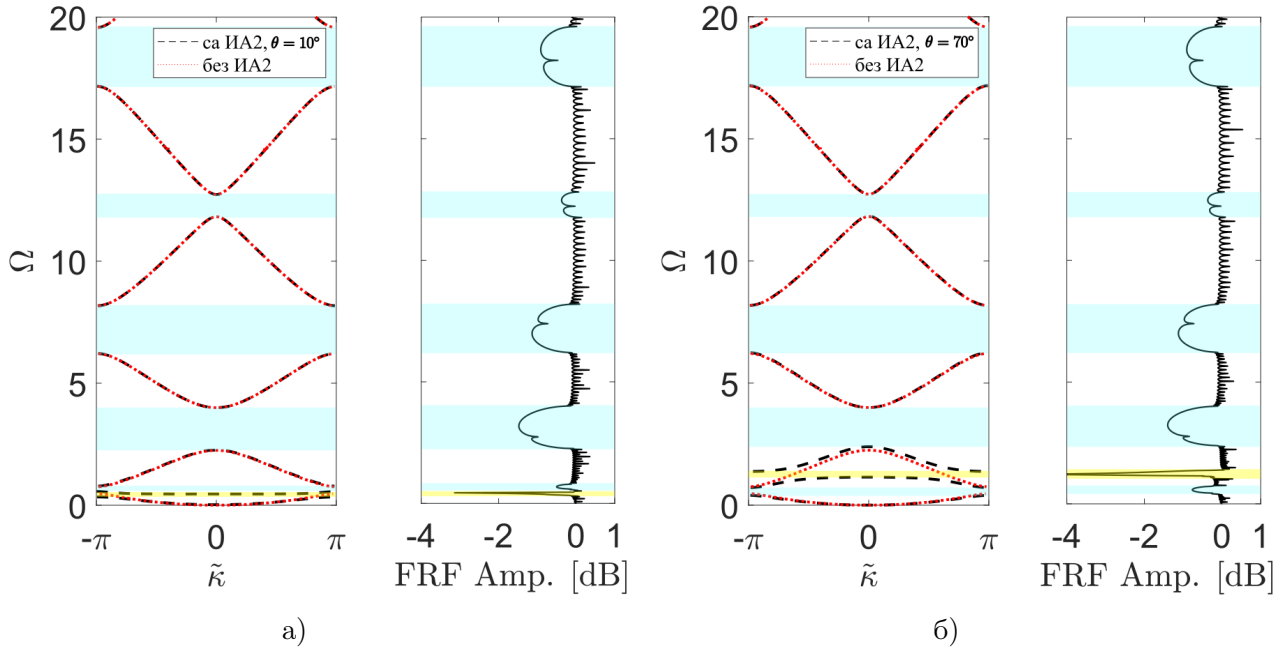
Слика 3.25: Дијаграми дисперзне карактеристике и функције фреквентног одзива померања за први модел инерцијалног амплификатора. Поређењем са резултатима за структуру без ДМП (означених црвеном бојом), уочава се да: а) за угао $\theta = 10^\circ$ долази до значајног ширења БРЗЗ, као и до појаве ЛРЗЗ релативно малог фреквентног опсега (осенчено жутом бојом), б) за угао $\theta = 70^\circ$ долази до супротног ефекта када су у питању БРЗЗ, док се јавља значајно шира ЛРЗЗ на вишем фреквентном нивоу.



Слика 3.26: Дијаграми дисперзне карактеристике за ИА1 на нижем фреквентном опсегу, при $\theta = 10^\circ$ и $\theta = 70^\circ$, као и дијаграм трансформације ЛРЗЗ и најниже БРЗЗ при постепеном повећавању угла у распону $\theta \in [10^\circ, 70^\circ]$.

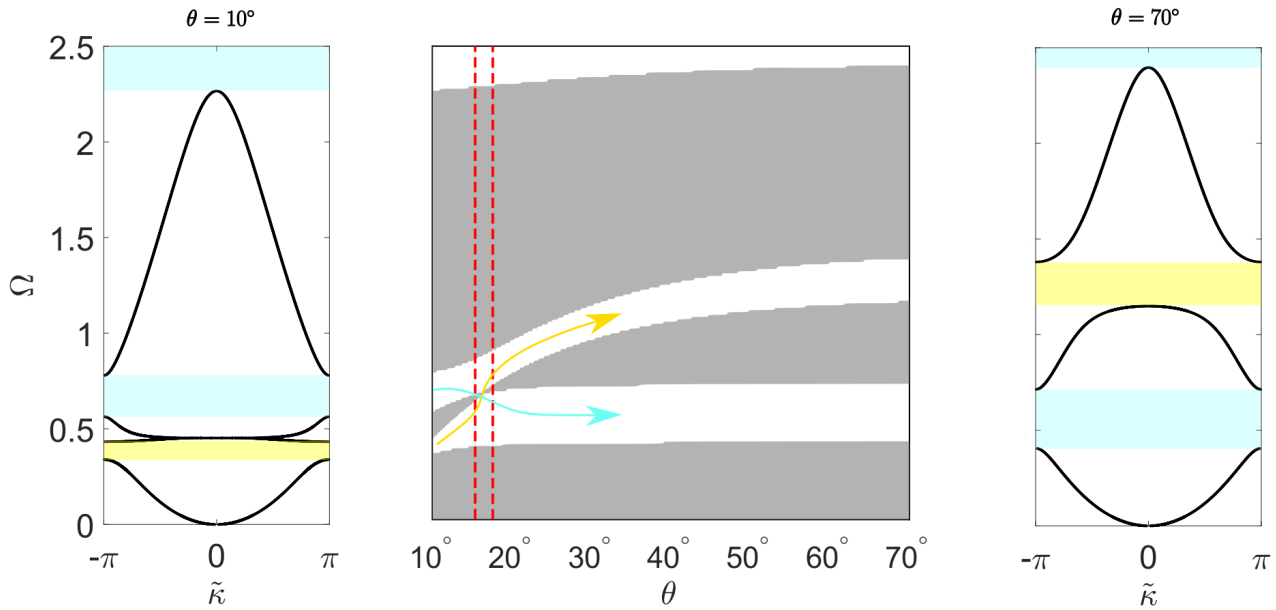
Међутим, интересантан је и утицај који ИА1 има на нижим фреквенцијама, где се јавља зона заустављања до које долази услед локалне резонанције. Нижи фреквентни опсег приказан је на Сл. 3.26, као и дијаграм на коме се види да при постепеном повећавању угла у распону $\theta \in [10^\circ, 70^\circ]$ долази до трансформације ЛРЗЗ и најниже БРЗЗ, при чему се мења њихова величина и положај. На дијаграму дисперзне карактеристике који одговара углу $\theta = 10^\circ$ се може видети да се ЛРЗЗ налази испод БРЗЗ, док је за $\theta = 70^\circ$ ЛРЗЗ вишеструко ширег опсега и то на вишем фреквенцијском нивоу од БРЗЗ. Дакле, при повећавању угла θ долази до ширења ЛРЗЗ и њеног подизања на виши фреквентни ниво, што је симболично обележено стрелицама одговарајуће боје. За зоне заустављања које настају услед локалне резонанције је уобичајена мала ширина фреквентног опсега, а у литератури су представљене различите стратегије којима се може постићи њено увећање, пре свега уз помоћ већег броја истих или различитих масених резонатора у оквиру јединичне ћелије, при чему се може остварити већа ширина ЛРЗЗ која се налази у околини њихове сопствене фреквенције осциловања [60]. Употребом ИА1 за веће вредности угла θ долази до смањења ширине БРЗЗ, али се постиже много већа ширина ЛРЗЗ, при чему се такође мења и фреквенцијски ниво на коме се она налази. Тиме су остварени значајни ефекти на нижим фреквенцијским нивоима, и то без великог увећања масе система до кога би дошло коришћењем великог броја масених резонатора.

На Сл. 3.26 се такође може видети да за $\theta \approx 18^\circ$ (обележено црвеном испрекиданом линијом) долази до формирања зоне заустављања најширег фреквентног опсега, услед привидног спајања зауставних зона насталих на основу различитих механизма [70]. За све вредности угла θ БРЗЗ остаје на истом фреквентном нивоу, а угао θ не утиче на њену ширину: и у овом случају је у погледу Бреговог расејања доминантан утицај контраста између материјалних карактеристика греда у јединичној ћелији.



Слика 3.27: Дијаграми дисперзне карактеристике и функције фреквентног одзива померања за други модел инерцијалног амплификатора, за: а) $\theta = 10^\circ$, б) $\theta = 70^\circ$. Поређењем са резултатима за структуру без ДМП, уочава се да услед присуства ИА2 долази само до појаве ЛРЗЗ на нижим фреквенцијама.

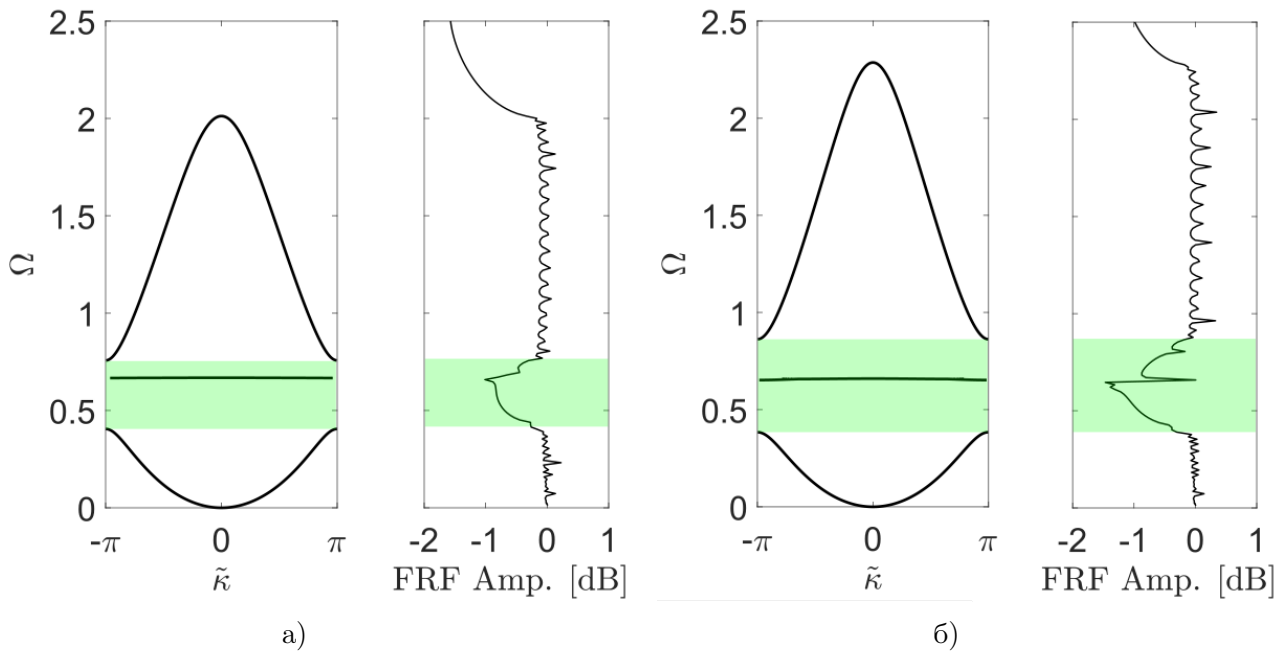
На Сл. 3.27 приказани су резултати за ИА2, за $\theta = 10^\circ$ и $\theta = 70^\circ$. Поређењем са резултатима који су одређени за систем без ДМП, очигледно је да присуство ИА2 не утиче на дисперзну карактеристику на вишим фреквентним нивоима. Разматрани модели инерцијалног амплификатора суштински се разликују у томе што је други крај ИА2 фиксиран за непокретну тачку. У том смислу, систем таквих ДМП представља подлогу на коју се ослања структура која се састоји од еластичних греда и крутих тела. Разлике у ефектима које ти модели инерцијалног амплификатора имају на дисперзну карактеристику структуре могу се уочити поређењем силе којом ИА1 делује у тачки везивања (3.65) са силом одређеном за ИА2 (3.70). Може се закључити да су код ИА2 бројилац и именилац пропорционални у погледу квадрата кружне фреквенције, налик сили која се јавља код масеног резонатора (3.48), док код ИА1 то није случај (при чему се може уочити аналогија са силом која се јавља код инертера). Самим тим је код инертера и првог модела инерцијалног амплификатора на вишим фреквенцијама тај утицај израженији.



Слика 3.28: Дијаграми дисперзне карактеристике за ИА2 на нижем фреквентном опсегу, при $\theta = 10^\circ$ и $\theta = 70^\circ$, као и дијаграм трансформације ЛРЗЗ и најниже БРЗЗ при постепеном повећавању угла у распону $\theta \in [10^\circ, 70^\circ]$.

Међутим, други модел инерцијалног амплификатора даје интересантне резултате на нижим нивоима фреквенције. С обзиром на доминантан утицај различитих материјалних карактеристика греда, максимална ширина БРЗЗ, која се може видети за случај када је $\theta = 70^\circ$, је иста у поређењу са резултатима добијеним за ИА1. Зона заустављања услед локалне резонанције која настаје у том случају је нешто мањег фреквентног опсега, али је у поређењу са резултатима добијеним за резонатор једнаке статичке масе знатно шири. На Сл. 3.28 се може уочити да је њена ширина приближно константна за сваку вредност угла θ . Избором параметра θ може се одредити и фреквенцијски ниво на којем се она налази. Дакле, уз помоћ ИА2 могуће је постићи већу ширину ЛРЗЗ, као при формирању јединичне ћелије са већим бројем масених резонатора, чиме се ефективно повећава број степени слободе, али уз додатну могућност избора фреквентног нивоа на коме се она налази [60]. Као и у случају масеног резонатора, услед осциловања ИА2 долази до расипања енергије механичких таласа одређених фреквенција, што доводи до појаве зоне заустављања. На Сл. 3.28 се може уочити један релативно мали опсег вредности угла θ , на коме долази до привидног спрезања зауставних зона које се разликују по механизму њиховог настанка.

На Сл. 3.29 су упоредо приказани дијаграми дисперзне карактеристике и функције фреквентног одзива померања за два разматрана модела, у случају када је $\theta = 16^\circ$. Може се приметити да је величина зоне заустављања која настаје привидним спрезањем БРЗЗ и ЛРЗЗ значајно већа у случају ИА2.

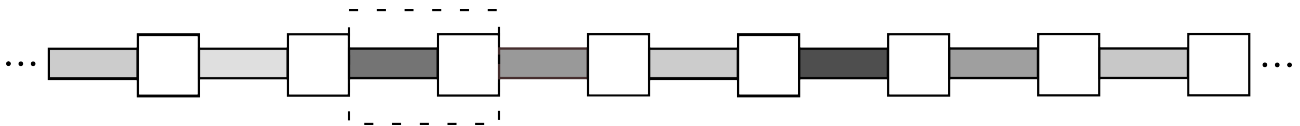


Слика 3.29: Дијаграми дисперзне карактеристике и функције фреквентног одзива померања за први и други модел инерцијалног амплификатора за $\theta = 16^\circ$. У оба случаја долази до привидног спајања ЛРЗЗ и БРЗЗ. У случају ИА2 настала зауставна зона је значајно већа у односу на саму БРЗЗ која постоји и у случају без ДМП.

Дакле, коришћењем првог модела инерцијалног амплификатора може се утицати на дисперзну карактеристику система на свим фреквентним нивоима, док се услед коришћења другог модела формира само зауставна зона као последица локалне резонанције. Поређењем израза (3.65) и (3.70), може се приметити да се у бројиоцу израза (3.65) кружна фреквенција јавља са два степена више него у имениоцу. Услед тога први модел инерцијалног амплификатора има утицај на дисперзну карактеристику на целокупном фреквентном опсегу. Међутим, одговарајућим одабиром параметара инерцијалног амплификатора на нижим фреквенцијским нивоима је могуће довести до привидног спајања суседних зауставних зона које настају услед Бреговог расејања и локалне резонанције. Тиме се, у случају другог модела инерцијалног амплификатора, може се постићи знатно већа ширина остварене зауставне зоне него што је то случај код првог модела.

4 Квазипериодичне структуре које се састоје од редно везаних еластичних греда и крутих тела

Разматра се структура која настаје понављањем геометријске целине сачињене од греде и крутог тела, као што је приказано на Сл. 4.1. Између тих целина које се понављају постоје релативно мале разлике које су одређене на основу задатог обрасца. На тај начин се у периодичну структуру уводи контролисана (дизајнирана) неуређеност, а настала аperiodична структура се у литератури назива квазипериодичном [84-92]. У обрасцу на основу кога се формира квазипериодична структура фигурише такозвани параметар квазипериодичности θ , који се задаје у распону $\theta \in [0, 1]$. Свакој вредности параметра одговара јединствена структура, а све оне заједно чине фамилију таквих квазипериодичних структура.



Слика 4.1: Пример квазипериодичне структуре, формиране понављањем геометријске целине која је сачињена од еластичне греде и крутог тела (уоквирено испрекиданом линијом). Материјалне карактеристике греда разликују се на дефинисан начин, чиме је у структуру уведена контролисана неуређеност.

Показано је да су квазипериодичне структуре такође дисперзивне, а нарочито је важна зависност њихове дисперзне карактеристике од параметра квазипериодичности [88,89]. Како би се та зависност приказала на дијаграму, за сваку вредност параметра θ се могу одредити сопствене фреквенције осциловања система, као и функција фреквентног одзива померања на одређеном фреквентном опсегу [85,86,88].

С обзиром на то да се сопствене фреквенције осциловања јављају само у зонама проводног опсега, док су амплитуде фреквентног одзива знатно ниже у зонама зауставног опсега, на добијеном дијаграму се за сваку вредност параметра θ могу разликовати распони фреквенција у којима се налазе зоне пропагације и зоне заустављања.

Карактеристичан облик таквог дијаграма подсећа на чувени Хофстадтеров лептир, тј. фрактални спектар који се јавља у квантној механици при проучавању електрона у присуству магнетног поља [88,89]. У контексту представљених истраживања, важно је истаћи да се у оквиру препознатљивог облика лептира налазе зоне заустављања.

За квазипериодичне структуре је такође карактеристична појава такозваних граничних стања (*edge states*), тј. локализације одређених модова осциловања на крајевима и границама разматраних механичких система. Локализација мода се манифестује наглим порастом његове амплитуде на крајевима (границама) структуре [89]. Сопствене фреквенције којима одговарају такви модови осциловања се могу одредити управо уз помоћ поменутих дијаграма. Оне одговарају дискретним дисперзним кривама које пролазе кроз зоне заустављања, а налазе се у оквиру уоченог облика лептира [85]. Облик мода осциловања квазипериодичне структуре за сопствене фреквенције које се налазе у оквиру зауставних зона указује на то да долази до локализације таласа на крају структуре, док је у њеном остатку талас пригушен. Појава локализације таласа се може употребити за спречавање неких потенцијално штетних дејстава, а примену је нашла и у прикупљању енергије [88,16-18].

4.1 Образац и процедура формирања фамилије квазипериодичних структура

При формирању квазипериодичне структуре која се састоји од n јединичних ћелија, може се употребити хармонијска функција чији аргумент зависи од параметра квазипериодичности θ , као и од редног броја ($j = 1, 2, \dots, n$) јединичне ћелије у систему:

$$f(\theta, j) = 1 + \gamma \cos(2\pi\theta j + \phi), \quad (4.1)$$

где је γ коефицијент којим је одређено максимално увећање одабране карактеристике у односу на њену референтну вредност, а ϕ је фазни померај.

Применом обрасца (4.1) се за једну вредност параметра θ , врши модулација одабране карактеристике P јединичне ћелије:

$$P_j(\theta) = P [1 + \gamma \cos(2\pi\theta j + \phi)]. \quad (4.2)$$

За сваку јединичну ћелију се затим може одредити њена трансфер матрица, која се трансформише у динамичку матрицу крутости. Након тога следи формирање глобалне матрице крутости квазипериодичне структуре $\mathbf{D}_G$. Глобална матрица крутости која је одређена на тај начин одговара једној вредности параметра θ , а зависи од фреквенције.

4.2 Нумерички прорачуни

Разматра се квазипериодична структура која се састоји од коаксијалних еластичних греда између којих се налазе крута тела, као што је приказано на Сл. 4.1. За случај када је $\theta = 0$ структура је периодична и састоји се од идентичних греда дужине $L = 2,5$ m и квадратног попречног пресека странице $d = 0,25$ m. Материјалне карактеристике греде су: $E = 70$ GPa, $G = 26$ GPa и $\rho = 2713$ kg/m³. Круто тело је облика квадрата странице $D = 0,3$ m, а његова маса је одређена као 25% масе греде, тј. $m = \rho AL/4$, где је A површина попречног пресека греде. Фреквенције су на свим дијаграмима приказане у бездимензијском облику:

$$\Omega = \frac{\omega \Lambda^2}{2\pi \varsigma R_g}.$$

Ради сажетијег излагања, у даљем тексту ће бити изостављен термин „бездимензиони“.

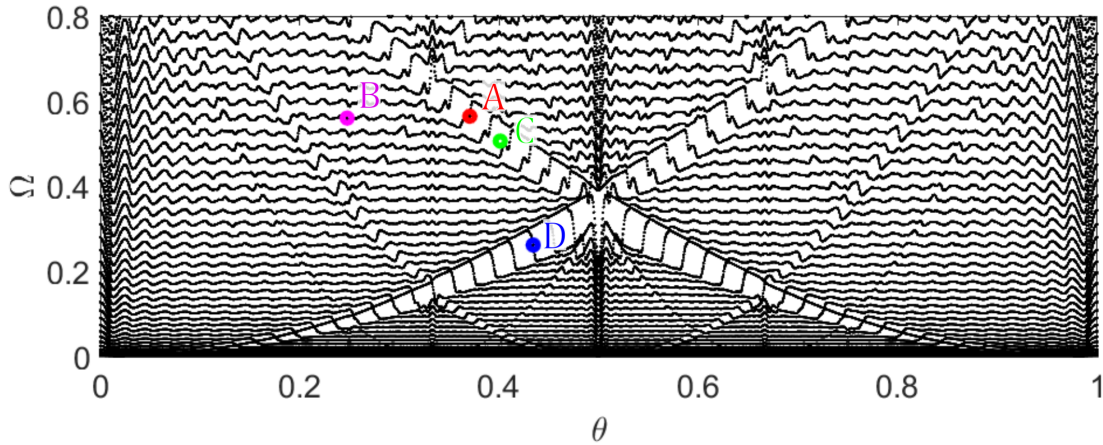
У оквиру сваког прорачуна формирана је фамилија од 1000 квазипериодичних структура, дакле, за 1000 вредности параметра квазипериодичности $\theta \in [0, 1]$. Фазни померај је одређен дељењем угла од 2π rad са бројем јединичних ћелија у систему, тј. $\phi = 2\pi/n$. Такође је узето да је коефицијент $\gamma = 0,7$, те се модулацијом одабраних карактеристика постиже да оне буду 70% веће или мање од њихове референтне вредности.

Сопствене фреквенције квазипериодичне структуре могу се одредити на основу (2.23), при чему се користи метода бисекције на одређеном фреквентном опсегу, при чему је дозвољена релативна грешка $\delta = 1\%$.

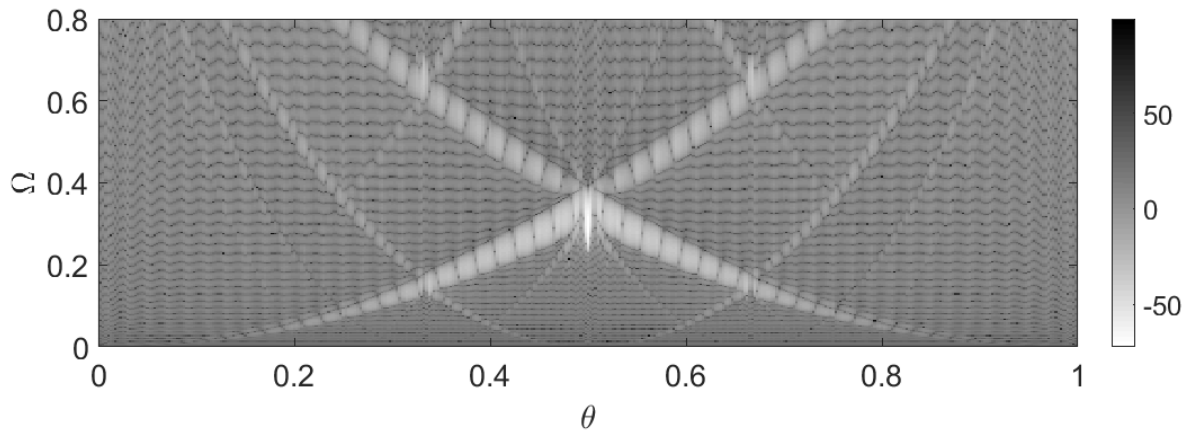
Функција фреквентног одзива померања одређена је на основу (2.21) (са дејством побуде на десном крају структуре), при чему се формира тродимензионални дијаграм, на коме се на апсциси налази параметар квазипериодичности θ , а на ординати фреквенција Ω , док трећу димензију представља амплитуда ФФОП, која је представљена различитим нијансама од беле до црне на легенди приказаној са десне стране дијаграма. Вектор померања, одређен за карактеристичне парове параметра квазипериодичности и фреквенције, може се искористити за визуализацију модова осциловања.

4.2.1 Пример квазипериодичне структуре са варијацијом модула еластичности греда

Уколико се, према обрасцу (4.1) изврши варијација модула еластичности греда у структури приказаној на Сл. 4.1, сачињеној од n јединичних ћелија, могу се одредити сопствене фреквенције за сваку структуру из фамилије таквих квазипериодичних структура одређених параметром квазипериодичности θ . Сопствене фреквенције осциловања квазипериодичне структуре за сваку вредност параметра θ приказане су на Сл. 4.2. У виду валидације резултата приказаних на Сл. 4.2, одређене су и функције фреквентног одзива померања за квазипериодичне структуре које одговарају свакој од вредности параметра θ , које су приказане у виду дијаграма на Сл. 4.3. Поређењем дијаграма на Сл. 4.2 и 4.3, може се приметити да постоји одлично слагање добијених резултата.



Слика 4.2: Дијаграми сопствених фреквенција за сваку вредност из опсега параметра квазипериодичности, за структуре од $n = 50$ јединичних ћелија, са варијацијом модула еластичности.

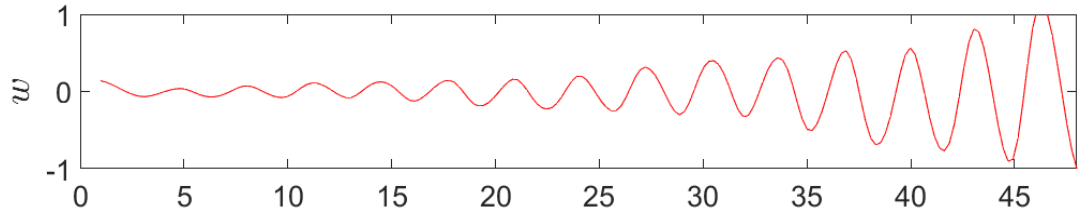


Слика 4.3: Дијаграми функција фреквентног одзива померања за сваку вредност из опсега параметра квазипериодичности, за структуре од $n = 50$ јединичних ћелија, са варијацијом модула еластичности.

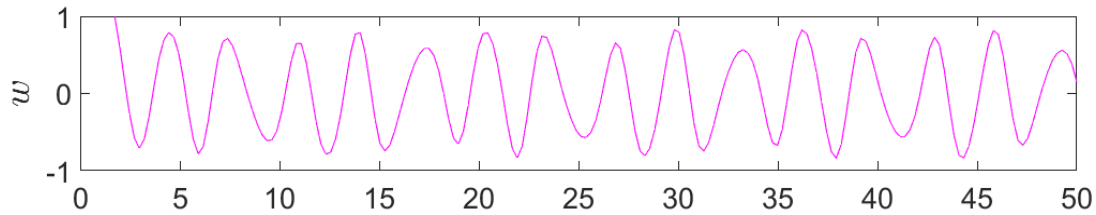
Фрактални спектар који подсећа на Хофстадтеровог лептира представља зоне заустављања у оквиру којих се могу приметити и дискретне гране проводних модова. На Сл. 4.2 су приказане четири карактеристичне тачке, означене различитим бојама. Тачке А и D означавају сопствене фреквенције које се налазе на две различите дискретне гране које пролазе кроз одговарајуће зоне заустављања. Тачком В је означена сопствена фреквенција

која се налази у проводном фреквентном опсегу, за квазипериодичну структуру одређену одговарајућим параметром θ . Тачка C означава произвољну тачку у зони заустављања.

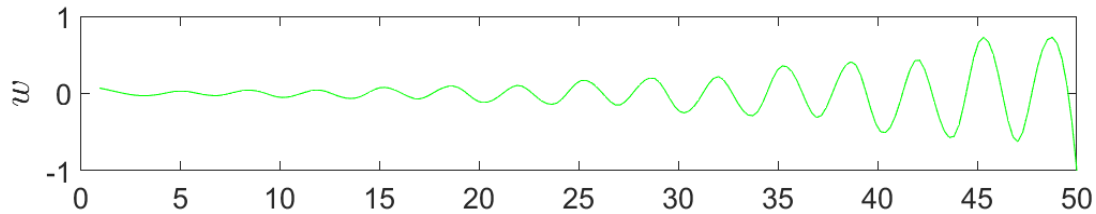
За облик мода који одговара тачки D , приказаном на Сл. 4.7, може се приметити да долази до изражене локализације таласа на десном крају структуре. Када је реч о модовима осциловања који одговарају тачкама A и C , приказаним на Сл. 4.4 и 4.6, може се приметити да долази до значајног пригушења. Локализација таласа је очекивана за тачку A , као и за тачку D , те се може закључити да је на нижим фреквенцијама локализација таласа много израженија. С обзиром на то да се тачка B односи на сопствену фреквенцију која лежи у оквиру проводног опсега, на Сл. 4.5 се може приметити да се механички талас неометано простире кроз структуру.



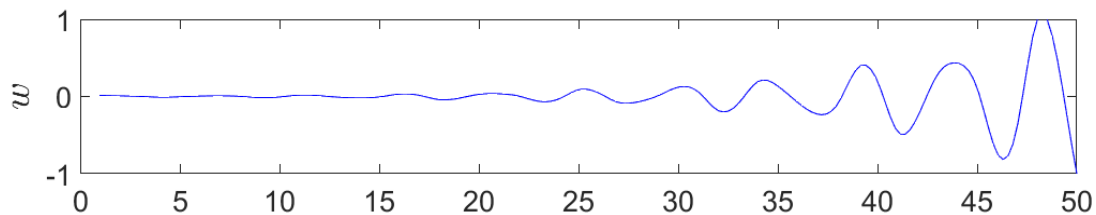
Слика 4.4: Облик мода квазипериодичне структуре ($n = 50$), за тачку A која одговара параметру квазипериодичности $\theta = 0,37069$ и фреквенцији $\Omega = 0,56474$.



Слика 4.5: Облик мода квазипериодичне структуре ($n = 50$), за тачку B која одговара параметру квазипериодичности $\theta = 0,24762$ и фреквенцији $\Omega = 0,56029$.

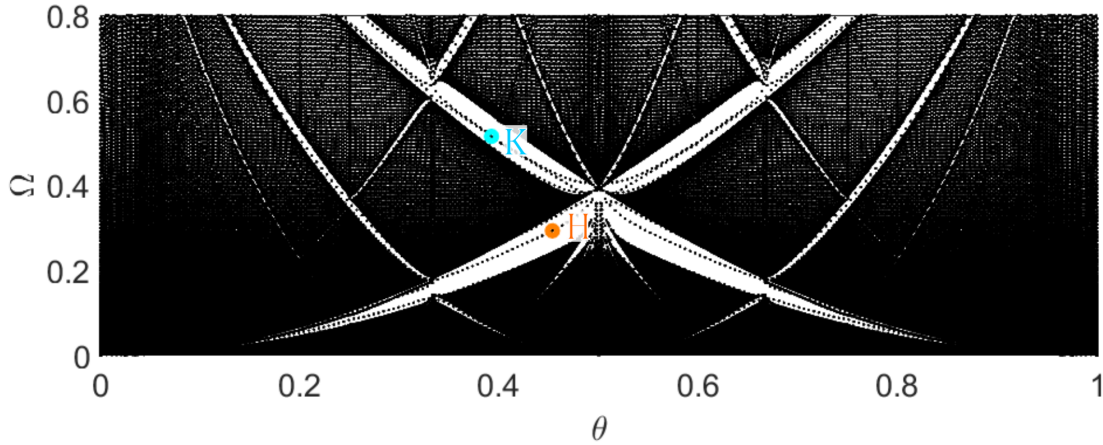


Слика 4.6: Облик мода квазипериодичне структуре ($n = 50$), за тачку C која одговара параметру квазипериодичности $\theta = 0,4012$ и фреквенцији $\Omega = 0,50626$.

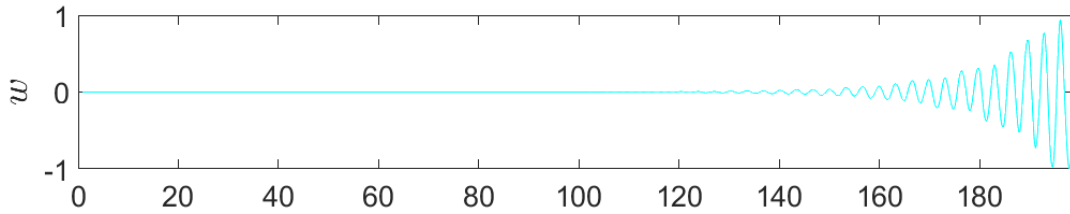


Слика 4.7: Облик мода квазипериодичне структуре ($n = 50$), за тачку D која одговара параметру квазипериодичности $\theta = 0,43422$ и фреквенцији $\Omega = 0,26214$.

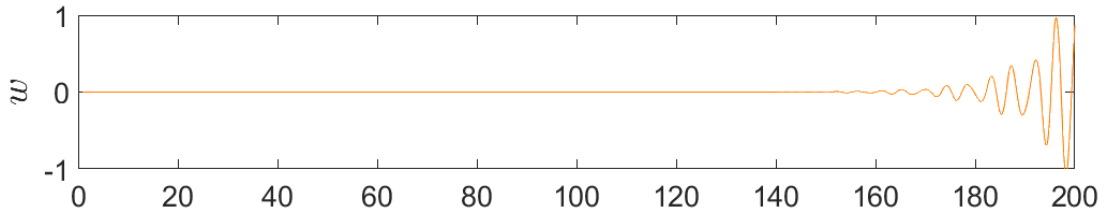
На Сл. 4.8 приказани су резултати за структуру сачињену од 200 јединичних ћелија. Са порастом броја ћелија у механичком систему, динамичке карактеристике се приближавају карактеристикама бесконачне структуре, при чему се јављају гранични модови, у виду дискретних грана сопствених фреквенција које се протежу дуж целе зоне заустављања. Обележене су две тачке, К и Н, које се односе на парове параметара квазипериодичности и сопствених фреквенција за које је очекивана појава граничног мода осциловања који показује изузетно јаку локализацију. На Сл. 4.9 приказан је облик мода који се односи на тачку К, док је на Сл. 4.10 приказан облик мода који се односи на тачку Н. Може се приметити да је у овом случају локализација таласа знатно израженија, као и да је такође знатно мања дужина локализације на нижим фреквенцијама.



Слика 4.8: Дијаграм сопствених фреквенција одређених за фамилију квазипериодичних структура које се састоје од $n = 200$ јединичних ћелија, са варијацијом модула еластичности.



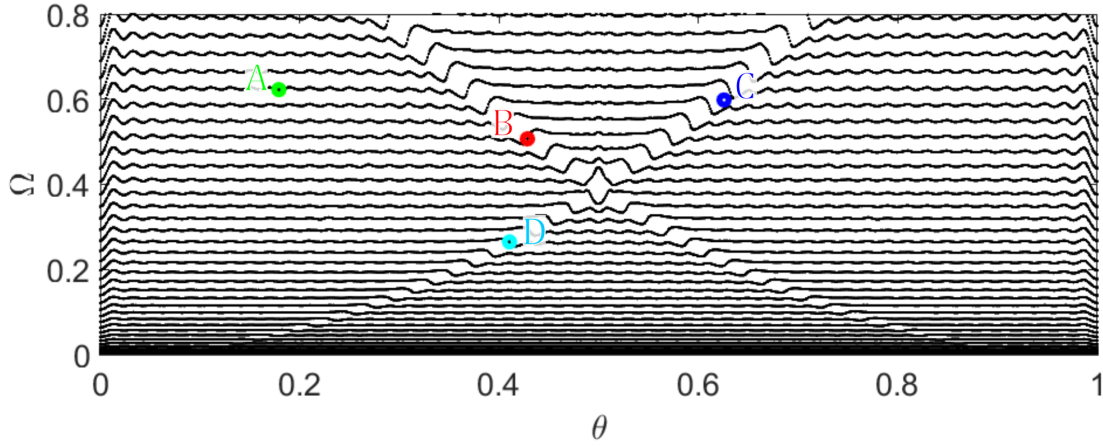
Слика 4.9: Облик мода квазипериодичне структуре ($n = 200$), за тачку К која одговара параметру квазипериодичности $\theta = 0,39239$ и фреквенцији $\Omega = 0,51514$.



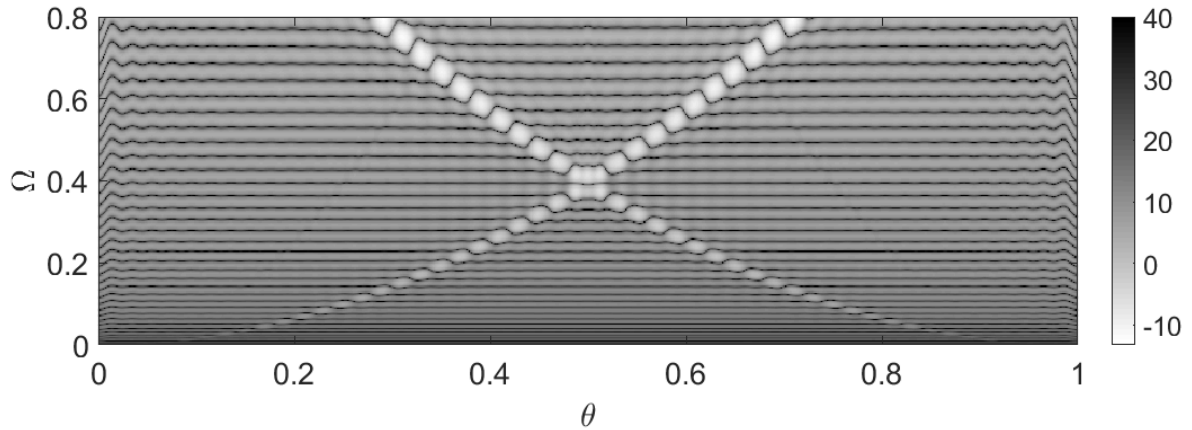
Слика 4.10: Облик мода квазипериодичне структуре ($n = 200$), за тачку Н која одговара параметру квазипериодичности $\theta = 0,45345$ и фреквенцији $\Omega = 0,29325$.

4.2.2 Пример квазипериодичне структуре са варијацијом масе крутог тела

Уколико се, према обрасцу (4.1) изврши варијација масе крутог тела у структури сачињеној од n јединичних ћелија, могу се одредити сопствене фреквенције за сваку квазипериодичну структуру одређену параметром квазипериодичности θ . Сопствене фреквенције осциловања квазипериодичне структуре за сваку вредност параметра θ приказане су на Сл. 4.11. У виду валидације резултата приказаних на Сл. 4.11, одређене су и функције фреквентног одзива померања за квазипериодичне структуре које одговарају свакој од вредности параметра θ , које су приказане у виду дијаграма на Сл. 4.12. Поређењем дијаграма на Сл. 4.11 и 4.12, може се приметити да постоји одлично слагање добијених резултата.



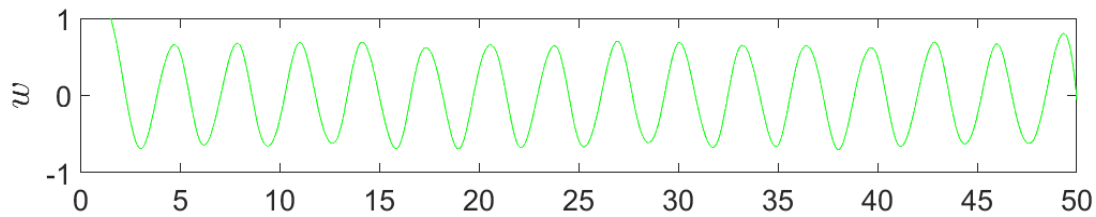
Слика 4.11: Дијаграми сопствених фреквенција за сваку вредност из опсега параметра квазипериодичности, за структуре од $n = 50$ јединичних ћелија, са варијацијом масе крутог тела.



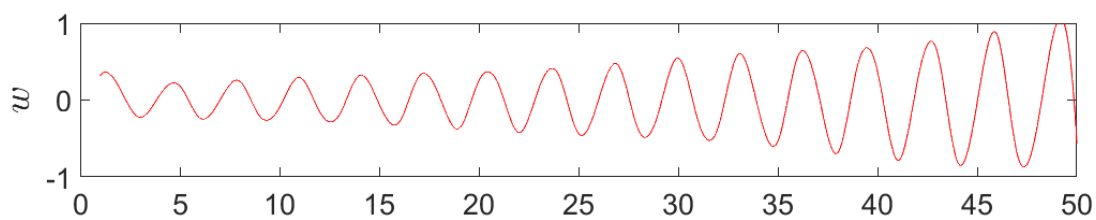
Слика 4.12: Дијаграми функција фреквентног одзива померања за сваку вредност из опсега параметра квазипериодичности, за структуре од 50 јединичних ћелија, са варијацијом масе крутог тела.

На Сл. 4.11 су приказане четири карактеристичне тачке, означене различитим бојама. Тачком А је означена сопствена фреквенција која се налази у проводном фреквентном опсегу, за квазипериодичну структуру одређену одговарајућим параметром θ . Тачке В и Д означавају сопствене фреквенције које се налазе на две различите дискретне гране које пролазе кроз одговарајуће зоне заустављања. Тачка С означава произвољну тачку у зони заустављања.

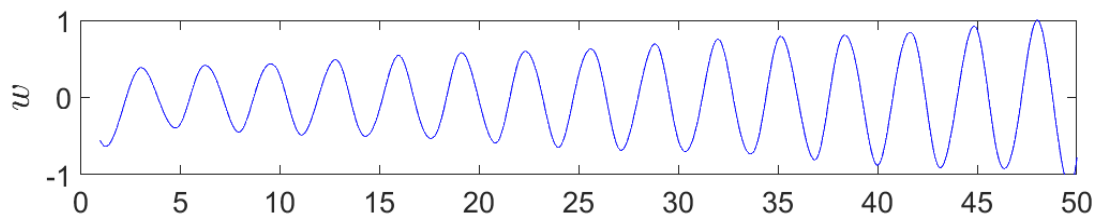
На Сл. 4.13 приказан је мод осциловања за тачку A , при чему се може приметити да је у зони проводног опсега фреквенција дозвољено неометано простирање механичког таласа. Дијаграми на Сл. 4.14, 4.15 и 4.16, приказују облике мода који одговарају тачкама A , B и D . Може се закључити да у сва три случаја долази до пригушења механичког таласа, мада локализација није изражена за било који од њих.



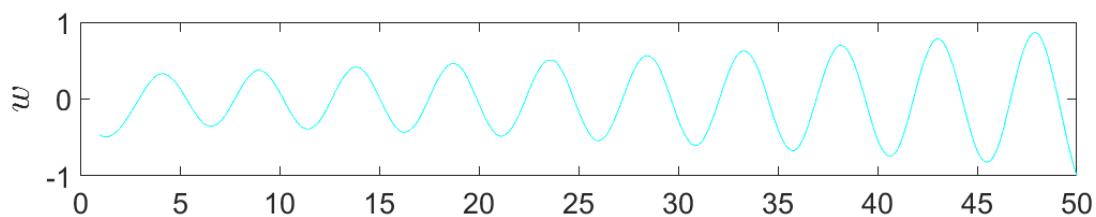
Слика 4.13: Облик мода квазипериодичне структуре за тачку A .



Слика 4.14: Облик мода квазипериодичне структуре за тачку B .

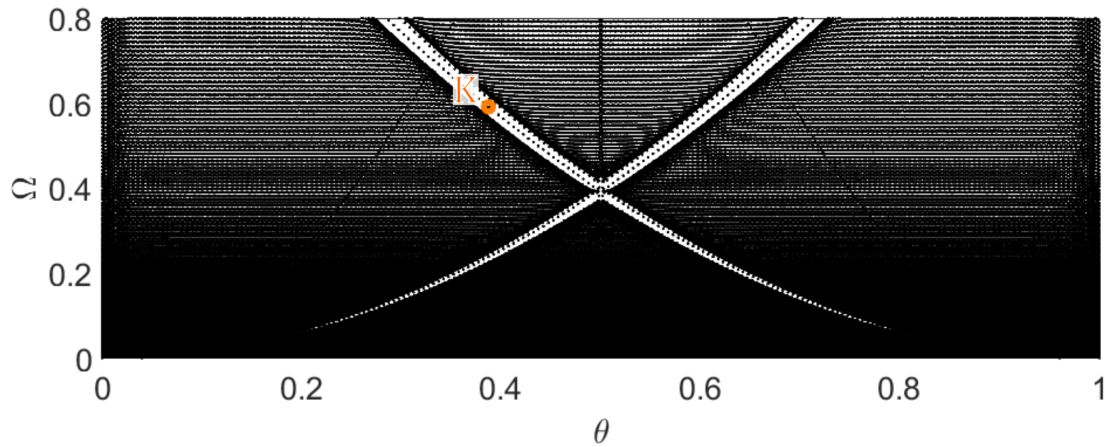


Слика 4.15: Облик мода квазипериодичне структуре за тачку C .

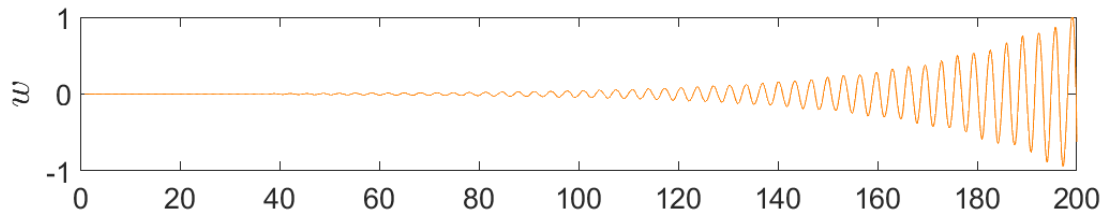


Слика 4.16: Облик мода квазипериодичне структуре за тачку D .

На Сл. 4.17 приказани су резултати за структуру сачињену од 200 јединичних ћелија. Обележена је тачка K која се налази на дискретној грани сопствених фреквенција која се протеже кроз зону заустављања, а за коју је очекивана појава граничног мода осциловања. На Сл. 4.18 приказан је облик мода који се односи на тачку K и може се приметити да је и у овом случају изражена локализација таласа на десном крају квазипериодичне структуре, мада у мањој мери у односу на случај приказан на Сл. 4.9 (за квазипериодичну структуру код које је вршена варијација модула еластичности).



Слика 4.17: Дијаграм сопствених фреквенција одређених за фамилију квазипериодичних структура које се састоје од 200 јединичних ћелија, са варијацијом масе крутог тела.



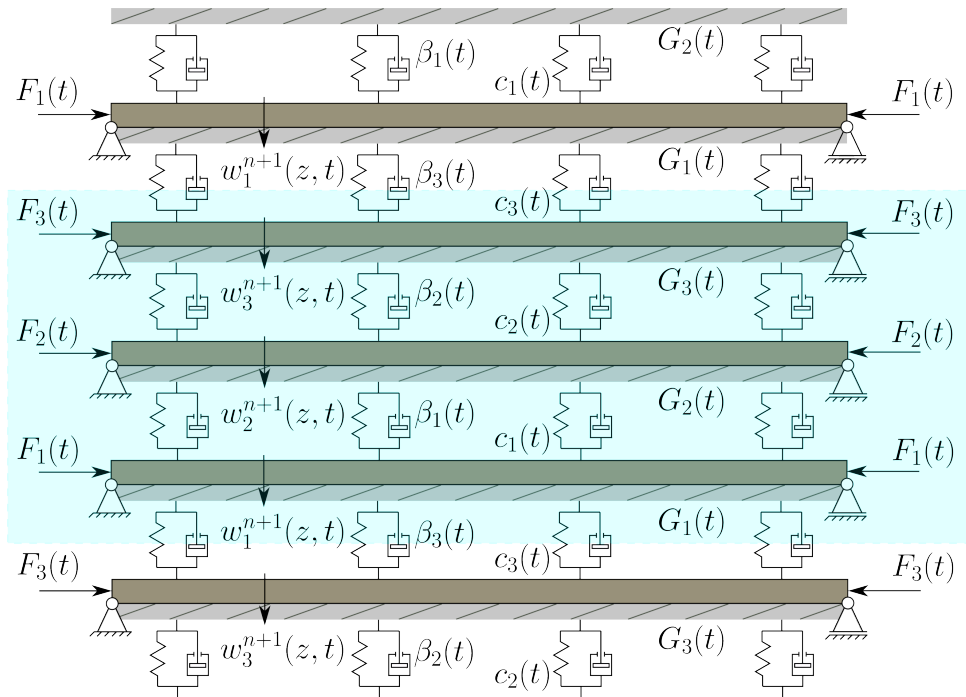
Слика 4.18: Облик мода квазипериодичне структуре за тачку К.

Поређењем дијаграма приказаних на Сл. 4.2 и 4.11, као и на Сл. 4.8 и 4.17, може се закључити да је фрактални спектар знатно израженији у случају варијације модула еластичности (крутости греда). Такви резултати су очекивани с обзиром на то да је у претходном поглављу на Сл. 3.11а и 3.12а показано да маса крутог тела знатно мање утиче на дисперзне карактеристике разматраних структура, него разлика у материјалним карактеристикама еластичних греда. Поређењем резултата добијених варијацијом крутости греда и масе крутих тела може се приметити да основна структура фракталног спектра зависи од материјалних карактеристика механичког система.

За разлику од аperiodичних неуређених система, квазипериодичне структуре карактерише контролисана неуређеност, те су њихове карактеристике предвидиве и могу се искористити за функционални дизајн, уз примену у виду механичких филтера, система за изолацију од нежељених вибрација, као и за прикупљање енергије [88,90-92]. У претходним разматрањима је показано да је код периодичних структура, ради постизања зона заустављања на жељеном фреквентном опсегу, потребно водити рачуна о одговарајућем контрасту између материјалних и геометријских карактеристика на границама између јединичних ћелија, као и у оквиру саме једичне ћелије. Међутим, код квазипериодичних структура се уз помоћ добијеног фракталног спектра може одабрати жељени положај зона заустављања, као и присуство локализације таласа или граничног мода, на основу одговарајуће вредности параметра квазипериодичности.

5 Периодичне структуре које се састоје од еластичних греда спрегнутих дискретним механичким елементима са еластичним и вискоеластичним својствима

Разматра се систем паралелних Ојлер-Бернулијевих греда истоветних карактеристика, које су међусобно повезане и аксијално оптерећене. Свака гредa је левим крајем везана за непокретни ослонац, док је десним крајем везана за покретни ослонац. Представљена су три случаја, када су гредe повезане Пастернаковим вискоеластичним слојевима, Пастернаковим еластичним слојевима, као и Винклеровим еластичним слојевима [23,109]. На Сл. 5.1 је приказан пример описаног система греда повезаних Пастернаковим вискоеластичним слојевима [23].



Слика 5.1: Схематски приказ дела система паралелних греда повезаних Пастернаковим вискоеластичним слојевима [23]. Јединична ћелија се састоји од три узастопне гредe (део освенчен плавом бојом).

С обзиром на то да се разматрају витке гредe, парцијалне диференцијалне једначине кретања греда изведене су на основу Ојлер-Бернулијеве теорије (занемарују се ефекти смицања и ротације попречних пресека при трансверзалним осцилацијама греда) [112]. Утицај слојева којима су гредe повезане разматра се у виду континуалног оптерећења које делује на гредe.

У оквиру разматраних периодичних структура може се уочити јединична ћелија која се састоји од три гредe у низу, назначене индексом r , а које су оптерећене аксијалним силама F_r , $r = 1, 2, 3$. Узастопно нанизане јединичне ћелије формирају просторно периодичну фоновску структуру [23]. Дакле, свака трећа гредa у јединичној ћелији повезана је са првом гредом у наредној јединичној ћелији.

Поред просторне периодичности, разматра се и периодичност у времену која се постиже модулацијом одређених параметара [23]. Аксијалне силе које делују на гредe у јединичној

ћелији представљене су хармонијским функцијама времена. Сматра се да је аксијална сила константна дуж целе греде [23,1]. Временском модулацијом аксијалне силе може се постићи и посредна временска модулација крутости греде [23,2,113]. Фазни померај зависи од индекса којим је назначена свака греда, те се самим тим и разликује за сваку греду у ћелији [23]:

$$F_r(t) = F_0 \left[1 + \delta_m \cos \left(\omega_m t + \frac{2\pi r}{3} \right) \right], \quad (5.1)$$

где је F_0 интензитет аксијалне силе без модулације, δ_m је амплитуда, а ω_m је кружна фреквенција хармонијске модулације. Односом периода просторне модулације λ_m и периода временске модулације $T_m = 2\pi/\omega_m$ одређена је брзина простирања „таласа” модулације $v_m = \lambda_m/T_m$ [23,31,20]. Дакле, хармонијска модулација параметара у времену се може замислити као талас модулације који се креће брзином v_m у једном смеру [20]. На исти начин се врши и модулација параметара којима су одређене особине материјала слојева између греда, а који ће бити разматрани накнадно. С обзиром на то да је просторни период једнак дужини јединичне ћелије λ_m , брзина простирања таласа модулације зависи од одабира параметра бездимензионе кружне фреквенције модулације ω_m . Пошто се структурне карактеристике мењају истовремено са проласком механичког таласа кроз њу, могуће је подесити параметре модулације тако да дође до деструктивне интерференције механичких таласа само у једном смеру.

На основу (2.38), парцијална диференцијална једначина кретања r -те греде у јединичној ћелији је:

$$\frac{\partial^4 w_r(z, t)}{\partial z^4} + \ddot{w}_r(z, t) + F_r(t) \frac{\partial^2 w_r(z, t)}{\partial z^2} + Q_r(t) = 0, \quad (5.2)$$

где $Q_r(t)$ представља континуално оптерећење које потиче од слојева између греда, а које је константно у односу на просторну координату z . На основу структуре разматраних система, а ради једноставнијег записа, просторна координата обележена је универзалном ознаком која се односи на подужну координату сваке греде у јединичној ћелији.

Парцијална диференцијална једначина греде може се свести на бездимензиони облик увођењем бездимензионог временског и просторног параметра [23,31]:

$$\tau = \chi t, \quad \chi = \frac{1}{L^2} \sqrt{\frac{EI_x}{\rho A}} \quad (5.3)$$

$$z = LZ, \quad (5.4)$$

тј.

$$\frac{\partial^4 W_r(Z, \tau)}{\partial Z^4} + \ddot{W}_r(Z, \tau) + F_r^*(\tau) \frac{\partial^2 W_r(Z, \tau)}{\partial Z^2} + Q_r^*(\tau) = 0, \quad (5.5)$$

где је W_r бездимензионо трансверзално померање r -те греде у јединичној ћелији, а $Q_r^*(\tau)$ и $F_r^*(\tau)$ су бездимензионо континуално оптерећење и аксијална сила.

На основу Блох-Флокетове теореме може се одредити веза између трансверзалних померања r -те греде у суседним јединичним ћелијама, у односу на n -ту, као што је назначено у експоненту [23]:

$$W_r^{n-1} = e^{i\tilde{\kappa}} W_r^n, \quad (5.6)$$

$$W_r^{n+1} = e^{-i\tilde{\kappa}} W_r^n, \quad (5.7)$$

где је $\tilde{\kappa}$ бездимензиони таласни број одређен множењем таласног броја κ и периода просторне модулације система λ_m .

Парцијалне диференцијалне једначине кретања греда се могу дискретизовати применом Галеркинове методе [23, 31]. Дакле, решење парцијалних диференцијалних једначина, којима је одређено кретање греда у јединичној ћелији, може се претпоставити као сума s модова осциловања [23, 31]:

$$W_r(Z, \tau) = \sum_{s=1}^n \phi_s(Z) q_{s_r}(\tau). \quad (5.8)$$

Оно се може представити и у матричном облику:

$$\mathbf{W}_r(Z, \tau) = \mathbf{\Phi}(Z) \mathbf{q}_r(\tau), \quad (5.9)$$

где је $\mathbf{q}_r(\tau)$ вектор померања. Након увођења претпостављеног решења у (5.5), следи:

$$\frac{\partial^4 \mathbf{\Phi}(Z)}{\partial Z^4} \mathbf{q}_r(\tau) + \mathbf{\Phi}(Z) \ddot{\mathbf{q}}_r(\tau) + F_r^*(\tau) \frac{\partial^2 \mathbf{\Phi}(Z)}{\partial Z^2} \mathbf{q}_r(\tau) + Q_r^*(\tau) = 0. \quad (5.10)$$

Добијена једначина може се помножити са леве стране са транспонованом матрицом $\mathbf{\Phi}(Z)$, а затим се може одредити њен интеграл по подужној бездимензионој координати Z и формирати матрична једначина облика [23, 31]:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}}(\tau) + \mathbf{C}(\tau) \dot{\mathbf{q}}(\tau) + \mathbf{K}(\tau) \mathbf{q}(\tau) = 0, \quad (5.11)$$

где је $\mathbf{M}$ матрица инерције, $\mathbf{C}(\tau)$ матрица крутости, а $\mathbf{K}(\tau)$ матрица пригушења. Услед временске модуларције наведених параметара, матрица крутости и матрица пригушења су функције времена. Временска модуларција не утиче на параметре који се појављују у матрици масе, те је она константна [23]. У случајевима када се у обзир узима само временска модуларција аксијалних сила, матрица пригушења је такође константна [23].

Када се уведе бездимензионо оптерећење у облику вектора силе $\mathbf{f}$, ради побуде разматраног система, матрична једначина кретања система (5.11) добија облик:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}}(\tau) + \mathbf{C}(\tau) \dot{\mathbf{q}}(\tau) + \mathbf{K}(\tau) \mathbf{q}(\tau) = \mathbf{f}. \quad (5.12)$$

Приликом нумеричких прорачуна у оквиру ове дисертације узето је да је $s = 5$. Дакле, матрична једначина (5.12) представља систем од 15 диференцијалних једначина, јер је узето у обзир првих 5 модова осциловања за сваку од 3 греде у јединичној ћелији [23]. Она се може решити коришћењем нумеричке методе коначних разлика, при чему се изводи вектора померања могу апроксимирати тзв. централним разликама другог реда [23,101]:

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{\mathbf{q}^{i+1} - \mathbf{q}^{i-1}}{2\Delta\tau}, \quad (5.13)$$

$$\ddot{\mathbf{q}} = \frac{\mathbf{q}^{i+1} - 2\mathbf{q}^i + \mathbf{q}^{i-1}}{\Delta\tau^2}, \quad (5.14)$$

где је $\Delta\tau$ временски корак, а ознаке у експоненту представљају бројач у итеративном поступку решавања, дакле $\mathbf{q}^{i+1} = \mathbf{q}(\tau + \Delta\tau)$. Увођењем датих апроксимација у (5.12), добија се итеративни поступак:

$$\mathbf{q}^{i+1} = -\mathbf{M}^{-1} \mathbf{P}(\tau) \mathbf{q}^{i-1} - \mathbf{M}^{-1} \mathbf{K}(\tau) \mathbf{q}^i + \mathbf{M}^{-1} \mathbf{f}, \quad (5.15)$$

где су:

$$\mathbf{M}(\tau) = \frac{\mathbf{M}}{\Delta\tau^2} + \frac{\mathbf{C}(\tau)}{2\Delta\tau}, \mathbf{P}(\tau) = \frac{\mathbf{M}}{\Delta\tau^2} - \frac{\mathbf{C}(\tau)}{2\Delta\tau}, \mathbf{K}(\tau) = \mathbf{K}(\tau) - \frac{2\mathbf{M}}{\Delta\tau^2}. \quad (5.16)$$

Поступак одређивања дисперзне карактеристике Ради одређивања функције зависности бездимензионе кружне фреквенције Ω од бездимензионог таласног броја $\tilde{\kappa}$, вектор померања греда n -те јединичне ћелије се може претпоставити у Флокетовом облику [20,55]:

$$\mathbf{q}_n(\tau) = e^{i(-n\tilde{\kappa} + \Omega\tau)} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} e^{ip\Omega_m\tau}, \quad (5.17)$$

где је Ω_m бездимензиона кружна фреквенција модулације [55].

Након увођења претпостављеног решења у систем парцијалних диференцијалних једначина, којима је одређено кретање греда у јединичној ћелији (5.2), и након примене Галеркинове методе, матрица пригушења и матрица крутости се могу представити у следећем облику:

$$\mathbf{C}(\tau, \tilde{\kappa}) = \mathbf{C}(\tau) + \mathbf{C}^{(l)}(\tau)e^{i\tilde{\kappa}} + \mathbf{C}^{(d)}(\tau)e^{-i\tilde{\kappa}}, \quad (5.18)$$

$$\mathbf{K}(\tau, \tilde{\kappa}) = \mathbf{K}(\tau) + \mathbf{K}^{(l)}(\tau)e^{i\tilde{\kappa}} + \mathbf{K}^{(d)}(\tau)e^{-i\tilde{\kappa}}, \quad (5.19)$$

где су експонентима l и d означене ретке матрице чији елементи се налазе само на најудаљенијој позицији лево, тј. десно, од главне дијагонале. Уколико је ред матрице N , позиција тог елемента у матрици означеној са l је $Nx1$, док је у матрици означеној са d то $1xN$.

С обзиром на то да матрице $\mathbf{C}$ и $\mathbf{K}$ у општем случају зависе од времена, оне се могу развити у Фуријеов ред:

$$\mathbf{C}(\tau) = \sum_{\zeta=-\infty}^{+\infty} \mathbf{C}_{\zeta}(\tilde{\kappa})e^{i\zeta\Omega_m\tau}, \quad (5.20)$$

$$\mathbf{C}^{(l)}(\tau) = \sum_{\zeta=-\infty}^{+\infty} \mathbf{C}_{\zeta}^{(l)}(\tilde{\kappa})e^{i\zeta\Omega_m\tau}, \quad (5.21)$$

$$\mathbf{C}^{(d)}(\tau) = \sum_{\zeta=-\infty}^{+\infty} \mathbf{C}_{\zeta}^{(d)}(\tilde{\kappa})e^{i\zeta\Omega_m\tau}. \quad (5.22)$$

тј.

$$\mathbf{K}(\tau) = \sum_{\zeta=-\infty}^{+\infty} \mathbf{K}_{\zeta}(\tilde{\kappa})e^{i\zeta\Omega_m\tau}, \quad (5.23)$$

$$\mathbf{K}^{(l)}(\tau) = \sum_{\zeta=-\infty}^{+\infty} \mathbf{K}_{\zeta}^{(l)}(\tilde{\kappa})e^{i\zeta\Omega_m\tau}, \quad (5.24)$$

$$\mathbf{K}^{(d)}(\tau) = \sum_{\zeta=-\infty}^{+\infty} \mathbf{K}_{\zeta}^{(d)}(\tilde{\kappa})e^{i\zeta\Omega_m\tau}. \quad (5.25)$$

Узимајући у обзир изразе (5.17-5.25) и матрични облик система диференцијалних једначина кретања, добија се полином другог реда по бездимензионој фреквенцији Ω , који представља проблем сопствених вредности и може се решити инверзном методом [23,10,31,20]:

$$\sum_{\zeta=-\infty}^{+\infty} [\Omega + (p - \zeta)\Omega_m]^2 \mathbf{M} - i \sum_{\zeta=-\infty}^{+\infty} [\Omega + (p - \zeta)\Omega_m] \mathbf{C}_{\zeta}^*(\tilde{\kappa}) - \sum_{\zeta=-\infty}^{+\infty} \mathbf{K}_{\zeta}^*(\tilde{\kappa}) = 0 \quad (5.26)$$

Матрице $\mathbf{C}_\zeta^*(\tilde{\kappa})$ и $\mathbf{K}_\zeta^*(\tilde{\kappa})$ се могу одредити инверзном Фуријеовом трансформацијом [23,31]:

$$\mathbf{C}_\zeta^*(\tilde{\kappa}) = \frac{1}{\chi T_m} \int_{-\frac{\chi T_m}{2}}^{\frac{\chi T_m}{2}} \left[\mathbf{C}(\tau) + \mathbf{C}^{(l)}(\tau) e^{i\tilde{\kappa}} + \mathbf{C}^{(r)}(\tau) e^{-i\tilde{\kappa}} \right] e^{-i\zeta \Omega_m \tau} d\tau, \quad (5.27)$$

$$\mathbf{K}_\zeta^*(\tilde{\kappa}) = \frac{1}{\chi T_m} \int_{-\frac{\chi T_m}{2}}^{\frac{\chi T_m}{2}} \left[\mathbf{K}(\tau) + \mathbf{K}^{(l)}(\tau) e^{i\tilde{\kappa}} + \mathbf{K}^{(r)}(\tau) e^{-i\tilde{\kappa}} \right] e^{-i\zeta \Omega_m \tau} d\tau. \quad (5.28)$$

Уколико се узме да су $\zeta \in [-2, 2]$ и $p \in [-1, 1]$, добијени проблем сопствених вредности (5.26) може се написати у облику матричне једначине која представља систем од 45 алгебарских једначина:

$$\Omega^2 \mathbf{Q}_A + \Omega \mathbf{Q}_B + \mathbf{Q}_C = 0 \quad (5.29)$$

где су:

$$\mathbf{Q}_A = \begin{bmatrix} \mathbf{M} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{M} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{M} \end{bmatrix}, \quad (5.30)$$

$$\mathbf{Q}_B = 2\Omega_m \begin{bmatrix} -\mathbf{M} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{M} \end{bmatrix} - i \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{C}}_0 & \underline{\mathbf{C}}_{-1} & \underline{\mathbf{C}}_{-2} \\ \underline{\mathbf{C}}_1 & \underline{\mathbf{C}}_0 & \underline{\mathbf{C}}_{-1} \\ \underline{\mathbf{C}}_2 & \underline{\mathbf{C}}_1 & \underline{\mathbf{C}}_0 \end{bmatrix}, \quad (5.31)$$

$$\mathbf{Q}_C = \Omega_m^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{M} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{K}}_0 & \underline{\mathbf{K}}_{-1} & \underline{\mathbf{K}}_{-2} \\ \underline{\mathbf{K}}_1 & \underline{\mathbf{K}}_0 & \underline{\mathbf{K}}_{-1} \\ \underline{\mathbf{K}}_2 & \underline{\mathbf{K}}_1 & \underline{\mathbf{K}}_0 \end{bmatrix} - i\Omega_m \begin{bmatrix} -\underline{\mathbf{C}}_0 & 0 & \underline{\mathbf{C}}_{-2} \\ -\underline{\mathbf{C}}_1 & 0 & \underline{\mathbf{C}}_{-1} \\ -\underline{\mathbf{C}}_2 & 0 & \underline{\mathbf{C}}_0 \end{bmatrix}. \quad (5.32)$$

5.1 Структура са Пастернаковим вискоеластичним слојевима

Пастернаков вискоеластични слој се може приказати у виду система паралелно везаних опруга и пригушивача, који су повезани са вискозним смичућим слојем [109]. Јединична ћелија фононске структуре повезане таквим слојевима приказана је на Сл. 5.1.

Крутост опруга над којом се врши временска модулација је [23]:

$$c_r(t) = c_s \left[1 + A_m \cos \left(\omega_m t + \frac{2\pi r}{3} \right) \right], \quad (5.33)$$

где је c_s крутост опруге без модулације, A_m је амплитуда модулације, а ω_m кружна фреквенција модулације. Сила до које долази услед деформације опруга одређује се на основу Хуковог закона, као линеарна функција померања греда [109].

Коефицијент пригушења Пастернакових слојева сматра се константним $\beta_r = \beta_0$, а дисипативна сила се може сматрати пропорционалном брзини померања греда [109,23].

Коефицијент отпора вискозног смичућег слоја, над којим се такође врши временска модулација, је [23]:

$$G_r(t) = G_0 \left[1 + \gamma_m \cos \left(\omega_m t + \frac{2\pi r}{3} \right) \right], \quad (5.34)$$

где је G_0 коефицијент отпора без модулације, а γ_m је амплитуда модулације. Интензитет смичуће силе одређен по јединичној дужини греде пропорционалан је мешовитом парцијалном изводу трансверзалног померања, по просторној и временској координати [109].

На основу једначине (5.5), бездимензионе парцијалне диференцијалне једначине кретања система паралелних греда у n -тој јединичној ћелији су:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^4 W_1^n}{\partial Z^4} + \ddot{W}_1^n + F_1^*(\tau) \frac{\partial^2 W_1^n}{\partial Z^2} + c_1^*(\tau) (W_1^n - W_2^n) + c_3^*(\tau) (W_1^n - W_3^{n-1}) \\ & - G_1^*(\tau) \left(\frac{\partial^2 W_1^n}{\partial Z \partial \tau} - \frac{\partial^2 W_2^n}{\partial Z \partial \tau} \right) - G_3^*(\tau) \left(\frac{\partial^2 W_1^n}{\partial Z \partial \tau} - \frac{\partial^2 W_3^{n-1}}{\partial Z \partial \tau} \right) \\ & + \beta_1^* (\dot{W}_1^n - \dot{W}_2^n) + \beta_3^* (\dot{W}_1^n - \dot{W}_3^{n-1}) = 0, \end{aligned} \quad (5.35)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^4 W_2^n}{\partial Z^4} + \ddot{W}_2^n + F_2^*(\tau) \frac{\partial^2 W_2^n}{\partial Z^2} + c_2^*(\tau) (W_2^n - W_3^n) + c_1^*(\tau) (W_2^n - W_1^n) \\ & - G_2^*(\tau) \left(\frac{\partial^2 W_2^n}{\partial Z \partial \tau} - \frac{\partial^2 W_3^n}{\partial Z \partial \tau} \right) - G_1^*(\tau) \left(\frac{\partial^2 W_2^n}{\partial Z \partial \tau} - \frac{\partial^2 W_1^n}{\partial Z \partial \tau} \right) \\ & + \beta_2^* (\dot{W}_2^n - \dot{W}_3^n) + \beta_1^* (\dot{W}_2^n - \dot{W}_1^n) = 0, \end{aligned} \quad (5.36)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^4 W_3^n}{\partial Z^4} + \ddot{W}_3^n + F_3^*(\tau) \frac{\partial^2 W_3^n}{\partial Z^2} + c_3^*(\tau) (W_3^n - W_1^{n+1}) + c_2^*(\tau) (W_3^n - W_2^n) \\ & - G_3^*(\tau) \left(\frac{\partial^2 W_3^n}{\partial Z \partial \tau} - \frac{\partial^2 W_1^{n+1}}{\partial Z \partial \tau} \right) - G_2^*(\tau) \left(\frac{\partial^2 W_3^n}{\partial Z \partial \tau} - \frac{\partial^2 W_2^n}{\partial Z \partial \tau} \right) \\ & + \beta_3^* (\dot{W}_3^n - \dot{W}_1^{n+1}) + \beta_2^* (\dot{W}_3^n - \dot{W}_2^n) = 0, \end{aligned} \quad (5.37)$$

где су звездицом обележени бездимензиони облици свих уведених величина.

Након дискретизације уз помоћ Галеркинове методе и интеграције дуж бездимензионе подужне координате Z , могу се издвојити матрице:

$$\mathbf{G}_A = \int_0^1 \Phi^T(X) \Phi(X) dX, \quad (5.38)$$

$$\mathbf{G}_B = \int_0^1 \Phi^T(X) \frac{\partial^4 \Phi(X)}{\partial X^4} dX, \quad (5.39)$$

$$\mathbf{G}_C = \int_0^1 \Phi^T(X) \frac{\partial^2 \Phi(X)}{\partial X^2} dX, \quad (5.40)$$

$$\mathbf{G}_D = \int_0^1 \Phi^T(X) \frac{\partial \Phi(X)}{\partial X} dX, \quad (5.41)$$

након чега се систем једначина (5.35)-(5.37) може написати у облику (5.11), где су матрице масе, пригушења и крутости одређене на следећи начин:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_A & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{G}_A & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{G}_A \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C}(\tau) = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{\beta_1} & G_1^* \mathbf{G}_D - \beta_1^* \mathbf{G}_A & (G_3^* \mathbf{G}_D - \beta_3^* \mathbf{G}_A) e^{i\tilde{\kappa}} \\ G_1^* \mathbf{G}_D - \beta_1^* \mathbf{G}_A & \mathbf{C}_{\beta_2} & G_2^* \mathbf{G}_D - \beta_2^* \mathbf{G}_A \\ (G_3^* \mathbf{G}_D - \beta_3^* \mathbf{G}_A) e^{-i\tilde{\kappa}} & G_2^* \mathbf{G}_D - \beta_2^* \mathbf{G}_A & \mathbf{C}_{\beta_3} \end{bmatrix},$$

где је

$$\mathbf{C}_{\beta_r} = (\beta_r^* + \beta_{r-1}^*) \mathbf{G}_A - (G_r^* + G_{r-1}^*) \mathbf{G}_D,$$

и

$$\mathbf{K}(\tau) = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{k_1} & -c_1^* \mathbf{G}_A & -c_3^* \mathbf{G}_A e^{i\tilde{\kappa}} \\ -c_1^* \mathbf{G}_A & \mathbf{K}_{k_2} & -c_2^* \mathbf{G}_A \\ -c_3^* \mathbf{G}_A e^{-i\tilde{\kappa}} & -c_2^* \mathbf{G}_A & \mathbf{K}_{k_3} \end{bmatrix}, \quad (5.42)$$

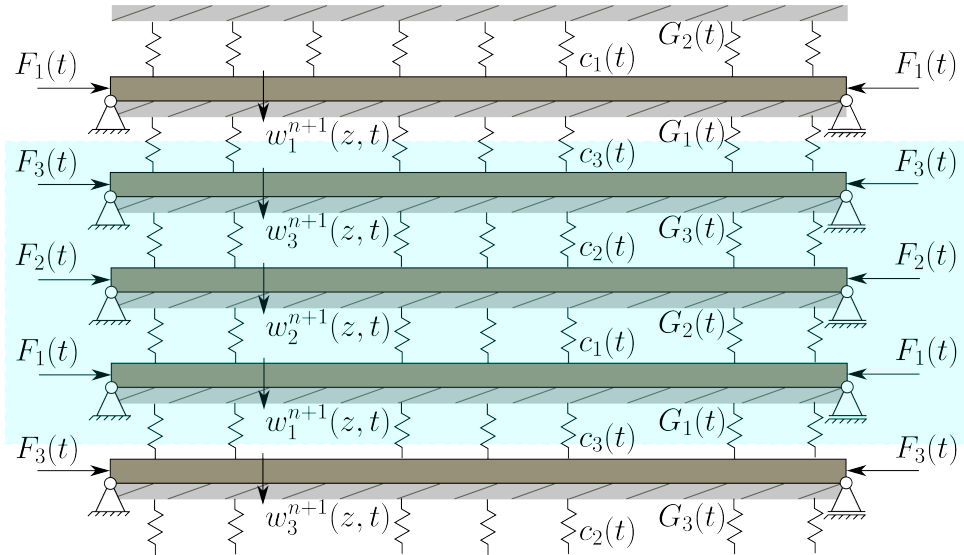
где је

$$\mathbf{K}_{k_r} = \mathbf{G}_B + F_r^* \mathbf{G}_C + (c_r^* + c_{r-1}^*) \mathbf{G}_A.$$

Уколико се врши само временска модулација аксијалне силе, сваки Пастернаков вискоеластични слој у јединичној ћелији има исте карактеристике, тј. има једнаке и константне вредности параметара којима је дефинисан ($c_r = c_s$, $\beta_r = \beta_0$, $G_r = G_0$).

5.2 Структура са Пастернаковим еластичним слојевима

Систем паралелних витких греда повезаних Пастернаковим еластичним слојевима приказан је на Сл. 5.2. Пастернаков еластични слој може се приказати као систем паралелних опруга повезаних са еластичним смичућим слојем [109]. Крутост опруга и коефицијент отпора смичућег слоја дефинисани су са (5.33) и (5.34). Међутим, интензитет смичуће силе одређен по јединичној дужини греде пропорционалан је другом изводу трансверзалног померања по просторној координати [109].



Слика 5.2: Схематски приказ дела система паралелних греда повезаних Пастернаковим еластичним слојевима [23]. Јединична ћелија се састоји од три узастопне греде (део освенчен плавом бојом).

На основу једначине (5.5), бездимензионе парцијалне диференцијалне једначине кретања система паралелних греда у n -тој јединичној ћелији су:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 W_1^n}{\partial Z^4} + \ddot{W}_1^n + F_1^*(\tau) \frac{\partial^2 W_1^n}{\partial Z^2} + c_1^*(\tau) (W_1^n - W_2^n) + c_3^*(\tau) (W_1^n - W_3^{n-1}) \\ - G_1^*(\tau) \left(\frac{\partial^2 W_1^n}{\partial Z^2} - \frac{\partial^2 W_2^n}{\partial Z^2} \right) - G_3^*(\tau) \left(\frac{\partial^2 W_1^n}{\partial Z^2} - \frac{\partial^2 W_3^{n-1}}{\partial Z^2} \right) = 0, \end{aligned} \quad (5.43)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 W_2^n}{\partial Z^4} + \ddot{W}_2^n + F_2^*(\tau) \frac{\partial^2 W_2^n}{\partial Z^2} + c_2^*(\tau) (W_2^n - W_3^n) + c_1^*(\tau) (W_2^n - W_1^n) \\ - G_2^*(\tau) \left(\frac{\partial^2 W_2^n}{\partial Z^2} - \frac{\partial^2 W_3^n}{\partial Z^2} \right) - G_1^*(\tau) \left(\frac{\partial^2 W_2^n}{\partial Z^2} - \frac{\partial^2 W_1^n}{\partial Z^2} \right) = 0, \end{aligned} \quad (5.44)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 W_3^n}{\partial Z^4} + \ddot{W}_3^n + F_3^*(\tau) \frac{\partial^2 W_3^n}{\partial Z^2} + c_3^*(\tau) (W_3^n - W_1^{n+1}) + c_2^*(\tau) (W_3^n - W_2^n) \\ - G_3^*(\tau) \left(\frac{\partial^2 W_3^n}{\partial Z^2} - \frac{\partial^2 W_1^{n+1}}{\partial Z^2} \right) - G_2^*(\tau) \left(\frac{\partial^2 W_3^n}{\partial Z^2} - \frac{\partial^2 W_2^n}{\partial Z^2} \right) = 0. \end{aligned} \quad (5.45)$$

У случају Пастернаковог еластичног слоја, матрица крутости $\mathbf{K}$ има сличну структуру као (5.42):

$$\mathbf{K}(\tau) = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{k_1} & -c_1^* \mathbf{G}_A + G_1 \mathbf{G}_C & (-c_3^* \mathbf{G}_A + G_3 \mathbf{G}_C) e^{i\tilde{\kappa}} \\ -c_1^* \mathbf{G}_A + G_1 \mathbf{G}_C & \mathbf{K}_{k_2} & -c_2^* \mathbf{G}_A + G_2 \mathbf{G}_C \\ (-c_3^* \mathbf{G}_A + G_3 \mathbf{G}_C) e^{-i\tilde{\kappa}} & -c_2^* \mathbf{G}_A + G_2 \mathbf{G}_C & \mathbf{K}_{k_3} \end{bmatrix},$$

где је:

$$\mathbf{K}_{k_r} = \mathbf{G}_B + F_r^* \mathbf{G}_C + (c_r^* + c_{r-1}^*) \mathbf{G}_A - (G_r^* + G_{r-1}^*) \mathbf{G}_C.$$

При одређивању дисперзне карактеристике овакве структуре, важи (5.29), с тим што је $\mathbf{C}$ нула-матрица.

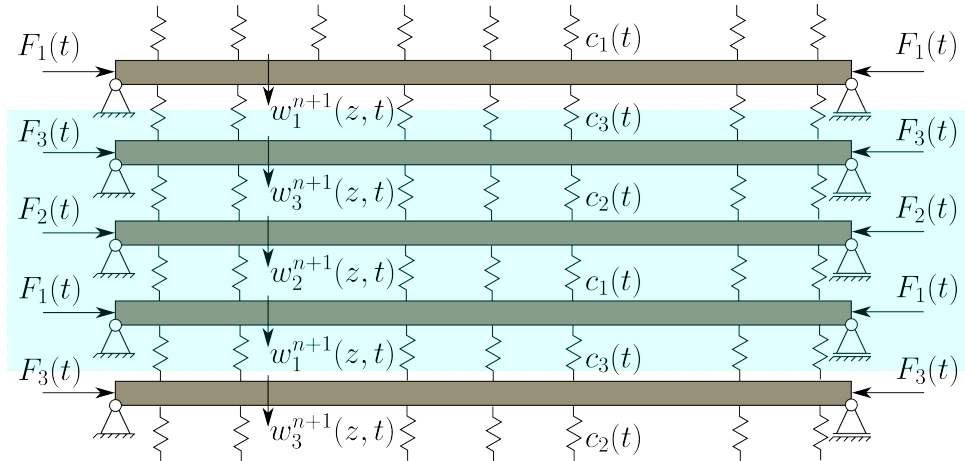
5.3 Структура са Винклеровим еластичним слојевима

Систем паралелних витких греда повезаних Винклеровим еластичним слојевима приказан је на Сл. 5.3. Винклеров еластични слој се може приказати системом паралелних опруга са крутошћу дефинисаном у (5.33). На основу једначине (5.5), бездимензионе парцијалне диференцијалне једначине кретања система паралелних греда у n -тој јединичној ћелији су:

$$\frac{\partial^4 W_1^n}{\partial Z^4} + \ddot{W}_1^n + F_1^*(\tau) \frac{\partial^2 W_1^n}{\partial Z^2} + c_1^*(\tau) (W_1^n - W_2^n) + c_3^*(\tau) (W_1^n - W_3^{n-1}), \quad (5.46)$$

$$\frac{\partial^4 W_2^n}{\partial Z^4} + \ddot{W}_2^n + F_2^*(\tau) \frac{\partial^2 W_2^n}{\partial Z^2} + c_2^*(\tau) (W_2^n - W_3^n) + c_1^*(\tau) (W_2^n - W_1^n), \quad (5.47)$$

$$\frac{\partial^4 W_3^n}{\partial Z^4} + \ddot{W}_3^n + F_3^*(\tau) \frac{\partial^2 W_3^n}{\partial Z^2} + c_3^*(\tau) (W_3^n - W_1^{n+1}) + c_2^*(\tau) (W_3^n - W_2^n). \quad (5.48)$$



Слика 5.3: Схематски приказ дела система паралелних греда повезаних Винклеровим еластичним слојевима [23]. Јединична ћелија се састоји од три узастопне греде (део осветљен плавом бојом).

У овом случају, матрица крутости $\mathbf{K}$ такође има облик који је дат у (5.42), где је $\mathbf{K}_{k_r} = \mathbf{G}_B + F_r^* \mathbf{G}_C + (c_r^* + c_{r-1}^*) \mathbf{G}_A$. При одређивању дисперзне карактеристике овакве структуре, важи (5.29), с тим што је $\mathbf{C}$ нула-матрица.

5.4 Нумерички прорачуни

У нумеричким прорачунима који следе, разматран је систем од 50 јединичних ћелија које се састоје од 3 паралелне аксијално оптерећене греде и различитих слојева којима су повезане. Прорачун је урађен за три различита примера који се разликују по врсти везивног слоја, тј. за структуре које садрже Пастернакове вискоеластичне слојеве (ПВС), Пастернакове еластичне слојеве (ПЕС) и Винклерове еластичне слојеве (ВЕС). При томе је извршена временска модулација аксијалног оптерећења као и карактеристика наведених слојева, према (5.1), (5.33) и (5.34).

Дијаграми дисперзне карактеристике $\Omega(\tilde{\kappa})$ одређени су решавањем проблема сопствених вредности (5.29) индиректном методом, тј. за задате вредности бездимензионог таласног броја у опсегу прве Брилунове зоне, тј. $\tilde{\kappa} \in [-\pi, \pi]$. Решавањем проблема сопствених вредности добија се фамилија три паралелне криве чији фреквенцијски опсези се разликују за бездимензиону фреквенцију временске модулације Ω_m [28]. Дијаграм дисперзне карактеристике представљају криве које одговарају тзв. фундаменталном механичком таласу који преноси највише енергије [28]. Услед тога се при решавању проблема сопствених вредности (5.29) узимају у обзир интензитети сопствених вектора, на основу којих се резултати могу филтрирати. У оквиру софтверске имплементације у програмском окружењу *MATLAB* уведен је филтер који одваја резултате на основу задате граничне вредности [28].

На дијаграму дисперзне карактеристике се може приметити да су неке зоне заустављања асиметричне у односу на $\tilde{\kappa} = 0$, те на тим фреквенцијским опсезима механички таласи могу да се крећу само у једном смеру [20,23,28]. У Табели 5.1 су за сваку од разматраних структура приказана прва четири фреквенцијска опсега у којима се налазе једносмерне зоне заустављања, као и одабрана фреквенција побуде Ω_p [23].

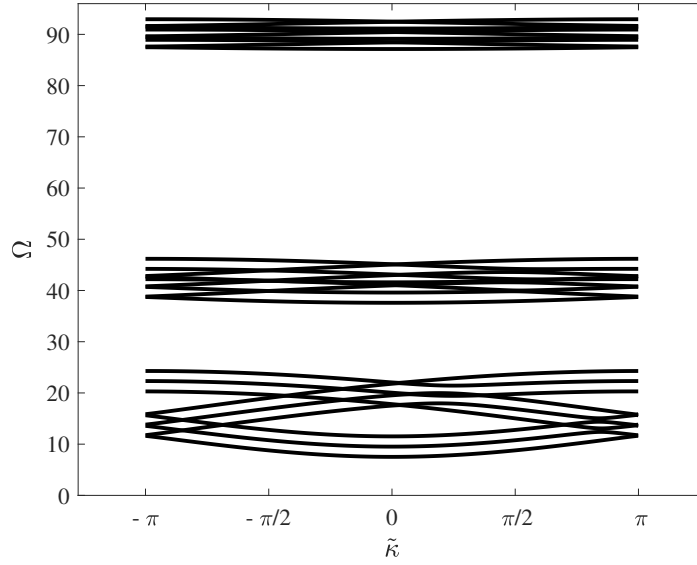
Табела 5.1: Фреквенцијски опсези прве четири једносмерне зоне заустављања и одабрана фреквенција побуде за сваки од три разматрана система.

ПВС		ПЕС		ВЕС	
зоне заустављања	Ω_p	зоне заустављања	Ω_p	зоне заустављања	Ω_p
(12,39, 13,08)		(12,95, 13,67)		(12,61, 13,32)	
(14,37, 15,05)		(14,93, 15,65)		(14,59, 15,30)	
(17,96, 19,44)		(18,76, 20,26)		(18,03, 19,51)	
(19,96, 21,44)	20,5	(20,76, 22,25)	21,5	(20,05, 21,51)	20,8

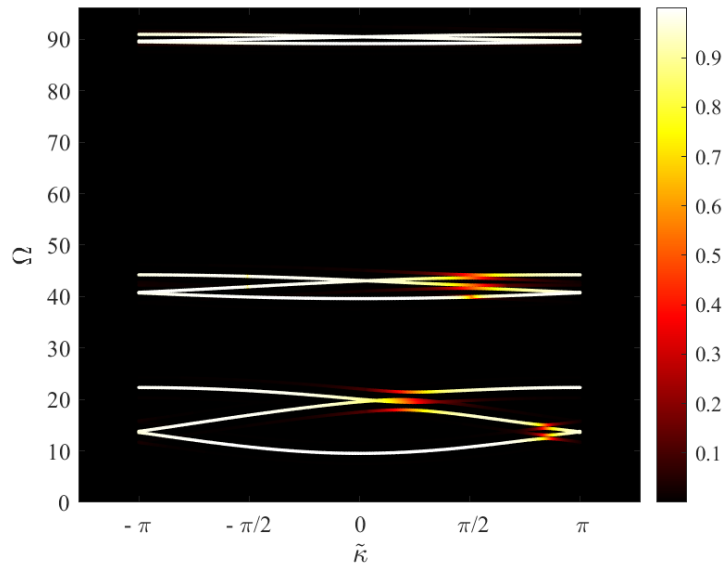
Приликом прорачуна простирања механичких таласа, структура је побуђена континуалним оптерећењем које је такође хармонијска функција времена са бездимензионом кружном фреквенцијом Ω_p . Дејство побуде траје од почетка симулације ($\tau_0 = 0$) до бездимензионе временске јединице $\tau_p = 30$. Оптерећење делује на средишњу греду централне јединичне ћелије, тј. на 75. греду у систему. Амплитуда побуде је $Q = 0,0001$, а почетни услови су $\mathbf{q} = 0$ и $\dot{\mathbf{q}} = 0$. Краткотрајним дејством оптерећења мале амплитуде може се изазвати пролазни одзив структуре, при коме се механички таласи простиру кроз низ јединичних ћелија. Нумерички прорачуни извршени су на основу итеративног поступка представљеног изразом (5.15), са стандардним временским кораком $\Delta\tau \leq 10^{-3}$, при коме прорачун не дивергира. Свака од изведених симулација траје укупно $\tau_s = 90$ бездимензионих временских јединица. Добијени резултати приказани су симболично на паралелним дијаграмима трансверзалног померања у току времена, за позицију на греди одређену бездимензионом подужном координатом $Z = 0,4$ [23]. Приказани су дијаграми за сваку пету греду у систему. Када талас дође до краја структуре, он се појављује поново на супротном крају, јер су узети у обзир Борн-Карманови периодични гранични услови како би се спречила рефлексија таласа на крајевима разматране коначне структуре [31].

5.4.1 Пример структуре са Пастернаковим вискоеластичним слојем (ПВС)

При прорачунима су узете у обзир следеће вредности уведених параметара временске модуларације: $F_0 = 0,2$, $c_s = 100$, $G_0 = 1$, $\beta_0 = 0,1$, $\Omega_m = 2$, $\delta_m = 0,1$, $A_m = 0,2$ и $\gamma_m = 0,1$ [23]. На Сл. 5.4 приказане су фамилије кривих за прва три мода осциловања структуре. Описаном методом софтверског филтрирања резултата добија се дијаграм дисперзне карактеристике за фундаментални механички талас, као што је приказано на Сл. 5.5 [23]. На Сл. 5.5 се такође може уочити да се при задатим параметрима система једносмерне зоне заустављања јављају само у прва два мода осциловања, и то за $\tilde{\kappa} > 0$. Самим тим се може закључити да је групна брзина таласа са фреквенцијама које одговарају тим једносмерним зонама заустављања негативна, те ће се они простирати улево у односу на средишњу греду разматраног система (место дејства побуде).

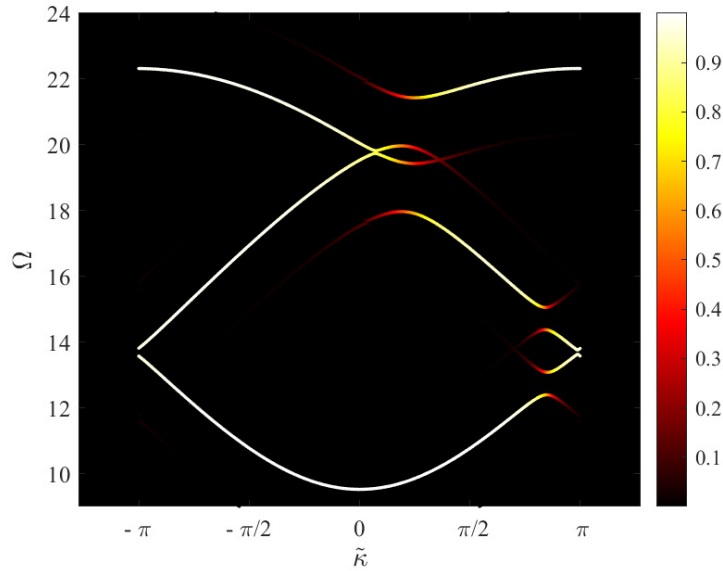


Слика 5.4: Фамилија кривих које представљају решење проблема сопствених вредности за структуру са ПВС.

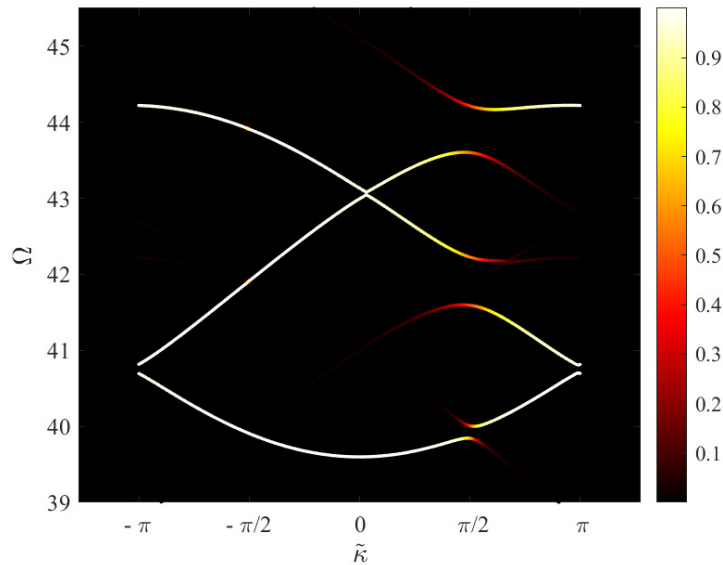


Слика 5.5: Дисперзна карактеристика за прва три мода осциловања структуре са ПВС.

Дисперзна карактеристика која се односи на прва два мода може се јасније сагледати на Сл. 5.6 и 5.7 [23]. На Сл. 5.6 се уочавају четири једносмерне зоне заустављања, чији фреквенцијски опсези су дати у Табели 5.1, у колони са ознаком ПВС [23]. Услед временске модулације параметара аксијалне силе, као и параметара ПВС (c_r и G_r), долази до једносмерног простирања таласа приликом побуде система са одабраном фреквенцијом $\Omega_p = 20,5$, као што је приказано на Сл. 5.8 [23].

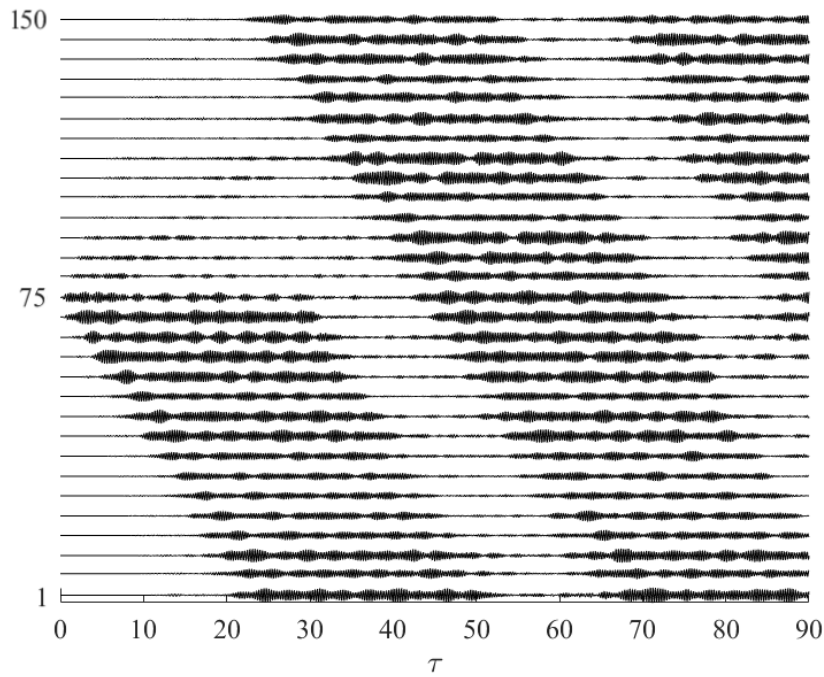


Слика 5.6: Дисперзна карактеристика за први мод осциловања структуре са ПВС.



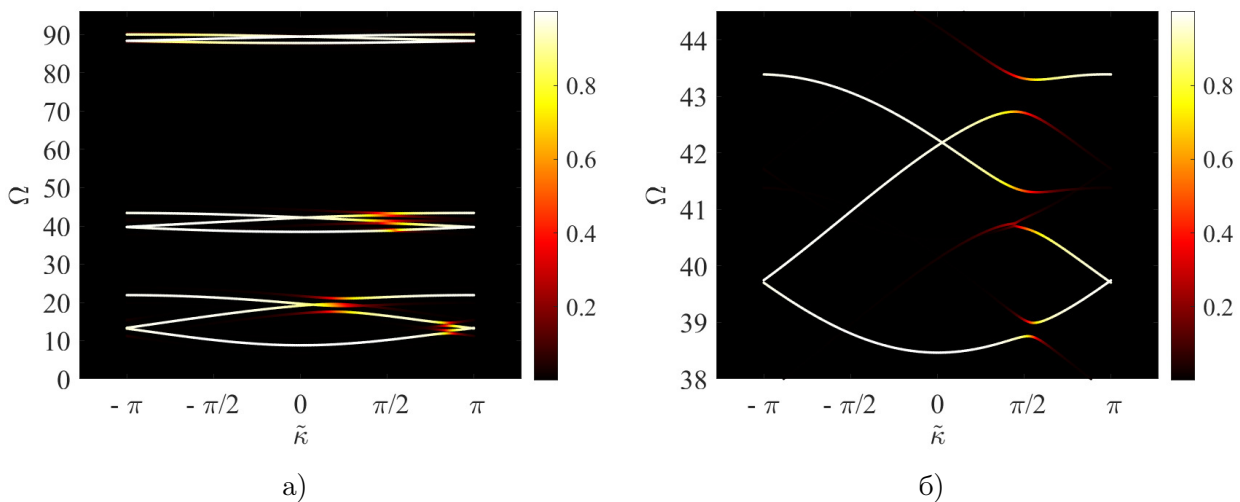
Слика 5.7: Дисперзна карактеристика за други мод осциловања структуре са ПВС.

На Сл. 5.8 се може уочити примарни талас који носи највише енергије, а који се простира једносмерно улево. У супротном смеру се јасно уочава да услед деловања побуде долази и до механичких таласа чије су фреквенције различите од фреквенције примарног таласа, а који могу да се простиру у оба смера. Међутим, амплитуде тих таласа су занемарљиво мале у односу на амплитуду примарног таласа.

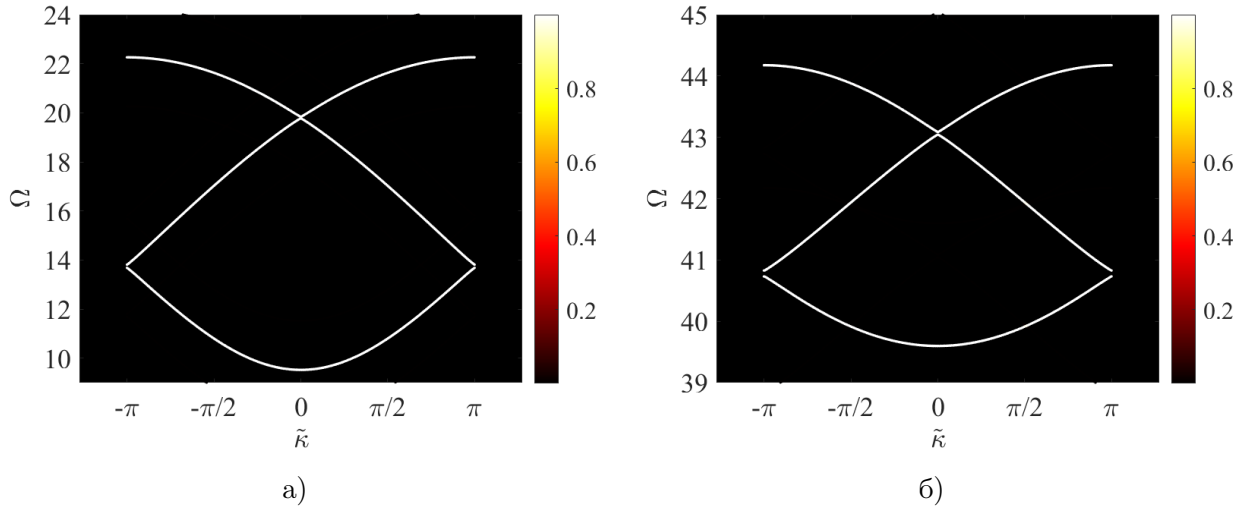


Слика 5.8: Простирање механичких таласа до којих долази услед побуде хармонијском силом бездимензионе фреквенције $\Omega_p = 20,5$, кроз периодичну структуру која се састоји од 150 паралелних греда (приказана је свака пета гредa). Аксијална сила и карактеристике везивног слоја су хармонијске функције времена, услед чега долази до једносмерног простирања таласа.

Размотрен је и утицај повећања аксијалног оптерећења, и то десет пута. На Сл. 5.9 се може приметити да, при $F_0 = 2$ и $\delta_m = 0,1$, долази до снижавања нивоa фреквенција свих мода, док на другом моду једносмерне зоне заустављања постају значајно шире.

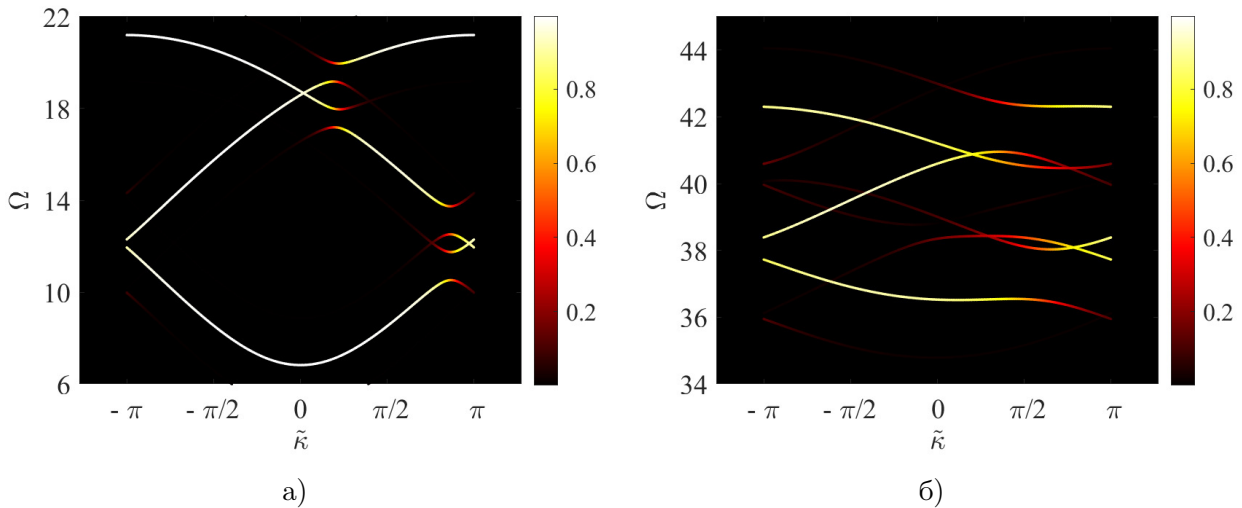


Слика 5.9: Дисперзна карактеристика структуре (ПВС), код које је аксијално оптерећење 10 пута веће ($F_0 = 2$, $\delta_m = 0,1$): а) за прва три мода осциловања, б) за други мод осциловања.



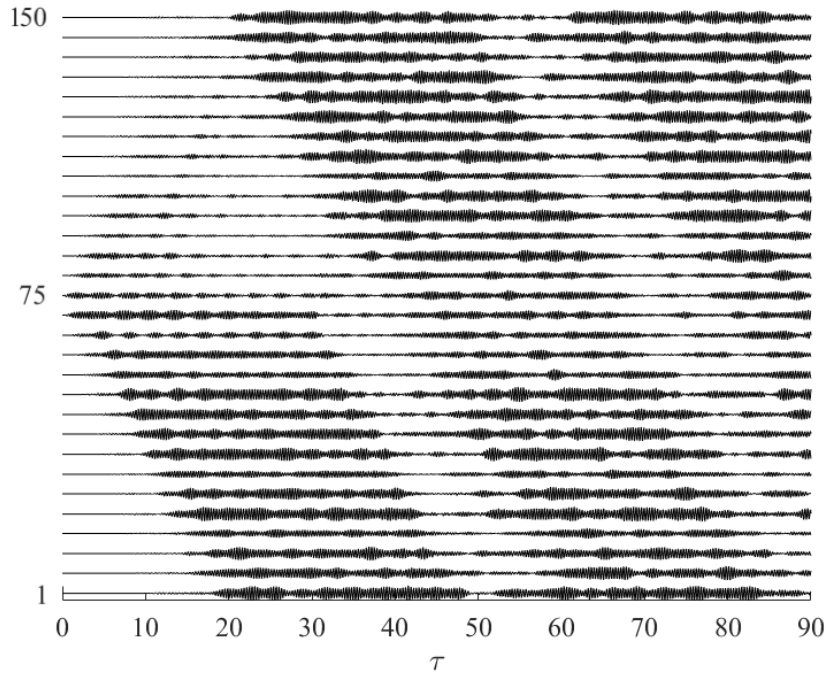
Слика 5.10: Дисперзна карактеристика структуре (ПВС), код које је извршена модулација у времену само за аксијално оптерећење ($F_0 = 0, 2$, $\delta_m = 0, 1$): а) за први мод осциловања, б) за други мод осциловања.

У специјалном случају, када су параметри којима су одређене особине везивних слојева константни ($c_s = 100$, $G_0 = 1$, $\beta_0 = 0, 1$, $\Omega_m = 2$, $A_m = 0$, $\gamma_m = 0, 1$), не долази до појаве једносмерних зауставних зона, као што је приказано на Сл. 5.10. Међутим, уколико се параметар временске модулације и интензитет аксијалне силе значајно увећају, може се постићи подједнако велика ширина једносмерних зона заустављања. На Сл. 5.11 су приказане дисперзне карактеристике за први и други мод осциловања за случај када су $F_0 = 5$ и $\delta_m = 0, 6$. Поређењем резултата приказаним на Сл. 5.6 и 5.11а, као и 5.7 и 5.11б, може се приметити да се модови осциловања налазе на нижим фреквенцијама, као и да је облик дисперзне карактеристике за други мод измењен, са значајно већом ширином једносмерних зона заустављања. Међутим, повећањем аксијалног оптерећења може доћи до губитка стабилности, што ограничава практичну примену оваквог приступа [20].



Слика 5.11: Дисперзна карактеристика структуре (ПВС), код које је извршена модулација у времену само за аксијално оптерећење ($F_0 = 5$, $\delta_m = 0, 6$): а) за први мод осциловања, б) за други мод осциловања.

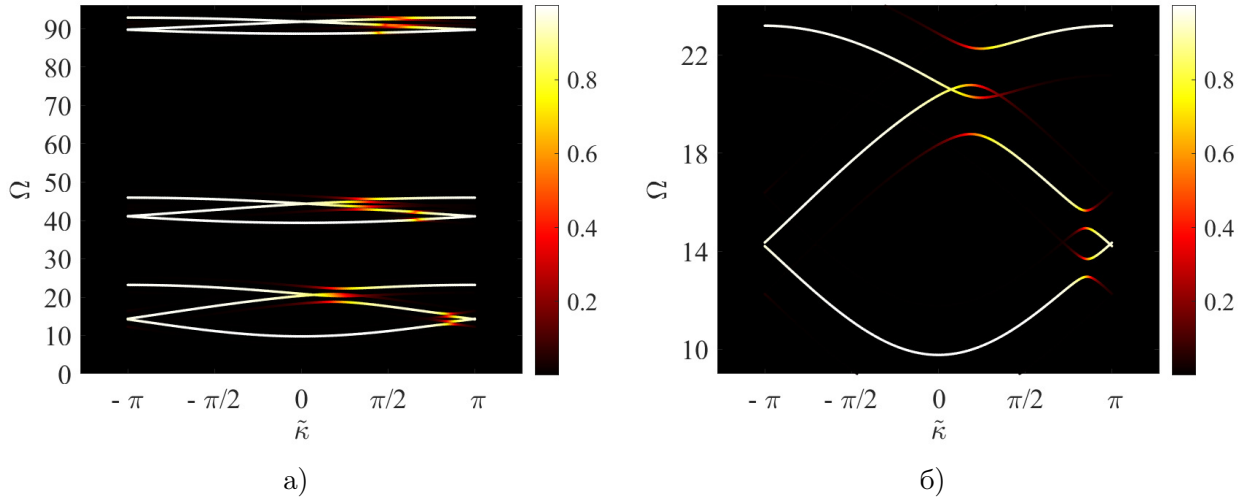
На Сл. 5.12 приказано је простирање таласа при пролазном одзиву структуре код које је извршена модулација само аксијалне силе ($F_0 = 5$, $\delta_m = 0,6$). Примењено је континууано оптерећење са бездимензионом кружном фреквенцијом $\Omega_p = 19,4$, која одговара једносмерној зауставној зони $\Omega \in (19,09, 19,88)$. Може се видети да се таласи који носе највише енергије простиру једносмерно улево. Међутим, у овом случају су приметни и таласи других фреквенција који се простиру у оба доступна смера, са амплитудама већим него у случају приказаном на Сл. 5.8.



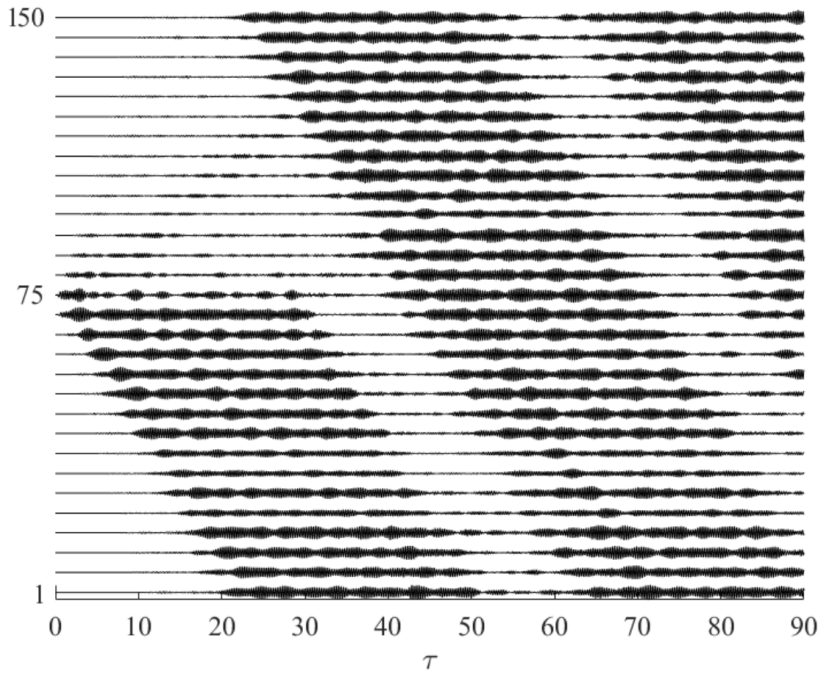
Слика 5.12: Простирање механичких таласа кроз периодичну структуру, услед побуде хармонијском силом са $\Omega_p = 19,4$. Аксијална сила којом је оптерећена свака греда је хармонијска функција времена, услед чега долази до једносмерног простирања таласа. Модулација у времену је извршена само за аксијално оптерећење ($F_0 = 5$, $\delta_m = 0,6$).

5.4.2 Пример структуре са Пастернаковим еластичним слојем (ПЕС)

При прорачунима су узете у обзир следеће вредности уведених параметара временске модулације: $F_0 = 0,2$, $c_s = 100$, $G_0 = 1$, $\Omega_m = 2$, $\delta_m = 0,1$, $A_m = 0,2$ и $\gamma_m = 0,1$. На Сл. 5.13а приказана је дисперзна карактеристика за прва три мода осциловања, док је на Сл. 5.13б приказана само за фреквенцијски опсег који одговара првом моду осциловања. Одабрана је фреквенција побуде $\Omega_p = 21,5$ која се налази у опсегу четврте једносмерне зоне заустављања, приказане у другој колони (ПЕС) Табеле 5.1. На Сл. 5.14 приказано је једносмерно простирање таласа кроз структуру.



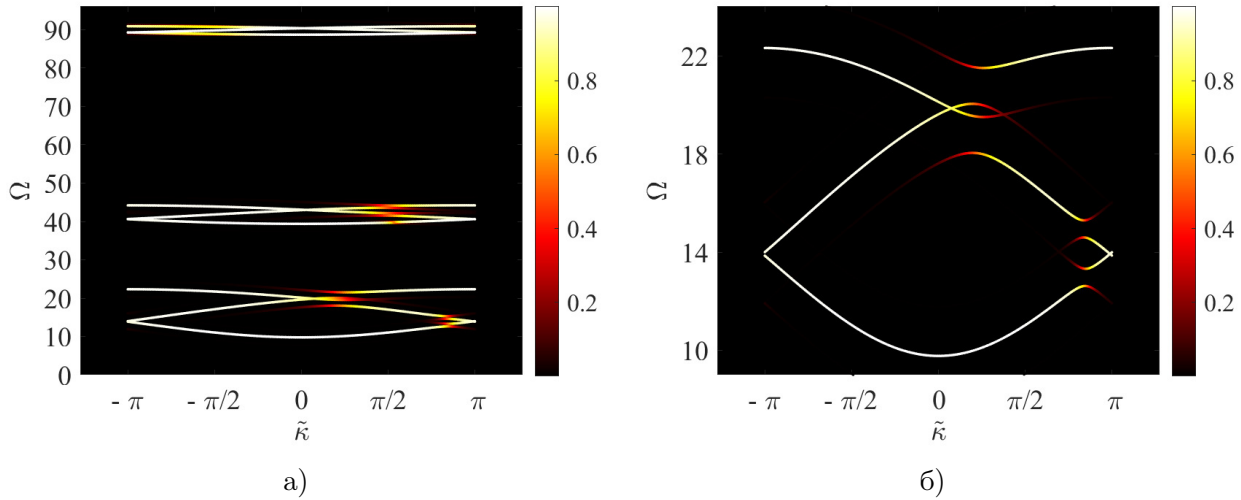
Слика 5.13: Дисперзна карактеристика структуре са ПЕС: а) за прва три мода осциловања, б) за први мод осциловања.



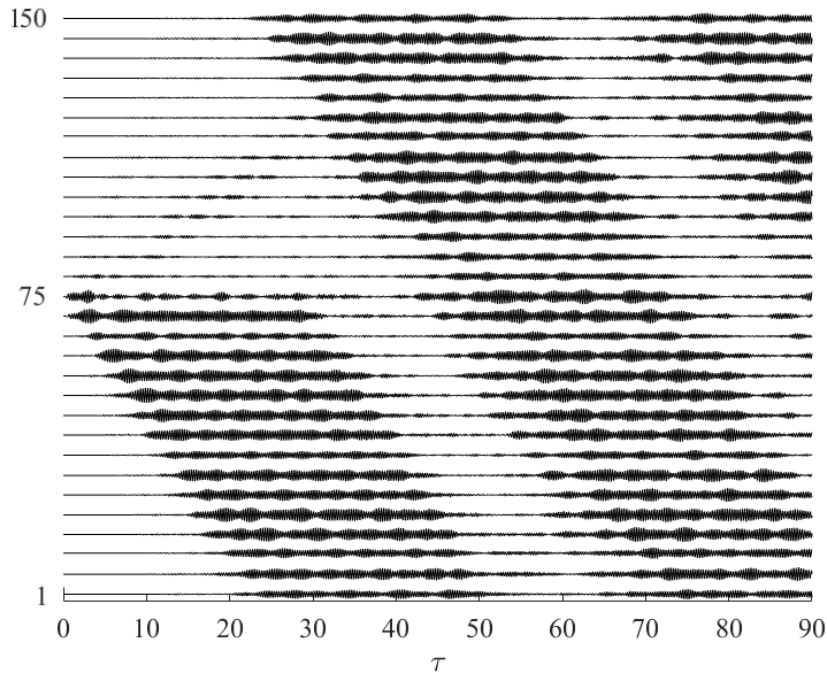
Слика 5.14: Простирање механичких таласа кроз периодичну структуру, услед побуде хармонијском силом са $\Omega_p = 21,5$. Аксијална сила и карактеристике ПЕС су хармонијске функције времена, услед чега долази до једносмерног простирања таласа.

5.4.3 Пример структуре са Винклеровим еластичним слојем (ВЕС)

При прорачунима су узете у обзир следеће вредности уведених параметара временске модулатије: $F_0 = 0,2$, $c_s = 100$, $\Omega_m = 2$, $\delta_m = 0,1$ и $A_m = 0,2$. На Сл. 5.15а приказана је дисперзна карактеристика за прва три мода осциловања, док је на Сл. 5.15б приказана само за фреквенцијски опсег који одговара првом моду осциловања. Одабрана је фреквенција побуде $\Omega_p = 20,8$ која се налази у опсегу четврте једносмерне зоне заустављања, приказане у другој колони (ВЕС) Табеле 5.1. На Сл. 5.16 приказано је једносмерно простирање таласа кроз структуру.



Слика 5.15: Дисперзна карактеристика структуре са ВЕС: а) за прва три мода осциловања, б) за први мод осциловања.

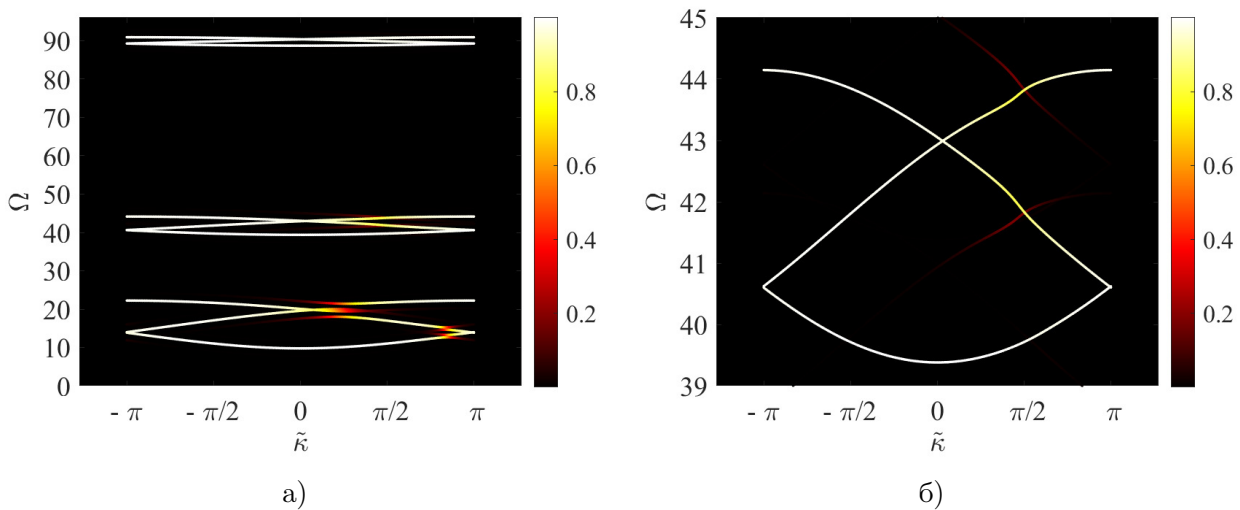


Слика 5.16: Простирање механичких таласа кроз периодичну структуру, услед побуде хармонијском силом са $\Omega_p = 20,8$. Аксијална сила и карактеристике ВЕС су хармонијске функције времена, услед чега долази до једносмерног простирања таласа.

5.4.4 Упоредна анализа добијених резултата

На Сл. 5.5, 5.13а и 5.15а се може видети да се ширина фреквенцијског опсега модова и једносмерних зона заустављања смањује са порастом фреквенције. Такође, поређењем дисперзне карактеристике за сваки од разматраних примера, на Сл. 5.5, 5.13а и 5.15а, може се приметити да постоје врло мале разлике у фреквенцијским опсезима на којима се налазе модови осциловања, те је и ширина комплетних (двосмерних) зона заустављања које се налазе између њих приближно иста у сваком примеру. Може се закључити да је просторна периодичност разматраних система доминантан фактор који утиче на структуру дијаграма дисперзне карактеристике, док утицаји пригушења и ефекта смицања слојева између греда нису тако значајни. Међутим, када се разматрају једносмерне зоне заустављања, може се приметити да се оне не јављају у фреквенцијском нивоу трећег мода код структуре са Пастернаковим вискоеластичним слојевима.

С обзиром на то да су у оквиру модела са ПВС узети у обзир ефекти пригушења, потребно је посебно размотрити утицај дисипације механичке енергије на ниво фреквенција на коме се јављају једносмерне зоне заустављања. На Сл. 5.17а је приказан дијаграм дисперзне карактеристике за структуру са ПВС, који је одређен за коефицијент пригушења $\beta_0 = 1$, тј. за његову десет пута већу вредност. Поређењем са Сл. 5.5 може се приметити да се у овом случају једносмерне зоне заустављања јављају само у оквиру првог мода осциловања. На Сл. 5.17б се може видети да су се одговарајуће једносмерне зауставне зоне које су видљиве на Сл. 5.7 затвориле. Дакле, када се узму у обзир ефекти дисипације, долази до снижавања фреквенцијског нивоа на коме се јављају једносмерне зоне заустављања. Међутим, положај двосмерних зона заустављања и у овом случају остаје непромењен.



Слика 5.17: Дисперзна карактеристика структуре са ПВС, за $\beta_0 = 1$: а) за прва три мода осциловања, б) за први мод осциловања.

У случају система са ВЕС, једносмерне зоне пропагације за трећи мод се налазе на опсегу $\tilde{k} < 0$, што је приказано на Сл. 5.15а (назначене жутом бојом). Самим тим ће групна брзина таласа са фреквенцијама у оквиру тих једносмерних зона пропагације бити позитивна. Поређењем дисперзне карактеристике за два разматрана модела еластичних слојева, приказане на Сл. 5.15а и 5.13а, може се закључити да је до промене смера групне брзине механичких таласа дошло услед тога што је узет у обзир и утицај смицања еластичног слоја. Уколико би се на дијаграму простирања механичких таласа кроз периодичну структуру приказали таласи који одговарају некој од тих фреквенција, њихов смер би био удесно у односу на место дејства силе, тј. у супротном смеру него што је приказано на Сл. 5.16.

6 Закључак

Истраживања спроведена у оквиру ове докторске дисертације обухватају анализу простирања таласа кроз периодичне структуре које припадају класи фононских структура и метаструктура, као и квазипериодичних структура. Размотрене су сложене структуре које се састоје од еластичних греда, крутих тела и дискретних механичких подсистема, као што су еластичне опруге, масени резонатори, инертери и инерцијални амплификатори. Такве просторно-периодичне и квазипериодичне структуре показују динамичка својства која нису присутна код њихових основних градивних елемената, нарочито у погледу пригушења механичких таласа на одређеним фреквентним опсезима, што их чини погодним за примене у областима као што је заштита осетљивих инструмената и изолација грађевинских конструкција од градске буке, сеизмичких поремећаја и олујних ветрова. Посебна пажња посвећена је ефектима једносмерног простирања таласа до којих доводи хармонијска модулација одређених параметара периодичне структуре у току времена.

Коришћењем методе трансфер матрице развијен је математички модел који омогућава анализу различитих конфигурација еластичних греда, крутих тела и дискретних механичких подсистема. Аналитички је одређена трансфер матрица крутог тела, независно од структурних носача са којима је оно повезано. Будући да се греде налазе под произвољним углом, долази до спрезања осцилација у аксијалном и трансверзалном правцу, те су при формирању вектора стања узети у обзир аксијална и трансверзална померања и силе, као и угао закретања попречног пресека и момент савијања. Утицај дискретних механичких подсистема на носећу структуру је такође моделиран уз помоћ методе трансфер матрице, те се множењем одговарајућих матрица може одредити трансфер матрице целокупне јединичне ћелије периодичне структуре. Добијена трансфер матрица је проређена, што значајно смањује сложеност нумеричких прорачуна, посебно када се укључе ефекти смицања и ротације попречних пресека греда у оквиру Тимошенкове теорије греде. Применом Флокет-Блохове теореме и периодичних граничних услова, формиран је проблем сопствених вредности чијим решавањем су одређене и визуализоване дисперзне карактеристике различитих механичких система. Верификација резултата добијених за периодичне структуре које се састоје од еластичних греда и крутих тела, извршена је поређењем са резултатима добијеним уз помоћ методе коначних елемената у комерцијалном софтверу. Показано је да предложени модел даје задовољавајуће резултате у домену првих неколико модова осциловања, односно на нижим фреквенцијама, где постоји добро слагање резултата.

Анализа дисперзних карактеристика одређених за различите примере периодичне структуре је показала да на зауставне зоне, које настају услед Бреговог расејања, доминантно утиче изражен контраст између материјалних карактеристика еластичних греда, док присуство крутог тела доводи до њиховог додатног увећања. Када су у питању зауставне зоне које настају услед ефеката локалне резонанције, показано је да у погледу флексибилности и могућности контроле и функционалног дизајна, инерцијални амплификатори имају значајну предност у односу на традиционалне дискретне механичке подсистеме, тј. механичке елементе као што су опруга, пригушивач, масени резонатор и инертер.

Проучене су квазипериодичне структуре које се састоје од коаксијалних Тимошенкових греда и крутих тела. Образац уз помоћ кога се у периодичну структуру уводи контролисана (дизајнирана) неуређеност, заснива се на хармонијској функцији параметра квазипериодичности и редног броја јединичне ћелије структуре. Иако су такве структуре суштински аperiодичне, код њих такође долази до формирања зауставних зона, а уз помоћ дијаграма на коме су приказане сопствене фреквенције осциловања за сваку вредност параметра квазипериодичности, размотрена је појава локализације таласа на крајевима структуре.

За валидацију резултата добијених одређивањем сопствених фреквенција осциловања метаструктура, коришћена је функција фреквентног одзива померања. Фрактални спектар који је видљив на тим дијаграмима подсећа на облик Хофстадтеровог лептира познатог у квантној механици, а он одговара зонама заустављања. Сопствене фреквенције осциловања одговарају фреквентним опсезима проводних зона и могу се појавити у оквиру зауставних зона само под одређеним условима, при чему може доћи до локализације механичких таласа који одговарају тим фреквенцијама. Код описаних квазипериодичних структура се услед промене материјалних својстава према одређеном обрасцу јављају проводни модови осциловања при сопственим фреквенцијама које се налазе у оквиру зауставних зона, при чему долази до локализације таласа на крају структуре. Показано је да са повећањем броја јединичних ћелија структура поприма карактеристике бесконачне структуре код које се јављају и гранични модови, препознатљиви као дискретне гране сопствених фреквенција које се протежу кроз зоне заустављања. За карактеристичне сопствене фреквенције приказани су и модови осциловања структуре, чиме је потврђена локализација у виду наглог пораста њихове амплитуде на крају структуре. Показано је да је локализација знатно израженија код граничних модова који су присутни код структура са великим бројем јединичних ћелија. Такође је показано да је и код квазипериодичних структура варијација материјалних карактеристика греда доминантна у односу на варијацију параметара који-ма су дефинисане карактеристике крутог тела.

Анализиран је и утицај временски променљивих карактеристика механичког система на дисперзну карактеристику просторно-периодичног система паралелних аксијално оптерећених греда, повезаних различитим еластичним или вискоеластичним слојевима. Показано је да услед просторне периодичности система долази до формирања зауставних зона у оквиру којих није могуће простирање таласа у свим доступним смеровима, док се услед временске периодичности одређених параметара структуре формирају и једносмерне зауставне зоне. Услед тога је нарушен принцип реципрочне пропагације таласа, те се таласи чије фреквенције припадају опсегу једносмерних зауставних зона могу протирати само у једном смеру у односу на место побуде.

Математички модел који је развијен применом трансфер матрице може се применити и на сложеније једнодимензионалне и квази-једнодимензионалне структуре, а могу се проучити и нелинеарни ефекти код инерцијалних амплификатора. Поред тога, у будућим истраживањима је потребно размотрити и утицај торзионих вибрација, као и утицај ексцентрицитета крутог тела, а на различите начине се могу остварити и гироскопски ефекти који такође могу имати занимљиве ефекте у погледу дисперзне карактеристике проучаваних периодичних структура. У том контексту се могу проучити и услови под којима долази до феномена *кросинга* и *виринага*. Такође се при проучавању фононских структура које садрже различите еластичне и вискоеластичне слојеве могу користити и неки други модели, као што је Керов модел у оквиру кога је узета у обзир интеракција између различитих опруга. Може се размотрити и утицај вискоеластичних слојева базираних на Келвин-Војтовом моделу, као и неки сложенији модели код којих се јавља извод нецелог реда (фракциони извод). Када су у питању квазипериодичне структуре, посебно се могу проучити и ефекти до којих доводи варијација фазног помераја, у оквиру обрасца на основу кога је дефинисана квазипериодичност одабране карактеристике структуре. У том контексту се уз помоћ тополошких инваријанти може испитати и постојање тополошки заштићених граничних модова на чију појаву не утичу мале варијације или грешке у структури. Експериментална валидација предложених модела била би од великог значаја у пракси, посебно у погледу одређивања толеранција при производњи, као и процене утицаја структурног пригушења на дисперзну карактеристику.

7 Литература

- [1] K. F. Graff, Wave motion in elastic solids, New York, NY: Dover Publications, 1975.
- [2] S. S. Rao, Vibration of Continuous Systems, John Wiley & Sons, Inc., 2007.
- [3] V. Vujicic, Teorija oscilacija, Beograd: Savremena Administracija, 1967.
- [4] Н. Младеновић, Н. Триповић, Динамика, Београд: Машински факултет Универзитета у Београду, 2015.
- [5] A. Banerjee, R. Das, E. P. Calius, Waves in structured mediums or metamaterials: a review, Archives of Computational Methods in Engineering. 26 (2019) 1029-1058. DOI:10.1007/s11831-018-9268-1.
- [6] Ј. Вуковић, А. Обрадовић, Теорија осцилација, Београд: Машински факултет Универзитета у Београду, 2021.
- [7] Y. Jin, Y. Pennec, B. Djafari-Rouhani, Phononic Metastructures with Ultrawide Low-Frequency Three-Dimensional Bandgaps as Broadband Low-Frequency Filter, Scientific Reports. 11 (2021) 7137. DOI:10.1038/s41598-021-86520-8.
- [8] A. Ozmutlu, M. Ebrahimian, M. I. Todorovska, Wave propagation in buildings as periodic structures: Timoshenko beam with rigid floor slabs model, Journal of Engineering Mechanics. 144(4) (2018) 04018010. DOI:10.1061/(ASCE)EM.1943-7889.0001436.
- [9] N. Fukuwa, S. Matsushima, Wave dispersion and optimal mass modelling for one-dimensional periodic structures, Earthquake engineering and structural dynamics. 23 (1994) 1165-1180. DOI:10.1002/eqe.4290231102.
- [10] M. I. Hussein, M. Ruzzene, M. Leamy, Dynamics of Phononic Materials and Structures: Historical Origins, Recent Progress, and Future Outlook, Applied Mechanics Reviews. 66 (2014) 040802. DOI:10.1115/1.4026911.
- [11] M. I. Hussein, G. M. Hulbert, R. A. Scott, Dispersive elastodynamics of 1D banded materials and structures: analysis, Journal of Sound and Vibration. 289 (2006) 779-806. DOI:10.1016/j.jsv.2005.02.030.
- [12] Muhammad, C. W. Lim, From Photonic Crystals to Seismic Metamaterials: A Review via Phononic Crystals and Acoustic Metamaterials, Archives of Computational Methods in Engineering. 29 (2022) 1137-1198. DOI:10.1007/s11831-021-09612-8.
- [13] Y. Xiao, J. Wen, D. Yu, X. Wen, Flexural wave propagation in bemas with periodically attached vibration absorbers: Band-gap behavior and band formation mechanisms, Journal of Sound and Vibration. 332 (2013) 867-893. DOI:10.1016/j.jsv.2012.09.035.
- [14] P. Jiao, J. Mueller, J. R. Raney, X. Zheng, A. H. Alavi, Mechanical Metamaterials and beyond, Nature Communications. 14 (2023) 6004. DOI:10.1038/s41467-023-41679-8.
- [15] M-H. Lu, L. Feng, Y-F. Chen, Phononic crystals and acoustic metamaterials, Materials today. 12(12) (2009) 34-42. DOI:10.1016/S1369-7021(09)70315-3.
- [16] G. Hu, L. Tang, R. Das, Internally coupled metamaterial beam for simultaneous vibration suppression and low frequency energy harvesting. Journal of Applied Physics. 123(5) (2018) 055107. DOI:10.1063/1.5011999.

- [17] Y. Li, E. Baker, T. Reissman, C. Sun, W. K. Liu, Design of mechanical metamaterials for simultaneous vibration isolation and energy harvesting. *Applied Physics Letters*. 111(25) (2017) 251903. DOI:10.1063/1.5008674.
- [18] K. Devarajan, B. Santhosh, Inertial amplification as a performance enhancement method for snap-through vibration energy harvester, *Applied Mechanical Modelling*. 137 (2025) 115734. DOI:10.1016/j.apm.2024.115734.
- [19] H. Nassar, B. Yousefzadeh, R. Fleury, M. Ruzzene, A. Alu, C. Daraio, A. N. Norris, G. Huang, M. R. Haberman, Nonreciprocity in acoustic and elastic materials, *Nature Reviews Materials*. 5(9) (2020) 667-685. DOI:10.1038/s41578-020-0206-0.
- [20] G. Trainiti, M. Ruzzene, Non-reciprocal elastic wave propagation in spatiotemporal periodic structures, *New Journal of Physics*. 18 (2016) 083047. DOI: 10.1088/1367-2630/18/8/083047.
- [21] M. A. Attarzadeh, M. Nouh, Non-reciprocal elastic wave propagation in 2D phononic membranes with spatiotemporally varying material properties, *Journal of Sound and Vibration*. 422 (2018) 264-277. DOI:10.1016/j.jsv.2018.02.028.
- [22] E. Riva, M. Di Ronco, A. Elabd, G. Cazzulani, F. Braghin, Non-reciprocal wave propagation in discretely modulated spatiotemporal plates, *Journal of Sound and Vibration*. 471 (2020) 115186. DOI:10.1016/j.jsv.2020.115186.
- [23] N. Rosic, D. Karlicic, M. Cajic, M. Lazarevic, Parametrically excited unidirectional wave propagation in thin beam phononics, *Theoretical and Applied Mechanics*. 49:2 (2022) 137–155. DOI:10.2298/TAM221030010R.
- [24] J. Marconi, E. Riva, M. Di Ronco, G. Cazzulani, F. Braghin, M. Ruzzene, Experimental Observation of Nonreciprocal Band Gaps in a Space-Time-Modulated Beam Using a Shunted Piezoelectric Array, *Physical Review Applied*. 13 (2020) 031001. DOI:10.1103/PhysRevApplied.13.031001.
- [25] M.A. Attarzadeh, J. Callanan, M. Nouh, Experimental Observation of Nonreciprocal Waves in a Resonant Metamaterial Beam, *Physical Review Applied*. 13 (2020) 021001. DOI:10.1103/PhysRevApplied.13.021001.
- [26] R. L. Thomes, D. Beli, C. J. De Marqui, Space-time wave localization in electromechanical metamaterial beams with programmable defects, *Mechanical Systems and Signal Processing*. 167 (2022) 108550. DOI:10.48550/arXiv.2108.13742.
- [27] G. Trainiti, Y. Xia, J. Marconi, G. Cazzulani, A. Erturk, M. Ruzzene, Time-Periodic Stiffness Modulation in Elastic Metamaterials for Selective Wave Filtering: Theory and Experiment, *Physical Review Letters*. 122 (2019) 124301. DOI:10.1103/PhysRevLett.122.124301.
- [28] J. Vila, R. K. Pal, M. Ruzzene, G. Trainiti, A bloch-based procedure for dispersion analysis of lattices with periodic time-varying properties, *Journal of Sound and Vibration*. 406 (2017) 363-377. DOI:10.1016/j.jsv.2017.06.011.
- [29] E. Riva, J. Marconi, G. Cazzulani, F. Braghin, Generalized plane wave expansion method for non-reciprocal discretely modulated waveguides, *Journal of Sound and Vibration*. 449 (2019) 172-181. DOI:10.1016/j.jsv.2019.03.001.
- [30] Y. Wang, B. Yousefzadeh, H. Chen, H. Nassar, G. Huang, C. Daraio, Observation of Nonreciprocal Wave Propagation in a Dynamic Phononic Lattice, *Physical Review Letters*. 121 (2018) 194301(6). DOI:10.1103/PhysRevLett.121.194301.

- [31] D. Karličić, M. Cajić, S. Paunović, A. Obradović, S. Adhikari, J. Christensen, Non-reciprocal wave propagation in time-modulated elastic lattices with inerters, *Applied Mathematical Modelling*. 117 (2023) 316–335. DOI:10.1016/j.apm.2022.12.029.
- [32] J. Liu, H. Guo, T. Wang, A Review of Acoustic Metamaterials and Phononic Crystals, *Crystals*. 10(4) (2020) 305. DOI:10.3390/cryst10040305
- [33] K. Wang, J. Zhou, D. Tan, Z. Li, Q. Lin, D. Xu. A brief review of metamaterials for opening low-frequency band gaps. *Applied Mathematics and Mechanics*. 43 (2022) 1125–1144. DOI:10.1007/s10483-022-2870-9
- [34] D. J. Mead, Wave propagation in continuous periodic structures: research contributions from Southampton, 1964-1995, *Journal of Sound and Vibration*. 190 (1996) 495–524. doi:10.1006/jsvi.1996.0076.
- [35] D.J. Mead, Wave propagation and natural frequencies in periodic systems: I. Monocoupled systems, *Journal of Sound and Vibration*. 40(1) (1975) 1-18. doi:10.1016/S0022-460X(75)80227-6.
- [36] W. Ding, T. Chen, C. Chen, D. Chronopoulos, B. Assouar, Y. Wen, J. Zhu, Description of bandgaps in chiral phononic crystals by analogy with Thomson scattering, *New Journal of Physics*. 25 (2023) 103001. DOI:10.1088/1367-2630/acfc5e.
- [37] D. J. Mead, A new method of analyzing wave propagation in periodic structures; applications to periodic Timoshenko beams and stiffened plates, *Journal of Sound and Vibration*. 104(1) (1986) 9-27. DOI:10.1016/S0022-460X(86)80128-6.
- [38] M. J. Nieves, M. Brun, Dynamic characterization of a periodic microstructured flexural system with rotational inertia, *Philosophical Transactions of the Royal Society A*. 377 (2019) 20190113. DOI:10.1098/rsta.2019.0113.
- [39] M. Brun, A. B. Movchan, I. S. Jones, Phononic Band Gap Systems in Structural Mechanics: Finite Slender Elastic Structures and Infinite Periodic Waveguides, *Journal of Vibration and Acoustics*. 135 (2013) 041013-1. DOI:10.1115/1.4023819.
- [40] Y. K. Lin, T. J. McDaniel, Dynamics of beam-type periodic structures, *Journal of Engineering for Industry*. 91(4) (1969) 1133. DOI:10.1115/1.3591761.
- [41] S. Liu, S. Li, H. Shu, W. Wang, D. Shi, L. Dong, H. Lin, W. Liu, Research on the elastic wave band gaps of curved beam of phononic crystals, *Physica B: Condensed Matter*. 457 (2015) 82-91. DOI:10.1016/j.physb.2014.09.021.
- [42] G. Trainiti, J. J. Rimoli, M. Ruzzene, Wave propagation in periodically undulated beams and plates, *International Journal of Solids and Structures*. 75-76 (2015) 260-276. DOI:10.1016/j.ijsolstr.2015.08.019.
- [43] T. Jiang, Q. Han, C. Li, Complex band structure and evanescent wave propagation of composite corrugated phononic crystal beams, *Acta Mechanica*. 234 (2023) 2783–2808. DOI:10.1007/s00707-023-03522-5.
- [44] F. Gao, Z. Wu, F. Li, C. Zhang, Numerical and experimental analysis of the vibration and band-gap properties of elastic beams with periodically variable cross sections, *Waves in Random and Complex Media*. 29 (2019) 299-316. DOI:10.1080/17455030.2018.1430918.
- [45] Z. Chen, G. Wang, F. Shi, C. W. Lim, Analytical modeling and numerical analysis for tunable topological phase transition of flexural waves in active sandwiched phononic

- beam systems, *International Journal of Mechanical Sciences*. 223 (2022) 107292. DOI:10.1016/j.ijmecsci.2022.107292.
- [46] N. Rosic, D. Karlicic, M. Cajic, S. Adhikari, M. Lazarevic, Wave propagation in tailored metastructures consisting of elastic beams and rigid bodies, *Philosophical Transactions of the Royal Society A*. 382 (2024) 20230362. DOI:10.1098/rsta.2023.0362.
- [47] Z. Jia, Y. Chen, H. Yang, L. Wang, Designing Phononic Crystals with Wide and Robust Band Gaps, *Physical Review Applied*. 9 (2018) 044021. DOI:10.1103/PhysRevApplied.9.044021.
- [48] M. I. N. Rosa, B. L. Davis, L. Liu, M. Ruzzene, M. I. Hussein, Material vs. structure: Topological origins of band-gap truncation resonances in periodic structures, *arXiv: cond-mat.mtrl-sci*. 2301.00101v1 (2022). DOI:10.48550/arXiv.2301.00101.
- [49] H. J. Xiang, Z. F. Shi, S. J. Wang, Y. L. Mo, Periodic materials-based vibration attenuation in layered foundations: experimental validation, *Smart Materials and Structures*. 21(11) (2012) 112003. DOI:10.1088/0964-1726/21/11/112003.
- [50] A. Banerjee, R. Das, E. P. Calius, Frequency graded 1D metamaterials: A study on the attenuation bands, *Journal of Applied Physics*. 122(7) (2017) 075101. DOI:10.1063/1.4998446.
- [51] M. S. Kushwaha, P. Halevi, L. Dobrzynski, B. Djafari-Rouhani, Acoustic band structure of periodic elastic composites, *Physical Review Letters*. 13(71) (1993) 2022-2025. DOI:10.1103/PhysRevLett.71.2022.
- [52] R. Khajehtourian, M. I. Hussein, Dispersion characteristics of a nonlinear elastic metamaterial, *AIP Advances*. 4(12) (2014) 124308. DOI:10.1063/1.4905051.
- [53] L. Brillouin, *Wave propagation in periodic structures, electric filters and crystal lattices*, Dover Publications Inc., 1946.
- [54] M. Ichchou, S. Akrou, J. M. Mencik, Guided waves group and energy velocities via finite elements, *Journal of Sound and Vibration*. 305(4-5) (2007) 931-944. DOI:10.1016/j.jsv.2007.05.007.
- [55] J. C. Slater, Interaction of Waves in Crystals, *Reviews of Modern Physics*. 30(1) (1958) 197-222. DOI:10.1103/revmodphys.30.197.
- [56] P. Sheng, X. X. Zhang, Z. Liu, C. T. Chan, Locally resonant sonic materials. *Physica B: Condensed Matter*. 338(1-4) (2003) 201-205. DOI:10.1016/S0921-4526(03)00487-3.
- [57] C. Chesnais, C. Boutin, H. Stephane, Effects of the local resonance on the wave propagation in periodic frame structures: generalized Newtonian mechanics, *The Journal of the Acoustical Society of America*. 132(4) (2012) 2873-2886. DOI:10.1121/1.4744975.
- [58] L. Liu, M. I. Hussein, Wave Motion in Periodic Flexural Beams and Characterization of the Transition Between Bragg Scattering and Local Resonance, *Journal of Applied Mechanics*. 79 (2012) 011003-1. DOI:10.1115/1.4004592.
- [59] A. Colombi, P. Roux, M. Rupin, Sub-wavelength energy trapping of elastic waves in a metamaterial, *The Journal of the Acoustical Society of America*. 136(2) (2014) EL192-EL198. DOI:10.1121/1.4890942.
- [60] A. Stein, M. Nouh, T. Singh, Widening, transition and coalescence of local resonance band gaps in multi-resonator acoustic metamaterials: From unit cells to finite chains, *Journal of Sound and Vibration*. 523 (2022) 116716. DOI:10.1016/j.jsv.2021.116716.

- [61] Y. Li, Z. Cheng, N. Hu, Y. Yang, Z. Xiao, Modeling, design and experiments of a ball-screw inerter with mechanical diodes, *Journal of Sound and Vibration*. 504 (2021) 116121. DOI:10.1016/j.jsv.2021.116121.
- [62] F. Qian, Y. Luo Sr., H. Sun, W. C. Tai, L. Zuo, Performance enhancement of a base-isolation structure using optimal tuned inerter dampers, *Proceedings Volume 10967, Active and Passive Smart Structures and Integrated Systems XIII*. (2019) 1096715. DOI:10.1117/12.2514380Y.
- [63] G. Hu, A. C. M. Austin, V. Sorokin, L. Tang, Metamaterial beam with graded local resonators for broadband vibration suppression, *Mechanical Systems and Signal Processing*. 146 (2021) 106982. DOI:10.1016/j.ymssp.2020.106982.
- [64] J. S. Wu, C. T. Chen, A continuous-mass TMM for free vibration analysis of a non-uniform beam with various boundary conditions and carrying multiple concentrated elements, *Journal of Sound and Vibration*. 311 (2008) 1420-1430. DOI:10.1016/j.jsv.2007.09.048.
- [65] B. Sharma, C. Sun, Impact load mitigation in sandwich beams using local resonators, *Journal of Sandwich Structures & Materials*. 18(1) (2016) 50-64. DOI:10.1177/1099636215583171.
- [66] B. Sharma, C.-T. Sun, Local resonance and Bragg bandgaps in sandwich beams containing periodically inserted resonators, *Journal of Sound and Vibration*. 364 (2016) 133-146. DOI:10.1016/j.jsv.2015.11.019.
- [67] J. Zhou, K. Wang, D. Xu, H. Ouyang, Local resonator with high-static-low-dynamic stiffness for lowering band gaps of flexural wave in beams, *Journal of Applied Physics*. 121(4) (2017) 044902. DOI:10.1063/1.4974299.
- [68] T. Wang, M. Sheng, Q. Qin, Multi-flexural band gaps in an Euler-Bernoulli beam with lateral local resonators, *Physics Letters A*. 380 (2016) 525-529. DOI:10.1016/j.physleta.2015.12.010.
- [69] G. Carta, M. Brun, Bloch-Floquet waves in flexural systems with continuous and discrete elements, *Mechanics of Materials*. 87 (2015) 11-26. DOI:10.1016/j.mechmat.2015.03.004.
- [70] Y. Xiao, J. Wen, G. Wang, X. Wen, Theoretical and Experimental Study of Locally Resonant and Bragg Band Gaps in Flexural Beams Carrying Periodic Arrays of Beam-Like Resonators, *Journal of Vibration and Acoustics*. 135(4) (2013) 041006. DOI:10.1115/1.4024214.
- [71] D. Yaozong, L. Gang, W. Honggang, Q. Jing, Flexural vibration band gaps in Timoshenko beams with locally resonant structures, *Journal of Applied Physics*. 100 (2006) 124901. DOI:10.1063/1.2400803.
- [72] A. Banerjee, Non-dimensional analysis of the elastic beam having periodic linear spring mass resonators, *Meccanica*. 55 (2020) 1181-1191. DOI:10.1007/s11012-020-01151-z.
- [73] G. Failla, R. Santoro, A. Burlon, A. Francesco Rusillo, An exact approach to the dynamics of locally-resonant beams, *Mechanics Research Communications*. 103 (2020) 103460. DOI:10.1016/j.mechrescom.2019.103460.
- [74] G. Wang, F. Shi, Z. Chen, Y. Yu, C. W. Lim, Controllable flexural wave bandgap in extensible metamaterial beams with embedded multiple resonators, *Continuum Mechanics and Thermodynamics*. 36 (2023) 1-19. DOI:10.1007/s00161-023-01228-6.

- [75] M. Cenedese, E. Belloni, F. Braghin, Interaction of Bragg scattering bandgaps and local resonators in mono-coupled periodic structures, *Journal of Applied Physics*. 129 (2021) 124501. DOI:10.1063/5.0038438.
- [76] B. Yuan, Y. Chen, M. Jiang, S. Tang, M. He, M. Tu, On the Interaction of Resonance And Bragg Scattering Effects for the Locally Resonant Phononic Crystal with Alternating Elastic and Fluid Matrices, *Archives of Acoustics*. 42(4) (2017) 725–733. DOI:10.1515/aoa-2017-0075
- [77] X. Lao, Y. Yu, F. Zhang, J. Ye, X. Xu, Z. Xia, Research on Locally Resonant Characteristics of Pipelines with Periodic Structure, *Micromachines*. 13 (2022) 850. DOI:10.3390/mi13060850.
- [78] M. Iqbal, M. M. Jaya, O. S. Bursi, A. Kumar, R. Ceravolo, Flexural band gaps and response attenuation of periodic piping systems enhanced with localized and distributed resonators, *Scientific Reports*. 10 (2020) 85. DOI:10.1038/s41598-019-56724-0.
- [79] M. M. N. Frandsen, R. O. Bilal, S. J. Jensen, M. I. Hussein, Inertial amplification of continuous structures: Large band gaps from small masses, *Journal of Applied Physics*. 119 (2016) 124902. DOI:10.1063/1.4944429.
- [80] S. Chowdhury, A. Banerjee, S. Adhikari, A Critical Review on Inertially-Amplified Passive Vibration Control Devices, *Archives of Computational Methods in Engineering*. 31 (2024) 2139–2175. DOI:10.1007/s11831-023-10040-z.
- [81] G. Acar, C. Yilmaz, Experimental and numerical evidence for the existence of wide and deep phononic gaps induced by inertial amplification in two-dimensional solid structures, *Journal of Sound and Vibration*. 332(24) (2013) 6389–6404. DOI:10.1016/j.jsv.2013.06.022.
- [82] Y. Li, N. Zhao, S. Yao, Nonlinear dynamics of 1D meta-structure with inertia amplification, *Applied Mathematical Modelling*. 118 (2023) 728–744. DOI:10.1016/j.apm.2023.01.039.
- [83] P. Celli, A. Palermo, Time modulated inerters as building blocks for nonreciprocal mechanical devices, *Journal of Sound and Vibration*. 572 (2024) 118178. DOI:10.1016/j.jsv.2023.118178.
- [84] V. S. Sorokin, Longitudinal wave propagation in a one-dimensional quasi-periodic waveguide, *Proceedings of the Royal Society A*. 475 (2019) 20190392. DOI:10.1098/rspa.2019.0392.
- [85] T. Chatterjee, D. Karlicic, M. Cajic, S. Adhikari, M. I. Friswell, Uncertainty quantification in inerter-based quasiperiodic lattices, *International Journal of Mechanical Sciences*. 249 (2023) 108258. DOI:10.1016/j.ijmecsci.2023.108258.
- [86] M. Gupta, M. Ruzzene, Dynamics of Quasiperiodic Beams, *Crystals*. 10 (2020) 1144. DOI:10.3390/cryst10121144.
- [87] M. Gei, Wave propagation in quasiperiodic structures: stop/pass band distribution and prestress effects, *International Journal of Solids and Structures*. 47 (2010) 3067–3075. DOI:10.1016/j.ijsolstr.2010.07.008.
- [88] Y. Xia, A. Erturk, M. Ruzzene, Topological Edge States in Quasiperiodic Locally Resonant Metastructures, *Physical Review Applied*. 13 (2020) 014023. DOI:10.1103/PhysRevApplied.13.014023.

- [89] R. K. Pal, M. I. N. Rosa, M. Ruzzene, Topological bands and localized vibration modes in quasiperiodic beams, *New Journal of Physics*. 21 (2019) 093017. DOI:10.1088/1367-2630/ab3cd7.
- [90] D. J. Apigo, K. Qian, C. Prodan, E. Prodan, Topological edge modes by smart patterning, *Physical Review Materials*. 2 (2018) 124203. DOI:10.1103/PhysRevMaterials.2.124203.
- [91] D. J. Apigo, W. Cheng, K. F. Dobiszewski, E. Prodan, C. Prodan, Observation of Topological Edge Modes in a Quasiperiodic Acoustic Waveguide, *Physical Review Letters*. 122 (2019) 095501. DOI:10.1103/PhysRevLett.122.095501.
- [92] X. Ni, K. Chen, M. Weiner, D. J. Apigo, C. Prodan, A. Alu, E. Prodan, A. B. Khanikaev, Observation of Hofstadter butterfly and topological edge states in reconfigurable quasiperiodic acoustic crystals, *Communications Physics*. 2 (2019) 55. DOI:10.1038/s42005-019-0151-7.
- [93] J. W. Lee, J. Y. Lee, Free vibration analysis of functionally graded Bernoulli-Euler beams using an exact transfer matrix expression, *International Journal of Mechanical Sciences*. 122 (2017) 1-17. DOI:10.1016/j.ijmecsci.2017.01.011.
- [94] G. Chen, X. Zeng, X. Liu, X. Rui, Transfer matrix method for the free and forced vibration analyses of multi-step Timoshenko beams coupled with rigid bodies on springs, *Applied Mathematical Modelling*. 87 (2020) 152-170. DOI:10.1016/j.apm.2020.05.023.
- [95] Z-C. Wang, W-J. Yang, K-V. Yung, A transfer matrix method-based closed-form solution of sensitivities of dynamic properties and FRF for multi-span pipes under complex boundary conditions, *Mechanical Systems and Signal Processing*. 198 (2023) 110428. DOI:10.1016/j.ymssp.2023.110428.
- [96] Muhammad, C. W. Lim, Phononic metastructures with ultrawide low frequency three-dimensional bandgaps as broadband low frequency filter, *Scientific Reports*. 11 (2021) 7137. DOI:10.1038/s41598-021-86520-8.
- [97] A. Obradovic, S. Salinic, D. R. Trifkovic, N. Zoric, Z. Stokic, Free vibration of structures composed of rigid bodies and elastic beam segments, *Journal of Sound and Vibration*. 347 (2015) 126-138. DOI:10.1016/j.jsv.2015.03.001.
- [98] A. Tomovic, S. Salinic, A. Obradovic, A. Grbovic, M. Milovancevic, Closed-form solution for the free axial-bending vibration problem of structures composed of rigid bodies and elastic beam segments, *Applied Mathematical Modelling*. 77 (2020) 1148-1167. DOI:10.1016/j.apm.2019.09.008.
- [99] D.C.D. Oguamanam, Free vibration of beams with finite mass rigid tip load and flexural-torsional coupling, *International Journal of Mechanical Sciences*. 45 (2003) 963-979. DOI:10.1016/j.ijmecsci.2003.09.014.
- [100] S. Naguleswaran, Vibration of an Euler-Bernoulli stepped beam carrying a non-symmetrical rigid body at the step, *Journal of Sound and Vibration*. 271 (2004) 1121-1132. DOI:10.1016/S0022-460X(03)00574-1.
- [101] S. Chapra, R. Canale, *Numerical Methods for Engineers*, McGraw Hill, 2014.
- [102] X. Sun, The application of the Wittrick-Williams algorithm for free vibration analysis of cracked skeletal structures, *Thin-Walled Structures*, 159 (2021) 107307. DOI:10.1016/j.tws.2020.107307.

- [103] M. A. Heckl, Coupled waves on a periodically supported Timoshenko beam, *Journal of Sound and Vibration*. 252(5) (2002) 849-882. DOI:10.1006/jsvi.2001.3823.
- [104] C. Kittel, B. C. Kittel, *Introduction to solid state physics*, Wiley New York, 1976.
- [105] G. R. Cowper, The shear coefficient in Timoshenko's beam theory, *Journal of Applied Mechanics*. 33(2) (1966) 335. DOI:10.1115/1.3625046.
- [106] S. P. Timoshenko, On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars, *Philosophical Magazine and Journal of Science*. 41 (1921) 245. DOI:10.1080/14786442108636264.
- [107] J. Bao, Z. Shi, H. Xiang, Dynamic responses of a structure with periodic foundations, *Journal of Engineering Mechanics*. 138 (2012) 761-769. DOI:10.1061/(ASCE)EM.1943-7889.0000383.
- [108] G. Carta, G. F. Giaccu, M. Brun, A phononic band gap model for long bridges. The 'Brabau' bridge case, *Engineering Structures*. 140 (2017) 66-76. DOI:10.1016/j.engstruct.2017.01.064.
- [109] D. Younesian, A. Hosseinkhani, H. Askari, E. Esmailzadeh, Elastic and viscoelastic foundations: a review on linear and nonlinear vibration modeling and applications, *Nonlinear Dynamics*. 97 (2019) 853-895. DOI: 10.1007/s11071-019-04977-9.
- [110] T. M. Wang, J. E. Stephens, Natural frequencies of Timoshenko beams on pasternak foundations, *Journal of Sound and Vibration*. 51(2) (1977) 149-155. DOI:10.1016/S0022-460X(77)80029-1.
- [111] Y. Yesilce, Effect of Axial Force on the Free Vibration of Reddy-Bickford Multi-span Beam Carrying Multiple Spring-mass Systems, *Journal of Vibration and Control*. 16(1) (2010) 11-32. DOI:10.1177/1077546309102673.
- [112] Y. Q. Zhang, Y. Lu, G. W. Ma, Effect of compressive axial load on forced transverse vibrations of a double-beam system, *International Journal of Mechanical Sciences*. 50 (2008) 299-305. DOI:https://10.1016/j.ijmecsci.2007.06.003.
- [113] M. R. Ghaemdoost, F. Wang, S. Li, J. Yang, Numerical Investigation on the Transverse Vibration of Prestressed Beams, *Materials*. 14(9) (2021) 2273. DOI:10.3390/ma14092273.

Биографија аутора

Име и презиме:	Невена А. Росић (рођена Аранђеловић)
Датум рођења:	8. децембар 1994. године
Место рођења:	Београд, Република Србија
Адреса:	Универзитет у Београду - Машински факултет, Катедра за механику
Истраживачке области:	теоријска и примењена механика, биомедицинско инжењерство
e-mail:	nrosic@mas.bg.ac.rs

Образовање

2001.-2009.	Завршила основну школу „Ђура Даничић“ у Београду, са одличним успехом.
2009.-2013.	Завршила „Дванаесту београдску гимназију“, општи смер у Београду, са одличним успехом.
2013.-2016.	Студенткиња Основних академских студија, Универзитет у Београду - Машински факултет. Укупна просечна оцена током Основних академских студија износи 9,97 (девет и 97/100).
2015.	Поднела је, у својству проналазача, пријаву за признање малог патента под називом „Уређај за писање текста и управљање екстерним модулом на који је повезан, без гледања у екран“. Пријава МП-2015/0030 је поднета 5. јуна 2015. године.
2016.	Мали патент је уписан у Регистар малих патената 18. априла 2016. године, и објављен у Гласнику интелектуалне својине број 3/2016 дана 30. јуна 2016. године.
2016.-2018.	Студенткиња Мастер академских студија, модул Механика, Универзитет у Београду - Машински факултет. Укупна просечна оцена током Мастер академских студија износи 9,90 (девет и 90/100).
2018.	Дипломирала је 26. септембра 2018. године са оценом 10 (десет) и укупном просечном оценом током Мастер академских студија 9,90 (девет и 90/100), одбравивши Мастер рад на тему „Напонско-деформациона анализа стентова помоћу методе коначних елемената“ из предмета „Теорија коначних елемената“, под менторством проф. др Владимира Буљака.
2018.-...	Студенткиња Докторских академских студија на Машинском факултету Универзитета у Београду (бр. индекса Д01/2018). Кандидаткиња је од 28. децембра 2018. године запослена на Машинском факултету Универзитета у Београду, као асистент на Катедри за механику.
2019.	Почевши од фебруара 2019. године учествује на пројекту „Динамика хибридних система сложених структура. Механика материјала“, који је финансирало Министарство науке, технолошког развоја и иновација Владе Републике Србије.

2024. Почевши од августа 2024. године учествује на пројекту „Примена Хидрогел Јонотронике у Мекој Роботици“, у оквиру програма билатералне научне и технолошке сарадње између Републике Србије и Народне Републике Кине.

Познавање страних језика

- Енглески језик - говори, чита и пише,
- Немачки језик - говори, чита и пише,
- Француски језик - споразумева се у свакодневном говору.

Познавање рада на рачунару

- Има значајне вештине кодирања у програмским језицима C/C++ и C#, као и „embedded“ програмирања, уз напредно коришћење софтвера Matlab/Simulink, Latex и Microsoft Office.
- Има вишегодишње искуство у коришћењу софтвера Abaqus, ANSYS и COMSOL Multiphysics, као и SolidWorks, Inkscape и LabVIEW.
- Има сертификате за „web“ програмирање (HTML, PHP), објектно-оријентисано програмирање (сертификат за C# у Visual Studio и Java као положен изборни предмет на Основним академским студијама), рад са базама података (SQL Server), обраду слика и анимацију (GIMP, Macromedia Flash и 3D Studio MAX).

Похвале и награде

2013. Добитник је дипломе „Вук Караџић“ за постигнут успех при завршетку гимназије са просечном оценом 5.00 (пет и 00/100) у свакој школској години. Проглашена је за ђака генерације „Дванаесте београдске гимназије“ у Београду.

2013.-2016. Добитник је похвале за изванредан успех на првој, другој и трећој години Основних академских студија Машинског факултета Универзитета у Београду. У току прве и друге године Основних академских студија је била добитник стипендије за студенте Републике Србије, коју додељује Министарство просвете Републике Србије, док је на трећој години Основних академских студија била добитник стипендије Фонда за младе таленте Министарства омладине и спорта Републике Србије – „Доситеја“.

2015. Излагала је свој проналазак, „Уређај за писање текста и управљање екстерним модулом на који је повезан, без гледања у екран“, на Међународном фестивалу иновација, знања и стваралаштва „Тесла фест“, који је одржан у октобру 2015. године у Новом Саду и том приликом јој је додељена златна плакета са ликом Николе Тесле.

2016.-2018. Добитник је похвале за изванредан успех на првој и другој години Мастер академских студија Машинског факултета Универзитета у Београду. У току прве године Мастер академских студија је била добитник стипендије за студенте Републике Србије, коју додељује Министарство просвете Републике Србије, док је на другој години Мастер академских студија била добитник стипендије Фонда за младе таленте Министарства омладине и спорта Републике Србије – „Доситеја“.

2021.

Добитник награде „Растко Стојановић“ Српског друштва за механику, за самостални научни рад под насловом „Rotation Transformation Matrix of the Joint Coordinate System with the Application to the Knee Joint“, који је презентован на конференцији Eighth International Congress of Serbian Society of Mechanics, која је одржана јуна 2021. године у Крагујевцу.

Педагошка активност

2018.-...

Учествује у извођењу наставе на Основним и Мастер академским студијама, као асистент на следећим предметима катедре за Механику:

- Механика 1
- Механика 2
- Механика 3
- Механика М
- Механика робота
- Биомеханика ткива и органа
- Биомеханика локомоторног система

Остало

- Возачка дозвола за Б категорију возила.
- Стручна пракса 2017. године у компанији MikroElektronika.
- Вишегодишњи члан Српског друштва за механику.

Прилог 1.

Изјава о ауторству

Потписана Невена А. Росић

Број индекса Д1/2018

Изјављујем

да је докторска дисертација под насловом

Простирање таласа кроз метаструктуре од спрегнутих еластичних,
вискоеластичних и крутих сегмената

- резултат сопственог истраживачког рада,
- да предложена дисертација у целини и у деловима није била предложена за добијање било које друге дипломе према студијским програмима других високошколских установа,
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршила ауторска права и користила интелектуалну својину других лица.

У Београду, 16.5.2025.

Потпис докторанда

Прилог 2.

Изјава о истоветности штампане и електронске верзије докторског рада

Име и презиме аутора	<u>Невена А. Росић</u>
Број индекса	<u>Д1/2018</u>
Студијски програм	<u>Докторске академске студије - Машинско инжењерство</u>
Наслов рада	<u>Простирање таласа кроз метаструктуре од спрегнутих еластичних, вискоеластичних и крутих сегмената</u>
Ментори	<u>редовни професор др Михаило Лазаревић и виши научни сарадник др Милан Цајић, Математички институт САНУ</u>

Потписана Невена А. Росић

Изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предала за објављивање на порталу **Дигиталног репозиторијума Универзитета у Београду**.

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Београду.

У Београду, 16.5.2025.

Потпис докторанда

Прилог 3.

Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић” да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом:

Простирање таласа кроз метаструктуре од спрегнутих еластичних, вискоеластичних и крутих сегмената

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предала сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио.

1. Ауторство
2. Ауторство - некомерцијално
- ③ Ауторство - некомерцијално - без прераде
4. Ауторство - некомерцијално - делити под истим условима
5. Ауторство - без прераде
6. Ауторство - делити под истим условима

У Београду, 16.5.2025.

Потпис докторанда

1. Ауторство - Дозвољавање умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце, чак и у комерцијалне сврхе. Ово је најслободнија од свих лиценци.
2. Ауторство – некомерцијално. Дозвољавање умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела.
3. Ауторство - некомерцијално – без прераде. Дозвољавање умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела. У односу на све остале лиценце, овом лиценцом се ограничава највећи обим права коришћења дела.
4. Ауторство - некомерцијално – делити под истим условима. Дозвољавање умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада.
5. Ауторство – без прераде. Дозвољавање умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела.
6. Ауторство - делити под истим условима. Дозвољавање умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада. Слична је софтверским лиценцама, односно лиценцама отвореног кода.