УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ

МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Милица Јовалекић

ЕКСТРЕМАЛНИ ПРОБЛЕМИ БРАУНОВОГ КРЕТАЊА И ДРУГИХ СЛУЧАЈНИХ ПРОЦЕСА

• ДОКТОРСКА ДИСЕРТАЦИЈА •

Београд, 2022.

UNIVERSITY OF BELGRADE
FACULTY OF MATHEMATICS

Milica Jovalekić

EXTREMAL PROBLEMS OF BROWNIAN MOTION AND OTHER RANDOM PROCESSES

• DOCTORAL DISSERTATION •

Belgrade, 2022.

МЕНТОР

- проф. др Павле Младеновић, редовни професор,
  Математички факултет, Универзитет у Београду

ОСТАЛИ ЧЛАНОВИ КОМИСИЈЕ

- др Јелена Јоцковић, доцент,
  Математички факултет, Универзитет у Београду

- др Ленка Главаш, доцент,
  Математички факултет, Универзитет у Београду

- проф. др Тамара Коледин, ванредни професор,
  Електротехнички факултет, Универзитет у Београду

ЕКСТРЕМАЛНИ ПРОБЛЕМИ БРАУНОВОГ КРЕТАЊА И ДРУГИХ СЛУЧАЈНИХ ПРОЦЕСА

• **РЕЗИМЕ.** Нека је M максимум и нека је N минимум ненегативног мартингала $X_1, X_2, \dots, X_n$. Познато је да под условом $X_1 = 1$, важи

$$\gamma(\|M\|_1) \leq \mathbb{E}\left(X_n \log X_n\right) \ \text{ и } \ \gamma(\|N\|_1) \leq \mathbb{E}\left(X_n \log X_n\right),$$

где је $\gamma(x) = x - 1 - \log x$, за све $x > 0$. У овој тези, ми показујемо аналоган резултат у случају када је $1 < p < \infty$, тако што доказујемо да важи

$$\delta_p\left(\|M\|_p^p\right) \leq \|X_n\|_p \ \text{ и } \ \delta_p\left(\|N\|_p^p\right) \leq \|X_n\|_p,$$

где је $\delta_p(x) = \left(1 - \frac{1}{p}\right) x^{\frac{1}{p}} + \frac{1}{p} x^{\frac{1}{p}-1}$, за све $x > 0$. Такође, ми добијамо вероватносни доказ за

$$\min_{\rho \in \mathcal{D}(Q_n)} \int_{Q_n} \frac{\mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_n}{\rho\left(x_1, \dots, x_n\right)^{p-1} \prod_{j=1}^n x_j^{\alpha_j + 1}} = \prod_{j=1}^n \left(\frac{p}{p - \alpha_j - 1}\right)^p,$$

где је $p > 1$, $\alpha_j < p - 1$ за $j = 1, \dots, n$ и $\mathcal{D}(Q_n)$ је фамилија свих густина на n-димензионој јединичној коцки $Q_n = (0,1)^n$ у $\mathbb{R}^n$. Ово омогућава доказ вишедимензионе тежинске Хардијеве неједнакости. Наиме, ако је $f : \mathbb{R}_+^n \to (0, \infty)$ мерљива функција, $p > 1$ и $\alpha_j < p - 1$ за $j = 1, \dots, n$, тада важи

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} \prod_{j=1}^n x_j^{\alpha_j} \mathbf{H}_{\boldsymbol{n}} f\left(\mathbf{x}\right)^p \mathrm{d}\mathbf{x} \leq \prod_{j=1}^n \left(\frac{p}{p - \alpha_j - 1}\right)^p \int_{\mathbb{R}_+^n} \prod_{j=1}^n x_j^{\alpha_j} f\left(\mathbf{x}\right)^p \mathrm{d}\mathbf{x},$$

где је

$$\mathbf{H}_{\boldsymbol{n}} f\left(\mathbf{x}\right) = \frac{1}{x_1 \dots x_n} \int_0^{x_1} \cdots \int_0^{x_n} f\left(\mathbf{t}\right) \mathrm{d}\mathbf{t},$$

вишедимензиони Хардијев оператор, $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n$, $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_n)$ и $\mathrm{d}\mathbf{t} = \mathrm{d}t_1 \dots \mathrm{d}t_n$. Нека је $\mathrm{B}(t)$ стандардно планарно Брауново кретање и нека је $\mathrm{r}(\theta)$ дужина пројекције слике $\mathrm{B}[0,1]$ на праву генерисану јединичним вектором $\mathrm{e}_\theta = (\cos\theta, \sin\theta)$, где је $0 \leq \theta \leq \pi$. Ми налазимо заједничку функцију расподеле $\mathtt{F}$ случајних променљивих $\mathrm{r}(\theta)$. Наиме, ми доказујемо да важи

$$\mathtt{F}(x) = 8 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(2n-1)^2 \pi^2}\right) \exp\left(-\frac{(2n-1)^2 \pi^2}{2x^2}\right),$$

за све $x > 0$. Као директну последицу, добијамо доње ограничење за очекивани дијаметар скупа $\mathrm{B}[0,1]$, које је боље од до тада познатог доњег ограничења. Наиме, познато је да важи $\mathbb{E}\mathrm{d} \geq 1.601$, где је d дијаметар скупа $\mathrm{B}[0,1]$. У овој тези ми показујемо да важи $\mathbb{E}\mathrm{d} \geq 1.856$.

• **КЉУЧНЕ РЕЧИ.** Случајни процеси, Мартингали, Дубове неједнакости, Вишедимензиона Хардијева неједнакост, Брауново кретање.

• **НАУЧНА ОБЛАСТ.** Математика.

• **УЖА НАУЧНА ОБЛАСТ.** Вероватноћа и статистика.

• **AMS КЛАСИФИКАЦИЈА.** 60G42, 26D10, 60A10, 60J65, 60E05.

EXTREMAL PROBLEMS OF BROWNIAN MOTION AND OTHER RANDOM PROCESSES

• **ABSTRACT.** Let M be a maximum and let N be a minimum of the non-negative martingale $X_1, X_2, \ldots, X_n$. It is well known, that if $X_1 = 1$, then

$$\gamma(\|M\|_1) \leq \mathbb{E}\left(X_n \log X_n\right) \text{ and } \gamma(\|N\|_1) \leq \mathbb{E}\left(X_n \log X_n\right),$$

where $\gamma(x) = x - 1 - \log x$, for all $x > 0$. In this thesis, we prove the analogue of this result in the case when $1 < p < \infty$, by proving that

$$\delta_p\left(\|M\|_p^p\right) \leq \|X_n\|_p \text{ and } \delta_p\left(\|N\|_p^p\right) \leq \|X_n\|_p,$$

where $\delta_p(x) = \left(1 - \frac{1}{p}\right) x^{\frac{1}{p}} + \frac{1}{p} x^{\frac{1}{p}-1}$, for all $x > 0$. We also obtain a probabilistic proof of the fact

$$\min_{\rho \in \mathcal{D}(Q_n)} \int_{Q_n} \frac{\mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n}{\rho\left(x_1, \ldots, x_n\right)^{p-1} \prod_{j=1}^n x_j^{\alpha_j+1}} = \prod_{j=1}^n \left(\frac{p}{p - \alpha_j - 1}\right)^p,$$

where $p > 1$, $\alpha_j < p - 1$ for $j = 1, \ldots, n$ and $\mathcal{D}\left(Q_n\right)$ is family of all densities on the n-dimensional unit cube $Q_n = (0,1)^n$ in $\mathbb{R}^n$. This provides the proof of the multidimensional weighted Hardy inequality. Namely, if $f : \mathbb{R}_+^n \to (0, \infty)$ is a measurable function, $p > 1$ and $\alpha_j < p - 1$ for $j = 1, \ldots, n$, then

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} \prod_{j=1}^n x_j^{\alpha_j} \mathbf{H}_{\boldsymbol{n}} f\left(\mathbf{x}\right)^p \mathrm{d}\mathbf{x} \leq \prod_{j=1}^n \left(\frac{p}{p - \alpha_j - 1}\right)^p \int_{\mathbb{R}_+^n} \prod_{j=1}^n x_j^{\alpha_j} f\left(\mathbf{x}\right)^p \mathrm{d}\mathbf{x},$$

where

$$\mathbf{H}_{\boldsymbol{n}} f\left(\mathbf{x}\right) = \frac{1}{x_1 \ldots x_n} \int_0^{x_1} \cdots \int_0^{x_n} f\left(\mathbf{t}\right) \mathrm{d}\mathbf{t},$$

is a multidimensional Hardy operator, $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n$, $\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_n)$ and $\mathrm{d}\mathbf{t} = \mathrm{d}t_1 \ldots \mathrm{d}t_n$. Let $\mathrm{B}(t)$ be a standard planar Brownian motion and $\mathrm{r}(\theta)$ be the length of the projection of $\mathrm{B}[0,1]$ on the line generated by the unit vector $\mathrm{e}_\theta = (\cos\theta, \sin\theta)$, where $0 \leq \theta \leq \pi$. We find the common distribution function $\mathtt{F}$ of the random variables $\mathrm{r}(\theta)$. Namely, we prove that

$$\mathtt{F}(x) = 8 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(2n-1)^2\pi^2}\right) \exp\left(-\frac{(2n-1)^2\pi^2}{2x^2}\right),$$

for every $x > 0$. As immediate consequence, lower bound for the expected diameter of the set $\mathrm{B}[0,1]$, better than known, is obtained. Namely, it is known that $\mathbb{E}\mathrm{d} \geq 1.601$, where d is the diameter of the set $\mathrm{B}[0,1]$. In this thesis we show $\mathbb{E}\mathrm{d} \geq 1.856$.

• **KEYWORDS.** Stochastic Processes, Martingales, Doob inequalities, Multidimensional Hardy inequality, Brownian motion.

• **SCIENTIFIC AREA.** Mathematics.

• **SCIENTIFIC FIELD.** Probability and statistics.

• **AMS CLASSIFICATION.** 60G42, 26D10, 60A10, 60J65, 60E05.

Садржај

Увод

Колекција случајних промењивих, индексирана параметром који се обично интерпретира као време, представља случајан процес. Случајни процеси, као на пример Брауново кретање, имају многобројне примене у разним областима математике, попут анализе и геометрије.

Прва глава ове дисертације посвећена је класичној вероватносној теорији. У првој секцији ове главе дат је кратак преглед основних ознака, тврђења и појмова који се користе у наставку текста и који се односе на вероватносне просторе и случајне променљиве. У другој секцији се разматрају низови случајних променљивих, односно, случајни процеси. Посебну класу случајних процеса представљају мартингали и они су заступљени у трећој секцији. Постоји велики број класичних, књига, радова и монографија [1–5, 8, 10–12, 15–17, 23–28, 33, 35–37, 39, 40, 43–45, 48, 49, 51–56] које се баве вероватносном теоријом на разним нивоима, почев од оног елементарног до веома напредног. Поред тога, у наведној литератури, описане су и велике примене вероватносне теорије у другим гранама математике, пре свега, у разним гранама математичке анализе.

Дубове мартингалне неједнакости се изучавају у другој глави. За више информација у вези са класичним мартингалним неједнакостима погледати [14, 42]. У првој секцији се разматрају Дубове максималне неједнаксти, преко којих се у наредним секцијам изводе стандардне Дубове L^p неједнакости. Варијанта нестандардне Дубове L^1 неједнакости, код које је у посматраном мартингалу прва случајна променљива константна, доказана је у [19]. Оригиналан допринос ове главе, публикован је у раду [20] и односи се на проучавање поменуте нестандардне Дубове неједнакости, али у L^p случају, при чему је $0 < p < 1$ и $1 < p < \infty$.

У трећој глави је заступљен вероватносни доказ вишедимензионе тежинске Хардијеве неједнакости. Заправо, цела глава је базирана на оригиналним резултатима преузетим из рада [21]. Наиме, користећи релативну ентропију, односно, Кулбак-Лајблерову дивергенцију вероватносних густина на јединичној коцки у вишедимензионом реалном простору изводи се вишедимензиона тежинска Хардијева неједнакост, која као директну последицу има вишедимензиону Карлеманову неједнакост.

Брауново кретање, као један од најважнијих случајних процеса са многобројним применама, јесте тематика последње главе. Неке од класичних референци везаних за Брауново кретање јесу [7, 31, 41]. Након уводне секције, у којој се разматра линеарно Брауново кретање, у наредним секцијама се изучава планарно Брауново кретање, односно, конвексан омотач, периметар и дијаметар планарног Брауновог кретања. Преко очекиваног периметра конвексног омотача Брауновог кретања, за који је позната тачна вредност, изводе се основна ограничења за очекивани дијаметар планарног Брауновог кретања. Добијене оцене за очекивани дијаметар планарног Брауновог кретања побољшане су у раду [38]. Оригиналан допринос ове главе заснован је на резултату публикованом у раду [22], где је добијено ново доње ограничење, боље од претходних, за очекивани дијаметар планарног Брауновог кретања. У доказу се, поред вероватносних метода, користи и теорија која се односи на генерализовану Јакобијеву функцију [47], при чему је суштински део одређивање функције расподеле пројекција слике Брауновог кретања на праве одређене одговарајућим јединичним векторима у равни.

Посебно желим да се захвалим свом ментору професору Павлу Младеновићу на увођењу у научни рад, на издвојеном времену, на правим саветима и подршци, као и на његовој истрајности и посвећености у заједничком раду. Захваљујем се и осталим члановима комисије, професорима Јелени Јоцковић, Ленки Главаш и Тамари Коледин на корисним саветима, сугестијама и подршци. Највећу захвалност дугујем својој породици.

Милица Јовалекић

Глава 1

Случајни процеси и мартингали

У овој уводној глави дат је кратак преглед основних појмова и резултата класичне вероватносне теорије, који се односе на вероватносне просторе, случајне променљиве, случајне процесе и мартингале.

1.1 Вероватносни простор и случајне променљиве

▶ **Вероватносни простор.** Уколико није другачије наглашено, у наставку, увек подразумевамо да радимо у оквиру вероватносног простора $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Дакле, на задатом простору Ω, фамилија догађаја $\mathcal{F}$, односно, фамилија одговарајућих подскупова скупа Ω, јесте σ-алгебра, што значи да су испуњени следећи услови:

- $\Omega \in \mathcal{F}$;
- Ако $A \in \mathcal{F}$, тада $\Omega \setminus A \in \mathcal{F}$;
- Ако $A_n \in \mathcal{F}$, $n \in \mathbb{N}$, тада $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$.

Функција $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ јесте *вероватносна мера*, односно, важе доле наведени услови:

- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$;
- $\mathbb{P}(A) \geq 0$ за све $A \in \mathcal{F}$;
- Ако су $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ дисјунктни догађаји из $\mathcal{F}$, тада важи $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n)$.

На основу претходног, директно се могу извести још нека важна својства вероватносне мере $\mathbb{P}$.

- $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$;
- $\mathbb{P}(\Omega \setminus A) = 1 - \mathbb{P}(A)$ за све $A \in \mathcal{F}$;
- Ако за догађаје $A, B \in \mathcal{F}$ важи $A \subset B$, тада је $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$;
- Ако су $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ догађаји из $\mathcal{F}$, тада важи $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n)$;
- За догађаје $A, B \in \mathcal{F}$ важи $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cup B) + \mathbb{P}(A \cap B)$.

Следи да за вероватносну меру $\mathbb{P}$ важи $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0, 1]$. Са друге стране, нека су $A, B \in \mathcal{F}$ дати догађаји, при чему је $\mathbb{P}(A) > 0$. *Условну вероватноћу* догађаја B, при услову A, дефинишемо као

$$\mathbb{P}(B \mid A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}.$$

Такође, за догађаје A и B кажемо да су *независни* ако важи $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$. ◀

► Случајне променљиве. Мерљива функција $X : \Omega \to \mathbb{R}$ зове се *случајна променљива* у односу вероватносни простор $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, при чему подразумевамо да је реална права $\mathbb{R}$ мерљив простор у односу на Борелову σ-алгебру $\mathcal{B}$ (минимална σ-алгебра која садржи све интервале облика $(a, b]$, где је $a < b$, на реалној правој). Дакле, тада за сваки мерљив скуп $B \in \mathcal{B}$, важи $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$, где је са $X^{-1}(B)$ означена инверзна слика скупа B у односу на дату функцију X. На пример, за произвољан догађај $A \in \mathcal{F}$, случајна променљива $\mathbb{1}_A : \Omega \to \mathbb{R}$ дефинисана на следећи начин

$$\mathbb{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{ако } \omega \in A, \\ 0, & \text{ако } \omega \notin A, \end{cases}$$

назива се *индикатор догађаја A*. Поред тога, *математичко очекивање* случајне променљиве $X : \Omega \to \mathbb{R}$ дефинишемо са

$$\mathbb{E}X = \int_\Omega X \, \mathrm{d}\mathbb{P}.$$

Тада важи

$$\mathbb{E}\left(X\mathbb{1}_A\right) = \int_\Omega X\mathbb{1}_A \, \mathrm{d}\mathbb{P} = \int_A X \, \mathrm{d}\mathbb{P}.$$

Такође је

$$|\mathbb{E}X| = \left| \int_\Omega X \, \mathrm{d}\mathbb{P} \right| \leq \int_\Omega |X| \, \mathrm{d}\mathbb{P} = \mathbb{E}|X|.$$

Варијанса случајне променљиве X дефинише се на следећи начин

$$\mathrm{Var}X = \mathbb{E}\left(X - \mathbb{E}X\right)^2.$$

Приметимо да тада заправо важи

$$\mathrm{Var}X = \mathbb{E}\left(X^2 - 2X\mathbb{E}X + (\mathbb{E}X)^2\right) = \mathbb{E}X^2 - 2\left(\mathbb{E}X\right)^2 + \left(\mathbb{E}X\right)^2 = \mathbb{E}X^2 - \left(\mathbb{E}X\right)^2,$$

што је још једна еквивалентна формула за дефинисање варијансе случајне променљиве. ◄

► Неједнакост Чебишева. Нека је X случајна променљива, $\varepsilon > 0$ и $a > 0$. Тада важи следећа позната неједнакост

$$\mathbb{P}\left\{|X| \geq \varepsilon\right\} \leq \frac{\mathbb{E}|X|^a}{\varepsilon^a}.$$

Наиме, приметимо да важи

$$\mathbb{E}|X|^a = \int_\Omega |X|^a \, \mathrm{d}\mathbb{P} \geq \int_{|X| \geq \varepsilon} |X|^a \, \mathrm{d}\mathbb{P} \geq \varepsilon^a \int_{|X| \geq \varepsilon} \mathrm{d}\mathbb{P} = \varepsilon^a \mathbb{P}\left\{|X| \geq \varepsilon\right\},$$

одакле следи тражени закључак. Применом претходне неједнакости у специјалном случају када је $a = 2$ и када уместо случајне променљиве X посматрамо случајну променљиву $X - \mathbb{E}X$, добијамо

$$\mathbb{P}\left\{|X - \mathbb{E}X| \geq \varepsilon\right\} \leq \frac{\mathrm{Var}X}{\varepsilon^2},$$

што је основна варијанта неједнакости Чебишева. ◄

► Хелдерова неједнакост. За уређени пар реалних бројева (p, q), где је $p > 1$ и $q > 1$, кажемо да је *пар спрегнутих експонената* ако важи $1/p + 1/q = 1$. Претпоставимо додатно да су a и b ненегативни реални бројеви. Тада важи следећа неједнакост

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, \tag{1.1.1}$$

која је у литератури позната као *Јангова неједнакост*. Наиме, ако је $a = 0$ или $b = 0$, тада претходна неједнакост тривијално важи. Зато, у наставку, претпоставимо да је $a > 0$ и $b > 0$. Имајући у виду да је $x \mapsto \log x$ конкавна функција, налазимо

$$\log\left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\right) \geq \frac{1}{p}\log\left(a^p\right) + \frac{1}{q}\log\left(b^q\right) = \log(ab),$$

одакле директно следи неједнакост (1.1.1). Са друге стране, претпоставимо да су дате случајне променљиве X и Y. Тада важи следећа позната неједнакост

$$\mathbb{E}|XY| \leq (\mathbb{E}\,|X|^p)^{1/p}\,(\mathbb{E}\,|Y|^q)^{1/q}\,, \tag{1.1.2}$$

која у литератури носи назив *Хелдерова неједнакост.* Најпре, ако је нека од величина $\mathbb{E}\,|X|^p$ или $\mathbb{E}\,|Y|^q$ једнака некој од вредности 0 или ∞, тада неједнакост (1.1.2) тривијално следи. Зато претпоставимо да то није случај. Применом неједнакости (1.1.1) на вредности

$$a = \frac{|X|}{(\mathbb{E}\,|X|^p)^{1/p}} \ \text{ и } \ b = \frac{|Y|}{(\mathbb{E}\,|Y|^q)^{1/q}},$$

добијамо

$$\begin{aligned}
\frac{\mathbb{E}|XY|}{(\mathbb{E}\,|X|^p)^{1/p}\,(\mathbb{E}\,|Y|^q)^{1/q}} &= \mathbb{E}\left(\frac{|X|}{(\mathbb{E}\,|X|^p)^{1/p}}\cdot\frac{|Y|}{(\mathbb{E}\,|Y|^q)^{1/q}}\right)\\
&\leq \mathbb{E}\left(\frac{1}{p}\cdot\frac{|X|^p}{\mathbb{E}\,|X|^p}+\frac{1}{q}\cdot\frac{|Y|^q}{\mathbb{E}\,|Y|^q}\right)\\
&= \frac{1}{p}\cdot\frac{\mathbb{E}\,|X|^p}{\mathbb{E}\,|X|^p}+\frac{1}{q}\cdot\frac{\mathbb{E}\,|Y|^q}{\mathbb{E}\,|Y|^q}\\
&= \frac{1}{p}+\frac{1}{q}\\
&= 1,
\end{aligned}$$

одакле следи тражена неједнакост. У специјалном случају када је $(p,q)=(2,2)$ добијамо следећу неједнакост

$$\mathbb{E}|XY| \leq \sqrt{\mathbb{E}X^2}\sqrt{\mathbb{E}Y^2},$$

која је у литератури позната као Коши-Шварцова неједнакост. ◀

▶ Јенсенова неједнакост. Нека је дата случајна променљива $X : \Omega \to \mathbb{R}$ са коначним математичким очекивањем и нека је $g : (a,b) \to \mathbb{R}$ конвексна функција, где је $-\infty \leq a < b \leq \infty$, при чему важи $X(\Omega) \subset (a,b)$. Тада важи

$$g\left(\int_\Omega X\,\mathrm{d}\mathbb{P}\right) \leq \int_\Omega (g\circ X)\,\mathrm{d}\mathbb{P},$$

или еквивалентно, у другачијем запису,

$$g(\mathbb{E}X) \leq \mathbb{E}g(X).$$

Наиме, означимо

$$t = \int_\Omega X\,\mathrm{d}\mathbb{P}.$$

Тада директно закључујемо да $t \in (a,b)$. Поред тога, имајући у виду да је g конвексна функција, за све $a < s < t < u < b$ важи

$$\frac{g(t)-g(s)}{t-s} \leq \frac{g(u)-g(t)}{u-t}. \tag{1.1.3}$$

Нека је

$$\beta = \sup_{s\in(a,t)} \frac{g(t)-g(s)}{t-s}.$$

Дакле, за произвољно $s \in (a, t)$ важи

$$g(s) \geq g(t) + \beta(s - t).$$

Такође, из неједнакости (1.1.3), следи да за произвољно $u \in (t, b)$ важи

$$\beta \leq \frac{g(u) - g(t)}{u - t},$$

односно,

$$g(u) \geq g(t) + \beta(u - t).$$

Коначно, на основу свега претходног, налазимо да за све $s \in (a, b)$ важи

$$g(s) \geq g(t) + \beta(s - t),$$

одакле, добијамо

$$g(X) - g(t) - \beta(X - t) \geq 0.$$

Интеграцијом претходне неједнакости, по простору Ω, у односу на вероватносну меру $\mathbb{P}$, закључујемо

$$\int_\Omega g\left(X\right) \mathrm{d}\mathbb{P} - g(t) - \beta\left(\int_\Omega X \,\mathrm{d}\mathbb{P} - t\right) = \int_\Omega g\left(X\right) \mathrm{d}\mathbb{P} - g(t) = \mathbb{E}g(X) - g(\mathbb{E}X) \geq 0,$$

чиме је доказана Јенсенова неједнакост. ◀

▶ Функција расподеле и густина расподеле. Нека је $X : \Omega \to \mathbb{R}$ случајна променљива. Тада је

$$\mathrm{F}_X(x) = \mathbb{P}\left\{X \leq x\right\}, \;\; x \in \mathbb{R},$$

функција расподеле случајне променљиве X. Ако је f_X ненегативна реална функција, таква да важи

$$\mathrm{F}_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t)\,\mathrm{d}t, \;\; x \in \mathbb{R},$$

онда кажемо да је f_X *густина расподеле* случајне променљиве X. Поред тога, ако је $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ мерљива функција, тада је очекивање случајне променљиве $g(X)$ дато са

$$\mathbb{E}g(X) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x)\,\mathrm{d}x.$$

Специјално, важи следећа формула

$$\mathbb{E}X = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,\mathrm{d}x,$$

којом се математичко очекивање рачуна преко густине расподеле. Са друге стране, ако је $n \in \mathbb{N}$ и ако су дате случајне променљиве $X_1, \ldots, X_n : \Omega \to \mathbb{R}$, тада се пресликавање

$$\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n,$$

назива *случајан вектор*. Такође, функција

$$\mathrm{F}_{\mathbf{X}}\left(x_1, \ldots, x_n\right) = \mathbb{P}\left\{X_1 \leq x_1, \ldots, X_n \leq x_n\right\}, \;\; (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n,$$

јесте *функција расподеле* случајног вектора $\mathbf{X}$. Ако за ненегативну функцију $f_{\mathbf{X}}$ на простору $\mathbb{R}^n$ важи

$$\mathrm{F}_{\mathbf{X}}\left(x_1, \ldots, x_n\right) = \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} f_{\mathbf{X}}\left(t_1, \ldots, t_n\right) \mathrm{d}t_1 \ldots \mathrm{d}t_n, \;\; (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n,$$

кажемо да је $f_{\mathbf{X}}$ *густина расподеле* случајног вектора $\mathbf{X}$. Са друге стране, случајне променљиве $X_1, \ldots, X_n$ су *независне* ако за сваку n-торку $(B_1, \ldots, B_n)$ мерљивих скупова на реалној правој важи

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^{n} \{X_j \in B_j\}\right) = \prod_{j=1}^{n} \mathbb{P}\{X_j \in B_j\}.$$

Заправо, испоставља се да су случајне променљиве $X_1, \ldots, X_n$ независне ако и само ако важи

$$\mathrm{F}_{\mathbf{X}}(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{j=1}^{n} \mathrm{F}_{X_j}(x_j),$$

за све $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ или ако и само ако важи

$$f_{\mathbf{X}}(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{j=1}^{n} f_{X_j}(x_j),$$

за скоро све $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Наравно, за независне случајне променљиве $X_1, \ldots, X_n$ важи

$$\mathbb{E}(X_1 \cdot \ldots \cdot X_n) = \mathbb{E}(X_1) \cdot \ldots \cdot \mathbb{E}(X_n).$$

што ће такође бити од користи у наставку. ◀

▶ Условна расподела. Нека је A случајан догађај, при чему важи $\mathbb{P}(A) > 0$ и нека је X случајна променљива, са функцијом расподеле F_X и густином расподеле f_X, тим редом. Приметимо, да диференцирањем функције расподеле F_X по независној променљивој добијамо густину расподеле f_X. *Условна функција расподеле* случајне променљиве X, при услову A, дефинише се на следећи начин

$$\mathrm{F}_X(x \mid A) = \mathbb{P}(X \leq x \mid A) = \frac{\mathbb{P}(\{X \leq x\} \cap A)}{\mathbb{P}(A)}.$$

Ако је $f_X(\cdot \mid A)$ ненегативна функција за коју важи

$$\mathrm{F}_X(x \mid A) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t \mid A)\, \mathrm{d}t,$$

онда кажемо да је $f_X(\cdot \mid A)$ *условна густина расподеле* случајне променљиве X, при услову A. Наравно, диференцирањем условне функције расподеле $\mathrm{F}_X(\cdot \mid A)$ по независној променљивој добијамо условну густину расподеле $f_X(\cdot \mid A)$. Поред тога, јасно је да тада важи

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(t \mid A)\, \mathrm{d}t = 1.$$

Са друге стране, за произвољно одабране реалне бројеве $x < y$, важи

$$\begin{aligned}
\int_{x}^{y} f_X(t \mid A)\, \mathrm{d}t &= \int_{-\infty}^{y} f_X(t \mid A)\, \mathrm{d}t - \int_{-\infty}^{x} f_X(t \mid A)\, \mathrm{d}t \\
&= \mathrm{F}_X(y \mid A) - \mathrm{F}_X(x \mid A) \\
&= \frac{\mathbb{P}(\{X \leq y\} \cap A)}{\mathbb{P}(A)} - \frac{\mathbb{P}(\{X \leq x\} \cap A)}{\mathbb{P}(A)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(\{x < X \leq y\} \cap A)}{\mathbb{P}(A)} \\
&= \mathbb{P}(x < X \leq y \mid A).
\end{aligned}$$

Такође, директно се проверава да важи

$$\mathbb{P}(A \,|\, x < X \leq y) = \frac{\mathbb{P}(x < X \leq y \,|\, A)}{\mathbb{P}\{x < X \leq y\}}\, \mathbb{P}(A) = \frac{\displaystyle\int_x^y f_X(t \,|\, A)\,\mathrm{d}t}{\displaystyle\int_x^y f_X(t)\,\mathrm{d}t}\, \mathbb{P}(A). \tag{1.1.4}$$

Тада условну вероватноћу догађаја A, при услову $X = x$, дефинишемо на следећи начин

$$\mathbb{P}(A \,|\, X = x) = \lim_{y \to x^+} \mathbb{P}(A \,|\, x < X \leq y).$$

На основу (1.1.4) директно следи

$$\mathbb{P}(A \,|\, X = x) = \frac{f_X(x \,|\, A)}{f_X(x)}\, \mathbb{P}(A). \tag{1.1.5}$$

Користећи претходну једнакост (1.1.5) добијамо

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{P}\left(A \,|\, X = x\right) f_X(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x \,|\, A)\,\mathrm{d}x\, \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A). \tag{1.1.6}$$

Формула (1.1.6) носи назив *формула тоталне вероватноће.* ◀

▶ Нормална расподела N $\left(m, \sigma^2\right)$. Кажемо да нека случајна променљива X има нормалну расподелу са параметрима m и σ^2, у ознаци N $\left(m, \sigma^2\right)$, ако је њена густина расподеле f_X дата на следећи начин

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}, \;\; x \in \mathbb{R}.$$

Тада је

$$\mathbb{E}X = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,\mathrm{d}x \;\text{ и }\; \mathbb{E}X^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)\,\mathrm{d}x,$$

одакле налазимо

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}X &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma t + m)\, e^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t e^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t + \frac{m}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{m\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t \\
&= m,
\end{aligned}$$

као и

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}X^2 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma t + m)^2\, e^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t^2 e^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t + \frac{2\sigma m}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t e^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t + \frac{m^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t \\
&= \sigma^2 + m^2.
\end{aligned}$$

Специјално, добијамо

$$\mathrm{Var}X = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X^2) = \sigma^2.$$

Према томе, очекивање и варијанса случајне променљиве са нормалном расподелом $\mathrm{N}\left(m, \sigma^2\right)$ износе m и σ^2, тим редом. ◀

▶ Условно математичко очекивање. Нека је X случајна променљива у односу на дати вероватносни простор $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ и нека је σ-алгебра $\mathcal{S}$ садржана у σ-алгебри $\mathcal{F}$, односно, нека је $\mathcal{S} \subset \mathcal{F}$. *Условно математичко очекивање* случајне променљиве X у односу на нову σ-алгебру $\mathcal{S}$ јесте случајна променљива $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{S})$ са следећим особинама:

- Случајна променљива $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{S})$ јесте мерљива у односу на σ-алгебру $\mathcal{S}$;
- За сваки догађај $A \in \mathcal{S}$ важи

$$\int_A X \,\mathrm{d}\mathbb{P} = \int_A \mathbb{E}(X \mid \mathcal{S}) \,\mathrm{d}\mathbb{P}.$$

Ако је Y случајна променљива, тада за минималну σ-алгебру у односу на коју је Y мерљива кажемо да је *σ-алгебра генерисана случајном променљивом* Y и означавамо је са $\sigma(Y)$. Условно математичко очекивање случајне променљиве X у односу на случајну променљиву Y дефинишемо на следећи начин

$$\mathbb{E}(X \mid Y) = \mathbb{E}\left(X \mid \sigma(Y)\right).$$

Минимална σ-алгебра у односу на коју су дате случајне променљиве $Y_1, \ldots, Y_n$ мерљиве назива се σ-алгебра генерисана случајним променљивим $Y_1, \ldots, Y_n$ и обележава са $\sigma\left(Y_1, \ldots, Y_n\right)$. Такође, тада се условно математичко очекивање случајне променљиве X у односу на случајне променљиве $Y_1, \ldots, Y_n$ дефинише као

$$\mathbb{E}\left(X \mid Y_1, \ldots, Y_n\right) = \mathbb{E}\left(X \mid \sigma\left(Y_1, \ldots, Y_n\right)\right).$$

На пример, ако је $\mathcal{T} = \{\emptyset, \Omega\}$ тривијална σ-алгебра, тада скоро сигурно (до на скуп вероватносне мере нула) важи

$$\mathbb{E}(X \mid \mathcal{T}) = \mathbb{E}X. \tag{1.1.7}$$

Наиме, $\mathbb{E}X$ се може видети као константна функција која је мерљива у односу на тривијалну σ-алгебру $\mathcal{T}$ и поред тога, важи

$$\int_A X \,\mathrm{d}\mathbb{P} = \int_A \mathbb{E}X \,\mathrm{d}\mathbb{P} \ \text{ за све } \ A \in \mathcal{T},$$

одакле следи (1.1.7). Даље, ако за σ-алгебре $\mathcal{R}$ и $\mathcal{Q}$, важи $\mathcal{R} \subset \mathcal{Q}$, тада је скоро сигурно

$$\mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(X \mid \mathcal{Q}\right) \mid \mathcal{R}\right) = \mathbb{E}\left(X \mid \mathcal{R}\right). \tag{1.1.8}$$

Заправо, за произвољан догађај $A \in \mathcal{R} \subset \mathcal{Q}$ важи

$$\int_A \mathbb{E}(X \mid \mathcal{R}) \,\mathrm{d}\mathbb{P} = \int_A X \,\mathrm{d}\mathbb{P},$$

као и

$$\int_A \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(X \mid \mathcal{Q}\right) \mid \mathcal{R}\right) \mathrm{d}\mathbb{P} = \int_A \mathbb{E}(X \mid \mathcal{Q}) \,\mathrm{d}\mathbb{P} = \int_A X \,\mathrm{d}\mathbb{P}.$$

На основу претходне две једнакости следи

$$\int_A \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(X \mid \mathcal{Q}\right) \mid \mathcal{R}\right) \mathrm{d}\mathbb{P} = \int_A \mathbb{E}(X \mid \mathcal{R}) \,\mathrm{d}\mathbb{P},$$

за све $A \in \mathcal{R}$, одакле директно следи (1.1.8). Ако применимо својство (1.1.8) на σ-алгебре $\mathcal{R} = \mathcal{T}$ и $\mathcal{Q} = \mathcal{S}$ и поред тога, додатно искористимо својство (1.1.7), добијамо да важи

$$\mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(X \mid \mathcal{S}\right)\right) = \mathbb{E}X. \tag{1.1.9}$$

Случајна промењива X не зависи од σ-алгебре $\mathcal{S}$ ако не зависи од индикатора $\mathbb{1}_A$ за сваки догађај $A \in \mathcal{S}$. У том случају скоро сигурно важи

$$\mathbb{E}\,(X\,|\,\mathcal{S}) = \mathbb{E}X. \tag{1.1.10}$$

Наиме, математичко очекивање $\mathbb{E}X$ се може видети као константна функција, која је наравно мерљива у односу на σ-алгебру $\mathcal{S}$ и поред тога, за сваки догађај $A \in \mathcal{S}$ важи

$$\int_A X\,\mathrm{d}\mathbb{P} = \int_\Omega X\mathbb{1}_A\,\mathrm{d}\mathbb{P} = \mathbb{E}\,(X\mathbb{1}_A) = \mathbb{E}X\mathbb{E}\mathbb{1}_A = \mathbb{E}X\int_\Omega \mathbb{1}_A\,\mathrm{d}\mathbb{P} = \mathbb{E}X\int_A \mathrm{d}\mathbb{P} = \int_A \mathbb{E}X\,\mathrm{d}\mathbb{P},$$

одакле директно следи (1.1.10), где смо искористили претпоставку да су случајне промењиве X и $\mathbb{1}_A$ независне. Према томе, на основу претходног можемо закључити да ако случајна промењива X не зависи од случајних промењивих $Y_1, \ldots, Y_n$, тада важи

$$\mathbb{E}\,(X\,|\,Y_1, \ldots, Y_n) = \mathbb{E}X. \tag{1.1.11}$$

Са друге стране, ако је случајна промењива X мерљива у односу на σ-алгебру генерисану случајним промењивим $Y_1, \ldots, Y_n$, тада директно по дефиницији условног математичког очекивања налазимо

$$\mathbb{E}\,(X\,|\,Y_1, \ldots, Y_n) = X. \tag{1.1.12}$$

Претходна својства условног математичког очекивања користићемо у наставку текста. ◀

1.2 Случајни процеси

Нека је $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ вероватносни простор. Фамилија случајних промењивих

$$\{X_t : t \in T\},$$

где је $T \subset \mathbb{R}$ параметарски скуп, зове се *случајан процес*. Ако је параметарски скуп T неки интервал на реалној правој, тада за случајан процес $\{X_t : t \in T\}$ кажемо да је *случајан процес са непрекидним временом*, при чему се параметар $t \in T$ интерпретира као време. У том случају, уместо ознаке $\{X_t : t \in T\}$ за случајан процес, често користимо ознаку $\{X(t) : t \in T\}$. Такође, ако је параметарски скуп T, подскуп скупа целих бројева $\mathbb{Z}$, тада за случајан процес $\{X_t : t \in T\}$ кажемо да је *случајан процес са дискретним временом.* Ако је $\omega \in \Omega$, тада за пресликавање

$$t \mapsto X_t(\omega),$$

кажемо да је *стаза* или *трајекторија* случајног процеса $\{X_t : t \in T\}$. Наравно, код случајног процеса са непрекидим временом уместо ознаке $X_t(\omega)$ често пишемо $X(t, \omega)$. Фамилија σ-алгебри

$$\{\mathcal{F}_t : t \in T\},$$

на простору Ω јесте *филтрација* ако за све $s, t \in \mathbb{T}$, такве да је $s \leq t$, важи

$$\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}.$$

Кажемо да је случајан процес $\{X_t : t \in T\}$ *прилагођен* филтрацији $\{\mathcal{F}_t : t \in T\}$ ако је случајна промењива X_t мерљива у односу на σ-алгебру $\mathcal{F}_t$ за све $t \in T$. За унапред задат случајан процес $\{X_t : t \in T\}$ увек постоји њему прилагођена филтрација. Наиме, довољно је узети да је $\mathcal{F}_t$ заправо σ-алгебра генерисана случајним промењивим $\{X_s : s \leq t\}$ за све $t \in T$. Са друге стране, за случајан процес $\{X_t : t \in T\}$ кажемо да има *независне прираштаје* ако су случајне промењиве

$$X_{t_2} - X_{t_1}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}},$$

независне за све $n \in \mathbb{N}$ и све изборе параметара $t_1, \ldots, t_n \in T$ за које важи

$$t_1 < \ldots < t_n.$$

Такође, за случајан процес $\{X_t : t \in T\}$ кажемо да има *стационарне прираштаје* ако расподела случајне променљиве $X_{t+h} - X_t = X(t+h) - X(t)$ зависи само од прираштаја h, али не и од времена тј. параметра $t \in T$. Дакле, ако је $\{X_t : t \in T\}$ случајан процес са стационарним прираштајима, тада случајне променљиве $X(t_1 + h) - X(t_1)$ и $X(t_2 + h) - X(t_2)$, имају исту расподелу, независно од избора величина t_1, t_2 и h. Важан пример случајног процеса који има независне и стационарне прираштаје јесте *Брауново кретање* које ћемо разматрати касније у четвртој глави. У наставку наводимо још један пример важне класе случајних процеса, где ћемо сличну конструкцију имати и касније у другој глави.

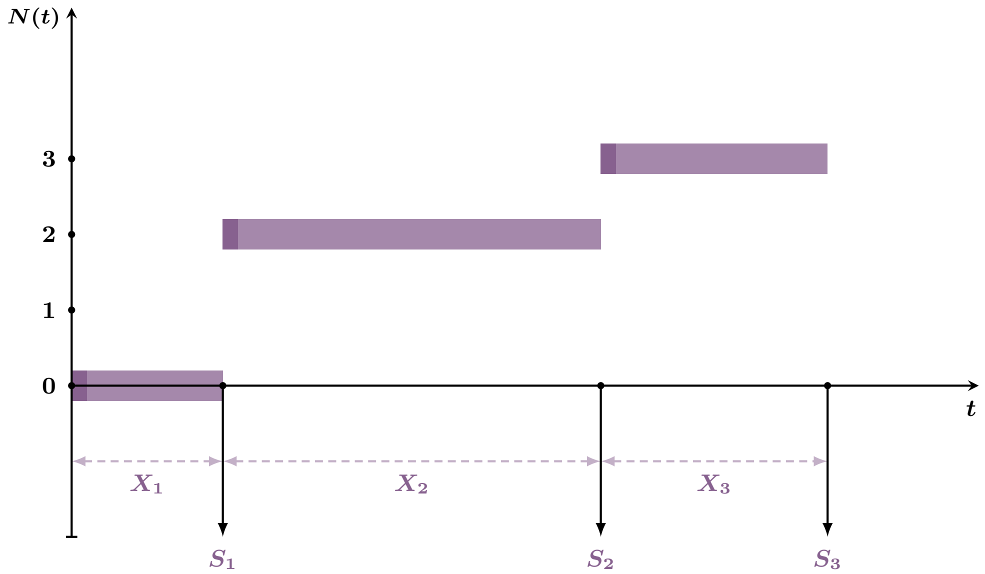
Пример 1.2.1 За случајан процес са дискретним временом $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ кажемо да је *процес обнове* ако су случајне променљиве X_n, где је $n \in \mathbb{N}$, ненегативне, независне и ако имају исту расподелу. Ови процеси имају следећу интерпретацију, одакле и потиче њихов назив. Наиме, случајне променљиве X_n, $n \in \mathbb{N}$, представљају време трајања неких датих величина. Дакле, време трајања прве величине са почетним тренутком 0 износи X_1, након чега се обнавља следећом величином која има време трајања X_2, односно, која се обнавља следећом величином након укупног времена $X_1 + X_2$. Према томе, време n-те обнове, где је $n \in \mathbb{N}$, јесте дато случајном променљивом

$$S_n = X_1 + \ldots + X_n.$$

За све $t \geq 0$ нека је $N(t)$ случајна променљива која броји укупан број обнова на временском интервалу $[0, t]$. Формално, важи

$$N(t) = 0 \ \text{ за } \ t < S_1 \ \text{ и } \ N(t) = n \ \text{ за } \ S_n \leq t < S_{n+1}, \ \text{ где је } \ n \in \mathbb{N}.$$

Тада за случајан процес $\{N(t) : t \geq 0\}$ кажемо да је *бројачки процес обнове* придружен случајном процесу $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$. У пракси се обично не прави разлика између случајног процеса обнове и њему придруженог бројачког процеса обнове, односно, они се посматрају заједно у целини. На слици испод, графички је приказан један бројачки процес обнове. $\diamond$



Бројачки процес обнове.

1.3 Мартингали

Нека је $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ вероватносни простор и нека је $\{X_t : t \in T\}$ случајан процес, где је $T \subset \mathbb{R}$ параметарски скуп. Такође, претпоставимо да је дата филтрација $\{\mathcal{F}_t : t \in T\}$ и да је случајан процес $\{X_t : t \in T\}$ прилагођен овој филтрацији. У том случају кажемо да је процес $\{X_t : t \in T\}$ *мартингал* у односу на филтрацију $\{\mathcal{F}_t : t \in T\}$ ако су испуњена следећа два услова:

- $\mathbb{E}\,|X_t| < \infty$ за све $t \in T$;
- $\mathbb{E}\,(X_t \,|\, \mathcal{F}_s) = X_s$ за све $s < t$.

Уколико филтрација мартингала није посебно истакнута, односно, уколико само кажемо да је процес $\{X_t : t \in T\}$ мартингал, тада подразумевамо да имамо филтрацију $\{\mathcal{F}_t : t \in T\}$, где је $\mathcal{F}_t$ заправо σ-алгебра генерисана случајним промењљивим $\{X_s : s \leq t\}$ за све $t \in T$. Према томе, у дискретном случају, мартингал без посебно истакнуте филтрације, можемо дефинисати на следећи начин. За случајан процес са дискретним временом $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ кажемо да је мартингал ако важе следећи услови:

- $\mathbb{E}\,|X_n| < \infty$ за све $n \in \mathbb{N}$;
- $\mathbb{E}\,(X_{n+1} \,|\, X_1, \ldots, X_n) = X_n$ за све $n \in \mathbb{N}$.

Наравно, као што смо раније дефинисали, важи

$$\mathbb{E}\,(X_{n+1} \,|\, X_1, \ldots, X_n) = \mathbb{E}\,(X_{n+1} \,|\, \sigma\,(\,X_1, \ldots, X_n)),$$

где је $\sigma\,(X_1, \ldots, X_n)$ заправо σ-алгебра генерисана случајним промењљивим $X_1, \ldots, X_n$. Поред тога, ако су $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ и $\{Y_n : n \in \mathbb{N}\}$ два случајна процеса са дискретним временом, онда кажемо да је $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ мартингал у односу на $\{Y_n : n \in \mathbb{N}\}$, ако су испуњена следећа два услова:

- $\mathbb{E}\,|X_n| < \infty$ за све $n \in \mathbb{N}$;
- $\mathbb{E}\,(X_{n+1} \,|\, Y_1, \ldots, Y_n) = X_n$ за све $n \in \mathbb{N}$.

Наравно, опет је

$$\mathbb{E}\,(X_{n+1} \,|\, Y_1, \ldots, Y_n) = \mathbb{E}\,(X_{n+1} \,|\, \sigma\,(\,Y_1, \ldots, Y_n)),$$

где је $\sigma\,(\,Y_1, \ldots, Y_n)$ заправо σ-алгебра генерисана случајним промењљивим $Y_1, \ldots, Y_n$. Приметимо да тада, на основу својства (1.1.9), важи

$$\mathbb{E}\,(\mathbb{E}\,(X_{n+1} \,|\, Y_1, \ldots, Y_n)) = \mathbb{E}X_{n+1},$$

за све $n \in \mathbb{N}$. Са друге стране, на основу горе наведеног другог својства мартингала, следи

$$\mathbb{E}\,(\mathbb{E}\,(X_{n+1} \,|\, Y_1, \ldots, Y_n)) = \mathbb{E}X_n,$$

за све $n \in \mathbb{N}$. Према претходном, директно закључујемо да важи

$$\mathbb{E}X_{n+1} = \mathbb{E}X_n,$$

за све $n \in \mathbb{N}$. Дакле, добијамо следеће важно својство мартингала са дискретним временом:

$$\mathbb{E}X_n = \mathbb{E}X_1, \ \text{ за све } \ n \in \mathbb{N}.$$

Подсетимо се да ако случајна промењљива X не зависи од случајних промењљивих $Y_1, \ldots, Y_n$, тада важи (видети својство (1.1.11)):

$$\mathbb{E}\,(X \,|\, Y_1, \ldots, Y_n) = \mathbb{E}X.$$

Такође (видети својство (1.1.12)), за дату мерљиву функцију $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (подразумевамо да је простор $\mathbb{R}^n$ мерљив у односу на Борелову σ-алгебру $\mathcal{B}^n$, тј. минималну σ-алгебру која садржи све квадре облика $(a_1, b_1] \times \ldots \times (a_n, b_n]$, где је $a_j < b_j$, за све $j = 1, \ldots, n$) важи

$$\mathbb{E}\,(g\,(Y_1, \ldots, Y_n) \,|\, Y_1, \ldots, Y_n) = g\,(Y_1, \ldots, Y_n)\,.$$

Претходно наведена својства могу бити од користи у наредним разматрањима.

Пример 1.3.1 Нека је $Y_1, Y_2, \ldots$ низ независних случајних промењивих, које имају исту расподелу, при чему важи

$$\mathbb{E}Y_n = 0 \text{ и } \mathbb{E}Y_n^2 = \sigma^2 \text{ за све } n \in \mathbb{N}.$$

Дефинишимо

$$X_n = \left(\sum_{j=1}^{n} Y_j\right)^2 - n\sigma^2,$$

за све $n \in \mathbb{N}$. Тада директно важи

$$\mathbb{E}\,|X_n| \leq 2n\sigma^2 < \infty, \text{ за све } n \in \mathbb{N}.$$

Поред тога, за све $n \in \mathbb{N}$, добијамо

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(X_{n+1} \,|\, Y_1, \ldots, Y_n\right) &= \mathbb{E}\left(\left(\sum_{j=1}^{n+1} Y_j\right)^2 - (n+1)\sigma^2 \,\middle|\, Y_1, \ldots, Y_n\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\left(Y_{n+1} + \sum_{j=1}^{n} Y_j\right)^2 - (n+1)\sigma^2 \,\middle|\, Y_1, \ldots, Y_n\right) \\
&= \mathbb{E}\left(Y_{n+1}^2 + 2Y_{n+1}\sum_{j=1}^{n} Y_j + \left(\sum_{j=1}^{n} Y_j\right)^2 - (n+1)\sigma^2 \,\middle|\, Y_1, \ldots, Y_n\right) \\
&= \mathbb{E}Y_{n+1}^2 + 2\mathbb{E}Y_{n+1}\left(\sum_{j=1}^{n} Y_j\right) + \left(\sum_{j=1}^{n} Y_j\right)^2 - (n+1)\sigma^2 \\
&= \sigma^2 + \left(\sum_{j=1}^{n} Y_j\right)^2 - n\sigma^2 - \sigma^2 \\
&= \sigma^2 + X_n - \sigma^2 \\
&= X_n.
\end{aligned}$$

На основу претходног, можемо закључити да је случајан процес $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ мартингал у односу на процес $\{Y_n : n \in \mathbb{N}\}$. $\diamond$

Пример 1.3.2 Нека је $\{Y_n : n \in \mathbb{N}\}$ случајан процес и нека је за случајну промењиву X испуњен услов $\mathbb{E}|X| < \infty$. Означимо

$$X_n = \mathbb{E}\left(X \,|\, Y_1, \ldots, Y_n\right),$$

за све $n \in \mathbb{N}$. Тада је

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\,|X_n| &= \mathbb{E}\,|\mathbb{E}\left(X \,|\, Y_1, \ldots, Y_n\right)| \\
&\leq \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(|X| \,|\, Y_1, \ldots, Y_n\right)\right) \\
&= \mathbb{E}|X| \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

Поред тога, користећи својство (1.1.8), налазимо да за све $n \in \mathbb{N}$, важи

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(X_{n+1} \,|\, Y_1, \ldots, Y_n\right) &= \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(X \,|\, Y_1, \ldots, Y_{n+1}\right) \,|\, Y_1, \ldots, Y_n\right) \\ &= \mathbb{E}\left(X \,|\, Y_1, \ldots, Y_n\right) \\ &= X_n. \end{aligned}$$

Самим тим, овако формиран случајан процес $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$, представља мартингал у односу на процес $\{Y_n : n \in \mathbb{N}\}$. Такође, у литератури, случајан процес $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ носи назив *Дубов мартингални процес.* ◇

Пример 1.3.3 Нека је $Y_1, Y_2, \ldots$ низ независних случајних променљивих, које имају исту густину расподеле h која је строго позитивна функција. Поред тога, нека за ненегативну реалну функцију g важи

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(y)\,\mathrm{d}y = 1.$$

Дефинишимо

$$X_n = \frac{g\left(Y_1\right) \cdot \ldots \cdot g\left(Y_n\right)}{h\left(Y_1\right) \cdot \ldots \cdot h\left(Y_n\right)},$$

за све $n \in \mathbb{N}$. Како су случајне променљиве $Y_1, Y_2, \ldots$ независне са истом густином расподеле h, то директно закључујемо

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(X_{n+1} \,|\, Y_1, \ldots, Y_n\right) &= \mathbb{E}\left(\frac{g\left(Y_1\right) \cdot \ldots \cdot g\left(Y_n\right) \cdot g\left(Y_{n+1}\right)}{h\left(Y_1\right) \cdot \ldots \cdot h\left(Y_n\right) \cdot h\left(Y_{n+1}\right)} \,\middle|\, Y_1, \ldots, Y_n\right) \\ &= \mathbb{E}\left(X_n \frac{g\left(Y_{n+1}\right)}{h\left(Y_{n+1}\right)} \,\middle|\, Y_1, \ldots, Y_n\right) \\ &= \mathbb{E}\left(X_n \,|\, Y_1, \ldots, Y_n\right) \mathbb{E}\left(\frac{g\left(Y_{n+1}\right)}{h\left(Y_{n+1}\right)} \,\middle|\, Y_1, \ldots, Y_n\right) \\ &= X_n \mathbb{E}\left(\frac{g\left(Y_{n+1}\right)}{h\left(Y_{n+1}\right)}\right) \\ &= X_n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(y)}{h(y)} h(y)\,\mathrm{d}y \\ &= X_n \int_{-\infty}^{\infty} g(y)\,\mathrm{d}y \\ &= X_n, \end{aligned}$$

за све $n \in \mathbb{N}$. Наравно, X_n је ненегативна случајна променљива и слично претходном, имајући у виду независност случајних променљивих $Y_1, Y_2, \ldots$, важи

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left|X_n\right| = \mathbb{E}X_n &= \mathbb{E}\left(\prod_{j=1}^{n} \frac{g\left(Y_j\right)}{h\left(Y_j\right)}\right) \\ &= \prod_{j=1}^{n} \mathbb{E}\left(\frac{g\left(Y_j\right)}{h\left(Y_j\right)}\right) = 1 < \infty. \end{aligned}$$

за све $n \in \mathbb{N}$. Дакле, овако конструисани случајан процес $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ јесте мартингал у односу на почетни процес $\{Y_n : n \in \mathbb{N}\}$. ◇

На крају напоменимо, да ако је случајан процес $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ мартингал у односу на процес $\{Y_n : n \in \mathbb{N}\}$ и ако је $k \in \mathbb{N}$, онда важи

$$\mathbb{E}\,(X_{n+k}\,|\,Y_1, \ldots, Y_n) = X_n,$$

за све $n \in \mathbb{N}$. Наиме, тврђење важи за $k = 1$ директно по дефиницији мартингала и претпоставимо да је тврђење тачно за неко $k \in \mathbb{N}$. Тада је на основу својства (1.1.8) и претходне претпоставке, испуњено

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\,(X_{n+k+1}\,|\,Y_1, \ldots, Y_n) &= \mathbb{E}\,(\mathbb{E}\,(X_{n+k+1}\,|\,Y_1, \ldots, Y_{n+k})\;|\,Y_1, \ldots, Y_n) \\
&= \mathbb{E}\,(X_{n+k}\,|\,Y_1, \ldots, Y_n) \\
&= X_n.
\end{aligned}$$

Тиме је индуктивни доказ завршен.

Глава 2

Дубове мартингалне неједнакости

Нека је $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ вероватносни простор. Тада очекивање случајне променљиве X у односу на вероватносну меру $\mathbb{P}$ обележавамо на уобичајен начин са $\mathbb{E}X$. Поред тога, ако је $0 < p < \infty$, пишемо

$$\|X\|_p = \|X\|_{\mathrm{L}^p(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})} = (\mathbb{E}\,|X|^p)^{1/p} = \left(\int_\Omega |X|^p \,\mathrm{d}\mathbb{P}\right)^{1/p}.$$

Подразумевајући претходно уведену нотацију, у овој глави разматрамо разне мартингалне неједнакости Дубовог типа. Заправо, од посебног интереса су Дубове максималне неједнакости, као и Дубове L^p неједнакости.

2.1 Максималне неједнакости

Нека је $X_1, X_2, \ldots$ низ независних случајних променљивих са истом расподелом на вероватносном простору $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, који испуњава услове

$$\mathbb{E}X_j = 0 \text{ и } \mathbb{E}X_j^2 = \sigma^2 < \infty,$$

за све природне бројеве $j \geq 1$. Поред тога, означимо

$$S_n = X_1 + \ldots + X_n, \tag{2.1.1}$$

за све природне бројеве $n \geq 1$. Приметимо да важи

$$\mathbb{E}\,|S_n| \leq \mathbb{E}\,|X_1| + \ldots + \mathbb{E}\,|X_n| < \infty.$$

Са друге стране, налазимо

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\,(S_{n+1}\,|\,X_1,\ldots,X_n) &= \mathbb{E}\,(S_n + X_{n+1}\,|\,X_1,\ldots,X_n) \\
&= \mathbb{E}\,(S_n\,|\,X_1,\ldots,X_n) + \mathbb{E}\,(X_{n+1}\,|\,X_1,\ldots,X_n) \\
&= S_n + \mathbb{E}X_{n+1} \\
&= S_n.
\end{aligned}$$

Из претходног закључујемо да је $\{S_n : n = 1, 2, \ldots\}$ мартингал у односу на низ $\{X_n : n = 1, 2, \ldots\}$ почетних случајних променљивих. Са друге стране, за све $n \geq 1$ важи $\operatorname{Var} S_n = n\sigma^2$ и применом неједнакости Чебишева добијамо

$$\varepsilon^2 \cdot \mathbb{P}\,\{|S_n| \geq \varepsilon\} \leq n\sigma^2, \quad \text{где је } \ \varepsilon > 0.$$

Важи и следећа, боља, неједнакост

$$\varepsilon^2 \cdot \mathbb{P}\left\{\max_{1\leq j\leq n} |S_j| \geq \varepsilon\right\} \leq n\sigma^2, \quad \text{где је } \ \varepsilon > 0,$$

која је позната као неједнакост Колмогорова. Генерализација на мартингале је једноставна, али веома значајна и назива се Дубова максимална неједнакост.

Теорема 2.1.1 (Дубове максималне неједнакости) *Нека је* $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *ненегативан мартингал,* $M = \max\limits_{1 \le j \le n} X_j$ *и* $N = \min\limits_{1 \le j \le n} X_j$*. Тада важе следеће неједнакости*

$$x \cdot \mathbb{P}\{M \ge x\} \le \mathbb{E}\left(X_n \cdot \mathbb{1}_{\{M \ge x\}}\right)$$

и

$$x \cdot \mathbb{P}\{N \le x\} \ge \mathbb{E}\left(X_n \cdot \mathbb{1}_{\{N \le x\}}\right),$$

за све $x > 0$.

Доказ. Дефинишимо

$$T = \begin{cases} \min\{j \le n : X_j \ge x\}, & \text{ако је } X_j \ge x \text{ за неко } j = 0, \ldots, n; \\ n, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Како је $X_1, X_2, \ldots, X_n$ мартингал, важи $\mathbb{E}X_n = \mathbb{E}X_T$. Очигледно је да важи

$$\mathbb{E}X_T = \mathbb{E}\left(X_T \cdot \mathbb{1}_{\{M \ge x\}}\right) + \mathbb{E}\left(X_T \cdot \mathbb{1}_{\{M < x\}}\right).$$

Ако је $M \ge x$, односно

$$\max_{1 \le j \le n} X_j \ge x,$$

онда постоји неко $j = 1, \ldots, n$ за које је $X_j \ge x$, па важи $X_T \ge x$. Даље добијамо

$$\mathbb{E}\left(X_T \cdot \mathbb{1}_{\{M \ge x\}}\right) = \int_\Omega X_T \cdot \mathbb{1}_{\{M \ge x\}} \, \mathrm{d}\mathbb{P} = \int_{M \ge x} X_T \, \mathrm{d}\mathbb{P} \ge x \int_{M \ge x} \mathrm{d}\mathbb{P} \ge x \cdot \mathbb{P}\{M \ge x\}.$$

Са друге стране, ако је $M = \max\limits_{1 \le j \le n} X_j < x$, онда не постоји $j = 1, \ldots, n$ за које је $X_j \ge x$, па важи $T = n$ тј. $X_T = X_n$. Дакле, важи

$$\mathbb{E}X_n = \mathbb{E}X_T \ge x \cdot \mathbb{P}\{M \ge x\} + \mathbb{E}\left(X_n \cdot \mathbb{1}_{\{M < x\}}\right),$$

односно

$$x \cdot \mathbb{P}\{M \ge x\} \le \mathbb{E}X_n - \mathbb{E}\left(X_n \cdot \mathbb{1}_{\{M < x\}}\right) = \mathbb{E}\left(X_n \cdot \mathbb{1}_{\{M \ge x\}}\right).$$

Тиме је завршен доказ прве неједнакости у теореми. Са друге стране, да бисмо доказали другу неједнакост, дефинишимо

$$T = \begin{cases} \min\{j \le n : X_j \le x\}, & \text{ако је } X_j \le x \text{ за неко } j = 0, \ldots, n; \\ n, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Слично као у претходном делу доказа, важи

$$\mathbb{E}X_n = \mathbb{E}X_T = \mathbb{E}\left(X_T \cdot \mathbb{1}_{\{N \le x\}}\right) + \mathbb{E}\left(X_T \cdot \mathbb{1}_{\{N > x\}}\right).$$

Ако је $N \le x$, тј.

$$\min_{1 \le j \le n} X_j \le x,$$

онда постоји неко $j = 1, \ldots, n$ за које је $X_j \le x$, па важи $X_T \le x$. Аналогно доказу за прву неједнакост, налазимо

$$\mathbb{E}\left(X_T \cdot \mathbb{1}_{\{N \le x\}}\right) \le x \cdot \mathbb{P}\{N \le x\}.$$

Ако је $N = \min\limits_{1 \le j \le n} X_j > x$, онда је $X_j > x$ за све $j = 1, \ldots, n$, одакле закључујемо да је $T = n$, тј. $X_T = X_n$. Из претходног разматрања следи

$$\mathbb{E}X_n \le x \cdot \mathbb{P}\{N \le x\} + \mathbb{E}\left(X_n \cdot \mathbb{1}_{\{N > x\}}\right),$$

односно

$$x \cdot \mathbb{P}\{N \le x\} \ge \mathbb{E}X_n - \mathbb{E}\left(X_n \cdot \mathbb{1}_{\{N > x\}}\right) = \mathbb{E}\left(X_n \cdot \mathbb{1}_{\{N \le x\}}\right).$$

Тиме је завршен и доказ друге неједнакости. $\square$

Напомена 2.1.2 Наравно, под претпоставкама Теореме 2.1.1 важе и следеће варијанте Дубових максималних неједнакости

$$x \cdot \mathbb{P}\{M > x\} \leq \mathbb{E}\left(X_n \cdot \mathbb{1}_{\{M>x\}}\right)$$

и

$$x \cdot \mathbb{P}\{N < x\} \geq \mathbb{E}\left(X_n \cdot \mathbb{1}_{\{N<x\}}\right),$$

за све $x > 0$. $\diamond$

Да бисмо из Дубове максималне неједнакости извели неједнакост Колмогорова, потребна је следећа последица.

Последица 2.1.3 *Нека је $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ненегативан мартингал и нека је $M = \max\limits_{1\leq j\leq n} X_j$. Тада за свако $x > 0$ важи:*

$$x \cdot \mathbb{P}\{M \geq x\} \leq \mathbb{E}X_n.$$

Доказ. Користећи резултат претходне теореме, закључујемо

$$x \cdot \mathbb{P}\{M \geq x\} \leq \mathbb{E}\left(X_n \cdot \mathbb{1}_{\{M\geq x\}}\right) = \int_\Omega X_n \cdot \mathbb{1}_{\{M\geq x\}} \,\mathrm{d}\mathbb{P} = \int_{M\geq x} X_n \,\mathrm{d}\mathbb{P} \leq \int_\Omega X_n \,\mathrm{d}\mathbb{P} = \mathbb{E}X_n,$$

што је и требало доказати. $\square$

Напомена 2.1.4 У доказима претходне теореме и последице смо искористили чињеницу да ако случајне промењиве $X_1, X_2, \ldots, X_n$ формирају мартингал, онда важи

$$\mathbb{E}X_1 = \mathbb{E}X_2 = \ldots = \mathbb{E}X_n.$$

Међутим, приметимо да искази претходне теореме и последице остају на снази и ако за случајне промењиве $X_1, X_2, \ldots, X_n$ важи нешто слабији услов

$$\mathbb{E}X_1 \leq \mathbb{E}X_2 \leq \ldots \leq \mathbb{E}X_n,$$

што може бити од користи у наредним разматрањима. $\diamond$

• Очигледно је да низ случајних промењивих $\{S_n : n = 1, 2, \ldots\}$ дефинисан у (2.1.1) формира мартингал. Користећи Јенсенову неједнакост доказујемо да за низ $S_1^2, \ldots, S_n^2$ важи

$$\mathbb{E}S_1^2 \leq \mathbb{E}S_2^2 \leq \ldots \leq \mathbb{E}S_n^2.$$

Наиме, како је $\{S_n : n = 1, 2, \ldots\}$ мартингал у односу на $\{X_n : n = 1, 2, \ldots\}$, то важи

$$\mathbb{E}\left(S_{n+1}^2 \,|\, X_1, \ldots, X_n\right) \geq \left(\mathbb{E}\left(S_{n+1} \,|\, X_1, \ldots, X_n\right)\right)^2 = S_n^2.$$

Из неједнакости

$$\mathbb{E}\left(S_{n+1}^2 \,|\, X_1, \ldots, X_n\right) \geq S_n^2,$$

следи

$$\mathbb{E}S_{n+1}^2 \geq \mathbb{E}S_n^2,$$

па коначно добијамо

$$\mathbb{E}S_1^2 \leq \mathbb{E}S_2^2 \leq \ldots \leq \mathbb{E}S_n^2.$$

На основу претходног разматрања, Последице 2.1.3 и Напомене 2.1.4, следи да је

$$\mathbb{E}S_n^2 \geq x \cdot \mathbb{P}\left\{\max_{0\leq j\leq n} S_j^2 \geq x\right\},$$

за све $x > 0$. Ако узмемо да је $\varepsilon = \sqrt{x}$, добијамо

$$\mathbb{E}S_n^2 \geq \varepsilon^2 \cdot \mathbb{P}\left\{\max_{1\leq j\leq n} |S_j| \geq \varepsilon\right\}.$$

При дефинисању низа $\{S_n : n = 1, 2, \ldots\}$ у (2.1.1), закључили смо да је $\mathbb{E}S_n^2 = n\sigma^2$, па коначно добијамо

$$\varepsilon^2 \cdot \mathbb{P}\left\{\max_{1\leq j\leq n} |S_j| \geq \varepsilon\right\} \leq n\sigma^2.$$

Тиме је доказана неједнакост Колмогорова, користећи Дубову максималну неједнакост.

2.2 Дубова L^1 неједнакост

Најпре, имамо следеће једноставно својство које се односи на ненегативне случајне промењиве.

Лема 2.2.1 *Нека је X ненегативна случајна промењива на вероватносном простору $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ и нека је $0 < p < \infty$. Тада важи*

$$\|X\|_p^p = \mathbb{E}X^p = \int_0^\infty px^{p-1}\mathbb{P}\{X \geq x\}\,\mathrm{d}x.$$

Доказ. Важи

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}X^p &= \int_\Omega X^p\,\mathrm{d}\mathbb{P} \\
&= \int_\Omega \int_0^X px^{p-1}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\mathbb{P} \\
&= \int_\Omega \int_0^\infty px^{p-1}\mathbb{1}_{\{X\geq x\}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\mathbb{P} \\
&= \int_0^\infty px^{p-1}\int_\Omega \mathbb{1}_{\{X\geq x\}}\,\mathrm{d}\mathbb{P}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^\infty px^{p-1}\mathbb{P}\{X \geq x\}\,\mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

што је и требало показати. □

Следеће елементарно помоћно тврђење биће од користи у наредним разматрањима.

Лема 2.2.2 *Нека је $\kappa(x) = x\log x$ за све $x \geq 0$, при чему подразумевамо да је $\kappa(0) = 0$. Тада важи*

$$\min_{x\in[0,\infty)} \kappa(x) = \kappa\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}.$$

Доказ. Приметимо да је $\kappa'(x) = \log x + 1$, одакле следи $\kappa' \leq 0$ на $[0, 1/e]$ и $\kappa' \geq 0$ на $[1/e, \infty)$, односно, функција κ опада на интервалу $[0, 1/e]$ и расте на интервалу $[1/e, \infty)$. Стога, функција κ на интервалу $[0, \infty)$ достиже минимум у тачки $1/e$. Тиме је доказ завршен. □

Сада смо у могућности да докажемо класичну Дубову L^1 неједнакост. Наравно, један од главних елемената доказа јесте Дубова максимална неједнакост.

Теорема 2.2.3 (Дубова L^1 неједнакост) *Нека је $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ненегативан мартингал и нека је $M = \max\limits_{1\leq j\leq n} X_j$. Тада важи*

$$\|M\|_1 \leq \frac{e}{e-1}\left(1 + \mathbb{E}\left(X_n \log X_n\right)\right).$$

Доказ. Најпре, уочимо да важи

$$\int_0^1 \mathbb{P}\{M \geq x\}\,\mathrm{d}x \leq 1,$$

јер је $\mathbb{P}\{M \geq x\} \leq 1$. Самим тим, тада је

$$\|M\|_1 - 1 = \mathbb{E}M - 1 \leq \mathbb{E}M - \int_0^1 \mathbb{P}\{M \geq x\}\,\mathrm{d}x = \int_1^\infty \mathbb{P}\{M \geq x\}\,\mathrm{d}x,$$

где смо искористили чињеницу да је на основу Леме 2.2.1 испуњено

$$\mathbb{E}M = \int_0^\infty \mathbb{P}\{M \geq x\}\,\mathrm{d}x.$$

Даље, користећи Дубове максималне неједнакости, односно Теорему 2.1.1, као и Лему 2.2.2, налазимо

$$\begin{aligned}
\|M\|_1 - 1 &\leq \int_1^\infty \mathbb{P}\{M \geq x\}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_1^\infty \frac{1}{x}\cdot x \cdot \mathbb{P}\{M \geq x\}\,\mathrm{d}x \\
&\leq \int_1^\infty \frac{1}{x}\cdot \mathbb{E}\left(X_n \cdot \mathbb{1}_{\{M\geq x\}}\right)\mathrm{d}x \\
&= \int_1^\infty \frac{1}{x}\int_\Omega X_n \cdot \mathbb{1}_{\{M\geq x\}}\,\mathrm{d}\mathbb{P}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_1^\infty \int_\Omega \frac{1}{x}\cdot X_n \cdot \mathbb{1}_{\{M\geq x\}}\,\mathrm{d}\mathbb{P}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_\Omega \int_1^\infty \frac{1}{x}\cdot X_n \cdot \mathbb{1}_{\{M\geq x\}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\mathbb{P} \\
&= \int_\Omega X_n \int_1^\infty \frac{1}{x}\cdot \mathbb{1}_{\{M\geq x\}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\mathbb{P} \\
&= \int_{M\geq 1} X_n \int_1^M \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\mathbb{P} \\
&= \int_{M\geq 1} X_n \log M\,\mathrm{d}\mathbb{P} \\
&= \int_{M\geq 1}\left(X_n\log X_n - X_n \log\frac{X_n}{M}\right)\mathrm{d}\mathbb{P} \\
&= \int_{M\geq 1}\left(X_n\log X_n - M\kappa\left(\frac{X_n}{M}\right)\right)\mathrm{d}\mathbb{P} \\
&\leq \int_{M\geq 1}\left(X_n\log X_n + \frac{M}{e}\right)\mathrm{d}\mathbb{P} \\
&\leq \int_\Omega\left(X_n\log X_n + \frac{M}{e}\right)\mathrm{d}\mathbb{P} \\
&= \mathbb{E}\left(X_n\log X_n\right) + \frac{\mathbb{E}M}{e} \\
&= \mathbb{E}\left(X_n\log X_n\right) + \frac{\|M\|_1}{e},
\end{aligned}$$

одакле, директно закључујемо

$$\left(1-\frac{1}{e}\right)\|M\|_1 \leq 1 + \mathbb{E}\left(X_n\log X_n\right),$$

што је и требало доказати. $\square$

• У наставку посматрајмо функцију

$$\gamma(x) = x - 1 - \log x,$$

при чему је $x > 0$. Тада је $\gamma'(x) = 1 - 1/x$, одакле следи $\gamma' \leq 0$ на интервалу $(0,1]$ и $\gamma' \geq 0$ на интервалу $[1,\infty)$, односно, функција γ је опадајућа на $(0,1]$ и растућа на $[1,\infty)$. Другим речима, минимум функције γ јесте $\gamma(1) = 0$. Следи $\gamma(x) \geq 0$ за све $x > 0$. Са друге стране, важи $\gamma''(x) = 1/x^2$, што повлачи да је γ конвексна функција на датом интервалу $(0,\infty)$.

Теорема 2.2.4 *Нека је $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ненегативан мартингал, $M = \max\limits_{1\leq j\leq n} X_j$ и $N = \min\limits_{1\leq j\leq n} X_j$, при чему важи $X_1 = 1$. Тада је*

$$\gamma(\mathbb{E}M) \leq \mathbb{E}(X_n \log X_n),$$

и

$$\gamma(\mathbb{E}N) \leq \mathbb{E}(X_n \log X_n).$$

Доказ. Прво, приметимо да важи $M \geq X_1 = 1$. Самим тим, тада добијамо

$$\int_0^1 \mathbb{P}\{M \geq x\}\,\mathrm{d}x = 1,$$

одакле, на основу Дубових максималних неједнакости (видети Теорему 2.1.1) и Леме 2.2.1, следи

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}M - 1 &= \int_0^\infty \mathbb{P}\{M \geq x\}\,\mathrm{d}x - 1 \\
&= \int_1^\infty \mathbb{P}\{M \geq x\}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_1^\infty \frac{1}{x}\cdot x \cdot \mathbb{P}\{M \geq x\}\,\mathrm{d}x \\
&\leq \int_1^\infty \frac{1}{x}\cdot \mathbb{E}\left(X_n \cdot \mathbb{1}_{\{M\geq x\}}\right)\mathrm{d}x \\
&= \int_1^\infty \frac{1}{x}\int_\Omega X_n \cdot \mathbb{1}_{\{M\geq x\}}\,\mathrm{d}\mathbb{P}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_1^\infty \int_\Omega \frac{1}{x}\cdot X_n \cdot \mathbb{1}_{\{M\geq x\}}\,\mathrm{d}\mathbb{P}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_\Omega \int_1^\infty \frac{1}{x}\cdot X_n \cdot \mathbb{1}_{\{M\geq x\}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\mathbb{P} \\
&= \int_\Omega X_n \int_1^\infty \frac{1}{x}\cdot \mathbb{1}_{\{M\geq x\}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\mathbb{P} \\
&= \int_\Omega X_n \int_1^M \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\mathbb{P} \\
&= \int_\Omega X_n \log M\,\mathrm{d}\mathbb{P} \\
&= \mathbb{E}\left(X_n \log M\right).
\end{aligned}$$

Како је γ ненегативна функција, то добијамо

$$\mathbb{E}M - 1 \leq \mathbb{E}\left(X_n \log M\right) \leq \mathbb{E}\left(X_n \log M + X_n \gamma\left(\frac{M}{X_n \mathbb{E}M}\right)\right),$$

и како важи

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(X_n \log M + X_n \gamma\left(\frac{M}{X_n \mathbb{E}M}\right)\right) &= \mathbb{E}\left(X_n \log M + X_n\left(\frac{M}{X_n \mathbb{E}M} - 1 - \log\frac{M}{X_n \mathbb{E}M}\right)\right) \\
&= \mathbb{E}\left(X_n \log M + X_n\left(\frac{M}{X_n \mathbb{E}M} - 1 - \log M + \log X_n + \log \mathbb{E}M\right)\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\frac{M}{\mathbb{E}M} - X_n + X_n \log X_n + X_n \log \mathbb{E}M\right) \\
&= \frac{\mathbb{E}M}{\mathbb{E}M} - \mathbb{E}X_n + \mathbb{E}\left(X_n \log X_n\right) + \mathbb{E}X_n \log \mathbb{E}M \\
&= \mathbb{E}\left(X_n \log X_n\right) + \log \mathbb{E}M,
\end{aligned}$$

где смо искористили чињеницу да важи $\mathbb{E}X_n = \mathbb{E}X_1 = 1$, то следи

$$\mathbb{E}M - 1 \leq \mathbb{E}\left(X_n \log X_n\right) + \log \mathbb{E}M,$$

односно

$$\gamma(\mathbb{E}M) \leq \mathbb{E}(X_n \log X_n).$$

Са друге стране, важи $N \leq X_1 = 1$, што повлачи

$$\int_1^\infty \mathbb{P}\left\{N \geq x\right\} \mathrm{d}x = 1,$$

одакле, на основу Дубових максималних неједнакости (у аналогној варијанти са одговарајућим строгим неједнакостима, видети Напомену 2.1.2) и Леме 2.2.1, следи

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}N &= \int_0^\infty \mathbb{P}\left\{N \geq x\right\} \mathrm{d}x = \int_0^1 \mathbb{P}\left\{N \geq x\right\} \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \left(1 - \mathbb{P}\left\{N < x\right\}\right) \mathrm{d}x \\
&= 1 - \int_0^1 \mathbb{P}\left\{N < x\right\} \mathrm{d}x \\
&= 1 - \int_0^1 \frac{1}{x} \cdot x \cdot \mathbb{P}\left\{N < x\right\} \mathrm{d}x \\
&\leq 1 - \int_0^1 \frac{1}{x} \cdot \mathbb{E}\left(X_n \cdot \mathbb{1}_{\{N<x\}}\right) \mathrm{d}x \\
&= 1 - \mathbb{E}\left(\int_0^1 \frac{1}{x} \cdot X_n \cdot \mathbb{1}_{\{N<x\}}\right) \mathrm{d}x \\
&= 1 - \mathbb{E}\left(X_n \int_N^1 \frac{1}{x}\, \mathrm{d}x\right) \\
&= 1 + \mathbb{E}\left(X_n \log N\right).
\end{aligned}$$

Затим, аналогно као у претходном делу налазимо

$$\mathbb{E}\left(X_n \log N\right) \leq \mathbb{E}\left(X_n \log X_n\right) + \log \mathbb{E}N.$$

Коначно, на основу свега претходног следи

$$\mathbb{E}N \leq 1 + \mathbb{E}\left(X_n \log X_n\right) + \log \mathbb{E}N,$$

или еквивалентно

$$\gamma(\mathbb{E}N) \leq \mathbb{E}(X_n \log X_n).$$

Тиме је доказ комплетиран. □

• На крају, поред функције γ, посматрајмо и функцију

$$\theta(x) = \frac{e-1}{e}x - 1, \;\; x > 0.$$

Тада за све $x > 0$ важи

$$\gamma(x) - \theta(x) = \frac{x}{e} - \log x = x\left(\kappa\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{e}\right) \geq 0,$$

при чему смо искористили Лему 2.2.2. Следи

$$\gamma(x) \geq \theta(x), \tag{2.2.1}$$

за све $x > 0$. До неједнакости (2.2.1) смо могли доћи и на други начин. Наиме, траг функције θ јесте права са коефицијентом правца $\gamma'(e)$, која у равни пролази кроз тачку $(e, e-2)$, при чему тачка $(e, e-2)$ припада трагу функције γ. Самим тим, права одређена са θ јесте тангента на криву одређену са γ и будући да је γ конвексна функција, директно долазимо до закључка да важи $\gamma \geq \theta$. Са друге стране, ако је

$$X_1, X_2, \ldots, X_n,$$

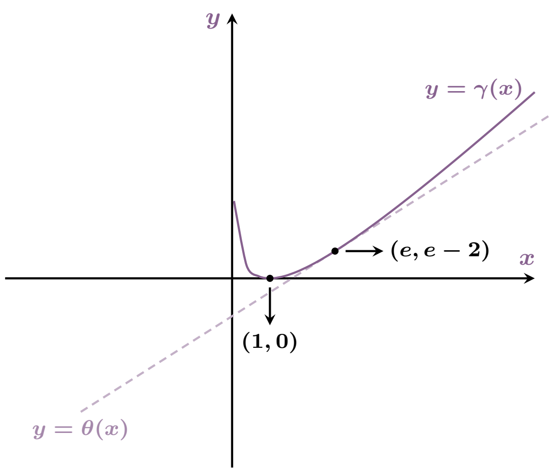
ненегативан мартингал и ако је

$$M = \max_{1 \leq j \leq n} X_j,$$

тада се Дубова L^1 неједнакост може записати у следећем еквивалентном облику

$$\theta\left(\mathbb{E}M\right) \leq \mathbb{E}\left(X_n \log X_n\right).$$

Имајући у виду да је $\theta \leq \gamma$, процена из Теореме 2.2.4 јесте боља од процене из Теореме 2.3.1, уз важну напомену да у Теореми 2.2.4 имамо на снази додатан услов $X_1 = 1$.



Графици функција $y = \gamma(x)$ и $y = \theta(x)$.

2.3 Дубова L^p неједнакост

У овој секцији показујемо варијанту L^p Дубове неједнакости. Наиме, имамо следећи резултат.

Теорема 2.3.1 (Дубова L^p неједнакост) *Нека је $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ненегативан мартингал и нека је $M = \max\limits_{1 \le j \le n} X_j$. Тада за све $1 < p < \infty$ важи*

$$\|M\|_p \le \frac{p}{p-1} \|X_n\|_p .$$

Доказ. На основу Леме 2.2.1 и Дубових максималних неједнакости (Теорема 2.1.1) важи

$$\begin{aligned}
\|M\|_p^p = \mathbb{E}M^p &= \int_0^\infty p x^{p-1} \mathbb{P}\{M \ge x\}\, \mathrm{d}x \\
&= \int_0^\infty p x^{p-2} \cdot x \cdot \mathbb{P}\{M \ge x\}\, \mathrm{d}x \\
&\le \int_0^\infty p x^{p-2} \cdot \mathbb{E}\left(X_n \cdot \mathbb{1}_{\{M \ge x\}}\right) \mathrm{d}x \\
&= p\mathbb{E}\left(\int_0^\infty x^{p-2} \cdot X_n \cdot \mathbb{1}_{\{M \ge x\}}\, \mathrm{d}x\right) \\
&= p\mathbb{E}\left(X_n \int_0^\infty x^{p-2} \cdot \mathbb{1}_{\{M \ge x\}}\, \mathrm{d}x\right) \\
&= p\mathbb{E}\left(X_n \int_0^M x^{p-2}\, \mathrm{d}x\right) \\
&= \frac{p}{p-1} \mathbb{E}\left(X_n M^{p-1}\right).
\end{aligned}$$

Са друге стране, користећи Хелдерову неједнакост са паром спрегнутих експонената $\left(p, \frac{p}{p-1}\right)$, директно налазимо

$$\mathbb{E}\left(X_n M^{p-1}\right) \le \mathbb{E}\left(X_n^p\right)^{\frac{1}{p}} \mathbb{E}\left(\left(M^{p-1}\right)^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}} = \mathbb{E}\left(X_n^p\right)^{\frac{1}{p}} \mathbb{E}\left(M^p\right)^{1-\frac{1}{p}},$$

односно

$$\mathbb{E}\left(X_n M^{p-1}\right) \le \|X_n\|_p \|M\|_p^{p-1}.$$

Према томе, на основу свега претходног, можемо закључити

$$\|M\|_p^p \le \frac{p}{p-1} \|X_n\|_p \|M\|_p^{p-1},$$

одакле следи тражена неједнакост

$$\|M\|_p \le \frac{p}{p-1} \|X_n\|_p ,$$

чиме је доказ завршен. □

• У наставку, посматрајмо функцију дату са

$$\delta_p(x) = \left(1 - \frac{1}{p}\right) x^{\frac{1}{p}} + \frac{1}{p} x^{\frac{1}{p}-1}, \;\; x > 0,$$

при чему је $1 < p < \infty$. Тада, директно добијамо

$$\begin{aligned}
\delta_p'(x) &= \frac{1}{p}\left(1-\frac{1}{p}\right)x^{\frac{1}{p}-1}+\frac{1}{p}\left(\frac{1}{p}-1\right)x^{\frac{1}{p}-2} \\
&= \frac{1}{p}\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(x^{\frac{1}{p}-1}-x^{\frac{1}{p}-2}\right) \\
&= \frac{1}{p}\left(1-\frac{1}{p}\right)x^{\frac{1}{p}-2}(x-1).
\end{aligned}$$

Самим тим, важи $\delta_p' \leq 0$ на интервалу $(0,1]$ и $\delta_p' \geq 0$ на интервалу $[1,\infty)$, односно, функција δ_p опада на $(0,1]$ и расте на $[1,\infty)$. Другим речима, функција δ_p има свој минимум $\delta_p(1) = 1$. Поред тога, важи

$$\begin{aligned}
\delta_p''(x) &= \frac{1}{p}\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(\left(\frac{1}{p}-1\right)x^{\frac{1}{p}-2}-\left(\frac{1}{p}-2\right)x^{\frac{1}{p}-3}\right) \\
&= \frac{1}{p}\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(\left(2-\frac{1}{p}\right)x^{\frac{1}{p}-3}-\left(1-\frac{1}{p}\right)x^{\frac{1}{p}-2}\right) \\
&= \frac{1}{p}\left(1-\frac{1}{p}\right)^2 x^{\frac{1}{p}-3}\left(\frac{2-1/p}{1-1/p}-x\right) \\
&= \frac{1}{p}\left(1-\frac{1}{p}\right)^2 x^{\frac{1}{p}-3}\left(\frac{2p-1}{p-1}-x\right).
\end{aligned}$$

На основу претходног, можемо закључити да важи

$$\delta_p'' \geq 0 \ \text{ на интервалу } \ \left(0, \frac{2p-1}{p-1}\right],$$

и

$$\delta_p'' \leq 0 \ \text{ на интервалу } \ \left[\frac{2p-1}{p-1}, \infty\right),$$

односно, функција δ_p је конвексна на интервалу $\left(0, \frac{2p-1}{p-1}\right]$ и конкавна на интервалу $\left[\frac{2p-1}{p-1}, \infty\right)$.

Теорема 2.3.2 *Нека је $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ненегативан мартингал, $M = \max\limits_{1\leq j\leq n} X_j$ и $N = \min\limits_{1\leq j\leq n} X_j$, при чему важи $X_1 = 1$. Тада за све $1 < p < \infty$ важи*

$$\delta_p\left(\|M\|_p^p\right) \leq \|X_n\|_p\,,$$

и

$$\delta_p\left(\|N\|_p^p\right) \leq \|X_n\|_p\,.$$

Доказ. Најпре, важи $M \geq X_1 = 1$. Самим тим, тада добијамо (видети Лему 2.2.1)

$$\begin{aligned}
\|M\|_p^p = \mathbb{E}M^p &= \int_0^\infty px^{p-1}\mathbb{P}\left\{M \geq x\right\}\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 px^{p-1}\mathbb{P}\left\{M \geq x\right\}\mathrm{d}x + \int_1^\infty px^{p-1}\mathbb{P}\left\{M \geq x\right\}\mathrm{d}x \\
&= 1 + \int_1^\infty px^{p-1}\mathbb{P}\left\{M \geq x\right\}\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Директном применом Дубових максималних неједнакости (видети Теорему 2.1.1) налазимо

$$\begin{aligned}
\|M\|_p^p - 1 &= \int_1^\infty p x^{p-1} \mathbb{P}\{M \geq x\} \, \mathrm{d}x \\
&= \int_1^\infty p x^{p-2} \cdot x \cdot \mathbb{P}\{M \geq x\} \, \mathrm{d}x \\
&\leq \int_1^\infty p x^{p-2} \cdot \mathbb{E}\left(X_n \cdot \mathbb{1}_{\{M \geq x\}}\right) \mathrm{d}x \\
&= p\mathbb{E}\left(\int_1^\infty x^{p-2} \cdot X_n \cdot \mathbb{1}_{\{M \geq x\}} \, \mathrm{d}x\right) \\
&= p\mathbb{E}\left(X_n \int_1^\infty x^{p-2} \cdot \mathbb{1}_{\{M \geq x\}} \, \mathrm{d}x\right) \\
&= p\mathbb{E}\left(X_n \int_1^M x^{p-2} \, \mathrm{d}x\right) \\
&= \frac{p}{p-1} \mathbb{E}\left(X_n M^{p-1} - X_n\right) \\
&= \frac{p}{p-1}\left(\mathbb{E}\left(X_n M^{p-1}\right) - \mathbb{E}X_n\right)
\end{aligned}$$

Како важи $\mathbb{E}X_n = \mathbb{E}X_1 = 1$, то добијамо

$$\|M\|_p^p - 1 \leq \frac{p}{p-1}\left(\mathbb{E}\left(X_n M^{p-1}\right) - 1\right).$$

Следи

$$\left(1 - \frac{1}{p}\right)\|M\|_p^p + \frac{1}{p} \leq \mathbb{E}\left(X_n M^{p-1}\right). \tag{2.3.1}$$

Затим, применом Хелдерове неједнакости са спрегнутим експонентима $\left(p, \frac{p}{p-1}\right)$ изводимо следећу неједнакост

$$\mathbb{E}\left(X_n M^{p-1}\right) \leq \mathbb{E}\left(X_n^p\right)^{\frac{1}{p}} \mathbb{E}\left(\left(M^{p-1}\right)^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}} = \mathbb{E}\left(X_n^p\right)^{\frac{1}{p}} \mathbb{E}\left(M^p\right)^{1-\frac{1}{p}},$$

тј.

$$\mathbb{E}\left(X_n M^{p-1}\right) \leq \|X_n\|_p \|M\|_p^{p-1}. \tag{2.3.2}$$

На основу неједнакости (2.3.1) и (2.3.2), можемо закључити да важи

$$\left(1 - \frac{1}{p}\right)\|M\|_p^p + \frac{1}{p} \leq \|X_n\|_p \|M\|_p^{p-1},$$

односно

$$\left(1 - \frac{1}{p}\right)\|M\|_p + \frac{1}{p}\|M\|_p^{1-p} \leq \|X_n\|_p,$$

одакле следи

$$\left(1 - \frac{1}{p}\right)\left(\|M\|_p^p\right)^{\frac{1}{p}} + \frac{1}{p}\left(\|M\|_p^p\right)^{\frac{1}{p}-1} \leq \|X_n\|_p,$$

или еквивалентно

$$\delta_p\left(\|M\|_p^p\right) \leq \|X_n\|_p.$$

Са друге стране, важи $N \leq X_1 = 1$. Према томе, на основу Леме 2.2.1, можемо писати

$$\begin{aligned}
\|N\|_p^p = \mathbb{E}N^p &= \int_0^\infty px^{p-1}\mathbb{P}\{N \geq x\}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 px^{p-1}\mathbb{P}\{N \geq x\}\,\mathrm{d}x + \int_1^\infty px^{p-1}\mathbb{P}\{N \geq x\}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 px^{p-1}\mathbb{P}\{N \geq x\}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 px^{p-1}\left(1 - \mathbb{P}\{N < x\}\right)\mathrm{d}x \\
&= 1 - \int_0^1 px^{p-1}\mathbb{P}\{N < x\}\,\mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

одакле, користећи Дубове максималне неједнакости (видети и Напомену 2.1.2) налазимо

$$\begin{aligned}
\|N\|_p^p &= 1 - \int_0^1 px^{p-2} \cdot x \cdot \mathbb{P}\{N < x\}\,\mathrm{d}x \\
&\leq 1 - \int_0^1 px^{p-2} \cdot \mathbb{E}\left(X_n \cdot \mathbb{1}_{\{N<x\}}\right)\mathrm{d}x \\
&= 1 - p\mathbb{E}\left(\int_0^1 x^{p-2} \cdot X_n \cdot \mathbb{1}_{\{N<x\}}\,\mathrm{d}x\right) \\
&= 1 - p\mathbb{E}\left(X_n \int_0^1 x^{p-2} \cdot \mathbb{1}_{\{N<x\}}\,\mathrm{d}x\right) \\
&= 1 - p\mathbb{E}\left(X_n \int_N^1 x^{p-2}\,\mathrm{d}x\right) \\
&= 1 - \frac{p}{p-1}\mathbb{E}\left(X_n - X_n N^{p-1}\right) \\
&= 1 - \frac{p}{p-1}\left(\mathbb{E}X_n - \mathbb{E}\left(X_n N^{p-1}\right)\right),
\end{aligned}$$

и како важи $\mathbb{E}X_n = \mathbb{E}X_1 = 1$, то следи

$$\|N\|_p^p \leq 1 - \frac{p}{p-1}\left(1 - \mathbb{E}\left(X_n N^{p-1}\right)\right)$$

или еквивалентно

$$\left(1 - \frac{1}{p}\right)\|N\|_p^p + \frac{1}{p} \leq \mathbb{E}\left(X_n N^{p-1}\right). \tag{2.3.3}$$

Користећи Хелдерову неједнакост као у првом делу доказа закључујемо

$$\mathbb{E}(X_n N^{p-1}) \leq \|X_n\|_p \|N\|_p^{p-1}. \tag{2.3.4}$$

Тада, на основу неједнакости (2.3.3) и (2.3.4), слично као у првом делу доказа, добијамо

$$\delta_p\left(\|N\|_p^p\right) \leq \|X_n\|_p\,.$$

Тиме је доказ у потпуности завршен. □

Напомена 2.3.3 Нека је поново $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ненегативан мартингал и

$$M = \max_{1\leq j\leq n} X_j,$$

при чему важи $X_1 = 1$. Тада на основу класичне Дубове L^2 неједнакости (заправо, примењујемо Теорему 2.1.3 у случају $p = 2$) добијамо

$$\|M\|_2 \leq 2\left\|X_n\right\|_2. \tag{2.3.5}$$

Са друге стране, применом претходне Теореме 2.3.2, опет у случају $p = 2$, налазимо

$$\frac{1}{2}\left(\|M\|_2 + \frac{1}{\|M\|_2}\right) = \delta_2\left(\|M\|_2^2\right) \leq \left\|X_n\right\|_2.$$

Следи

$$\|M\|_2^2 + 1 \leq 2\|X_n\|_2\|M\|_2.$$

Према томе, важи

$$\left(\|M\|_2 - \|X_n\|_2\right)^2 \leq \|X_n\|_2^2 - 1,$$

одакле, добијамо

$$\|M\|_2 \leq \|X_n\|_2 + \sqrt{\|X_n\|_2^2 - 1}. \tag{2.3.6}$$

Наравно, како важи

$$\|X_n\|_2 + \sqrt{\|X_n\|_2^2 - 1} \leq 2\|X_n\|_2,$$

то можемо закључити да је неједнакост (2.3.6) боља од неједнакости (2.3.5). У општем случају, за произвољно $1 < p < \infty$, на основу Теореме 2.3.2, важи

$$\delta_p\left(\|M\|_p^p\right) \leq \left\|X_n\right\|_p.$$

Међутим, како је

$$\left(1 - \frac{1}{p}\right)\|M\|_p \leq \left(1 - \frac{1}{p}\right)\|M\|_p + \frac{1}{p}\|M\|_p^{1-p} = \delta_p\left(\|M\|_p^p\right),$$

то на основу претходне две неједнакости следи

$$\left(1 - \frac{1}{p}\right)\|M\|_p \leq \left\|X_n\right\|_p,$$

односно, као последицу Теореме 2.3.2, добијамо класичну Дубову L^p неједнакост

$$\|M\|_p \leq \frac{p}{p-1}\left\|X_n\right\|_p.$$

Наравно, све претходно је изведено под додатном почетном претпоставком да је $X_1 = 1$. $\diamond$

Од интереса може бити и разматрање преосталог случаја када је $0 < p < 1$. Заправо, тада наводимо следећи резултат.

Теорема 2.3.4 *Нека је $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ненегативан мартингал, $M = \max_{1\leq j\leq n} X_j$ и $N = \min_{1\leq j\leq n} X_j$, при чему важи $X_1 = 1$. Тада за све $0 < p < 1$ важи*

$$\delta_p\left(\|M\|_p^p\right) \geq \left\|X_n\right\|_p,$$

и

$$\delta_p\left(\|N\|_p^p\right) \geq \left\|X_n\right\|_p,$$

при чему је $\delta_p(x) = \left(1 - \frac{1}{p}\right)x^{\frac{1}{p}} + \frac{1}{p}x^{\frac{1}{p}-1}$ за све $x > 0$.

Доказ. Потпуно аналогно као у доказу Теореме 2.3.2, налазимо да важи

$$\|M\|_p^p - 1 \leq \frac{p}{p-1}\left(\mathbb{E}\left(X_n M^{p-1}\right) - 1\right),$$

одакле следи,

$$\left(1 - \frac{1}{p}\right)\|M\|_p^p + \frac{1}{p} \geq \mathbb{E}\left(X_n M^{p-1}\right). \tag{2.3.7}$$

имајући у виду чињеницу да је сада $0 < p < 1$. Користећи Хелдерову неједнакост, у односу на пар спрегнутих експонената $\left(\frac{1}{p}, \frac{1}{1-p}\right)$, добијамо да важи

$$\begin{aligned}
\|X_n\|_p^p &= \mathbb{E}X_n^p \\
&= \mathbb{E}\left(X_n^p M^{p(p-1)} M^{-p(p-1)}\right) \\
&\leq \left(\mathbb{E}\left(X_n^p M^{p(p-1)}\right)^{\frac{1}{p}}\right)^p \left(\mathbb{E}\left(M^{-p(p-1)}\right)^{\frac{1}{1-p}}\right)^{1-p} \\
&= \left(\mathbb{E}\left(X_n M^{p-1}\right)\right)^p \left(\mathbb{E}M^p\right)^{1-p} \\
&= \left(\mathbb{E}\left(X_n M^{p-1}\right)\right)^p \|M\|_p^{p(1-p)},
\end{aligned}$$

што повлачи

$$\left(\mathbb{E}\left(X_n M^{p-1}\right)\right)^p \geq \|X_n\|_p^p \|M\|_p^{p(p-1)},$$

односно

$$\mathbb{E}\left(X_n M^{p-1}\right) \geq \|X_n\|_p \|M\|_p^{p-1}. \tag{2.3.8}$$

На основу неједнакости (2.3.7) и (2.3.8), закључујемо

$$\left(1 - \frac{1}{p}\right)\|M\|_p^p + \frac{1}{p} \geq \|X_n\|_p \|M\|_p^{p-1},$$

односно

$$\left(1 - \frac{1}{p}\right)\|M\|_p + \frac{1}{p}\|M\|_p^{1-p} \geq \|X_n\|_p,$$

одакле следи

$$\left(1 - \frac{1}{p}\right)\left(\|M\|_p^p\right)^{\frac{1}{p}} + \frac{1}{p}\left(\|M\|_p^p\right)^{\frac{1}{p}-1} \geq \|X_n\|_p,$$

или еквивалентно

$$\delta_p\left(\|M\|_p^p\right) \geq \|X_n\|_p.$$

Са друге стране, поптуно аналогно као у Теореми 2.3.2, добијамо да важи

$$\|N\|_p^p \leq 1 - \frac{p}{p-1}\left(1 - \mathbb{E}\left(X_n N^{p-1}\right)\right),$$

што повлачи (имајући у виду да је $0 < p < 1$)

$$\left(1 - \frac{1}{p}\right)\|N\|_p^p + \frac{1}{p} \geq \mathbb{E}\left(X_n N^{p-1}\right).$$

Као у првом делу доказа, користећи Хелдерову неједнакост, налазимо

$$\mathbb{E}\left(X_n N^{p-1}\right) \geq \|X_n\|_p \|N\|_p^{p-1}.$$

На основу претходне две неједнакости, изводимо

$$\left(1 - \frac{1}{p}\right)\|N\|_p^p + \frac{1}{p} \geq \|X_n\|_p \|N\|_p^{p-1},$$

одакле директно следи

$$\delta_p\left(\|N\|_p^p\right) \geq \|X_n\|_p.$$

Тиме је доказ комплетиран. $\square$

Последица 2.3.5 *Нека је $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ненегативан мартингал и поред тога, нека је $N = \min\limits_{1 \leq j \leq n} X_j$, при чему важи $X_1 = 1$. Тада за све $0 < p < 1$ важи*

$$\|N\|_p^{1-p} \geq p \, \|X_n\|_p \, .$$

Доказ. Применом Теореме 2.3.4, налазимо

$$\left(1 - \frac{1}{p}\right) \|N\|_p + \frac{1}{p}\|N\|_p^{1-p} = \delta_p \left(\|N\|_p^p\right) \geq \|X_n\|_p \, .$$

Међутим, како је $0 < p < 1$, то важи

$$\frac{1}{p}\|N\|_p^{1-p} \geq \left(1 - \frac{1}{p}\right) \|N\|_p + \frac{1}{p}\|N\|_p^{1-p}.$$

На основу претходне две неједнакости, следи

$$\frac{1}{p}\|N\|_p^{1-p} \geq \|X_n\|_p \, ,$$

односно

$$\|N\|_p^{1-p} \geq p \, \|X_n\|_p \, ,$$

што је и требало доказати. $\square$

Глава 3

Вероватносни доказ вишедимензионе Хардијеве неједнакости

Нека је $f : (0,\infty) \to (0,\infty)$ мерљива функција и нека је $p > 1$. Тада класична Хардијева неједнакост гласи

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)^p \mathrm{d}x \le \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_0^\infty f(x)^p\,\mathrm{d}x. \tag{3.0.1}$$

Комплетна обрада и разне генерализације ове значајне неједнакости налазе се у одличној монографији [30] и прегледном раду [29]. Са друге стране, напоменимо да је класична референца везана за Хардијеву неједнакост монографија [18] од Хардија, Литлвуда и Поље. Такође, за неке скорије резултате везане за ову тему и остале сличне неједнакости, треба погледати интересантан рад [32]. Постоји мноштво различитих и веома занимљивих доказа Хардијеве неједнакости. У овом поглављу представићемо пробабилистички доказ вишедимензионе тежинске Хардијеве неједнакости. Различити типови вишедимензионе тежинске Хардијеве неједнакости могу да се нађу у [30]. Као директну последицу, изводимо вишедимензиону тежинску Карлеманову неједнакост.

3.1 Релативна ентропија

Нека је $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ мерљив простор, при чему је мера μ ненегативна. Тада за мерљиву функцију

$$\rho : \Omega \to (0,\infty),$$

кажемо да је *вероватносна густина* на простору Ω уколико важи

$$\int_\Omega \rho\,\mathrm{d}\mu = 1.$$

Релативна ентропија или *Кулбак-Лајблерова дивергенција* две вероватносне густине φ и ρ на простору Ω дефинисана је на следећи начин:

$$\mathcal{KL}(\varphi \parallel \rho) = \int_\Omega \varphi \log\frac{\varphi}{\rho}\,\mathrm{d}\mu$$

Теорема 3.1.1 *Нека је $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ мерљив простор и нека су φ и ρ вероватносне густине на том простору. Тада важи*

$$\mathcal{KL}(\varphi \parallel \rho) \ge 0.$$

Доказ. Важи

$$\int_\Omega \varphi\,\mathrm{d}\mu = 1,$$

одакле следи да је $(\Omega, \mathcal{F}, \varphi \, \mathrm{d}\mu)$ један вероватносни простор. Поред тога, функција $x \mapsto -\log x$ је конвексна. Самим тим, применом Јенсенове неједнакости, добијамо

$$\begin{aligned}\mathcal{KL}(\varphi \parallel \rho) &= \int_\Omega \varphi \log \frac{\varphi}{\rho} \, \mathrm{d}\mu \\ &= -\int_\Omega \varphi \log \frac{\rho}{\varphi} \, \mathrm{d}\mu \\ &\geq -\log \int_\Omega \varphi \frac{\rho}{\varphi} \, \mathrm{d}\mu \\ &= -\log \int_\Omega \rho \, \mathrm{d}\mu \\ &= -\log 1 \\ &= 0,\end{aligned}$$

при чему смо искористили чињеницу да за вероватносну густину ρ на простору Ω важи

$$\int_\Omega \rho \, \mathrm{d}\mu = 1.$$

Тиме је доказ завршен. $\square$

3.2 Вероватносне густине на јединичној коцки $(0,1)^n$ у $\mathbb{R}^n$

Нека је $\mathbb{R}^n_+ = (0,\infty)^n$, где је $n \in \mathbb{N}$. Поред тога, нека је са $Q_n = (0,1)^n$ означена n-димензиона јединична коцка у простору $\mathbb{R}^n$. Такође, да бисмо олакшали запис у неким деловима текста, писаћемо

$$\mathrm{d}\mathbf{x} = \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n,$$

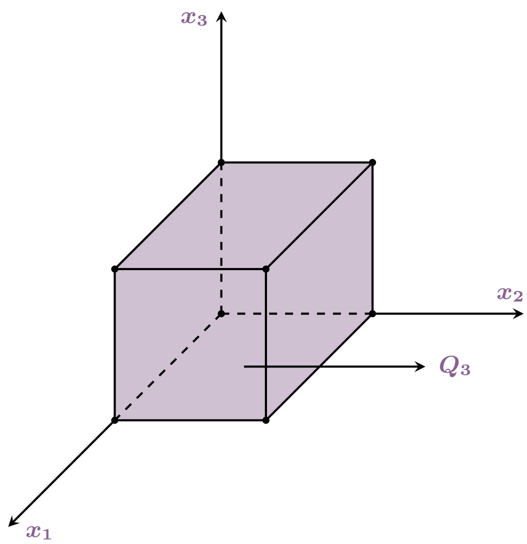
где је $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Са друге стране, нека је функција

$$\rho : Q_n \to (0,\infty),$$

вероватносна густина на јединичној коцки Q_n, односно, нека је испуњено

$$\int_{Q_n} \rho(\mathbf{x}) \, \mathrm{d}\mathbf{x} = 1.$$

Обележимо са $\mathcal{D}(Q_n)$ фамилију свих вероватносних густина на јединичној коцки Q_n. Резултат који следи је од посебне важности за наша будућа разматрања.



Јединична коцка $Q_3 = (0,1)^3$ у $\mathbb{R}^3$.

Лема 3.2.1 *Нека је $p > 1$ и $\alpha_j < p - 1$ за $j = 1, \ldots, n$. Тада важи*

$$\min_{\rho \in \mathcal{D}(Q_n)} \int_{Q_n} \frac{\mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n}{\rho(x_1, \ldots, x_n)^{p-1} \prod_{j=1}^n x_j^{\alpha_j + 1}} = \prod_{j=1}^n \left(\frac{p}{p - \alpha_j - 1} \right)^p.$$

Доказ. За $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n_+$ обележимо

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{j=1}^n \frac{p - \alpha_j - 1}{p} x_j^{-\frac{\alpha_j + 1}{p}}.$$

Приметимо да важи

$$\int_{Q_n} \varphi(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} = \int_{Q_n} \prod_{j=1}^{n} \frac{p-\alpha_j-1}{p} x_j^{-\frac{\alpha_j+1}{p}}\,\mathrm{d}x_1\ldots\mathrm{d}x_n = \prod_{j=1}^{n} \frac{p-\alpha_j-1}{p} \frac{1}{-\frac{\alpha_j+1}{p}+1} = 1$$

Према томе, закључујемо да $\varphi \in \mathcal{D}(Q_n)$. Нека је $\rho \in \mathcal{D}(Q_n)$ произвољна вероватносна густина. Познато својство теорије вероватноће, да је Кулбак-Лајблерова дивергеницција увек ненегативна (видети Теорему 3.1.1), доводи нас до следеће неједнакости

$$\int_{Q_n} \varphi(x_1,\ldots,x_n) \log \frac{\varphi(x_1,\ldots,x_n)}{\rho(x_1,\ldots,x_n)}\,\mathrm{d}x_1\ldots\mathrm{d}x_n \geq 0. \tag{3.2.1}$$

Множењем неједнакости (3.2.1) са $p-1$ добијамо

$$\int_{Q_n} \varphi(x_1,\ldots,x_n) \log \left(\frac{\varphi(x_1,\ldots,x_n)}{\rho(x_1,\ldots,x_n)}\right)^{p-1} \mathrm{d}x_1\ldots\mathrm{d}x_n \geq 0. \tag{3.2.2}$$

Како за све $t>0$ важи $t-1 \geq \log t$, долазимо до корисне неједнакости за наставак доказа

$$\left(\frac{\varphi(x_1,\ldots,x_n)}{\rho(x_1,\ldots,x_n)}\right)^{p-1} - 1 \geq \log\left(\frac{\varphi(x_1,\ldots,x_n)}{\rho(x_1,\ldots,x_n)}\right)^{p-1}. \tag{3.2.3}$$

Комбинацијом неједнакости (3.2.2) и (3.2.3) налазимо

$$\begin{aligned}
0 &\leq \int_{Q_n} \varphi(x_1,\ldots,x_n) \log \left(\frac{\varphi(x_1,\ldots,x_n)}{\rho(x_1,\ldots,x_n)}\right)^{p-1} \mathrm{d}x_1\ldots\mathrm{d}x_n \\
&\leq \int_{Q_n} \varphi(x_1,\ldots,x_n) \left(\left(\frac{\varphi(x_1,\ldots,x_n)}{\rho(x_1,\ldots,x_n)}\right)^{p-1} - 1\right) \mathrm{d}x_1\ldots\mathrm{d}x_n \\
&= \int_{Q_n} \frac{\varphi(x_1,\ldots,x_n)^p}{\rho(x_1,\ldots,x_n)^{p-1}}\,\mathrm{d}x_1\ldots\mathrm{d}x_n - \int_{Q_n} \varphi(x_1,\ldots,x_n)\,\mathrm{d}x_1\ldots\mathrm{d}x_n \\
&= \int_{Q_n} \frac{\varphi(x_1,\ldots,x_n)^p}{\rho(x_1,\ldots,x_n)^{p-1}}\,\mathrm{d}x_1\ldots\mathrm{d}x_n - 1.
\end{aligned}$$

Коначно закључујемо

$$\int_{Q_n} \frac{\varphi(x_1,\ldots,x_n)^p}{\rho(x_1,\ldots,x_n)^{p-1}}\,\mathrm{d}x_1\ldots\mathrm{d}x_n \geq 1,$$

Користећи формулацију функције $\varphi(x_1,\ldots,x_n)$ добијамо

$$\int_{Q_n} \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{p-\alpha_j-1}{p}\right)^p \frac{x_j^{-(\alpha_j+1)}}{\rho(x_1,\ldots,x_n)^{p-1}}\,\mathrm{d}x_1\ldots\mathrm{d}x_n \geq 1,$$

односно

$$\int_{Q_n} \frac{\mathrm{d}x_1\ldots\mathrm{d}x_n}{\rho(x_1,\ldots,x_n)^{p-1}\prod_{j=1}^{n} x_j^{\alpha_j+1}} \geq \prod_{j=1}^{n}\left(\frac{p}{p-\alpha_j-1}\right)^p.$$

Како је $\rho \in \mathcal{D}(Q_n)$ произвољна вероватносна густина, важи

$$\min_{\rho\in\mathcal{D}(Q_n)} \int_{Q_n} \frac{\mathrm{d}x_1\ldots\mathrm{d}x_n}{\rho(x_1,\ldots,x_n)^{p-1}\prod_{j=1}^{n} x_j^{\alpha_j+1}} \geq \prod_{j=1}^{n}\left(\frac{p}{p-\alpha_j-1}\right)^p. \tag{3.2.4}$$

Са друге стране, налазимо

$$\begin{aligned}\int_{Q_n}\frac{\mathrm{d}x_1\ldots\mathrm{d}x_n}{\varphi(x_1,\ldots,x_n)^{p-1}\prod_{j=1}^n x_j^{\alpha_j+1}} &= \prod_{j=1}^n\left(\frac{p}{p-\alpha_j-1}\right)^{p-1}\int_{Q_n}\prod_{j=1}^n\left(x_j^{\frac{\alpha_j+1}{p}}\right)^{p-1}\frac{\mathrm{d}x_1\ldots\mathrm{d}x_n}{\prod_{j=1}^n x_j^{\alpha_j+1}}\\ &= \prod_{j=1}^n\left(\frac{p}{p-\alpha_j-1}\right)^{p-1}\int_{Q_n}\prod_{j=1}^n\frac{\left(x_j^{\alpha_j+1}\right)^{\frac{p-1}{p}}}{x_j^{\alpha_j+1}}\,\mathrm{d}x_1\ldots\mathrm{d}x_n\\ &= \prod_{j=1}^n\left(\frac{p}{p-\alpha_j-1}\right)^{p-1}\int_{Q_n}\prod_{j=1}^n x_j^{(\alpha_j+1)\left(-\frac{1}{p}\right)}\mathrm{d}x_1\ldots\mathrm{d}x_n\\ &= \prod_{j=1}^n\left(\frac{p}{p-\alpha_j-1}\right)^{p-1}\prod_{j=1}^n\frac{1}{(\alpha_j+1)\left(-\frac{1}{p}\right)+1}\\ &= \prod_{j=1}^n\left(\frac{p}{p-\alpha_j-1}\right)^{p-1}\prod_{j=1}^n\frac{p}{p-1-\alpha_j}\\ &= \prod_{j=1}^n\left(\frac{p}{p-\alpha_j-1}\right)^{p}.\end{aligned}$$

Самим тим, закључујемо да се минимум из неједнакости (3.2.4) достиже за вероватносну густину $\varphi\in\mathcal{D}(Q_n)$, односно

$$\int_{Q_n}\frac{\mathrm{d}x_1\ldots\mathrm{d}x_n}{\varphi(x_1,\ldots,x_n)^{p-1}\prod_{j=1}^n x_j^{\alpha_j+1}}=\prod_{j=1}^n\left(\frac{p}{p-\alpha_j-1}\right)^{p}.$$

Тиме је доказ леме завршен. □

3.3 Вишедимензиона тежинска Хардијева неједнакост

Нека је $f:\mathbb{R}_+^n\to(0,\infty)$ мерљива функција. Дефинишимо следећи вишедимензиони Хардијев интегрални оператор

$$\mathbf{H}_{\boldsymbol{n}}f(\mathbf{x})=\frac{1}{x_1\ldots x_n}\int_0^{x_1}\cdots\int_0^{x_n}f(\mathbf{t})\,\mathrm{d}\mathbf{t},$$

где је $\mathbf{x}=(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}_+^n$, $\mathbf{t}=(t_1,\ldots,t_n)$ и $\mathrm{d}\mathbf{t}=\mathrm{d}t_1\ldots\mathrm{d}t_n$. Сада можемо да формулишемо и докажемо главну теорему овог поглавља. Наиме, имамо следећу неједнакост.

Теорема 3.3.1 (Вишедимензиона тежинска Хардијева неједнакост) *Нека је $p>1$ и $\alpha_j<p-1$ за $j=1,\ldots,n$ и нека је $f:\mathbb{R}_+^n\to(0,\infty)$ мерљива функција. Тада важи*

$$\int_{\mathbb{R}_+^n}\prod_{j=1}^n x_j^{\alpha_j}\mathbf{H}_{\boldsymbol{n}}f(\mathbf{x})^p\,\mathrm{d}\mathbf{x}\le\prod_{j=1}^n\left(\frac{p}{p-\alpha_j-1}\right)^p\int_{\mathbb{R}_+^n}\prod_{j=1}^n x_j^{\alpha_j}f(\mathbf{x})^p\,\mathrm{d}\mathbf{x}.$$

Доказ. Обележимо

$$\mathrm{L}=\int_{\mathbb{R}_+^n}\prod_{j=1}^n x_j^{\alpha_j}\mathbf{H}_{\boldsymbol{n}}f(\mathbf{x})^p\,\mathrm{d}\mathbf{x}\quad\text{и}\quad\mathrm{D}=\int_{\mathbb{R}_+^n}\prod_{j=1}^n x_j^{\alpha_j}f(\mathbf{x})^p\,\mathrm{d}\mathbf{x}.$$

Хардијев интегрални оператор $\mathbf{H}_{\boldsymbol{n}}f(\mathbf{x})$ можемо да запишемо на други начин. Наиме, како је

$$\frac{1}{x_1\ldots x_n}\int_0^{x_1}\cdots\int_0^{x_n}f(t_1,\ldots,t_n)\,\mathrm{d}t_1\ldots\mathrm{d}t_n=\int_0^{x_1}\cdots\int_0^{x_n}f(t_1,\ldots,t_n)\,\frac{\mathrm{d}t_1}{x_1}\ldots\frac{\mathrm{d}t_n}{x_n},$$

то увођењем смене

$$s_k = \frac{t_k}{x_k}, \quad \text{тј.} \quad \mathrm{d}s_k = \frac{\mathrm{d}t_k}{x_k} \quad \text{где је} \quad k = 1, \ldots, n,$$

постојеће границе $(0, x_k)$ постају $(0, 1)$, за $k = 0, \ldots n$, па добијамо

$$\int_0^{x_1} \cdots \int_0^{x_n} f(t_1, \ldots, t_n) \frac{\mathrm{d}t_1}{x_1} \ldots \frac{\mathrm{d}t_n}{x_n} = \int_0^1 \cdots \int_0^1 f(x_1 s_1, \ldots, x_n s_n) \, \mathrm{d}s_1 \ldots \mathrm{d}s_n.$$

Коначно закључујемо

$$\mathbf{H}_{\boldsymbol{n}} f(x_1, \ldots, x_n) = \int_{Q_n} f(x_1 t_1, \ldots, x_n t_n) \, \mathrm{d}\mathbf{t}.$$

Нека је $\rho \in \mathcal{D}(Q_n)$ произвољна вероватносна густина. Тада важи

$$\int_{Q_n} \rho(t_1, \ldots, t_n) \, \mathrm{d}\mathbf{t} = 1,$$

па можемо да применимо Јенсенову неједнакост у следећем разматрању.

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{\boldsymbol{n}} f(x_1, \ldots, x_n)^p &= \left(\int_{Q_n} f(x_1 t_1, \ldots, x_n t_n) \, \mathrm{d}\mathbf{t} \right)^p \\ &= \left(\int_{Q_n} \frac{f(x_1 t_1, \ldots, x_n t_n)}{\rho(t_1, \ldots, t_n)} \rho(t_1, \ldots, t_n) \, \mathrm{d}\mathbf{t} \right)^p \\ &\leq \int_{Q_n} \frac{f(x_1 t_1, \ldots, x_n t_n)^p}{\rho(t_1, \ldots, t_n)^p} \rho(t_1, \ldots, t_n) \, \mathrm{d}\mathbf{t}. \end{aligned}$$

Стога добијамо

$$\mathbf{H}_{\boldsymbol{n}} f(x_1, \ldots, x_n)^p \leq \int_{Q_n} \frac{f(x_1 t_1, \ldots, x_n t_n)^p}{\rho(t_1, \ldots, t_n)^{p-1}} \, \mathrm{d}\mathbf{t}.$$

Коришћењем Фубинијеве теореме налазимо

$$\begin{aligned} \mathrm{L} &= \int_{\mathbb{R}_+^n} \prod_{j=1}^n x_j^{\alpha_j} \mathbf{H}_{\boldsymbol{n}} f(\mathbf{x})^p \, \mathrm{d}\mathbf{x} \\ &\leq \int_{\mathbb{R}_+^n} \prod_{j=1}^n x_j^{\alpha_j} \int_{Q_n} \frac{f(x_1 t_1, \ldots, x_n t_n)^p}{\rho(t_1, \ldots, t_n)^{p-1}} \, \mathrm{d}\mathbf{t} \, \mathrm{d}\mathbf{x} \\ &= \int_{Q_n} \frac{1}{\rho(t_1, \ldots, t_n)^{p-1}} \int_{\mathbb{R}_+^n} \prod_{j=1}^n x_j^{\alpha_j} f(x_1 t_1, \ldots, x_n t_n)^p \, \mathrm{d}\mathbf{x} \, \mathrm{d}\mathbf{t}. \end{aligned}$$

Увођењем смене $y_k = x_k t_k$, тј. $\mathrm{d}x_k = \mathrm{d}y_k / t_k$, где је $k = 1, \ldots, n$, у следећем интегралу

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} \prod_{j=1}^n x_j^{\alpha_j} f(x_1 t_1, \ldots, x_n t_n)^p \, \mathrm{d}\mathbf{x},$$

границе остају непромењене, тако да добијамо

$$\begin{aligned} &\int_{Q_n} \frac{1}{\rho(t_1, \ldots, t_n)^{p-1}} \int_{\mathbb{R}_+^n} \prod_{j=1}^n x_j^{\alpha_j} f(x_1 t_1, \ldots, x_n t_n)^p \, \mathrm{d}\mathbf{x} \, \mathrm{d}\mathbf{t} \\ &\qquad = \int_{Q_n} \frac{1}{\rho(t_1, \ldots, t_n)^{p-1}} \int_{\mathbb{R}_+^n} \prod_{j=1}^n \left(\frac{y_k}{t_k} \right)^{\alpha_j} f(y_1, \ldots, y_n)^p \, \frac{1}{t_1 \ldots t_n} \mathrm{d}\mathbf{y} \, \mathrm{d}\mathbf{t}. \end{aligned}$$

Стога, закључујемо

$$\begin{aligned} L &\leq \int_{Q_n} \frac{1}{\rho(t_1,\ldots,t_n)^{p-1}} \int_{\mathbb{R}_+^n} \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{x_k}{t_k}\right)^{\alpha_j} f(x_1,\ldots,x_n)^p \frac{1}{t_1\ldots t_n} \mathrm{d}\mathbf{x}\,\mathrm{d}\mathbf{t} \\ &= \int_{Q_n} \frac{1}{\rho(t_1,\ldots,t_n)^{p-1}\prod_{j=1}^{n} t_j^{\alpha_j+1}} \int_{\mathbb{R}_+^n} \prod_{j=1}^{n} x_j^{\alpha_j} f(x_1,\ldots,x_n)^p\,\mathrm{d}\mathbf{x}\,\mathrm{d}\mathbf{t} \\ &= \left(\int_{Q_n} \frac{1}{\rho(t_1,\ldots,t_n)^{p-1}\prod_{j=1}^{n} t_j^{\alpha_j+1}}\,\mathrm{d}\mathbf{t}\right)\cdot \mathrm{D}. \end{aligned}$$

Обзиром да је $\rho \in \mathcal{D}(Q_n)$ произвољна вероватносна густина, следи

$$\mathrm{L} \leq \left(\min_{\rho\in\mathcal{D}(Q_n)} \int_{Q_n} \frac{\mathrm{d}t_1\ldots\mathrm{d}t_n}{\rho(t_1,\ldots,t_n)^{p-1}\prod_{j=1}^{n} t_j^{\alpha_j+1}}\right)\cdot \mathrm{D}.$$

У Леми (3.2.1) смо доказали да је

$$\min_{\rho\in\mathcal{D}(Q_n)} \int_{Q_n} \frac{\mathrm{d}t_1\ldots\mathrm{d}t_n}{\rho(t_1,\ldots,t_n)^{p-1}\prod_{j=1}^{n} t_j^{\alpha_j+1}} = \prod_{j=1}^{n}\left(\frac{p}{p-\alpha_j-1}\right)^p,$$

па имамо

$$L \leq \left(\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{p}{p-\alpha_j-1}\right)^p\right)\cdot \mathrm{D},$$

односно

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} \prod_{j=1}^{n} x_j^{\alpha_j} \mathbf{H}_{\boldsymbol{n}} f(\mathbf{x})^p\,\mathrm{d}\mathbf{x} \leq \prod_{j=1}^{n}\left(\frac{p}{p-\alpha_j-1}\right)^p \int_{\mathbb{R}_+^n} \prod_{j=1}^{n} x_j^{\alpha_j} f(\mathbf{x})^p\,\mathrm{d}\mathbf{x}.$$

Тиме смо завршили доказ теореме. □

Као директну последицу претходне теореме, добијамо следећу познату вишедимензиону варијанту Хардијеве неједнакости.

Последица 3.3.2 (Вишедимензиона Хардијева неједнакост) *Нека је $p>1$ и нека је дата мерљива функција $f:\mathbb{R}_+^n \to (0,\infty)$. Тада важи*

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} \mathbf{H}_{\boldsymbol{n}} f(\mathbf{x})^p\,\mathrm{d}\mathbf{x} \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^{np} \int_{\mathbb{R}_+^n} f(\mathbf{x})^p\,\mathrm{d}\mathbf{x}.$$

Доказ. Узмимо да је $\alpha_j = 0$ за све $j=1,\ldots,n$ у Теореми 3.3.1. Тиме добијамо

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} \prod_{j=1}^{n} x_j^{0} \mathbf{H}_{\boldsymbol{n}} f(\mathbf{x})^p\,\mathrm{d}\mathbf{x} \leq \prod_{j=1}^{n}\left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_{\mathbb{R}_+^n} \prod_{j=1}^{n} x_j^{0} f(\mathbf{x})^p\,\mathrm{d}\mathbf{x},$$

односно

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} \mathbf{H}_{\boldsymbol{n}} f(\mathbf{x})^p\,\mathrm{d}\mathbf{x} \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^{np} \int_{\mathbb{R}_+^n} f(\mathbf{x})^p\,\mathrm{d}\mathbf{x},$$

што је и требало доказати. □

Последица 3.3.3 (Хардијева неједнакост) *Нека је $p>1$ и нека је $f:\mathbb{R}_+ \to (0,\infty)$ мерљива функција. Тада важи*

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)^p \mathrm{d}x \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_0^\infty f(x)^p\,\mathrm{d}x.$$

Доказ. Директном применом претходне Последице 3.3.2 у случају $n=1$ долазимо до тражене неједнакости, што је уједно и неједнакост (3.0.1) са почетка ове главе. □

3.4 Вишедимензиона тежинска Карлеманова неједнакост

Секцију почињемо са тврђењима која се односе на општу L^p-теорију вероватносног простора $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ која ћемо користити у контексту доказа вишедимензионе тежинске Карлеманове неједнакости. Најпре, имамо следеће елементарно својство.

Лема 3.4.1 *Нека је $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ вероватносни простор, f мерљива функција и $0 < p \le q < \infty$. Тада важи*

$$\left(\int_\Omega |f|^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\int_\Omega |f|^q \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Доказ. Како је $q/p \ge 1$, то је $x \mapsto x^{\frac{q}{p}}$ конвексна функција, при чему је $x \ge 0$. Самим тим, применом Јенсенове неједнакости за конвексне функције, налазимо

$$\left(\int_\Omega |f|^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{q}{p}} \le \int_\Omega \left(|f|^p\right)^{\frac{q}{p}} \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega |f|^q \,\mathrm{d}\mu,$$

што је и требало доказати. □

Пре него што претходну лему употребимо за доказ теореме која следи и коју ћемо користити у доказу Карлеманове неједнакости, биће нам потребна још нека својства одређених елементарних функција, која наводимо у посебно издвојеном параграфу.

• Најпре, као што смо раније наводили директно се проверава да важи

$$x - 1 \ge \log x, \tag{3.4.1}$$

за све $x > 0$. Поред тога, означимо

$$\varphi(x) = \frac{a^x - 1}{x}, \ \text{ за све } \ x > 0,$$

где је $a > 0$. Применом Лопиталовог правила директно добијамо

$$\lim_{x \to 0^+} \varphi(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{a^x - 1}{x} = \log a.$$

Са друге стране, уочимо функцију

$$\psi(x) = x a^x \log a - a^x + 1,$$

где је $x \ge 0$. Приметимо да важи

$$\psi'(x) = a^x \log a + x a^x \log^2 a - a^x \log a = x a^x \log^2 a \ge 0,$$

што повлачи да је $\psi(x)$ растућа функција. Следи $\psi(x) \ge \psi(0) = 0$ за све $x \ge 0$. На крају, закључујемо

$$\varphi'(x) = \frac{x a^x \log a - a^x + 1}{x^2} = \frac{\psi(x)}{x^2} \ge 0,$$

за све $x > 0$. Дакле, функција $\varphi(x)$ је такође једна растућа функција. Стога, на основу свега претходног, можемо закључити

$$\frac{a^x - 1}{x} \downarrow \log a \ \text{ када } \ x \downarrow 0. \tag{3.4.2}$$

Претходно изведена својства, користимо у доказу теореме која следи.

Теорема 3.4.2 *Нека је $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ вероватносни простор и $f \in \mathrm{L}^q(\mu)$ за неко $0 < q < \infty$. Тада важи*

$$\lim_{p \to 0^+} \left(\int_\Omega |f|^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}} = \exp\left(\int_\Omega \log |f| \,\mathrm{d}\mu\right).$$

Доказ. Применом Јенсенове неједнакости за конкавне функције на конкавну функцију $x \mapsto \log x$ налазимо

$$\log\left(\int_\Omega |f|^p \, \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}} = \frac{1}{p}\log\int_\Omega |f|^p \, \mathrm{d}\mu \geq \frac{1}{p}\int_\Omega \log|f|^p \, \mathrm{d}\mu = \int_\Omega \log|f| \, \mathrm{d}\mu,$$

односно, важи

$$\log\left(\int_\Omega |f|^p \, \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}} \geq \int_\Omega \log|f| \, \mathrm{d}\mu. \tag{3.4.3}$$

Преласком на граничну вредност $p \to 0^+$ и користећи чињеницу да на основу Леме 3.4.1 следи да вредности

$$\log\left(\int_\Omega |f|^p \, \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}},$$

опадају када p опада ка 0, при чему имамо доње ограничење у виду неједнакости (3.4.3), долазимо до закључка да постоји гранична вредност

$$\lim_{p\to 0^+}\log\left(\int_\Omega |f|^p \, \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}},$$

и да поред тога, важи

$$\lim_{p\to 0^+}\log\left(\int_\Omega |f|^p \, \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}} \geq \int_\Omega \log|f| \, \mathrm{d}\mu. \tag{3.4.4}$$

Са друге стране, можемо писати

$$\log\left(\int_\Omega |f|^p \, \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}} = \frac{1}{p}\log\int_\Omega |f|^p \, \mathrm{d}\mu \overset{(3.4.1)}{\leq} \frac{\int_\Omega |f|^p \, \mathrm{d}\mu - 1}{p} = \frac{\int_\Omega |f|^p \, \mathrm{d}\mu - \int_\Omega \mathrm{d}\mu}{p} = \int_\Omega \frac{|f|^p - 1}{p} \, \mathrm{d}\mu,$$

односно

$$\log\left(\int_\Omega |f|^p \, \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leq \int_\Omega \frac{|f|^p - 1}{p} \, \mathrm{d}\mu. \tag{3.4.5}$$

На основу (3.4.2) важи

$$\frac{|f|^p - 1}{p} \downarrow \log|f|, \text{ када } p \downarrow 0.$$

Такође, за $0 < p < q$ важи (видети параграф непосредно испред ове теореме)

$$\frac{|f|^p - 1}{p} \leq \frac{|f|^q - 1}{q},$$

при чему функција на десној страни претходне неједнакости представља интеграбилну доминанту, будући да $f \in \mathrm{L}^q(\mu)$. Применом Теореме о доминантној конвергенцији налазимо

$$\lim_{p\to 0^+}\int_\Omega \frac{|f|^p - 1}{p} \, \mathrm{d}\mu = \int_\Omega \log|f| \, \mathrm{d}\mu,$$

што повлачи да преласком на граничну вредност $p \to 0^+$ у (3.4.5) добијамо

$$\lim_{p\to 0^+}\log\left(\int_\Omega |f|^p \, \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leq \int_\Omega \log|f| \, \mathrm{d}\mu. \tag{3.4.6}$$

Коначно, на основу неједнакости (3.4.4) и (3.4.6), следи

$$\lim_{p\to 0^+}\log\left(\int_\Omega |f|^p \, \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}} = \int_\Omega \log|f| \, \mathrm{d}\mu.$$

На крају, користећи претходну једнакост и непрекидност експоненцијалне функције, налазимо

$$\begin{aligned}\lim_{p\to 0^+}\left(\int_\Omega |f|^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}} &= \lim_{p\to 0^+}(\exp\circ\log)\left(\int_\Omega |f|^p\,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}}\\ &= \exp\left(\lim_{p\to 0^+}\log\left(\int_\Omega |f|^p\,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}}\right)\\ &= \exp\left(\int_\Omega \log|f|\,\mathrm{d}\mu\right)\end{aligned}$$

чиме је доказ комплетиран. □

Напомена 3.4.3 Као директну последицу претходне Теореме 3.4.2, можемо закључити да под истим горе наведеним условима важи

$$\lim_{p\to\infty}\left(\int_\Omega |f|^{\frac{1}{p}}\,\mathrm{d}\mu\right)^p = \exp\left(\int_\Omega \log|f|\,\mathrm{d}\mu\right),$$

што ће бити од користи у наставку. ◇

Следећа два тврђења су вишедимензионе варијанте неједнакости доказаних у [32]. Наиме, у наставку доказујемо вишедимензиону тежинску Карлеманову неједнакост.

Теорема 3.4.4 (Вишедимензиона тежинска Карлеманова неједнакост) *За дате* $\alpha_j \in \mathbb{R}$, $j = 1,\ldots,n$ *и за дату мерљиву функцију* $f : \mathbb{R}_+^n \to (0,\infty)$ *важи:*

$$\int_{\mathbb{R}_+^n}\prod_{j=1}^n x_j^{\alpha_j} e^{\mathbf{H}_{\boldsymbol{n}}(\log f)(\mathbf{x})}\,\mathrm{d}\mathbf{x} \le e^{n+\sum_{j=1}^n \alpha_j}\int_{\mathbb{R}_+^n}\prod_{j=1}^n x_j^{\alpha_j} f(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}.$$

Доказ. Нека је p произвољно одабран реалан број који испуњава услов

$$p > \max\left\{1, 1+\max_{1\le j\le n}\alpha_j\right\}.$$

Тада очигледно важи

$$p > 1 \ \text{ и } \ p-1 > \max_{1\le j\le n}\alpha_j.$$

Дакле, испуњени су услови $p > 1$ и $p - 1 > \alpha_j$ за све $j = 1,\ldots,n$, што нам омогућава да можемо да применимо Теорему 3.3.1 на функцију $f^{\frac{1}{p}}$, одакле налазимо

$$\int_{\mathbb{R}_+^n}\prod_{j=1}^n x_j^{\alpha_j}\mathbf{H}_{\boldsymbol{n}}\left(f^{\frac{1}{p}}\right)(\mathbf{x})^p\,\mathrm{d}\mathbf{x} \le \prod_{j=1}^n\left(\frac{p}{p-\alpha_j-1}\right)^p\int_{\mathbb{R}_+^n}\prod_{j=1}^n x_j^{\alpha_j} f(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}. \tag{3.4.7}$$

Приметимо да важи

$$\lim_{p\to\infty}\left(\frac{p}{p-\alpha_j-1}\right)^p = e^{\alpha_j+1} \ \text{ за све } \ j = 1,\ldots,n.$$

Такође, користећи Теорему 3.4.2, односно Напомену 3.4.3, добијамо

$$\begin{aligned}\lim_{p\to\infty}\mathbf{H}_{\boldsymbol{n}}\left(f^{\frac{1}{p}}\right)(\mathbf{x})^p &= \lim_{p\to\infty}\left(\frac{1}{x_1\ldots x_n}\int_0^{x_1}\cdots\int_0^{x_n} f(t_1,\ldots,t_n)^{\frac{1}{p}}\,\mathrm{d}\mathbf{t}\right)^p\\ &= \exp\left(\frac{1}{x_1\ldots x_n}\int_0^{x_1}\cdots\int_0^{x_n}\log f(t_1,\ldots,t_n)\,\mathrm{d}\mathbf{t}\right)\\ &= e^{\mathbf{H}_{\boldsymbol{n}}(\log f)(\mathbf{x})},\end{aligned}$$

уз напомену да је горе наведена конвергенција монотона (видети доказ Теореме 3.4.2), што ћемо у наставку искористити кроз теорему о монотоној конвергенцији, која омогућава промену редоследа граничне вредности и интеграције . Дакле, на основу претходних разматрања, можемо закључити да преласком на граничну вредност $p \to \infty$ у неједнакости (3.4.7) налазимо

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}_+^n} \prod_{j=1}^{n} x_j^{\alpha_j} e^{\mathbf{H}_{\boldsymbol{n}}(\log f)(\mathbf{x})}\,\mathrm{d}\mathbf{x} &= \int_{\mathbb{R}_+^n} \prod_{j=1}^{n} x_j^{\alpha_j} \lim_{p\to\infty} \mathbf{H}_{\boldsymbol{n}}\left(f^{\frac{1}{p}}\right)(\mathbf{x})^p\,\mathrm{d}\mathbf{x} \\
&= \lim_{p\to\infty} \int_{\mathbb{R}_+^n} \prod_{j=1}^{n} x_j^{\alpha_j} \mathbf{H}_{\boldsymbol{n}}\left(f^{\frac{1}{p}}\right)(\mathbf{x})^p\,\mathrm{d}\mathbf{x} \\
&\le \lim_{p\to\infty} \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{p}{p-\alpha_j-1}\right)^p \int_{\mathbb{R}_+^n} \prod_{j=1}^{n} x_j^{\alpha_j} f(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} \\
&= \prod_{j=1}^{n} \lim_{p\to\infty} \left(\frac{p}{p-\alpha_j-1}\right)^p \int_{\mathbb{R}_+^n} \prod_{j=1}^{n} x_j^{\alpha_j} f(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} \\
&= \prod_{j=1}^{n} e^{\alpha_j+1} \int_{\mathbb{R}_+^n} \prod_{j=1}^{n} x_j^{\alpha_j} f(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} \\
&= e^{n+\sum_{j=1}^{n}\alpha_j} \int_{\mathbb{R}_+^n} \prod_{j=1}^{n} x_j^{\alpha_j} f(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}.
\end{aligned}$$

Тиме је доказ у потпуности завршен. □

Последица 3.4.5 (Вишедимензиона Карлеманова неједнакост) *Нека је* $f : \mathbb{R}_+^n \to (0,\infty)$ *мерљива функција. Тада важи*

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} e^{\mathbf{H}_{\boldsymbol{n}}(\log f)(\mathbf{x})}\,\mathrm{d}\mathbf{x} \le e^n \int_{\mathbb{R}_+^n} f(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}.$$

Доказ. Узмимо да је $\alpha_j = 0$ за све $j = 1, \ldots, n$ у Теореми 3.4.4. Тиме добијамо

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} \prod_{j=1}^{n} x_j^0 e^{\mathbf{H}_{\boldsymbol{n}}(\log f)(\mathbf{x})}\,\mathrm{d}\mathbf{x} \le e^n \int_{\mathbb{R}_+^n} \prod_{j=1}^{n} x_j^0 f(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x},$$

односно

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} e^{\mathbf{H}_{\boldsymbol{n}}(\log f)(\mathbf{x})}\,\mathrm{d}\mathbf{x} \le e^n \int_{\mathbb{R}_+^n} f(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x},$$

што је и требало доказати. □

Последица 3.4.6 (Карлеманова неједнакост) *Нека је* $f : \mathbb{R}_+ \to (0,\infty)$ *мерљива функција. Тада важи*

$$\int_0^\infty \exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x \log f(t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x \le e\int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Доказ. Директном применом Последице 3.4.5 у 1-димензионом случају $n = 1$ долазимо до траженог закључка. □

Глава 4

Дијаметар планарног Брауновог кретања

4.1 Брауново кретање

Нека је $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ вероватносни простор. За случајан процес $\{B(t) : t \geq 0\}$ кажемо да је *Брауново кретање* ако су испуњени следећи услови:

- $B(0) = 0$;
- За све $0 \leq s < t$ случајна променљива $B(t) - B(s)$ има нормалну $N(0, t-s)$ расподелу;
- За све $0 \leq t_1 < \ldots < t_n$ случајне променљиве $B(t_2) - B(t_1), \ldots, B(t_n) - B(t_{n-1})$ су независне;
- Функција $t \mapsto B(t)$ је непрекидна скоро сигурно.

На основу другог услова следи да за проoизвољне $0 \leq s < t$ и $a < b$ важи

$$\mathbb{P}\{a \leq B(t) - B(s) \leq b\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2(t-s)}} \, dx.$$

Са друге стране, четврти услов заправо има следећу интерпретацију

$$\mathbb{P}\{\omega \in \Omega : \text{функција } t \mapsto B(t, \omega) \text{ је непрекидна}\} = 1.$$

Наравно, као што је раније наглашено код случајних процеса са непрекидним временом, за произвољне $\omega \in \Omega$ и $t \geq 0$, вредност случајне променљиве $B(t)$ у тачки ω, означава се са $B(t, \omega)$. У наставку наводимо нека основна својства Брауновог кретања.

Лема 4.1.1 *Нека је $\{B(t) : t \geq 0\}$ Брауново кретање. Тада за свако $t > 0$, случајна променљива $B(t)$ има нормалну $N(0, t)$ расподелу. Такође, за све $s, t \geq 0$ важи*

$$\mathbb{E}\left(B(s)B(t)\right) = \min\{s, t\}.$$

Доказ. Важи $B(t) = B(t) - B(0)$, одакле, на основу другог услова из дефиниције Брауновог кретања, следи да случајна променљива $B(t)$ има нормалну $N(0, t)$ расподелу. Дакле, важи

$$\mathbb{E}B(t) = 0 \text{ и } \mathbb{E}B(t)^2 = \mathrm{Var}B(t) + (\mathbb{E}B(t))^2 = t.$$

У другом делу, тражени закључак тривијално следи ако је $s = t$. Зато можемо претпоставити да је $s < t$ (аналогно се разматра случај $s > t$). У том случају, ако је $s = 0$, опет директно добијамо тражени резултат и зато, нека је $0 < s < t$. Тада су случајне променљиве $B(s) = B(s) - B(0)$ и $B(t) - B(s)$ независне, одакле налазимо

$$\mathbb{E}\left(B(s)B(t)\right) = \mathbb{E}\left(B(s)\left(B(t) - B(s)\right) + B(s)^2\right) = \mathbb{E}B(s)\mathbb{E}\left(B(t) - B(s)\right) + \mathbb{E}B(s)^2 = 0 + s = s,$$

чиме је доказ комплетиран. $\square$

Лема 4.1.2 *Нека је* $\{\mathrm{B}(t) : t \geq 0\}$ *Брауново кретање и нека је* $a \geq 0$ *произвољно одабрано. Тада је и случајан процес*

$$\mathrm{A}(t) = \mathrm{B}(t+a) - \mathrm{B}(a), \ \ t \geq 0,$$

Брауново кретање.

Доказ. Најпре, ако је $a = 0$ тврђење директно следи, јер је тада $\mathrm{A}(t) = \mathrm{B}(t)$. Зато, у наставку, претпоставимо да је $a > 0$. Тада важи $\mathrm{A}(0) = \mathrm{B}(a) - \mathrm{B}(a) = 0$. Поред тога, за све $0 \leq s < t$ случајна променљива $\mathrm{A}(t) - \mathrm{A}(\mathrm{s}) = \mathrm{B}(t+a) - \mathrm{B}(s+a)$ има нормалну $\mathrm{N}(0, t+a-(s+a)) = \mathrm{N}(0, t-s)$ расподелу. Такође, за све $0 \leq t_1 < \ldots < t_n$ важи $0 < a \leq t_1 + a < \ldots < t_n + a$ и самим тим, случајне променљиве

$$\mathrm{A}(t_2) - \mathrm{A}(t_1) = \mathrm{B}(t_2+a) - \mathrm{B}(t_1+a), \ldots, \mathrm{A}(t_n) - \mathrm{A}(t_{n-1}) = \mathrm{B}(t_n+a) - \mathrm{B}(t_{n-1}+a),$$

су независне. На крају, из чињенице да је пресликавање $t \mapsto \mathrm{B}(t)$ непрекидно скоро свуда, директно следи да је и пресликавање $t \mapsto \mathrm{A}(t) = \mathrm{B}(t+a) - \mathrm{B}(a)$ непрекидно скоро свуда. Тиме је доказ комплетиран. $\square$

Лема 4.1.3 *Нека је* $\{\mathrm{B}(t) : t \geq 0\}$ *Брауново кретање и нека је* $a > 0$. *Тада је и случајан процес* $\{X(t) : t \geq 0\}$ *дефинисан на следећи начин*

$$X(t) = \frac{1}{a}\mathrm{B}\left(a^2 t\right), \ \ t \geq 0,$$

Брауново кретање.

Доказ. Важи $X(0) = \mathrm{B}(0)/a = 0$. За све $0 \leq s < t$ случајна променљива

$$X(t) - X(s) = \frac{1}{a}\left(\mathrm{B}\left(a^2 t\right) - \mathrm{B}\left(a^2 s\right)\right),$$

има нормалну $\mathrm{N}\left(0, \frac{1}{a^2}\left(a^2 t - a^2 s\right)\right) = \mathrm{N}(0, t-s)$ расподелу. Такође, за све $0 \leq t_1 < \ldots < t_n$ важи $0 \leq a^2 t_1 < \ldots < a^2 t_n$, одакле следи да су случајне променљиве

$$X(t_2) - X(t_1) = \frac{1}{a}\left(\mathrm{B}\left(a^2 t_2\right) - \mathrm{B}\left(a^2 t_1\right)\right), \ldots, X(t_n) - X(t_{n-1}) = \frac{1}{a}\left(\mathrm{B}\left(a^2 t_n\right) - \mathrm{B}\left(a^2 t_{n-1}\right)\right),$$

независне. Поред тога, из непрекидности пресликавања $t \mapsto \mathrm{B}(t)$ скоро свуда, директно следи и непрекидност пресликавања $t \mapsto X(t) = \mathrm{B}\left(a^2 t\right)/a$ скоро свуда, чиме је доказ завршен. $\square$

• Посматрајмо функцију

$$\xi(a) = a e^{-\frac{a^2}{2}} - \left(a^2+1\right)\int_a^\infty e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x, \ \ \text{где је } \ a \geq 0.$$

Тада директно налазимо да је

$$\xi(0) < 0 \quad \text{и} \quad \lim_{a\to\infty}\xi(a) = 0. \tag{4.1.1}$$

Приметимо да важи

$$a\int_a^\infty e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x \leq \int_a^\infty x e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x = \int_{a^2/2}^\infty e^{-u}\,\mathrm{d}u = e^{-\frac{a^2}{2}}, \tag{4.1.2}$$

за све $a \geq 0$. Користећи претходну неједнакост добијамо

$$\xi'(a) = e^{-\frac{a^2}{2}} - a^2 e^{-\frac{a^2}{2}} - 2a\int_a^\infty e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x + \left(a^2+1\right)e^{-\frac{a^2}{2}} = 2\left(e^{-\frac{a^2}{2}} - a\int_a^\infty e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x\right) \geq 0.$$

Дакле, функција ξ је растућа, што заједно са (4.1.1), повлачи да је $\xi(a) \leq 0$ за све $a \geq 0$.

• Претпоставимо да је X случајна промењлива која има *стандардну нормалну расподелу*, односно, која има нормалну $\mathrm{N}(0,1)$ расподелу и нека је $a>0$ произвољно одабрано. Користећи неједнакост (4.1.2) добијамо

$$\mathbb{P}\{X \geq a\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^\infty e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x \leq \frac{1}{a}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{a^2}{2}}. \tag{4.1.3}$$

Са друге стране, важи

$$\frac{a}{a^2+1}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{a^2}{2}} - \mathbb{P}\{X \geq a\} = \frac{1}{a^2+1}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\xi(a) \leq 0,$$

одакле следи

$$\frac{a}{a^2+1}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{a^2}{2}} \leq \mathbb{P}\{X \geq a\}. \tag{4.1.4}$$

Коначно, користећи неједнакости (4.1.3) и (4.1.4), закључујемо

$$\frac{a}{a^2+1}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{a^2}{2}} \leq \mathbb{P}\{X \geq a\} \leq \frac{1}{a}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{a^2}{2}}. \tag{4.1.5}$$

Теорема 4.1.4 *Нека је* $\{\mathrm{B}(t) : t \geq 0\}$ *Брауново кретање и нека је*

$$\mathrm{M}(t) = \max_{0\leq s\leq t}\mathrm{B}(s), \quad t \geq 0.$$

Тада за све $a \geq 0$ *важи*

$$\mathbb{P}\left\{\mathrm{M}(t) \geq a\right\} = 2\mathbb{P}\left\{\mathrm{B}(t) \geq a\right\} = \mathbb{P}\left\{|\mathrm{B}(t)| \geq a\right\}.$$

Доказ. Означимо

$$\tau_a = \inf\left\{t \geq 0 : \mathrm{B}(t) = a\right\}.$$

Покажимо да тада важи

$$\left\{\mathrm{M}(t) \geq a\right\} = \left\{t \geq \tau_a\right\}. \tag{4.1.6}$$

Најпре, ако је $\mathrm{M}(t) \geq a$, тада важи $\mathrm{B}(s) \geq a$ за неко $0 \leq s \leq t$. Користећи својство непрекидности Брауновог кретања, закључујемо да постоји $0 \leq u \leq s$ за које важи $\mathrm{B}(u) = a$, одакле, директно следи $\tau_a \leq u \leq s \leq t$. Са друге стране, ако важи $t \geq \tau_a$, тада је

$$\mathrm{M}(t) = \max_{0\leq s\leq t}\mathrm{B}(s) \geq \mathrm{B}(\tau_a) = a.$$

Дакле, заиста важи (4.1.6). Специјално, ако је $t < \tau_a$, тада мора бити $\mathrm{M}(t) < a$ и самим тим, налазимо

$$\left\{\mathrm{B}(t) \geq a, t < \tau_a\right\} = \emptyset,$$

одакле следи

$$\left\{\mathrm{B}(t) \geq a\right\} = \left\{\mathrm{B}(t) \geq a, t \geq \tau_a\right\} \cup \left\{\mathrm{B}(t) \geq a, t < \tau_a\right\} = \left\{\mathrm{B}(t) \geq a, t \geq \tau_a\right\}.$$

Према томе, можемо закључити да је

$$\mathbb{P}\left\{\mathrm{B}(t) \geq a\right\} = \mathbb{P}\left\{\mathrm{B}(t) \geq a, t \geq \tau_a\right\},$$

односно

$$\mathbb{P}\left\{\mathrm{B}(t) \geq a\right\} = \mathbb{P}\left(\mathrm{B}(t) \geq a \,|\, t \geq \tau_a\right)\mathbb{P}\left\{t \geq \tau_a\right\}. \tag{4.1.7}$$

На основу (4.1.6) знамо да важи

$$\mathbb{P}\left\{t \geq \tau_a\right\} = \mathbb{P}\left\{\mathrm{M}(t) \geq a\right\}.$$

Даље, у општем случају, за Брауново кретање $\{\mathrm{B}(t) : t \geq 0\}$ важи

$$\mathbb{P}\left\{\mathrm{B}(t) \geq 0\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{2t}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2},$$

будући да случајна променљива $\mathrm{B}(t)$ има нормалну $\mathrm{N}(0,t)$ расподелу. Како случајан процес

$$\{\mathrm{B}((t-\tau_a)+\tau_a)-\mathrm{B}(\tau_a) : t \geq \tau_a\},$$

представља Брауново кретање (видети Лему 4.1.2 и њен доказ), то је на основу свега претходног испуњено

$$\mathbb{P}\left(\mathrm{B}(t) \geq a \,|\, t \geq \tau_a\right) = \mathbb{P}\left(\mathrm{B}((t-\tau_a)+\tau_a)-\mathrm{B}(\tau_a) \geq 0 \,|\, t \geq \tau_a\right) = \frac{1}{2}.$$

Коначно, на основу (4.1.7), добијамо

$$\mathbb{P}\left\{\mathrm{B}(t) \geq a\right\} = \mathbb{P}\left(\mathrm{B}(t) \geq a \,|\, t \geq \tau_a\right)\mathbb{P}\left\{t \geq \tau_a\right\} = \frac{1}{2}\mathbb{P}\left\{\mathrm{M}(t) \geq a\right\},$$

тј.

$$\mathbb{P}\left\{\mathrm{M}(t) \geq a\right\} = 2\mathbb{P}\left\{\mathrm{B}(t) \geq a\right\}.$$

Поред тога, важи

$$\mathbb{P}\left\{\mathrm{B}(t) \geq a\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int_a^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2t}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int_{-\infty}^{-a} e^{-\frac{x^2}{2t}}\,\mathrm{d}x = \mathbb{P}\left\{\mathrm{B}(t) \leq -a\right\},$$

одакле следи

$$2\mathbb{P}\left\{\mathrm{B}(t) \geq a\right\} = \mathbb{P}\left\{|\mathrm{B}(t)| \geq a\right\}.$$

Тиме је доказан комплетиран. □

Напомена 4.1.5 Ако је случајан процес $\{\mathrm{B}(t) : t \geq 0\}$ Брауново кретање, тада случајна променљива $\mathrm{B}(t)$ има нормалну $\mathrm{N}(0,t)$ расподелу, што значи да променљива $\mathrm{B}(t)/\sqrt{t}$ има стандардну нормалну расподелу $\mathrm{N}(0,1)$. Самим тим, на основу неједнакости (4.1.5), добијамо да за произвољно одабрано $a > 0$ важи

$$\frac{a\sqrt{t}}{a^2+t}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{a^2}{2t}} \leq \mathbb{P}\left\{\mathrm{B}(t) \geq a\right\} = \mathbb{P}\left\{\mathrm{B}(t)/\sqrt{t} \geq a/\sqrt{t}\right\} \leq \frac{\sqrt{t}}{a}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{a^2}{2t}},$$

одакле налазимо

$$\frac{a\sqrt{t}}{a^2+t}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}e^{-\frac{a^2}{2t}} \leq \mathbb{P}\left\{\mathrm{M}(t) \geq a\right\} \leq \frac{\sqrt{t}}{a}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}e^{-\frac{a^2}{2t}},$$

где смо искористили претходну Теорему 4.1.4. ◇

Напомена 4.1.6 Нека је $\{\mathrm{B}(t) : t \geq 0\}$ Брауново кретање, $a \geq 0$ и нека је

$$\tau_a = \inf\left\{t \geq 0 : \mathrm{B}(t) = a\right\}.$$

Тада на основу Теореме 4.1.4 и њеног доказа следи

$$\mathbb{P}\{\tau_a \leq t\} = \mathbb{P}\left\{\mathrm{M}(t) \geq a\right\} = 2\mathbb{P}\left\{\mathrm{B}(t) \geq a\right\} = \sqrt{\frac{2}{\pi t}}\int_a^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2t}}\,\mathrm{d}x,$$

одакле, добијамо

$$\mathbb{P}\{\tau_a \leq t\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{a/\sqrt{t}}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x,$$

што је заправо функција расподеле случајне променљиве τ_a. Дакле, важи

$$\mathrm{F}\tau_a(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{a/\sqrt{t}}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x.$$

Диференцирањем функције расподеле $\mathrm{F}\tau_a$, добијамо густину расподеле f_{τ_a}, односно

$$f_{\tau_a}(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot(-1)\cdot e^{-\frac{a^2}{2t}}\cdot a\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot t^{-\frac{3}{2}},$$

или еквивалентно

$$f_{\tau_a}(t) = \frac{a}{\sqrt{2\pi}}t^{-\frac{3}{2}}e^{-\frac{a^2}{2t}}.$$

за све $t \geq 0$, имајући у виду да је случајна променљива τ_a ненегативна. Претходно добијену густину расподеле променљиве τ_a користимо у наредном тврђењу. ◇

Теорема 4.1.7 *Нека је* $\{\mathrm{B}(t) : t \geq 0\}$ *Брауново кретање и* $0 < t_0 < t_1$. *Тада је вероватноћа да се* $\mathrm{B}(t)$ *нулира на интервалу* $[t_0, t_1]$ *једнака*

$$\frac{2}{\pi} \arccos \sqrt{\frac{t_0}{t_1}}.$$

Доказ. Означимо са A догађај да се $\mathrm{B}(t)$ нулира на интервалу $[t_0, t_1]$. Користећи формулу тоталне вероватноће (1.1.6) добијамо

$$\mathbb{P}(A) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{P}(A \,|\, \mathrm{B}(t_0) = a)\, f_{\mathrm{B}(t_0)}(a)\, \mathrm{d}a,$$

при чему је $f_{\mathrm{B}(t_0)}$ густина расподеле случајне променљиве $\mathrm{B}(t_0)$. Како случајна променљива $\mathrm{B}(t_0)$ има нормалну $\mathrm{N}(0, t_0)$ расподелу, то је

$$f_{\mathrm{B}(t_0)}(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t_0}}\, e^{-\frac{a^2}{2t_0}}.$$

Самим тим, на основу претходног, следи

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t_0}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{P}(A \,|\, \mathrm{B}(t_0) = a)\, e^{-\frac{a^2}{2t_0}}\, \mathrm{d}a,$$

односно

$$\mathbb{P}(A) = \sqrt{\frac{2}{\pi t_0}} \int_{0}^{\infty} \mathbb{P}(A \,|\, \mathrm{B}(t_0) = a)\, e^{-\frac{a^2}{2t_0}}\, \mathrm{d}a, \tag{4.1.8}$$

имајући у виду парност подинтегралне функције. За произвољно $a > 0$, условна вероватноћа $\mathbb{P}(A \,|\, \mathrm{B}(t_0) = a)$ догађаја A, при услову $\mathrm{B}(t_0) = a$, односно, вероватноћа догађаја да се $\mathrm{B}(t)$ нулира на интервалу $[t_0, t_1]$, при услову $\mathrm{B}(t_0) = a$, једнака је вероватноћи догађаја

$$\min_{t_0 \leq t \leq t_1} \mathrm{B}(t) \leq 0,$$

при услову $\mathrm{B}(t_0) = a$, или еквивалентно, вероватноћи догађаја

$$\min_{t_0 \leq t \leq t_1} (\mathrm{B}(t) - \mathrm{B}(t_0)) \leq -a.$$

Дакле, важи

$$\mathbb{P}(A \,|\, \mathrm{B}(t_0) = a) = \mathbb{P}\left(\min_{t_0 \leq t \leq t_1} (\mathrm{B}(t) - \mathrm{B}(t_0)) \leq -a \right).$$

На основу Леме 4.1.2, случајни процес

$$\mathrm{C}(t) = \mathrm{B}(t + t_0) - \mathrm{B}(t_0), \;\; t \geq 0,$$

јесте такође, Брауново кретање. Стога, налазимо

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A \,|\, \mathrm{B}(t_0) = a) &= \mathbb{P}\left(\min_{t_0 \leq t \leq t_1} (\mathrm{B}(t) - \mathrm{B}(t_0)) \leq -a \right) \\
&= \mathbb{P}\left(\min_{t_0 \leq t \leq t_1} \mathrm{C}(t - t_0) \leq -a \right) \\
&= \mathbb{P}\left(\min_{0 \leq t \leq t_1 - t_0} \mathrm{C}(t) \leq -a \right) \\
&= \mathbb{P}\left(\max_{0 \leq t \leq t_1 - t_0} \mathrm{C}(t) \geq a \right).
\end{aligned}$$

Како је случајан процес $\{\mathrm{C}(t) : t \geq 0\}$ Брауново кретање, то добијамо (видети Теорему 4.1.4 и њен доказ)

$$\mathbb{P}\left(\max_{0\leq t\leq t_1-t_0} \mathrm{C}(t) \geq a\right) = \mathbb{P}\{\tau_a \leq t_1 - t_0\},$$

при чему важи

$$\mathbb{P}\{\tau_a \leq t_1 - t_0\} = \int_0^{t_1-t_0} f_{\tau_a}(u)\,\mathrm{d}u = \frac{a}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{t_1-t_0} u^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{a^2}{2u}}\,\mathrm{d}u,$$

где смо искористили разматрања из Напомене 4.1.6. На основу претходног, закључујемо

$$\mathbb{P}(A\,|\,\mathrm{B}(t_0) = a) = \frac{a}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{t_1-t_0} u^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{a^2}{2u}}\,\mathrm{d}u. \tag{4.1.9}$$

Користећи формуле (4.1.8) и (4.1.9), добијамо

$$\mathbb{P}(A) = \sqrt{\frac{2}{\pi t_0}}\int_0^{\infty} \frac{a}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{t_1-t_0} u^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{a^2}{2u}}\,\mathrm{d}u\, e^{-\frac{a^2}{2t_0}}\,\mathrm{d}a,$$

одакле, након промене редоследа интеграције и смене променљиве $s = \frac{a^2}{2}\left(\frac{1}{u} + \frac{1}{t_0}\right)$, налазимо

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A) &= \frac{1}{\pi\sqrt{t_0}}\int_0^{t_1-t_0} u^{-\frac{3}{2}}\int_0^{\infty} a e^{-\frac{a^2}{2}\left(\frac{1}{u}+\frac{1}{t_0}\right)}\,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}u\\
&= \frac{1}{\pi\sqrt{t_0}}\int_0^{t_1-t_0} u^{-\frac{3}{2}}\frac{1}{\frac{1}{u}+\frac{1}{t_0}}\int_0^{\infty} e^{-\frac{a^2}{2}\left(\frac{1}{u}+\frac{1}{t_0}\right)}\,\mathrm{d}\left(\frac{a^2}{2}\left(\frac{1}{u}+\frac{1}{t_0}\right)\right)\mathrm{d}u\\
&= \frac{1}{\pi\sqrt{t_0}}\int_0^{t_1-t_0} u^{-\frac{3}{2}}\frac{ut_0}{u+t_0}\int_0^{\infty} e^{-s}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}u\\
&= \frac{1}{\pi\sqrt{t_0}}\int_0^{t_1-t_0} u^{-\frac{3}{2}}\frac{ut_0}{u+t_0}\,\mathrm{d}u\\
&= \frac{\sqrt{t_0}}{\pi}\int_0^{t_1-t_0} \frac{1}{(u+t_0)\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u.
\end{aligned}$$

Након смене промељиве $u = t_0 v^2$ следи

$$\mathbb{P}(A) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\sqrt{\frac{t_1-t_0}{t_0}}} \frac{1}{1+v^2}\,\mathrm{d}v,$$

тј.

$$\mathbb{P}(A) = \frac{2}{\pi}\arctan\sqrt{\frac{t_1-t_0}{t_0}}.$$

Самим тим, тада је

$$\tan\frac{\pi\mathbb{P}(A)}{2} = \sqrt{\frac{t_1-t_0}{t_0}},$$

односно

$$\cos\frac{\pi\mathbb{P}(A)}{2} = \sqrt{\frac{1}{\tan^2\frac{\pi\mathbb{P}(A)}{2}+1}} = \sqrt{\frac{t_0}{t_1}},$$

што повлачи

$$\mathbb{P}(A) = \frac{2}{\pi}\arccos\sqrt{\frac{t_0}{t_1}}.$$

Тиме је доказ у потпуности завршен. □

4.2 Јакобијева функција

Нека је $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ интеграбилна функција. Тада за функцију $\widehat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ дефинисану на следећи начин

$$\widehat{f}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s)\, e^{-2\pi \mathrm{i} x s}\, \mathrm{d}s, \quad x \in \mathbb{R},$$

кажемо да је *Фуријеова трансформација* функције f. Поред тога, нека је $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ класа свих бесконачно диференцијабилних функција $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ које задовољавају услов

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |x|^j \left| f^{(k)}(x) \right| < \infty, \quad \text{за све } j, k \in \mathbb{N}_0.$$

Тада кажемо да је $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ *Шварцова класа* функција на реалној правој. Тврђење које следи, носи назив *Пуасонова сумациона формула.*

Теорема 4.2.1 *Нека је $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Тада, за све $x \in \mathbb{R}$, важи*

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x+n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(n)\, e^{2\pi \mathrm{i} n x}.$$

Доказ. Нека је

$$F(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x+n),$$

за све $x \in \mathbb{R}$. Функција F је 1-периодична, што се одмах проверава. Наиме, важи

$$F(x+1) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x+n+1) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} f(x+m) = F(x).$$

На основу претходне 1-периодичности функције F, директно следи да се она може представити следећим Фуријеовим редом

$$F(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{2\pi \mathrm{i} n x},$$

при чему је

$$c_n = \int_0^1 F(x)\, e^{-2\pi \mathrm{i} n x}\, \mathrm{d}x, \quad \text{за све } n \in \mathbb{Z}.$$

Тада добијамо, да за све $n \in \mathbb{Z}$, важи

$$\begin{aligned}
c_n &= \int_0^1 F(x)\, e^{-2\pi \mathrm{i} n x}\, \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \sum_{m \in \mathbb{Z}} f(x+m)\, e^{-2\pi \mathrm{i} n x}\, \mathrm{d}x \\
&= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \int_0^1 f(x+m)\, e^{-2\pi \mathrm{i} n x}\, \mathrm{d}x \\
&= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \int_m^{m+1} f(s)\, e^{-2\pi \mathrm{i} n (s-m)}\, \mathrm{d}s \\
&= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \int_m^{m+1} f(s)\, e^{-2\pi \mathrm{i} n s}\, \mathrm{d}s \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(s)\, e^{-2\pi \mathrm{i} n s}\, \mathrm{d}s,
\end{aligned}$$

при чему смо искористили чињеницу да је због равномерне конвергенције, која је обезбеђена претпоставком да функција f припада Шварцовој класи, могуће заменити редослед сумирања и интеграције у претходним формулама. Дакле, на основу претходног, следи

$$c_n = \widehat{f}(n), \text{ за све } n \in \mathbb{Z},$$

што повлачи

$$F(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(n)\, e^{2\pi i n x},$$

односно, важи

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x+n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(n)\, e^{2\pi i n x},$$

што је и требало доказати. □

Напомена 4.2.2 Применом Пуасонове сумационе формуле у специјалном случају када је $x = 0$, добијамо да важи

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(n),$$

где је $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. ◇

Последица 4.2.3 *Нека је* $\operatorname{Re} c > 0$. *Тада за све* $x \in \mathbb{R}$ *важи*

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \exp\left(-c\,(x+n)^2\right) = \sqrt{\frac{\pi}{c}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \exp\left(-\frac{\pi^2 n^2}{c} + 2\pi i n x\right).$$

Доказ. Уочимо функцију

$$f(x) = e^{-cx^2}, \;\; x \in \mathbb{R}.$$

Тривијално се проверава да функција f припада Шварцовој класи $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Такође, тада за све $n \in \mathbb{Z}$, важи

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(n) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(s)\, e^{-2\pi i n s}\, \mathrm{d}s \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-cs^2} e^{-2\pi i n s}\, \mathrm{d}s \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\left(\sqrt{c}s\right)^2 + 2\frac{\pi i n}{\sqrt{c}}\sqrt{c}s + \left(\frac{\pi i n}{\sqrt{c}}\right)^2 + \frac{\pi^2 n^2}{c}\right)}\, \mathrm{d}s \\
&= e^{-\frac{\pi^2 n^2}{c}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\sqrt{c}s + \frac{\pi i n}{\sqrt{c}}\right)^2}\, \mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{\sqrt{c}} e^{-\frac{\pi^2 n^2}{c}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\, \mathrm{d}t \\
&= \sqrt{\frac{\pi}{c}}\, e^{-\frac{\pi^2 n^2}{c}}.
\end{aligned}$$

Применом Пуасонове сумационе формуле (Теорема 4.2.1) добијамо

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x+n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(n)\, e^{2\pi i n x},$$

одакле следи

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-c(x+n)^2} = \sqrt{\frac{\pi}{c}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\frac{\pi^2 n^2}{c}} e^{2\pi i n x},$$

Тиме је доказ завршен. □

Напомена 4.2.4 Применом претходног резултата у специјалном случају када је $x = 0$ добијамо формулу

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-cn^2} = \sqrt{\frac{\pi}{c}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\frac{\pi^2 n^2}{c}}, \tag{4.2.1}$$

при чему је $\operatorname{Re} c > 0$, која ће такође бити од користи у наставку. ◇

Функција ϑ дефинисана на следећи начин

$$\vartheta(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 x}, \ \ x > 0,$$

зове се *Јакобијева функција.* Одмах добијамо следеће тврђење.

Теорема 4.2.5 *За све* $x > 0$ *важи*

$$\vartheta\left(\frac{1}{x}\right) = \sqrt{x}\,\vartheta\left(x\right).$$

Доказ. Нека је $x > 0$ произвољно одабрано. Применом формуле (4.2.1) у случају када је $c = \pi x$ налазимо

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\frac{\pi n^2}{x}},$$

или еквивалентно

$$\vartheta(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\,\vartheta\left(\frac{1}{x}\right),$$

што је и требало доказати. □

Испоставља се да формула добијена у Последици 4.2.3 важи и на скупу комплексних бројева. Наиме, имамо и следећи помоћни резултат.

Лема 4.2.6 *Нека је* $\operatorname{Re} c > 0$. *Тада за све* $z \in \mathbb{C}$ *важи*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \exp\left(-c\left(z+n\right)^2\right) = \sqrt{\frac{\pi}{c}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \exp\left(-\frac{\pi^2 n^2}{c} + 2\pi \mathrm{i} n z\right).$$

Доказ. Нека је $y \in \mathbb{R}$ произвољно одабрано и фиксирано у наставку. Уочимо функцију

$$f(x) = e^{-c(x+\mathrm{i}y)^2}, \ \ x \in \mathbb{R}.$$

Наравно, директно се проверава да функција f припада Шварцовој класи $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Тада за све $n \in \mathbb{Z}$, важи

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(n) &= \int_{-\infty}^{\infty} f\left(s\right) e^{-2\pi \mathrm{i} n s}\,\mathrm{d}s \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-c(s+\mathrm{i}y)^2} e^{-2\pi \mathrm{i} n s}\,\mathrm{d}s \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\left(\sqrt{c}(s+\mathrm{i}y)\right)^2 + 2\frac{\pi \mathrm{i} n}{\sqrt{c}}\sqrt{c}(s+\mathrm{i}y) + \left(\frac{\pi \mathrm{i} n}{\sqrt{c}}\right)^2 + \frac{\pi^2 n^2}{c} + 2\pi n y\right)}\,\mathrm{d}s \\
&= e^{-\left(\frac{\pi^2 n^2}{c} + 2\pi n y\right)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\sqrt{c}(s+\mathrm{i}y) + \frac{\pi \mathrm{i} n}{\sqrt{c}}\right)^2}\,\mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{\sqrt{c}}\, e^{-\left(\frac{\pi^2 n^2}{c} + 2\pi n y\right)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \sqrt{\frac{\pi}{c}}\, e^{-\left(\frac{\pi^2 n^2}{c} + 2\pi n y\right)}.
\end{aligned}$$

На основу Пуасонове сумационе формуле, добијамо да за све $x \in \mathbb{R}$ важи

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x+n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(n)\, e^{2\pi \mathrm{i} nx},$$

одакле следи

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-c(x+n+\mathrm{i}y)^2} = \sqrt{\frac{\pi}{c}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\left(\frac{\pi^2 n^2}{c} + 2\pi n y\right)} e^{2\pi \mathrm{i} nx}.$$

Дакле, за све $x, y \in \mathbb{R}$ важи формула

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-c(x+\mathrm{i}y+n)^2} = \sqrt{\frac{\pi}{c}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\frac{\pi^2 n^2}{c}} e^{2\pi \mathrm{i} n(x+\mathrm{i}y)}. \tag{4.2.2}$$

Нека је $z \in \mathbb{C}$ произвољно одабран комплексан број. Тада је $z = x + \mathrm{i}y$ за неке $x, y \in \mathbb{R}$. Применом формуле (4.2.2) на реалне бројеве x и y, добијамо

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-c(z+n)^2} = \sqrt{\frac{\pi}{c}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\frac{\pi^2 n^2}{c} + 2\pi \mathrm{i} nz},$$

чиме је доказ завршен. □

Генерализована Јакобијева функција Θ дефинише се на следећи начин

$$\Theta(z;\tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \exp\left(\mathrm{i}\pi\tau n^2 + 2\pi \mathrm{i} nz\right), \quad z \in \mathbb{C}, \ \operatorname{Im}\tau > 0.$$

За произвољно $x > 0$ важи

$$\Theta(0; \mathrm{i}x) = \vartheta(x).$$

Такође, испоставља се да важи следеће тврђење.

Теорема 4.2.7 *Нека су $z \in \mathbb{C}$ и $\operatorname{Im}\tau > 0$. Тада је*

$$\Theta(z;\tau) = \sqrt{\frac{\mathrm{i}}{\tau}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \exp\left(-\frac{\mathrm{i}\pi(z+n)^2}{\tau}\right).$$

Доказ. Означимо

$$c = \frac{\mathrm{i}\pi}{\tau}.$$

Имајући у виду да важи $\operatorname{Im}\tau > 0$, директно следи да је $\operatorname{Re} c > 0$. Применом Леме 4.2.6 добијамо

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \exp\left(-c\,(z+n)^2\right) = \sqrt{\frac{\pi}{c}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \exp\left(-\frac{\pi^2 n^2}{c} + 2\pi \mathrm{i} nz\right),$$

односно

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \exp\left(-\frac{\mathrm{i}\pi\,(z+n)^2}{\tau}\right) = \sqrt{\frac{\tau}{\mathrm{i}}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \exp\left(\mathrm{i}\pi n^2 \tau + 2\pi \mathrm{i} nz\right),$$

или еквивалентно

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \exp\left(\mathrm{i}\pi n^2 \tau + 2\pi \mathrm{i} nz\right) = \sqrt{\frac{\mathrm{i}}{\tau}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \exp\left(-\frac{\mathrm{i}\pi\,(z+n)^2}{\tau}\right).$$

Дакле, заиста важи

$$\Theta(z;\tau) = \sqrt{\frac{\mathrm{i}}{\tau}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \exp\left(-\frac{\mathrm{i}\pi(z+n)^2}{\tau}\right).$$

Тиме је доказ завршен. □

Напомена 4.2.8 Применом Теореме 4.2.7, добијамо да за произвољно $x > 0$, важи

$$\vartheta(x) = \Theta(0; \mathrm{i}x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \exp\left(-\frac{\pi n^2}{x}\right) = \frac{1}{\sqrt{x}}\, \vartheta\left(\frac{1}{x}\right),$$

што је заправо резултат Теореме 4.2.5. ◇

У наставку наводимо још нека елементарна својства генерализоване Јакобијеве функције.

Теорема 4.2.9 *Нека су $z \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Im}\tau > 0$ и $n, m \in \mathbb{Z}$. Тада важи*

(1) $\Theta(z+1;\tau) = \Theta(z;\tau)$;

(2) $\Theta(z;\tau) = \Theta(-z;\tau)$;

(3) $\Theta(z+\tau;\tau) = e^{-\mathrm{i}\pi\tau} e^{-2\pi \mathrm{i}z}\Theta(z;\tau)$;

(4) *Ако је* $z = \frac{1}{2} + \frac{\tau}{2} + n + m\tau$, *тада је* $\Theta(z;\tau) = 0$;

(5) $\Theta\left(\frac{z}{\tau}; -\frac{1}{\tau}\right) = \sqrt{\frac{\tau}{\mathrm{i}}}\, e^{\frac{\mathrm{i}\pi z^2}{\tau}}\Theta(z;\tau)$.

Доказ. Најпре,

$$\Theta(z+1;\tau) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \exp\left(\mathrm{i}\pi\tau n^2 + 2\pi \mathrm{i}nz + 2\pi \mathrm{i}n\right) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \exp\left(\mathrm{i}\pi\tau n^2 + 2\pi \mathrm{i}nz\right) = \Theta(z;\tau),$$

чиме смо показали својство (1). Слично је

$$\begin{aligned} \Theta(-z;\tau) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \exp\left(\mathrm{i}\pi\tau n^2 - 2\pi \mathrm{i}nz\right) \\ &\overset{m=-n}{=} \sum_{m\in\mathbb{Z}} \exp\left(\mathrm{i}\pi\tau m^2 + 2\pi \mathrm{i}mz\right) = \Theta(z;\tau). \end{aligned}$$

Тиме смо показали и својство (2). Поред тога, важи

$$\begin{aligned} \Theta(z+\tau;\tau) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \exp\left(\mathrm{i}\pi\tau n^2 + 2\pi \mathrm{i}nz + 2\pi \mathrm{i}n\tau\right) \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \exp\left(\mathrm{i}\pi\tau\left(n^2 + 2n\right) + 2\pi \mathrm{i}nz\right) \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \exp\Big(\mathrm{i}\pi\tau\,(n+1)^2 + 2\pi \mathrm{i}(n+1)z - \mathrm{i}\pi\tau - 2\pi \mathrm{i}z\Big) \\ &= e^{-\mathrm{i}\pi\tau} e^{-2\pi \mathrm{i}z} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \exp\Big(\mathrm{i}\pi\tau\,(n+1)^2 + 2\pi \mathrm{i}(n+1)z\Big) \\ &\overset{m=n+1}{=} e^{-\mathrm{i}\pi\tau} e^{-2\pi \mathrm{i}z} \sum_{m\in\mathbb{Z}} \exp\left(\mathrm{i}\pi\tau m^2 + 2\pi \mathrm{i}mz\right) \\ &= e^{-\mathrm{i}\pi\tau} e^{-2\pi \mathrm{i}z}\Theta(z;\tau), \end{aligned}$$

одакле следи својство (3). Својство (4) је довољно доказати у специјалном случају када је $n = 0$ и $m = 0$, јер онда општи случај следи индуктивно, имајући у виду да важе својства (1) и (3).

Дакле, имамо

$$\begin{aligned}
\Theta\left(\frac{1}{2}+\frac{\tau}{2};\tau\right) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}}\exp\left(\mathrm{i}\pi\tau n^2+2\pi\mathrm{i}n\left(\frac{1}{2}+\frac{\tau}{2}\right)\right)\\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}}\exp\left(\mathrm{i}\pi\tau n^2+\mathrm{i}\pi n+\mathrm{i}\pi\tau n\right)\\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}}(-1)^n\exp\left(\mathrm{i}\pi\tau\left(n^2+n\right)\right)\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\exp\left(\mathrm{i}\pi\tau\left(n^2+n\right)\right)+\sum_{n=-\infty}^{-1}(-1)^n\exp\left(\mathrm{i}\pi\tau\left(n^2+n\right)\right)\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\exp\left(\mathrm{i}\pi\tau\left(n^2+n\right)\right)+\sum_{n=-\infty}^{-1}(-1)^n\exp\left(\mathrm{i}\pi\tau\left(n^2+n\right)\right)\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\exp\left(\mathrm{i}\pi\tau\left(n^2+n\right)\right)-\sum_{n=-\infty}^{-1}(-1)^{-n-1}\exp\left(\mathrm{i}\pi\tau\left((-n-1)^2+(-n-1)\right)\right).
\end{aligned}$$

Увођењем смене бројача $m=-n-1$ у другој суми, добијамо

$$\Theta\left(\frac{1}{2}+\frac{\tau}{2};\tau\right)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\exp\left(\mathrm{i}\pi\tau\left(n^2+n\right)\right)-\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\exp\left(\mathrm{i}\pi\tau\left(m^2+m\right)\right)=0,$$

што је и требало показати. Са друге стране, како важи $\operatorname{Im}\tau>0$, то је

$$\operatorname{Im}\left(-\frac{1}{\tau}\right)=\frac{\operatorname{Im}\tau}{\operatorname{Re}^2\tau+\operatorname{Im}^2\tau}>0.$$

Применом Теореме 4.2.7 добијамо

$$\begin{aligned}
\Theta\left(\frac{z}{\tau};-\frac{1}{\tau}\right) &= \sqrt{\frac{\mathrm{i}}{-1/\tau}}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\exp\left(-\frac{\mathrm{i}\pi(z/\tau+n)^2}{-1/\tau}\right)\\
&= \sqrt{-\mathrm{i}\tau}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\exp\left(\mathrm{i}\pi\tau\left(\frac{z}{\tau}+n\right)^2\right)\\
&= \sqrt{\frac{\tau}{\mathrm{i}}}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\exp\left(\frac{\mathrm{i}\pi z^2}{\tau}+\mathrm{i}\pi\tau n^2+2\pi\mathrm{i}nz\right)\\
&= \sqrt{\frac{\tau}{\mathrm{i}}}e^{\frac{\mathrm{i}\pi z^2}{\tau}}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\exp\left(\mathrm{i}\pi\tau n^2+2\pi\mathrm{i}nz\right)\\
&= \sqrt{\frac{\tau}{\mathrm{i}}}e^{\frac{\mathrm{i}\pi z^2}{\tau}}\Theta(z;\tau).
\end{aligned}$$

Дакле, заиста важи

$$\Theta\left(\frac{z}{\tau};-\frac{1}{\tau}\right)=\sqrt{\frac{\tau}{\mathrm{i}}}e^{\frac{\mathrm{i}\pi z^2}{\tau}}\Theta(z;\tau),$$

чиме је доказано и својство (5). Овим је доказ комплетиран. □

4.3 Конвексан омотач планарног Брауновог кретања

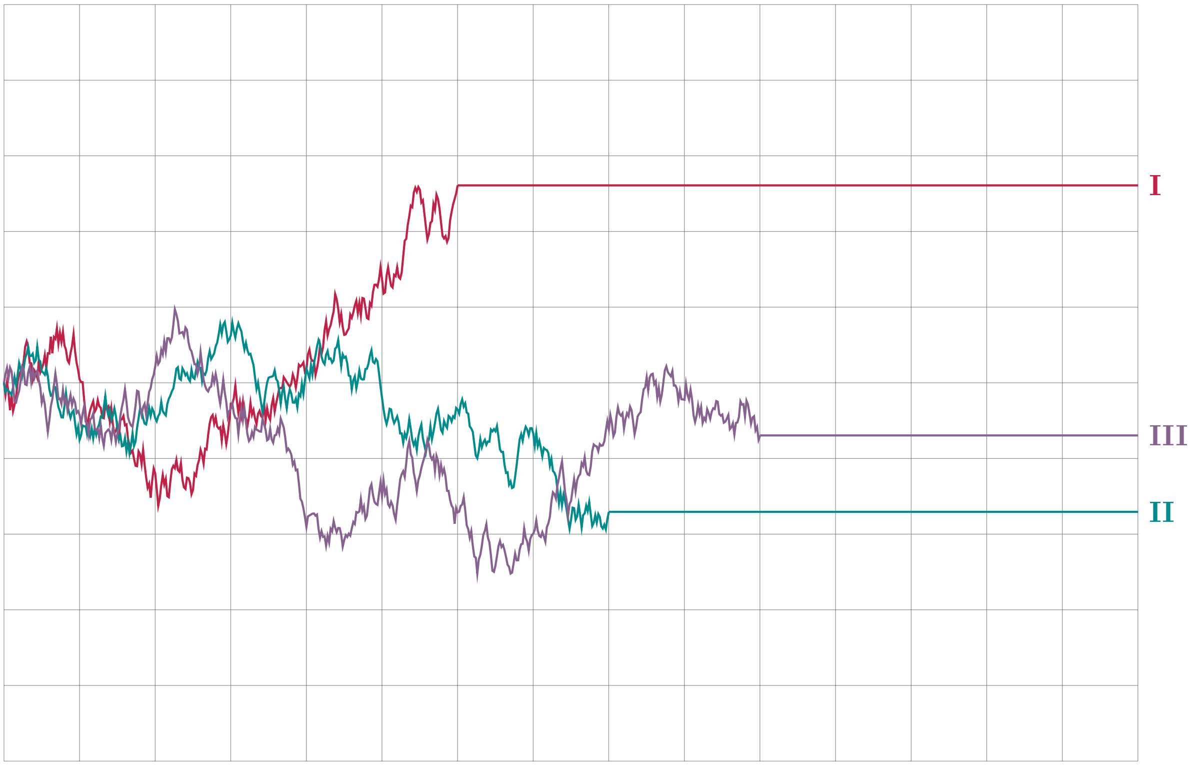
Нека је $n \in \mathbb{N}$. Тада за фамилију случајних вектора

$$\{\mathrm{B}(t) = (\mathrm{B}_1(t), \ldots, \mathrm{B}_n(t)) : t \geq 0\},$$

кажемо да је *n-димензионо Брауново кретање*, ако су случајни процеси

$$\{\mathrm{B}_1(t) : t \geq 0\}, \ldots, \{\mathrm{B}_n(t) : t \geq 0\},$$

независна Браунова кретања. За 1-димензионо Брауново кретање, које је разматрано у првој секцији ове главе, кажемо да је *линеарно Брауново кретање*. Поред тога, за 2-димензионо Брауново кретање, кажемо да је *планарно Брауново кретање*. Пре него што формално дефинишемо конвексан омотач планарног Брауновог кретања, подсетимо се неких основних појмова и тврђења везано за конвексне скупове у равни.



Графици три Браунова кретања.

• Скуп $K \subset \mathbb{R}^2$ је *конвексан* ако за све $x_1, x_2 \in K$ и све $t \in [0, 1]$ важи

$$(1-t)x_1 + tx_2 \in K.$$

Са друге стране, ако је K конвексан скуп у равни $\mathbb{R}^2$, $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_n \in K$ и $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1$, при чему је $\lambda_j \geq 0$ за све $j = 1, \ldots, n$, тада важи:

$$\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n \in K,$$

што заправо значи да су конвексни скупови затворени за конвексне комбинације својих елемената. Претходно својство можемо показати индукцијом по n. Наиме, ако је $n = 1$ тврђење тривијално следи. У наставку претпоставимо да је тврђење тачно за неки природан број n и докажимо да је тачно и за $n+1$. Наиме, нека су $x_1, \ldots, x_{n+1} \in K$ и $\sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j = 1$, при чему је $\lambda_j \geq 0$ за све $j = 1, \ldots, n+1$. Означимо

$$\Lambda = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j.$$

Тада је $\Lambda \in [0,1]$ и $\Lambda + \lambda_{n+1} = 1$. Ако је $\Lambda = 0$, мора бити $\lambda_{n+1} = 1$ и директно следи да важи $\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_{n+1}x_{n+1} = x_{n+1} \in K$. Зато, у наставку претпоставимо да је $\Lambda \in (0,1]$. Добијамо да важи

$$\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_{n+1}x_{n+1} = (1-\lambda_{n+1})\left(\frac{\lambda_1}{\Lambda}x_1 + \ldots + \frac{\lambda_n}{\Lambda}x_n\right) + \lambda_{n+1}x_{n+1} \in K,$$

што следи из конвексности скупа K и чињенице да $\frac{\lambda_1}{\Lambda}x_1 + \ldots + \frac{\lambda_n}{\Lambda}x_n \in K$, где смо заправо искористили индуктивну претпоставку, имајући у виду да је $\sum_{j=1}^{n}\frac{\lambda_j}{\Lambda} = \frac{\Lambda}{\Lambda} = 1$.
Конвексан омотач скупа $S \subset \mathbb{R}^2$ дефинише се на следећи начин:

$$\mathcal{C}(S) = \bigcap \{K : K \text{ је конвексан скуп и } S \subset K\}.$$

Нека су $x_1, x_2 \in \mathcal{C}(S)$ и $t \in [0,1]$ произвољно одабрани и нека је $K \supset S$ конвексан скуп. Тада је $x_1, x_2 \in K$ и самим тим, важи $(1-t)x_1 + tx_2 \in K$. Будући да ово важи за сваки конвексан скуп $K \supset S$, следи $(1-t)x_1 + tx_2 \in \mathcal{C}(S)$. Закључујемо да је $\mathcal{C}(S)$ конвексан скуп. Дакле, конвексан омотач неког скупа у равни је најмањи конвексан скуп који га садржи. Са друге стране, означимо са $\mathcal{K}(S)$ скуп свих конвексних комбинација елемената скупа S. Дакле, нека је $\mathcal{K}(S)$ скуп елемената облика

$$\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n,$$

за све $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_n \in S$, $\lambda_j \geq 0$, $j = 1, \ldots, n$, при чему је $\sum_{j=1}^{n}\lambda_j = 1$. Тада је и $\mathcal{K}(S)$ један конвексан скуп. Наиме, нека су $x, y \in \mathcal{K}(S)$ и $t \in [0,1]$ произвољно одабрани. Следи

$$x = \sum_{j=1}^{n}\lambda_j x_j \text{ и } y = \sum_{i=1}^{m}\mu_i y_i,$$

за неке $n, m \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m \in S$, $\lambda_j \geq 0$, $j = 1, \ldots, n$ и $\mu_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, n$, где је $\sum_{j=1}^{n}\lambda_j = 1$ и $\sum_{i=1}^{m}\mu_i = 1$. Тада је

$$(1-t)x + ty = \sum_{j=1}^{n}(1-t)\lambda_j x_j + \sum_{i=1}^{m}t\mu_i y_i,$$

при чему важи

$$\sum_{j=1}^{n}(1-t)\lambda_j + \sum_{i=1}^{m}t\mu_i = (1-t)\sum_{j=1}^{n}\lambda_j = 1 + t\sum_{i=1}^{m}\mu_i = 1 - t + t = 1,$$

што директно повлачи $(1-t)x+ty \in \mathcal{K}(S)$. Према томе, заиста је $\mathcal{K}(S)$ конвексан скуп. Поред тога, испоставља се да је конвексан омотач $\mathcal{C}(S)$ скупа S, заправо скуп свих конвексних комбинација елемената тог скупа. Дакле, важи

$$\mathcal{C}(S) = \mathcal{K}(S).$$

Наиме, на основу претходног, будући да је $\mathcal{C}(S)$ конвексан скуп који садржи S, он садржи и све конвексне комбинације елемената тог скупа, јер су конвескни скупови затворени за конвексне комбинације. Стога је $\mathcal{C}(S) \supset \mathcal{K}(S)$. Са друге стране, већ смо показали да је $\mathcal{K}(S)$ конвексан скуп и наравно $\mathcal{K}(S) \supset S$. Будући да је $\mathcal{C}(S)$ најмањи конвексан скуп који садржи S, следи $\mathcal{C}(S) \subset \mathcal{K}(S)$. Самим тим је $\mathcal{C}(S) = \mathcal{K}(S)$. Следеће тврђење у литератури носи назив *Каратеодоријева теорема о конвексним скуповима.*

Теорема 4.3.1 *Нека је $S \subset \mathbb{R}^2$ и $x \in \mathcal{C}(S)$. Тада је x конвексна комбинација нека три елемента скупа S.*

Доказ. Како важи $x \in \mathcal{C}(S) = \mathcal{K}(S)$, то је x конвексна комбинација неких елемената скупа S. Следи

$$x = \sum_{j=1}^{n}\lambda_j x_j,$$

за неке $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \dots, x_n \in S$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$, при чему важи $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1$. Ако је $n \leq 3$, тада тврђење важи. Зато, у наставку, претпоставимо да је $n > 3$. Тада су вектори $x_2 - x_1, \dots, x_n - x_1$ линеарно зависни, будући да је $n - 1 > 2$. Према томе, за неке реалне бројеве $\mu_2, \dots, \mu_n$, који нису сви једнаки нули, важи

$$\sum_{j=2}^{n} \mu_j (x_j - x_1) = 0.$$

Поред тога, нека је

$$\mu_1 = -\sum_{j=2}^{n} \mu_j.$$

На основу претходног следи

$$\sum_{j=1}^{n} \mu_j x_j = \sum_{j=2}^{n} \mu_j x_j + \mu_1 x_1 = \sum_{j=2}^{n} \mu_j (x_j - x_1) = 0.$$

Како бројеви $\mu_1, \dots, \mu_n$ нису сви једнаки нули и како важи

$$\sum_{j=1}^{n} \mu_j = 0,$$

то је бар један од њих строго већи од нуле и стога, можемо дефинисати

$$\alpha = \min_{1 \leq j \leq n} \left\{ \frac{\lambda_j}{\mu_j} : \mu_j > 0 \right\} = \frac{\lambda_i}{\mu_i} \text{ за неко } i \in \{1, \dots, n\}.$$

Приметимо, да тада важи

$$x = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j - \alpha \sum_{j=1}^{n} \mu_j x_j = \sum_{j=1}^{n} (\lambda_j - \alpha \mu_j) x_j.$$

Због начина на који је дефинисан број α, закључујемо да је

$$\lambda_j - \alpha \mu_j \geq 0, \text{ за све } j = 1, \dots, n.$$

Такође је

$$\sum_{j=1}^{n} (\lambda_j - \alpha \mu_j) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j - \alpha \sum_{j=1}^{n} \mu_j = 1.$$

Како важи

$$\lambda_i - \alpha \mu_i = 0,$$

то је

$$x = \sum_{j \neq i} (\lambda_j - \alpha \mu_j) x_j.$$

Самим тим, на основу свега претходног, следи да је x конвексна комбинација $n - 1$ елемената скупа S. Ако је $n - 1 \leq 3$, доказ је завршен. У супротном, ако је $n - 1 > 3$, понављамо претходну процедуру, све док не добијемо представљање тачке x као конвексне комбинације три елемента из скупа S. □

Растојање између тачака $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ и $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ износи

$$\|x - y\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}.$$

Тада се *дијаметар* скупа $S \subset \mathbb{R}^2$ дефинише на следећи начин

$$\operatorname{diam} S = \sup_{x, y \in S} \|x - y\|.$$

Испоставља се да је дијаметар неког скупа једнак дијаметру његовог конвексног омотача. Дакле, важи следеће тврђење.

Теорема 4.3.2 *Нека је* $S \subset \mathbb{R}^2$. *Тада важи*

$$\operatorname{diam} S = \operatorname{diam} \mathcal{C}(S).$$

Доказ. Како је

$$S \subset \mathcal{C}(S),$$

то директно важи

$$\operatorname{diam} S \leq \operatorname{diam} \mathcal{C}(S).$$

Са друге стране, нека су $x, y \in \mathcal{C}(S)$ произвољно одабрани. Применом Теореме 4.3.1 можемо закључити да се x и y могу представити као конвексне комбинације од по три елемента скупа S. Самим тим, можемо писати

$$x = \sum_{j=1}^{3} \lambda_j x_j \;\text{ и }\; y = \sum_{i=1}^{3} \mu_i y_i,$$

где су $x_j, y_i \in S$ и $\lambda_j, \mu_i \geq 0$ за све $j, i = 1, 2, 3$, при чему важи

$$\sum_{j=1}^{3} \lambda_j = \sum_{i=1}^{3} \mu_i = 1.$$

Тада важи

$$\begin{aligned}
\|x - y\| &= \left\| \sum_{j=1}^{3} \lambda_j x_j - y \right\| = \left\| \sum_{j=1}^{3} \lambda_j (x_j - y) \right\| \\
&\leq \sum_{j=1}^{3} \lambda_j \|x_j - y\| \\
&= \sum_{j=1}^{3} \lambda_j \left\| x_j - \sum_{i=1}^{3} \mu_i y_i \right\| = \sum_{j=1}^{3} \lambda_j \left\| \sum_{i=1}^{3} \mu_i (x_j - y_i) \right\| \\
&\leq \sum_{j=1}^{3} \lambda_j \sum_{i=1}^{3} \mu_i \|x_j - y_i\| \\
&\leq \left(\sum_{j=1}^{3} \lambda_j \right) \left(\sum_{i=1}^{3} \mu_i \right) \operatorname{diam} S \\
&= \operatorname{diam} S.
\end{aligned}$$

Према томе, преласком на супремум по свим $x, y \in \mathcal{C}(S)$, следи

$$\sup_{x, y \in \mathcal{C}(S)} \|x - y\| \leq \operatorname{diam} S,$$

односно

$$\operatorname{diam} \mathcal{C}(S) \leq \operatorname{diam} S.$$

На основу свега претходног налазимо

$$\operatorname{diam} S = \operatorname{diam} \mathcal{C}(S),$$

што је и требало показати. □

У наставку нека је
$$\{\mathrm{B}(t) = (\mathrm{B}_1(t), \mathrm{B}_2(t)) : t \geq 0\},$$
планарно Брауново кретање. Конвексан омотач и дијаметар планарног Брауновог кретања се подразумевано дефинишу на временском интервалу $[0,1]$. Дакле, конвексан омотач планарног Брауновг кретања, у ознаци $\mathtt{H}$, дефинисан је на следећи начин
$$\mathtt{H} = \mathcal{C}\left(\mathrm{B}[0,1]\right).$$
Са друге стране, дијаметар планарног Брауновог кретања, у ознаци d, дефинише се као
$$\mathrm{d} = \operatorname{diam} \mathrm{B}[0,1].$$
Према томе, следи
$$\mathrm{d} = \sup_{x,y \in \mathrm{B}[0,1]} \|x - y\| = \sup_{t,s \in [0,1]} \|\mathrm{B}(t) - \mathrm{B}(s)\|.$$
Такође, на основу Теореме 4.3.2, важи
$$\mathrm{d} = \operatorname{diam} \mathtt{H}.$$
Подсетимо се да је скаларан производ вектора
$$x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \text{ и } y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2,$$
дефинисан на следећи начин
$$x \cdot y = x_1 y_1 + x_2 y_2.$$
Такође, за произвољно $0 \leq \theta < 2\pi$, уочимо јединични вектор
$$\mathrm{e}_\theta = (\cos\theta, \sin\theta).$$
Поред тога, нека је
$$\mathcal{B}_\theta(t) = \mathrm{B}(t) \cdot \mathrm{e}_\theta, \text{ где је } t \geq 0.$$
Важи
$$\mathcal{B}_\theta(t) = \mathrm{B}_1(t)\cos\theta + \mathrm{B}_2(t)\sin\theta,$$
што значи да је случајан процес
$$\{\mathcal{B}_\theta(t) : t \geq 0\},$$
линеарно Брауново кретање. Означимо
$$\mathcal{M}_\theta(t) = \sup_{0 \leq s \leq t} \mathcal{B}_\theta(s), \text{ где је } t \geq 0.$$
У наставку, одредимо очекивање случајне променљиве $\mathcal{M}_\theta(1)$. Применом Теореме 4.1.4 добијамо да за све $a \geq 0$ важи
$$\mathbb{P}\{\mathcal{M}_\theta(1) \geq a\} = 2\mathbb{P}\{\mathcal{B}_\theta(1) \geq a\}.$$
Случајна променљива $\mathcal{B}_\theta(1)$ има стандардну нормалну расподелу, односно
$$\mathbb{P}\{\mathcal{B}_\theta(1) \geq a\} = \int_a^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \,\mathrm{d}x,$$
што повлачи да је
$$\mathbb{P}\{\mathcal{M}_\theta(1) \geq a\} = 2\int_a^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \,\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_a^\infty e^{-\frac{x^2}{2}} \,\mathrm{d}x.$$
Специјално је
$$\mathbb{P}\{\mathcal{M}_\theta(1) \geq 0\} = 1.$$

Користећи Лему 2.2.1 налазимо

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\mathcal{M}_\theta(1) &= \int_0^\infty \mathbb{P}\{\mathcal{M}_\theta(1) \geq a\}\,\mathrm{d}a \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \int_a^\infty e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}a \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}x \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty x e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty e^{-u}\,\mathrm{d}u \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}}.
\end{aligned}$$

Дакле, на основу претходног, важи

$$\mathbb{E}\mathcal{M}_\theta(1) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}. \tag{4.3.1}$$

Периметар планарног Брауновог кретања, у ознаци ℓ, дефинишемо као периметар (обим) његовог конвексног омотача $\mathtt{H}$, што заправо значи да је ℓ периметар конвексног омотача скупа $\mathrm{B}[0,1]$. Користећи познату Кошијеву теорему о периметру конвексних скупова у равни (видети [9] или [46]), можемо писати

$$\ell = \int_0^{2\pi} \mathcal{M}_\theta(1)\,\mathrm{d}\theta. \tag{4.3.2}$$

За више информација погледати и [34, 50]. Користећи (4.3.1) и (4.3.2), добијамо

$$\mathbb{E}\ell = \mathbb{E}\left(\int_0^{2\pi} \mathcal{M}_\theta(1)\,\mathrm{d}\theta\right) = \int_0^{2\pi} \mathbb{E}\mathcal{M}_\theta(1)\,\mathrm{d}\theta = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} = 2\sqrt{2}\sqrt{\pi} = \sqrt{8\pi}. \tag{4.3.3}$$

Такође, важи

$$2\mathrm{d} \leq \ell \leq \pi\mathrm{d},$$

што је добро позната неједнакост изопериметријског типа између дијаметра и периметра конвексног скупа у равни (видети [6]). Следи

$$\frac{\ell}{\pi} \leq \mathrm{d} \leq \frac{\ell}{2},$$

одакле, преласком на математичко очекивање и користећи формулу (4.3.3), налазимо

$$\sqrt{\frac{8}{\pi}} = \frac{\mathbb{E}\ell}{\pi} \leq \mathbb{E}\mathrm{d} \leq \frac{\mathbb{E}\ell}{2} = \sqrt{2\pi},$$

тј.

$$\sqrt{\frac{8}{\pi}} \leq \mathbb{E}\mathrm{d} \leq \sqrt{2\pi}.$$

Како је $\sqrt{8/\pi} \approx 1.596$ и $\sqrt{2\pi} \approx 2.507$, то можемо писати

$$1.596 \leq \mathbb{E}\mathrm{d} \leq 2.507. \tag{4.3.4}$$

У наредне две секције побољшавамо претходно добијена ограничења за очекивани дијаметар планарног Брауновог кретања.

4.4 Горње ограничење очекиваног дијаметра планарног Брауновог кретања

Нека је S непразан скуп у равни $\mathbb{R}^2$ и $0 \leq \theta \leq \pi$. Означимо

$$\mathrm{r}_S(\theta) = \sup_{x \in S} (x \cdot \mathrm{e}_\theta) - \inf_{x \in S} (x \cdot \mathrm{e}_\theta).$$

Такође, ако је

$$\{\mathrm{B}(t) = (\mathrm{B}_1(t), \mathrm{B}_2(t)) : t \geq 0\},$$

планарно Брауново кретање, пишемо

$$\mathrm{r}(\theta) = \mathrm{r}_{\mathrm{B}[0,1]}(\theta).$$

Дакле, важи

$$\mathrm{r}(\theta) = \sup_{t \in [0,1]} (\mathrm{B}(t) \cdot \mathrm{e}_\theta) - \inf_{t \in [0,1]} (\mathrm{B}(t) \cdot \mathrm{e}_\theta).$$

Познато је да случајне променљиве $\mathrm{r}(\theta)$, где је $0 \leq \theta \leq \pi$, имају исту густину расподеле (видети [13]), која је дата са

$$\mathtt{f}(x) = \frac{8}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n^2 e^{-\frac{n^2 x^2}{2}},$$

за све $x > 0$. Поред тога, у раду [13] је показано да важи

$$\mathbb{E}\mathrm{r}(\theta) = \sqrt{\frac{8}{\pi}} \text{ и } \mathbb{E}\mathrm{r}(\theta)^2 = 4 \log 2.$$

У следећем тврђењу успостављамо везу између претходно уведених појмова и дијаметра неког планарног скупа.

Теорема 4.4.1 *Нека је $S \subset \mathbb{R}^2$ непразан и компактан скуп. Тада важи*

$$\operatorname{diam} S = \sup_{0 \leq \theta \leq \pi} \mathrm{r}_S(\theta).$$

Доказ. Најпре, на основу Коши-Шварцове неједнакости, за све $x, y \in \mathbb{R}^2$ важи

$$x \cdot y \leq \|x\| \, \|y\|.$$

Нека је $0 \leq \theta \leq \pi$ произвољно одабрано. Будући да је S компактан скуп, постоје $x, y \in S$, такви да је

$$\mathrm{r}_S(\theta) = x \cdot \mathrm{e}_\theta - y \cdot \mathrm{e}_\theta.$$

Следи

$$\mathrm{r}_S(\theta) = (x - y) \cdot \mathrm{e}_\theta \leq \|x - y\| \, \|\mathrm{e}_\theta\| = \|x - y\| \leq \operatorname{diam} S.$$

Преласком на супремум по свим $0 \leq \theta \leq \pi$ добијамо

$$\sup_{0 \leq \theta \leq \pi} \mathrm{r}_S(\theta) \leq \operatorname{diam} S.$$

Са друге стране, ако се скуп S састоји од само једне тачке, тада тврђење тривијално важи. Зато, у наставку, претпоставимо да скуп S има бар две различите тачке. Користећи опет претпоставку да је скуп S компактан, закључујемо да постоје $x = (x_1, x_2) \in S$ и $y = (y_1, y_2) \in S$, такви да је

$$\operatorname{diam} S = \|x - y\| > 0.$$

Ако је $x_2 \geq y_2$ означимо $v = x - y$. У супротном, означимо $v = y - x$. Тада је $v / \|v\|$ јединични вектор и постоји неко $\theta_0 \in [0, \pi]$ за које важи

$$\frac{v}{\|v\|} = \mathrm{e}_{\theta_0}.$$

Према томе, налазимо

$$\sup_{0\le\theta\le\pi} \mathrm{r}_S(\theta) \ge \mathrm{r}_S(\theta_0) \ge v\cdot \mathrm{e}_{\theta_0} = \frac{v\cdot v}{\|v\|} = \|v\| = \operatorname{diam} S.$$

На основу свега претходног, заиста важи

$$\operatorname{diam} S = \sup_{0\le\theta\le\pi} \mathrm{r}_S(\theta).$$

Тиме је доказ завршен. □

Користећи Теорему 4.4.1 можемо закључити да важи

$$\mathrm{d} = \operatorname{diam} \mathrm{B}[0,1] = \sup_{0\le\theta\le\pi} \mathrm{r}_{\mathrm{B}[0,1]}(\theta) = \sup_{0\le\theta\le\pi} \mathrm{r}(\theta).$$

Напоменимо да геометријски гледано, случајна променљива $\mathrm{r}(\theta)$ представља заправо величину пројекције скупа $\mathrm{B}[0,1]$ на праву која је генерисана јединичним вектором e_θ. У наставку добијамо ново горње ограничење за очекивани дијаметар планарног Брауновог кретања, које је боље од оног добијеног у (4.3.4).

Теорема 4.4.2 *Важи* $\mathbb{E}\mathrm{d} \le \sqrt{8\log 2} \approx 2.355$.

Доказ. Приметимо да случајна променљива $\mathrm{r}(0)$ представља величину пројекције (њену дужину, односно дијаметар) скупа $\mathrm{B}[0,1]$ на праву генерисану јединичним вектором

$$\mathrm{e}_0 = (1,0).$$

Слично, случајна променљива $\mathrm{r}(\pi/2)$ представља величину пројекције скупа $\mathrm{B}[0,1]$ на праву генерисану јединичним вектором

$$\mathrm{e}_{\pi/2} = (0,1).$$

Наравно, случајне променљиве $\mathrm{r}(0)$ и $\mathrm{r}(\pi/2)$ су независне, са истом расподелом и као што смо раније наводили, важи

$$\mathbb{E}\mathrm{r}(0)^2 = \mathbb{E}\mathrm{r}(\pi/2)^2 = 4\log 2.$$

На основу претходне геометријске интерпретације, следи да постоји тачка $\mathbf{b}\in\mathbb{R}^2$, за коју важи

$$\mathrm{B}[0,1] \subset \mathbf{b} + [0,\mathrm{r}(0)]\times[0,\mathrm{r}(\pi/2)],$$

тј. скуп $\mathrm{B}[0,1]$ је садржан у неком правоугаонику

$$\mathrm{R}_{\mathbf{b}} = \mathbf{b} + [0,\mathrm{r}(0)]\times[0,\mathrm{r}(\pi/2)],$$

са страницама $\mathrm{r}(0)$ и $\mathrm{r}(\pi/2)$. Како је дијаметар правоугаоника једнак дужини његове дијагонале, то закључујемо

$$\mathrm{d} = \operatorname{diam}\mathrm{B}[0,1] \le \operatorname{diam}\mathrm{R}_{\mathbf{b}} = \sqrt{\mathrm{r}(0)^2 + \mathrm{r}(\pi/2)^2},$$

односно

$$\mathrm{d}^2 \le \mathrm{r}(0)^2 + \mathrm{r}(\pi/2)^2.$$

Преласком на математичко очекивање, добијамо

$$\mathbb{E}\mathrm{d}^2 \le \mathbb{E}\left(\mathrm{r}(0)^2 + \mathrm{r}(\pi/2)^2\right) = 8\log 2.$$

Коначно, на основу Јенсенове неједнакости, важи

$$(\mathbb{E}\mathrm{d})^2 \le \mathbb{E}\mathrm{d}^2 = 8\log 2,$$

одакле следи тражени закључак. □

4.5 Доње ограничење очекиваног дијаметра планарног Брауновог кретања

Као што је већ наведено у претходној секцији случајне променљиве $\mathrm{r}(\theta)$, где је $0 \leq \theta \leq \pi$, имају исту густину расподеле, која је дата са

$$\mathtt{f}(x) = \frac{8}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n^2 e^{-\frac{n^2 x^2}{2}},$$

за све $x > 0$. Поред тога, испоставља се да важи следеће тврђење.

Теорема 4.5.1 *Функција расподеле случајних променљивих* $\mathrm{r}(\theta)$, *где је* $0 \leq \theta \leq \pi$, *јесте*

$$\mathtt{F}(x) = 8 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(2n-1)^2 \pi^2} \right) \exp\left(-\frac{(2n-1)^2 \pi^2}{2x^2} \right),$$

где је $x > 0$.

Доказ. Важи

$$\mathtt{F}(x) = \mathbb{P}\{\mathrm{r}(\theta) \leq x\} = \int_0^x \mathtt{f}(t)\, \mathrm{d}t.$$

Нека је

$$\mathtt{L}(x) = 1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} e^{-2n^2 x^2}, \ \ x > 0.$$

Директно се проверава да тада важи

$$\mathtt{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2}{x} \mathtt{L}' \left(\frac{x}{2} \right), \ \ x > 0.$$

Применом Теореме 4.2.7 на генерализовану Јакобијеву функцију $\Theta\left(-\frac{1}{2}; \frac{2\mathrm{i}x^2}{\pi}\right)$ добијамо

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n e^{-2n^2 x^2} = \frac{\sqrt{2\pi}}{2x} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\frac{(2n-1)^2 \pi^2}{8x^2}}, \ \ x > 0,$$

или еквивалентно

$$1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} e^{-2n^2 x^2} = \frac{\sqrt{2\pi}}{x} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{(2n-1)^2 \pi^2}{8x^2}}, \ \ x > 0. \tag{4.5.1}$$

Наиме, важи

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n e^{-2n^2 x^2} = \sum_{n=-\infty}^{-1} (-1)^n e^{-2n^2 x^2} + 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-2n^2 x^2} = 1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} e^{-2n^2 x^2},$$

као и

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\frac{(2n-1)^2 \pi^2}{8x^2}} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{(2n-1)^2 \pi^2}{8x^2}} + \sum_{n=-\infty}^{0} e^{-\frac{(2n-1)^2 \pi^2}{8x^2}} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{(2n-1)^2 \pi^2}{8x^2}}.$$

На основу формуле (4.5.1) налазимо

$$\mathtt{L}(x) = \frac{\sqrt{2\pi}}{x} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{(2n-1)^2 \pi^2}{8x^2}}, \ \ x > 0,$$

одакле следи

$$\frac{\mathtt{L}(x)}{x^a} \to 0 \ \text{ када } \ x \to 0^+,$$

за све $a \in \mathbb{R}$. Користећи смену променљиве и парцијалну интеграцију, добијамо

$$\begin{aligned}
\int_0^x \mathtt{f}(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{2}{t}\mathtt{L}'\left(\frac{t}{2}\right)\mathrm{d}t \\
&= \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\frac{x}{2}} \frac{1}{t}\mathtt{L}'(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{2}{x}\mathtt{L}\left(\frac{x}{2}\right) + \int_0^{\frac{x}{2}} \frac{1}{t^2}\mathtt{L}(t)\,\mathrm{d}t\right) \\
&= \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{4\sqrt{2\pi}}{x^2}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{(2n-1)^2\pi^2}{2x^2}} + \sqrt{2\pi}\int_0^{\frac{x}{2}} \frac{1}{t^3}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{(2n-1)^2\pi^2}{8t^2}}\mathrm{d}t\right) \\
&= 2\left(\frac{4}{x^2}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{(2n-1)^2\pi^2}{2x^2}} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{(2n-1)^2\pi^2}\int_0^{\frac{x}{2}}\mathrm{d}\left(e^{-\frac{(2n-1)^2\pi^2}{8t^2}}\right)\right) \\
&= 8\left(\frac{1}{x^2}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{(2n-1)^2\pi^2}{2x^2}} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2\pi^2}\,e^{-\frac{(2n-1)^2\pi^2}{2x^2}}\right) \\
&= 8\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(2n-1)^2\pi^2}\right)e^{-\frac{(2n-1)^2\pi^2}{2x^2}}.
\end{aligned}$$

Тиме је доказ завршен. □

У наставку налазимо ново доње ограничење за очекивани дијаметар планарног Брауновог кретања, које је боље од оног добијеног у (4.3.4).

Теорема 4.5.2 *Важи* $\mathbb{E}\mathrm{d} \geq 1.856$.

Доказ. Независне случајне променљиве $\mathrm{r}(0)$ и $\mathrm{r}(\pi/2)$ имају исту функцију расподеле $\mathtt{F}$ као у Теореми 4.5.1. Како је тада функција расподеле случајне променљиве $\max\{\mathrm{r}(0), \mathrm{r}(\pi/2)\}$ једнака $\mathtt{F}^2$, можемо закључити

$$\mathbb{E}\mathrm{d} \geq \mathbb{E}\max\{\mathrm{r}(0), \mathrm{r}(\pi/2)\} = \int_0^{\infty}\left(1 - \mathtt{F}(x)^2\right)\mathrm{d}x \geq \int_0^6\left(1 - \mathtt{F}(x)^2\right)\mathrm{d}x.$$

Користећи програм *Mathematica* налазимо $\mathtt{F}(6) = 0.9999999921$ и како је $\mathtt{F}$ растућа функција, то добијамо добру апроксимацију преласком са интеграла по бесконачном интервалу, на одговарајући интеграл по коначном интервалу. Такође, користећи поново програм *Mathematica*, добијамо

$$\int_0^6\left(1 - \mathtt{F}(x)^2\right)\mathrm{d}x \approx 1.8562.$$

Коначно, следи $\mathbb{E}\mathrm{d} \geq 1.856$. □

Закључак

Након прве главе ове докторске дисертације, у којој су представљене основне ознаке, појмови и тврђења класичне вероватносне теорије која подразумева концепте попут вероватносних простора, случајних променљивих, случајних процеса и мартингала, наредне три главе доносе, између осталог, неке нове резултате.

Наиме, у другој глави је показано (видети Теорему 2.2.4) да ако је $X_1, \dots, X_n$ ненегативан мартингал, где је $X_1 = 1$, тада важи

$$\gamma(\mathbb{E}M) \leq \mathbb{E}(X_n \log X_n),$$

и

$$\gamma(\mathbb{E}N) \leq \mathbb{E}(X_n \log X_n),$$

при чему смо означили

$$M = \max_{1 \leq j \leq n} X_j \ \text{ и } \ N = \min_{1 \leq j \leq n} X_j,$$

и

$$\gamma(x) = x - 1 - \log x, \ \ x > 0.$$

Поред тога, може се показати (видети [19]) да је функција γ најбоља могућа у смислу да ако за неку функцију $g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ важи

$$g(\mathbb{E}M) \leq \mathbb{E}(X_n \log X_n),$$

и

$$g(\mathbb{E}N) \leq \mathbb{E}(X_n \log X_n),$$

за све ненегативне мартингале $X_1, \dots, X_n$, такве да је $X_1 = 1$, тада мора бити $g \leq \gamma$. Са друге стране, ако је $X_1, \dots, X_n$ ненегативан мартингал, $X_1 = 1$ и $1 < p < \infty$, тада важи (Теорема 2.3.2)

$$\delta_p \left(\|M\|_p^p \right) \leq \|X_n\|_p \,,$$

и

$$\delta_p \left(\|N\|_p^p \right) \leq \|X_n\|_p \,,$$

при чему је

$$\delta_p(x) = \left(1 - \frac{1}{p}\right) x^{\frac{1}{p}} + \frac{1}{p} x^{\frac{1}{p} - 1}, \ \ x > 0.$$

Интересантно би било одговорити на следеће питање, што свакако може бити један од праваца неког будућег истраживања: *да ли је δ_p оптимална функција за коју важе претходне неједнакости и ако није, која функција је оптимална?* Другим речима, ако је $1 < p < \infty$ и ако за неку функцију $g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ важи

$$g \left(\|M\|_p^p \right) \leq \|X_n\|_p \,,$$

и

$$g \left(\|N\|_p^p \right) \leq \|X_n\|_p \,,$$

за све ненегативне мартингале $X_1, \dots, X_n$, такве да је $X_1 = 1$, да ли тада мора бити $g \leq \delta_p$?

У трећој глави дисертације, дат је вероватносни доказ вишедимензионе тежинске Хардијеве неједнакости, на основу које се изводи и доказ одговарајуће вишедимензионе Карлемановe неједнакости. Обе неједнакости су дате у пуној општости и природно се намеће закључак да их је тешко проширити или генерализовати у наведеним оквирима. Међутим, постоји читав низ других, добро познатих, интегралних неједнакости, на које се можда може применити ненегативност релативне ентропије, односно Кулбак-Лајблерове дивергенције, или пак, нека друга техника из вероватносне теорије.

На крају, у четвртој глави су добијена ограничења очекиваног дијаметра планарног Брауновог кретања. Заправо, важи (видети Теорему 4.4.2 и Теорему 4.5.2)

$$1.856 \leq \mathbb{E}\mathrm{d} \leq 2.355,$$

где је са d означен дијаметар планарног Брауновог кретања. Природно, можемо поставити следеће питање: *шта је тачна вредност очекиваног дијаметра планарног Брауновог кретања, односно, колико је* $\mathbb{E}\mathrm{d}$*?* Одговор на ово питање није познат, иако разни нумерички прорачуни и симулације које користе програмске језике *Mathematica* и *Maple* указују да је очекивана вредност дијаметра планарног Брауновог кретања једнака 2, односно, да важи $\mathbb{E}\mathrm{d} = 2$ (видети и рад [38]). У оквиру неког будућег истраживања, могу се додатно побољшати постојећа ограничења очекиваног дијаметра планарног Брауновог кретања или евентуално, доказати или оповргнути хипотеза да је $\mathbb{E}\mathrm{d} = 2$.

Литература

[1] K. B. Athreya, S. N. Lahiri, *Measure Theory and Probability Theory*, Springer, New York, 2006.

[2] R. F. Bass, *Probabilistic Techniques in Analysis*, Springer, New York, 1995.

[3] R. F. Bass, *Stochastic Processes*, Cambridge University Press, Cambridge, 2011.

[4] R. Bhattacharya, E. C. Waymire, *A Basic Course in Probability Theory*, Springer, Switzerland, 2007.

[5] A. Bobrowski, *Functional Analysis for Probability and Stochastic Processes: An Introduction*, Cambridge University Press, Cambridge, 2005.

[6] V. G. Boltyanski, I. M. Yaglom, *Convex Figures*, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1961.

[7] A. Borodin, P. Salminen, *Handbook of Brownian Motion - Facts and Formulae*, Springer, Basel, 2002.

[8] A. A. Borovkov, *Probability Theory*, Springer, London, 2013.

[9] A. Cauchy, *Note sur divers theoremes relatifs a la rectification des courbes, et e la quadrature des surfaces*, Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 13 (1841) 1060–1065.

[10] Y. S. Chow, H. Teicher, *Probability Theory: Independence, Interchangeability, Martingales*, Springer, New York, 2012.

[11] J. L. Doob, *Stochastic Processes*, Wiley, New York, 1990.

[12] R. Durrett, *Probability: Theory and Examples*, Cambridge University Press, Cambridge, 2010.

[13] W. Feller, *The asymptotic distribution of the range of sums of independent random variables*, Ann. Math. Statist. 22 (1951) 427–432.

[14] J. F. Le Gall, *Brownian Motion, Martingales, and Stochastic Calculus*, Springer, Switzerland, 2016.

[15] D. Gilat, *The best bound in the* $L \log L$ *inequality of Hardy and Littlewood and its martingale counterpart*, Proc. Amer. Math. Soc. 97 (1986) 429–436.

[16] C. M. Grinstead, J. L. Snell, *Introduction to Probability*, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1997.

[17] A. O. Hagan, *Probability: Methods and measurement*, Springer, Netherlands, 2013.

[18] G.H. Hardy, J.E. Littlewood, G. Pólya, *Inequalities*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1959.

[19] P. Harremoës, *Some new maximal inequalities*, Statist. Probab. Lett. 78 (2008) 2776–2780.

[20] M. Jovalekić, *Some estimates related to the Doob's martingale inequalities*, Statist. Probab. Lett. 153 (2019), 124–129.

[21] M. Jovalekić, *A Probabilistic Proof of the Multidimensional Weighted Hardy Inequality*, C. R. Acad. Bulgare Sci. 73 (2020) 1483–1488.

[22] M. Jovalekić, *Lower bound for the diameter of planar Brownian motion*, Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie 64 (2021) 283–286.

[23] O. Kallenberg, *Foundations of Modern Probability*, Springer, New York, 2002.

[24] S. Karlin, H. Taylor, *First course in stochastic processes. Second edition*, Academic Press, New York (1975).

[25] A. F. Karr, *Probability*, Springer, New York, 2012.

[26] D. Khoshnevisan, *Probability*, Graduate Studies in Mathematics, Volume 80, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2007.

[27] A. Klenke, *Probability Theory: A Comprehensive Course*, Springer, London, 2008.

[28] L. Koralov, Y. G. Sinai, *Theory of Probability and Random Processes*, Springer, Berlin, 2012.

[29] A. Kufner, L. Maligranda, L. E. Persson, *The prehistory of the Hardy inequality*, Amer. Math. Monthly 113 (2006) 715—732.

[30] A. Kufner, L. Maligranda, L. E. Persson, *The Hardy inequality. About its history and some related results*, VS, Pilsen, 2007.

[31] H.H. Kuo, *Introduction to Stochastic Integration*, Springer, New York, 2006.

[32] E. G. Kwon, *On Carleson's inequality*, J. Inequal. Appl. 2018:91 (2018) 1–6.

[33] M. Ledoux, M. Talagrand, *Probability in Banach Spaces*, Springer, Berlin, 2011.

[34] G. Letac, *Advanced problem 6230*, Amer. Math. Monthly 85 (1978), 686.

[35] D. Li, H. Queffélec, *Introduction to Banach Spaces: Analysis and Probability*, Volume 1, Cambridge University Press, Cambridge, 2017.

[36] D. Li, H. Queffélec, *Introduction to Banach Spaces: Analysis and Probability*, Volume 2, Cambridge University Press, Cambridge, 2017.

[37] Z. Lin, Z. Bai, *Probability Inequalities*, Springer, Berlin 2010.

[38] J. McRedmond, C. Xu, *On the expected diameter of planar Brownian motion*, Statist. Probab. Lett. 130 (2017) 1–4.

[39] P. Mladenović, *Verovatnoća i statistika*, Matematički fakultet, Beograd, 2008.

[40] P. Mladenović, *Combinatorics. A Problem-Based Approach*, Springer, Switzerland, 2019.

[41] P. Mörters, Y. Peres, *Brownian Motion*, Cambridge University Press, Cambridge, 2010.

[42] A. Osekowski, *Sharp Martingale and Semimartingale Inequalities*, Monografie Matematyczne 72 (2012), Birkhäuser.

[43] P. E. Pfeiffe, *Probability for Applications*, Springer, New York, 1990.

[44] S. Resnick, *Adventures in Stochastic Processes*, Birkhäuser, Boston, 2005.

[45] S. Resnick, *A Probability Path*, Birkhäuser, Boston, 2013.

[46] L. A. Santalo, *Integral Geometry and Geometric Probability*, Addison-Wesley Publishing Company, Massachusetts, 1976.

[47] E. M. Stein, R. Shakarchi, *Fourier Analysis. An Introduction*, Princeton Lectures in Analysis, Princeton Univeristy Press, Princeton, 2003.

[48] D. Stirzaker, *Elementary Probability*, Cambridge University Press, Cambridge, 2003.

[49] D. W. Stroock, *Mathematics of Probability*, Graduate Studies in Mathematics, Volume 149, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2013.

[50] L. Takács, *Expected perimeter length*, Amer. Math. Monthly 87 (1980), 142.

[51] T. Tao, *An Introduction to Measure Theory*, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2011.

[52] J. C. Taylor, *An Introduction to Measure and Probability*, Springer, New York, 1997.

[53] H. Tijms, *Understanding Probability*, Cambridge University Press, Cambridge, 2007.

[54] S. R. S. Varadhan, *Probability Theory*, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2001.

[55] S. S. Venkatesh, *The Theory of Probability: Explorations and Applications*, Cambridge University Press, Cambridge, 2013.

[56] D. Williams, *Probability with Martingales*, Cambridge University Press, Cambridge, 1991.

Списак симбола

$\mathrm{B}(t)$	Брауново кретање
$(\mathrm{B}_1, \mathrm{B}_2)$	планарно Брауново кретање
$(\mathrm{B}_1, \dots, \mathrm{B}_n)$	n-димензионо Брауново кретање
$\mathcal{B}_\theta(t)$	случајна променљива $\mathrm{B}(t) \cdot \mathrm{e}_\theta$
$\mathcal{B}$	Борелова σ-алгебра на $\mathbb{R}$
$\mathcal{B}^n$	Борелова σ-алгебра на $\mathbb{R}^n$
$\mathbb{C}$	скуп комплексних бројева
$\mathcal{C}(S)$	конвексан омотач скупа $S \subset \mathbb{R}^2$
$\operatorname{diam} S$	дијаметар скупа $S \subset \mathbb{R}^2$
d	дијаметар планарног Брауновог кретања
$\mathcal{D}(Q_n)$	фамилија свих вероватносних густина на јединичној коцки Q_n
$\mathbb{E}X$	математичко очекивање случајне променљиве X
$\mathbb{E}(X \mid \mathcal{S})$	условно очекивање случајне променљиве X у односу на σ-алгебру $\mathcal{S}$
$\mathbb{E}(X \mid Y)$	условно очекивање случајне променљиве X у односу на променљиву Y
$\mathbb{E}(X \mid Y_1, \dots, Y_n)$	условно очекивање случајне променљиве X у односу на променљиве $Y_1, \dots, Y_n$
exp	експоненцијална функција
e_θ	јединични вектор $(\cos\theta, \sin\theta)$
F_X	функција расподеле случајне променљиве X
$\mathrm{F}_X(\cdot \mid A)$	условна функција расподеле случајне променљиве X при услову A
f_X	густина расподеле случајне променљиве X
$f_X(\cdot \mid A)$	условна густина расподеле случајне променљиве X при услову A
$\widehat{f}$	Фуријеова трансформација функције f
$\mathrm{F}_{\mathbf{X}}$	функција расподеле случајног вектора $\mathbf{X}$
$f_{\mathbf{X}}$	густина расподеле случајног вектора $\mathbf{X}$
$\mathtt{f}$	густина расподеле случајне променљиве $\mathrm{r}(\theta)$
$\mathtt{F}$	функција расподеле случајне променљиве $\mathrm{r}(\theta)$
$\{\mathcal{F}_t : t \in T\}$	филтрација σ-алгебре $\mathcal{F}$, где је $T \subset \mathbb{R}$ параметарски скуп
$\mathbf{H}_{\boldsymbol{n}}$	вишедимензиони Хардијев интегрални оператор
$\mathtt{H}$	конвексан омотач планарног Брауновог кретања
i	имагинарна јединица
$\operatorname{Im} z$	имагинаран део комплексног броја z
$\mathcal{K}(S)$	скуп свих конвексних комбинација елемената скупа $S \subset \mathbb{R}^2$
$\mathcal{KL}(\varphi \parallel \rho)$	релативна ентропија или Кулбак-Лајблерова дивергенција

ℓ	периметар конвексног омотача $\mathtt{H}$ планарног Брауновог кретања
M	максимум случајних променљивих $X_1, \dots, X_n$ које формирају мартингал
$\mathrm{M}(t)$	величина $\max\limits_{0\le s\le t} \mathrm{B}(s)$, где је $\mathrm{B}(t)$ Брауново кретање
$\mathcal{M}_\theta(t)$	случајна променљива $\max\limits_{0\le s\le t} \mathcal{B}_\theta(s)$
N	минимум случајних променљивих $X_1, \dots, X_n$ које формирају мартингал
$\mathbb{N}$	скуп природних бројева $\{1, 2, \dots\}$
$\mathbb{N}_0$	скуп $\mathbb{N} \cup \{0\}$
$\mathrm{N}\left(m, \sigma^2\right)$	нормална расподела са параметрима m и σ^2
$\mathrm{N}(0,1)$	стандардна нормална расподела
$\mathrm{N}(0,t)$	нормална расподела случајне променљиве $\mathrm{B}(t)$, при чему је случајан процес $\{\mathrm{B}(t) : t \ge 0\}$ Брауново кретање
$\mathbb{P}$	вероватносна мера
$\mathbb{P}(B \mid A)$	условна вероватноћа догађаја B при услову A
$\mathbb{P}(A \mid X = x)$	условна вероватноћа догађаја при услову $X = x$, где је X случајна променљива
Q_n	јединична коцка $(0,1)^n$
$\mathbb{R}$	скуп реалних бројева
$\mathbb{R}^n$	n-димензиони реалан простор
$\mathbb{R}^n_+$	скуп $(0, \infty)^n$
$\operatorname{Re} z$	реалан део комплексног броја z
$\mathrm{r}_S(\theta)$	$\sup\limits_{x\in S}(x \cdot \mathrm{e}_\theta) - \inf\limits_{x\in S}(x \cdot \mathrm{e}_\theta)$ где је $0 \le \theta \le \pi$ и $S \subset \mathbb{R}^2$
$\mathrm{r}(\theta)$	$\mathrm{r}(\theta) = \mathrm{r}_{\mathrm{B}[0,1]}(\theta)$
$\mathcal{S}(\mathbb{R})$	Шварцова класа функција на реалној правој
$\mathcal{T}$	тривијална σ-алгебра
$\mathbf{t}$	тачка $(t_1, \dots, t_n)$ у простору $\mathbb{R}^n$
Var	варијанса
X	случајна променљива
$\\|X\\|_p$	L^p норма случајне променљиве X
$\{X_t : t \in T\}$	случајан процес, где је $T \subset \mathbb{R}$ параметарски скуп
$\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$	случајан процес са дискретним временом
$\mathbf{X}$	случајан вектор $(X_1, \dots, X_n)$
$\mathbf{x}$	тачка $(x_1, \dots, x_n)$ у простору $\mathbb{R}^n$
$\mathbb{Z}$	скуп целих бројева
$t \mapsto X_t(\omega)$	трајекторија случајног процеса $\{X_t : t \in T\}$
$\mathbb{1}_{\mathrm{A}}$	индикатор догађаја А
$\\|x - y\\|$	растојање између $x, y \in \mathbb{R}^2$
$x \cdot y$	скларан производ за $x, y \in \mathbb{R}^2$
$\gamma(x)$	функција $x \mapsto x - 1 - \log x$
$\delta_p(x)$	функција $x \mapsto \left(1 - \frac{1}{p}\right) x^{\frac{1}{p}} + \frac{1}{p} x^{\frac{1}{p}-1}$
$\theta(x)$	функција $x \mapsto \frac{e-1}{e} x - 1$
$\vartheta(x)$	Јакобијева функција

$\Theta(z;\tau)$	генерализована Јакобијева функција
$\kappa(x)$	функција $x \mapsto x\log x$
$\xi(a)$	функција $a \mapsto ae^{-\frac{a^2}{2}} - \left(a^2+1\right)\int_a^\infty e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x$
ρ	вероватносна густина
τ_a	време првог пролаза Брауновог кретања кроз тачку a
$(\Omega,\mathcal{F},\mu)$	мерљив простор
$(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$	вероватносни простор

Биографија аутора

Милица Јовалекић је рођена 21.02.1990. у Београду, где је завршила Основну школу "Борислав Пекић" и Математичку гимназију. Основне студије Математичког факултета, Универзитета у Београду, уписала је 2009. године на смеру Теоријска математика и примене и завршила 2013. године са просечном оценом 9.11. Мастер студије је завршила 2014. године са просечном оценом 10.00. Докторске студије Математичког факултета, Универзитета у Београду уписала је 2015. године на Катедри за Вероватноћу и статистику. Током студија, била је стипендиста Фонда за младе таленте града Београда. Од 2015. године је запослена на Електротехничком факултету, Универзитета у Београду, на Катедри за примењену математику.

Списак објављених радова (часописи са SCI листе).

• M. Jovalekić, *Some estimates related to the Doob's martingale inequalities*, Statist. Probab. Lett. **153** (2019), 124–129.

• M. Jovalekić, *A Probabilistic Proof of the Multidimensional Weighted Hardy Inequality*, C. R. Acad. Bulgare Sci. **73** (2020), 1483–1488.

• M. Jovalekić, *Lower bound for the diameter of planar Brownian motion*, Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie **64** (2021), 283–286.

Прилог 1.

Изјава о ауторству

Потписани-а Милица Јовалекић

број уписа 2003/2015

Изјављујем

да је докторска дисертација под насловом

Екстремални проблеми Брауновог кретања и других случајних процеса

- резултат сопственог истраживачког рада,
- да предложена дисертација у целини ни у деловима није била предложена за добијање било које дипломе према студијским програмима других високошколских установа,
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио/ла ауторска права и користио интелектуалну својину других лица.

Потпис докторанда

У Београду, __________________

Прилог 2.

Изјава о истоветности штампане и електронске верзије докторског рада

Име и презиме аутора ___Милица Јовалекић______________________________

Број уписа ___2003/2015____

Студијски програм ___Математика______________________________________

Наслов рада __Екстремални проблеми Брауновог кретања и других случајних процеса

Ментор ___проф. др Павле Младеновић_________________________________

Потписани ___Милица Јовалекић_____________________________________

изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предао/ла за објављивање на порталу **Дигиталног репозиторијума Универзитета у Београду.**

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Београду.

Потпис докторанда

У Београду, ________________________

____

Прилог 3.

Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом:

Екстремални проблеми Брауновог кретања и других случајних процеса

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство

2. Ауторство - некомерцијално

3. Ауторство – некомерцијално – без прераде

4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима

5. Ауторство – без прераде

6. Ауторство – делити под истим условима

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци, кратак опис лиценци дат је на полеђини листа).

Потпис докторанда

У Београду, ________________________

____

1. Ауторство - Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце, чак и у комерцијалне сврхе. Ово је најслободнија од свих лиценци.

2. Ауторство – некомерцијално. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела.

3. Ауторство - некомерцијално – без прераде. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела. У односу на све остале лиценце, овом лиценцом се ограничава највећи обим права коришћења дела.

4. Ауторство - некомерцијално – делити под истим условима. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада.

5. Ауторство – без прераде. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела.

6. Ауторство - делити под истим условима. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада. Слична је софтверским лиценцама, односно лиценцама отвореног кода.