УЧЕЊЕ И ПОУЧАВАЊЕ МАТЕМАТИКЕ – ЈЕДНАКОСТ СА ВИШЕ (НЕ)ПОЗНАТИХ

ЕДИЦИЈА
СТУДИЈЕ

књига 12.

Едиција је основана 2009. године са циљем да објављује студије и друге научне и стручне радове наставника и сарадника Учитељског факултета у Београду.

Штампање монографије помогло је Министарство просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије.

Маријана Зељић

УЧЕЊЕ И ПОУЧАВАЊЕ МАТЕМАТИКЕ – ЈЕДНАКОСТ СА ВИШЕ (НЕ)ПОЗНАТИХ

Учитељски факултет
Универзитет у Београду
Београд, 2021.

Рецензенти

Проф. др Мирко Дејић, редовни професор, Универзитет у Београду

Проф. др Сања Маричић, редовни професор, Универзитет у Крагујевцу, Педагошки факултет

Проф. др Миодраг Рашковић, научни саветник, Математички институт САНУ

Проф. др Оливера Ђокић, ванредни професор, Универзитет у Београду, Учитељски факултет

Садржај

Уводна разматрања

Од почетка двадесетог века испољавају се тенденције усмерене ка реформи наставе математике у средњим, а затим у основним школама. На IV интернационалном конгресу математичара (ICM) одржаном у Риму 1908. године образована је интернационална комисија (енгл. *The International Commission on Mathematical Instruction* – ICMI) са циљем да направи упоредну студију програма и метода математичког образовања у средњој школи. Немачки математичар Ф. Клајн (F. Klein) постао је њен први председник. С временом, комплексност проучавања математичког образовања је расла и водила до потребе за мултидисциплинарним проучавањем. Зато је 1969. године тадашњи председник ICMI-а Х. Фројдентал (H. Freudenthal) организовао први интернационални конгрес математичког образовања (*ICME*) у Лиону. Поступак учења математике почео је дубље да се проучава 60-их година прошлог века. У многим крајевима света развили су се нови пројекти и јавиле нове теме под именом „Нова математика". У то време, нове теме, попут „Теорија скупова" и Математичка логика", биле су мора и за ученике и предаваче. Фројдентал је захтевао да те нове садржаје прати и нова дидактичка разрада која би довела до праве дидактичке трансформације тих тема. Р. Том је на конгресу посвећеном настави математике, у Ексетеру 1972. године, говорио против прераних генерализација и одвајања апстракција од конкретних садржаја. Од тада нагло расте интересовање за когнитивне процесе у настави.

У многим земљама света свака нова деценија најављивала је школске реформе које су донеле и нове приступе настави математике. Ипак, чини се да су бројне реформе наставе имале мали ефекат на мотивацију и задовољство ученика при учењу математике. Зашто је то тако? Да ли је то због тога што образовну промену често покреће политичка агенда која нема времена за учење из претходних реформи? Да ли је то због тога што се недовољно разумеју процеси претварања истраживања из области образовања у праксу?

Креатори политике образовања захтевају да у сваком образовном систему постоји квалификовани наставник; истраживачи испитују природу и захтеве ефикасне наставе; родитељи очекују да им децу уче компетентни, брижни и посвећени наставници. Истраживања показују да, када деца једном уђу у школе, наставници имају већи утицај на академски развој ученика од било ког другог фактора. Међутим, у истраживањима се такође истиче да се наставници изузетно разликују у својој способности да подстакну академски развој ученика.

Може се водити расправа о томе који је математички садржај најважнији за поучавање, при чему је суштински важно правилно структурирање садржаја. Реформе које се заснивају на увођењу нових тема и садржаја, као и „померању” садржаја из разреда у разред, неће много утицати и на суштинске карактеристике и квалитет наставе. Међутим, међу истраживачима постоји консензус да шта год ученици уче, то треба да раде са разумевањем. Разумевање је пресудно, јер се појмови научени са разумевањем могу флексибилно користити, прилагодити новим ситуацијама и бити добра основа за даље учење. Већина наставника би рекла да жели да њихови ученици разумеју математику и да заправо они предају на тај начин да развијају разумевање ученика. Међутим, питање је да ли сви актери у образовању имају јасну и једнозначну представу о томе шта значи учити математику са разумевањем, а још је упитније да ли сви имају јасну идеју о томе како организовати наставу која је усмерена на развијање разумевања. Разматрајући суштинске карактеристике наставе математике које подржавају математичко разумевање ученика, у овој монографији пружамо оквир унутар којег наставници могу да размишљају о сопственој пракси и поново размисле шта значи подучавати за разумевање. Нашу идеју развијамо кроз следећа поглавља: Природа математичког знања ученика; Алгоритамски и неалгоритамски (креативни) приступ у настави математике; Значај и улога репрезентација у настави математике; Комуникација на часу математике; Стратегије решавања текстуалних задатака; Карактеристике ефикасне наставе математике.

У монографији су на критички начин разматрана бројна истраживања, њихови резултати и импликације и понуђене могућности њихове примене у теорији и пракси учења и наставе математике. При томе се за ову монографију не може рећи да представља зборник одабраних радова или нешто слично. Она је резултат труда аутора да се на садржаје поменутих књига и радова критички осврне, обједини их и систематизује. Проблем осмишљавања и развијања квалитетне наставе математике је комплексан и сложен. Ова монографија није писана са намером да пружи коначне одговоре на сва питања почетне наставе.

Монографија је намењена пре свега студентима учитељских и педагошких факултета, наставницима и истраживачима из области математичког образовања. Иако се ослањамо на своја непосредна истраживања са наставницима и ученицима основних школа и на одабраним темама математике представљамо примере из истраживања, постоје општи принципи који би могли бити примењени на друге узрасне групе и друге математичке теме. Наше примере и дискусије обликовали смо тако да читалац може да их користи у пракси при обради различитих математичких тема као и за истраживање и унапређење сопствене праксе. Разматране теме, дискусије и закључци нису коначни, већ могу послужити као подстицај за даља истраживања.

Аутор

1. Природа математичког знања ученика

Учење математике је интересантан процес, пун уживања, иако ће многима бити тешко да поверују у то.

Р. Скемп

Како се може објаснити то што неки ученици показују да су способни да примене знање у новим ситуацијама, док други, иако „знају” алгоритме, нису способни да реконтекстуализују своје знање? Шта присиљава многе ученике да прибегну меморисању математичких правила и дефиниција? Да ли је садржај математике узрок проблема или начин на који је наставници предају чини да ученици не разумеју предмет?

Често се може чути захтев да ученици треба да уче математику са разумевањем. Може се поставити питање да ли сви учесници у наставном процесу, родитељи, истраживачи и др., на исти начин сагледавају овај захтев. Први модел изграђивања разумевања, директно повезан са учењем математике, приписује се британском психологу и математичару Ричарду Скемпу (Skemp, 1976), који је предложио два јасно одвојена типа разумевања – *инструментално* и *релационо разумевање*. Инструментално разумевање односи се на коришћење меморисаних правила („правила без резона”), док је релационо разумевање описано као „знати и шта треба да се уради и зашто”. Под инструменталним разумевањем подразумева се знање правила и чињеница и њихова проста примена. Инструментално разумевање подразумева манипулацију математичким симболима у циљу решавања математичког проблема, али су ти симболи одвојени од појмова које репрезентују. Релационо разумевање настаје када ученик уме вешто да барата појмовима користећи њихова својства и међусобне релације и састоји се у грађењу појмовне структуре – схеме. Инструментално схваћена математика често може резултирати тачним одговорима на тесту са једноставним задацима. Али релационо схваћена математика доприноси бржем адаптирању на нове задатке. Разлику између два типа разумевања Скемп објашњава и на нематематичком примеру:

Ако је нека особа први пут у неком граду, она може брзо научити неколико појединачних праваца (од места А до места В, од места В до места С). Особа са сетом фиксираних планова може наћи свој пут од одређене групе стартних тачака до одређене групе циљних тачака. Карактеристика једног плана јесте да каже особи шта да ради у свакој одређеној тачки (скрени лево код цркве, па десно код поште итд.). Особа зависи од спољашњег вођства за проналажење начина да стигне до циља. Ако у било којој етапи направи грешку, биће изгубљена уколико није у стању да реконструише своје кретање и врати се на праву стазу. Насупрот томе, особа која је у свести створила менталну мапу града, може направити много планова уз помоћ којих ће усмеравати своје кретање од било које тачке до било које тачке. Ако и направи погрешан корак, она ће знати где је, па ће бити у стању да исправи своју грешку не губећи се, чак ће и научити нешто из тога.

Постоји аналогија између овог примера и учења математике. Учење које води ка инструменталном разумевању састоји се од учења већег броја правила уз помоћ којих ученик решава конкретни задатак. За сваки нови проблем потребно је научити ново правило. Што се тиче односа инструменталног и релационог разумевања, постоји парадокс: релационо учење је теже, али се лакше памти. Скемп каже да се правила за решавање једне просте једначине могу брже запамтити него што је потребно времена за разумевање поступка решавања. Ученик ће брже научити да је површина троугла $P = \dfrac{a \cdot h}{2}$ него зашто је то тако. Али, не заборавимо, ученици ће касније учити и површину трапеза, паралелограма итд. Релационо учење подразумева сагледавање површине трапеза и паралелограма у зависности од површине троугла. И даље је потребно знати одвојена правила, али знање о томе како су она повезана омогућује да се памте као делови повезани у целину, што је лакше.

Ричард Скемп (Skemp, 1989) издваја два принципа која важе при учењу математичких појмова:

1) Појмови вишег степена апстрактности од оних које нека особа већ има не могу јој се пренети путем дефиниције, већ само путем предочавања одабране колекције примера.
2) Пошто су у математици примери по правилу опет појмови, мора се претпоставити да су већ формирани у уму особе која учи.

Први од ових принципа нарушен је у великом броју књига. Чест је случај да се нови појмови не представљају примерима већ дефиницијама, које су најпрецизније за предаваче (који већ имају развијен појам на који се оне односе), али су неразумљиве ученицима.

Добра вежба за студенте и наставнике може бити да упореде своје разумевање значења следеће две дефиниције:

Дефиниција 1 преузета је из универзитетског уџбеника (Lučić, 1997):

Теорема: Релација са исте стране угаоне линије pq је релација еквиваленције која скуп свих тачака равни π у којој су p и q, ван < pq, разлаже на две класе еквиваленције.

...

Сваку класу еквиваленције са исте стране угаоне линије pq називамо отвореним углом pq који обележавамо са <(pq). Унију отвореног угла pq и угаоне линије pq називамо затвореним углом, и обележавамо са < [pq].

Дефиниција 2 узета је из уџбеника за пети разред основне шклоле (Adnađević et al., 1998):

Линија која представља унију двеју полуправих Op и Oq је угаона линија pOq. Тачка O је теме те угаоне линије. Праве Op и Oq су краци те угаоне линије.

...

Угао је унија угаоне линије и скупа свих тачака у равни које су са исте стране те угаоне линије.

Морамо имати на уму да свака дефиниција захтева знање одређених појмова који су укључени у дефинисање и одређење новог појма. Уколико читаоца, бар донекле, прва дефиниција угла учини несигурним у своје знање и разумевање појма, то ће бити корисно искуство, јер ће упознати доживљај који имају ученици када се сусретну са упознавањем основних математичких појмова кроз дефиниције у готовом облику.

Други од два Скемпова принципа каже да се појам „нижег реда" мора представити пре него што је могућ следећи корак апстракције. То значи да пре него што објаснимо нови појам, морамо открити који појмови воде до њега; и за сваки од њих морамо открити појмове који су до њих довели, и стално тако, све док не пронађемо примарни појам или искуство на које се можемо ослонити. Када је то урађено, може се направити одговарајући план који ће бити представљен ученику као могући задатак/проблем. Ако се добро не разуме неки од нивоа при изграђивању структуре сукцесивних апстракција, одатле је тешко наставити са даљим учењем. Чак и они који добро почну, могу изостајањем, непажњом, неразумевањем неких лекција или из других разлога, не успети да разумеју одређене појмове. У том случају, све наредне појмове који зависе од њих вероватно никад неће разумети. Сваки појам (осим примарних појмова) настаје апстраховањем односа других појмова и доприноси формирању наредних, тако да чине појмовну схему (мрежу појмова). Један од главних узрока потешкоћа у учењу математике је што се настава математике често своди на велики број изолованих, неразумљивих чињеница и поступака које треба запамтити и применити на писменим тестовима (Hiebert, 2003). Пружање могућности за учење значи више од пуког примања информације. То претпоставља креирање услова за учење при чему се узимају у обзир почетна знања ученика, природа и сврха задатака и активности, врста потребног ангажовања и слично (Ibid.).

Добри наставници интуитивно допуњују дефиниције примерима. Међутим, изабрати одговарајућу колекцију примера теже је него што изгледа. Примери морају имати особине које формирају појам, а никако друге особине. Другачије речено, морају да личе толико да би се апстраховали, а с друге стране да се разликују довољно да би могле да се одбаце особине које не одговарају том концепту. Састављање одговарајуће колекције захтева и инвентивност и врло јасну свесност о концепту о коме треба да се говори. Могуће је имати и користити појам на интуитивном нивоу а да нисмо тога ни свесни. То се посебно односи на неке од најосновнијих и најчешће коришћених идеја, делом због тога што се најосновније математичке идеје стичу у раним годинама, када немамо способност да их анализирамо, а делом и зато што су неке од најосновнијих идеја најкомпликованије.

Скемп говори о „ситуацијама учења", које резултирају формирањем математичких појмова и грађењем математичких схема (система појмова), а које треба да задовоље следеће захтеве (Skemp, 1989):

1) Примери треба да буду такви да садрже најмању могућу количину ирелевантних информација које треба игнорисати при формирању појма (тј. мало шума);
2) Треба да постоји одређени број примера блиских у времену;
3) У једној временској јединици треба уводити само један нови појам;
4) Ученици треба да имају већ развијене примарне схеме, тако да могу прикључити нов појам одговарајућој схеми и на тај начин учити са разумевањем.

Дакле, релационо разумевање подразумева стварање веза између појмова, а те везе су у литератури различито дефинисане и можемо их категорисати у три групе (Mousley, 2004):

1) Везе између нових информација и постојећег знања;
2) Везе између различитих математичких тема;
3) Везе између математичког знања и свакодневног искуства.

Значај схематског учења наглашава и Сфард, која разликује два типа когнитивних схема (Sfard, 1991):

1) Неструктурирано сенквенциране когнитивне схеме, које нису адекватне за изградњу смисленог разумевања. Оне су хоризонталне и пуне неповезаних информација.
2) Структуриране когнитивне схеме, које су вертикално конструисане, тј. које представљају хијерархијски повезана знања.

Сфард је категорисала меморисање као неструктуриране, сенквециране когнитивне схеме које нису адекватне за изградњу смисленог разумевања. Оне су хоризонталне и пуне неповезаних информација. Ауторка наглашава да меморисани делови „морају бити процесуирани". Ученик треба да развија структуриране когнитивне схеме које садрже дубље и јаче повезано и хијерархијски устројено знање. Ученик не памти схеме на исти начин како памти формуле и дефиниције. Памтити се може и без разумевања шта меморисани делови значе. Девлин (Develin, 2001) разумевање (и учење) математке сликовито упоређује са кретањем по кући. Наиме, када уђемо у непознату кућу, ако прошетамо по њој, прегледамо собе, брзо ћемо је упознати. Међутим, ако не можемо да уђемо у кућу, већ је упознајемо кроз упутства и планове који су писани стручним језиком, нећемо моћи да формирамо адекватну менталну слику куће. Када уђете у кућу, нису вам потребне посебне способности да је истражите. То не значи да је за математичаре цела математика лака. Ако је кућа велика, са много спратова, са слабим осветљењем, биће потребан већи напор.

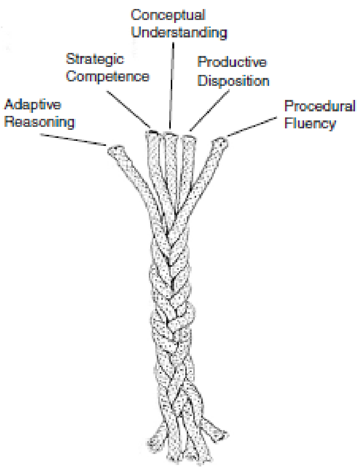
1.1. *Врсте знања у школској математици*

У савременој литератури, поред Скемпове теорије и појмова *инструментално* и *релационо разумевање*, најчешће се користе појмови *процедурално* и *концептуално знање*. Аутори на различите начине сагледавају однос процедуралног и концептуалног знања у настави математике. Термин *процедурално знање* неки аутори употребљавају са негативном конотацијом, тј. схватају га као „знање научено напамет" (нпр. Brown et al., 2002; Baroody, 2003; Star, 2005). Стар (Star, 2005: 408) наглашава да понекад термин *процедурално знање* означава „не само оно што се зна (знање процедура), већ и начин на који се знају алгоритми (површно и неповезано)". Један број аутора наглашава дистинкцију између процедуралног и концептуалног знања (Brown et al., 2002) износећи став да поступци у настави усмерени на развијање процедуралног знања подразумевају давање готових дефиниција, симбола и процедура без претходног осмишљавања „дубљег" значења за појмове који су укључени. Насупрот томе, поступци усмерени на развијање концептуалног знања подразумевају проблемску ситуацију која захтева резоновање ученика и повезивање нових појмова са претходним знањем. Концептуално знање подразумева разумевање математичких принципа и сматра се производом процеса кроз које се садашње знање повезује са претходним знањем. Процес учења математичког садржаја треба да се заснива на интеграцији процедуралног и концептуалног знања, односно на уопштавању процедуралних поступака које води формирању система знања у коме су знања хијерархијски организована и повезана (Baroody et al., 2007; Schneider & Stern, 2009). Истраживање Пеледа и Сигејлиса (Peled & Segalis, 2005) показало је да је приступ у коме се ученици подстичу да генерализују процедуралне кораке (да повежу процедуре одузимања у различитим бројевним системима – N, Z, Q) довео до квалитетнијег концептуалног знања у односу на приступ заснован на учењу правила појединачних поступака у појединачним системима.

Нешто ширу класификацију математичког знања наводе Килпатрик и сарадници (Kilpatrick et al., 2001), а која омогућава праћење когнитивних промена које се дешавају да би ученици били успешни у учењу математике. Аутори су предложили пет „испреплетених нити" математичког умећа (способности):

1) Концептуално разумевање – разумевање математичких појмова, операција и веза;
2) Процедурална флуентност – вештина да се процедуре изведу флексибилно, тачно, ефикасно и одговарајуће;
3) Стратегијска способност – способност да се математички проблеми формулишу, представе (репрезентују) и реше;
4) Адаптивно (прилагодљиво) расуђивање – могућност (капацитет) за логичко размишљање, рефлексију, објашњавање и оправдање;
5) Продуктивна диспозиција – постојање сталне склоности да се математика види као разумна, корисна, вредна, заједно са веровањем у рад (марљивост) и сопствену успешност.

Према Килпатрику и сарадницима, наведене компоненте нису одвојене или независне, већ „представљају различите аспекте комплексне целине". Њихов однос представљен је на слици (Слика 1).



Слика 1: Компоненте математичких способности (умећа) (Kilpatrick et al., 2001: 5)

Наведене компоненте су испреплетане и међусобно зависне и као такве заједно учествују у степену математичке успешности.

Концептуално разумевање аутори дефинишу као „интегрисано и функционално схватање математичких идеја” (Kilpatrick et al., 2001: 118). Ученици са концептуалним разумевањем знају више од изолованих чињеница и поступака. Они разумеју зашто је математичка идеја важна и препознају врсту контекста у којем је одређена идеја примењива и корисна. Концептуално знање чини кохерентну целину, што ученицима омогућава да уче нове идеје повезујући те идеје са оним што већ знају. Иако наставници често траже доказе о концептуалном разумевању, млађи ученици немају способност да вербализују везе између појмова и репрезентација. Концептуално схватање не мора бити експлицитно. Ученици често разумеју идеје, али не могу вербализовати то разумевање. На пример, они могу видети да је 6 + 7 исто као и (6 + 6) + 1. Овакви поступци и примена знања у новом контексту показатељи су концептуалног знања.

Процедурална флуентност односи се на вештине у провођењу процедура: флексибилно, тачно, ефикасно и на одговарајући начин. Процедурална флуентност се дефинише као познавање више стратегија и могућност одабира одговарајуће стратегије за задати проблем и околности решавања проблема. Ученици морају бити ефикасни у извођењу основних рачунских операција (нпр. 6 + 7; 17 – 9; 8 · 4), без потребе да се увек морају користити помоћна средства. Такође, процедурална флуентност подразумева способност избора најпогоднијег начина рачунања и анализе сличности и разлике између метода израчунавања. Процедурална флуентност и концептуално разумевање често се посматрају одвојено у контексту школске математике. Али „вештине насупрот разумевања” стварају лажну дихотомију. Разумевање чини учење вештине лакшим, смањује број грешака и убрзава учење. На пример, ученицима са ограниченим разумевањем сабирања обично је потребан папир и оловка за рачунање збира бројева 598 и 647. Ученици са више разумевања препознали би да је број 598 за 2 мањи од броја 600, тако да могу сабрати бројеве 600 и 647, а затим одузети број 2 од тог збира. Процедурална флуентност је знање и употреба правила и поступака који се користе у извођењу математичких поступака и симбола који служе за представљање математичких односа. Разумевање чини лакшим учење алгоритама и одређених поступака, мање подложним уобичајеним грешкама. Са друге стране, известан ниво вештине је потребан да би се са разумевањем научили многи математички појмови, а коришћење процедура може помоћи у јачању и развоју тог разумевања. Међутим, ако ученици науче да примењују неке поступке и алгоритме без разумевања, може бити тешко натерати их да се укључе у неке активности како бисмо им помогли да разумеју основе поступака. У експерименталној студији, ученици петог разреда који су први пут добили инструкције о поступцима за израчунавање површине и обима праћене инструкцијама о разумевању тих поступака нису имали слабија постигнућа од ученика који су имали инструкције усмерене на разумевање основе поступака (Pesek & Kirshner, 2000).

Стратешка способност се првенствено односи на решавање проблема. У школи, ученицима се често дају јасно формулисани проблеми које треба решити, док се ван школе сусрећу са ситуацијама у којима прво треба да открију проблем и формулишу га како би га решили. Искуство и вежба у формулисању проблема, као и у њиховом решавању изузетно су важне способности. Ученици треба да познају различите стратегије као и да уоче које стратегије могу бити корисне за решавање одређеног проблема. Формулисање и представљање проблема захтева да ученик створи менталну слику о проблему и његовим елементима, везама и најважнијим карактеристикама. Тек тада ће моћи да генерише репрезентације које на добар начин представљају односе и суштину проблема. Важно је да се ученик упозна са читавим спектром рутинских и нерутинских проблема. Рутински проблеми захтевају репродукцију, а нерутински продуктивно размишљање зато што је потребно и осмислити начин „посматрања” проблема и стратегију решавања.

Адаптивно расуђивање односи се на способност логичког мишљења, рефлексије, аргументације и доказивања. Такво резоновање потиче из пажљивог разматрања алтернативних стратегија и укључује знање о томе како оправдати закључке. У математици се дедуктивно резоновање користи за утврђивање тачности тврђења (уз коришћење теорема и аксиома). Адаптивно резоновање је много шире и укључује не само неформална објашњења и оправдања, већ и интуитивно и индуктивно закључивање засновано на правилности, аналогији и метафорама. Једна манифестација адаптивног расуђивања јесте способност ученика да објасни (оправда) своје методе рачунања, решавања проблема и сл. Ученици могу почети да образлажу своје математичке идеје у првим разредима основне школе. Аутори сугеришу да у учионицама треба успоставити норме у којима се од ученика очекује да оправдају своје математичке поступке и објасне их другима. Адаптивно резоновање уско је повезано са метакогницијом и представља сазнање о сопственом размишљању и способност праћења сопственог разумевања и активности на решавању проблема. Такве активности развијају математичко мишљење и концептуално разумевање. Адаптивно расуђивање подразумева самосталну контролу поступака решавања проблема, као и генерисање алтернативних поступака уколико је изабрани поступак неефикасан (Зашто си применио/ла ту операцију? Да ли би неки други поступак био бољи?...).

Продуктивна диспозиција је склоност да се математика види као разумна и корисна, заједно са вером у сопствену способност и ефикасност. Ако ученици развију концептуално разумевање, процедуралну флуентност, стратешке компетенције и способност адаптивног расуђивања, они морају веровати да је математика разумљива, да се сопственим трудом може научити, да су способни да се баве математиком. На пример, како ученици развијају стратешку компетенцију у решавању нерутинских проблема, њихови ставови према математици постају позитивнији. У супротном, када се ученицима ретко дају изазовни математички задаци за решавање, они очекују да памћење и меморисање, а не стварање смисла и значења за појмове и поступке, представља пут учења математике и почињу да губе поверење у себе. Када ученици себе виде као способне за учење математике и користе своје знање за решавање проблема, постају способни да даље развијају своју процедуралну флуентност или своје способности адаптивног закључивања. Самопоуздање и уверење у сопствене способности приликом решавања задатака показали су се као важан фактор успеха у математици.

Раније теорије посматрале су процедурално знање као учење напамет процедура и алгоритама, без разумевања, а концептуално знање као богато повезано и интегрисано. Ипак, знање процедура и правила не мора подразумевати само учење напамет, а концептуално знање (као и процедурално) развија се током времена. Резултати савремених истраживања указују на потребу да се повежу и истовремено развијају процедурално и концептуално знање. У експерименталној студији (Pesek & Kirshner, 2000) радили су са две групе ученика: прва група је радила по приступу који развија процедурално знање пре концептуалног (алгоритми без објашњења зашто се нешто ради), док је приступ у другој групи био усмерен на развој концептуалног разумевања (заједно са процедуралним). Резултати су показали да је „концептуална" група била успешнија и на задацима којима се испитује процедурално и на задацима којима се испитује концептуално разумевање. Закључак већег броја аутора (Brown et al., 2002; Baroody, 2003; Peled & Segalis, 2005; Star, 2005; Gilmore & Bryant, 2006; Baroody et al., 2007; Schneider & Stern, 2009) јесте да су најбоље наставне стратегије оне у којима се процедуралним активностима подстиче уочавање и уопштавање основних појмова.

Процедурални вид изражавања први је и најважнији у почетној настави математике. Процедурално знање представља знање о специфичним алгоритамским поступцима и њиховом коришћењу, тј. представља знање како се решава одређени математички проблем или како се изводи одређени математички поступак. Тако схваћен, овај вид изражавања асоцира на примену очигледних и једноставних алгоритама који су водиље без икакве представе о смислу активности. Наше истраживање, усмерено на испитивање карактера знања о аритметичким правилима и њиховој примени (Ilić & Zeljić, 2016), показује да ученици имају процедурално знање о наведеним садржајима, а да немају развијено концептуално разумевање правила сталности збира и разлике. Ученици су најуспешнији у реторичком изражавању правила, а најмање успешни у функционалној примени правила у задацима у којима је примена правила адекватна. То што су ученици значајно успешнији у реторичком изражавању у односу на симболичко изражавање показује да знања ученика нису апстрахована и уопштена, већ се само познају дефиниције.

Примену правила, од примера до примера, базирану на разумевању, могли бисмо назвати процедуралним изражавањем без негативне конотације. Ако су примери интелектуално подстицајни и воде ка усвајању правила које је базирано на разумевању, процедурално изражавање морамо схватити у позитивном смислу.

Као доминантна карактеристика концептуалног знања (које је процедурално утемељено) сматра се хијерархијска повезаност појмова. Учење нових појмова ослања се на искуства и знања која ученици већ имају. Они се прво упознају са конкретним појмовима (који се ослањају на чулне представе), а идући из разреда у разред, сусрећу се са све апстрактнијим појмовима. За појам P кажемо да је апстрактнији од појма Q ако је Q пример за P. Очигледно је да ученици не могу усвојити апстрактније појмове ако нису већ усвојили појмове нижег степена апстрактности. Појам синтетизујемо из његових примера, а ако ученици не разумеју примере, неће разумети ни појам.

Приликом осмишљавања активности, наставник треба да води рачуна о апстрактности појма и да разложи сложеније захтеве на једноставније. Таква разрађеност садржаја условљава лакоћу учења.

Задатак наставника јесте да гледа унапред у односу на тренутни задатак и, када је год могуће, да уводи идеје на такав начин да се формирају одговарајуће дугорочне схеме. У хијерархији тема које чине школски програм математике, где је обрада једне теме услов за обраду следеће, свако њихово изостављање стварало би семантичку празнину. Ако се неке теме отргну из логичких и нађу у структурама других садржаја, дошло би до конфузије и немогућности повезивања садржаја и грађења одговарајућих схема. Овај став потврђује наше истраживање (Zeljić & Dabić, 2014) у коме смо испитивали разумевање редоследа рачунских операција истог приоритета у скупу природних бројева од стране ученика четвртог разреда основне школе. Основно питање које смо поставили јесте да ли ученици могу да развију концептуално знање о поступку рачунања вредности израза са две операције истог приоритета без заграда ако под концептуалним знањем подразумевамо конструисану мрежу односа између поступака, као и „знати зашто" се ти поступци примењују. Резултати истраживања показују да постоји слаба корелација између различитих аспеката знања која се односе на ове садржаје и да су знања ученика процедуралног карактера. Поступци ученика се могу описати као примена конвенције „рачунај слева надесно", што води ка великом броју грешака у сложенијим захтевима. Такви резултати су били очекивани, јер да би ученици развили концептуално утемељено знање, морали би да истражују зашто је примена конвенције исправна. У скупу целих бројева израз $a - b + c$ ученици могу разумети као $a + (-b) + c$. Да би схватили овај поступак, они морају да знају својства скупа целих бројева, која се не уводе у млађим разредима основне школе. Наведени израз у скупу природних бројева се једнозначно схвата само као $(a - b) + c$ и није еквивалентан изразу $a - (b + c)$, као у случају сабирања. У скупу рационалних бројева, израз $a : b \cdot c$ једнозначно се схвата као $a \cdot \frac{1}{b} \cdot c$. Структура израза $a : b \cdot c$ ученицима може бити јасна тек након проширивања скупа природних на скуп рационалних бројева. Правило „рачунај слева надесно" у скупу природних бројева је „необјашњиво", а у скупу целих, рационалних и реалних бројева непотребно. У скупу природних бројева ученици су упознати са асоцијативним законом за сабирање и множење, као и са начином употребе заграда у означавању структуре израза, што чини потребан математички алат за процедурално и релационо разумевање израза са више операција. Ученици наведену конвенцију са пуним смислом могу разумети у скупу целих и рационалних бројева. Преурањено увођење садржаја у логичкој структури математичких садржаја спречава разумевање садржаја јер не постоји адекватно претходно знање које би омогућило грађење појмовне структуре која подразумева хијерархијски повезана знања.

Не постоји наставни приступ и стратегија који би уз тако поређане теме довели ученике до разумевања математичких законитости. Наставни програми морају бити осмишљени тако да подржавају ову идеју. Претпоставка за квалитетну израду наставног програма математике јесте промишљена логичка анализа математичких садржаја, а на основу тога структурирање садржаја у садржајно повезане целине, тј. наставне теме.

Полазна тачка наставника при изради годишњих и месечних програма јесте упознавање, разрађивање и логичко повезивање постављених циљева и задатака. Следећи корак јесте повезивање циљева и задатака са одговарајућим садржајима и методама наставе и учења. На наставнику је тежак задатак да на основу задатих циљева и задатака направи адекватан избор садржаја са аспекта предмета – науке и са аспекта примерености интелектуалних способности ученика. Анализирајући оперативне задатке програма математике за млађе разреде можемо рећи да су они дати уопштено и да је адекватно решење да се за сваку наставну тему конкретизују специфични задаци и у складу са њима прецизирају одговарајући садржаји, јер се очекује да се на тим садржајима постигну ови задаци. Захтев да се оперативни задаци програма конкретизују и да се за оперативне задатке прецизирају одговарајући садржаји оправдан је са аспекта помоћи наставницима, тј. да се појединачним школским оперативним програмима нађу адекватне логичке структуре садржаја. „Прескакање” појединих појмова у логичкој хијерархији појмова опасно је колико и случај када се неке теме отргну из логичких и нађу у структурама других садржаја, што доводи до немогућности да се повеже садржај и граде одговарајуће схеме. Кључни математички појмови не могу се осмислити у једном кораку. Ти појмови изграђују се градуирано, кроз когнитивне процесе и процедуре које трају низ година. Зато је потребно предвидети нивое апстрактности, начине представљања појмова и одговарајуће модалитете мишљења, везујући их за садржаје по разредима и когнитивни развој ученика одређеног узраста.

1.2. Анализа одабраних тема у контексту усмерености на развијање различитих врста знања

1.2.1. Концептуално разумевање поступака решавања неједначина

Основни проблем при разматрању приступа неједначинама јесте фокус на алгебарску манипулацију симболима при решавању једначина и неједначина. Кијеран (Kieran, 2004: 147) сматра да „особине које леже у основи валидних трансформација за решавање једначина нису исте као оне које леже у основи валидних трансформација за решавање неједначина”. Кијеранова је разматрајући тај проблем истакла да је „дидактички изазов како пронаћи начине да се ученицима помогне да се чувају замки везе између једначина и неједначина у свом трансформационом раду са симболима. Урсини и Тригверос (Ursini & Trigueros, 2009) у својим истраживањима идентификовали су четири проблема која ученици имају у раду са елементарним неједначинама:

1) Погрешно разумевање и неразумевање везе између једначина и неједначина;
2) Схватање ученика да неједначина има само једно решење;

3) Тенденција ученика да манипулишу алгебарским изразима без стварања значења тих манипулација;
4) Конфузија и неразумевање поступака решавања сложенијих неједначина.

Ако желимо да ученици решавају неједначине разумевајући општу структуру поступка, задатак „решавати неједначине” мора се конкретизовати и гласити „решавати неједначине применом правила зависности резултата од промене компонената”. Методички поступак који се сугерише мора водити релационом разумевању, које подразумева знање „како” и „зашто” то радим. При осмишљавању приступа који примењујемо при првим корацима рада са неједначинама, важно је правилно структурирати садржај, а то структурирање подразумева обраду следећих садржаја:

- Третирање аритметичких израза као самосталних објеката и познавање структуре аритметичких израза;
- Прихватање словних израза процедурално и структурално, тј. њихово третирање као процеса и као производа;
- Разумевање знакова =, <, > као релацијских знакова;
- Разумевање и провођење поступка решавања једначина (на основу веза између операција);
- Увођење скуповно-теоријске нотације : {...} $\in, \notin$;
- Увођење неједначина облика $x < a$ и $x > a$;
- Изграђивање разумевања функционалне зависности резултата операције од промене њених компонената;
- Решавање неједначина (облика a ± x<b и a ± x>b) ослањањем на решавање једначина уз функционалну примену правила зависности резултата операције од промене њених компонената.

Анализа методичких приступа неједначинама у уџбеницима у Србији (Zeljić, 2013) показује да у уџбеницима постоје приступи који граде неадекватне структуре за даље учење. Резултати анализе показују да се у неким уџбеницима при решавању неједначина примењује поступак који се одређује као поступак „сличан решавању једначина”. За илустровање суштине наведеног поступка навешћемо парадигматски пример:

Ако броју 162 додамо неки број, добићемо број мањи од 170.

Записујемо неједначину: 162 + x < 170

Можемо је решити на следећи начин:

$$162 + x < 170$$

$$x < 170 - 162$$

$$x < 8$$

Поступак решавања неједначина у оквиру наведеног приступа објашњава се тако што се сугерише да се неједначина решава као једначина и да се „знак једнакости замени знаком неједнакости”. Аутори уџбеника из кога је пружет пример (према Zeljić, 2013) сматрају да је одређивање скупа решења неједначине „лако” и да су правила (на пример „када је променљива на месту умањиоца, знак се мења”) довољна водиља за приступ овако сложеним садржајима. Сугерисање „замене знака једнакости и неједнакости” може створити конфузију у раду ученика. Применом правила ученици често долазе до тачног решења, али ти поступци не воде правом разумевању. Ученици могу примењивати меморисана правила на једноставним примерима и на тај начин доћи до тачног резултата, али приликом решавања сложенијих облика неједначина треба да науче ново правило које се тиче структуре израза. У супротном, примењујући наведено правило, ученици би рачунали на следећи начин, што води погрешном решењу:

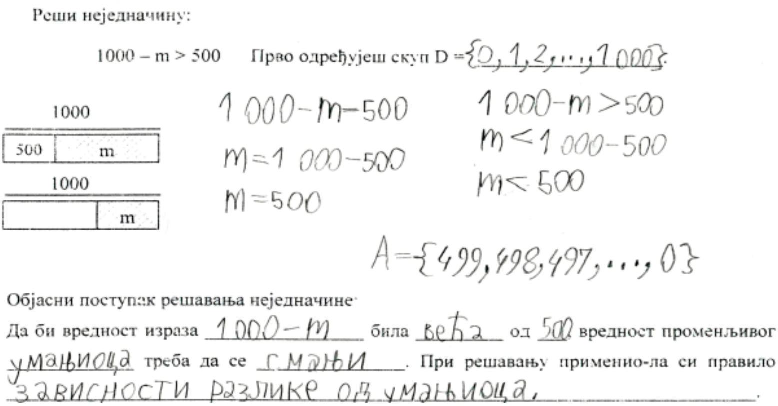
$$250 + (100 - a) > 300$$

$$100 - a < 300 - 250$$

$$a > 100 - 50$$

Примена наведених правила може резултирати тачним решењима на једноставним задацима, али њихова примена у сложенијим задацима може често довести до нетачних поступака решавања.

Да је концептуално знање (релационо разумевање) примењљивије у новим контекстима и резултира мањим бројем грешака у раду ученика, показује и експериментално истраживање које је смо спровели са ученицима четвртог разреда (Zeljić, 2014). Након експерименталног програма, у коме је акценат стављен на редослед и логичку структуру садржаја (повезивање појмова) и коришћење различитих репрезентација, ученици су боље урадили задатак у коме је, поред решавања неједначине, тражено и објашњење поступка засновано на функционалној зависности резултата од промене компоненти, него задатак који је представљен симболички и од ученика је тражено да даљом манипулацијом симболима дођу до решења. На следећим сликама представљени су примери са завршног теста који одсликавају наведени закључак (Слике 2 и 3):


Реши неједначину:

1000 – m > 500   Прво одређујеш скуп D = {0, 1, 2, ..., 1000}.

1000
500 | m

1000
| m

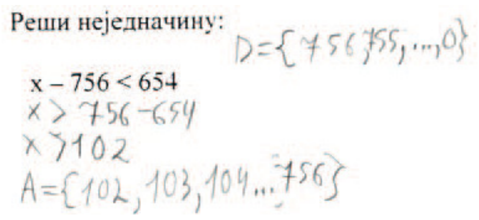
1 000 – m – 500
m = 1 000 – 500
m = 500

1 000 – m > 500
m < 1 000 – 500
m < 500

A = {499, 498, 497, ..., 0}

Објасни поступак решавања неједначине:
Да би вредност израза 1000 – m била већа од 500 вредност промењивог умањиоца треба да се смањи. При решавању применио-ла си правило зависности разлике од умањиоца.

Слика 2: Решавање неједначине применом аналогије са решавањем једначине применом правила зависности разлике од умањиоца (Zeljić, 2014: 261)


Реши неједначину:

$D=\{756, 755, \ldots, 0\}$

$x - 756 < 654$

$x > 756 - 654$

$x > 102$

$A=\{102, 103, 104 \ldots 756\}$

Слика 3: Решавање неједначина без експлицитног захтева за објашњењем поступка – нетачно решење (Zeljić, 2014: 262)

Наведени примери показују позитиван утицај методичке процедуре у којој ученике стављамо у ситуацију да промишљају и објашњавају своје поступке при решавању проблема тако што повезују различите математичке појмове и тиме оправдавају и аргументују своје стратегије. Релационо учење је теже, али се лакше памти и знања су чвршћа и трајнија. Ученици су показали знатно боље резултате када су поступак решавања неједначина заснивали на значењу (које сугеришу схеме) и на коришћењу везе између појмова. Можемо очекивати да ће касније (у оквиру обуке ученици су имали само часове обраде) подједнако успешно решавати и задатке који су представљени само симболички, али ће те симболичке трансформације бити резултат разумевања, а ученици ће у сваком тренутку бити у могућности да тим трансформацијама придодају значење.

1.2.2. Концептуално разумевање таблице множења

Већ неколико деценија истраживања се фокусирају на развој мултипликативног мишљења, а нарочито на прелаз са адитивног на мултипликативни начин мишљања (Clark & Kamii, 1996). Мултипликативно мишљење има шире значење од множења као брзог начина сабирања једнаких сабирака. Иако поновљено сабирање често остаје „имплицитан, несвесни и примитивни модел” за множење (Fischbein et al., 1985), научници наглашавају да је модел поновљеног сабирања непотпун и да је потребна значајна квалитативна промена како би се добила основа за мултипликативно мишљење (Greer, 1992).

У неким уџбеницима (вођени уџбеницима то раде и наставници) након увођења значења операције множења инсистира се на меморисању таблице множења. У том процесу занемарује се развој стратегија множења (Baroody et al., 2009). Ово „пасивно складиштење” (идеја да ученици могу меморисати таблицу) значи да они памте 100 одвојених чињеница и примењују их у решавању проблема. Ако таквим приступом уче и рачунање вредности израза са једноцифреним бројевима укључујући сабирање, одузимање и дељење, онда је то заиста пуно чињеница које треба меморисати у првим годинама школовања и примењивати их у даљем учењу поступака рачунања са вишецифреним бројевима. Баруди (Baroody, 2006) напомиње да наведени приступ учења аритметичких операција негативно утиче на развој свих компонената математичких способности (концептуално знање, процедурална флуентност, стратегијска способност, прилагодљиво расуђивање, продуктивна способност) и указује на следећа ограничења:

1) Неефикасност. Има превише чињеница које треба запамтити.
2) Неодговарајућа примена. Ученици погрешно користе меморисане чињенице и не проверавају њихову тачност.
3) Нефлексибилност. Ученици не развијају флексибилне стратегије рачунања.

Истраживања показују да ученици могу да реше широк дијапазон разноврсних мултипликативних проблема (задатака) много пре него што им се дају формалне инструкције о операцијама множења и дељења (Kouba, 1989; Mulligan & Mitchelmore, 1997). У литератури се најчешће издвајају следеће семантичке структуре текстуалних задатака који се односе на множење (Greer, 1992): 1) Еквивалентне (једнаке) групе (пример: два стола, сваки са по четворо деце); 2) Мултипликативно поређење (пример: три пута више дечака него девојчица); 3) Правоугаона област (пример: три реда по четворо деце); 4) Декартов производ (пример: број могућих плесних парова са четири дечака и три девојчице).

Ученици користе више стратегија за решавање ових текстуалних задатака и из тога је закључено да поседују разне интуитивне моделе множења и дељења. Интуитивни модел је дефинисан као унутрашња ментална структура која одговара класи стратегија рачунања (Mulligan & Mitchelmore, 1997). Интерес за истраживање интуитивних модела ученика лежи у ставу да се они формирају у раном узрасту и снажно утичу на ученичко разумевање више комплексних мултипликативних ситуација. Испитивање интуитивних стратегија множења код ученика (други и трећи разред) било је у фокусу истраживања које су спровели Мулиган и Мичелмор (Mulligan & Mitchelmore, 1997). Утврђено је да су ученици користили три основна интуитивна модела (Табела 1):

Интуитивни модел	*Стратегија рачунања*
Директно бројање	Бројање по један
Поновљено сабирање	Ритмично пребројавање Бројање на прескок Поновљено сабирање Сабирање „дуплих" сабирака (Repeated adding)
Операција множења	Знање чињеница (производа) Изведене чињенице (производи)

Табела 1: Интуитивни модели множења (Mulligan & Mitchelmore, 1997)

Ученици су током времена показали конзистентан напредак интуитивног модела унутар сваке семантичке структуре проблема: од директног бројања, преко поновљеног сабирања до операције множења. Структура преферираних интуитивних модела није нужно повезана са семантичком структуром проблема (сви интуитивни модели присутни су на свим семантичким структурама задатака).

Даунтон и Саливен (Downton & Sullivan, 2017) истичу да је већина приступа множењу конципирана тако да се почиње са једноставним примерима, па се прогресивно уводе сложене стратегије, док резултати њиховог истраживања показују да је могућ и користан и обрнути пут. Студија је спроведена у Аустралији са ученицима трећег разреда основне школе (старости осам и девет година) са циљем да се испитају интуитивне стратегије множења ученика. За разумевање контекста истраживања навешћемо садржаје курикулума у Аустралији који се односе на множење. Током другог разреда ученици су упознати са основним значењем множења као поновљеног сабирања, што подразумева репрезентацију скупова са једнаким бројем елемената. У курикулуму другог разреда не постоји очекивање да ученици упознају писану нотацију (симболику) или да знају чињенице о множењу (одређују вредност производа). Дакле, ученици пре експерименталног програма нису учили никакве стратегије множења. Експериментални програм је трајао три седмице, а фокус је био на решавању текстуалних задатака различите структуре и сложености. Коришћени су следећи задаци:

Семантичка структура задатка	*Редни број и ниво тежине*	*Текст задатка*
Једнаке групе	1.	Видео сам 7 зебри у зоолошком врту. Свака зебра је имала 8 пруга на леђима. Колико пруга сам видео укупно?
	1. (изазов)	Ако сам видео 13 зебри, колико сам укупно пруга видео?
	2.	На столу је 8 кутија бојица. У свакој кутији има 6 бојица. Колико је бојица на столу?
	2. (изазов)	Ако је на столу 8 кутија са 14 бојица у свакој кутији, колико ће бојица бити на столу?
	3.	На столу иза тебе стављам 6 група од 7 предмета (Ученик кратко погледа.). Нацртај слику онога што си видео. Колико предмета је на том столу?

Расподела/размера	4.	Једно паковање сличица кошта 50 динара. Колико кошта 6 паковања? Ако у једном паковању има 8 сличица, колико их има у тих 6 паковања?
	5.	Један мрав има 6 ногу. Колико ногу има 13 мрава?
	5. (изазов)	Један паук има 8 ногу. Колико ногу има 13 паукова?
	6.	Ако је било 9 лептира, колико антена и крила они имају?
	6. (изазов)	Ако је било 14 лептира, колико антена и крила они имају?
	7.	У штали има 15 животиња. Неке од њих су муве, а неке су коњи. Колико је коња, а колико мува ако све животиње имају укупно 72 ноге?
Површина правоугаоника	8.	Ево карте са неким тениским лоптицама на њој (9 × 4; види и сакриј). Колико тениских лоптица видиш? Како си то успео да израчунаш? Нацртај слику која показује како изгледа карта са тениским лоптицама.
	9.	(Слика троугла исеченог са правоугаоника 6 × 10.) Ево слике троугла одсеченог од правоугаоника. Колико квадрата чини цео правоугаоник?
	10.	Овде је слика на којој су јагоде (7 × 9). Сенка крпе покрива неке јагоде. Колико укупно има јагода?
	10. (изазов)	У воћњаку је посађено воће у редовима са истим бројем стабала у сваком реду. Ако је посађено 112 стабала, колико редова има и колико је стабала у сваком реду?
	11.	(Слика правоугаоника 9 × 7 и једне плочице од 2 cm.) Ево плана моје терасе. Колико је плочица потребно за покривање целе терасе?

Поређење (толико пута више)	12.	Џејми је сакупио 18 марака. Џек је сакупио 4 пута више. Колико маркица има Џек?
	13.	Клуб Феникс је постигао 8 голова на такмичењу. Клуб Кестралс је постигао 16 пута више голова. Колико голова је постигао клуб Кестралс?
	14.	Прошле године грожђе ме је коштало 3,50 долара по килограму. Ове године цена грожђа је 4 пута већа. Колико сада плаћам грожђе?
Декартов производ	15.	На одмор си понео 2 пара ципела, 2 пара панталона и три мајице. Колико различитих одевних комбинација можеш направити?

Табела 2: Задаци коришћени за испитивање интуитивних стратегија множења (Downton & Sullivan, 2017)

Током трајања програма ученици су радили у паровима у циљу проналажења различитих начина за решавање задатака. Затим су своја решења образлагали и објашњавали пред целим разредом. Наставник није никада показао стратегију решења, нити указао на то која стратегија је пожељна. Стратегије које су ученици користили су следеће (Downton & Sullivan, 2017):

- Прелазно пребројавање. Ученик визуализује групе и може вербализовати множење, али долази до одговора користећи бројање. Може да користи цртеж или прстима или знаковима прати бројање. На пример, на задатак: „Ево слике неких крушака (6 редова по 4). Колико је крушака?" Дете је рекло: „Ја ћу рачунати 6 пута 4 помоћу мојих прстију да 6, 12, 18, 24", и закључује 4 · 6 = 24.
- Изградња (дуплирање и вишеструко пребројавање). Ученик визуализује групе и зна чињенице, али се ослања на бројање са прескакањем или комбинацију бројања и дуплирања. То је захтевало напреднији ниво апстракције него транзиционо пребројавање. На при-

мер, „Знам да 3 пута 8 јесте 24 (броји по 8) и треба ми 6 по 8, тако да могу да удвостручим 24, а то је 48 (8 · 6 = 48)".

- Дуплирање и половљење. Решење се изводи помоћу удвостручавања или половљења и процене. На пример, „13 стабала у сваком реду и 8 редова. Двоструко 13 је 26, 26 и 26 је 52 (то је 4 пута), 52 и 52 је 104 (то је 8 пута 13)". Овај ученик је удвостручавао први чинилац, док је други ученик удвостручио други чинилац. На пример (пруге на зебри у задатку 1): „Знам да је два пута 7 једнако 14; 14 плус 14 је 28 (то је 4 пута), тако да само двоструко 28 добијете 8 пута 7, 28 плус 28 је 56" (7 · 8 = 56).
- Мултипликативно рачунање. Ослањање на знање познатих чињеница. На пример: „Знам 8 пута 12 је 96, па сам само додао још 8 да добијем 104, а то је 13 пута осам."
- Холистичко размишљање. Ученик користи правила аритметике и/или процену. На пример: „15 · 6 је 90, а онда сам узела 12 да добијем 13 · 6 и то је 78" (15 · 6 = 90; 90 – 12 = 78). Коришћење правила аритметике илуструје одговор следећег ученика: „Било је 8 кутија по 14, ја знам колико је 8 пута 10 и 8 пута 4, па је то 80 плус 32" (8 · 14 = 112, 8 · 10 + 8 · 4 = 112).

Основни закључак истраживања јесте да подстицање ученика да се баве сложеним задацима подстиче употребу софистицираних стратегија. Овај налаз је у супротности са претпоставком изнетом у истраживањима која су спровели Мулиган и Мичелмор, која говоре у прилог томе да ученици упознају нову стратегију множења на задацима чија им је семантичка структура позната и када су меморисали неке производе. Истраживачи наводе да адекватно изабрани сложени задаци могу у ствари изазвати употребу софистицираних стратегија. Мултипликативне стратегије (дуплирање/половљење, мултипликативни рачун, холистичко мишљење) чинило је 78% (96 од 123) ученичких стратегија. Ово сугерише да ученици који конзистентно користе ове стратегије размишљају мултипликативно, а не само адитивно. Најмањи број мултипликативних стратегија коришћен је на задацима једнаких група. Ученицима треба пружити могућност да развију сопствене стратегије рачунања.

Наведена истраживања не упућују на то да ученике треба пустити да искључиво сами креирају и конструишу своје знање. Резултати показују да ученици могу да поседују различите интуитивне моделе можења, које треба имати у виду при увођењу стратегија множења. Постоје ставови да се стратегије прогресивно развијају од једноставних ка сложенијим, а постоје и ставови да неки ученици одмах развијају комплексне мултипликативне стратегије.

Што се тиче стратегија множења, аутори наводе различите стратегије, које се прожимају и чине концептуално разумевање. Навешћемо стратегије које се могу сматрати водиљом за структурирање и разраду садржаја (Van de Walle et al., 2013):

1) Дуплирање. Производи који имају чинилац 2 еквивалентни су сабирању два једнака сабирка. Лако се рачуна $2 \cdot 7$ као $7 + 7$, а применом правила замене места сабирака познат је и производ $7 \cdot 2$.
2) Множење са 5. Ова група стратегија састоји се од свих производа са 5 као првог или другог чиниоца. Наведени производи сматрају се „лаким и очигледним”.
3) Нула и јединица као чиниоци. Тридесет и шест производа (у таблици множења) има бар један чинилац који је или 0 или 1. Ови производи, иако су очигледно лаки на процедуралном нивоу, имају тенденцију да збуњују ученике због „правила” које су научили у сабирању. Збир $6 + 0$ остаје исти, али $6 \cdot 0$ је увек нула. Збир $1 + n$ је следбеник броја n, али $1 \cdot n$ има вредност n. Треба избегавати правила која нису утемељена, као што је на пример „сваки број помножен са нула

је нула”. Ови појмови развијају се повезивањем са значењем у окружујућој реалности.

4) Множење са 9. Производи са чиниоцем 9 укључују највеће производе, али могу бити међу најлакшим за учење, јер постоји неколико стратегија које подржавају њихово учење. Прво, ученици производ $7 \cdot 9$ рачунају као $7 \cdot 10 - 7$. Друго, таблица множења са 9 укључује неке занимљиве обрасце који воде до проналажења производа: 1) десетица производа је увек за један мања од другог чиниоца (тј. један осим 9), и 2) збир две цифре у производу је увек 9. За $7 \cdot 9$, 1 мање од 7 је 6, а 6 и 3 чини 9, па је одговор 63. Ово правило може се приказати помоћу шака и прстију.
5) Употреба познатих производа да би се израчунао нови производ. Један чинилац се растави, па се проблем декомпонује у два проблема. Два производа се добијају знањем чињеница, а затим се сабирају (на пример $7 \cdot 8 = 7 \cdot 4 + 7 \cdot 4$ или $7 \cdot 8 = 5 \cdot 8 + 2 \cdot 8$).

Истраживања (Sherin & Fuson, 2005), међутим, показују да је у периоду у којем је једноцифрено множење у фокусу експлицитне пажње у учионици, промене у коришћењу стратегија првенствено су резултат систематског поучавања. Аутори истичу да напредовање од коришћења мање ефикасних стратегија и процедура које су осетљиве на грешке до ефикаснијих стратегија не мора се нужно десити када у школи није посвећена пажња развијању стратегија. Ученицима треба пружити могућност да развију сопствене стратегије множења. Многи ученици неће бити спремни да одмах користе различите стратегије, а затим ће „нешто кликнути” и корисна идеја ће бити њихова.

Основно питање које је постављено у истраживању које смо спровели (Zeljić et al., 2019) јесте да ли адитивни приступ (множење као поновљено сабирање) при почетном изучавању множењу блокира развијање и коришћење различитих стратегија множења. Важно питање за образовну праксу је да одреди које су стратегије решавања проблема које дете тренутно користи. Ако деца доследно користе нерационалне стратегије, наставници би требало да предузму корективне акције пре комплекснијег учења (Dowker, 2004). Наше истраживање (Zeljić et al., 2019) било је усмерено на испитивање утицаја обраде множења једноцифрених бројева као сабирања једнаких сабирака на развијање стратегија множења и флексибилност у избору стратегија. Узорак истраживања чинило је 27 ученика другог разреда у једној основној школи у Београду. Истраживање је спроведено коришћењем стандардизованог интервјуа са питањима отвореног типа. Питања и њихов редослед одређени су унапред и били су исти за сваког ученика. Изрази који су коришћени у интервјуу тако су одабрани да сугеришу примену различитих стратегија. Редослед израза је осмишљен тако да се вредност првог израза може ставити у функцију рачунања вредности наредних израза: $4 \cdot 3$, $4 \cdot 6$, $4 \cdot 12$; $7 \cdot 4$, $7 \cdot 5$, $7 \cdot 9$; $9 \cdot 8$, $9 \cdot 9$, $9 \cdot 10$, $9 \cdot 11$. Интервју је текао на следећи начин: испитивач на папиру покаже један пример, затим ученик рачуна без папира и оловке, каже резултат, а потом треба да објасни како је рачунао и да ли производ може израчунати на друге начине. Учесници су појединачно интервјуисани, а направљен је и аудио-запис сваког разговора. Интервју је трајао око 10 минута са сваким учеником и одржан је у посебној просторији, тако да су ученици могли да изразе своје мисли слободно и без напетости. Резултати показују да највећи број ученика углавном примењује стратегије које су коришћене у поступку учења, а то су ритмичко бројање и поновљено сабирање. Први производ који су ученици рачунали јесте $4 \cdot 3$, одмах затим $4 \cdot 6$, па $4 \cdot 12$. Ученици нису показали флексибилност у рачунању другог и трећег производа, тј. нису приметили да се производи дуплирају. Они су изнова, у великом броју, користили ритмичко бројање и поновљено сабирање. Такође, у следећем низу производа, $7 \cdot 4$, $7 \cdot 5$, $7 \cdot 9$ нису приметили да је трећи производ једнак збиру прва два производа. И ученици који су користили ефикасније стратегије нису користили претходно израчунате производе у функцији рачунања нових производа. Као најуверљивији показатељ адитивног разумевања множења јесу стратегије ученика које су користили рачунајући трећу групу производа (9 · 8, 9 · 9, 9 · 10, 9 · 11). С обзиром на то да је производ у коме је један чинилац број 10 „лак", очекивано је да се то знање стави у функцију рачунања производа у којима је један чинилац број 9 (9 · 8 = 10 · 8 – 8). Препознавање квантитативних односа је важније од меморисања производа, а ученици нису приметили однос бројева у задацима. Они су највише времена трошили у рачунању ових примера, јер су користили стратегије ритмичког бројања и поновљеног сабирања. Грешке су биле честе у смислу броја сабирака, као и у сабирању. Неки ученици су себе исправљали, а неки нису приметили грешку, што показује да не проверавају тачност меморисаних производа. Да коришћење адитивног приступа блокира развој стратегија множења и уопште концептуално разумевање множења, показује резултат множења двоцифреног броја једноцифреним. Од ученика је тражено да након рачунања производа 9 · 10 израчунају производ 9 ·11. Седамнаест ученика (63%) рекло је да не може да израчуна производ без папира и оловке и да се то не може рачунати другачије осим као 9 · 11 = 9 · (10 + 1) = 9 · 10 + 9 · 1. Коришћење дистрибутивног закона при рачунању производа Даунтон и Саливен (Downton & Sullivan, 2017) класификовали су као холистичко мишљење, јер су ученици у њиховом истраживању самостално открили поступак. У контексту нашег истраживања, када су ученици експлицитно подучавани наведеном алгоритму, а нису могли да га изведу ментално без папира и оловке и нису могли да кажу да је то „90 и још једном 9", наведену стратегију видимо као алгоритамско мишљење које није флексибилно. Посебно је занимљив податак да на изразу 9 · 11 нико од ученика није понудио другу стратегију, већ су били чврсти у уверењу да се производ може рачунати само на тај начин. То показује да адитивни приступ множењу не даје трансфер на нове проблеме. Нефлексибилност у коришћењу стратегија множења показује и чињеница да ученици нису користили замену места чинилаца ради лакшег рачунања иако су формално учили правило. То значи да су производ 7 · 4 рачунали као збир седам сабирака, а велики број ученика је као једину могућу алтернативну стратегију понудио збир 7 + 7 + 7 + 7. Приметно је да ученици знају правило, али га не примењују флексибилно као олакшицу у рачунању. Разлог томе налазимо у уџбеницима, где се обрађује као посебна лекција множење сваким бројем уз коришћење стратегије поновљеног сабирања. Резултати показују да је изузетно мали број ученика спреман да понуди још неку стратегију рачунања. Они који су то учинили, понудили су опет нефлексибилне стратегије. То су стратегије поновљеног сабирања када чиниоци замене места, ритмичког бројања и поновљеног сабирања (када је прва стратегија ритмичко бројање). Наши резултати говоре у прилог ставовима да ученици неће развити флексибилне стратегије рачунања уколико курикулум не препознаје интуитивне стратегије и уколико нису подучавани тим стратегијама. Инсистирање на значењу множења као збира једнаких сабирака може спречити развој стратегија множења и створити ограничено разумевање мултипликативних ситуација, тј. непрепознавање мултипликативних ситуација које одступају од значења „на n места по m елемената". Резултати нашег истраживања указују на то да поучавање различитих стратегија множења треба да буде експлицитни део курикулума школске математике. Уколико се производи уче као одвојене чињенице, без повезивања садржаја, учење таблице множења своди се на меморисање. Дискусија о различитим стратегијама множења нужно повлачи и питање да ли ученици морају бити формално упознати са аритметичким правилима која се виде као основа различитих стратегија. Један поглед истраживача је да ученици треба да буду упознати са аритметичким правилима чија примена омогућава изградњу таблице множења и примену правила као стратегије множења једноцифрених бројева (Fuson, 2003; Van de Walle et al., 2013). Друго виђење истраживача (Kouba, 1989; Mulligan & Mitchelmore, 1997. и др.) јесте да увођење аритметичких правила пре развоја стратегија множења није нужно, већ да и млађа деца могу развијати стратегије (интуитивно) на задацима различите семантичке структуре. У школском програму математике у Србији предвиђена је обрада правила аритметике, тако да интуитивне стратегије ученика могу бити подржане и формалним правилима. Резултати нашег истраживања (Zeljć & Dabić Boričić, 2020) показују да се у уџбеницима математике у Србији фокус ставља на меморисање правила, тј. доминантан је захтев да се таблица множења одмах меморише и научи напамет. Овакав приступ у учењу множења једноцифрених бројева може подржати веровање ученика да математика подразумева меморисање чињеница, повећати анксиозност код ученика и негативно утицати на развој појединих компонената математичких способности. Насупрот томе, свака стратегија у којој ученици користе познате чињенице у рачунању новог производа ($9 \cdot 8 = 7 \cdot 8 + 2 \cdot 8$) показатељ је концептуалног разумевања множења.

2. Алгоритамски и неалгоритамски (креативни) приступ у настави математике

Основни циљ у настави математике јесте помоћи ученицима да развију математичке компетенције, што подразумева способност разумевања, расуђивања и употребу математике у различитим ситуацијама (Niss, 2007). Бројна истраживања сугеришу да ученици могу развити концептуално разумевање математичких појмова и поступака кроз решавање проблема и математичко резоновање које је подржано креативнијим активностима од учења заснованог на коришћењу унапред дефинисаних алгоритама (Lithner, 2003, 2008; Haavold, 2011).

Алгоритам је фиксирани скуп корака који одређују процедуру за решавање (математичког) проблема (Fan & Bokhove, 2014). Појам алгоритма обухвата све претходно дефинисане процедуре, то јест, коначан број инструкција које омогућавају решавање задатог скупа задатака (Brousseau,1997). Карактеристика алгоритма је да се може одредити унапред, а примена алгоритма је повезана са високом поузданошћу и брзином, што представља позитивне стране примене алгоритма. Те позитивне карактеристике примене алгоритама имају сврху на задацима у којима је циљ само да се нађе одговор на одређени проблем. Алгоритми се састоје од добро дефинисаних корака, па је уз њихово стриктно и правилно провођење тачан одговор очекиван.

Много времена у часовима математике троши се на учење и увежбавање алгоритама, који треба да пруже ученицима брз и поуздан начин да се носе са многим задацима (Hiebert, 2003; Boesen et al., 2014). Међутим, постоје сумње у то да ли ови алгоритми заиста доводе до дубљег разумевања принципа математике или да ли је широка употреба алгоритама контрапродуктивна (Hiebert, 2003). У неким случајевима коришћење алгоритама је прикладно, штеди време и спречава погрешне прорачуне. Коришћењем алгоритама ученици добијају могућност да решавају задатке једноставним поновним коришћењем процедуре коју одређени алгоритам означава. Познавање и коришћење алгоритама може смањити когнитивне захтеве компликованих рачунања (Haavold, 2011), а тиме и когнитивно оптерећење на радну меморију. Ученицима се стога може помоћи помоћу алгоритама који смањују когнитивно оптерећење, чиме се ослобађају ресурси за напредније решавање проблема. Према Килпатрику и сарадницима (Kilpatrick et al., 2001), коришћење алгоритама има предности као што су транспарентност, ефикасност, општост, прецизност и једноставност. Коришћење алгоритама у настави смислено је ако подразумева и њихово разумевање.

Међутим, сама употреба алгоритамског резоновања није индикација концептуалног разумевања математике (Haavold, 2011). Прекомерна примена задатака који се решавају рутинским процедурама може довести до алгоритамског резоновања које се заснива на површним карактеристикама алгоритма, а не на суштинским карактеристикама задатака (Hiebert, 2003; Lithner, 2003). Типична ситуација у учионици је она у којој наставник (или уџбеник) ученицима дају скуп математичких задатака и предложеног метода решавања (алгоритам), а након тога следи масовно понављање алгоритма без дубљег размишљања (Lithner, 2008; Boesen et al., 2014). Задаци се, дакле, могу решити према предложеном обрасцу без икаквог концептуалног разумевања стварног проблема. Истраживања показују да модели наставе засновани на коришћењу и примени алгоритама не успевају да побољшају дугорочни развој ученика у основним математичким компетенцијама (Hiebert, 2003). Алгоритамско знање се представља као површно знање које је резултат механичког учења (Star, 2005). Алгоритамски приступ присутан је при обради различитих математичких тема. Резултати бројних међународних студија (Kamii & Dominick, 1997; Selter, 2001; Craigen, 2011; Huang & Witz, 2011) показују да су постигнућа ученика у домену мерења ниска, што се повезује са алгоритамским приступом наведеној теми, а који карактерише доминантно наглашавање процедуралних вештина и примена формула. Хуанг и Виц (Huang & Witz, 2011) истичу да су истраживања у различитим земљама, као што су Италија, Грчка, Тајван и САД, показала да наставници у пракаси углавном примењују алгоритамски/нумерички приступ мерењу површине, који подразумева наглашавање процедуралних вештина и примену формула уместо разумевања како и зашто формуле функционишу. Наведени став потврђује и наше истраживање (Zeljić & Ivančević, 2019), чији је циљ био испитивање нивоа и карактера знања ученика о мерењу површине. Истраживање је спроведено на мањем узорку који чине два одељења четвртог разреда једне основне школе у Београду. Само 11.1% ученика показало је одређен степен разумевања значења формуле, појам обима и површине разликује 26.7% ученика, а стратегије рачунања површине правоуглог троугла (половина површине правоугаоника) успешно је применило 17.8% ученика када је троугао представљен на квадратној мрежи, а 15.6% када није тако представљен. Иако је разлика у успешности мала између задатака када је фигура представљена на квадратној мрежи и када су само дате димензије, то ипак потврђује да је ученицима интуитивно ближа идеја о поплочавању од алгоритамског приступа. Поред ниских постигнућа на тесту, у прилог мишљењу да су ученици подучавани алгоритамским приступом говоре и стратегије које су они покушавали да примене на задацима. Наиме, ученици су доминантно покушавали да примене одређене формуле, а оне нису биле одговарајуће. Тако су, иако су све фигуре биле 2Д, ученици писали формуле за рачунање површине квадра, као и формуле за рачунање обима одређених фигура. Разумевање поступака одређивања површи фигура заглављено је у крути оквир правила и формула. Основна импликација наведеног истраживања јесте истицање потребе да се ученицима да довољно времена за разумевање основних мерних јединица за површину и да науче да рачунају површину користећи концептуалне приступе поделе фигура и поплочавања, што представља основу разумевања површине других фигура. Када једном ученици добро разумеју и визуализују структуру површи (у односу на мерну јединицу), они могу повезати структуру са формулом површине.

Примена алгоритамског приступа доминантна је при обради поступака рачунања, што води површном разумевању и честим грешкама. Селтер (Selter, 2001) истражује поступак писаног одузимања код ученика трећег и четвртог разреда основне школе. Он истиче да су многи ученици трећег и четвртог разреда при рачунању вредности израза 701 – 698 нашли резултат већи од 701 (нпр. 701 – 698 = 703). Даље, многи ученици су при сабирању писали једнакости као што је 72 + 37 = 19. Иако се резултат чини апсурдним, аутор наглашава да може деловати прилично логично када се слепо прати алгоритам вертикалног сабирања: сабирањем цифара десетица, ученици рачунају 7 + 3 = 10 и упишу 10 као 1 на месту десетица. У другом истраживању које је спроведено са ученицима другог, трећег и четвртог разреда (Kamii & Dominick, 1997) циљ је био истражити ефекте наставе поучавања стандардних рачунских алгоритама. У неким одељењима ученици су охрабрени да „измишљају” сопствене стратегије рачунања и нису поучавани стандардним алгоритмима у прва три разреда. Остали ученици су учили конвенционалне алгоритме прописане у уџбеницима. Од ученика је у испитивању тражено да реше проблеме са сабирањем и множењем вишецифреним бројевима и да објасне како су добили одговоре. Утврђено је да су они ученици који нису били поучени никаквим алгоритмима били знатно тачнији у свом рачуну. На пример, за израз 4 + 35 + 24 решење „99” дало је 11% групе која није учила алгоритме цифарског рачунања, а 79% ученика који су учили алгоритме. Ученици који су учили искључиво стандардне алгоритме нису приметили погрешан рачун чак ни када су им постављена питања попут „Да ли ти мислиш да је резултат добар?”. Нетачни одговори ученика који нису учили ниједан алгоритам били су много разумнији од оних у којима су ученици неуспешно покушавали да примене учени алгоритам. Камиј и Доминик (Kamii & Dominick, 1997: 51) тврде да су алгоритми штетни за развој нумеричког резоновања из два разлога: а) негативно утичу на разумевање месне вредности цифре и спречавају развијање значења бројева и б) присиљавају ученике да се одрекну властитог размишљања.

Од осамдесетих година двадесетог века неки истраживачи почели су преиспитивати потребу подучавања алгоритама (према Kamii & Dominick, 1997): Карахер и Шлиман (Carraher & Schliemann, 1985) у Бразилу, Планкет (Plunkett, 1979) у Енглеској, Вакали (Vakali, 1984) у Грчкој и Доминик (Dominick, 1991), Бамс (Bums, 1994) и Линванд (Leinwand, 1994) у САД и сви су предложили да алгоритми не буду део програма школске математике за почетне разреде. Негативне перцепције алгоритама довеле су до тога да су алгоритми једноставно искључени из програма математике у више земаља. Екстреман случај представља наставни програм Канаде, где се изричито наводи да се стандардни алгоритми за четири основне операције не обрађују (Craigen, 2011).

2.1. Алгоритамско и креативно математичко резоновање

Литнер (Lithner, 2008) издваја две врсте резоновања: имитативно и креативно резоновање. У оквиру имитативног резоновања аутор разликује меморијско и алгоритамско. У меморијском резоновању избор стратегије заснован је на подсећању на меморисане чињенице и примена стратегије решавања задатка састоји се од записивања. Ова врста резоновања корисна је као метода целокупног решења у само релативно малом делу задатака, попут одговора да је један литар једнак 1000 cm^3. Алгоритамско резоновање означава памћење и примену алгоритма. Литнер (Lithner, 2008) дефинише креативно математички утемељено расуђивање оно које испуњава следеће критеријуме: 1) Креативност – што подразумева нов начин резоновања (ново образложење); 2) Веродостојност – постоје аргументи који подупиру избор стратегије и/или имплементацију стратегије уз објашњење зашто су закључци истинити или неприхватљиви; и 3) Аргументи су утемељени у математичким својствима која су укључена у расуђивање при решавању проблема. Важно је напоменути да аспект креативности који је наглашен у Литнеровој студији није ни „генијалност" нити „апсолутно ново решење", већ је то стварање математичких решења задатака који су оригинални за појединца који их ствара. Квон и сарадници (Kwon et al., 2006) предложили су два главна критеријума у дефинисању математичке креативности: креирање новог знања и флексибилна способност решавања проблема. Сумирајући истраживања усмерена на математичке креативности, Михајловић (Mihajlović, 2012) закључије да се она мери преко флексибилности, флуентности и оригиналности одговора ученика на постављене проблеме или преко постављања и решавања математичких проблема у некој датој ситуацији.

Да би постигли жељене исходе учења, ученици морају бити укључени у активности у којима се „боре" (у продуктивном смислу те речи) са математиком (Niss, 2007). Истовремено, мора се одржати деликатна равнотежа како би се спречило да ове борбе постану препреке, а не подстицај за учење. Хиберт и Гроувс (Hiebert & Grouws, 2007) закључили су у прегледу истраживања математичког образовања да је ова „борба" неопходна како би се побољшао ученички развој концептуалног разумевања принципа укључених у математику. Ипак, мало познато је како се ова идеја преводи у специфичне активности које су корисне у настави и на који начин су ове активности повезане са исходима учења. Чепмен (Chapman, 2013) наводи да је од суштинске важности креирање адекватних задатака који промовишу концептуално разумевање математике код ученика и оптимизују њихово учење. Ово знање укључује следеће компетенције наставника (Chapman, 2013):

1) Разумевање природе добрих задатака – задаци који укључују одређене математичке појмове; могу се решити на више начина; користе се вишеструке репрезентације; повезују се важне математичке идеје; захтевају од ученика да оправдају, интерпретирају; изазивају високу когнитивну активност (Stein et al., 2000; NCTM, 2010).
2) Способност идентификовања, одабира и креирања задатака који су адекватни математички (богати у смислу садржаја), педагошки (давање смисла за учење математике) и мотивишући (за ученике у смислу њиховог интереса и потребе за учењем).
3) Познавање нивоа когнитивних захтева задатака и односа према циљевима наставе у смислу нивоа учења и препознавања математичких идеја које се могу даље развијати.
4) Познавање разумевања, интереса и искустава ученика и опсега начина на које различити ученици уче математику.
5) Разумевање утицаја избора задатака и њихове имплементације на начин на који ученици уопште уче и примењују математику.
6) Знање које аспекте задатка треба нагласити, како организовати и водити рад ученика, која питања поставити да би се активирали ученици са различитим нивоом знања, и како подржати ученике без давања решења која смањују изазов.

Поред тога како је задатак дизајниран, важно је створити ситуације у којима ученик може конструисати знање (Brousseau, 1997), дакле, обезбеђивање ситуације која омогућава „борбу са решењима задатака”. У приступу учењу путем решавања проблема, ученици морају преузети одговорност за део процеса решавања задатака и конструисања знања. Када ученик прихвати проблем као изазов до тренутка када даје одговор, наставник се уздржава од давања одговора уместо ученика. Такође, важно је дати ученицима могућност да сами креирају своја решења за проблеме (Lithner, 2008). Свим ученицима треба дати прилику (а можда их и „присилити”) да се упусте у „борбу” са одређеним задацима.

2.2. Ментална аритметика – пример креативног математичког резоновања

Поступци рачунања и флуентност у рачунању јесу теме којима се посвећује можда највећа пажња у оквиру математичког образовања. Процедурална флуентност дефинисана је као способност примене процедура тачно, ефикасно и флексибилно и подразумева препознавање када је једна стратегија примеренија од друге за задати проблем и околности (NCTM, 2014). Ова дефиниција флексибилности подразумева да ученици знају да постоји више стратегија које се могу користити за одређени задатак, као и да су способни да одаберу стратегију уз могућу модификацију познатих стратегија на иновативни начин (Rittle-Johnson & Star, 2007; Schneider et al., 2011).

Један од очигледних примера неалгоритамског приступа јесте ментална аритметика. Као што је већ речено, алгоритамски рачун има мање истакнуто место у курикулумима многих земаља, односно наглашавају се други аспекти знања (Verschaffel, et al., 2007). Кларк (Clarke, 2005) тврди да формалне (аритметичке) алгоритме не треба уводити док деца не интернализују разумевање бројева, месне вредности цифара и значења рачунских операција.

Већина аутора слаже се да су стандардне процедуре (алгоритми) најефикасније. Оне су настајале годинама, али су и често одвојене од појмова на којима се заснивају (зато их понекад ученици тешко усвајају). Као део светског покрета реформи основношколске математике 80-их година прошлог века, истакнута је нова тема – *ментална аритметика* као значајна тема школске математике (Kilpatrick et al., 2001; Van den Heuvel-Panhuizen, 2001; Verschaffel et al., 2007; Torbeyns & Verschaffel, 2013). Ментално рачунање је процес у којем нумерички рачун може бити изведен брзо и прецизно без помоћи спољашњих средстава (на пример манипулативног материјала, оловке и папира, рачунаљке итд.) уз свесно коришћење неке стратегије рачунања (Maclellan, 2001). Менталне стратегије (Verschaffel et al., 2007) могу се дефинисати као „паметне” методе рачунања засноване на разумевању основних карактеристика система бројева и аритметичких операција, као и добро развијеном осећају за бројеве. Менталне стратегије се у суштини разликују од алгоритма цифарског рачунања у следећем (Linsen et al., 2015): 1) рачуна се бројевима, а не цифрама; 2) не постоји само један исправан поступак рачунања; 3) бројеви се обично налазе у хоризонталном запису и 4) има мање писане нотације или се уопште не ослања на њу. Ментална аритметика искључује цифарско рачунање (у нашем образовном систему писмени поступак), већ се рачуна бројевима. То значи да разлику 78 – 23 рачунамо (на пример) као 78 – 20 = 58, 58 – 3 = 55, а не као 8 – 3 = 5, 7 – 2 = 5. Навешћемо једноставан и очигледан пример менталног рачуна. Ученик рачуна збир 5 + 6 на следећи начин: 5 + 5 јесте 10, а 6 је за један веће од 5, зато 5 + 6 јесте 11”. У наведеном примеру бројеви се третирају као количине, а не као цифре. Овакве методе су више смислене и концептуално засноване, тако да ће позитивно утицати на развој математичких способности. Рачунање применом менталних стратегија може укључивати писане ознаке, нпр. када се записује један или више парцијалних резултата, али њихово коришћење није доминантно (Linsen et al., 2015). Као доминантну карактеристику менталне аритметике Вершафел и сарадници (Verschaffel et al., 2010b) виде флексибилно прилагођавање структури проблема. На пример, разлику када је умањилац мали број, као у примеру 72 – 8, рачунамо директним одузимањем 8 од 72 (72 – 2 = 70 и 70 – 6 = 64), док вредност израза, када је разлика умањеника и умањиоца мала, рационално је рачунати допуњавањем умањиоца, односно стратегијом индиректног сабирања (72 – 66: 66 + 4 =70 и 70 + 2 = 72, 4 + 2 = 6).

2.2.1. Стратегије менталног рачунања

Ментални рачун укључује широк спектар стратегија, што показује велики број истраживања (нпр. Fuson et al., 1997; Baek, 1998; Ambrose et al., 2003; Sherin & Fuson, 2005; Cai, 2006; Verschaffel et al., 2007; Anghileri, 2008; Torbayns et al., 2009; Peltenburg et al., 2012; Selter et al., 2012). Истраживања показују да ученици у ситуацијама у којима се подстиче проблемско решавање задатака и стимулише развој стратегија могу да осмисле и примењују широк степен формалних и неформалних стратегија у рачунању (Torbayns et al., 2009; Cai, 2006), што је велики показатељ да ли постоји концептуално разумевање. Осмишљавање интуитивних стратегија рачунања документовано је у бројним истраживањима (нпр. Carpenter et al., 1993; Baek, 1998; Fuson et al., 1997; Ambrose et al., 2003; Verschaffel et al., 2007; Peltenburg et al., 2012; Selter et al., 2012; Schulz & Leuders, 2018). Уколико сумирамо претходна истраживања, видимо да се наведене класификације стратегија менталног рачуна одузимања донекле преклапају, с тим да аутори користе различите називе за исте стратегије. Већина класификација дечјих поступака за рачунање може се класификовати у три групе које су уско повезане са начином разумевања бројева:

1) Стратегије у којима се виде бројеви првенствено као предмети који се броје и стратегије се ослањају на бројање;
2) Секвенционалне стратегије у којима се виде бројеви са децималном структуром и у којима се операције врше у односу на децималну структуру;
3) Различите стратегије засноване на аритметичким својствима.

Постоје фундаменталне разлике између „изумљених” (самостално осмишљених) и стандардних алгоритама. Стандардни алгоритми развијали су се вековима, они су ефикасни, воде тачном прорачуну и углавном су далеко од њихових концептуалних основа. Они се системски обрађују у настави и у њој најчешће користе. Алтернативне стратегије су оне стратегије које служе као олакшице у рачуну, могу да убрзају рачунање и погодније су на неким примерима него стандардни алгоритми. Ученици их могу спонтано, интуитивно развијати (до неке мере), а могу бити и научени. Изумљени алгоритми се изводе директно из појмова бројева и разумевања декадне основе, темељних принципа операција и односа између операција. Компактна нотација стандардних алгоритама има тенденцију да прикрива темељне принципе због којих су алгоритми исправни. За већину изумљених алгоритама темељни појмови и структура су уочљивији.

Постоје многи истраживачки радови који показују да су ученици који нису учили да рачунају вишецифреним бројевима самостално „изумели” широк спектар стратегија рачунања. У литератури се такве стратегије називају *интуитивним* или *изумљеним* стратегијама. Навешћемо стратегије менталног рачуна, које су идентификовали бројни аутори (Fuson et al., 1997; Verschaffel et al., 2007; Peltenburg et al., 2012; Selter et al., 2012):

1) Стратегије разлагања (декомпозиције) укључују разлагање на декадне суме и њихово одузимање/сабирање (499 – 268: 400 – 200 = 200, 90 – 60 = 30, 9 – 8 = 1, 200 + 30 + 1 = 231);
2) Секвенционалне стратегије подразумевају одузимање редом, почев од највеће декадне суме умањиоца (457 – 298: 457 – 200 = 257, 257 – 90 = 167, 167 – 8 = 159);
3) Комбинована метода (mixed methods) јесте комбинација секвенционалне и декомпозиционе методе (87 – 39: 80 – 30 = 50, 7 – 7 = 0, 50 – 2 = 48);

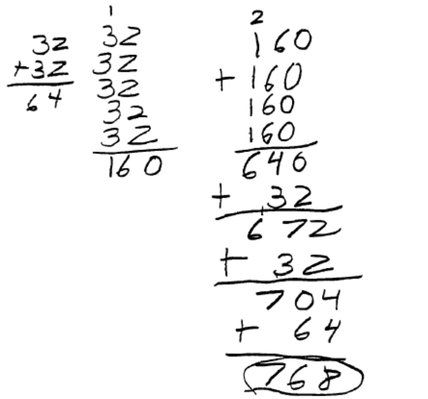
4) Стратегије компензације: а) одузети „округли” број, компензовати (83 – 79, 83 – 80 = 3, 3 + 1 = 4) и б) балансирање: одузети исти број од оба броја како би се поставио једноставнији проблем (83 – 79, 84 – 80 = 4);
5) Индиректно сабирање: допуњавање умањиоца до умањеника (62 – 58: 58 + 2 = 60, 60 + 2 = 62, 2 + 2 = 4);
6) Индиректно одузимање: одузимати од умањеника док се не достигне умањилац (62 – 58 : 62 – 2 = 60, 60 – 2 = 58, 2 + 2 = 4).

Слично, издвојићемо стратегије менталног сабирања (Fuson et al., 1997; Verschaffel et al., 2007; Peltenburg et al., 2012; Selter et al., 2012; Lemonidis, 2016):

1) Добројавање/одбројавање
   а) јединица: 48 + 45: 48, 49, 50 ...;
   б) десетица: 48 + 45: 48 + 10 = 58; 58 + 10 = 68; 68 + 10 = 78; 78 + 10 = 88; 88 + 5 = 93;
2) Декомпозиција: 48 + 45: 8 + 5 = 13; 40 + 40 = 80; 80 + 13 = 93;
3) Секвенционална стратегија: 48 + 45: 48 + 5 = 53; 53 + 40 = 93 или 48 + 40 = 88; 88 + 5 = 93;
4) Комбинована метода: 48 + 45: 40 + 40 = 80; 80 + 8 = 88; 88 + 5 = 93;
5) Холистичке методе:
   а) Компензација: 48 + 45: 40 + 45 = 95; 95 – 2 = 93;
   б) Балансирање: 48 + 45: 50 + 43 = 93;
6) Дуплирање: 45 + 45; 90 + 3 (или 48 + 48; 96 – 3).

Различите стратегије рачунања промовишу дубље разумевање структуре бројева и њихових својстава (Sherin & Fuson, 2005; Anghileri, 2008) и помажу ученицима да интегришу чињенице у њихова кохерентна знања. Истраживања доследно показују да је поучавање деце стратегијама менталног рачуна ефикасније од прекомерног понављања вежби и учења (меморисања) алгоритама (Baroody, 1985; Smith & Smith, 2006; Woodward, 2006). Тачније, флуентност и флексибилност у рачунању у великој мери се ослањају на стратегије које се развијају при рачунању једноцифреним бројевима, а затим се преносе на рачунање већим бројевима.

Постоје истраживачки докази да ученици могу ефикасно и успешно користити саморазвијене стратегије за ментално множење и дељење бројева са две или више цифара, чак и пре формалне инструкције (Carpenter et al., 1993; Baek, 1998; Ambrose et al., 2003). Многе изумљене стратегије, које ученици конструишу за, на пример, операцију множења, не укључују разбијање проблема на једноцифрена множења. На следећем примеру представљена је стратегија ученика коју је применио при рачунању производа 24 · 32 (Ambrose et al., 2003: 315):



Симболички поступак можемо описати као:

$$\begin{aligned}24 \cdot 32 &= (20 + 1 + 1 + 2) \cdot 32\\ &= ((4 \cdot 5) + 1 + 1 + 2) \cdot 32\\ &= ((4 \cdot 5) \cdot 32) + (1 \cdot 32) + (1 \cdot 32) + (2 \cdot 32)\\ &= (4 \cdot (5 \cdot 32)) + 32 + 32 + (2 \cdot 32)\\ &= (4 \cdot 160) + 32 + 32 + 64\end{aligned}$$

У стандардном алгоритму множења једноцифрени бројеви се множе без обзира на вредности које цифре представљају. Уместо тога, ученици показују тенденцију да задрже барем један од чинилаца и да поједноставе рачун.

Менталне стратегије множења вишецифрених бројева сврставају се у четири категорије (Baek, 1998; Ambrose et al., 2003):

1) Стратегија директног моделовања (коришћење конкретних модела и цртежа). Проблем: „Ако има 6 разреда и 23-оје деце у сваком разреду, колико деце укупно има?

   Ученик ће цртицама, кружићима и сличним графичким знацима представити сваку јединицу пребројавања.
2) Стратегије допуњавања (засноване на прогресивно ефикаснијим техникама за сабирање и дуплирање): $6 \cdot 23$: $23 + 23 = 46$, $23 + 23 = 46$, $23 + 23 = 46$; $46 + 46 + 46 = 138$.
3) Стратегија растављања (растављање једног од чинилаца на збир два или више сабирака): $14 \cdot 177 = 5 \cdot 177 + 5 \cdot 177 + 4 \cdot 177$.
4) Стратегије компензације (сагледавање и прилагођавање стратегија бројевима у задатку): $17 \cdot 70 = 20 \cdot 70 - 3 \cdot 70$.

Дељење је уопште веома захтевно за ученике, чак и у вишим разредима. Често традиционални алгоритми засновани на цифарском рачунању замењују флексибилније коришћење (неформалних) стратегија решавања заснованих на бројевима. У студији Шулца и Лидерса (Schulz & Leuders, 2018) идентификоване су следеће стратегије менталног дељења, које се посматрају као модели засновани на концептуалним основама дељења.

1) Разлагање и примена мултипликативних стратегија:
   а) Декомповање дељења ($450 : 15 = 50 : 5 : 3$);
   б) „Заједнички чинилац дељеника и делиоца" ($450 : 15 = 90 : 3$);
2) Допуњавање и одузимање:

   Допунити дељеник до већег броја који је дељив делиоцем, па одузети парцијални резултат ($294 : 6 = 300 : 6 - 6 : 6$);
3) Дељење и сабирање:

   Разложити дељеник на бројеве дељиве делиоцем ($294 : 6 = 240 : 6 + 54 : 6$);

4) 10 · N обрасци
   а) Поделити дељеник са 10, па парцијални резултат помножити са 10 (450 : 15 = ?; 45 : 15 = 3; 3 · 10 = 30);
   б) Поделити дељеник и делилац са 10 (360 : 40 = 36 : 4);
5) Ментални рачун:
   Нема начина за решавање, само тачан резултат (450 : 15 = 30);
6) Дељење и сабирање: Дељеник разложити на декадне суме, сабрати делимичне резултате (1800 : 200 =1000 : 200 + 800 : 200);
7) Понављано сабирање или одузимање. Одузмати или додавати делилац све док се не добије 0 или дељеник (450 : 90 = ?; 450 – 90 – 90…).

Аутори наглашавају да је дељење вишеструких десетица бројем 10 ученицима једноставно. Али то не показује концептуално разумевање структуре броја и операције. Ученици не могу разумети правило „уклоните нуле на крају дељеника како бисте их лакше поделили и на крају додајте нуле количнику" уколико то правило није утемељено на одређеним активностима. То често раде без разумевања ефекта њихове манипулације о односу дељеника, делиоца и резултата. Ученици у наведеној студији нису били у стању да објасне зашто ова манипулација доводи до исправног решења за следећи поступак: „2700 : 9 = ?, уклоните две нуле, израчунајте 27: 9 = 3, додајте нуле опет, тако да је резултат 300". Правила и алгоритми који су ученицима представљени, а не укључују њихов когнитивни напор у формулисању тих правила и алгоритама неће бити подложни флексибилној и адитивној примени на нове проблеме.

Математичко резоновање вишег нивоа размишљања има за циљ постизање разумног резултата узимајући у обзир све аспекте проблема или случаја. У том контексту, када ученици генеришу сопствене стратегије рачунања, ментално рачунање се може посматрати као мишљење вишег реда. У таквим ситуацијама, пре него што науче стандардне алгоритме (Yang, 2005; Yang & Huang, 2014), ученике треба охрабрити да генеришу стратегије за рачунање на основу свог интуитивног разумевања бројева и рачунских операција. Ментално рачунање је процес размишљања вишег нивоа у којем је стварање стратегије исто толико важно колико и њено извршење (Sowder, 1992). Развој различитих стратегија, посебно у циљу решавања рутинских проблема отвореног типа од стране ученика, може се посматрати као показатељ доброг математичког резоновања и размишљања на високом нивоу.

Као доминантну карактеристику менталног рачуна видимо прилагођавање стратегија структури задатка. Стратешко понашање укључује препознавање циља, те избор средстава којима се тај циљ може остварити. Стратешка флексибилност у менталном рачунању односи се на степен у коме је начин решавања под утицајем околности (Star & Seifert, 2006). Торбејнс и сарадници (Torbeyns et al., 2006) сматрају да се различите околности односе на карактеристике конкретног задатка, индивидуалне карактеристике ученика или на контекстуалне варијабле, као што је оно што се највише вреднује у друштвено-културном окружењу (учионици). Блете и сарадници (Blöte et al., 2001) наводе да ученик поседује флексибилност у менталном рачунању ако бира стратегије у зависности од карактеристика бројева у задатку. Вершафел и сарадници (Verschaffel et al., 2009b) сматрају да значај различитих врста стратешке флексибилности у оквиру менталног рачуна зависи од система вредности и погледа на математичко образовање. На пример, ако наставник тражи да ученици раде једноставне задатке ефикасно и са мало труда, онда стратешка флексибилност не може бити развијена (Imbo & Vandierendonck, 2006).

Значај флексибилног менталног рачуна не огледа се само у користи за ученика у конкретном рачунању, већ и у томе што је тај рачун почетак или показатељ развијања математичких способности и мишљења које превазилазе знање чињеница и процедурално знање (Threlfall, 2009). Постоји много студија које показују да ученици са знањем стратегија не доносе увек рационалне одлуке при избору стратегије (Blöte et al., 2001). То може бити повезано са метакогнитивним питањима, са питањем напора за избор стратегија, са мотивационим факторима. Ученици најчешће примењују стратегију коју виде као добропознати алгоритам и сигурнији су да ће успети (Baranes et al., 1989), или зато што верују да се од њих очекује да ураде баш то. Специфичан пример који су дали Блете и сарадници (Blöte et al., 2001) јесте употреба стратегије компензације на примеру 84 – 29, где су ученици као одговарајућу стратегију навели компензацију (прво се одузме 30, 84 – 30), али је нису користили зато што нису били сигурни да ли затим треба да додају или одузму 1. Таква несигурност произилази из неадекватног концептуалног знања о бројевима и неразумевања одузимања.

Избор стратегије зависи од више фактора (Peltenburg et al., 2012): карактеристика ученика, као и њихове опште математичке способности, узрасног нивоа, карактеристике наставе (да ли су ученици учили одређену процедуру), утицаја карактеристика задатка који укључује бројеве у задатку и контекста задатка (реални проблеми или голи контекст). У циљу јаснијег разумевања стратегија рачунања, ученицима треба давати контекстуалне проблеме. Неколико студија (Blöte et al., 2000; Van den Heuvel-Panhuizen, 2005; Torbayns et al., 2009) показује да голи контекст проблема тешко објашњава употребу индиректног сабирања, што се може објаснити присуством знака минус који наглашава „узимање” акција. Контекстуални задаци не садрже симбол операције и стога могу сугерисати различите стратегије одузимања, а ситуација описана у контексту проблема може подстаћи употребу одређене стратегије (Van den Heuvel-Panhuizen, 2005). Барем у раним фазама развоја, измишљене стратегије укључују неформалне методе писане подршке, нарочито како би се помогло у резоновању и ублажиле краткотрајне потешкоће у памћењу. Међутим, за многе ученике те исте стратегије често постају менталне методе. Нема математичких разлика између добро измишљених стратегија и оних које се користе за менталну математику. Назвати ове стратегије „измишљеним” незгодно је јер сугерише да их сваки ученик мора измислити. У заједници ученика у учионици, изумљене стратегије могу и треба да деле ученици, а други их усвајају када и ако виде како стратегије имају смисла. Ученике треба подстицати да користе све методе које желе и да употребљавају само оне које разумеју и могу објаснити. То значи да ученике треба подстицати да „позајмљују” стратегије од својих вршњака. Колико ученике треба подстаћи да буду креативни и „измисле” своје методе рачунања? Хердсфилд и сарадници (Heirdsfield et al., 2007) говоре о изазовима одржавања равнотеже између експлицитно уведених поступака и развоја сопствених ученичких стратегија. Уколико се ученици превише охрабрују, елаборација сопствених поступака постаје вреднија од ефикасности; премало охрабривања доводи до тога да ученици постају зависни од једног поступка.

Колико од ученика треба тражити да објасне и експлицирају своје методе и стратегије рачунања? Уколико наставник превише инсистира на објашњењу поступака, ученици ће радије бирати методе које се лако артикулишу, а ако не инсистира на томе, поставља се питање разумевања поступака и стратегија.

Приступ у коме ученици самостално измишљају, креирају стратегије има бројне предности:

- Ученици који измишљају сопствене стратегије формирају веровање да су њихове интуитивне методе валидне и да су математички појмови и поступци уопштени на основу значења која они могу сопственим когнитивним напором разумети.
- Поступци стварања стратегија промовишу концептуално разумевање операција и декадног бројевног система. Када ученици изграде сопствене стратегије на њиховим претходним математичким знањима и сопственим когнитивним напором, ново знање је интегрисано у постојеће структуре, што значи да се боље разуме и лакше памти.

- Ученици развијају широк репертоар статегија и метода, као и флексибилност да одаберу ону која је најприкладнија у било којој конкретној ситуацији.
- Поступак осмишљавања стратегија укључује решавање проблема које ученици не знају да реше, па стичу искуство решавања нерутинских проблема. Док ученици осмишљавају сопствене методе, развијају упорност и самопоуздање у решавању тежих проблема.
- Ученици су мотивисанији када не морају да уче стандардне папир–оловка алгоритме. Људи су више заинтересовани за оно што могу да разумеју, а ученици углавном разумеју сопствене методе.
- Ученици развијају способност трансформације било ког проблема у еквивалентни, лакши проблем. На пример, 47 – 18 може се трансформисати у 49 – 20.
- Ученици развијају значење операција и односа између операција. При рачунању вредности израза 43 – 39 рационално је применити стратегију индиректног сабирања: „Који број морам додати броју 25 да бих добио 37?”

Истраживања показују да постоји повезаност између дечјег разумевања појма броја и њихове способности у менталној аритметици, док је много мања или чак одсутна повезаност са способношћу писменог рачунања (Carpenter et al., 1998; Van den Heuvel-Panhuizen, 2005; Verschaffel et al., 2007; Linsen et al., 2015). Баруди и Тиликаинен (Baroody & Tiilikainen, 2003) такође сматрају да је разумевање значења и смисла броја у корелацији са способношћу менталног рачуна, а избор стратегије доминантан је показатељ способности у менталној аритметици.

Фоксманов и Бешузенов налаз (Foxman & Beishuizen, 2002) сугерише да примену стратегија писменог рачунања треба смањити одложеним учењем алгоритама. Ово имплицира да не „заустављамо” учење, као што то предлажу Камиј и Доминик (Kamii & Dominick, 1997), већ мање радикалну, али ипак ефикаснију опцију у виду одлагања овог учења. У литератури је прихваћен став да треба избегавати преурањено поучавање стандардних писаних алгоритама и да се ти алгоритми уводе након дужег рада са конкретним материјалом и менталном аритметиком (Verschaffel et al., 2007).

У Наставном програму Републике Србије за други разред, као објашњење методичког поступка сабирања и одузимања до 100, наводи се следеће: „Потребно је одвојити довољно времена за активности рачунања без коришћења папира и оловке, уз подстицање разговора о различитим поступцима које су ученици применили. Омогућити ученицима слободу избора поступака рачунања. Писмени поступак рачунања није предвиђен у другом разреду" (Pravilnik, 2018:73).

Ово објашњење сугерише развијање и примену стратегија менталног рачунања. Ипак, можемо поставити питање колико аутори уџбеника и наставници примењују и развијају наведене претпоставке.

Наше истраживање (Zeljić et al., 2017) спроведено је са циљем да се испита способност ученика при менталном одузимању, као и да ли ученици поседују стратешку флексибилност у том процесу. Интервјуисано је 66 ученика трећег разреда из две школе у Београду. Задатак ученика је био да израчунају вредност пет израза (605 – 98; 107 – 95; 178 – 96; 95 – 88; 87 – 49). Ученици су добили папир на коме је записан израз и њихов задатак је био да без хартије и оловке израчунају вредност израза, а затим да објасне начин на који су рачунали. Резултати показују да ученици значајно чешће (у односу на остале) користе стратегију цифарског рачунања, а значајно ређе (у односу на остале) користе секвенционалну стратегију. Резултати и коришћене стратегије представљени су у Табели 3.

	Пример, f (%)				
Стратегија	**605-98**	**107-95**	**178-96**	**95-88**	**87-49**
Цифарско рачунање	24 (36.36%)	27 (40.91%)	31 (46.97%)	28 (42.42%)	30 (45.45%)
Комбинована метода	18 (27.27%)	12 (18.18%)	12 (18.18%)	16 (24.24%)	18 (27.27%)
Секвенционална стратегија	1 (1.52%)	1 (1.52%)	1 (1.52%)	2 (3.03%)	2 (3.03%)
Декомпозиција	8 (12.12%)	11 (16.67%)	12 (18.18%)	6 (9.09%)	8 (12.12%)
Индиректно сабирање	2 (3.03%)	5 (7.58%)	7 (10.61%)	11 (16.67%)	8 (12.12%)
Компензација	12 (18.18%)	10 (15.15%)	3 (4.55%)	0 (0%)	0 (0%)
Индиректно одузимање	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)
Без објашњења	1 (1.52%)	0 (0%)	0 (0%)	3 (4.55%)	0 (0%)

Табела 3: Коришћење стратегија менталног одузимања ученика трећег разреда (Zeljić et al., 2017)

Коришћење поступка цифарског рачунања, када ученици долазе до тачног резултата, илустроваћемо следећим парадигматским примером: 605 – 98: 5 – 8 → „не може”. 15 – 8 = 7; 9 – 9 = 0 „и остаје нам 5 па је резултат 507”. Може се уочити да је цифарско рачунање у овом примеру доста сложено, па постоји велика могућност грешке. Најједноставнија стратегија била би компензација, односно рачунање на следећи начин: 605 – 98: 607 – 100 = 507. У наведеној стратегији заокружујемо умањилац на 100 и самим тим додајемо и умањенику 2. Могуће је и променити умањеник тако што ћемо број „заокружити” на вишеструку стотину. Ученици су, у највећем броју (њих 24), применили алгоритам писменог (цифарског) рачунања. Нефлексибилност приликом избора стратегије најбоље илуструје четврти пример. За пример 95 – 88 очекивано је да ученици трећег разреда одмах виде одговор. Најједноставнија стратегија је индиректно сабирање јер су бројеви „близу”, па је могуће умањилац допунити до умањеника, али је ту стратегију користило само 11 ученика. Погодна и очекивана стратегија је и индиректно одузимање, где је потребно одузети пет јединица да би се дошло до вишеструке десетице, а потом још две јединице до умањиоца, а ту стратегију није користио ни један ученик. Ученици који су користили индиректно сабирање, односно који су уочили да је разлика између бројева мала, коментарисали су: „близу су”, „то је лако: 2 + 5 = 7”. Да ученици не поседују стратешку флексибилност показује и чињеница да су, углавном доследно, бирали исту стратегију за све примере иако су примери изабрани тако да њихова структура одговара различитим стратегијама рачунања.

Ученици су статистички значајно више грешили када су користили алгоритам цифарског рачунања. Најчешће грешке које су правили у том поступку јесу следеће: пермутације цифара, проблем сагледавања резултата као броја (резултат интерпретирају само набрајањем цифара: пет–нула–седам), ученици заборављају да су „позајмили” једну десетицу, одузимају цифре умањеника од цифре умањиоца. На примеру 87 – 49 илустроваћемо грешку када ученици заборављају да су позајмили десетицу: *7 минус 9 не може; 17 минус 9 је 8; 8 минус 4 је 4; резултат је 48.* Прекомерна и неадекватна примена стандардних алгоритама доводи до тога да ученици не размишљају о корацима алгоритма и самим тим не уочавају грешке које праве у поступцима рачунања. Потребу и значај учења и примене стандардних алгоритама не споримо, али методички поступци у којима се алгоритми представљају без развијања значења воде меморисању и учењу без разумевања. Самим тим, алгоритми се не могу примењивати флексибилно и представљати користан начин за решавање проблема.

2.3. Разумевање стандардних алгоритама писменог рачунања

Идеја о развијању адаптивних и флексибилних стратегија менталног рачунања не значи и „избацивање" стандардних алгоритама писменог рачунања. Та идеја се интерпретира као одлагање поучавања алгоритама писменог рачунања након што се развију идеје значења броја, операција и односа. Тако циљ почетне наставе аритметике не можемо схватати уско, као вештину рачунања великим бројевима. Употребом компјутера у савременом добу, вештине рачунања великим бројевима изгубиле су своју практичну вредност. Ученици су ослобођени потребе да вежбају срачунавање дугих нумеричких израза с механичком брзином и прецизношћу. Нема сумње да је развијање вештина рачунања један од примарних задатака почетне наставе аритметике, али то је дидактички задатак који заузима значајно место тек пошто се ученици добро упознају са значењем операција и са њиховим основним својствима.

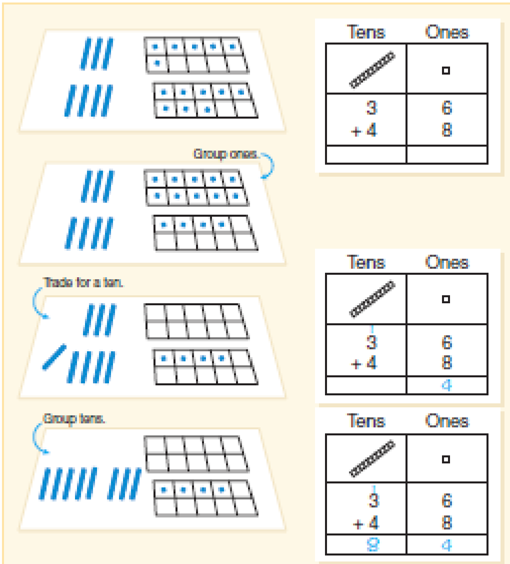
Када ученици науче стандардне алгоритме, често их примењују, али многи не успеју да конструишу значење за алгоритме. Без конструкције значења за алгоритме, ученици се више концентришу на правила алгоритма него на „суштину" система нумерације – бројеви имају различите вредности у зависности од њиховог места. Главни фокус у поучавању писмених алгоритама није меморисање низа корака. Важно је да ученици разумеју зашто алгоритам функционише и да могу да га објасне.

Ван де Вале и сарадници (Van de Walle et al., 2013: 226) наводе следеће фазе поучавања (и учења) писмених алгоритама:

1) Почети само са моделима. На почетку ставити фокус на регруписање јединица без нумеричког записивања процеса. Дозволити да ученици проблем решавају сами. Обезбедити довољно времена за манипулацију или цртање, а затим ученици могу да објасне шта су урадили и зашто. Урадити један или два примера на часу са пуно дискусије много је продуктивније од

решавања великог броја примера заснованих на правилима која ученици не разумеју;

2) Записивање процеса. Таблица месних вредности помоћи ће ученицима да упишу бројеве у колоне док моделују сваки корак (Слика 4).



Слика 4: Дидактички материјал за развијање значења алгоритма цифарског сабирања (Van de Walle et al., 2013: 227)

У наведеном поступку важно је користити структурирани дидактички материјал, који имитира декадну основу бројевног система. Различите репрезентације сугеришу различите постуке рачунања.

Различити аутори су своја истраживања усмерили на разматрања процеса и корака при увођењу стандардних алгоритама рачунања. У том процесу наглашава се употреба бројевних слика и структурираног дидактичког материјала, као и процес превођења значења са модела на математички запис. У другом моделу увођења алгоритма (Fan & Bokhove,

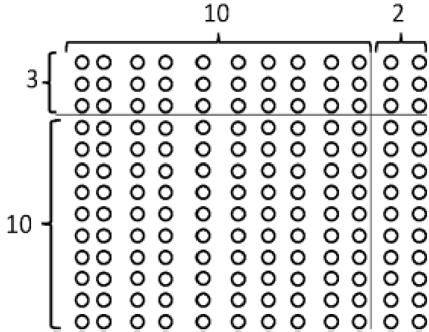
2014) наглашавају се три когнитивна нивоа, али је разлика у томе што се као први ниво наводи меморисање алгоритма. Три когнитивна нивоа предложеног модела увођења алгоритма биће објашњена у даљем тексту.

Когнитивни ниво 1: Знање и вештине. Кључна активност на овом нивоу јесте памћење алгоритма. На овом нивоу производ учења је запамтити алгоритам и како се он може користити у одређеној ситуацији.

Когнитивни ниво 2: Разумевање и примене. На овом нивоу ученици знају зашто алгоритам функционише и како се може користити у релативно сложеној ситуацији. Аутори наводе да су у раду са наставницима основних школа приметили да и наставници изоловано памте алгоритам и нису у стању да објасне зашто то раде, иако су знали како се добија сваки број. Један од алгоритама коришћен у истраживању са наставницима јесте и следећи (Fan & Bokhove, 2014: 487):

$$
\begin{array}{ccc}
 & 1 & 2 \\
\times & 1 & 3 \\
\hline
 & 3 & 6 \\
1 & 2 & \\
\hline
1 & 5 & 6
\end{array}
$$

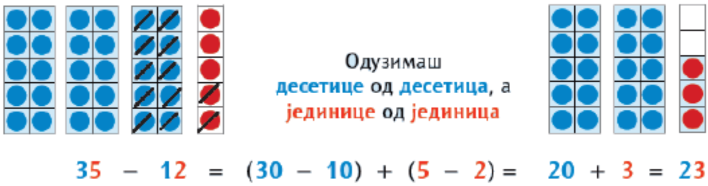
Већина наставника који су учествовали у истраживању није могла интерпретирати алгоритам као израз (10 + 2) · (10 + 3), а многи од њих су још рекли да „то нема много смисла”. Аутори даље истичу да визуелно представљање коришћењем бројевних слика помаже да се алгоритам повеже са значењем (Слика 5).



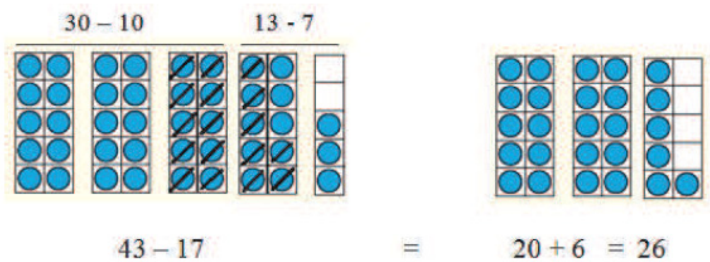
Слика 5: Визуелна репрезентација стандардног алгоритма писменог множења (Fan & Bokhove, 2014: 12–13)

Когнитивни ниво 3: Евалуација и конструкција. Учење на овом нивоу захтева од ученика да се више ангажују у самосталном размишљању и саморефлексији. Треба напоменути да се учење треба одвијати на различитим нивоима истовремено иако су нивои учења хијерархијски, а не нужно и једноставно од нижег ка вишем нивоу.

Разумевање алгоритама је дефинисано као резултат изградње веза или односа између репрезентација математичких идеја које се тичу количина, начина „разградње" количина и тога како их прегруписати/рекомпоновати (Marjanović & Mandić, 2009b). У том смислу, ученике треба подстицати да моделују дидактички материјал (манипулативне и бројевне слике) и тако изражавају значење алгоритама. Такође, треба их подстицати и да писањем разложених поступака изражавају значење скраћеног (цифарског) рачунања. Ако се стандардни алгоритми уводе поступно и подучавају правилно, са разумевањем, они могу поспешити разумевање бројевног система и самих операција. Истражујући алгоритме, ученици могу изградити способност процене и поспешити менталне и стандардне стратегије рачунања. Марјановић (Marjanović, 2014) сугерише да је при обради алгоритама рачунања увек добро почети са сликовним представљањем алгоритма јер видети значи и разумети на најбољи начин. Интерпретирање сликом и изражавање поступка симболички воде потпуном разумевању поступка рачунања. Навешћемо бројевне слике, које дају значење алгоритмима (Слике 6 и 7):



Слика 6: Бројевне слике за развијање значења алīоришма цифарскоī одузимања (Marjanović, 2014: 5)



Слика 7: Бројевне слике за развијање значења алīоришма цифарскоī одузимања (Marjanović, 2014: 6)

Дакле, приликом увођења појма алгоритма крећемо од иконичког представљања, које сугерише значење, а затим то значење језички и симболички изражавамо (Marjanović et al., 2014). То значи да поред слике (иконичко представљање) треба да постоји и симболички запис којим изражавамо значење представљено сликом. Употреба иконичких средстава не пружа сама по себи довољно услова да се формирају појмови и развије мишљење. Разумевање је могуће у самој области опажања, али само ако је представа обликована тако да битне структуралне карактеристике визуелно тумачи. Ако слика не успева да суштинске одлике опажајно прикаже, она је бескорисна. Дидактички материјал је правилно структуриран ако имитира декадну основу бројевног система и омогућава слагање/разлагање које одговара одређеном алгоритму.

У прошлости, поучавање стандардним алгоритмима често је значило представљање добро дефинисаних корака, а од ученика се очекивало да их запамте, док су њихово разумевање и способност објашњавања датих алгоритама били занемарени. Данас постоји гледиште које сугерише да се методе, које ће се генерализовати и постати стандардни алгоритми, могу и треба да се развијају, а основа значења јесу визуелни модели. С обзиром на овај нагласак на стварању значења, визуелне репрезентације које се користе треба да подржавају и правилно наглашавају месну вредност цифара.

3. Значај и улога репрезентација у настави математике

Математика је често сматрана тешком и мистериозном науком и то због бројних симбола којима се представљају математичке идеје. Симболи некоме служе као високо ефектно средство мишљења, док другима представљају велику препреку у комуникацији. Са малим бројем карактера за формирање израза, математички симболизам нам омогућава да јасно и сажето пренесемо идеју која иначе, у природном језику, може заузети више редова. Језик симбола је моћан јер отклања многе разлике које стандардни језик одражава и значајно шири његову примењивост. Ипак, бројна истраживања из домена математичког образовања показују да је језик симбола семантички изузетно слаб и да представља тешкоћу за онога који учи прилагођавајући се на различите контексте.

Да проблем разумевања математичке симболике није својствен само „мање надареним људима”, већ да је последица неадекватног приступа учењу, потврђује анализа одломака из биографија четири истакнута мислиоца: Томаса Хобса (Thomas Hobbes 1588–1679), Жан-Жака Русоа (Jean-Jacques Rousseau 1712–1778), Чарлса Дарвина (Charles Darwin 1809–1882) и Бертранда Расела (Bertrand Russell 1872–1970). Хигинсон (Higginson, 1982) анализира одломке из поменутих биографија, а ми ћемо, сходно области којом се бавимо, проучити само оне делове који се односе на њихово искуство при учењу алгебре.

Русо на следећи начин описује свој сусрет са алгебром (према Higginson, 1982: 240):

> „Никада нисам био довољно напредан да бих разумео примену алгебре у геометрији. Није ми се допало да се нешто ради, а да се не види шта се тачно ради. [...] Први пут када сам рачунањем пронашао да је квадрат бинома једнак збиру квадрата првог и другог члана увећаном за двоструки производ првог и другог члана, упркос чињеници да сам био у праву, нисам био у стању да у то поверујем, све док нисам нацртао фигуру на папиру. Није да сам мрзео алгебру, као неку апстрактну ствар, већ сам желео да видим операцију графички представљену; другачије то нисам никако могао да разумем."

У својој биографији Расел пише (Ibid.: 241):

> „Најтежи ми је био почетак алгебре, можда због лошег предавања. Терали су ме да учим напамет: квадрат збира два броја једнак је збиру њихових квадрата увећаним два пута њиховим производом. Нисам имао најјаснију идеју шта је ово значило, и када се не бих могао сетити речи, мој наставник би ме лупио књигом по глави, што није стимулисало мој интелект ни на који начин."

Дарвин је свом пријатељу Хукеру, шеснаест година након што је дипломирао на Кембрицу, писао следеће (Ibid.: 240):

> „Током три године које сам провео на Кембрицу, моје је време било протраћено, што се тиче академских студија, као и време у школи, у Единбургу. Опробао сам се у математици, чак сам пробао са приватним наставником, али је ишло слабо. Рад ми је био одвратан, углавном јер нисам био у стању да видим неко значење у раним корацима алгебре. Ово нестрпљење било је прилично неозбиљно, и након неколико година сам жалио што нисам наставио довољно далеко, барем да разумем нешто од главних, водећих принципа математике, јер ми се чини да људи тиме обдарени имају неко посебно чуло."

Одломци из биографија ових мислилаца показују да су они у свом математичком образовању били одбојни према елементарној алгебри, а разлог томе је што нису могли видети никакво значење у манипулацији симболима. Имали су потешкоће у учењу елементарне алгебре, јер нису успели да развију иконичке представе појмова. Суштина је у томе да је премало пажње посвећено улози представе (слике) у математичком разумевању. Насупрот томе, присутно је готово нескривено одушевљење при учењу геометрије.

Тако Расел пише (Ibid.: 242):

> „Када сам имао једанаест година, почео сам да проучавам Еуклида, а брат ми је био ментор. Ово је био један од значајнијих догађаја у мом животу, подједнако запрепашћујући као и прва љубав. Нисам могао да замислим да на свету постоји било шта тако изврсно."

Хобс се заљубио у геометрију проучавајући Еуклидове елементе. Имао је чак обичај да црта линије по својим бутинама и креветским чаршавима, али се насупрот томе често жалио да је алгебра „претерано цењена" и да људи због тога „не размишљају много о природи и моћи линија" (Ibid.: 242).

Покушајмо да Хобсова, Русоова, Дарвинова и Раселова искуства ставимо у нешто општији контекст. Разлике у доживљају учења алгебре и геометрије не можемо приписати само разликама између алгебре и геометрије као грана математике, већ ситуацијама у којима се алгебра учи инструментално, а геометрија релационо. Природа геометрије је таква да се при учењу ослањамо на слике.

Ђокић и Зељић (Đokić & Zeljić, 2017) истичу да се геометријско резоновање карактерише као интеракција између два аспекта – сликовног (фигуралног) и појмовног. Слике и појмови утичу једни на друге у когнитивној активности (детета или одрасле особе) у неким ситуацијама сарађујући, а у другим супротстављајући се. При учењу алгебре често се математичке идеје представљају само на симболички начин, због чега ученици не разумеју алгебру. Овај проблем може се решити иконичким представљањем математичких идеја, које утемељује њихово значење.

Скемп (Skemp, 1976) говори о томе да неки композитори могу прочитати штампани музички текст и чути звуке музике која је „заробљена" или изражена у нотацији. Већина људи мора чути извођење музике како би знала шта пише у нотном тексту. То је, како тврди Скемп, слично са математиком: за већину људи математика, као и музика, треба да буде изражена у физичкој акцији и људској интеракцији пре симболичког изражавања идеја (као музичке ноте), међусобних односа појмова (попут хармонија) и извођења доказа (као мелодија).

Математички појмови су по природи апстрактни, али им не приступамо као готовим апстракцијама, већ правилно одабраним примерима и погодним начинима представљања подстичемо интуитивно разумевање. Осмислити или одабрати адекватне примере озбиљан је задатак. Осмишљавање и коришћење репрезентација у раном математичком образовању, њихова улога у процесу учења, као и когнитивне активности ученика у раду са различитим врстама репрезентација у фокусу су истраживања последњих година.

Многа деца имају проблема са математичким расуђивањем, који се обично манифестују на узрасту од шест до седам година у основној школи зато што постоји квалитативна промена у активностима и у начину на који се учи (Carruthers & Worthington, 2003). У раном детињству деца не морају да организују своје знање и мисли онако како их организују у каснијем развоју. Аутори износе закључак да постоји велики јаз између конкретног, практичног размишљања и активности деце у раном детињству (можемо рећи у време нашег предшколског образовања – М. З.) и логично-симболичког мишљења које се очекује у каснијем математичком образовању (узраст од седме године). Поланд и Ван Ојерс (Poland & Van Oers, 2007) уводе појам *схематизовање*, који подразумева активност графичког представљања стварности, чиме деца у раном узрасту креирају представе о тој стварности. Помоћу репрезентација, као што су схеме, људи могу да организују своје знање и мисли. У својој студији, под активностима схематизовања аутори подразумевају сваку когнитивну активност усмерену на изградњу и побољшање симболичке представе елемената физичке и социјално-културне стварности. Схематизовање се посматра као ефикасна стратегија која доприноси развоју математичког мишљења. Лонгитудинална студија је показала да активности графичког представљања података из окружујуће реалности деце на узрасту од пет до шест година имају значајан утицај на њихову способност репрезентовања и уопште математичке способности у наредном разреду (седам година).

Један од задатака који су аутори користили је следећи:

Истраживач је причао деци о малом мишу који је ходао по учионици. Миш је након тога пут илустровао на слици испод. Истраживач је питао дете да опише пут миша или да хода тим путем у учионици.

Активност креирања графичког представљања сопствених мисли и процеса мишљења побољшаће математичко резоновање пошто ове стратегије могу да помогну деци да разумеју функцију репрезентација, као што су репрезентација математичких симбола, схема и односа.

Можемо рећи да је поучавање математике засновано на општем консензусу да су математичке идеје исказане „спољашњим" начинима представљања (конкретни материјали, слике/дијаграми, изговорене речи, писани симболи) и да су у даљем процесу учења оне интериоризоване: ментални модели или когнитивне репрезентације (Cooper & Warren, 2011). Репрезентације се могу схватити као општи назив за симболизацију појава спољашњег света, било да су ускладиштене негде у уму или материјално изражене у друштвеном контексту, на пример у учионици (Terwel et al., 2009: 27). Многи истраживачи (Boulton-Lewis & Tait, 1993; Outhred & Saradelich, 1997; Swafford & Langrall, 2000; Diezmann & English, 2001) слажу се да се у настави математике термин *репрезентација* односи на конструкцију, апстракцију и демонстрацију математичких појмова, као и илустрацију решавања проблемских ситуација. Когнитивне теорије развоја мишљења и решавања проблема фаворизују термин *репрезентација*, а истраживачи у другим доменима користе термине *модел* и *моделовање*. Ови други термини често се користе у математици и математичком образовању. По мишљењу многих аутора, и модел и репрезентација су термини који су применљиви у студијама наставе и учења математике (Gilbert & Boulter, 2000; Gravemeijer et al., 2003). Ако постоји разлика између ова два појма, могло би се рећи да је *репрезентација* изгледа општији, свеобухватни појам из когнитивне психологије, док је појам *модел* специфичнији израз који се користи у математичком образовању и природним наукама. У том светлу, Тервел и сарадници дефинишу модел као одређени *структурални облик репрезентације* (Terwel et al., 2009).

Учење математике подразумева апстракцију, јер су ученици ангажовани у трансформацији своје перцепције у процесу формирања менталних слика средствима различитих репрезентација. Дрејфус (Dreyfus, 1991) тврди да су апстраховање и репрезентовање комплементарни процеси. Он истиче како су ова два процеса повезана у процесу учења. Математички односи, принципи и идеје могу се изразити у више структурно еквивалентних репрезентација укључујући објекте из реалног окружења, визуелне представе (тј. слике, дијаграме), вербалне представе (писани и говорни језик) и симболичке репрезентације (бројеви, слова). Дрејфус издваја фазе учења у односу на коришћење и употребу репрезентација: учење креће од коришћења једне репрезентације у првој фази ка способности флексибилног коришћења репрезентација у последњем стадијуму. Конкретно, он је предложио да се процес учења одвија у четири фазе: 1) коришћење једног начина представљања; 2) коришћење више од једног начина представљања паралелно; 3) прављење везе између паралелних репрезентација; 4) интегрисање представа и флексибилано „пребацивање” са једног начина представљања на други. При учењу математичких појмова, ученици почињу са коришћењем и разумевањем једне репрезентације. У другом стадијуму, неколико репрезентација једног математичког проблема користе се паралелно, при чему се истиче да прелазак на апстрактне појмове зависи од веза између репрезентација које су формиране. Следећи стадијум је постигнут када ученици разумеју везе међу репрезентацијама. На трећем стадијуму јаке везе дозвољавају ученицима да мењају репрезентације, при чему постају свесни основних појмова и позитивно утичу на апстракцију. У четвртој фази дешава се интеграција између различитих репрезентација: везе, односи, заједничка својства чине апстрактни појам, док се специфични аспекти репрезентације повлаче у позадину. Када је процес завршен, формиран је апстрактан појам о датом појму. Када ученик буде желео да реши неки проблем који укључује дати појам, он ће морати да флексибилно изабере репрезентацију коју ће користити. Једном, када је четврти ступањ постигнут, може се рећи да су ученици формирали апстрактну идеју математичког појма.

Дакле, четири фазе могу бити посматране као повећање нивоа разумевања које појединац има: ограничено разумевање појмова у првој фази и апстрактно разумевање појмова у последњој фази. Илустроваћемо ово тврђење на једноставном примеру, примеру појма операције сабирања. Дете пре поласка у школу може препознати две групе објеката (два дисјунктна скупа) и одредити укупан број елемената. У следећој фази дете прихвата репрезентације у којима су елементи апстрактно представљени у виду тачкица, квадрата и сл. и разуме да та репрезентација симболише више конкретних ситуација (занемарује се природа елемената). Такође, поласком у школу деца прихватају симболичку репрезетацију збира, као и репрезентацију у виду текстуалног задатка. У трећој фази, ученици разумеју да све репрезентације представљају исти појам, а у последњој могу да их користе флексибилно и да претварају једну репрезентацију у другу.

Дувал (Duval, 1999) предлаже оквир за анализу когнитивног функционисања математичког мишљења и услове за учење. Према његовом мишљењу, језгро имплементација (теорија репрезентација) јесте препознавање утицаја семиотичких репрезентација на когнитивне активности. То је из његове перспективе најинтересантнија тачка анализирања својства репрезентација. Он је тврдио да ученици уче у оквиру различитих регистара (облика представљања) који су од кључног значаја у разумевању математичког мишљења ученика. Дувал (Duval,

2006) сматра да разлике између различитих начина представљања (које он назива регистрима) имају важне ефекте на учење: претварање репрезентација из једног регистра у други (нпр. цртање графика функције која је дата у алгебарском облику или одређивање алгебарске једначине за дати график) подразумева разумевање математичке структуре оба начина представљања и важна је активност за развој математичког мишљења. Дувал (Duval, 1999) издваја три важна захтева за учење математике: 1) ученици треба да упореде сличне репрезентације у истом регистру и 2) да претварају репрезентације из једног регистра у други, а 3) наставници треба да прате специфичан начин рада и активност ученика како би се разумеле математичке активности. Без увиђања разлике између објекта и његове представе није могуће разумети математику. Како би одвојио објекат од његове представе, ученик мора бити способан да представи математички појам у најмање два семиотичка система.

Сваки репрезентациони систем доприноси дубљем разумевању математичких идеја нудећи одређени тип језика којим се математичке идеје изражавају прецизно и на кохерентан начин, чиме се обезбеђују вишеструки извори и путеви за развој концептуалног разумевања математике. Став већине аутора јесте да је течно и флексибилно коришћење „структурално истих" вишеструких репрезентација математичких појмова повезано са концептуалним разумевањем тих појмова. Способности стварања, организовања, интерпретације, као и успостављања везе између репрезентација важне су активности за развој математичког мишљења (Panasuk, 2011). Процес развијања апстракције код ученика Панасјук посматра као процес трансформације ученичких перцепција у менталне слике путем употребе различитих репрезентација. Тал читаву школску математику посматра као комбинацију визуелних представа, укључујући геометријске слике и графиконе, заједно са симболичким калкулацијама и манипулацијама (Tall, 2008). Коришћење више репрезентација за представљање истог појма може помоћи ученицима да побољшају своје учење, јер им помаже да увиде и изразе општост појма. Када су ученици способни да препознају исти однос/појам представљен у различитим модалитетима (вербално, дијаграмом и симболички), то значи да су развили концептуално разумевање односа/појма и повезали процедуралне и структуралне вештине.

3.1. Врсте репрезентација

Када је реч о различитим врстама репрезентација, углавном се разликују две групе: интерни и екстерни системи репрезентација (Goldin & Shteingold, 2001). Важно је разликовати спољашње системе представљања од унутрашњих, психолошких репрезентативних система појединаца. Спољашњи системи крећу се од конвенционалних симболичких математичких система (као што је нумерација са декадном основом, формална алгебарска нотација, бројева права и сл.), до структурираног окружења за учење (на пример, манипулативни материјали). Интерни системи, за разлику од екстерних, укључују личне конструкције симболизације ученика и додељивање значења математичким записима, као и њихов природни језик, њихове визуелне слике и просторне представе, њихове стратегије решавања проблема и хеуристику. Интеракција између интерних и екстерних репрезентација од суштинског је значаја за ефикасно поучавање и учење. Интерне и екстерне репрезентације су међусобно повезане и због тога сваки појединац треба да разуме и да успешно користи екстерне репрезентације како би их повезао са интерним репрезентацијама и разумео их, а и како би могао да на основу интерних репрезентација гради друге екстерне репрезентације. Иако је математика изузетно прецизна дисциплина, неизбежно је да се појави двосмисленост у тумачењу и екстерних и интерних репрезентација и она може бити извор когнитивних препрека у учењу.

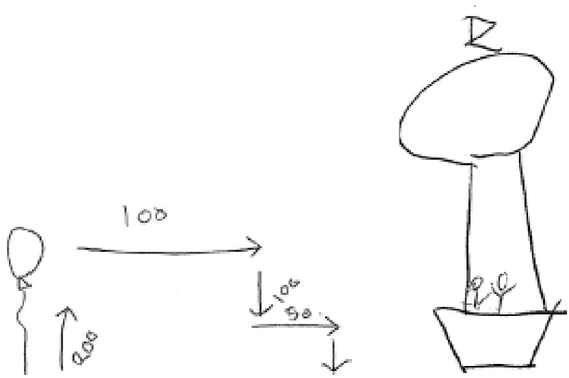
У литератури се поред екстерних и интерних (симболичких и менталних) репрезентација помињу и конкретне и апстрактне репрезентације. Динг и Ли (Ding & Li, 2014) апстрактне репрезентације схватају као коришћење симбола за приказивање математичких концепата и идеја, док конкретне репрезентације подразумевају употребу физичких објеката (манипулацију реалним предметима), визуелних репрезентација (слике, дијаграми, схеме) за представљање математичких појмова и идеја и приказивање апстрактних идеја у ситуацијама из стварног света (текстуални задаци). Аутори текстуалне задатке сврставају у конкретне репрезентације зато што ти задаци имају потенцијал да понуде незаборавне слике (асоцијативне слике у нашем уму из свакодневног живота) које могу бити камен темељац за наставнике и ученике у грађењу апстрактних концепата и дискусију о њима. Задаци са текстуалним контекстом активирају учениково свакодневно искуство. Апстрактне репрезентације су моћније од конкретних репрезентација јер се уздижу изнад контекста за расуђивање и решавање проблема. Оне имају предност над конкретним репрезентацијама при решавању комплексних проблема. Са друге стране, саме апстрактне репрезентације су неефикасне и непокретне. Такође, и ослањање само на конкретне репрезентације омета учење и одвлачи пажњу са битних својстава (небитна својства могу се тумачити као суштинска). Аутори због тога истичу важност повезивања и преласка са конкретних на апстрактне репрезентације. Појам апстрактности је релативан, јер се специфичне апстрактне репрезентације (нпр. $(65 + 35) \cdot 5 = 65 \cdot 5 + 35 \cdot 5$) могу развити у општије репрезентације (као што је $(a + b) \cdot c = ac + bc$) (Mason, 2008).

Превише ослањања на конкретне репрезентације може ометати учење. Конкретни материјали обезбеђују практични контекст који може активирати стварни свет знања током учења (Schliemann & Carraher, 2002), могу се индуковати физички и акција се може замислити, што подстиче памћење и разумевање (Glenberg et al., 2004). Конкретни материјали такође омогућавају ученицима да изграде своје знање о апстрактним појмовима (Brown et al., 2009). Упркос овим предностима, постоји разлог за опрез, јер превише ослањања на конкретне објекте може довести до немогућности да се избегну шумови, а да се потом достигне један степен апстраховања, другим речима, да се дете „веже" за конкретан материјал, што отежава прелаз на апстрактније форме мишљења. Ресник и Омансон (Resnick & Omanson, 1987) закључују да деца која су у стању да користе Дионисове блокове за рачунање збира три броја нису могла да израчунају збир два сабирка записана цифрама. Штавише, деца која су била најбоља при манипулацији блоковима била су најлошија у решавању писаних проблема са сабирањем.

Репрезентације које задржавају много детаља оригиналног искуства називају се *репрезентације засноване на перцепцији* (енгл. *perception-based*) (Van Oers, 2001). *Изражавајућа и комуникативна репрезентација* (енгл. *expressing*) подразумева истицање структуре и онога што је значајно за појам који се репрезентује. Тервел и сарадници (Terwel et al., 2009) истичу да су комуникативне репрезентације засноване на значењу апстрактнијем од тачног приказа реалности и подразумевају истицање математичке структуре. Апстрактне репрезентације, у односу на оне конкретне, „моћније" су зато што могу да превазиђу контекст у резоновању и решавању проблема (Kaminski et al., 2008; Zeljić, 2015). Студије (Cai, 2004; Koedinger et al., 2008) показују да су апстрактне репрезентације ефикасније од конкретних приликом решавања сложених проблема. Важан фактор који доприноси дубљем разумевању текста задатка јесте могућност да се изгради кохерентна ментална репрезентација која садржи односе између релевантних елемената који су изведени из текста. У истраживању које су спровели Бунен и сарадници (Boonen et al., 2013) постављен је следећи задатак:

Балон је полетео праволинијски увис на 200 метара од тла, затим се кретао 100 метара према истоку, а онда се праволинијски спустио 100 метара. Балон се даље кретао 50 метара ка истоку и на крају се праволинијски спустио на тло. Колико се балон спустио далеко од своје почетне тачке?

Показало се да су ученици креирали два типа репрезентација: визуелно-схематске и сликовне (Слика 8).



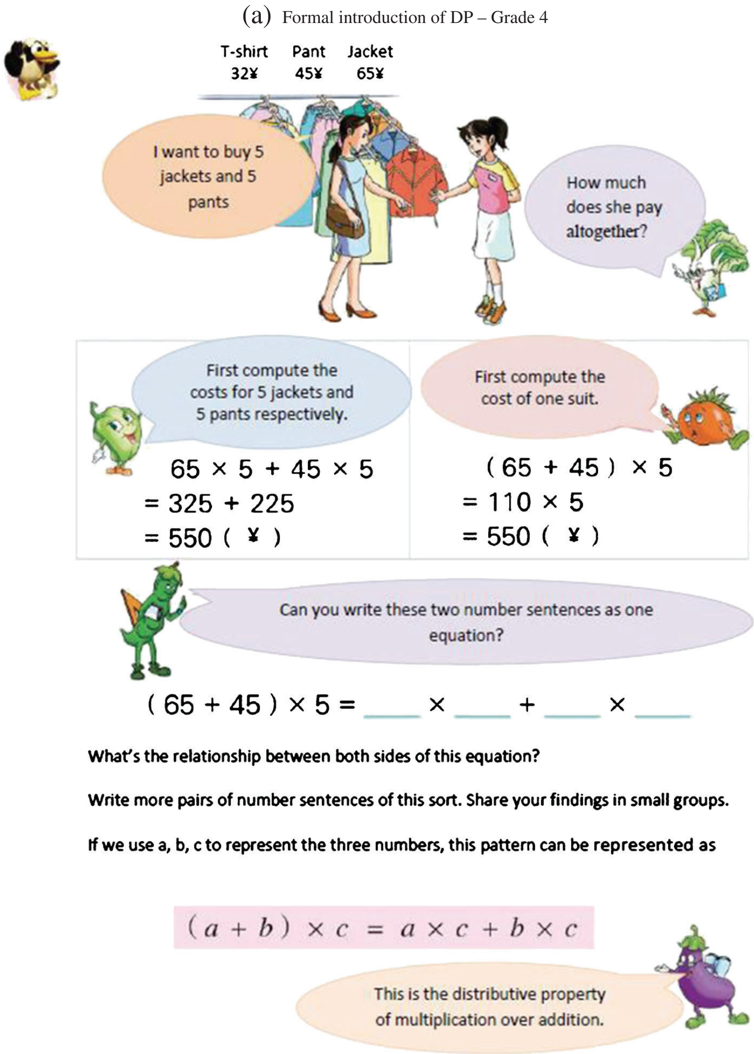
Слика 8: Сликовна и визуелно-схематска репрезентација (Boonen et al., 2013: 271–279)

Визуелно-схематска репрезентација била је важно средство за изражавање математичких односа и ученици који су креирали тај тип репрезентације значајно су успешнији у решавању проблема. Чулно богате репрезентације са сувише неважних детаља могу одвратити пажњу ученика од суштински важних односа (Uttal et al., 1997).

Степен апстрактности коришћене репрезентације кореспондира са степеном апстракције и уопштавања ученика. Већи број аутора наглашава важност хијерархије нивоа значења коришћених репрезентација у процесу развијања адекватних менталних слика (Hiebert & Carpenter, 1992; Sfard, 2000; Smith, 2006; Cooper & Warren, 2011). У настави, неопходно је да се репрезентације развијају од конкретних ка апстрактним. Учење једноставних математичких принципа у апстрактним контекстима може бити неефикасно, јер ученици могу да добију само инертна, готова знања из апстрактних репрезентација (Goldstone & Son, 2005). Процес транзиције од конкретног ка апстрактном усклађен је са теоријом реалистичног математичког образовања (Freudenthal, 1991; Gravmeijer, 1994) у коме се наглашава процес математизације и изграђивање и неформалних знања у реалним ситуацијама која се трансформишу у формална и општа знања.

Емпиријска истраживања су показала да прављење прелаза од конкретног ка апстрактним репрезентацијама није лако. Когнитивни психолози Голдстоун и Сон (Goldstone & Son, 2005) предложили су метод по имену „конкретност бледи" као решење наведеног проблема. Аутори дефинишу метод као процес „сукцесивног смањивања конкретности" са намером да се на крају достигне релативно идеализована и деконтекстуализована репрезентација која је још увек јасно повезана са физичком ситуацијом чији модел представља (Goldstone & Son, 2005). Резултати до којих су дошли показали су да је најбољи трансфер када конкретне репрезентације постану идеализоване, јер „прогресивна идеализација (`конкретност бледи`) омогућава да принципи, који су оригинално утемељени и могу се интерпретирати, постану мање везани за специфичан контекст, због чега су погоднији за трансфер". Конкретни материјали, према ауторима, пружају корисне и занимљиве перцептивне везе за апстрактне концепте (које је иначе тешко пренети) и могу охрабрити ученике да развију интерне репрезентације (везане за специфичне контексте). Зато је важно пронаћи адекватне наставне методе које комбинују перцептивне везе које пружају конкретни материјали за трансфер ка апстрактном, које прати више идеализованих материјала. Само значење метода „конкретност бледи" јесте да коришћене симулације које су оригинално конкретне временом постану идеализоване. Аутори истичу да се апстрактно разумевање појмова ефикасније постиже кроз искуство са перцептивно богатим конкретним материјалима. Овај приступ подразумева да се апстрактност ефикасно учи коришћењем слика, филмова, интерактивним симулацијама и реалистичним физичким искуствима, што је у складу са ставом да је дедуктивно резоновање олакшано када је домен познат и конкретан. Постепени процес ослобађања од конкретног до апстрактног олакшава ученицима да успоставе везе између различитих представа, што побољшава разумевање појма и трансфер знања. Иако је овај метод био пореклом из Брунерове теорије, препознатљиве су карактеристике у односу на претходне теорије учења: 1) репрезентације се користе да представе „исти" појам; 2) Процес сукцесивних репрезентационих промена подразумева „одрживе везе". Ове карактеристике доприносе одржавању структурне сличности (између конкретних и апстрактних репрезентација).

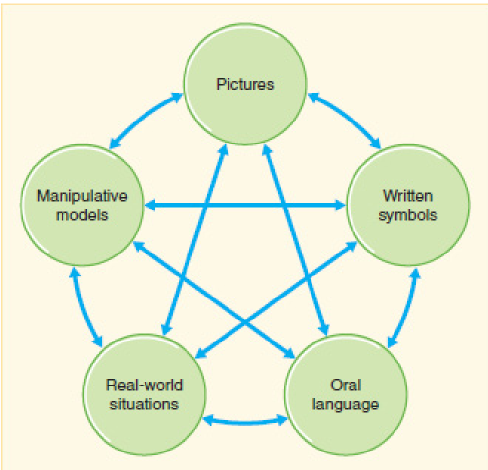
Динг и Ли (Ding & Li, 2014) истраживали су начин коришћења репрезентација у уџбеницима. Питање које су поставили у свом истраживању било је које репрезентације подржавају прелаз са конкретних на апстрактне представе. Одабрали су дистрибутивни закон зато што су приметили да ученици имају проблем да овај закон флексибилно користе у различитим ситуацијама. У уџбеницима су испитивали задатке за обраду и самосталан рад ученика, идентификовали су репрезентације и бележили ниво конкретности или апстрактности тих репрезентација, пратили су и какве су инструкције и педагошке технике које могу да подрже усвајање правила. Под конкретном репрезентацијом подразумевали су реалну ситуацију од које се полази, а под апстрактном сматрали су закључивање на основу процедуралних записа, односно процедурално и симболичко записивање правила. Конкретним репрезентацијама су сматрали 1) слику са речима; 2) комплетан текстуални проблем са сликом и 3) комплетан текстуални проблем без слике. Под више апстрактним репрезентацијама подразумевали су алгебарске репрезентације у односу на аритметичке. Резултати су показали да уџбеници у Кини добро прате теорије кретања од конкретног ка апстрактним, да поспешују уопштавање правила, подстичу прелаз. Следећа слика (Слика 9) представља добар пример којим се успоставља веза између репрезентација, конкретно веза између сликовне репрезентације која је повезана са реалном животном ситуацијом и симболичке репрезентације.



Слика 9: Пример успешног представљања правила множења збира бројем у кинеским уџбеницима (Ding & Li, 2014: 111)

Аутори наводе да се у кинеским уџбеницима креће, углавном, од текстуалног проблема са сликом, схематским приказом и балонима са објашњењем, затим следи аритметички (процедурални) и алгебарски запис. Закључак који је изведен из студије јесте да су текстуални задаци добро полазиште за транзициони процес и помажу ученицима при усвајању апстрактних математичких идеја, али такви задаци треба да буду јасни и без сувишних услова. На тај начин осмишљени задаци омогућавају креирање графичких представа и апстрактне репрезентације јасно постају циљ процеса, а ученици тако успевају да увиде смисао и везу између различитих репрезентација.

Голдин (Goldin, 2002) наглашава да се појединачне представе не могу разумети изоловано, већ припадају ширим системима репрезентација. Следећа слика (Слика 10) илуструје коришћење различитих репрезентација за исказивање разумевања математичких појмова (Lesh et al., 2003). Аутори су открили да деца која имају потешкоћа са превођењем појма из једног у други начин репрезентовања такође имају потешкоћа са решавањем проблема и са разумевањем процеса решавања. Јачање способности да се креће између различитих репрезентација побољшава ученичко разумевање и трајност знања.



Слика 10: Коришћење различитих врста репрезентација (Lesh et al., 2003)

На слици је приказан процес кретања између различитих репрезентација: реалне животне ситуације, манипулативни модели, сликовне репрезентације, писани симболи, говорни језик. Важно је истаћи да при увођењу различитих репрезентација не постоји јасно и тачно утврђен редослед репрезентација, већ то зависи од појма који се представља, претходног знања ученика, афинитета наставника итд. Реалне животне ситуације односе се на појаве у природном окружењу, које, добро сагледане, представљају математичке садржаје. Те појаве садрже све оно што их одређује, па и оно што није важно за математичке односе које у њима откривамо. Иконичким представљањем знатно чистије, са мање шума, представљамо исти математички садржај. Дакле, конкретну ситуацију претварамо у иконички знак. Саме иконе могу бити знаци који појам приказују на различитим нивоима апстракције. Марјановић (Marjanović, 2007) каже да иконе могу имати двоструку улогу, тј. једном представљају конкретно и физичко, а други пут ментално. Да бисмо направили разлику, у првом случају можемо их назвати пиктограмима, а у другом идеограмима. Када се цртежом представља реална ситуација која се опажа или цртежом желимо да поједноставимо приказ такве ситуације, такав цртеж зовемо пиктограмом. Када цртеж користимо да бисмо представили неки појам пројектујући његову представу, такав цртеж зовемо идеограмом. То значи да један те исти цртеж, на пример три кружића, јесте пиктограм за реалну ситуацију у којој видимо три лопте, а идеограм за појам броја 3. Када на основу слика ученик симболички изражава представљене математичке односе, он везује значење и симбол. Слике можемо схватити као симбол-слике када подстичемо апстракцију, али и као идеографе када апстрактније идеје желимо да приближимо непосреднијем схватању. Употреба слика, дијаграма и текстуалног контекста за представљање математичких појмова изузетно је важна стратегија у млађим разредима (Russell et al., 2011). У математичком образовању разликујемо природни – матерњи језик и математички језик. Неки аутори (Morgan, 2014) под појмом математички језик подразумевају компоненту математичког вокабулара и компоненту која обухвата природни вокабулар, односно природни језик сматрају делом математичког језика. Значај природног језика као основе на којој се генерише језик математике лежи у томе што се математички језик посматра као генерализација која је резултат усмеравања ученика да рефлектују о природном језику. Природни језик представља основу за стварање и тумачење генерализација написаних математичким језиком (Cusi et al., 2011). Овај вид вербалног изражавања, који описује реалне ситуације из живота, треба разликовати од реторичког изражавања у математици, где прецизним математичким језиком изражавамо математичке односе. На пример, није исто када кажемо „груписаћемо (спојићемо) куглице из прве две кутије" и „здружићемо први и други сабирак". Прва реченица описује активности из реалног живота, а друга описује математичку процедуру која се наслања на поменуте активности. Треба напоменути да се свака репрезентациона форма може представити на различитим нивоима апстракције. Тако се, на пример, текстуални задаци могу посматрати као конкретне репрезентације ако су односи експлицитно истакнути и јасно указују на одређену математичку структуру. То су задаци којима описујемо практичне ситуације из живота и тако су осмишљени да могу евоцирати одређене представе из искуства ученика (кутије са куглицама, количине новца, сличице и сл.).

Такав задатак јесте следећи:

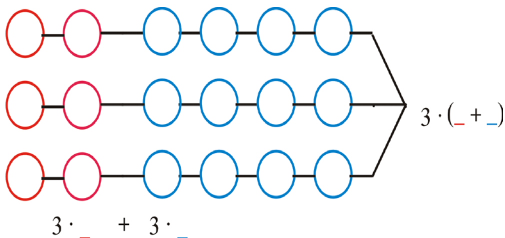
У једном џепу Јован има 50, а у другом 70 динара. Колико новца Јован има? Колико новца ће имати ако из једног џепа пребаци у други 30 динара?

Наведени задатак може послужити као конкретна репрезентација при обради правила сталности збира. Ученици знају да се укупна сума новца коју особа има неће променити уколико не добија новац и уколико не троши новац који има. У тој ситуацији, користећи текстуални задатак, природни језик и записивање односа математичким симболима, ученике можемо водити ка реторичким генерализацијама математичким језиком.

Анализирајмо на примеру правила множења збира броја могућу употребу различитих репрезентација.

1) Текстуални задатак којим евоцирамо искуства и представе из реалног окружења:
   У три леје посађено је по два црвена и четири плава цвета. Колико укупно цветова је посађено?
2) Сликовно представљање (пиктограм):

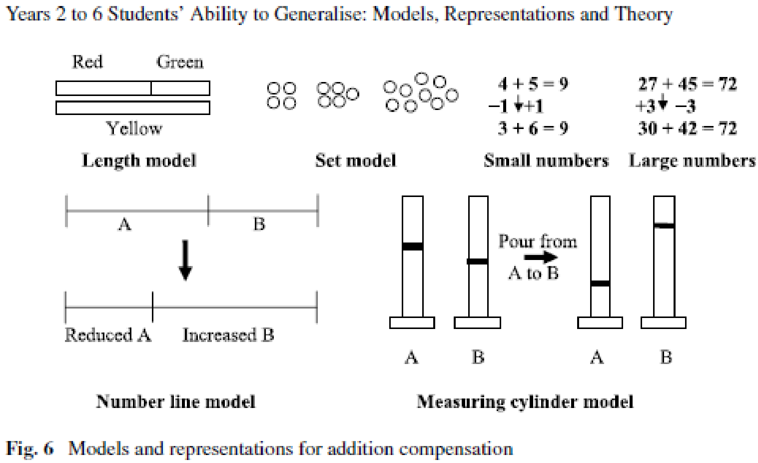
3) Исту ситуацију можемо представити са мање шума (идеограм):



4) Симболичко записивање (бројевни израз):
   $3 \cdot (2 + 4) = 3 \cdot 2 + 3 \cdot 4 = 6 + 12 = 18$
5) Реторичко изражавање (математичким језиком):
   Збир можемо помножити бројем тако што помножимо први сабирак, а затим други сабирак, па добијене производе саберемо.
6) Симболичко изражавање алгебарским симболима (виши степен општости):
   $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$

Наравно, не постоји универзално и опште правило о редоследу и броју коришћених репрезентација. Важна је, више пута истицана, когнитивна активност ученика и њено праћење од стране наставника. Претварање једног репрезентативног система у други (термин који користи Дувал) значајна је активност која је и могућа и потребна у различитим смеровима апстракције. Излагањем ученика вишеструким репрезентацијама једног појма, већа је вероватноћа да ће ученик схватити значење појма у различитим ситуацијама, промовишући тако концептуално разумевање и трансфер знања.

Бројна истраживања усмерена су на утицај различитих врста репрезентација на разумевање математичких појмова и односа. Једно такво истраживање (Cooper & Warren, 2011) имало је за предмет утицај различитих модела и репрезентација (обојених трака, конкретних материјала, модела дужи и „пресипања течности”) на способност ученика при уопштавању (генерализацији) правила сталности збира. Они су испитивали утицај различитих модела на разумевање правила од стране ученика. У истраживању, прво су коришћене репрезентације и различити модели уз уочавање правилности без квантификације (записивања бројева), а затим се прешло на моделе са бројевима, а на крају је коришћена само аритметичка репрезентација. После употребе модела и репрезентација, од ученика је тражено да сами уопште правило, речима, дакле реторички. Закључак је да су различити начини представљања водили ка успешном уопштавању правила, а највише модели без квантификације (коришћења бројева), а као најподеснији аутори су издвојили модел дужи.

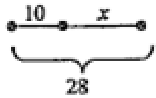


Слика 11: Представљање сталности збира коришћењем различитих репрезентација (Cooper & Warren, 2011)

Следећи пример користи идеју нивоа апстракције репрезентација као метафору која описује процес изграђивања концептуалног разумевања у алгебри. Панасјуково истраживање (Panasuk, 2006) састојало се од неколико међусобно повезаних делова. Први део је садржао дванаест ставки са пет опционих избора (*увек*, *често*, *понекад*, *ретко*, *никад*), које су груписане око наставничких пожељних начина представљања (вербално, сликовно, симболички). Други део истраживања односио се на испитивање ученичких ставова о појединим начинима представљања (речи, дијаграм, бројеви/симболи) када решавају линеарне једначине са једном непознатом. У трећем делу истраживања дато је тестирање ученика на задацима у којима су линеарне једначине са једном непознатом представљене на три начина, као: 1) текстуални задатак, 2) дијаграм у коме је непозната представљена као дуж и 3) симболичка алгебарска једначина (Panasuk, 2006):

Збир два броја је 28. Један број је 10. Одреди други број.

Одреди дужину дужи x ако је укупна дужина 28.



Реши једначину $x + 10 = 28$

Ученици нису добили задатак да реше проблем, већ да посматрају и објасне у писаној форми ако препознају структурно исти однос (тј. збир броја 10 и непознатог броја је 28) представљен на три начина. Четврти део истраживања подразумевао је решавање три групе проблема: решавање текстуалних задатака, задатака представљених дијаграмима и једначина задатих симболички. Сваки од четири нивоа истраживања анализиран је са циљем да се идентификује способност ученика да препозна структурално исти однос представљен у различитим репрезентацијама и способност да решава проблеме који су представљени речима, дијаграмима и симболима. Интервјуи са ученицима су концентрисани такође на испитивање способности ученика да се носе са нивоом апстракције примењеним у представљању линеарних једначина са једном непознатом и да препознају исти однос представљен у три различита репрезентативна система. Истраживач је такође посматрао како ученици 1) „извлаче" информације из различито представљених ситуација и колико су у стању да представе информације у различитим окружењима; 2) манипулишу репрезентацијама и 3) тумаче и тестирају решења тих линеарних једначина са једном непознатом.

На основу резултата, издвојене су три групе ученика (по нивоу разумевања):

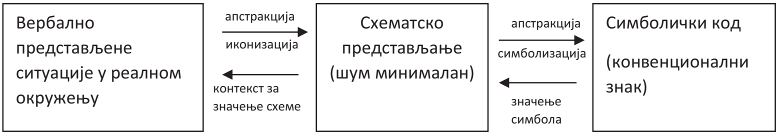
Група 1: Сви ученици који формирају ову групу радије памте правила и кораке, размишљају „у бројевима и симболима". Они нису препознали да три различита проблема представљају структурно исти однос. Висок проценат ученика (77%) у овој категорији исправно је пронашао непознати број у текстуалном задатку, а само око половина (56%) од ових ученика израчунала је непознату дужину дужи у проблему представљеном дијаграмски, док је 86% ученика одредило непознат број у алгебарским једначинама. Огроман број ученика из ове категорије користи методе покушаја и грешке да пронађе решења. Током интервјуа, ови ученици су замољени да запишу алгебарску једначину односа наведеног речима (нпр. збир два броја је 23, један од бројева је 9, нађи други број). Они су или писмено одузимали (са потписивањем) или су писали једнакост: 23 – 9 = 14. Нико од ученика у овој категорији није написао једначину којом би представио односе у тексту (x + 9 = 23). Занимљиво је да су ученици у овој групи или имали проблем или нису били у стању да реше једначине које представљају исти однос у сликовној форми. Као резултат тога, њихова слаба способност и можда неповољан став према иконичким репрезентацијама створили су баријеру за њихово смислено учење, а самим тим и за развој концептуалног разумевања. Ученици у овој групи нису били успешни у читању иконичке репрезентације, као ни у креирању сопствене. На пример, када им је речено да нацртају дијаграм који би представљао одузимање 9 од 23, неки би нацртали 23 објекта (квадрата или кругова), а потом 9 истих објеката, а затим су само рекли да ће одузети тих 9 (али то нису представили на цртежу). Они су упорно покушавали да решавају једначине путем покушаја и погрешака, тј. суочени са проблемима апстракције линеарних једначина са једном непознатом, покушали су да смање ниво алгебарске апстракције на нумеричку апстракцију.

Група 2: Ученици који су формирали ову групу, при решавању једначина нису користили метод проба–грешка, већ су их решавали у корацима. Велики број ученика (86%) у овој категорији показао је да може да „мисли у симболима” и радије решава задатке у симболичкој форми него када су представљени дијаграмом и текстом. Иако су тачно решавали једначине задате дијаграмом, ови ученици или нису препознали да три различите репрезентације представљају структурно исти однос, или нису ништа написали. Неки ученици у овој групи покушали су да опишу своје размишљање, а када су интервјуисани, нису били у стању да вербално објасне везе између репрезентација. Они су показали процедуралне вештине и репродуктивна знања, али нису били у стању да направе везе између различитих репрезентација (текст, дијаграми, симболи) и да представе структурно исти линеарни однос.

Група 3: Сви ученици у трећој групи препознали су да различите репрезентације (текст, дијаграм и симболичка једначина) представљају структурно исти однос. Они су решили све проблеме и показали разумевање значења и процеса решавања линеарне једначине. Када су им постављана додатна питања, ученици су показали способност да објасне пуно значење појма непознате и могли да уоче и тумаче различите репрезентације линеарног односа са једном непознатом. Ученици који су показали концептуално разумевање, исказали су способност да опишу дијаграме који су приказани користећи алгебарске симболе и да нацртају дијаграме који би представљали једначине.

Имајући у виду наведено, могуће је тврдити да је један од најважнијих показатеља концептуалног разумевања линеарне једначине са једном непознатом способност ученика да препознају структурно исти однос представљен у различитим репрезентационим модалитетима, дају експлицитно вербално објашњење и флексибилно трансформишу једну репрезентацију у друге. Сама чињеница да ученик препознаје да појам/однос може бити представљен различитим репрезентацијама, може послужити као показатељ да ученик напредује од нивоа развијених процедуралних вештина ка структуралном или концептуалном разумевању. Тако таксономија помаже да се установи да ли ученици граде концептуално разумевање уместо ефикасног понављања процеса (алгоритама). Такве информације су од суштинског значаја за планирање наставе. Наравно, когнитивни процеси апстраховања и развијања концептуалног разумевања много су сложенији од таксономије.

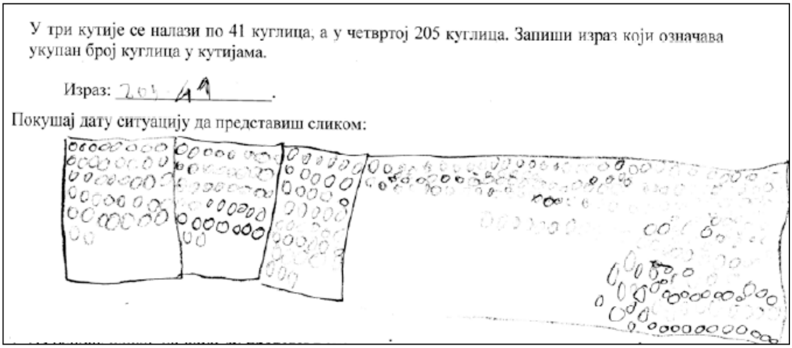
У два претходна истраживања (Zeljić, 2014, 2017) испитиван је утицај Модела учења алгебарских садржаја заснованог на коришћењу различитих облика представљања алгебарских појмова: кроз текстуалне проблеме, схематски (иконички) и симболички. Теме које су разрађене у Моделу јесу бројевни и словни изрази, једначине и неједначине, елементарне функције и низови. Начин разраде садржаја може се дијаграмски представити на следећи начин (Слика 12):



Слика 12: Начин разраде алгебарских садржаја заснован на схематском представљању појмова

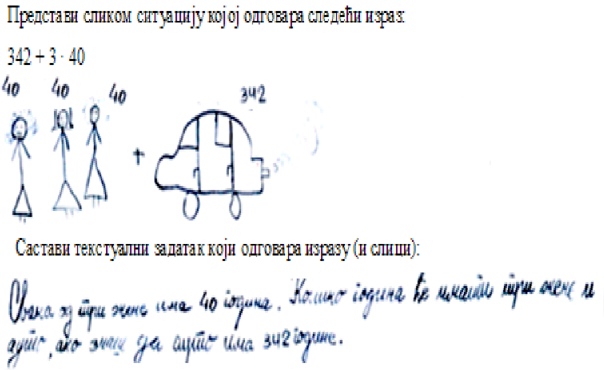
На дијаграмски представљеном процесу, стрелица упућује на то да се апстраховањем реалних ситуација (које су представљене текстуалним задацима) долази до иконичког представљања путем схема. Схеме се схватају као симбол-слике када подстичу апстракцију, али и као идеограми када се апстрактније идеје приближавају непосреднијем схватању. Трећу компоненту чини симболичко окружење, било да је реч о аритметичком или алгебарском кодирању. Када на основу слика ученик симболички изражава представљене математичке односе, он везује значење и симбол. Прва компонента посматра се као пример за појам, друга као носилац значења појма, а трећа као симбол за појам. Стрелице показују да се у експерименталном програму ученици стављају у ситуацију да апстрахују и уопштавају, али и да симболички представљене појмове конкретизују кроз осмишљавање одговарајућих текстуалних задатака и креирање иконичких репрезентација. Током експерименталног програма (15 часова), акценат је био на коришћењу, повезивању, а затим и креирању различитих репрезентација алгебарских појмова. Анализа резултата истраживања показала је да су ученици најбоље резултате постигли на задацима у којима је математичка структура проблема представљена схемом (иконички). С друге стране, најлошије резултате ученици су имали на задацима у којима је проблем задат симболички, а у којима се од њих очекује да дођу до решења манипулацијом симболима без придруживања значења. Ученици су постигли, статистички значајно, боље резултате на задацима у којима је структура проблема представљена симболички, али је тражено да размишљају о значењу симбола, тј. да симболима придодају значење (цртањем схеме и осмишљавањем реалне ситуације), него када је на основу симболички представљених задатака тражено да даљом манипулацијом симболима дођу до решења. Враћање из подручја аутоматске меморије у подручје слика, реализованих као иконичких знакова, биће могуће ако је процес учења ишао тим путем – од слика до симболичких кодова. Дакле, оперисање симболима је смислено када га прати евоцирање унутрашњих представа (менталних слика) или се цртањем иконичких представа исказује потпуно значење.

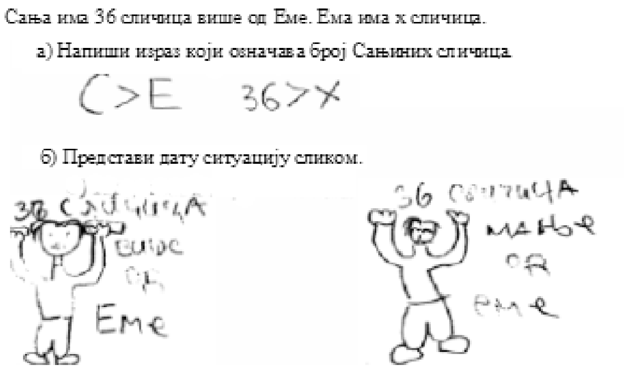
Резултати наведених истраживања показују да је процес моделовања и креирање адекватних репрезентација значајан методички задатак и да ученици млађих разреда основне школе могу бити оспособљени за самостално креирање визуелних репрезентација и текстуалних задатака. Један од задатака истраживања односио се на испитивање степена у ком су ученици четвртог разреда основне школе оспособљени да примењују и разумеју поступке моделовања и иконичког представљања уопштених квантитативних односа. Ученици су након примене Модела учења били значајно успешнији у поступцима сагледавања структуре израза и представљања те структуре путем иконичких репрезентација. Пре примене Модела ученици су креирали визуелне репрезентације које нису одражавале математичку структуру и општост алгебарских појмова. Тако су, на пример, при представљању бројевних израза велике бројности цртали стварне облике, и то сваку јединицу пребројавања. Наведени пример (Слика 13) илуструје ово тврђење:



Слика 13: Квантитативни односи нису уопштени – иницијални тест (Zeljić, 2014)

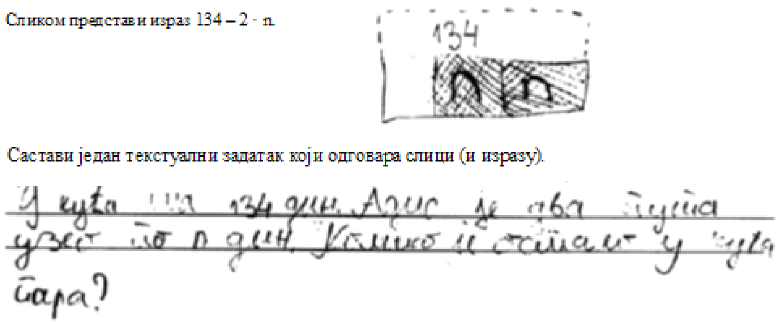
Поред немогућности уопштавања, резултати показују да задатке у којима се испитује активност преношења информација из симболичког у иконичко окружење ученици схватају као илустровање текстуалног задатка (који су осмислили на основу датог израза или који им је задат). Такве репрезентације не одражавају математичку структуру проблема (Слика 14).





Слика 14: Игнорисање структуре израза при осмишљавању слика – иницијални тест (Zeljić, 2014)

Способност преношења информација из симболичког у иконичко окружење показује разумевање значења симболичког записа (у конкретном случају израза). Слика треба да буде тако обликована да битне структуралне карактеристике визуелно тумачи. Неразумевање структуре и значења израза од стране ученика одразило се и на схему коју су они цртали, као и на осмишљавање текстуалног задатка који одговара том изразу (Слика 14). Из наведеног можемо закључити да је сагледавање структуре бројевних и словних израза и представљање те структуре у виду схеме био тежак поступак за ученике четвртог разреда основне школе. Ипак, можда су овакви резултати добијени зато што ученици нису имали искуства у моделовању и иконичком представљању квантитативних односа. У прилог том мишљењу говори и податак да је, након примене Модела, уочена драстична промена у карактеру ученичких иконичких представа. Наиме, ученици су на завршном тесту схематски приказивали структуру словних израза и те схеме су биле алгебарског карактера (Слика 15).



Слика 15: Схематско представљање структуре израза – завршни тест (Zeljić, 2014)

Анализа резултата истраживања показује да је Модел учења алгебарских садржаја заснован на активностима моделовања и схематском представљању појмова ефикасан у односу на издвојене индикаторе концептуалног разумевања обрађених тема (Zeljić, 2014).

3.2. Избор и конструкција репрезентација

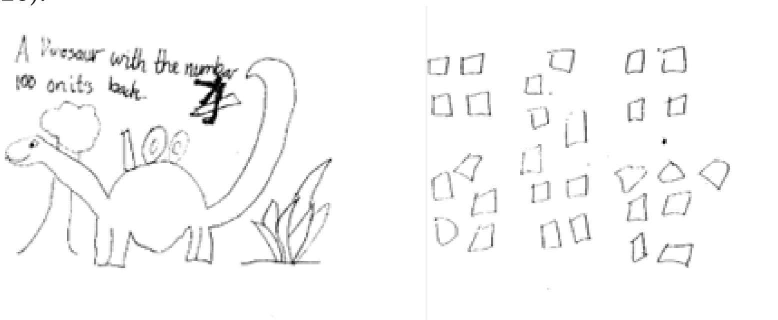
Једна од најраспрострањенијих злоупотреба манипулативних наставних средстава настаје када наставник каже ученицима „Ради што и ја". Ученици имитирају смернице наставника, а чак може да изгледа као и да их разумеју, али они манипулишу материјалом само онако како су видели (на пример преслагање слагалица у рачунању). Ученици морају бити мисаоно ангажовани кроз разговор о моделу који користе, а ако они не знају шта је циљ, манипулативни материјал не служи као средство за развој појма.

Када су ученици активно укључени у изградњу и вредновање репрезентација, они развијају математичка знања која им омогућавају да генеришу нове процесе решења проблема (Terwel et al., 2009). Међутим, резултати бројних студија о креирању и коришћењу репрезентација (као што су цртежи, слике или дијаграми) у решавању математичких проблема показују да самоизграђене графичке репрезентације немају увек жељене ефекте на перформансе ученика у математици (DiSessa, 2002; Terwel et al., 2009). Са друге стране, постоје истраживања која говоре у прилог томе да под одређеним условима самоизграђене репрезентације могу бити продуктивније у стварању математичког знања од готове репрезентације (Van Dijk et al., 2003; DiSessa, 2004; Ainsworth, 2006). Контрадикторни резултати наведених студија могу бити превазиђени приступом вођене ко-конструкције репрезентација (Freudenthal, 1991; Keijzer & Terwel, 2003; Ainsworth, 2006). Способност ученика да генеришу релативно нове процесе решења зависи и од укључивања ученика у активности креирања репрезентација. Карактеристике финалне репрезентације резултат су заједничког дизајнирања у процесу вођене ко-конструкције. Такве репрезентације се крећу од „богатијих ка сиромашнијим" од „појединачних ка општим" (Freudenthal, 1991). Истраживања фокусирана на генерисање репрезентација од стране ученика и каснији утицај ових репрезентација на учење математичких појмова сугеришу да док ученици генеришу репрезентације појма или док решавају проблеме, они природно имају тенденцију да смање ниво апстракција (дате од стране појма/проблема) до нивоа који је компатибилан са њиховим когнитивним структурама (Pape & Tochanov, 2001; Hazzan & Zaskis, 2005). Слично томе, очекује се да ће ученици у процесу изграђивања репрезентација трансформисати непознато у познато и апстрактно у конкретније (Wilensky, 1991). Док покушавају да конкретизују појмове, ученици уче да „дођу до појма што је ближе могуће" (Ibid.: 196). Процеси конкретизације могу бити повезани са изградњом интерних репрезентација и могу укључивати процес смањења нивоа апстракције. Захтеви ученицима да дизајнирају репрезентације има неколико потенцијалних предности (DiSessa, 2002, 2004):

1) Затвара јаз између претходног знања и појмова који се уче;
2) Пружа се могућност за креативно ангажовање и самостално овладавање новим појмовима;

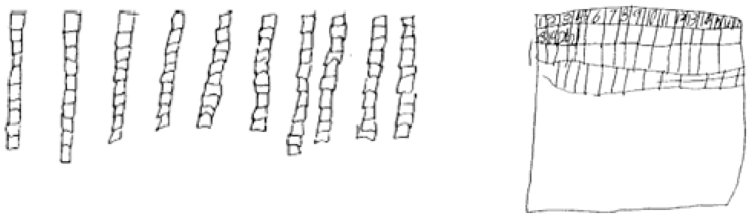
3) Омогућава ученицима да остваре своје метарепрезентације знања, што је значајно у процесу креирања нових репрезентација.

Учење помоћу опажајног апстраховања у наставној пракси се мора ослањати на одговарајуће илустрације. Арнхајм каже да се то у неким уџбеницима „добро ради", док други „пуштају на вољу својим цртачима да се уметнички иживљавају, што само збуњује читаоца" (Arnhajm, 2003: 250). Проблем може бити и у томе да се при креирању визуелних репрезентација (слика) не води рачуна о томе да ниво приказивања одговара развојном степену ученика и његовом познавању градива. Иконе су значећи знаци, а симболи су означавајући знаци. Да би „облици постали појмови" (Арнхајм) и да би те представе имале функцију при „успостављању везе симбола са идејом" (Skemp, 1982), осмишљавање иконичких знакова мора бити промишљено и адекватно структури појма на који се односи. Употреба иконичких средстава не пружа сама по себи довољне услове за формирање појмова и развој мишљења. Разумевање је могуће у самој области опажања, али само ако је представа обликована тако да битне структуралне карактеристике визуелно тумачи. Ако слика не успева да суштинске одлике опажајно прикаже, она је бескорисна. Визуелно представљање математичких идеја треба да одговара пре „дубинским" (да одговарају значењу) него површинским структурама (симболичке манипулације). У раду Томаса и сарадника (Thomas et al., 2002) испитивано је разумевање бројева и декадне основе бројевног система путем анализе интерних репрезентација ученика. Истраживачи су од ученика тражили да затворе очи и замисле бројеве од 1 до 100. Ученици су затим имали задатак да нацртају слике које су „видели у својим главама". Касније је од ученика тражено да објасне своју слику и свој цртеж. Аутори разликују три врсте репрезентација бројева до 100: а) сликовне, б) иконичке и в) симболичке. Сликовне репрезентације су дефинисане као слике објеката, могуће заједно са вербалним описима објеката које је нацртало дете, на пример цртеж камиона, диносаурус означен бројем 100, или само вербални опис (100 објеката лежи на поду). Иконичке репрезентације су дефинисане тако да укључују цртеже као што су квадрати, кругови или тачке. Под симболичким репрезентацијама аутори сматрају бројевну праву, представљену лењиром од 100 центиметара и сл. Некада је више од једног типа репрезентације присутно на цртежу (Thomas et al., 2002). Навешћемо парадигматске примере из истраживања који илуструју наведене категорије репрезентација (Ibid.: 122–126):



Слика 16: Сликовне и иконичке репрезентације броја 100 које илуструју неразумевање структуре (Thomas et al., 2002)

Прва сликовна репрезентација на Слици 16 јесте цртеж са насловом „Диносаурус, са бројем 100 на леђима” и одражава интуитивну представу броја 100 као нечега веома великог, што аутори виде као рани семиотички чин. Други иконички приказ, кроз коришћење квадрата, показује почетак развијања структуре и условљен је претходним искуством у коришћењу квадрата као јединице пребројавања. Ученик их је цртао у групама од четири, пет или шест и схватао их као „бројеве са којима треба рачунати”. Овај пример такође показује неразумевање структуре броја. Парадигматски примери у којима је наглашена структура броја јесу следећи (Ibid.):



Слика 17: Иконичке репрезентације броја 100 које илуструју разумевање структуре броја (Thomas et al., 2002)

Прву репрезентацију на Слици 17 креирала је ученица другог разреда која је нацртала „десетичне шипке” са циљем да представи иконичку репрезентацију груписања бројева у десетице. Ово показује, по мишљењу аутора, да је она развила високо структурирани, интерни систем представљања, највероватније по узору на конкретна искуства са манипулативним материјалом. Други ученик (друга репрезентација на Слици 17) нацртао је квадрат и поделио га на редове одвојених квадрата. Међутим, то није учинио доследно. Он је тада написао бројеве у квадратима, и то бројеве од 1 до 17 у првом реду. Аутори оцењују да је то делимично структурирана репрезентација, али да представља неразумевање декадног груписања. Они даље закључују да постоји широка разноликост интерних репрезентација бројева од 1 до 100, већа од оне коју су првобитно очекивали. Ефикасно поучавање и учење подразумева ситуације које пружају различите могућности ученицима да развију интерне репрезентације, а које су правилно структуриране. Када жељени структурни развој интерних представа није постигнут, то може бити приписано, бар делом, непостојању различитих структуралних репрезентација у наставном процесу. Број је „апстрахован” из контекста у којем је репрезентативни систем првобитно изграђен. Много се корака очигледно дешава у фази структуралног развоја унутрашњег репрезентативног система декадне основе бројевног система. У почетку се могу градити репрезентације специфичног контекста, али концептуално разумевање нумерације развија се из искустава рада са структурираним дидактичким материјалом и репрезентацијама (Zeljić, 2007; Marjanović & Mandić, 2009a).

Репрезентације математичких појмова имају кључну улогу у математичком образовању. Ове улоге међусобно су повезане и могу се категорисати на следећи начин (Chapman, 2010):

1) Начин размишљања (интерпретација репрезентације);
2) Начин представљања идеја (документовање нечијег размишљања кроз репрезентације);
3) Средство комуникације (нпр. као средство за објашњење).

Правилно одабране репрезентације детерминишу процес истраживања математичких проблема и извор су значења математичких појмова и односа између њих. Избор педагошки прикладне репрезентације важна је одлука, а наставник треба да интегрише најмање две перспективе: природу математичког садржаја који се учи и развојне карактеристике ученика (Ball, 1993).

Де Бок и сарадници (De Bock et al., 2003) наводе два критеријума које треба да задовољи репрезентација:

1) Репрезентација треба да буде довољно детаљна да омогући ученицима да је користе у процесу решавања проблема.
2) Употреба репрезентације у решавању проблема је ефикасна само уз учениково активно размишљање.

Сама употреба репрезентација није довољна. Потребна је ученикова активност у процесу учења на одабраним примерима. Велики број аутора (De Bock et al., 2003; Schwartz, 1995) посебно наглашава улогу активног мишљења у процесу дизајнирања математичке репрезентације као услов за успех у решавању математичких проблема.

Није јасно да ли постоји универзално „добра педагошка репрезентација” у различитим културним контекстима. Генерално је прихваћено да избор пожељних педагошких репрезентација у настави математике одражава знање математике и схватања наставника и њихове ставове о учењу и подучавању (NCTM, 2001; Huang & Cai, 2007). Педагошке репрезентације су ефикасне у настави само ако су познате ученицима или су једноставно схватљиве (Leinhardt, 2001). Педагошка репрезентација треба да нагласи карактеристике садржаја математике које наставник жели да поучава и да пружи ученицима познати и „доступан” контекст у коме они могу да прошире и развију сопствене капацитете за резоновање и разумевање идеја.

Циљ нашег претходног истраживања (Zeljić et al., 2016) био је да се идентификују врсте репрезентација које учитељи користе у различитим темама математике, као и да ли се ниво апстракције репрезентација које учитељи користе разликује на почетку и на крају првог циклуса школовања. У истраживању су учествовала 103 учитеља. Резултати истраживања показују да узраст ученика није критеријум у избору репрезентација, јер нема довољно разлика у погледу коришћења репрезентација у првом и четвртом разреду. Учитељи се слажу да симболички језик треба више користити у четвртом него у првом разреду, али не праве разлике у употреби манипулативних средстава и слика реалних објеката на почетку и на крају првог циклуса образовања. Стога не можемо рећи да се став учитеља у потпуности слаже са ставом различитих аутора да апстрактност репрезентација треба повећати са повећањем апстрактности и тежине математичких проблема (Cai, 2004; Koedinger et al., 2008) и са развојним карактеристикама ученика (Ball, 1993). Од конкретних репрезентација, дијаграм и текстуалне задатке учитељи радије употребљавају у четвртом него у првом разреду. Са друге стране, нема конзистентности ни да је апстрактност садржаја критеријум за избор репрезентације. Алгебарски појмови су најапстрактнији у курикулуму Србије (појављују се већ у првом разреду), а за њих учитељи бирају апстрактне ситуације не покушавајући да смање апстрактност коришћењем конкретнијих репрезентација. На основу примера који су учитељи конструисали (репрезентације за увођење једначина), чини се да учитељи у Србији и даље користе у највећој мери симболичке репрезентације и текстуалне задатке (Stephens, 2003), док је коришћење апстрактних слика, као што су дијаграми или дужи (Panasuk, 2011) запостављено. Оно што се истиче као највећи проблем и који је примећен у ставовима учитеља, јесте то што они нису препознали важност коришћења апстрактних слика као репрезентационог система. Слично, Ђокић (Đokić, 2017), у истраживању чији је предмет развој геометријских појмова и геометријског мишљења, наводи да забрињавају ставови и мишљења учитеља који готово да занемарују употребу модела и слика у процесу учења геометријских садржаја. Наведени ставови учитеља одразили су се и на резоновање и решавање проблема њихових ученика, јер ученици готово да и нису користили слике као погодне репрезентације геометријских појмова.

Будућа истраживања требало би да одговоре на питање да ли учитељи не препознају неке од тих репрезентација, односно користе их, али их не класификују и именују на тај начин, или не препознају важност и ефекте коришћења различитих репрезентационих система. У првом случају, недовољно знање о врстама репрезентација блокира комуникацију и размену идеја са колегама и едукаторима, а у другом случају, некоришћење одређених репрезентација у настави води ка формирању формалних знања ученика. Коришћење и креирање различитих система репрезентација и њихов значај у формирању математичких појмова у различитим областима требало би да буде важан део курикулума образовања будућих учитеља, као и програма стручног усавршавања.

4. *Комуникација у настави математике*

Дискурс у учионици односи се на интеракције које се дешавају током часа. Под појмом *дискурс* подразумевају се репрезентације, комуникација, писање, читање, слушање, слагање и неслагање са одређеним математичким идејама (NCTM, 2007). Питање како организовати ефикасну дискусију у учионици прилично је сложено и захтева пажљиво планирање. Циљ дискурса јесте да изазове високу когнитивну активност ученика у процесу учења и формализовања математичких појмова (Sfard, 2003; Breyfogle & Williams, 2008; Smith et al., 2009).

Комуникација је основно средство за учење математике (NCTM, 2000). Начин на који наставник поставља питања, слуша и одговара ученицима и како промовише и организује математичке расправе у учионици кључан је за карактеризацију усмене комуникације која се одвија у учионици и одражава улогу ученика у комуникацијском процесу. У зависности од улоге коју наставник има у комуникацији, могуће је идентификовати неколико облика комуникације – од једносмерне комуникације (снажно повезана с преносом знања) до рефлексивне и поучне комуникације (Brendefur & Frykholm, 2000). Ови аутори класификују комуникацију у учионици као једносмерну, која доприноси наставном процесу, затим рефлексивну и поучну. У једносмерној комуникацији наставници теже да доминирају дискусијама предавањем, користећи суштински затворена питања. Притом остављају мало могућности ученицима да комуницирају о својим стратегијама, идејама и мишљењима. У комуникацији која доприноси наставном процесу наставник даје ученицима могућност да разговарају о математичким задацима једни с другима, представљају стратегије решења или помажу једни другима да развију решења и одговарајуће стратегије решавања проблема. У рефлектујућој комуникацији поступци ученика и наставника предмет су дискусије. Рефлексивни дискурс се често јавља када ученици покушавају да објасне или оповргну понуђена решења својих вршњака. У поучној комуникацији интеракције које се дешавају у учионици помажу ученицима да конструишу и модификују своја математичка знања. Вербализујући своје идеје, ученици омогућавају наставнику да разуме њихово размишљање, њихову ефикасност и заблуде, да промени начин на који се час одвија и да извуче закључке за будуће ситуације. Осим једносмерне комуникације, други типови описују облике комуникације који подстичу ученике да деле своје идеје, стратегије и решења.

У анализи процеса комуникације на часу често је коришћен метод IRE (или IRF) (Cazden, 1988, 2001) који описује модел где наставник иницира (*initiates* (I)), ученик одговара (*responds* (R)), а наставник процењује (*evaluates* (E)) или даје повратну информацију (*feedback* (F)). На овај начин наставник и преузима одговорност за напредак и смер дискурса покретањем задатака и питања, а истовремено је ауторитет који процењује све одговоре ученика. Питања наставника усмеравају разговор, а учениково размишљање је фокусирано на покушај да схвати који одговор наставник жели, уместо да размишља математички. Алтернатива овоме јесте постављање питања тако да се пажња ученика фокусира на важне математичке идеје и да се одговорност за интелектуални рад пренесе на ученика (Stein et al., 2008).

У погледу дилеме колико „рећи/не рећи" (енгл. *the telling/not telling*) Лобато и сарадници (Lobato et al., 2005) истичу да је објашњење наставника значајно, али је његова вредност умањена због: а) уочене неусклађености између методе усменог излагања и конструктивизма; б) повећане свести о негативним последицама превелике улоге наставника у процесу учења и в) усредсређености на поступке „не рећи” као педагошким импликацијама конструктивизма. У настави посматраној кроз конструктивистичку теорију, ефикасни наставник не стоји испред одељења и ученицима саопштава чињенице и поступке (Wood et al., 1995; Richardson, 2001). Истраживачи усмерени на примену теорије конструктивизма карактеришу наставнике као слушаоце, „фацилитаторе” одговарајућег математичког дискурса који воде ученике кроз добро одабране активности решавања проблема, али ретко као „излагаче” информација (Stein et al., 2000; Carpenter et al., 2001). Конструктивистичка тврдња да је „знање резултат активности ученика, а не пасивног примаоца информација” понекад се погрешно тумачи у смислу да ученици треба самостално да конструишу све своје знање (Clement, 1997). Тако Јаворски (Jaworski, 1994) износи запажања са часова на којима су средњошколски наставници математике оклевали да ученицима саопште чињенице и када је постало јасно да они неће моћи да их открију сами. Наставници су веровали да ће изношење чињеница на неки начин онеспособити ученике у конструкцији знања. Наведено погрешно тумачење не јавља се међу свим истраживачима или свим наставницима. Јаворски (Jaworski, 1994) подсећа да ће из конструктивистичке перспективе ученици сами конструисати знање шта год наставник да ради. Још једно погрешно тумачење захтева за самосталном активношћу ученика у процесу конструкције знања огледа се у томе да наставници, уместо да представе нов појам, својим бољим ученицима препуштају уопштавање (Cobb et al., 1993). Овај наставни приступ зависи од присуства ученика који имају потребна знања и способности за формулисање идеје коју тражи наставник. Наравно, многи ученици у датом одељењу можда још увек нису у том тренутку спремни за уопштавање, ученици који уопштавају нов појам можда неће артикулисати своја објашњења на начин који је продуктиван за остатак одељења. Веће концептуално и педагошко знање које наставници уносе у дискусију могу позитивно утицати на представљање нових информација на начине који ће оспособити ученике да разумеју појмове и идеје.

Пракса „поучавање као предавање” непожељна је у следећим ситуацијама (Lobato et al., 2005): 1) када умањује могућност учења о идејама, интерпретацијама, репрезентацијама и математичким стратегијама; 2) фокусира се само на процедуралне аспекте математике; 3) наглашава наставников ауторитет тако што он постаје крајњи арбитар математичке истине уместо да развија одговорност ученика за процену математичке исправности и кохерентности; 4) минимализује могућност когнитивног ангажовања ученика; 5) ствара уверења ученицима да постоји само један пут решавања проблема; 6) представља прерано затварање математичког истраживања.

Чезан и Бол (Chazan & Ball, 1999) одредили су однос између саопштавања информација и „неговорења” ширењем дефиниције предавања тако да укључује следеће наставне поступке: а) увођење конвенционалне терминологије; б) подсећање ученика на закључак који је већ изведен; в) преформулисање коментара ученика за цео разред; г) скретање пажње ученицима када је идеја нејасна; д) оспоравање идеја ученика када дођу до математички нетачног закључка; ђ) усмеравање пажње ученика на садржај математике; е) промена фокуса дискусије и ж) „убацивање новог гласа” путем питања и коментара.

Идеја да ученици нова знања граде на основу предзнања која поседују и уз помоћ којих организују свој искуствени свет подстиче наставне поступке усредсређене на слушање објашњења ученика и усмеравање њиховог образложења (Nelson, 2001). Настава у којој ученици уче током покушаја решавања проблема подразумева да се наставници усредсреде на обликовање напретка ученика кроз пажљиво одабрана питања, проблеме и изазове. Наставници генеришу ситуације које стимулишу математичку активност ученика, а суштинско учење догађа се кроз интеракцију, размену различитих ставова (Wood, 1995).

Као одговор на ове недоследности у пракси, Лобато и сарадници (Lobato et al., 2005) унапређују и преформулишу предавања као скуп наставних радњи које служе функцији подстицања математичког мишљења ученика кроз увођење нових идеја у разговор. Ови аутори истичу следеће ситуације у којима је неопходна интервенција наставника:

1) Креирање значења новог појма (који може укључивати идеју, повезивање значења са математичким симболима, везе између идеја или репрезентација);
2) Резимирање ученичког рада на начин који укључује нове информације у дискусију;
3) Пружање информација које су ученицима потребне да би тестирали своје идеје или креирали контрапример;
4) Испитивање ученика шта мисле о новој стратегији или идеји;
5) Представљање контрапримера који наставник није уочио и мисли да га нико неће предложити;
6) Ангажовање у сократовском дијалогу у настојању да се уведе нови појам;
7) Представљање нових репрезентација.

Истраживачи заинтересовани за разјашњавање импликације конструктивизма за наставу су идентификовали више нових наставних поступака чији је циљ да помогну ученицима да развију концептуално разумевање математике. Ти поступци су: а) праћење начина разумевања математике од стране ученика (Shifter, 2001); б) одабир и редослед математичких задатака (Henningsen & Stein, 1997); в) предвиђање ученичког резоновања (Smith, 1996); г) генерисање и ревизија хипотетичких трајекторија учења (Shifter, 2001) и д) креирање дискурса у учионици (Cobb et al., 1993). Наставници се подстичу да пажљивије слушају своје ученике, постављају занимљиве проблеме и дозвољавају ученицима да се баве самосталним математичким расуђивањем и решавањем проблема.

4.1. Продуктивни разговор у настави математике

Бројни аутори су у својим студијама покушали да издвоје и објасне стратегије и принципе којима се подстиче продуктивни разговор у настави математике. У једној од таквих студија (Chapin et al., 2009) аутори предлажу следеће стратегије које поспешују комуникацију:

1) Понављање тврђења ученика;
2) Ученици понављају резоновање другог ученика;
3) Тражење од ученика да упореде своје резоновање са резоновањем других ученика;
4) Подстицање ученика на даље учешће у комуникацији;
5) Обезбеђивање времена за размишљање.

Наведене стратегије илустроваћемо примером који представља транскрипт комуникације у учионици који су забележили аутори (Chapin et al., 2009).

1. Понављање тврђења ученика. У поступку понављања одговора (тврђења), наставник у основи покушава да понови нека тврђења или све оно што је ученик рекао, а затим тражи од ученика да одговори и потврди да ли је добро поновио оно што је ученик рекао.

Пример:

Наставница је трећем разреду дала низ бројева и тражила од ученика да кажу да ли су бројеви парни или непарни. Они су већ научили да ако број можемо поделити са два, онда је такав број паран. Ученик 1 коментарисао је број 24.

Ученик 1: *Па, ако бисмо могли поделити број 24 бројем три /.../, али три је непаран број /.../, можемо поделити са 3 /.../ ја мислим да је непаран.*

Наставница: *Добро, да видим да ли разумем. Дакле, мислиш да је 24 непаран број?*

Ученик 1: *Да, јер су двадесет четири подељено са три осам.*

Наставница: *Дакле, ти кажеш да је двадесет четири непаран број?*

На овај начин наставница сазнаје да ученик има погрешно резоновање које се односи на парне и непарне бројеве.

Ученици понављају резоновање другог ученика. Понављање тврђења може укључити и понављање тврђења од стране ученика. („Можете ли поновити оно што је управо рекао својим речима?")

Наставница наставља разговор у учионици.

Наставница: *Може ли неко да понови оно што је Ученик 1 управо рекао?*

Ученик 2: *Мислим да могу. Мислим да је рекао да је двадесет четири непаран број јер се може поделити са три.*

Наставница: *Да ли је то тачно (обраћа се Ученику 1)? Да ли си то рекао?*

Ученик 1: *Да.*

Ова стратегија има неколико потенцијалних користи. Прво, даје другим ученицима јаснију слику резоновања Ученика 1 и оставља им више времена да размисле о његовом тврђењу. Ако ученици нису јасно могли да чују шта је речено, не могу ни да учествују у даљој дискусији. Даље, како ученици схватају да сви пажљиво слушају оно што кажу, уложиће напор да своја тврђења учине разумљивим.

2. Ученици треба да упореде своје резоновање са резоновањем других ученика („Да ли се слажете/не слажете с тим и зашто?").

Након што је ученик изнео тврђење, а наставница је сигурна да су други ученици чули и имали времена да га обраде, она може да настави да провоцира резоновање ученика о проблему.

Наставница (обраћа се Ученику 2)*: Да ли се слажеш са оним што је Ученик 1 рекао?*

Ученик 2*: Па, ја некако ..., не слажем се.*

Наставница: *Можеш ли нам рећи зашто се не слажеш са оним што је он рекао?*

Ученик 2: *Зато што сам мислила да смо јуче рекли да су парни бројеви они које можемо поделити са 2. И мислим да 24 можемо поделити са 2. И то је дванаест. Зар то није тачно?*

Наставница не подржава тврђење ни једног ни другог ученика. Она поштује обе идеје. Када ученици разумеју оба тврђења, наставница ће се постарати да разумеју које тврђење је исправно. Важно је напоменути да наставница не пита једноставно да ли се ученик слаже или не слаже с тврђењем, већ и тражи објашњење зашто то мисли. Тражење од ученика да објасне своје размишљање кључно је за подстицање комуникације и разумевање. Суштина ове стратегије јесте да изазове ученике да експлицитно објасне своје резоновање.

3. Подстицање ученика на даље учешће („Да ли би неко желео нешто да дода?"). Наставник може поново да користи стратегију понављања тврђења како би нагласио различита тврђења и подстакао дискусију, при чему мора поштавати различита мишљења. Затим тражи од других да дају свој допринос, подстиче их да искажу аргументе зашто се слажу или не слажу са тврђењима.

Наставница: *Дакле, имамо два различита мишљења о томе да ли је број 24 паран или непаран. Ученик 1 сматра да је број 24 непаран јер се може поделити са 3, а Ученик 2 да је паран зато што се може поделити са 2. Да ли се слажете са мишљењем Ученика 1 или Ученика 2?*

4. Обезбедити време за размишљање („Размислите… сачекаћемо..."). Аутори сматрају да наставник треба да сачека најмање десет секунди да ученици размисле пре него што некога позове да одговори. У ситуацији која се описује, наглашава се да је наставница дала ученицима доста времена за размишљање. Један или два ученика одмах дижу руку. После пет секунди, ученици виде да наставница чека више одговора. Они знају да ће наставница сачекати док неки од њих не размисле о њеном питању. Након петнаест или двадесет секунди, полако, и друге руке се дижу. После четрдесет пет секунди, наставница бира ученика који ће дати одговор. Он

је неодлучан и заправо седи нечујно након што га она позове, иако му је рука подигнута. Наставница опет чека. После десет секунди, ученик одговара: *Слажем се са идејом Ученика 2. Можемо да поделимо 24 са 3, али можемо да га поделимо са 4 и са 6. Мислим да број треба да делимо само са 2 да бисмо одредили да ли је паран.*

Иако истраживања јасно показују ефикасност давања времена за размишљање, то је тешко применити у учионици. Сви се осећамо непријатно када је тишина, али морамо бити свесни да мали број ученика може брзо осмислити одговор када тражимо да објасне своје резоновање, евалуирају тврђења и сл. Дакле, ако не користимо време чекања доследно и стрпљиво, ученици одустају и не учествују у дискусији.

Када се одвија дискусија у читавом разреду, наставник није примарно ангажован у пружању информација или постављању питања. Уместо тога, он покушава да наведе ученике да поделе своја размишљања, објасне кораке у њиховом резоновању. Наставник активно помаже и усмерава дискусију, али се не фокусира на директно пружање одговора и често се уздржава од давања тачног одговора. Он не одбацује одмах погрешно резоновање, већ покушава да наведе ученике да истраже кораке у свом резоновању с циљем да стекну способност да самостално откривају и исправљају грешке у сопственом резоновању.

Усмеравање дискусије и коришћење одговора ученика за планирање разговора важне су активности наставника. Навешћемо стратегије као део модела који конкретизује пет кључних потеза како би наставник ефикасније користио одговоре ученика у дискусијама (Stein et al., 2008):

1) Предвиђање могућих одговора ученика на когнитивно захтевне математичке задатке;
2) Праћење одговора ученика на задатке у фази истраживања (решавања проблема);
3) Одабир појединих ученика за излагање њихових одговора током фазе дискусије и рефлексије;

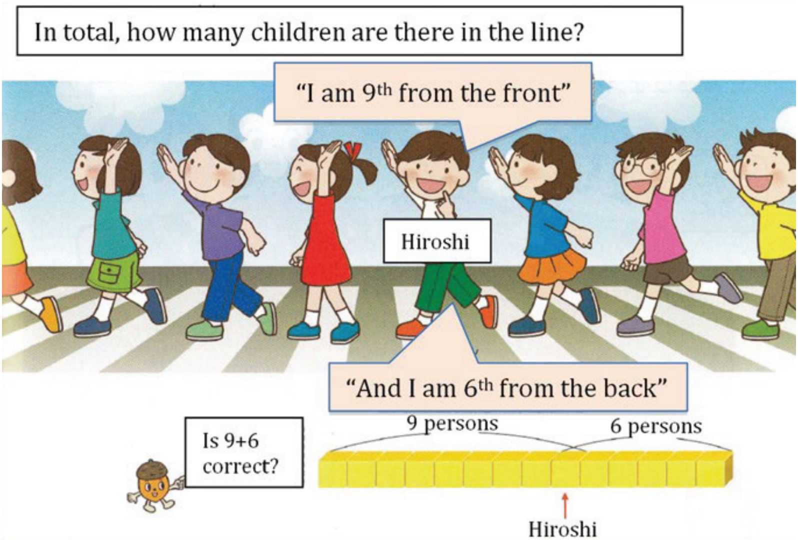
4) Намерно бирање одговора ученика који ће бити презентовани целом разреду;
5) Помоћ ученицима да успоставе математичке везе између одговора различитих ученика и одговора ученика и кључних идеја.

Овај модел може скренути пажњу са поучавања математичког садржаја независно од размишљања ученика. Уместо тога, пажња је усмерена на то како се размишљање ученика о математичком садржају може користити за подстицање рефлексије и учења. Да бисмо илустровали како се конкретизују наведене стратегије, навешћемо пример извучен из снимка часа који је забележен у једној експерименталној школи у Јапану (Kieran et al., 2015). Пример илуструје изазов наставника да подржи ученике другог разреда у развоју разумевања сабирања и одузимања редних бројева. Ученици су научили да сабирају и одузимају у многим контекстима који се односе на кардиналне бројеве. Наставник је пажљивим дизајнирањем задатака и подстицањем дискусије водио ученике до разумевања и правилног закључивања.

Задатак у уџбенику је гласио: *Дванаесторо деце стоје у реду. Хироши је 5. Колико деце стоји иза Хирошија?*

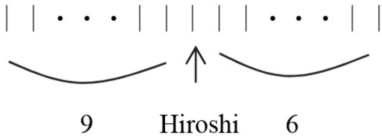
Наставник је, међутим, сматрао да је важно да се одмах почне са задатком којим се може подстаћи да ученици искажу своје наивне идеје, да те идеје оспори и да створи могућности за учење. Зато је почео лекцију прилагођеним задатком.

Задатак је подразумевао следећу ситуацију: *Деца су стајала у реду. Хироши је 9. спреда и 6. отпозади.* (Слика 18)



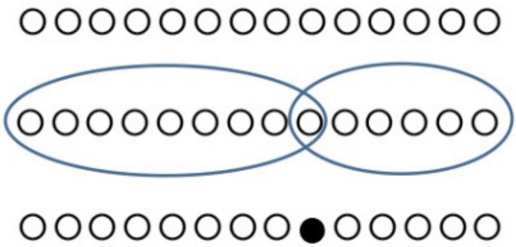
Слика 18: Пример задатка у уџбенику (наведен у Kieran et al., 2015)

Наставник је такође одлучио да не користи репрезентацију са коцкама из уџбеника (жуте коцке са двоструким луковима преклапања у „Хироши коцки", у доњем десном углу на Слици 18). Он је желео да ученици самостално размишљају о важним аспектима проблема. Наставник је тражио од ученика да формулишу математичко питање за ову ситуацију. Од понуђених питања наставник је изабрао питање о укупном броју деце у низу и замолио све ученике да нађу одговор. Идентификовао је одговоре ученика док је шетао по разреду, посматрајући их како раде на проблему и направио привремени план за наредну дискусију у учионици. Наставник намерно бира доминантну погрешну представу: $9 + 6 = 15$. Он је тражио добровољце да објасне свој одговор. Један ученик је објаснио: *9 плус 6 једнако је 15*. Затим је наставник тражио објашњење од ученика који је мислио да одговор треба да буде 16. Ученик илуструје своје објашњење на табли (в. Слику 19).



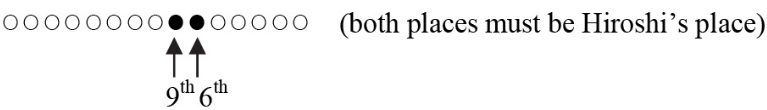
Слика 19: Интуитивна (погрешна) стратегија и неодговарајућа репрезентација (Kieran et al., 2015)

У реакцији на ту идеју, поборници резултата 14 приказују своје идеје различитим репрезентацијама које су прогресивне софистицираности (в. Слику 20).



Слика 20: Различите стратегије и репрезентације (Kieran et al., 2015)

У суштини, редослед којим је бирао ученике да изложе своје резоновање наставник је засновао на свом привременом плану дискусије. У току ове дискусије ученик који је обично „имао проблема” са математиком рекао је гласно: *„Имам га, имам га.”* Он је дошао на таблу и сам објаснио зашто би одговор требало да буде 14 (в. Слику 21): *„Претпоставимо да је одговор 15, тада мора постојати два Хирошија, што је немогуће.”*



Слика 21: Објашњење погрешног резоновања

Стварање услова за продуктивни разговор сложен је задатак који укључује координацију више различитих процеса. Да би дискусија на часу математике (и других предмета) била продуктивна, потребно је створити адекватно окружење и атмосферу за рад. Како би наставник створио подржавајућу климу за рад, препоручују се следеће стратегије (Van de Walle et al., 2013):

1) Охрабрити дијалог између ученика, а не само разговор између ученика и наставника који искључује остатак разреда. Када ученици имају различита решења, пожељно је да објасне своја решења целом разреду.
2) Охрабрити ученике да постављају питања.
3) Поставити накнадна питања без обзира на то да ли је одговор ученика тачан или погрешан. Улога наставника је да разуме размишљање ученика, а не само да их наведе на тачан одговор. Ако наставник само тражи објашњења погрешних одговора, ученици ће брзо схватити то и постаће нервозни када их наставник пита да објасне своје размишљање.
4) Користити време када ученици раде у малим групама како би се идентификовала занимљива решења која ће бити презентована целом разреду. Наставник треба пажљиво да изабере решења која жели да упореди. Сви ученици треба да буду спремни да објасне своје стратегије и резоновање.
5) Показати ученицима да је у реду бити збуњен, направити грешку, и да је постављање питања за објашњење прикладно. Грешке су природан пут у учењу.
6) Усмерити ученике на објашњења заснована на концептуалном разумевању када је то потребно. На пример, ако ученик каже да зна да је $\frac{1}{3}$ веће од $\frac{1}{4}$, наставник га може питати да објасни зашто је то тако.
7) Укључити све ученике у дискусију.

Опште је познато да се учење најлакше одвија у атмосфери поштовања и подршке. Сви ученици треба да развију осећај да се њихове идеје схватају озбиљно. То значи да и они треба да се труде да своје мишљење учине доступним другима тако што јасно излажу своје идеје. У одређеној мери, то се догађа природно. Како ученици схватају да се њихове идеје уважавају, они почињу да се више труде да их објасне и уобличе. Док се успостављају норме за поштовање дискурса, треба се истовремено уверити да је разговор у учионици фокусиран на математички садржај и расуђивање и да је релевантан за лекцију. Да би и наставници и ученици задржали овај фокус, потребна је пажљива припрема која подразумева издвајање тема и процедура које могу бити предмет дискусије. Када су у питању дискусија и анализа стратегија решавања проблема, математички појмови или процедуре о којима се дискутује треба да су познати свим ученицима у разреду. Насупрот томе, када се представља нови математички садржај, форме дијалога које се користе треба да су познате и да их могу разумети сви ученици у разреду. Сви ученици могу имати користи од дискусије, не само они који активно говоре, већ и они који слушају. У том смислу, важно је омогућити свим ученицима да с времена на време активно учествују у разговору и уверити се да све време сви активно слушају.

Комуникативни приступ наставника кључан је фактор који, са аспекта комуникације, детерминише начин рада на часу. У том смислу, можемо грубо разликовати две димензије: дијалошко-ауторитативну и интерактивно-неинтерактивну димензију (Mortimer & Scott, 2003). Дијалошка комуникација односи се на ситуацију у којој се обраћа пажња на више различитих гледишта, док се ауторитативна фокусира на само једну тачку гледишта и „не постоји истраживање различитих идеја" (Mortimer & Scott, 2003). У интерактивној комуникацији свима је дозвољено да учествују, док неинтерактивна комуникација искључује друге ученике од учешћа у комуникацији (само ученик коме је постављено питање). Резултат комбиновања ове две димензије јесу четири могућа комуникативна приступа:

Први приступ је и *дијалошки* и *интерактиван*, при чему се обраћа пажња на неколико тачака гледишта, а ученицима је дозвољено активно учешће.

Други је *неинтерактиван* и *дијалошки*, и ту се разматрају различити ставови, наставник представи неколико тачака гледишта и расправља о овоме, а да ученицима не омогући активно учешће.

Трећи је *интерактивни* и *ауторитативни* приступ, где је ученицима дозвољено да учествују, али се само једној тачки гледишта посвећује пажња.

Четврти приступ је *неинтерактиван* и *ауторитативан*, а у њему је само једна тачка гледишта присутна и своди се на наставниково објашњење.

Већина аутора се слаже да треба да постоји усклађеност између ауторитативног и дијалошког приступа, јер дијалошке размене прате ауторитативне интервенције, а ауторитативно увођење нових идеја прати могућност дијалошке примене и истраживања тих идеја. Такав поглед нуди нову и комплементарну перспективу у подржавању „продуктивног дисциплинарног ангажмана" (Engle & Conant, 2002). Представљајући кључне карактеристике сваке врсте дискурса, Ингл и Конант наглашавају важност уважавања оба облика дискурса не у терминима дихотомије, већ као повезане димензије које се преплићу.

4.2. Питања у настави математике

За многе истраживаче питања наставника представљају кључни наставни алат. Карактеристике „доброг питања" или „доброг наставника" могу се идентификовати само када су циљеви наставника познати. Питање које има за циљ да пружи информације о тренутном стању разумевања ученика имаће другачији облик од питања које има за циљ промоцију саморегулације учења, што би се опет разликовало од врсте питања које би могло стимулисати ангажовање и продуктивну дискусију у целом разреду.

Питања која наставник поставља треба да буду отворена и прилагођена начину резоновања ученика, помажући им да побољшају свој начин разоновања и проналазе нове одговоре на свеобухватнији начин. Ово захтева од наставника знање о садржају и о начинима размишљања ученика. Размишљање је покренуто питањима, тј. размишљање није вођено одговорима већ питањима. Мерсер и Литлтон (Mercer & Littleton, 2007) тврде да уместо сагледавања броја питања које наставник поставља, треба размотрити функцију ових питања. Постоје различити типови питања, а њихова функција може се процењивати само у контексту дијалога и циља часа (временске јединице). Често се примећује да питања захтевају од ученика да погоде одговор који наставник има на уму или да се питања често затварају само једним тачним одговором. Међутим, други типови питања охрабрују ученике да изразе своје мисли, дилеме и знање. Моделовање добрих питања може помоћи ученицима да науче да сами постављају добра питања када раде са својим вршњацима и на тај начин развијају своје мишљење и вештине расуђивања. Разговор у учионици може допринети процесу рефлективне комуникације у којој је циљ размена идеја и продубљивање разумевања ученика. Начин на који наставници постављају питања одлучујући је и изазован аспект наставног процеса (Boaler & Brodie, 2004).

Постоје разне класификације питања наставника. Тинкен и сарадници (Tienken et al., 2009) разликују продуктивна и репродуктивна питања. Продуктивна питања пружају ученицима могућност да креирају, анализирају или процене, односно оцене. Ова питања су обично отворена и дивергентна по природи. Репродуктивна питања или „површинска питања" укључују питања која подстичу ученике да имитирају, присете се или примене знање и информације које поучава наставник, кроз опонашање.

У истраживању усмереном на идентификовање врсте и карактера питања која наставници математике постављају на часовима, Хајнц и Ерхард (Heinze & Erhard, 2006) издвајају следеће категорије питања: 1) репродуктивна питања; 2) конвергентна питања; 3) дивергентна питања; 4) евалуативна питања; 5) питања у вези са управљањем активностима у учионици; 6) реторичка питања; 7) остало.

Репродуктивна питања усмерена су на репродукцију садржаја који је већ познат ученицима. Конвергентна и дивергентна питања захтевају више нивое мишљења ученика. У случају конвергентних питања одговор се може добити након размишљања усмереног на повезивање математичких појмова и идеја (Шта можемо знати о овом углу?). Дивергентна питања су отворена питања која омогућавају различите одговоре. Евалуативна питања траже образложење и вредновање активности (Да ли је ово тачно или не? Зашто?"). Питања у вези са „управљањем учионицом" поставља наставник ради провере да ли сви ученици могу да прате или да ли су ученици завршили одређену активност (попут израде цртежа итд.). Реторичка питања се постављају када наставник жели да нагласи одговор и он сâм и одговара на њих.

Слично, Канингем (Cunningham, 1987) издваја следеће категорије питања која постављају наставници математике:

1) Питање о знању чињеница (наглашава меморисање уместо вештине размишљања): Шта је природни број?

2) Нискоконвергентно питање (захтева од ученика да изнесу чињенице и осмисле одговор користећи упоређивање, контраст, уопштавање, трансфер или објашњење): Које су сличности између природног и целог броја?

3) Висококонвергентно питање (захтева од ученика да траже доказе у прилог одговору и извуку закључке): Како контролишете променљиве у овом експерименту?

4) Нискодивергентно питање (захтева од ученика да пронађу алтернативна решења): Како можемо да користимо квадратне плочице за слагање различитих правоугаоника истог обима?

5) Високодивергентно питање (подстиче креативно размишљање): Како можемо изградити највећу кућу ако имамо ограничени материјал?

Шлепенбах и сарадници (Schleppenbach et al., 2007) издвајају шест категорија питања на основу циља са којим су она постављена:

1) Питање које проверава рачунање: Колико је 9 минус 3?

2) Питање са циљем провере знања поступка или специфичних термина: Како се добије 1/3 од 3/9?

3) Питање које тражи образложење и резоновање: Зашто сте помножили са 5? Шта се дешава када множите бројилац и именилац истим бројем?

4) Питање са циљем провере знања правила и чињеница: Како се рачуна површина правоугаоника?

5) Питање за проверу разумевања или слагања/неслагања ученика: Да ли се слажете? Да ли разумете?

6) Питање које подразумева кратак одговор: Да ли је ово тачно?

Ако од ученика очекују да објашњавају, истражују и расправљају о својим ставовима, наставници треба да постављају више питања заснованих на резоновању уместо на меморисању. Ефекат постављања додатних питања потврђује студија (TIMSS) која на основу видео-снимака упоређује наставу математике у пет земаља (Zhang & Patrick, 2012). Резултати су потврдили да су наставници из земаља са нижим постигнућима (као што су Чешка и САД) постављали више питања усмерених на проверу меморисаних чињеница од наставника из земаља са високим постигнућима (Аустралија, Јапан и Хонг Конг). Наставници из земаља са високим постигнућима ученика поставили су више питања која су захтевала више нивое расуђивања, док су наставници из земаља са нижим постигнућима посветили више пажње рачунању, правилима и терминима. Сврха питања која постављају наставници требало би да буде повезивање између тренутног нивоа развоја ученика и њиховог потенцијалног нивоа развоја (зона наредног развоја). Према томе, нижи ниво питања не треба да доминира у наставном процесу.

Пеник и сарадници (Penick et al., 1996) развили су систем у коме наставници граде нова знања на основу претходног знања и заблуда ученика. Кад наставници познају своје ученике и идентификују заблуде, већа је вероватноћа да ће нова знања поставити на чврст темељ. Аутори су систем питања назвали „HRASE" (енгл. *history, relationship, application, speculation, explanation/ историја, примена, нагађање, објашњење*) са фокусом на редоследу питања. Навешћемо питања која илуструју суштину система.

Историја: Питања се односе на искуство ученика (Како сте решили проблем?).

Везе: Питања упућују ученике на упоређивање појмова, активности и података (Где сте већ видели нешто слично?).

Примена: Питања захтевају од ученика да користе знање у новим контекстима (Како бисте то могли да употребите за ...?).

Нагађање: Питања захтевају размишљање мимо датих информација (Шта мислите да би се догодило да ...?).

Објашњење: Питања захтевају експлицитно навођење разлога, процеса и односа (Зашто је то тако?).

Чин (Chin, 2007) сматра да је математичко знање ученика конструисано језиком и другим семиотичким средствима. Ако узмемо у обзир да је интеракција подстакнута питањима која поставља наставник, онда су питања наставника суштински део дискурса у учионици. Неодвојиви део питања која поставља наставник јесте и повратна информација. Чин (Chin, 2006) наводи четири типа повратних информација у току часа. Повратне информације наставника се категоришу на основу тога да ли је одговор ученика био тачан или нетачан. Када је одговор ученика тачан, наставник: 1) потврђује то и наставља директно поучавање или 2) проширује испитивање са одговарајућим питањима. Ако ученик нетачно одговори, наставник 3) даје експлицитну корекцију или 4) изазива ученика постављањем других питања. Друга и четврта врста повратних информација промовишу више интеракција и наставнике треба подстицати да искористе ове технике повратних информација.

Представићемо модел за анализу комуникације на часу који је заснован на карактеристикама питања у смислу когнитивне активности и нивоа резоновања које иницира (Ulleberg & Solem, 2018), а који је дефинисан кроз четири категорије питања. Анализирајмо категорије.

Категорија I

Ова категорија покрива питања која су типична за „IRE" разговор (наставник иницира, ученик одговара, наставник процењује), где наставник поставља питања да би проверио да ли ученици знају и да ли се могу сетити тачног одговора. Ова питања често подразумевају ниску когнитивну активност, будући да позивају ученике да се присете правих одговора. Примери таквих питања су: *Које је решење задатка? Како се зове овај троугао? Која је формула за обим (површину)?*

Суштина ове категорије питања јесте да се провери чињенично знање ученика. Наставник пита нешто што ученици већ знају, памте или мисле.

Категорија II

У другу категорију спадају питања чији је циљ да изазивају и усмеравају размишљање ученика у одређеним правцима. Наставник жели да ученици математизују, открију везе и односе и да науче да расправљају и оправдавају своје мишљење. Примери питања у овој области су:

- Откривање веза: *Да ли се ово правило односи на све бројеве? Зашто? Зашто не?*
- Истраживање проблема: *Шта се дешава са површином ако се свака страница правоугаоника повећа два пута? Зашто?*
- Образложење: *Зашто ово правило важи?*
- Доказивање: *Које разлоге можете дати за то?*

У ову категорију спадају питања која се могу повезати са „стратешким питањима" (Tomm, 1988), „питањима усмеравања – структурирања" (Ainley, 1988), „истраживања математичких значења и односа", „повезивање и примена" (Boaler & Brodie, 2004). Када се користе питања из ове категорије, наставник усмерава ученике у правце које је планирао и може их подстаћи да открију важне аспекте теме. За постављање ове врсте питања наставник мора добро познавати садржај и начин размишљања ученика.

Категорија III

Трећу категорију карактерише истраживање математичког мишљења ученика и стратегија које користе за решавање проблема. Наставника занима како ученици размишљају и аргументују своје ставове, како повезују знање, које стратегије користе за решавање проблема и која објашњења или оправдања имају за своје стратегије. Питања могу бити: *Како сте решили овај проблем? Можете ли објаснити како сте пронашли свој одговор? Зашто сте то урадили на тај начин? Да ли је неко то урадио другачије?* Кроз ово испитивање, наставник се упознаје са разумевањем ученика на различитим нивоима. Истовремено, ова питања позивају и охрабрују ученике да вербализују своја размишљања и поделе своја објашњења и стратегије једни с другима. Важно је да наставник развије став радозналости према ученичком размишљању и кроз питања проширује своје разумевање начина ученичког резоновања. Искусни наставници већ ће знати много о резоновању ученика и имаће очекивања о томе шта они могу одговорити. Али они неће нужно знати шта ће одређени ученик мислити, а нова решења се могу увек појавити.

Категорија IV

Питања у последњој категорији карактеристична су по томе што наставник њима изазива ученике да размишљају и подстиче их да истраже задатак или питање без усмеравања. Наставник охрабрује ученике да сами истраже проблем. Овај тип дијалога повезује се са дијалошким учењем, где све стране уче нешто ново, укључујући и наставника (Alrø & Skovsmose, 2004; Alexander, 2008; Barnes, 2008; Scott, 2008). Питања која карактеришу ову категорију јесу следећа: *Шта ако изаберете друге бројеве? Шта ако изаберете различите стратегије? Која* *друга решења/стратегије можете пронаћи? Шта ако одаберете једну од идеја ваше групе и то даље истражите? Можете ли наћи нова питања у овој ситуацији?* Питања су аутентична и „хипотетичка" и оно што Мејсон (Mason, 2000) назива „питања за истраживање". У овој области наставник поставља „рефлексивна питања" где се ученици позивају да размисле о властитом размишљању и истражују и развијају нове перспективе и опције (Tomm, 1989).

Навешћемо примере који објашњавају примену питања из различитих домена (Ulleberg & Solem, 2018).

Пример 1. Задатак за ученике јесте да израчунају вредност израза 42 – 18. Могу се поставити питања у различитим доменима као што су:

I) Који је резулат? (22 + 2)

II) Можеш ли објаснити зашто је то тако? (Зато што је 18 = 20 – 2.) Можеш ли исту стратегију применити на примеру 74 – 17?

III) Како си размишљао/ла?

IV) Коју другу стратегију можеш користити за решавање проблема? Да ли исту стратегију можеш користити за друге проблеме?

Овде би разговор могао да почне питањем из I категорије, само да би се добио одговор, и да се настави питањем из III категорије да би се истражило резоновање ученика. Тада би се могло поставити питање из II категорије тако што би се тражило оправдање за размишљање ученика и дао изазов да се испроба иста стратегија на новим и различитим примерима (85 – 26 вероватно ће се ефикасније рачунати уз коришћење друге стратегије). Дискусија се може завршити питањем из IV категорије, којим се тражи да се истраже различити бројеви и стратегије.

Пример 2. Наставник је поставио задатак ученицима да израчунају вредност израза 14 · 7. Након неког времена питао је ученике које су решење нашли (категорија I), а они су одговорили 98. Затим их је замолио да опишу своје методе како су пронашли одговор (категорија III). Ученици су представили следеће стратегије:

$7 \cdot 7 = 49$ и $7 \cdot 7 = 49$ $49 + 49 = 98$

$7 \cdot 10 = 70$ $7 \cdot 4 = 28$ $70 + 28 = 98$

$7 \cdot 10 = 70$ $70 + 7 = 77$ $77 + 7 = 84$ $84 + 7 = 91$ $91 + 7 = 98$

У овој ситуацији, разговор је започео питањем из I категорије, само да би се добио одговор, и наставио питањем из III категорије да би се истражило мишљење ученика. Ученици су поделили своје стратегије, а то је важно јер они на тај начин упознају нове стратегије.

Овај наставник није наставио са даљим питањима како би изазвао ученичко математичко резоновање кроз упоређивање различитих метода постављањем питања из II категорије: *Која од три стратегије је најефикаснија? Да ли је једна од стратегија посебно прилагођена бројевима у овом задатку? Коју стратегију је најлакше генерализовати? Прва стратегија има као полазну тачку чињеницу да је 14 паран број. Израз 13 · 7 не може се решити потпуно истом стратегијом, али како се може развити слична стратегија (6 · 7 + 7 · 7)? Како се друга стратегија може применити на израз 13 · 7?* Наставник је могао поставити следећа питања: I) *Који је резултат?* II) *Можеш ли да објасниш зашто је то тако? Можеш ли исту стратегију применити на израз 12 · 7?* III) *Како си размишљао/ла*? IV) *Да ли можеш да објасниш и поступак множења већих бројева*?

Модел испитивања може се користити у припреми дискусије у учионици, током дискусије или при анализи часа након што је дискусија завршена. Наставник може истражити могућа питања у вези са одређеним задатком, било сам или са колегама, и може припремити питања која ће задатак усмерити у различитим правцима.

Када ученици решавају проблеме, треба постављати питања о стратегијама које могу користити и зашто се баш тим стратегијама служе. Наставник осмишљава и питања која жели да ученици постављају једни другима. У дискусији која се одвија након што су ученици решили проблем(е), ученици могу да објашњавају не само сопствену стратегију, већ и стратегије других ученика.

Следећа дискусија илуструје пример дискурса са малом групом ученика који расправљају о томе како израчунати 27 – 19 (Kline, 2008: 148). Наставник пита два ученика који су добили различите одговоре да објасне своје поступке.

Ученик 1: *Па, додао сам један до деветнаест да би добио двадесет. Онда сам од двадесет седам одузео двадесет и добио седам. Али додао сам један, тако да ми је требало да одузмем једнан од седам, и добио сам шест.*

Наставник: *Шта мислиш о томе* (обраћа се Ученику 2)?

Ученик 2: *Нисам добио тај резултат.*

Наставник: *Да, знам то, али шта мислите о поступку (Ученика 1) и његовом објашњењу*?

Ученик 2: *Па, то не може бити тачно, јер сам пребројао. Додао сам један до двадесет и онда сам додао још седам и добио двадесет седам. Па сам избројао осам. Шест не може бити тачно.*

Наставник: (обраћа се Ученику 1): *Шта мислиш о овом објашњењу*?

Ученик 1: *И то има смисла. Требало је да бројим.*

Наставник: *Дакле, да ли мислите да су оба одговора тачна*?

Ученик 1: *Не.*

Ученик 2: *Не. Ако би било двадесет седам минус двадесет, одговор би био седам. Дакле, ако одузимамо деветнаест, мора бити осам. Ох, чекај. Видим зашто сам добио седам. Видиш, добио сам двадесет и седам. Али онда... Видим... Од двадесет седам одузима се деветнаест. Узео сам двадесет! Узео сам превише па морам један да додам на седам. Имам осам, као Ученик 2*! (Kline, 2008: 148)

Примећујемо да наведена дискусија није резултирала само тачним одговором. Наставник је тако водио дискусију да је ученик уочио и природу грешке коју је направио. Наставникове повратне информације сматрају се подстицајним за учење и мотивацију када не само да информишу ученике о тачности одговора, већ и када укључују информације о томе који су аспекти одговора тачни или нетачни и како се недостаци могу поправити. Ученичке грешке пружају прилике за реконцептуализацију проблема, истраживање контрадикције и тражење алтернативних стратегија и заједнички рад наставника и ученика укључује индивидуалну одговорност и постизање консензуса кроз математичку аргументацију. Повратне информације и питања попут *Да ли сте сви добили исти резултат? Ко је погрешио нека исправи и препише тачан разултат*, неће помоћи ученицима да исправе погрешно резоновање и прошире постојеће.

Дискусија је организована тако да ученицима омогућава да открију нешто ново, формулишу неку хипотезу, дискутују о различитим решењима за дати проблем и слично. Често је веома захтевно за наставника да ученицима да довољно простора, јер таква комуникација не може се детаљно планирати унапред и наставник мора брзо реаговати на насталу ситуацију.

Наставници треба да буду у стању да идентификују и класификују питања у складу са својим циљевима, свесни да питања имају различите циљеве. Елис (Ellis, 1993) износи три чињенице које наставници треба да имају у виду при осмишљавању питања:

Прво, ако питање захтева вештине размишљања вишег реда, питања „да/не" треба избегавати. Ова питања не унапређују вештине резоновања ученика.

Друго, треба избегавати двосмислена питања. Нејасна питања фрустрирају ученике јер су збуњујућа. Могућност разумевања питања од стране ученика основни је захтев доброг питања. Стога, основна питања која наставници користе у циљу покретања дискусије треба добро планирати пре наставе.

Треће, питања не би требало да откривају одговор. На пример, питање попут *Да ли би требало да израчунамо површину или обим?* открива превише информација. Ученици ће насумично одабрати одговор. Једноставан начин да се избегне ова грешка јесте да се питање започне са *Како* или *Шта*. На пример, ако се од ученика тражи да израчунају обим, наставник може питати *Како ћемо израчунати збир дужина свих страница?*

Шта представља „добро” питање? Саливен и Лилбрн (Sullivan & Lilburn, 2010) наводе следеће три особине:

1) За одговор је потребно више од позивања на познате чињенице;
2) Ученици могу нешто да науче док одговарају и наставник сазнаје нешто о ученицима из њихових одговора;
3) Постоји више прихватљивих одговора.

Саливен и Лилбрн (Sullivan & Lilburn, 2010) говоре о два приступа постављању „добрих” питања. Ови приступи су слични, али не и идентични.

Метод 1 („Почни од краја”) подељен је у следеће фазе: а) одабир теме; б) поставља затворено питање и проналази одговор на ово питање; в) формулисање „доброг” питања.

Метод 2 („Измена најчешће коришћеног питања”) подељен је у следеће фазе: а) одабир теме; б) избор неког стандардног питања; в) модификација овог питања у „добро” питање. Примери:

а) Геометрија; б) Шта је квадрат? в) Шта знате о квадрату?

а) Сабирање; б) 731 – 256 = ____); в) Замените цифре тако да разлика између два броја буде између 100 и 200.

Саливен и Лилбрн (Sullivan & Lilburn, 2010) истраживали су употребу „добрих” питања у учионици. Они предлажу следећу организацију рада:

1) Наставник започиње активност постављајући „добро” питање. То не значи само постављати питање, већ и осигурати да га сви ученици разумеју. Наставник може, на пример, замолити неколико ученика да преформулишу питање користећи властите речи. Задатак ученика је да пронађу пут до одговора.
2) Ученицима затим наставник даје време да траже одговоре на постављено питање. Препоручује се да ученици раде у групама, што им омогућава да међусобно размене своје идеје. Ово представља важан део про-

цеса учења, који помаже и слабијим ученицима, јер не морају да питају наставника за савет, већ могу да консултују друге ученике. Ако има превише ученика који не знају како да почну, препоручује се да се прекине њихов рад и започне заједничка дискусија која ће помоћи ученицима да превазиђу почетне потешкоће. Ако ученици и након ове расправе још показују неразумевање, препоручљиво је да се користи поједностављено питање тако да ученици размисле о томе. Када ученици раде самостално, наставник посматра шта раде, али не интервенише у њиховој активности одмах. У случају да нека група заврши задатак, наставник може поставити питање које се односи на стратегије и начин резоновања. Није потребно чекати да све групе пронађу одговор. Чак и ако их наставник прекине пре него што нађу одговор, они су радили и били су упознати са ситуацијом. Наставник увек мора предвидети време за дискусију у целом разреду.

3) Наставник организује дискусију у целом разреду. Групе представљају своја решења и објашњавају зашто су одабрале одређену стратегију. Обично наставник дозвољава свакој групи да представи своју стратегију уз записивање на табли. Очекивано је да ученици из групе са погрешним одговором или стратегијом увиде где су погрешили, као и да разумеју природу и карактер грешке. Препоручује се да наставник ученицима постави питање које је слично оригиналном питању како би се уопштила стратегија која се може применити на класу сличних проблема.
4) Завршни део наставник посвећује систематизацији откривених информација. Ако се све догоди како је и очекивано, барем неки ученици би требало да буду у могућности да систематизују уместо наставника. Чињеница да група даје тачан одговор не значи

нужно да су све схватили, зато је неопходно да наставник сумира важне тачке и објасни их ако је потребно. Чак и у овој фази препоручљиво је да ученици постављају питања како би увидели да се њихова стратегија може применити на општем нивоу.

Нека истраживања су показала да наставници математике нису посебно добри у постављању питања (и/или постављању добрих питања). На пример, студије су показале да наставници у у просеку питају између 12 и 20 питања на часу, а отприлике половина питања је процедурална. Надаље, већина питања јесу затворена питања за тестирање знања. Само веома мали проценат питања подстиче размишљање вишег нивоа. Поред тога, наставници не дозвољавају ученицима да размишљају о питањима; време чекања је било просечно 1,2 секунде. Коначно, 70% одговора ученика састоји се од три речи и њихово трајање је пет секунди или мање (Nystrand, 1997). Хантер и Расел (Hunter & Russell, 1997) наглашавају да би требало да наставници прво постављају питања групи, а тек онда да се обраћају појединцима, што може довести до активнијег укључивања свих ученика.

Преглед литературе указује на то да би курсеви за образовање наставника и програми стручног усавршавања требало да обуче наставнике како да промовишу дискурс у учионици кроз познавање класификације когнитивних нивоа питања, значаја одговарајућег редоследа питања, давања адекватне повратне информације и постављање накнадних питања. Наставници, у циљу подстицања дискурса у учионици, треба да: 1) разликују врсте питања и постављају конвергентна и дивергентна питања са различитим циљем; 2) организују питања у логичном редоследу; 3) дају одговарајуће време ученицима да размисле о постављеном питању; 4) изграде позитивно окружење у учионици које подстиче и мотивише учениково учешће у комуникацији; 5) пружају конструктивне повратне информације које олакшавају интеракцију у учионици; 6) постављају додатна питања усредсређујући се на вештине расуђивања ученика и 7) примењују разне технике испитивања током часа.

Позитивна клима у учионици подстиче и мотивише ученике да одговарају на питања. Два су основна разлога зашто ученици не желе да одговоре на питања: 1) ученик не зна одговор и/или 2) ученик није сигуран да је његов/њен одговор тачан и жели да избегне грешке пред одељењем. Ако је самопоуздање проблем, позитивно окружење у учионици може развити потребно самопоуздање ученика како би били слободни да изразе своје мисли. Када је позитивна клима у учионици, наставник и ученици међусобно се поштују и подстичу друге да говоре. Ако се ученици осећају сигурно и знају да их други ученици неће исмевати због њихових нетачних одговора, биће спремнији да поделе своја размишљања. Ако је циљ питања развијање вештина размишљања вишег нивоа, а која захтевају дуге, промишљене одговоре, наставник не би смео да прекида ученике и не би требало да даје тренутне повратне информације. Током предавања у учионици, евалуација наставника обично означава крај разговора. Наставници треба да сачекају док ученик не заврши одговор и да поставе додатна питања ако је потребно.

Сагледавање комуникације као суштинске категорије образовања мења не само начин на који се подучава, већ и начин на који се размишља о учењу и о ономе што се учи. Комуникацију треба посматрати не само као помоћ у размишљању, већ и као готово једнаку самом размишљању.

5. Стратегије решавања текстуалних задатака

Математички задаци суштински су важни у учењу јер „преносе поруке о томе шта је математика и шта подразумева бављење математиком” (NCTM, 1991). Идеја да задаци који се користе у учионици чине основу учења довела је до тога да карактеристике задатака, њихова категоризација и утицај на резоновање ученика буду предмет бројних истраживања (Stein & Smith, 1998). Задаци који од ученика захтевају рутинску примену меморисаних правила ограничавају могућности за подстицање математичког мишљења ученика, док задаци који захтевају концептуално размишљање и подстичу ученике да успоставе везе између појмова подстичу развијање математичког мишљења ученика. Кумулативни ефекат задатака доводи до развоја имплицитне идеје ученика о природи математике. Проучавајући математичку литературу о решавању проблема, Пехконен (Pehkonen, према Mihajlović, 2012) издваја неколико разлога због којих се решавање проблема у настави математике посматра као суштински важна активност и ове разлоге сврстава у четири главне категорије: 1) решавање проблема развија опште когнитивне способности; 2) решавање проблема подстиче креативност; 3) решавање проблема је део процеса примене математике; 4) решавање проблема мотивише ученике за учење математике.

Шредер и Лестер (Schroeder & Lester, 1989) идентификовали су три врсте приступа решавању проблема у настави:

1) Поучавање за решавање проблема. У фокусу овог приступа јесте поучавање вештина потребних за решавање проблема. У таквој настави почиње се са учењем апстрактног појма и затим се прелази на решавање проблема као начина примене научених појмова и вештина. На пример, ученици уче поступак сабирања разломака, а затим решавају текстуалне проблеме који укључују сабирање разломака. Уобичајена пракса је да наставник представи поступак решавања проблема, што смањује вероватноћу да ће ученик покушати да реши нови тип проблема без експлицитних упутстава како то да учини.
2) Поучавање о решавању проблема. Овај приступ обухвата поучавање у чијем је фокусу процес (разумевање проблема, осмишљавање стратегија, примена стратегија) решавања проблема.
3) Поучавање кроз решавање проблема. Овај приступ генерално подразумева да ученици математику уче кроз реалан контекст, проблем, ситуације и моделе. Контексти и модели омогућавају ученицима да граде значење појмова тако да могу прећи на апстрактне појмове.

Традиционално, текстуални проблеми могу се решити применом математичких појмова, правила или техника раније научених у школи. У наведеној концепцији постојао је став да текстуалне задатке могу да реше само ученици који су већ стекли потребно математичко знање. Међутим, анализа различитих неформалних начина на које ученици успешно решавају текстуалне задатке пре него што су подучени одговарајућим математичким знањима оповргава овај став (Carpenter et al., 1997; Mulligan & Mitchelmore, 1997; Kouba, 1989). Признање и уважавање потенцијала неформалних стратегија које поседују ученици објашњава зашто у конструктивистичким и реалистичним приступима математичком образовању, попут Реалистичног математичког образовања, текстуални задаци имају важну улогу у смислу полазне основе за формирање формалнијих математичких појмова и вештина. У фокусу нашег проучавања јесу стратегије и поступци решавања текстуалних проблема са посебним освртом на примену математичког моделовања.

У школској математици проблеми се постављају у вербалном, графичком или симболичком облику, као и у комбинацији ових приказа. Текстуални задаци били су предмет великог броја истраживања током последњих педесет година (Verschaffel et al., 2020). Текстуални задаци се обично дефинишу као вербални описи проблемских ситуација, представљених у школском окружењу при чему се на једно или више питања одговори могу добити применом математичких операција на нумеричким подацима који су доступни у тексту или на нумеричким подацима који су изведени из њих (Verschaffel et al., 2000). Као такви, разликују се од „голих" проблема у писаном облику (нпр. 4 + 5 = __; 5a + 2 = 22). Вершафел и сарадници (Verschaffel et al., 2020) описују две категорије вербално постављених проблема: текстуални проблеми и вербално наведени нумерички проблеми. Текстуални проблеми одређују се као проблемске ситуације које омогућавају ученицима да примењују математику у свакодневном животу. С друге стране, вербално наведени нумерички проблеми формулисани су у облику математичке реченице (нпр.: Израчунати први сабирак ако је други сабирак 23, а збир је 50.).

Важно је истаћи да термин *текстуални задатак* не мора нужно значити да сваки задатак за датог ученика представља прави проблем у когнитивно-психолошком смислу те речи. Да ли ће текстуални задатак за ученика представљати прави проблем зависи од његовог познавања проблема, врсте потребних знања и вештина, претходних знања итд. Теоретски, решавање проблема укључује ангажовања у задатку за који метод решења није познат унапред (NCTM, 2000). У математичкој литератури под проблемом се подразумева ситуација или задатак који тражи од појединца да повезује познате информације на нов начин како би дати задатак решио. Уколико појединац одмах препозна акције које су потребне да би урадио задатак, онда ће за њега то бити рутински задатак, а не проблем. Стога је појам *проблем* одређен постојећим знањем појединца који га решава, тј. да ли ће нешто бити проблем зависи од особе која га решава.

5.1. Текстуални задаци – врсте и значај

Истраживања у 80-им и 90-им годинама двадесетог века била су концентрисана на питање како деца решавају текстуалне проблеме са једном операцијом. Почетком осамдесетих година појавила се основна категоризација таквих задатака (сабирање и одузимање) која је усмеравала већи број будућих истраживања. Семантички односи који се користе за опис ситуација у проблемским задацима искоришћени су као први критеријум класификације: комбиновање, повећање/смањивање и поређење скупова објеката. Други критеријум класификације јесте положај непознатог скупа, а на основу којег се детерминишу поткатегорије задатака у оквиру сваке основне категорије. Типови задатака представљени су у Табели 4 (Riley & Greeno, 1988):

Комбиновање 1 (непознат укупан број) Џон има три кликера, а Том пет. Колико кликера имају укупно?	Промена 4 (непозната промена) Џон је имао осам кликера. Онда је дао неке кликере Тому. Џон сада има три кликера. Колико кликера је Џон дао Тому?
Комбиновање 2 (непознат укупан број) *Џон и Том имају неколико кликера. Џон има три кликера, а Том пет. Колико кликера имају заједно?*	Промена 5 (непозната почетна вредност) Џон је имао неколико кликера. Тада му је Том дао пет кликера. Сада Џон има осам кликера. Колико је кликера имао Џон на почетку?
Комбиновање 3 (непознат подскуп) Џон има три кликера. Том има неколико кликера. Укупно имају осам кликера. Колико кликера има Том?	Промена 6 (непозната почетна вредност) Џон је имао неколико кликера. Затим је Тому дао пет кликера. Сада Џон има три кликера. Колико је кликера имао Џон на почетку?

Комбиновање 4 (непознат подскуп) Џон има неколико кликера. Том има пет кликера. Укупно имају осам кликера. Они заједно имају 8 кликера. Колико кликера има Џон?	Поређење 1 (непозната разлика) Џон има пет кликера, а Том осам. За колико кликера Том има више од Џона?
Комбиновање 5 (непознат подскуп) Џон и Том имају укупно осам кликера. Џон има три кликера. Колико кликера има Том?	Поређење 2 (непозната разлика) Џон има осам кликера, а Том три. За колико мање кликера има Том од Џона?
Комбиновање 6 (непознат подскуп) Џон и Том имају укупно осам кликера. Џон има неколико кликера. Том има пет кликера. Колико кликера има Џон?	Поређење 3 (непозната упоређена количина) Џон има три кликера, а Том пет више од њега. Колико кликера има Том?
Промена 1 (резултат непознат) Џон је имао три кликера. Тада му је Том дао пет кликера. Колико кликера сада има Џон?	Поређење 4 (непозната упоређена количина) Џон има осам кликера, а Том пет мање од њега. Колико кликера има Том?
Промена 2 (резултат непознат) Џон је имао осам кликера. Затим је Тому дао пет кликера. Колико кликера сада има Џон?	Поређење 5 (непозната референтна количина) Џон има осам кликера. Он има пет кликера више од Тома. Колико кликера има Том?
Промена 3 (непозната промена) Џон је имао три кликера. Тада му је Том дао неколико кликера. Сада Џон има осам кликера. Колико кликера му је дао Том?	Поређење 6 (непозната референтна количина) Џон има три кликера. Он има пет кликера мање од Тома. Колико кликера има Том?

Табела 4: Типови задатака са сабирањем и одузимањем (Riley & Greeno, 1988)

Рајли и Грино (Riley & Greeno, 1988) истраживали су успешност деце различитог узраста кроз све три категорије задатака. Успешност решавања се повећавала са годинама деце, а тежина задатака је остајала стална. Предшколска деца су подједнако успешно решавала задатке промене и комбиновања. Најмања просечна тачност била је на задацима поређења. Код деце у првом разреду успешност је мало другачија. Наиме, ученици су најуспешнији били у задацима комбиновања, затим промене и на крају поређења. Многобројне емпиријске студије спроведене у овом периоду са децом између пет и осам година показале су психолошки значај ове класификације, тј. показују да се текстуални проблеми могу решити применом исте аритметичке операције, али припадају различитој семантичкој врсти проблема и сугеришу различите начине представљања и решавања, а при њиховом решавању јављају се различите врсте грешака (Fuson, 1992).

Вероватно због веће сложености операције множења и дељења, истраживања семантичке структуре текстуалних задатака множења и дељења развила су се нешто касније. Истраживања показују да ученици могу да реше разноврсне текстуалне задатке који се односе на множење пре него што им се дају формалне инструкције о операцији (Mulligan & Mitchelmore, 1997; Kouba, 1989). Ученици користе широк дијапазон стратегија за решавање текстуалних задатака, што је довело до закључка да поседују различите интуитивне моделе множења и дељења. У литератури се најчешће издвајају следеће семантичке структуре текстуалних задатака који се односе на множење (Greer, 1992): 1) Еквивалентне (једнаке) групе (пример: два стола, сваки са по четворо деце); 2) Мултипликативно поређење (пример: три пута више дечака него девојчица); 3) Правоугаона област (пример: три реда по четворо деце); 4) Декартов производ (пример: број могућих плесних парова са четири дечака и три девојчице). Свака ситуација са множењем може водити до различитих ситуација са дељењем. Као што је већ објашњено у 1. поглављу (Концептуално разумевање таблице множења), успешност ученика, неформалне стратегије које ученици користе и подаци о грешкама ученика указују на то да је потребно применити текстуалне задатке различите семантичке структуре. Донтонова (Downton, 2017) сматра да је ученицима потребно богато искуство са различитим семантичким структурама и контекстима како би у потпуности разумела операције множења и дељења. Ауторка велики значај придаје повезаности операција множења и дељења и истиче да богато искуство са различитим семантичким структурама за множење помаже ученицима да разумеју операције дељења, али и у рачунању количника и пре формалног поучавања.

Природа и структура задатака утиче на начин на који ученици резонују, тј. може да ограничи или прошири разумевање математичких појмова. Према Стајну и сарадницима (Stein et al., 2000), математички задаци се према нивоу когнитивних захтева могу разврстати на четири нивоа:

1) Меморисање правила и процедура;
2) Решавање задатака без разумевања веза правила и процедура;
3) Решавање задатака са свешћу о правилима и процедурама;
4) Решавање задатака са пуним разумевањем правила и процедура, интегрисаним у систем знања.

При решавању задатака који укључују меморисање или поступке (процедуре) без разумевања веза правила и поступака, ученици треба само да се присете меморисаних чињеница или механички примене правило. Стога се прве две врсте задатака сматрају задацима са ниским когнитивним захтевима. Што се тиче задатака који се односе на процедуре са везама или бављење математиком (енгл. *doing mathematics*), они претпостављају високе когнитивне захтеве, што подразумева дубоко разумевање појмова и идеја, као и избор одговарајућих стратегија, укључујући дедукцију, индукцију и доказ, у циљу решавања задатака. Примери четири типа различитих математичких задатака су следећи (Stein et al., 2000):

Меморисање: Напиши децимални број и проценат који је једнак разломку $\frac{1}{2}$. (Одговор се очекује одмах и заснован је на меморисаним чињеницама.)

Процедуре без повезивања: Запиши разломак $\frac{3}{8}$ у облику децималног броја и процента. (Одговор се добија једноставним рачунањем.)

Процедуре са повезивањем: Користећи табелу ($10 \cdot 10$), осенчи део који одговара децималном броју и проценту који је једнак са $\frac{3}{5}$. (Нужно је повезивање репрезентација.)

„Doing mathematics": Користећи табелу ($4 \cdot 10$), осенчи шест поља, а затим објасни како разломком и процентом можемо означити осенчени део. (Потребно је одабрати одговарајући метод решавања задатка и генерисати објашњење.)

Стајн и сарадници сматрају да проблемски задаци треба да буду тако формулисани да захтевају од ученика анализу значења и структуре задатака, као и тумачење оправданости поступака и стратегија решавања. Следећи примери илуструју различите когнитивне нивое задатака у домену мерења (Ibid.):

- Меморисање и процедуре без повезивања појмова:
  Марта жели да купи тепих за своју спаваћу собу која је дуга 15 метара и 10 метара широка. Колико квадратних метара тепиха ће она морати да купи?
- Повезивање појмова и право бављење математиком:
  Разред госпође Браун ће гајити зечеве за њихов сајам науке. На располагању им је 24 метра ограде којом треба да ограде правоугаони кавез за зечеве. Ако ђаци желе да њихови зечеви имају што више простора, које би могле бити димензије кавеза?
  Како бисте могли да формулишете идеју о одређивању димензија правоугаоника са највећом површином за било коју дужину ограде правоугаоног кавеза? Организујте своје идеје тако да неко ко чита разуме.

Тип математичког задатка не само да утиче на фокус учења, већ и на имплементацију задатака у настави. Природа задатака често се мења у зависности од интеракција и активности у учионици. Понекад се дешава да постављени задаци захтевају иницијално висок ниво когнитивне активности ученика, а да се тај ниво мења у зависности од начина како се ученици носе са њима. Фактори који утичу на пад когнитивних захтева на високом нивоу су следећи (Stein & Smith, 1998):

1) Проблемски аспекти задатка постају рутински (нпр. ученици наводе наставника да смањи сложеност задатка одређивањем експлицитних процедура или корака које треба извести; наставник „преузима” размишљање и резоновање и говори ученицима како да реше проблем).
2) Наставник преусмерава нагласак са значења појмова или разумевања на тачност решења или потпуност одговора.
3) Ученицима се не пружа довољно времена за „борбу” са захтевним аспектима задатка, или је превише времена прошло без адекватног усмерења и ученици престају да размишљају о задатку.
4) Проблеми у „управљању учионицом” спречавају стално ангажовање у когнитивним активностима на високом нивоу.

Питање како оптимално помоћи ученицима и подстаћи разумевање процеса решавања текстуалних проблема и даље се интензивно истражује.

Неколико истраживача тврди да стереотипна природа проблема текстуалних задатака у традиционалним уџбеницима подстиче ученике да користе површинске стратегије решавања као што су приступ кључне речи без изградње адекватног модела ситуације описане у проблему (De Corte & Verschaffel, 1986; Verschaffel et al., 2000). Решавање традиционалних текстуалних задатака описано је као сувише једноставно и директно уз коришћење површинских стратегија (Schoenfeld, 1991; Wyndhamn & Saljo, 1997). Када се дају углавном рутински текстуални задаци, ученици су развили навику да прескачу неколико важних корака у процесу моделовања. То доводи до тога да читају проблеме површно како би утврдили шта треба да рачунају без икаквог критичког промишљања о томе да ли се рачун уклапа у контекст проблема (Van Dooren et al., 2010). Ово површно решавање задатака од стране ученика основне школе указује на недостатак хеуристичких, метакогнитивних и афективних компетенција (Vauras et al., 1999; Verschaffel et al., 1999b). Представљајући текстуалне задатке на овај начин, ученици само вежбају своје вештине рачунања имитирајући поступак решавања илустрован у уџбеницима не употребљавајући концептуално разумевање и правилно математичко резоновање (Lithner, 2008; Boesen et al., 2010; Jonsson et al., 2014). Маричић и Лазић (Maričić & Lazić, 2015) наглашавају значај избора задатака и истичу да је развој критичког мишљења условљен природом математичког садржаја, а критичко мишљење операционализују кроз следеће способности: формулисање проблема, реформулисање проблема, евалуација и осетљивост на проблеме.

Начин обликовања текста може имати велики значај при решавању текстуалних задатака и то не само са аспекта лингвистике. Редослед података у тексту, присуство сувишних података, формулација проблемског питања одређују степен тежине задатка. Поставља се питање колико контекст утиче на успех ученика при решавању проблема. Када се користи термин „контекст" у образовном окружењу, онда се две карактеристике могу подразумевати под овим појмом (према Van Den Heuvel-Panhuizen, 2005):

1) Окружење за учење: ово обухвата и различите ситуације у којима се учење одвија и интеракцију у процесу учења;
2) Карактеристике задатка представљеног ученицима: односи се на речи и слике које помажу ученицима да разумеју задатак или су у вези са ситуацијом или догађајем који представљају задатак.

Када су у питању карактеристике текстуалног задатка, веза са реалношћу присутна је не само на крају процеса учења, у области примене знања, већ се окружујућа реалност користи као извор за учење математике. Баш као што је математика настала из математизације стварности, тако учење математике треба да потиче из математизације реалности. Чак и у раним годинама развоја теорије реалистичког математичког образовања (Freudenthal, 1991) истакнуто је да ако деца уче математику на изолован начин, који није повезан са њиховим искуством, знање ће брзо бити заборављено и деца неће моћи да га примене. Уместо да се почиње са одређеним апстракцијама или дефиницијама које ће се касније применити, треба почети са задацима чији се контекст може математизовати (Ibid.). Ученици морају научити да анализирају и организују проблемске ситуације, као и да примене математику у проблемским ситуацијама које за њих имају смисла. Контекст се може односити на свакодневни живот и измишљене ситуације у којима се проблеми налазе, али и на математички „голи" контекст. Оно што је важно јесте да је контекст задатка погодан за математизацију – ученици могу замислити ситуацију или догађај тако што могу да искористе своја искуства и знања. То може важити и за „голи" математички контекст, који се може сместити у различите смислене контексте из стварног живота, или, како Фројдентал (Freudenthal, 1991) наводи, такви проблеми могу се поставити у било ком контексту. Важан сегмент задатака јесте питање у којој мери је он постављен у реално окружење. Уколико у задатаку постоји недоследност и нелогичност у односу на реалност, тај задатак ће ученика збунити иако је математички једноставан за решавање, неће побуђивати у њему никаква дубља интересовања, ангажовања за сложеније задатке, јер му његов контекст делује немогућим и далеким (Đokić, 2017). Насупрот томе, резултати показују да наставни приступ у коме се реално окружење користи као полазна основа за математизацију и као извор проблема доводи до тога да ученици имају пријатан доживљај учења, осећају се спремнијим за учење, и то за учење са разумевањем, и имају изражену потребу за активним учешћем у настави (Đokić, 2019).

Иако се текстуални задаци и контекстуални проблеми често схватају синонимно, постоји велика разлика између та два појма (Van Den Heuvel-Panhuizen, 2005). Једна карактеристика многих текстуалних задатака јесте да контекст може често бити промењен а да се структура проблема не мења. На пример, задатак у коме неко има 16 кликера и добија још 10 може се променити у задатак који укључује килограме јабука. Осим тога, у текстуалним проблемима реалност која је представљена често није у складу са реалним животом. Следећи пример може се на први поглед моделовати сабирањем (Freudenthal, 1991: 70):

Месар је имао 26 килограма меса у својој месари, па је наручио још 10 килограма. Колико килограма меса има сада?

Аутор додаје да месо које је месар наручио не може одједном долетети у месару, а када стигне, нешто од 26 килограма меса ће бити продато. Зато је месар и наручио још меса. Фактор који даље компликује ствари јесте да очигледно бесмислен одговор може бити оправдан позивањем на неке могуће, али мало вероватне случајеве.

Да би решили задатке који укључују релевантне и суштинске контексте, ученици треба да трансформишу контекст ситуације у математички облик кроз процес математизације. Због тога је важно да задаци засновани на контексту користе поставке или ситуације које подржавају процес математизације. Другим речима, важно је да задаци пружају информације које могу бити организоване математички и нуде могућности ученицима да користе своја знања и искуства (Van den Heuvel-Panhuizen, 2005). Што се тиче математичких проблема, постоји неколико погледа на то шта контекст значи (De Lange, 1995; OECD, 2003; Van den Heuvel-Panhuizen, 2005). Де Ланж (према Van den Heuvel-Panhuizen, 2005) разликује три врсте контекста. Контексти *првог реда* подразумевају превод „текстуално упакованих" математичких проблема, док контексти *другог* и *трећег реда*, заправо, нуде могућност за математизацију. Разлика између последња два типа контекста је у томе што контексти трећег реда омогућавају ученицима да открију нове математичке појмове.

Неколико студија је показало да многи ученици остварују ниско постигнуће на задацима са реалним контекстом (Verschaffel et al., 2000; Schwarzkopf, 2007). Многа истраживања (Greer, 1993; Verschaffel et al., 1994; Van Dooren et al., 2010) показују да ученици од основне школе до универзитета показују јаку тенденцију да своја решења посматрају ван контекста реалног окружења. Ученици не разумеју повезаност између ситуација у проблему које потичу из реалног окружења и математичких операција које обављају приликом решавања проблема. Многи ученици решавају текстуалне задатке прелазећи одмах на математичке операције са датим бројевима без дубљег разумевања контекста. Фројдентал (Freudenthal, 1991) изражава став да стереотипни и бесмислени текстуални задаци могу код деце изазвати погрешна уверења о математици. У уџбеницима се не посвећује довољно пажње истинском повезивању математике са реалношћу (Đokić, 2017).

5.2. Нестандардни текстуални проблеми

На основу значаја контекста за решавање задатака, у литератури (Verschaffel et al., 1999a; Verschaffel et al., 2010a; Van Dooren et al., 2010) наводе се три врсте текстуалних проблема: 1) рутински (стандардни); 2) нерутински (нестандардни) и 3) нерутински (нестандардни) – који захтевају разматрање математичког решења у односу на реалне околности (или који се називају и текстуални задаци примене (енгл. *application word problems*)). Рутински проблеми могу се решити применом правила, процедура и основних операција као што је приступ „кључна реч" (стратегија за решавање текстуалних проблема уз помоћ кључних речи, нпр „укупно" = сабирање). Ученици могу решити ове проблеме применом једноставних аритметичких операција са бројевима који се налазе у текстуалном задатку. Као што Мејер и Хегерти истичу, рутински проблем постоји онда када онај који га решава зна начин како да нађе тачно решење и зна да је тај начин решавања одговарајући за дати проблем (Mayer & Hegarty, 1996).

Насупрот томе, нерутински текстуални проблеми не могу се решити применом једноставних стратегија. Нерутински текстуални проблеми дефинисани су као изазовни проблеми постављени у реалним контекстима, а који захтевају разумевање, анализу и интерпретацију. Такви проблеми траже одговарајући избор стратегија и поступака који воде ка решењу (Van Garderen & Montague, 2003). Нерутински проблеми не могу се решити коришћењем било којег фиксног алгоритма или скупа прописаних корака и процедура (Elia et al., 2009; Pantziara et al., 2009). Другим речима, у нерутинском решавању проблема не постоји прикладан модел или пут решења лако доступних за решавање проблема. Нерутински проблеми узрокују велике тешкоће за ученике зато што немају директно решење, већ траже коришћење различитих стратегија и модела. Они захтевају од ученика да има дубоко разумевање контекста текстуалног задатка. Под дубоким разумевањем контекста подразумева се способност јасног разумевања ситуације описане у задацима (Cummins et al., 1988). Ова способност може се постићи пажљивим читањем текста и скретањем пажње на релевантне аспекте описа проблема. Разумевање контекста текстуалног задатка важан је корак у процесу моделовања, јер претходи изграђивању одговарајућег ситуационог модела. Једна врста нерутинских проблема укључује проблеме у реалном свету (Verschaffel et al., 1999a). Њихово решење захтева давање посебне пажње контекстима у стварном животу у вези са проблемом. Ученици треба да искористе своје интуитивно знање и животна искуства при решавању проблема у стварном свету. Ова врста задатака пружа могућност ученицима да примене математичко знање у реалним животним ситуацијама (NCTM, 1991; Verschaffel et al., 2010a). Примери таквих проблема јесу следећи (Verschaffel et al., 1994):

1) *Четиристо педесет војника треба превести аутобусима до места њихове обуке. Сваки војни аутобус може примити 36 војника. Колико аутобуса је потребно?*

2) *Стив је купио четири даске од по 2,5 метара. Колико дасака од једног метра Стив може исећи од купљених дасака?*

Математички одговор на први задатак је 12,5 аутобуса, а реални одговор био би 13. Реалан одговор на други проблем је 8, јер у стварности се од једне даске од 2,5 метара могу направити две даске од једног метра.

Резултати истраживања (Greer, 1993; Verschaffel et al., 1994) показују да, након неколико година наставе у којој су суочени са традиционалним задацима, ученици развијају тенденцију да математичко моделовање сведу на одабир исправне аритметичке операције са бројевима датим у проблему без озбиљног узимања у обзир свог знања и реалних разматрања о проблемском контексту. Наведено тврђење проистекло је из две сродне студије са ученицима основних и средњих школа, а у којима су коришћене две врсте текстуалних задатака: стандардни проблеми (С-ставке) и „паралелни" проблеми (П-ставке). Сваки пар задатака чини: стандардни задатак (С-задатак), у коме се јасно тражи коришћење једне или више аритметичких операција са датим бројевима; паралелни задатак (П-задатак) претпоставља математичко моделовање у коме се мора узети у обзир реалност контекста задатка. Ради јаснијег сагледавања структуре и значења задатака, навешћемо задатке коришћене у истраживању Вершафела и сарадника (Verschaffel et al., 1994):

С-1 *Пит организује журку за свој десети рођендан. Позвао је осам дечака и четири девојчице. Колико пријатеља је Пит позвао на свој рођендан?*

П-1 *Карл има пет пријатеља, а Џорџ шест. Карл и Џорџ су одлучили да направе журку заједно. Позвали су све своје пријатеље и сви су дошли. Колико пријатеља је било на журки?*

С-2 *Стив је купио пет дасака од по два метра. Колико дасака од једног метра може исећи од купљених дасака?*

П-2 *Стив је купио четири даске од по 2,5 метара. Колико дасака од једног метра може добити од ових дасака?*

С-3 *Радник у продавници има две кутије јабука. У првој кутији се налази 60 јабука, а у другој 90. Радник ставља све јабуке* *у нову, већу кутију. Колико јабука се налази у тој новој кутији?*

П-3 *Шта ће се десити са температуром воде у чинији ако сипаш један литар воде чија је температура 80 степени и један литар воде чија је температура 40 степени?*

С-4 *Пит је имао 690 франака у својој касици. Потрошио је сав новац како би купио 20 играчака аутомобила. Колика је цена једног аутомобила?*

П-4 *Четири стотине педесет војника треба да буде превезено на место за обуку. Сваки војни аутобус прима 36 војника. Колико аутобуса је потребно да би се војници превезли?*

С-5 *Чамац плови брзином од 45 km/h. Колико времена треба том чамцу да пређе 180 km (ако се не мења брзина пловидбе)?*

П-5 *Џоново најбоље време да истрчи 100 метара је 17 секунди. Колико времена би му требало да истрчи 1 km?*

С-6 *Крис је направио свој план шетања. Ујутру је шетао 8 km, а по подне 15 km. Колико километара је Крис шетао?*

П-6 *Брус и Алис иду у исту школу. Брус живи на 17 km од школе, а Алис на 8 km. Колико далеко Брус и Алис живе једно од другог?*

С-7 *Кети, Ингрид, Ханс и Том су добили кутију од деде у којој се налази 14 штанглица чоколаде, које треба једнако да поделе. Колико штанглица чоколаде ће добити свако дете?*

П-7 *Деда је имао четири унука и дао им је кутију са 18 балона, које треба да једнако поделе. Колико балона ће добити свако дете?*

С-8 *Јутрос је Стив имао 480 франака у својој касици. Сада има 1650. Колико франака је Стив добио од јутрос?*

П-8 *Роб је рођен 1978. године. Сада је 1993. година. Колико он има година?*

С-9 *Један човек је исекао 12 метара канапа на делове од по 1,5 метара. Колико делова је добио?*

П-9 *Једном човеку је потребан канап довољно дугачак да се развуче између стубова који су удаљени 12 метара један од другог, али он има само делове од по 1,5 метара. Колико овак-*

вих делова је потребно повезати како би се канап развукао између стубова?

С-10 *Ова боца се пуни водом из чесме сталном брзином. Ако је дубина воде четири центиметра после десет секунди, колико ће бити дубока вода после тридесет секунди?*

П-10 *Ова боца се пуни водом из чесме сталном брзином. Ако је дубина воде четири центиметра после десет секунди, колико ће бити дубока вода после тридесет секунди?*

Ученици су показали тенденцију занемаривања знања и искустава из реалног света при решавању задатака. Само 128 од 750 реакција (решења и одговора) на П-проблем (17%) може се сматрати реалистичним, било због тога што је ученик написао реалистичан одговор или због тога што је написао додатни реалистични коментар. Број реалистичких реакција на П-проблеме био је забрињавајуће мали. Након наведених истраживања уследио је већи број студија које су се фокусирале на стратегије и процедуре које могу подстаћи разумевање нестандардних реалистичких проблема. У литератури се наводе следеће врсте нестандардних текстуалних проблема (Jimenez & Verschaffel, 2014):

- Нерешиви текстуални проблеми;
- Текстуални проблеми са вишеструким решењима;
- Решење дато у проблему;
- Текстуални проблеми са сувишним информацијама;
- Текстуални задаци у којима је контекст суштински важан.

У наведеном истраживању показало се да су ученицима различитог узраста (од првог до шестог разреда) нерешиви проблеми били најтежи, а затим, проблеми са вишеструким решењима, па задаци у којима је решење дато, а најлакши су били задаци са сувишним информацијама. Реплике ових студија рађене су у многим земљама (Verschaffel et al., 2000, 2009a), а резултати показују да такво понашање ученика није условљено узрастом (Verschaffel et al., 1994; Van Dooren et al., 2005). Шенфелд (Schoenfeld, 1991) истиче да нереална решења могу у великој мери да потичу од уверења које ученици имају о математици и задацима који се користе на часовима. Најчешћа активност у учионици је понављано вежбање алгоритамских процедура, уместо давања смисла математичким идејама у оквиру ученичког свакодневног искуства. Ово може условити веровања ученика да су математички прорачуни важнији од размишљања о стварном животном смислу њихових поступака у математичким активностима. Истраживања показују да ученици текстуалне проблеме виде као вештачке, рутинске задатке који нису повезани са стварним светом (Verschaffel et al., 2006), посебно узимајући у обзир недостатак задатака са реалистичним контекстом у уџбеницима (Gerofsky, 1996). Стога ученици стичу утисак да је коришћење здравог разума и узимање у обзир реалности контекста у проблему погрешан пут да се дође до тачног решења задатка. Неколико аутора анализирало је „скривена" веровања ученика о текстуалним проблемима која могу утицати на решавање проблема (De Corte & Verschaffel, 1985; Reusser & Stebler, 1997; Schoenfeld, 1991). Аутори су о ученичким уверењима доносили став на основу њихових решења за дате задатке. Ова (имплицитна) веровања могу се такође видети као узрок потешкоћа које ученици имају при решавању нестандардних проблема:

- Сваки проблем који представи наставник или се налази у уџбенику решив је и има смисла.
- Постоји само један (прецизан и нумерички) тачан одговор на сваки текстуални проблем.

- Одговор може бити добијен обављањем једне или више рачунских операција са бројевима у проблему и скоро сигурно са свим бројевима.
- Проблем садржи све информације потребне за проналажење тачног решења.
- Људи, објекти, места итд. различити су у математичком текстуалном проблему у односу на стварни свет и не треба (превише) бринути уколико су знање или интуиција о свакодневном свету другачији у односу на ситуацију описану у проблему.

Разматрање начина и поступака који би утицали на способност решавања и промену уверења ученика о нестандардним текстуалним проблемима било је предмет више истраживачких студија. Студија Јошиде и сарадника (Yoshida et al., 1997) показала је да експлицитно упозорење на почетку теста у коме је стајало да су неки од проблема тешко решиви или нерешиви није резултирало значајним повећањем постигнућа ученика. Слични резултати добијени су у студији Деволфа и сарадника (Dewolf et al., 2013), где је показано да коришење реалних илустрација (слика), упозорења, као и комбинације упозорења и реалних илустрација уз задатке не доводи до значајнијих ефеката. Са друге стране, студија Вершафела и Де Корта (Verschaffel & De Corte, 1997), у којој су у раду са ученицима дужи временски период коришћени реалистични нерутински проблеми и где је фокус (у раду са ученицима) био на примени свих фаза математичког моделовања резултирала је повећањем постигнућа ученика и променом њихових уверења о текстуалним задацима. Резултати наведених студија показују да само систематично коришћење свих типова задатака и планирање процеса решавања као примене математичког моделовања воде оспособљавању ученика за решавање различитих врста математичких задатака.

У нашем истраживању (Zeljić & Dabić Boričić, 2018) испитивали смо успешност решавања нестандардних задатака, а учествовало је 75 ученика трећег и 64 ученика четвртог разреда две школе са периферије Београда. Тест који су ученици радили састојао се из девет текстуалних задатака, који су преузети и модификовани из претходних истраживања, а који се могу сврстати у следеће категорије:

I) Задаци у којима је контекст суштински важан

1. *Марко је купио четири даске од по 25 дециметара. Колико дасака од једног метра може да добије од купљених дасака?*
2. *Седамдесет војника треба да буде превезено на обуку. Сваки војни аутобус прима 15 војника. Колико аутобуса је потребно да би се војници превезли?*
3. *Деда има четири унука. Дао им је кутију са 18 балона, које треба да поделе подједнако. Колико балона ће добити свако дете?*

II) Решење је дато у проблему

4. *Пастир је имао 27 оваца на својој фарми. Он жели да прошири фарму и зато је купио 18 коза. Колико оваца тренутно има пастир на фарми?*
5. *Оркестар од пет музичара изводи једну композицију десет минута. Друга група од 35 музичара ће изводити исту композицију. Колико ће трајати извођење друге групе музичара?*

III) Задаци са сувишним информацијама

6. *Мина је купила кутију са 12 бојица за њене часове сликања. Њена другарица Нађа јој је поклонила перницу са 18 фломастера и 19 бојица. Колико бојица Мина сада има?*
7. *Аманда је јуче купила три пара наушница. Прошле седмице је купила пет пари наушница. Сања је купила четири пара наушница за своју сестру, а два пара за маму. Колико пари наушница је Аманда купила?*

IV) Задаци са више решења

8. *Луција је купила паковање са 14 жвакаћих гума различитих укуса. Неке имају укус менте. Пошто је то њена омиљена арома, она је купила још 8 жвакаћих*

гума са укусом менте. Колико жвакаћих гума са укусом менте би Луција могла сада да има?

9. *Јован има пет другара, а Марко шест. Јован и Марко су одлучили да заједно направе журку. Позвали су све своје другове и сви су дошли. Колико је гостију могло бити на журки?*

Резултати истраживања (График 1) показују да су ученицима најкомплекснији задаци из категорије *Задаци који имају више решења* (8. и 9. задатак), а најлакши *Задаци са вишком информација* (6. и 7. задатак).

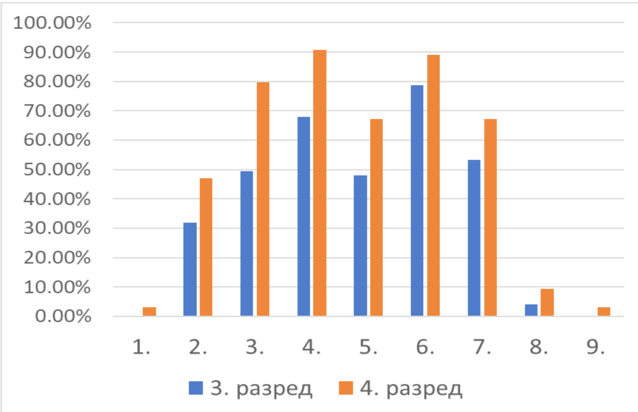


График 1: Проценат тачних одговора ученика на сваком задатку (Zeljić & Dabić Boričić, 2018)

Први задатак на укупном узорку тачно су решила и дала реалистичан одговор два ученика (1.4%). Најчешћи нереалистични одговори били су: „десет дасака” (66 ученика – 47.5%) и „четири даске” (15 ученика – 10.8%). То показује да су ученици у први план ставили поступак рачунања: четири даске по 25 dm је 100 dm = 10 m, а то су „видели” као десет дасака од по 1 m. Да ученици математички рачун посматрају одвојено од реалног контекста задатка показују и одговори на други задатак. Наиме, већина ученика је написала исправну једнакост која представља дељење са остатком (70 : 15 = 4(10)). Иако једнакост сугерише да је десет војника остало ван аутобуса ако их има четири, само су

24 ученика трећег разреда (32.0%) и 30 ученика четвртог разреда (46.9%) дали исправан одговор. Да ученици верују да је идентификација кључне речи и одабир одговарајуће операције суштина процеса решавања задатака показују и одговори: „*Потребна су четири аутобуса, а остали могу пешке/хеликоптером*” и сл. Разлике између трећег и четвртог разреда постоје у категоријама задатака *Задаци у којима је решење дато у проблему* и *Задаци у којима је контекст суштински важан.* Ако погледамо График 1, можемо видети да су ученици најлошије урадили задатке који имају више решења. Наведено истраживање показује да ученици не размишљају о својим решењима у контексту проблемске ситуације, већ су концентрисани на математички рачун са подацима доступним у проблему. Нестандардни текстуални проблеми са реалистичним контекстом, који захтевају перспективу моделовања, морају бити експлицитни део наставног програма. Квалитет, разноликост и аутентичност текстуалних проблема који се користе у настави треба повећати како би се избегао развој погрешних „скривених” веровања.

Решавање проблема је важна математичка активност у школи, јер у процесу учења ученици стичу искуство које им омогућује да користе знања и способности које треба да примене у решавању проблема, а које нису рутинске. Кроз решавање проблема, од ученика се очекује и да развију способност да решавају проблеме на које наилазе у свакодневном животу.

5.3. Решавање текстуалних задатака као примена математичког моделовања

Разумевање процеса решавања задатака је врло комплексно питање. Ако смо свесни различитих аспеката за разумевање и решавање текстуалних проблема, то нам може помоћи да установимо препреке на које ученици наилазе када покушавају да их реше. Када знамо више о томе како се разумевање повећава током процеса решавања, можемо припремити ефикасније образовне програме за текстуалне проблеме. У литератури се разматрају различити начини разумевања процеса решавања проблема, а једна од класификација је следећа (Herskovic & Bergeron, 1983):

- Инструментално разумевање је способност да се примени одговарајуће запамћено правило у решавању проблема без знања зашто се правило примењује.
- Структурално (релационо) разумевање је способност да се закључи посебно правило или поступак из више општих математичких веза.
- Интуитивно разумевање је способност да се реши проблем без претходне анализе проблема.
- Формално разумевање је способност да се повежу математички симболизам и обележавање са релевантним математичким идејама и да се ове идеје укомбинују у ланац логичког закључивања.

Новотна и Роџерс (Novotna & Rogers, 2003) тврде да ученици при решавању задатака најчешће развијају инструментално разумевање, тј. памте алгоритме и примењују их у задацима. Међутим, ако алгоритам не одговара, ученици не могу наставити да решавају задатак осим ако не поседују релационо разумевање, које им помаже да изграде нови поступак решавања уочавањем различитих веза између података и захтева у задатку активирајући знања која поседују.

У литератури се јавља прилично широк консензус у вези са компетенцијама које су потребне да би се решили текстуални задаци. Наводе се следеће компетенције (Schoenfeld, 1992; De Corte et al., 1996):

- Добро организована и флексибилна база знања која подразумева концептуално знање (нпр. схематско знање различитих типова проблема) и процедурално знање (тј. неформалне и формалне стратегије решавања) за решавање текстуалних задатака;
- Хеуристичке методе, тј. стратегије за анализу и трансформацију проблема које повећавају вероватноћу про-

налажења решења (креирање репрезентација, односно цртежа и схема), метакогнитивна знања и вештине;
- Позитиван став, укључујући позитивна веровања и емоције, као и вештине за регулисање афективних процеса.

Наведене компетенције су међусобно повезане и зависне.

Последњих деценија многа истраживања била су посвећена процесу моделовања и питању разумевања текстуалних проблема са реалистичним контекстом. Традиционално решавање текстуалних задатака посматра се као примена оперативних правила која подразумевају уочавање везе између структуре проблемске ситуације и структуре симболичког математичког израза (English, 2009). Неколико студија је показало да многи ученици остварују ниска постигнућа на задацима са реалним контекстом (Schwarzkopf, 2007; Verschaffel et al., 2000). Разлози за потешкоће у решавању нађени су у: 1) разумевању и препознавању проблема (Van der Schoot et al., 2009); 2) разликовању релевантних и небитних информација (Verschaffel et al., 2000) и 3) идентификацији математичке процедуре потребне да се реши проблем (Verschaffel et al., 2000). Најчешће идентификована потешкоћа при решевању текстуалних задатака јесте у томе да ученици заснивају своје анализе и прорачуне на површној асоцијацији одређених квантитативних елемената у тексту са одређеним математичким операцијама (Verschaffel et al., 2000). У литератури се тврди да је ово понашање ученика подржно приступом наставника који теже да нагласе искључиво математичку структуру проблема, а не и контекстуални аспект (Depaere et al., 2010), тј. фокусираност наставника на исходе је широко распрострањена (Gravemeijer, 1997). У текстуалним задацима са очигледним односима довољно је бројеве и услове из текста директно превести у математичке изразе. Решавајући текстуалне задатке на овај начин, ученици само вежбају своје вештине рачунања имитирајући поступак решавања илустрован у уџбеницима не употребљавајући концептуално разумевање и правилно математичко резоновање (Lithner, 2008; Boesen et al., 2010; Jonsson et al., 2014). Међутим, у задацима у којима постоји више елемената који су неопходни за изградњу ефикасног менталног модела, укључујући и одговарајуће односе између кључних елемената, то није могуће (Hegarty & Kozhevnikov, 1999; Pape, 2003; Van der Schoot et al., 2009; Thevenot, 2010). На пример, у задацима као што је следећи (Hegarty et al., 1992; Van der Schoot et al., 2009):

У продавници, боца маслиновог уља кошта седам евра. Та цена је за два евра виша него у супермаркету. Ако је потребно да купите седам боца маслиновог уља, колико ће то коштати у супермаркету?

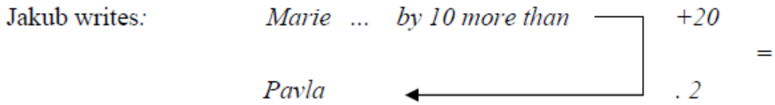
Кључна аритметичка операција (7 – 2) не може бити једноставно изведена из кључне речи („више”). Овај задатак захтева идентификацију односа вредности првог елемента (цена боце маслиновог уља у продавници) и другог (цена боце маслиновог уља у супермаркету). Процес решавања задатака са реалистичним контекстом захтева интеракцију између стварног света и света математике (Schwarzkopf, 2007) и често се описује као процес моделовања (Blum & Leiss, 2007). То је сложен процес који укључује више фаза: 1) изградњу интерног модела проблемске ситуације који одражава разумевање елемената и односа; 2) трансформацију овог ситуационог модела у математички модел; 3) рад са математичким моделом у циљу добијања резултата; 4) тумачење исхода процеса рачунања; 5) процену да ли је резултат одговарајући са аспекта рачуна и ситуације; 6) комуникацију са добијеним резултатима (Blum & Niss, 1991; Verschaffel et al., 2000). Овај вишефазни модел се не посматра искључиво секвенцијално, појединци се могу више пута вратити на неке од фаза модела (Ibid.). Свакако, поступци које користе ученици при решавању проблема не уклапају се увек у овај теоријски модел. Напротив, решавање текстуалних задатака за многе ученике је често „скраћени” модел, при чему текст проблема одмах води на математички модел – избор аритметичке операције, избор геометријске формуле или формирање алгебарских једнакости заснованих на брзој и површној анализи задатка (на пример, ослањајући се на кључне речи у тексту, као што је реч „више", ученик у проблему аутоматски користи сабирање). Директно изазвана математичка операција, формула или израз се затим решава и резултат прорачуна је пронађен и дат као одговор, обично без враћања назад на текст проблема и провере да ли је одговор одговарајући имајући у виду оригиналну проблемску ситуацију (Verschaffel et al., 2000).

Примена процеса моделовања претпоставља да при решавању текстуалних проблема ученици треба да изграде унутрашњу репрезентацију проблема и одаберу стратегију решавања (De Corte & Verschaffel, 1991; Van den Heuvel-Panhuizen, 2005). Стратегију решавања ученик бира на основу интерне репрезентације конструисане из интерпретације проблема. Стога су за успешно решавање текстуалних проблема потребне две компоненте вештина (Boonen et al., 2013): 1) релациона обрада, тј. увиђање односа између релевантних елемената из текста и 2) конструисање визуелно-схематских репрезентација.

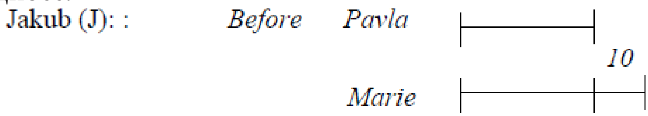
Визуелизација проблемске ситуације омогућава разумевање значења односа у задатку. Различити начини представљања у процесу решавања проблема су изузетно значајни. Термин *репрезентација* (*представа*) односи се и на „процес и на производ – другим речима, и на поступак схватања математичког појма или везе у некој форми и на саму форму" (NTCM, 2000: 67). Способност ученика да се служе репрезентацијама као математичким средством и да их активирају када се сусретну са одређеном ситуацијом сматрају се пресудним у поступцима решавања проблема. Другим речима, када покушавају да реше проблем, пожељно је да ученици знају како да се одлуче за одређени систем репрезентација и да их добро искористе. Постоје задаци који се не могу једноставно решити без изградње адекватних модела и репрезентација. Новотна (Novotna, 1997) ово тврђење илуструје ситуацијом у учиници у којој су ученици решавали следећи задатак:

Марија и Павла су добиле џепарац, али је Марија имала десет динара више од Павле. Павла је добила још онолико новца *колико је имала и поклонила је Марији двадесет динара. Оне су тада закључиле да обе имају исту суму новца. Колико новца је свака имала на почетку?*

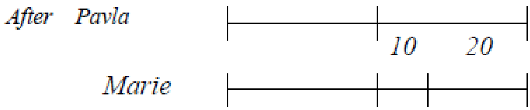
Ученик је креирао следећу репрезентацију:



Наведени модел није омогућио ученицима да развију стратегију решавања. Истраживач је предложио да дужима представе односе.



У даљем току часа истраживач је питањима навео ученика да осмисли следећи модел:



Након тога ученици су успели да реше задатак без записивања сложене једначине. Без креирања модела и преношења значења задатка на модел, задатак би се могао решити путем алгебарске једначине, што не одговара узрасту млађих разреда основне школе. Наведени пример представља илустрацију моћи коју има графичко представљање у процесу решавања проблема. Математичко моделовање није једноставно увести у наставу математике, јер, са једне стране, захтева доста времена, које је ограничено плановима и програмима, као и трајањем наставног часа, а са друге стране, захтева стручност наставника, који мора бити способан да осмишљава математичке моделе, да прихвата другачија решења и да сваком ученику приступи на одговарајући начин.

5.4. Улоīа сликовних и визуелно-схемаīских реīрезенīација у решавању īроблема

Поред језичко-семантичког домена, велики број аутора указује и на значај конструкције визуелно-схематских репрезентација у процесу рашавања текстуалних проблема (Hegarty & Kozhevnikov, 1999; Montague & Applegate, 2000; Van Garderen & Montague, 2003; Van Garderen, 2006; Boonen et al., 2013; Boonen et al., 2014). Ове студије показују да природа креираних визуелних представа одређује њихову ефикасност. Студије које истражују образовну праксу (РМЕ) показују да развијање способности креирања репрезентација и модела значајно доприноси и способности решавања текстуалних проблема (Van den Heuvel-Panhuizen, 2003; Van Dijk et al., 2003; Elia et al., 2009). У том смислу, као доминантан проблем у решавању текстуалних задатака бројни истраживачи истичу чињеницу да ученици не користе математичко моделовање у својим решењима (Verschaffel et al., 2000; Verschaffel et al., 2009a; Verschaffel et al., 2010a). Способност ученика да се ангажују у проблемском контексту и смислено конструишу репрезентације које експлицирају односе међу кључним елементима проблема одређује њихову способност да реше проблем (Depaepe et al., 2010; Voyer, 2011; Moore & Carlson, 2012; Dejić et al., 2015; Špijunović & Maričić, 2016). Ученици који су успешни у решавању проблема конструишу знатно више репрезентација него ученици који нису успешни у решавању проблема. Резултати показују да ученици који имају боља постигнућа у решавању проблема у својој аргументацији користе инвентивне комбиноване иконичке и конвенционалне симболичке приказе (Milinković et al., 2019).

У литератури се најчешће издвајају две врсте визуелних представа (Presmeg, 1997; Hegarty & Kozhevnikov, 1999; Boonen et al., 2013): сликовне и визуелно-схематске. Деца која креирају сликовне представе имају тенденцију да се фокусирају на визуелни изглед датих елемената у тексту. Репрезентација се кодира као визуелно-схематска ако ученици нацртају дијаграм или апстрактни цртеж којим исказују односе између елемената у проблему (Boonen et al., 2013). Репрезентација се кодира као сликовна ако ученик нацрта слике предмета и/или особа наведених у проблему, а не односе међу њима (Ibid.). Илустроваћемо примерима разлике између визуелно-схематских и сликовних репрезентација на примеру конкретног проблема.

Проблем: *Балон је полетео праволинијски увис на 200 метара од тла, а затим се кретао 100 метара према истоку, а онда се праволинијски спустио 100 метара. Он се кретао 50 метара ка истоку, и на крају се праволинијски спустио на тло. Колико се балон спустио далеко од своје почетне тачке?*

У истраживању Буна и сарадника (Boonen et al., 2013) ученици су креирали два типа репрезентација (Слика 22):

Fig. 3 A pictorial representation of word problem 1.

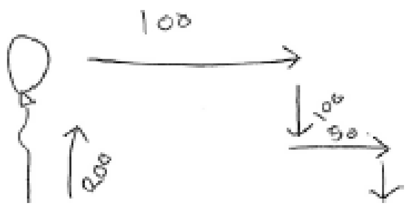


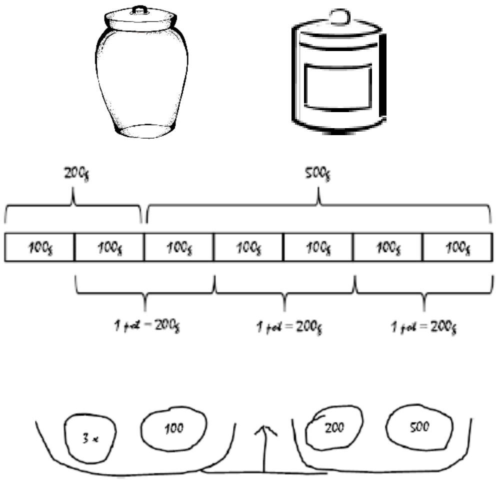
Fig. 2 A visual-schematic representation of word problem 1.

Слика 22: Сликовна и визуелно-схематска репрезентација (Boonen et al., 2013)

Навешћемо још један пример који илуструје разлике између визуелно-схематских и сликовних репрезентација.

На једној страни ваге налазе се три тегле са џемом и тег од 100 g. На другој страни су два тега масе 200 g и 500 g. Вага је у равнотежи. Која је маса једне тегле?

Примери сликовних и схематских репрезентација су следећи:

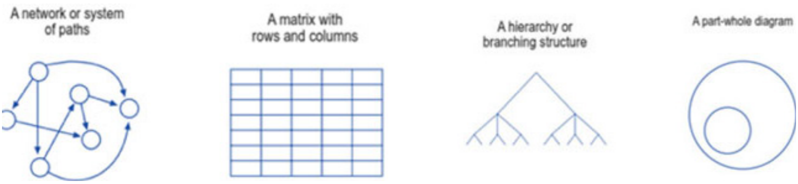


Слика 23: Сликовне и визуелно-схематске репрезентације (Boonen et al., 2013)

Више студија показало је да је креирање детаљних визуелних слика негативно повезано са способностима за решавање текстуалних проблема (Presmeg, 1997; Hegarty & Kozhevnikov, 1999; Kozhevnikov et al., 2002; Van Garderen & Montague, 2003; Van Garderen, 2006; Ahmad et al., 2010). Када је човековом оку доступна слика са много детаља, он ће много теже и спорије моћи да дође до њене суштине и разуме је. Исти је случај и са репрезентацијама у процесу решавања проблема.

Ако је ученик окупиран представљањем детаља на својој сликовној репрезентацији, теже ће се фокусирати на уочавање веза између елемената у проблему. Деца која конструишу визуелно-схематске приказе интегришу релевантне елементе текста у кохерентне визуелне представе (Van Garderen, 2006; Ahmad et al., 2010). То објашњава зашто је, за разлику од креирања сликовних репрезентација, креирање визуелно-схематских репрезентација у позитивној вези са успехом у решавању текстуалних проблема (Hegarty & Kozhevnikov, 1999; Van Garderen & Montague, 2003; Van Garderen, 2006).

Од раних 1980-их истраживања су била усмерена на учење унапред дефинисаних схема које одговарају категоријама проблема у циљу побољшања учинка ученика у решавању проблема. Циљ теорије „problem schemas” је да се ученицима понуде схеме, као и да се оспособе да одаберу и репродукују схему како би решили проблем. Новик са сарадницима (Novick et al., 1999; Novick, 2006) предлаже приступ у коме се анализирају различите схеме, које назива „просторни дијаграми”, које покривају широк спектар проблема и добро се адаптирају на сложене и нерутинске проблеме. Слика 24 илуструје четири врсте просторних дијаграма које су идентификовали ови истраживачи.



Слика 24: Просторни дијаграми за представљање информација у нерутинским проблемима: мреже, матрице, хијерархијски тип дијаграма, део–целина (Novick, 2006)

Мреже омогућавају де се информације распореде хронолошки или географски, као што су временске линије воза, путеви, мапе и сл. Ови дијаграми се састоје од комплета чворишта (тачака) са једном или више линија повезивања чворова заједно. Матрице су прилагодљиве категорије за представљање информација. Оне су корисне у комбинаторним проблемима. Матрице су дводимензионалне и представљају односе између два скупа података, чиме имплицитни односи унутар проблема постају јаснији. Хијерархијски тип дијаграма омогућава да се представљају нивои информација. Део–целина дијаграми омогућавају представљање везе између референта и бар једаног од његових делова. На пример, чоколада и комад чоколаде је део–целина дијаграм. Венови дијаграми су део–целина дијаграми.

Оригинални аспект наведеног приступа јесте идеја да „просторни дијаграм" није везан за посебну врсту проблема, пре свега зато што се иста схема може користити за представљање две различите структуре проблема и, друго, иста структура проблема може бити представљена двема различитим врстама дијаграма.

Поставља се питање ли је добра идеја користити „унапред дефинисане репрезентације" тако да их ученици могу поново креирати на свој начин (Diezmann, 2002), или је боље користити моделе ученика као полазне тачке (Gravemeijer, 2002; Van Dijk et al., 2003)? У истраживању које су спровеле Дабић и Милинковић (Dabić & Milinković, 2015) испитује се могућност употребе визуелних репрезентација као средства комуникације између наставника и ученика. Предмет истраживања јесте испитивање ученичког разумевања репрезентација комутативног својства множења које су креирали студенти Учитељског факултета у Београду. Анализа одговора датих у појединачним интервјуима са ученицима указала је на неслагања између онога што су будући наставници намеравали да пренесу кроз сликовне репрезентације и начина на који су их ученици тумачили. Ученици су показали тенденцију да придају различито значење репрезентацијама од значења које су покушали да представе будући наставници. Ђокић и сарадници (Đokić et al., 2020) у свом истраживању са студентима (будућим учитељима) приметили су да и онда када су студенти успешно дефинисали угао и различите врсте углова, када посматрају слику не показују разумевање угла у смислу јединства слике и појма.

Критике усмерене на учење унапред дефинисаних репрезентација односе се на тешкоће ученика у разумевању смисла конвенција које се користе, а које припадају једном начину размишљања одраслих што није смислено за ученике (Van Dijk et al., 2003). Присуп који подразумева давање готових репрезентација, начина и алгоритама за одређену класу проблема наилази на бројне критике. Јуло (према Fagnant & Vlassis, 2013), не спорећи важност схема у смислу менталне репрезентације која се користи за категоризацију врсте проблема, доводи у питање дидактички приступ који има за циљ да научи унапред дефинисане схематске приказе. Тако је студија Кокин-Вијеноа и Мороа (Coquin-Viennot & Moreau, 2003) показала значај утицаја контекста проблема на коришћење процедуре решавања проблема, што указује на употребу репрезентација, које су мање формалне. Аутори уводе појам „епизодни ситуациони модел", који узима у обзир контекст у коме је постављена математичка ситуација (Thevenot et al., 2010). Осим тога, неки аутори (в. Fagnant & Vlassis, 2013) наводе да постоје разлози за бојазан да систематско учење ове врсте схематизације може довести до развоја површинских стратегија ученика (покушавају да „погоде" одговарајућу схему пре него што заправо изграде репрезентацију ситуације). Дебата о различитим приступима који могу бити промовисани са циљем да се подстакне моделовање и схематизација може наћи одговор у истраживањима која испитују когнитивну флексибилност стратегија решавања проблема (Heinze et al., 2009).

Креирање модела (или схематских приказа) има за циљ да, као и у другим приступима, омогући ученицима да развију смисао и значење математичких проблема и да им помогне у процесу решавања. У том поступку развија се комуникација која укључује аргументовање и разговор о значењу проблема (Gravemeijer, 1997), а који ће омогућити ученицима математичко резоновање које се развија од полазне тачке њихових неформалних симболизација. Нагласак је више на процесу (изградња схематских приказа) него на производу (тип произведеног схематског представљања) (Van Dijk et al., 2003).

Иако новије студије (Diezmann, 2002; Van Dijk et al., 2003; Van Garderen, 2007) широко фаворизују изградњу репрезентација од стране ученика и самим тим истичу значај процеса, остаје питање почетне тачке овог поступка конструкције. Два питања тако настају: Да ли ученици креирају такве моделе од нуле и шта треба радити ако не креирају самостално математичке моделе који су потребни? Одговор на ова питања може се наћи у теорији ко-конструкције репрезентација. Тервел и сарадници (Terwel et al., 2009) у свом раду разматрају питање да ли је боље да се ученицима понуде готове репрезентације или ефикасније генерисање репрезентација уз помоћ других ученика и наставника у вођеном процесу ко-конструкције. Узорак је обухватао 239 ученика петог разреда основне школе, старости 10–11 година. У експерименталним условима ученици су учили да креирају репрезентације кроз заједничку активност ученика и наставника (10 часова). Ученици у експерименталним условима постигли су боља постигнућа у односу на ученике на посттесту и тесту трансфера знања. Ова студија показује да су ученици који уче да генеришу репрезентације успешнији у разумевању слика, графикона и модела. Они су успешнији и у решавању нових, комплекснијих математичких проблема. Активности осмишљавања репрезентација у сарадњи са вршњацима омогућиће ученицима да стекну увид у математичке структуре. Репрезентације које настају у сарадњи са вршњацима су више апстрактне, као последица комуникативне потребе за једном репрезентацијом, тј. служе да „премосте" појединачне репрезентације.

Способност ученика да генеришу релативно нове процесе решења зависи и од укључивања ученика у активности изградње репрезентација, као и од карактеристика финалне репрезентације која произилази из заједничког дизајнирања у процесу вођене ко-конструкције репрезентација (Keijzer & Terwel, 2003; Ainsworth, 2006). Када су ученици активно укључени у изградњу и вредновање репрезентација, они развијају математичка знања која им омогућавају да генеришу нове процесе решења проблема (Terwel et al., 2009). Хајнц и сарадници (Heinze et al., 2009) истичу да је флексибилно и адаптивно коришћење стратегија и репрезентација део когнитивне варијабилности која омогућава појединцима да решавају проблеме брзо и прецизно. Развој ових способности није једноставно заснован на растућем искуству; уместо тога, можемо претпоставити да се њихова аквизиција заснива на сложеним когнитивним процесима. Флексибилно/прилагодљиво коришћење стратегија и репрезентација сматра се важним аспектом наставе математике.

5.5. Флексибилност и адаптивност стратегија решавања проблема

Постоји широк консензус да појединци треба да буду у стању да реше математичке задатке не само брзо и прецизно, већ и адаптивно, тј. треба да стекну способност флексибилне примене разноврсних стратегија и репрезентација, узимајући у обзир задатак и/или карактеристике контекста (Verschaffel et al., 2007; Elia et al., 2009). Ова способност игра кључну улогу у свим аспектима математике почев од одабира одговарајуће стратегије за решавање проблема као што је „6 + 9 =", до алгебарских манипулација. Појмови *флексибилан* и *адаптиван* за неке истраживаче су синоними, док за друге флексибилно коришћење стратегија значи да су појединци у стању да флексибилно бирају између различитих стратегија, али не нужно да изаберу ону најефикаснију, док адаптивно коришћење стратегија обухвата избор најприкладније стратегије (Heinze et al., 2009). Вершафел и сарадници (Verschaffel et al., 2009b) одређују флексибилност и адаптивност стратегија решавања проблема као свесни или несвесни избор и употребу најпогодније стратегије решавања датог математичког задатка или проблема за датог појединца, у датом контексту. Дакле, они укључују индивидуалност, задатак и контекст као специфичне критеријуме у дефинисању флексибилности и адаптивности.

Зиглер (Siegler, 1996) описује развој стратешке компетенције у четири димензије: 1) репертоар стратегија, односно репертоар стратегија које особа користи да реши задатак; 2) дистрибуција стратегија, односно релативна учесталост коришћења сваке стратегије за решавање задатака; 3) ефикасност стратегија, односно брзина и тачност којом се свака стратегија примењује и 4) избор стратегије, то јест, флексибилност или адаптивност избора стратегије.

У нашим претходним студијама (Obradović & Zeljić, 2015; Zeljić et al., 2021) истраживали смо стратегије и моделе које ученици користе при решавању текстуалних проблема.

Поставља се питање да ли контекст задатака утиче на избор стратегија и модела при решавању задатака. У нашој студији (Zeljić et al., 2021) испитује се успешност и примена стратегија ученика при решавању задатака у којима је контекст вариран. Изабрана су три контекста – два су математичка: аритметички/алгебарски, као контекст у којем је формулација проблема без „шумова", и геометријски, који сугерише визуелно решавање проблема. Трећи контекст је реални и може сугерисати стратегију решавања.

Разумевање контекста текстуалног задатка је важан корак у процесу моделовања, јер претходи изграђивању одговарајућег ситуационог модела. Једна карактеристика за многе текстуалне проблеме је да контекст може бити промењен а да се структура проблема не мења. У наведеној студији текстуални задаци, који имају исту математичку структуру, представљени су у три различита контекста: реални, аритметички и геометријски. У истраживању су постављена следећа истраживачка питања:

1) Да ли постоји разлика у успешности ученика на задацима у којима контекст варира (реални, аритметички/алгебарски и геометријски)?
2) Да ли постоји повезаност постигнућа ученика на задацима у сва три контекста?
3) Да ли контекст задатка утиче на бирање стратегије (алгебарска или аритметичка), креирање модела и репрезентација у процесу решавања задатака?

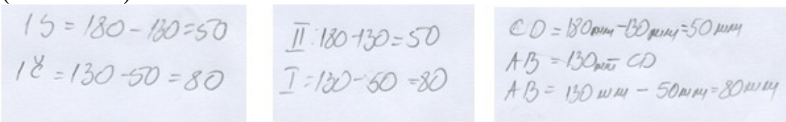
У истраживању су учествовала 62 ученика четвртог разреда из три одељења различитих основних школа у Београду. Ученици су радили три теста, а размак између свака два тестирања био је недељу дана. Задаци коришћени у студији су следећи:

	Реални контекст	Аритметички/алгебарски контекст	Геометријски контекст
1	Чоколада и сок коштају 130 динара, а чоколада и два сока коштају 180 динара. Колико кошта једна чоколада, а колико сок?	Збир два броја је 130, а збир првог броја и двоструког другог броја је 180. Који су то бројеви?	Збир дужина дужи AB и CD је 130 mm. Збир дужина дужи AB и двоструке дужине дужи CD је 180 mm. Колике су дужине дужи AB и CD?
2	Збир Нађиних и Лениних година је за 20 већи од Нађиних и за 15 већи од Лениних година. Колико година има Нађа, а колико Лена?	Збир два броја је за 20 већи од првог сабирка и за 15 већи од другог сабирка. Који су то бројеви?	Збир дужина две дужи је за 20 mm дужи од прве дужи и за 15 mm дужи од друге дужи. Колика је дужина сваке дужи?
3	Соња има неколико сличица, Нађа једну сличицу више од ње, а Мила једну више од Нађе. Њих три укупно имају 48 сличица. Колико сличица има свака девојчица?	Збир три узастопна броја је 48. Који су то бројеви?	Дата је дуж AB. Дуж CD је за 1 cm дужа од дужи AB, а дуж EF за 1 cm дужа од дужи CD. Укупна дужина све три дужи је 48 cm. Одреди дужину сваке дужи.
4	Сестра има 4 пута већу суму новца од брата. Када сестра потроши 60 динара, онда имају исту суму новца. Колико новца има брат, а колико сестра?	Један број је 4 пута већи од другог. Када се већи број смањи за 60, биће једнак мањем броју. Одреди те бројеве.	Дуж CD је 4 пута дужа од дужи AB. Ако би дужина дужи CD била краћа за 60 mm, тада би била једнака дужини дужи AB. Одреди дужине датих дужи.

5	Марија имала 10 сличица више од Јоване. Јована је успела да удвостручи свој број сличица, па је поклонила Марији 20 сличица. Оне су тада закључиле да имају исти број сличица. Колико сличица је имала свака девојчица на почетку?	Један број је за 10 већи од другог. Када други број удвостручимо и од тог производа одузмемо 20, а првом броју додамо 20, они ће бити једнаки. Одреди те бројеве.	Дуж AB је за 10 mm дужа од дужи CD. Ако дужину дужи CD удвостручимо, а затим скратимо за 20 mm, а дужину дужи AB повећамо за 20 mm, оне ће бити исте дужине. Одреди дужине дужи AB и CD.
6	У једној посуди има 3 пута више млека него у другој. Када се у већу посуду доспе 9 l млека, а у мању 8 l, у већој посуди биће 2 пута више млека него у мањој. Колико је у почетку било млека у свакој посуди?	Први број је три пута већи од другог. Када се први број увећа за 9, а други број за 8, први број ће бити два пута већи од другог. Одреди почетне бројеве.	Дуж AB је три пута дужа од дужи CD. Када се дуж AB повећа за 9 cm, а дуж CD за 8 cm, дуж AB биће два пута дужа од дужи CD. Израчунај почетне дужине дужи AB и CD.

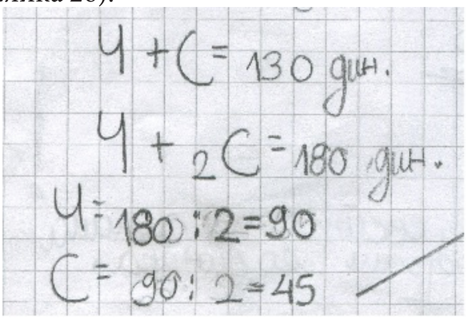
Табела 5: Задаци у различитим контекстима коришћени за тестирање ученика (Zeljić et al., 2021)

Резултати истраживања показују да су ученици подједнако успешни у сва три контекста, тј. да реформулисање задатака и промена контекста нису утицали на постигнуће ученика. Да промена контекста не утиче на успех ученика у решавању текстуалних задатака показује и позитивна повезаност готово на свим задацима. Поставља се питање да ли су ученици разумели структуру задатака и препознавали је у различитим контекстима или су користили површинске методе решавања. Прва три задатка ученици су успешно урадили у високом проценту. У овим задацима односи се лако уочавају, па су потврђени ставови да су и лаки за решавање, али оно што је упечатљиво јесте то да су ученици користили исте методе у свим контекстима. Ученици нису показали способност флексибилне примене разноврсних стратегија и репрезентација узимајући у обзир карактеристике контекста. Илустроваћемо овај разултат на примеру првог задатака у свим контекстима који је решавао исти ученик (Слика 25).



Слика 25: Решења првог задатка која је креирао исти ученик (реални, аритметички, геометријски контекст) (Zeljić et al., 2021)

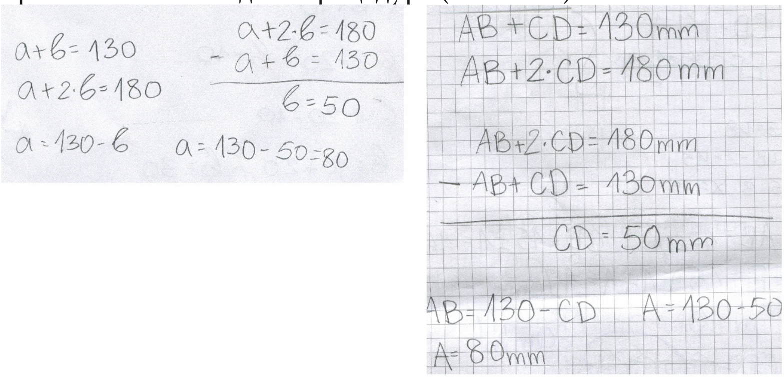
Ученици који нису успешно решили задатак користили су приступ кључне речи. Тај приступ илустроваћемо следећим примером (Слика 26).



Слика 26: Решења првог задатка у реалном контексту (Zeljić et al., 2021)

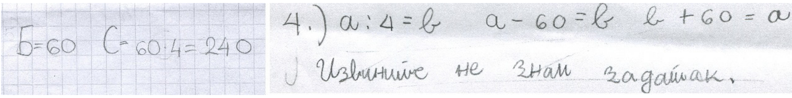
Ученик је адекватно записао односе „чоколада и сок коштају 130 дин.” и „чоколада и два сока коштају 180 дин.”. Међутим, очигледно је да се фокусирао на податак „два сока” и суму новца која представља цену чоколаде и два сока поделио са два. Да ученик није разумео ситуациони модел показује и чињеница да је тај резултат повезао са ценом чоколаде, коју је опет поделио са 2. Ово показује да је он своје решење засновао на површној асоцијацији одређених квантитативних елемената (две чоколаде) у тексту са одређеним математичким операцијама.

Иако су ученици доминантно користили аритметички метод решавања, изненађује нас алгебарска симболика и метод који су многи од њих користили. Наиме, ученици до краја четвртог разреда по званичном програму Републике Србије оперишу у скупу N и упознају једноставне облике једначина. Међутим, ученици су постављали и решавали системе једначина које нису у курикулуму прва четири разреда. Исте поступке примењивали су и у геометријском контексту. Навешћемо решење првог задатка у аритметичком и геометријском контексту када су, због експлицитно изражених односа, ученици успешно примењивали наведене процедуре (Слика 27).



Слика 27: Алгебарске стратегије решавања првог задатка у алгебарском и геометријском контексту (Zeljić et al., 2021)

Анализом решења овог задатка уочене су две кључне грешке: примена површинских стратегија заснованих на „кључној речи" и представљање односа алгебарским симболима без увиђања адекватног значења тих односа. У тим поступцима, иако су правилно записали односе алгебарским симболима, ученици нису успели да то искористе и да успешно реше задатак.

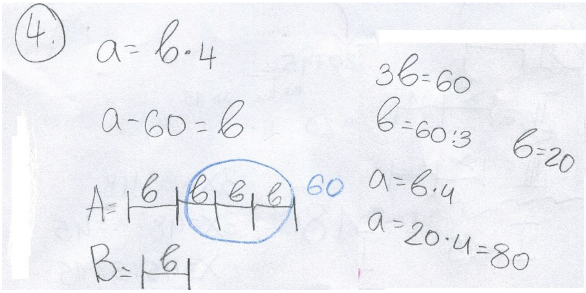


а) б)

Слика 28: а) Приступ кључне речи у четвртом задатку у реалном контексту; б) Алгебарско постављање проблема у математичком контексту (Zeljić et al., 2021)

На Слици 28б ученик је правилно записао односе међу бројевима алгебарским симболима, али тај вид представљања односа не показује разумевање ситуације и увиђање односа између релевантних елемената из текста. Ученици, решавајући проблемске задатке, прескачу поједине фазе моделовања, као што је изградња интерног модела проблемске ситуације и трансформација овог ситуационог модела у математички модел. У овим примерима, ученици нису могли да одаберу адекватну стратегију решавања, јер нису изградили унутрашњу репрезентацију проблема. Пример задатка представљен на Слици 28б показује да је ученик адекватно представио односе у задатку користећи алгебарске репрезентације, али та репрезентација му није помогла да сагледа одговарајуће односе и структуру проблема. Зато је ученик написао „не знам задатак".

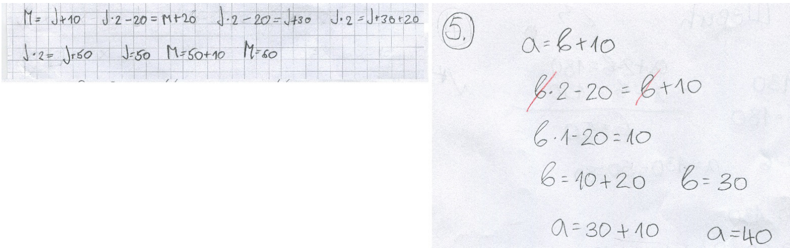
У литератури је указано на значај процеса моделовања у решавању проблемских задатака и наведени су примери повећања успешности у њиховом решавању креирањем модела (Van Garderen, 2006; Boonen et al., 2013; Boonen et al., 2014; Deraepe et al., 2010; Moore & Carlson, 2012; Voyer, 2011). Наши резултати потврђују ове налазе. Наиме, ученици који су креирали иконичке моделе, били су успешни у решавању задатака. Потврђени су ставови да креирање модела олакшава увиђање односа и избора стратегије решавања. Иако су, након модела, ученици углавном користили аритметички начин решавања, подједнако су били успешни и у алгебарском начину решавања (уз модел). Навешћемо решење ученика које илуструје дато тврђење (Слика 29).



Слика 29: Коришћење иконичког модела и алгебарске стратегије решавања проблема на примеру 4. задатка (аритметичко-алгебарски контекст) (Zeljić et al., 2021)

Занимљиво је то што су ученици који су креирали моделе у процесу решавања, креирали апстрактне слике и представљали односе дужима у свим контекстима, што је довело до успешног решавања проблема (Blum & Niss, 1991; Presmeg, 1997; Hegarty & Kozhevnikov, 1999; Verschaffel et al., 2000; Van Garderen, 2006; Blum& Leiss, 2007; Ahmad et al., 2010). Ово није изненађујуће јер се метод дужи, као модел решавања проблема, обрађује на додатној настави, коју похађају најбољи ученици. Веома мали број ученика (у реалном контексту 10, у аритметичко-алгебарском 1) креирао је илустрације и слике са детаљима у реалном контексту, тј. у решењима ученика се појавио веома мали број сликовних представа, које нису водиле тачном решењу задатка, што је у складу са истраживањем. У литератури је постављено питање да ли као полазне тачке при решавању проблема треба користити самоизграђене моделе (Gravemeijer, 2002; Van Dijk et al., 2003) или „унапред изграђене репрезентације" (Diezmann, 2002). Придружујемо се ставовима да је моделовање процес који захтева заједничку активност ученика и наставника у процесу изградње модела (Ainsworth, 2006; Keijzer & Terwel, 2003).

Резултати истраживања показују да ученици успешно примењују алгебарске и аритметичке поступке решавања једноставних задатака, а само је мали број њих у стању да уради комплексније задатке примењујући формалне методе решавања, као што је нпр. решење 5. задатка (Слика 30).



Слика 30: Алгебарска решања 5. задатка: тачно решење у реалном и нетачно решење у математичком контексту (Zeljić et al., 2021)

Став да наведене формалне методе решавања може савладати изузетно мали број ученика у почетним годинама школовања формирали смо на основу резултата студија (Carpenter et al., 1988; Verschaffel et al., 2000; Lithner, 2008; Boesen et al., 2010; Jonsson et al., 2014), које су указале на потешкоће са којима се ученици сусрећу у успостављању везе између конвенционалног симболизма у настави и неформалних приступа који се развијају приликом суочавања са проблемима који су им постављени. Ученици у наведеној студији нису покушали да смање апстрактност проблема креирањем различитих модела.

Занимљиво је да се без икаквог знања алгебре може добити тачан одговор на проблем као што је следећи:

Бен је четири године старији од Хуана. За две године збир њихових година биће 50. Колико година сада има свако од њих?

До тачног одговора се долази применом аритметичких стратегија решавања (Fuson, 1992), које укључују стратегије „систематско погађање и провера” и „метод инверзије”. У оба случаја задатак се решава аритметички, обично без икакве формализације ситуације или начина решавања. Међутим, како наводи Кијеран (Kieran, 1992), мора се догодити драстичан преокрет у размишљању при учењу алгебре када се решавање текстуалних проблема посматра кроз формирање једначина којима се представља структура проблема на апстрактан начин.

Резултати нашег истраживања (Zeljić et al., 2021) показују да ученици не примењују математичко моделовање у решавању текстуалних задатака у различитим контекстима. Чак и када је задатак дат у геометријском контексту (у самом тексту се говори о дужинама дужи), ученици нису користили модел дужи у процесу решавања проблема. То показује да ученици, након неколико година школовања и решавања задатака формалним методама, потпуно игноришу визуелизацију као могуће средство (и фазу) решавања проблема. Већи број аутора (Van den Heuvel-Panhuizen, 2003; Van Dijk et al., 2003; Elia et al., 2009) сматра да поступци моделовања текстуалних задатака морају бити део курикулума школске математике од првих година образовања. Било да су у питању готове репрезентације или ко-конструкција, такве репрезентације треба поставити као експлицитан задатак наставе и када ученици знају да решавају проблеме симболички. Када се ученици сусрећу са комплексним проблемима, морају имати већ развијене способности моделовања. Изградњу модела од прве године школовања ученицима треба представити као задатак, а не искључиво као средство решавања проблема.

Од ученика који почињу са решавањем проблема као важним аспектом алгебре очекује се да користе алгебарске (симболичке) репрезентације, без претходно утемељеног значења односа које представљају помоћу геометријских репрезентација. Без тога у настави остаје низ празних ходова и формалистичких процедура. Да нема моделовања, математика би се односила само на механичку манипулацију безначајних симбола, што говори да је примена моделовања у школству од вишеструког значаја. Велики број математичара сматра да моделовање треба применити од раног школског узраста, док други сматрају да за употребу модела треба сачекати док ученици не стекну одређена предзнања неопходна за успешно коришћење модела. Ти модели ученицима могу доста да помогну у смислу мањег лутања и губљења времена, али нипошто не дају универзалне рецепте помоћу којих они могу да реше све задате проблеме.

5.6. Улога и компетенције наставника у развијању вишеструких стратегија решавања проблема

5.6.1. Стратегије наставника за решавање проблема

Због важности домена решавања проблема, многа истраживања укључују наставнике, а односе се на испитивање њихових стратегија за решавање проблема, компетенција и утицаја њихових ставова на постигнућа ученика (Van Dooren et al., 2002; Ishida, 2002; Peker, 2009; Jiang & Chua, 2010). Ван Дорен и сарадници (Van Dooren et al., 2002) истраживали су вештине и стратегије решавања аритметичких и алгебарских текстуалних проблема од стране наставника у млађим (енгл. *pre-service primary school teachers*) и старијим разредима (енгл. *pre-service secondary school teachers*). Резултати њиховог истраживања показали су да су наставници старијих разреда употребљавали алгебарске стратегије чак и када је примена аритметичких стратегија била много једноставнија. Наставници млађих разреда користили су различите стратегије решавања проблема.

Слично, Дуру и сарадници (Duru et al., 2011) истраживали су стратегије решавања текстуалних проблема које су користили наставници (њих две стотине) у млађим разредима основне школе. Они су идентификовали следеће стратегије:

1) Аритметичка: математички израз који укључује једну или више операција са бројевима датим у проблему;
2) Алгебарска: текстуални проблем је преведен на алгебарску симболику;
3) Коришћење модела: текстуални проблем је преведен на модел;
4) Погађање и провера: погађа решење и онда проверава да ли је то решење тачно;
5) Наћи правило: у решавању проблема тражи се правило у датим подацима;

6) Коришћење модела и алгебарски метод решавања: у овој категорији, наставници су прво превели текстуални проблем на модел, а онда уз помоћ модела записали једначине.

Резултати су показали да наставници разредне наставе у Турској користе различите стратегије решавања проблема, а доминантне стратегије су алгебарске и аритметичке уз коришћење модела и репрезентација. Способност наставника да користе различите стратегије решавања проблема одређује њихово иницијално образовање. Пекер (Peker, 2009) у свом истраживању закључује да је практична обука наставника у виду коришћења стратегија решавања проблема у конкретним задацима позитивно утицала на начин на који они предају ученицима. Он истиче да је добро разумевање процеса решавања проблема први корак у разумевању начина како га ученицима представити. Ова студија показује да је неопходно у иницијалном образовању наставника увести различите стратегије за решавање проблема. Проблеми у погледу способности будућих наставника у решавању проблема јесу следећи:

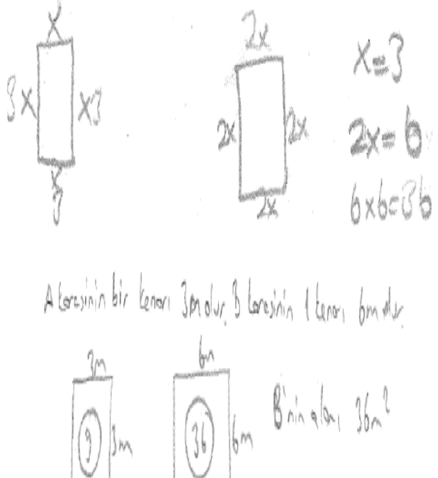
- Немогућност сагледавања својих решења у реалном животу, контекст проблема (Tirosh et al., 1991);
- Преферирање примене малог броја стратегија и метода које се не мењају чак и ако нису продуктивне; нефлексибилност у избору или управљање стратегијама за решавање проблема (Chapman, 1999; Taplin, 1994);
- Тенденција да се примене стереотипна решења за проблем, нпр. повезивање одређене математичке теме са одређеном стратегијом решавања проблема (Leikin, 2003);
- Разумевање решавања проблема као линеарног процеса који укључује примену алгоритама у решавању текстуалних проблема (Chapman, 2005);
- Недостатак стратегије за тумачење информација које су дате у текстуалним проблемима и препознавање одговарајуће процедуре за решавање (Taplin, 1998).

Наставници би требало да буду у потпуности свесни могућности коришћења одређених стратегија, тј. морају да поседују флексибилност у избору стратегија које одговарају одређеним задацима. Неки ученици ће разумети једну стратегију решавања, док другима та иста стратегија неће сасвим одговарати, али другачији приступ задатку хоће. Међутим, наставници имају тенденцију да користе једну врсту репрезентација и једну стратегију решавања и мање су свесни важности вишеструких репрезентација и метода решавања (Stylianou, 2010; Zhe, 2012). Наставници треба да поседују способност представљања структуре проблема различитим моделима и репрезентацијама како би ученици лако разумели идеју проблема. Коришћењем различитих модела и репрезентација може се подстаћи разумевање структуре проблема од стране ученика са различитим математичким способностима (Choike, 2000). За развијање математичких способности ученика и подстицање на осмишљавање нових стратегија проблема важно је да и сâм наставник буде „стваралац" (Dejić, 2013). Стваралаштво наставника се испољава кроз истицање примене математике, подстицање радозналости ученика, подстицање ученика да трагају за новим решењима и проблем сагледају са свих аспеката, кроз сопствено разумевање суштине проблема и омогућавање ученицима да виде више и дубље (Ibid.).

Познато је да се математички проблеми могу решавати на различите начине коришћењем различитих стратегија. Стратегија коју „нуди" наставник значајно ће утицати на стратегије које његови ученици користе у решавању сличних проблема (Güler & Çiltaş, 2011). Начин решавања проблема наставника утиче и на избор модела који користе ученици. Наведени став потврђује наведена студија (Ibid.) у којој се испитује да ли постоји веза између нивоа коришћења визуелних репрезентација од стране наставника математике у решавању текстуалних проблема (који укључују било коју слику, фигуру, графички приказ и сл.) и нивоа коришћења визуелних репрезентација ученика у сличним проблемима. У наведеној студији коришћен је тест који се састоји од шест задатака. Наставници су решавали проблеме на тесту на исти начин као што то чине у учионици. Исти тест решавали су и ученици. Резултати показују да је већи проценат ученика користио визуелне моделе у одељењима где предају наставници који користе исти тип репрезентација, као и да су ти ученици били успешнији у решавању проблема. Начин на који тип репрезентације коју користи наставник утиче на избор и креирање репрезентација ученика илустроваћемо следећим примерима (Güler & Çiltaş, 2011).

Пример 1. *Површина квадрата А је девет квадратних метара. Једна страница квадрата В једнака је двострукој страници квадрата А. Израчунајте површину квадрата В.*

Упоређивањем решења наставника и типичног решења ученика из разреда коме он предаје, може се закључити да ученици имају исти тип репрезентације и стратегије које користе и њихови наставници (Слика 31).

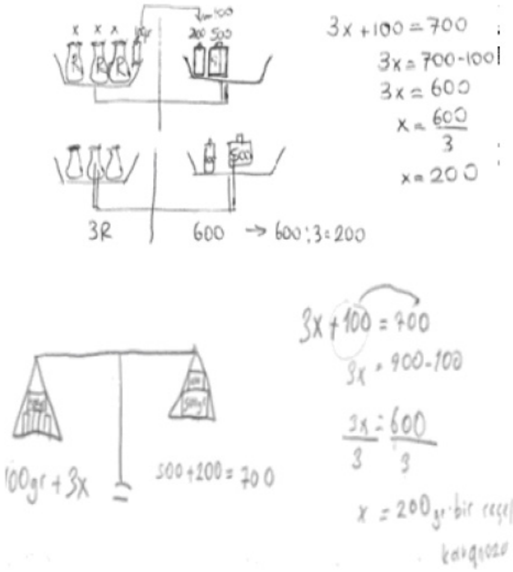


Слика 31: Визуелна репрезентација наставника А и визуелна репрезентација његовог ученика (Güler & Çiltaş, 2011)

На примеру следећег проблема можемо уочити исту тенденцију.

Пример 2: *Постоје три тегле џема и тег од 100 грама на једној страни теразија, а на другој два тега, један од 200 грама, а други од 500 грама. Теразије су у равнотежи. Колико грама је маса једне тегле џема?*

Решења другог наставника и ученика из његовог разреда представљена су на следећој слици:



Слика 32: Визуелна репрезентација наставника Б и визуелна репрезентација његовог ученика (Güler & Çiltaş, 2011)

Визуелна репрезентација може довести до погрешних решења текстуалних математичких проблема. Уколико се односи између елемената проблема не огледају у визуелним представама, репрезентација не може довести до правилног решења проблема. Ученици који нису конструисали адекватне репрезентације користили су такође визуелно-схематске репрезентације, али односи између елемената проблема нису адекватно представљени. Ипак, такве репрезентације су добра полазна основа за дискусију и исправљање погрешног резоновања. Ученици користе у великој мери (76%) методе које су користили њихови наставници за решавање сличних математичких проблема. Употреба визуелних репрезентација наставника утиче на стратегије решавања ученика. Резултати су показали да ученици (81%) сматрају да је коришћење визуелних репрезентација у решавању проблема добар начин учења и да то повећава успех у учењу. Ученици (њих 77%) сматрају да употреба визуелних репрезентација у фази разумевања проблема може бити ефикасна.

Компаративна анализа наставне праксе у САД и Кини (Cai & Lester, 2005; Huang & Cai, 2007) показује да се различите културне вредности наставника о репрезентацијама огледају у њиховом коришћењу и вредновању репрезентације. Када се упореди коришћење репрезентација на часовима математике у САД и Кини, утврђено је да амерички наставници преферирају вишеструке репрезентације истовремено, док у Кини наставници користе једну или две репрезентације истовремено. Међутим, кинески наставници више пажње посвећују развијању симболичких репрезентација, па и њихови ученици користе симболичку репрезентацију у решавању проблема (Cai & Lester, 2005; Huang & Cai, 2007). Утврђено је да су се амерички и кинески ученици знатно разликовали у употреби стратегија и репрезентација при решавању проблема. Амерички ученици су често користили визуелне или сликовне репрезентације, док су кинески ученици чешће користили симболичке репрезентације. Када су обе групе ученика користиле симболичке репрезентације како би представиле процес решења проблема, амерички ученици су користили аритметичке стратегије, док су кинески ученици користили алгебарске стратегије. Склоност кинеских ученика према апстрактним стратегијама резултирала је већом стопом успешности у односу на америчке ученике у апстрактнијим проблемима. Приликом вредновања решења задатака, амерички наставници дали су знатно више поена за решења која укључују визуелне стратегије, док су кинески наставници обично давали релативно нижу оцену ако је одговор укључивао цртање или прављење табеле иако је стратегија била одговарајућа за проблем. Амерички наставници сматрали су да визуелне стратегије јасно показују како ученици размишљају о проблемима и како их решавају.

Способност креирања репрезентација од стране наставника и разумевање улоге модела и репрезентација у процесу решавања проблема одређује и карактеристике наставе усмерене на решавање проблема. Тарнер (Turner, 2008) износи резултате који показују да наставници почетници у основним школама у Великој Британији често имају потешкоћа у избору и коришћењу визуелних репрезентација, а да свој избор заснивају на површним карактеристикама као што је естетска привлачност, а не прикладност. У Немачкој су Дрехер и Кунце (Dreher & Kuntze, 2015) установили да чак наставници математике у средњим школама не разумеју у потпуности улогу и употребу различитих облика репрезентација у процесу решавања проблема. Што се тиче визуелних приказа, наставници треба да препознају шта је све укључено у употребу одређене репрезентације и када ју је прикладно користити. Они треба да имају развијену свест о томе да визуелно-схематске репрезентације треба користити за разумевање текстуалног проблема и односа између елемената проблема, а да су аритметичке и алгебарске репрезентације одговарајуће у фази решавања проблема.

5.6.2. Подстицање вишеструких стратегија решавања код ученика

Решавање проблема употребом различитих стратегија, упоређивање стратегија и исправљање погрешног резоновања и примене стратегија сматра се суштинском математичком активношћу. Оспособљавање ученика за размену и упоређивање стратегија решавања одређеног проблема (нпр. расправљање о сличностима и разликама у стратегијама) лежи у основи реформе наставе математике у многим земљама света. Истраживања показују да ученицима недостаје мотивација за решавање проблема на више од једног начина, али и да их наставници нерадо подстичу на то (Leikin & Levav-Waynberg, 2007). Уместо захтева ученицима да осмисле различите стратегије решавања истог проблема, природнији приступ је да ученици размењују стратегије у оквиру разреда. У јапанским учионицама, на пример, постоје часови који су често структурирани у виду четири кључне компоненте: 1) наставник задаје проблем за покретање дискусије; 2) ученици решавају проблем у групама или појединачно; 3) води се дискусија у читавом разреду у којој се упоређују алтернативне стратегије и 4) на основу рефлексије изводе се закључци (Evans & Swan, 2014). Јапански наставници су склони да у завршном коментару истакну математичку софистицираност коришћених приступа. То укључује велику вештину наставника, јер подразумева пажљив одабир ученичких стратегија и њиховог редоследа излагања тако да изазове продуктивну дискусију.

Анализа наставе математике у земљама са високим постигнућима на међународним тестирањима (нпр. Јапан) показује да наставници у тим земљама инсистирају на примени и анализи различитих стратегија решавања проблема (Richland et al., 2007). Ученици могу научити више при решавању једног проблема на више различитих начина него при решавању више различитих проблема када се сваки проблем решава само на један начин. Јасно је да остаје много тога непознато о томе како наставници могу подржати ученике да примене различите стратегије решавања проблема. У настави у којој се подстиче коришћење различитих стратегија решавања проблема, од ученика се очекује да служе као ресурси једни другима у раду на проблемима, сарађују на развијању процеса решавања и међусобно деле своје стратегије.

Када говоримо о решавању проблема од стране ученика, то значи да им није унапред позната стратегија решавања. Наставник може „убити” аспект решавања проблема тиме што подучава ученике методу решавања (Foster, 2019). Поучавање метода решавања може изгледати као користан приступ који ће вероватно помоћи ученицима да реше тај одређени проблем, али мало је вероватно да ће подржати њихову дугорочну способност решавања непознатих проблема. Да ли сте икада желели да нешто размислите за себе, а да вас не прекидају и не кажу како се то ради? Ипак, колико често се то догађа на часу математике? Чим ученик застаје у решавању проблема, наставник пожури да покаже и објасни како се то ради. Иако наставникова објашњења у почетку могу помоћи ученику да дође до решења, то му не помаже да научи математику – учешће у продуктивној борби је оно што помаже ученицима да науче математику. Продуктивна борба са проблемима подразумева да ученици морају имати алате и претходно знање за решавање проблема, а не давање проблема који је сувише удаљен од њихових постојећих знања. Ипак, ученицима не треба давати задатке који су директни и лаки, јер и ученици млађег узраста, када знају да се „борба" очекује као део процеса рада на проблему, прихватају борбу и осећају успех када дођу до решења (Carter, 2008). Фостер (Foster, 2019) наводи да је присуствовао часовима где је наставник припремио изазован задатак, али је његова имплементација започињала на следећи начин: „Пре него што започнете, да вас подсетим на неколико ствари ... " На тај начин наставници уништавају проблем који су пажљиво конструисали, а лекција постаје вежба примене наставниковог метода и алгоритма. Ово поставља питање каква би улога наставника требало да буде. Ако ученике подучавамо како да реше проблем, то за њих више није решавање проблема, а ако само постављамо проблеме, то није процес учења. Ако ученици реше проблем без икакве помоћи, онда проблем није довољно изазован. Ако то не ураде, онда нису ништа научили.

Већи број истраживача предлаже моделе за структурирање активности у учионици, а који наглашавају следеће елементе: предвиђања когнитивних реакција ученика на захтевне задатке; пажљиво праћење рада ученика; сврсисходни одабир решења за дискусију у целом разреду; осмишљавање дискусије треба да се изгради на мотивацији ученика, а не на наредби; помоћ ученицима да успоставе везу између различитих приступа и генерализација; препознавање и вредновање решења ученика

(Brousseau, 1997; Lampert, 2001; Stein et al., 2008). Међутим, наведени процеси су захтевни за наставнике. Истраживачи примећују да се наставници често држе приступа „покажи и реци", а да не подстичу расправу о идејама које стоје иза решења. Разговор са ученицима је приоритет у односу на вршњачко учење (Stein et al., 2008). Само прихватање одговора, без покушаја критике и синтетизовања појединачних доприноса, мање је захтевно за наставника, али може ограничити развој математичког резоновања (Mercer, 1995).

Након серије истраживања, Еванс и Свон (Evans & Swan, 2014) наводе следеће разлоге за организовање наставе решавања проблема тако да наставници буду посредници, тј. „модератори" у анализи различитих решења ученика:

1) Треба подстаћи ученика који је „заглављен" у одређеном начину размишљања да размотри друге приступе. Ако се ученик већ неко време бори са одређеним приступом, наставници су често у искушењу да му предложе неки конкретан приступ. Ово може довести до тога да ученик примењује предложени поступак не размишљајући о његовом значењу и ефикасности. Наставник може тражити од ученика да размотри стратегије других ученика у решавању проблема.
2) Различити приступи проблему могу олакшати успостављање веза између различитих елемената знања, стварајући тако или ојачавајући мреже сродних идеја, што омогућава ученику да формира „кохерентне, свеобухватне, флексибилне и апстрактне структуре знања".
3) Поређење алтернативних репрезентација проблема које користе ученици. За проблеме са моделовањем могуће је коришћење различитих репрезентација као што су вербалне репрезентације, дијаграми, графици, табеле, алгебарске репрезентације и др. Свака репрезентација има своје предности и недостатке, а

кроз упоређивање ученици постају свесни њиховог значаја.

4) Да се ученицима скрене пажња на критеријуме вредновања и оцењивања.
5) Да се укаже ученицима да су грешке део учења. На тај начин стигма везана за грешке може бити смањена. Пажљиво осмишљена анализа појединачних стратегија може исправити погрешно резоновање многих ученика, посебно ако се ради о типичним погрешним представама.

Развијање различитих стратегија решавања проблема не треба да буде у фокусу само при решавању когнитивно изазовних задатака. Уколико наставник не подсиче примену различитих стратегија на једноставним задацима, тешко ће створити ту навику у раду на сложенијим проблемима. Већ при поласку у школу деца поседују различите стратегије сабирања једноцифрених бројева (Fuson, 1992): 1) Уз коришћење манипулатива, нпр. 3 + 4, ученик формира блок од три јединице, затим од четири и на крају пребројава суму; 2) Неколико рационалнијих стратегија, без манипулатива: а) пребројавање; б) добројавање од првог сабирка; в) добројавање од већег сабирка; г) стратегија разлагања 3 + 4 = 3 + 3 + 1 = 6 + 1 = 7 циљ је поједноставити рачуницу; 3) Знање чињенице, аутоматизам.

Ученицима треба допустити да те стратегије користе и подстицати да их објашњавају. Они и при рачунању са већим бројевима користе различите стратегије (видети одељак 2.2. Ментална аритметика – пример креативног математичког резоновања). На тај начин код ученика се развија стратешка флексибилност и адаптивност које могу применити при решавању сложенијих проблема.

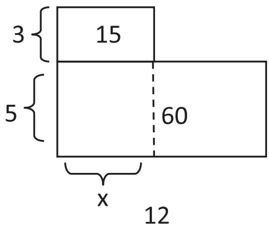
Анализирајмо могућа решања следећих задатака:

1. *На реци је било 12 чамаца од којих већи имају по 8, а мањи по 5 седишта. Колико је било већих а колико мањих чамаца, ако је укупан број седишта 75?*

Могуће су различите стратегије решавања задатка. Задатак се може решити методом лажне претпоставке на следећи начин:

Претпоставимо да су свих 12 чамаца са по 8 седишта. Тада ће укупно бити $12 \cdot 8 = 96$ седишта. Сваки пут када смо погрешно претпоставили да чамац има 8 уместо 5 седишта, укупан број седишта повећали смо за 3. С обзиром на то да смо погрешном претпоставком израчунали да има 96 седишта, укупан број смо повећали за $96 - 75 = 21$ седиште. Значи, погрешно смо претпоставили за $21 : 3 = 7$ чамаца. То значи да 7 чамаца има 5 седишта.

Задатак можемо решити и методом правоугаоника:



Када се површином правоугаоника представи да свих 12 чамаца имају по 5 седишта, док неки од њих (x) имају још по 3 (укупно 8), са слике се јасно уочава да је $3 \cdot x = 15$, тј. да има 5 већих и 7 мањих чамаца.

Као трећу стратегију решавања можемо користити алгебарски метод, тј. формирати једначину:

број већих чамаца: x	$x \cdot 8 + (12 - x) \cdot 5 = 75$
број мањих чамаца: 12 – x	$x \cdot 8 + 60 - 5 \cdot x = 75$
	$3 \cdot x = 15$
	$x = 5$

Неки ученици задатак ће решавати путем покушаја и погрешака. Стратегије које се не могу уопштити тако да су погодне и када су бројеви доста већи нису одговарајуће за решавање проблемских задатака. Различите стратегије могу олакшати повезивање проблема са различитим елементима знања формирајући на тај начин мреже сродних идеја. Генерисање објашњења и подстицање ученика да објашњавају и уопштавају своје стратегије побољшава учење у разним темама математике (Rittle-Johnson, 2006).

Питање идентификовања карактера грешке у процесу решавања проблема, као и реаговања у циљу њиховог исправљања, суштински је важно за наставу математике. Грешке су незаобилазна компонента процеса учења за сваког ученика. Коришћење ученичких грешака на продуктиван начин одређује се (Olivier, 1989) као оспособљавање ученика да схвате, анализирају и исправе грешку и, даље, да користе грешку за израду стратегије којом се спречавају даље грешке. Ако грешке упоређујемо са улогом примера и контрапримера за учење математичких појмова, онда грешке играју улогу контрапримера. Дакле, није довољно рећи ученицима шта је тачно решење. Они морају знати место и природу грешака које су направили у својим решењима и стратегијама.

Анализирајмо и следећи задатак (Obradović & Zeljić, 2015):

2. Брат и сестра заједно имају 840 динара. Они треба да поделе ту суму новца тако да брат добије 160 динара више од сестре. По колико ће динара добити свако од њих?

Наше истраживање показало је да је 25 (од 55) ученика четвртог разреда тачно решило тај задатак:

Типична грешка коју су ученици правили јесте следећа:

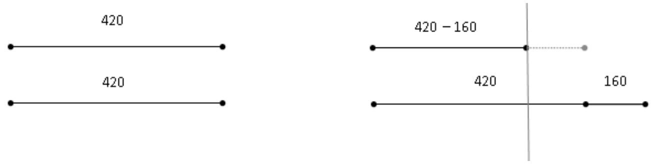
840 : 2 = 420   Б: 420 + 160 = 580   С: 420 – 160 = 260

У процесу наставе наставник може претпоставити да је ово типична грешка коју ће ученици направити и тада треба да изабере наведено решење за дискусију у целом разреду (Stein et al., 2008). Наставник може (и треба!) да изабере различите стратегије и решења која ће се представити целом разреду. Није довољно рећи да решење није тачно. Важно је исправити погрешно резоновање. То се може десити приликом дискусије са ученицима који имају тачна решења, а ако то није довољно, наставник може својим питањима и постављањем сличних задатака довести ученике до тога да увиде природу своје грешке.

На пример:

Душан и Нађа имају исту суму новца (по сто динара). Душан поклони Нађи 20 динара. Колико ће Нађа имати више новца од Душана?

Коришћење адекватних репрезентација може допринети увиђању природе грешке. За наведени проблем можемо користити следећу репрезентацију:



На овај начин ученици могу увидети да њихово решење није тачно. Наставник их може подсетити на правило зависности збира од сабирака како би увидели да је погрешно резоновање примењено при решавању проблема. Наше истраживање (Obradović & Zeljić, 2015) показало је да су ученици до тачног решења дошли на два начина: први начин подразумевао је да се од укупне суме одузме 160 динара (за брата), а затим се разлика подели са 2 и тако се добије сума новца коју ће добити сестра, а други начин јесте постављање и решавање једначине ($x + x + 160 = 840$).

Поред ових стратегија, наставник би требало да инсистира и на исправљању примењене стратегије $(840 : 2) + 80$ и $(840 : 2) - 80$.

Начин на који наставници реагују на грешке ученика може или подржати учење или негативно утицати на способност решавања проблема. Грешке играју централну улогу јер су одраз начина на који ученици размишљају и осветљавају процесе кроз које покушавају да конструишу сопствено знање (Olivier, 1989). Наставници могу користити грешке како би ученицима омогућили епистемолошки приступ математици и допринели развоју концептуалног разумевања ученика (Brodie, 2013). Према томе, начин на који се наставник бави грешкама ученика је пресудан, јер може или побољшати или ограничити разумевање ученика о математици. Постоји много разлога због којих ученици можда неће добити тачно решење математичког проблема. Ти разлози могу укључивати непажњу, непознавање математичких појмова или ученици не разумеју шта се од њих тражи у задатку (Swan, 2001). Наставник је тај који мора увидети природу грешке. Али то није само питање елаборације каталога грешака ученика при решавању проблема, што може бити занимљиво само по себи, већ питање разумевања начина на који ученици ове погрешне стратегије прогресивно трансформишу, све до тачке постизања ефикасног стратешког решавања проблема.

Истинска математичка активност у учионици подразумева генерисање стратегија за решавање проблема, примену стратегија уз просуђивање да ли оне воде ка тачним решењима, као и проверу да ли одговори имају смисла. Претпоставке које пружају подршку ученицима за бављење математиком (Clarke & Clarke, 2004; NCTM, 2007) јесу следеће:

1) Истрајност, напор и концентрација важни су у учењу математике. Укључивање ученика у продуктивну борбу нужно је у процесу учења! Решити тежак проблем доводи до јачег осећаја постигнућа него брзо и лако решавање проблема.
2) Ученици деле своје идеје. Све идеје су важне, а слушање различитих идеја помаже ученицима да развију способност стратешког одабира добрих стратегија.
3) Ученици слушају једни друге.
4) Грешке или стратегије које нису довеле до тачног решења јесу прилика за учење. Зашто тај приступ није успео? Да ли би се могао прилагодити или је потребан сасвим другачији приступ? Учење математике укључује праћење и промишљање процеса – уочавање и исправљање грешака током рада.
5) Ученици уочавају везе између стратегија и разговарају о њима. Важно је да разумеју везе између различитих стратегија за решавање одређених проблема, као и везе са другим математичким појмовима и стварним кон-

текстима и ситуацијама. Када ученици размишљају и разговарају о тим везама, математику виде као вредну и важну, а не изоловану збирку чињеница.

5.6.3. Компетенције наставника

Циљ наставе усмерене на решавање проблема јесте примена математичког знања на креативан начин. Наставник игра важну улогу у развијању флексибилне примене различитих стратегија за решавање проблема јер та специфична знања наставника, њихова уверења и ставови утичу на исход учења ученика. Изазовни задаци пружају наставницима више могућности да ученике ангажују у њиховом решавању на различите начине. Међутим, само коришћење сложенијих и изазовнијих задатака није довољно да би се осигурало то да ће наставници моћи да их ефикасно користе за подстицање учења. Истраживање о употреби когнитивно изазовних математичких задатака (Stein et al., 1996) показује да се њихова имплементација често одвија на начин који наставник није планирао и да је некада резултат активности смањење когнитивне активности ученика (Stein et al., 2000). Наставници у току часа морају донети следеће одлуке: које ће аспекте задатка истакнути; како ће организовати и координисати рад ученика; која питања ће поставити како би подстакли ученике са различитим нивоима способности; како ће подржати ученике без директног управљања процесом њиховог размишљања и на тај начин елиминисати изазове (NCTM, 2000). Бројна истраживања показују да се наставници нису лако прилагодили приступу у коме ученици самостално осмишљавају и деле стратегије решавања проблема (Manouchehri & Goodman, 2000; Wilson, 2003). Недостатак специфичних смерница о томе шта би наставници могли и шта би требало да раде у циљу подстицања и подршке учењу навело је неке наставнике да закључе да не би требало ништа да говоре, што такође смањује когнитивну активност ученика. Поједини аутори истичу да је важан задатак наставника да филтрирају одговоре ученика како би одабрали за презентацију она решења која су вредна представљања и подстичу продуктивна разматрања различитих решења која воде ученика ка разумевању суштинских идеја (Chazan & Ball, 1999; Hodge & Cobb, 2003; Lampert, 2001).

Кључне компоненте компетенција наставника за наставу усмерену на решавање проблема јесу (Chapman, 2015):

1) Математичко знање за решавање проблема:
   - Математичка способност за успешно решавање проблема: поседовање одговарајућих математичких знања;
   - Разумевање природе, структуре и циља различитих врста проблема; утицај карактеристика проблема на ученика;
   - Математичко решавање проблема: сагледавање решавања проблема као начина размишљања; познавање различитих модела за решавање проблема, значење и употреба хеуристике при решавању проблема; способност тумачења необичних решења ученика; импликације различитих приступа ученика;
   - Постављање проблема: разумевање значаја адекватног постављања проблема пре, током и после решавања проблема.
2) Педагошко знање о решавању проблема:
   - Праћење ученика у процесу решавања проблема: разумевање шта ученик зна, може и не може да уради (на пример, потешкоће ученика у решавању проблема; карактеристике доброг решавача проблема; познавање начина размишљања ученика у процесу решавања проблема);
   - Методички поступци: разумевање како и шта значи помоћи ученицима да постану бољи у решавању проблема (на пример, наставне технике за развијање хеуристичких стратегија и метакогниције; употреба технологије; процена

напретка ученика; када и како интервенисати током решавања проблема ученика);
- Афективни фактори и уверења: познавање природе и утицаја продуктивних и непродуктивних афективних фактора и уверења о учењу и настави решавања проблема.

Компетенције наставника, који води ученике у процесу решавања проблема, морају бити шире од њихове способности решавања проблема. Познавање начина размишљања ученика у процесу решавања проблема може се посматрати као кључна компетенција наставника. Важно је да наставник буде у стању да интерпретира „необична решења", разуме импликације различитих приступа ученика, да препозна да ли изабрана стратегија ученика може бити одговарајућа, да помогне у ревидирању неодговарајућих стратегија, да идентификује различита решења за исти проблем. Наставници морају, на основу посматрања и праћења ученика, донети одлуку када и како да интервенишу – када да пруже помоћ; шта да раде када су ученици „заглављени" примењујући дуже време неодговарајуће стратегије; који врсту помоћи да понуде ученицима и сл. (Chapman, 2015).

Ученици често у процесу решавања проблема показују несигурност и неповерење у своје способности. Овај недостатак самопоуздања може ометати њихово учење. Важно је то препознати и помоћи им да развију осећај самопоуздања. То се може постићи само ако наставник познаје различите начине размишљања о проблему и прилагођава стратегије и врсту помоћи ученику. Важно је да ученици разумеју да је процес важнији од одговора, како би научили да је у реду „не видети" одмах решење. То се постиже прихватањем индивидуалног ритма рада, стрпљењем наставника које га спречава да сугерише одговор и одмах објасни начин решавања, као и склоности наставника да решава проблеме применом математичког моделовања. Улога наставника у решавању проблема суштински је важна.

На крају овог поглавља, а на основу литературе, могли бисмо издвојити следеће препоруке наставницима.

1) Дајте сугестије, а не одговоре;
2) Оставите време ученицима да се изборе са проблемом;
3) Поставите сличан или исти проблем на различите начине;
4) Постављајте питања која подстичу ученике да размишљају дивергентно, објасне начин сопственог размишљања, деле стратегије, размисле о другим начинима на које би се могао решити исти проблем;
5) Размислите о стварним животним проблемима који се могу повезати са проблемом;
6) Цените различита решења и стратегије: подстакните ученике да пронађу више решења проблема; похвалите ученике за добре стратегије решавања проблема без обзира на то да ли су дошли до коначног решења или не;
7) Не плашите се групног рада! Ученици често могу помагати једни другима, а разговор о проблему помаже им да критичније размишљају о корацима потребним за решавање проблема. Поред тога, групни рад помаже ученицима да схвате да проблеми често имају више стратегија решења и да неке могу бити ефикасније од других.

Наведене препоруке не могу бити водиље за решавање свих могућих проблема у настави. Настава је процес, а решавање проблема суштинска категорија наставе. Ове препоруке могу помоћи наставницима као полазна тачка у осмишљавању методичких процедура за решавање конкретних проблема у пракси.

6. *Карактеристике ефикасне наставе математике*

Не постоји општа сагласност о критеријумима вредновања и карактеристикама добре наставе математике. Различите оријентације, педагошке идеје и циљеви образовања утичу на систем вредновања наставе. Наведено питање зависи од образовне политике једне земље. Истраживања (Kilpatrick et al., 2001; Hiebert & Grouws, 2007) показују да ефикасна настава зависи од различитих фактора, а посебно од циљева учења. Иако не постоји консензус по питању критеријума вредновања часа математике, проучавање различитих студија може нам помоћи при постављању смерница за сагледавање и унапређивање наставне праксе.

Истраживања усмерена на вредновање процеса поучавања и учења математике у основној школи имају различит фокус и то на: исходе учења, интеракцију између ученика и наставника на наставном часу, социјалну климу у учионици, методе наставног рада усмерене на подстицање когнитивних активности ученика, компетенције наставника итд.

У великом броју истраживања ефикасност наставе математике сагледава се кроз постигнуће ученика – у њима је акценат најчешће на когнитивним исходима учења који се мере стандардизованим тестовима знања (Muijs & Reynolds, 2000; Ross et al., 2003; Seidel & Shavelson, 2007). Посебну групу истраживања чине она у којима се као индикатор квалитета наставе математике узима интеракција између ученика и наставника. Даље, многи истраживачи узимају компетенције наставника као детерминишући фактор квалитета наставе математике.

Параметри који се налазе у фокусу истраживања ефеката наставе математике односе се на *когнитивне, мотивационе и афективне исходе учења* (Seidel & Shavelson, 2007). Један од теоријских оквира за посматрање квалитета наставног процеса претпоставља да постоје три основне димензије квалитета наставе (Klieme et al., 2009): 1) подржавајућа клима; 2) ефикасни „менаџмент", тј. управљање; 3) подстицање когнитивних активности ученика. Подржавајућа клима покрива специфичне аспекте односа ученик – наставник као што су позитивна и конструктивна повратна информација, позитиван приступ ученичким грешкама, брижно понашање наставника. Утицај позитивних односа ученик – наставник на мотивацију ученика истакнут је у бројним студијама. Истраживања показују значајне ефекте „управљања" у учионици на постигнућа ученика. Управљање у учионици подразумева акције и упутства која наставници користе за стварање успешног окружења за учење: успостављање правила, предвиђање понашања ученика, планирање времена, ангажовање свих ученика итд. Когнитивна активација интегрише изазовне задатке: истраживање и повезивање новог појма и претходног знања и сократовски дијалог као кључне карактеристике наставе. Наведене димензије стварају ученицима прилике за учење и производе зависне променљиве или ефекте/производе: знање, концептуално разумевање и мотивацију. Јасно је да је свака независна варијабла важна. На пример, управљање у учионици неопходан је, али није довољан услов за ефикасно учење, хаос у учионици неће подржати учење, већ добро организована учионица која се фокусира на виши ниво резоновања ученика. Математички задаци и проблеми који претпостављају веће когнитивно ангажовање ученика сматрају се предусловом концептуалног разумевања. Рад на захтевним проблемима заузврат захтева одређени квалитет интеракције и партиципације у учионицама.

Разрађеније критеријуме ефикасне наставе математике наводи Де Корт (De Corte, 2004):

1) Иницирање и подржавање активног процеса стицања знања код свих ученика (активирати и пасивније ученике). Продуктивно учење укључује и даље потребу за поучавањем и усмеравањем. Другим речима, треба да постоји баланс између открића и личног истраживања и систематског подучавања и усмеравања, уз узимање у обзир индивидуалних разлика у способностима, потреба и мотивације ученика.
2) Подстицање развоја саморегулације учења код ученика. То подразумева да би спољашњу регулацију знања и стицање вештина у облику систематске интервенције требало постепено редуковати тако да ученици постану сами одговорни за учење. Другим речима, равнотежа између спољашње и унутрашње регулације ће се разликовати током година школовања.
3) Коришћење конструктивних активности, по могућности у аутентичним стварним ситуацијама које имају лично значење за ученике, који нуде довољно могућности за учење путем социјалне интеракције и које су репрезентативне за задатке и проблеме на којима ће ученици примењивати своје знање и способности.
4) Развијање хеуристичких метода и метакогнитивних стратегија.
5) Стварање климе у учионици која подстиче размену мишљења и стратегија решавања проблема. Ученици развијају концептуално разумевање и метакогнитивне стратегије кроз дијалог са вршњацима у мањим групама.

Ефикасном наставом математике данас се сматра настава која подржава самоусмерено, кумулативно и рефлексивно учење, а не директан пренос знања од стране наставника. Самим тим, математика није више колекција апстрактних појмова и процедуралних вештина које треба савладати, већ скуп активности и решавања проблема заснован на математичком моделовању. У складу са овим ставом, сада постоји општи договор да је крајњи циљ учења стицање математичке диспозиције (позитиван однос према математици, веровање у своје способности, истрајност у решавању проблема), а не знање скупа изолованих појмова и вештина. Ефикасни наставници користе питања како би стимулисали ученике да размишљају о садржају, препознају односе и импликације кључних идеја.

Кључне карактеристике ефикасне наставе математике јесу: постављање изазовних задатака, активирање претходног знања и когнитивна активација. Когнитивна активација се сматра кључном димензијом квалитета поучавања у учионици. У том смислу, као основна карактеристика ефикасне наставе издваја се подстицање ученика да се укључе у ко-конструктивне и рефлективне начине мишљења и на тај начин развију математичка знања и способности. Можемо претпоставити да степен до којег ученици учествују у активностима учења не зависи само од когнитивних захтева задатака и њихове обраде у току наставе, већ и од погодне климе у учионици. Клима у учионици односи се на уочене карактеристике интеракције између наставника и ученика, као што су подржавајући односи, позитивне и конструктивне повратне информације наставника, позитиван приступ грешкама и заблудама ученика, подршка сваком ученику и брижно понашање наставника. Подржавајућа клима има директније ефекте на мотивацију и труд ученика и више индиректних ефеката на академска постигнућа. Подржавајућа клима је потребна, али не и довољна за когнитивну активацију ученика. На пример, практичне активности и учење засновано на истраживању често су усмерени на подршку, а не на когнитивну активацију (Đokić, 2019).

6.1. Карактеристике наставног часа које подржавају ефикасну наставу математике

Истраживања о настави често су ограничена на описивање изолованих фрагмената наставе и учења уместо да су усмерена на истраживање континуираних интеракција између наставника, ученика и математичког садржаја. У том смислу, један број студија фокусиран је на издвајање и уобличавање конкретнијих активности и процеса који одликују ефикасну наставу математике.

Борко и сарадници (Borko et al., 2005), на основу прегледа великог броја истраживања, сагледавају наставну праксу кроз осам димензија. Те димензију су:

1) Структура лекције. Суштинско је питање у којој мери је лекција логички организована и секвенцирана, концептуално кохерентна и да ли постоји одговарајућа временска артикулација. Ови фактори детерминишу разумевање математичких појмова од стране ученика.
2) Вишеструке репрезентације. Представљање математичких идеја различитим репрезентацијама као што су слике, писани симболи, усмени језик, ситуације у реалном свету и манипулативни модели.
3) Употреба математичких алата. Представљање апстрактних математичких идеја помоћу одговарајућих средстава као што су траке за разломке, дидактички материјал за материјализацију десетица, јединица, затим лењири итд.
4) Когнитивни захтеви. Промовисање различитих нивоа и природе математичког резоновања ученика.
5) Математички дискурс. Атмосфера у учионици треба бити таква да се од ученика очекује да деле математичко размишљање са својим вршњацима и наставником и да користе математички језик.

6) Објашњење и образложење (од стране ученика). Ученици се подстичу да објашњавају разлоге за своје стратегије решавања и оправдавају своје математичке претпоставке и идеје. Наставници постављају питања „Како?” и „Зашто?” у циљу промовисања резоновања и аргументације од стране ученика.
7) Решавање проблема. Важно је бирати задатке за које метод решења није познат унапред.
8) Интеграција и примена. Створити могућности да ученици препознају везе између математичких тема и примене математике у другим предметима и у реалном контексту.

Међу наведеним карактеристикама важно је направити разлику између вишеструких репрезентација и математичких алата. Неки аутори (на пример Lesh et al., 1987) наводе пет врста репрезентација математичких појмова: слике, писани симболи, вербални језик, ситуације у реалном свету и манипулативни модели. Манипулативни модели могу се посматрати као математички алати. Међутим, манипулативи не постају алати све док их ученици не користе за истраживање и разумевање математичких идеја.

Када наставници бирају задатке за ученике, они доносе иницијалну одлуку о когнитивним захтевима. Сложенији математички задаци имају виши ниво когнитивних захтева који укључују процедуре повезивања са основним математичким појмовима и анализирање сложених задатака за које не постоје прописани начини приступа и алгоритми. Задаци нижих когнитивних захтева захтевају од ученика да изводе вежбе које су запамтили или процедуралне кораке без дубљих веза с основним математичким идејама (Stein et al., 2009).

Под појмом *дискурс* подразумевају се репрезентације, комуникација, писање, читање, слушање, слагање и неслагање о одређеним математичким идејама (NCTM, 2007). Објашњење и образложење фокусирају се на разматрање и доказивање математичких идеја. Ученици треба не само да објашњавају како добијају своја решења, већ морају да аргументују зашто су њихове стратегије погодне за решавање проблема.

У публикацији коју издаје *Национални савет наставника математике* (енгл. *The National Council of Teachers of Mathematics*), као највећа организација на свету која се бави математичким образовањем, разматра се питање ефикасне праксе поучавања математике (NCTM, 2014) и издвајају се смернице наставницима за ефикасно реализовање наставе математике.

Те смернице јесу следеће:

1) Формулисање циљева. Ефикасна настава математике подразумева јасне циљеве часа, формулисање циљева у напредовању ученика и коришћење тих циљева за доношење одлука током наставног процеса.
2) Имплементирање задатака који промовишу расуђивање и решавање проблема. За постизање ефикасне наставе важно је укључити ученике у решавање и дискусију о задацима који промовишу математичко резоновање и омогућавају више различитих стратегија решења.
3) Коришћење и повезивање различитих репрезентација. Важно је развити способност ученика да користе и повезују различите репрезентације математичких појмова, као и да их употребљавају као алате за решавање проблема.
4) Осмишљавање значења математичког дискурса. За олакшавање разумевања математичког дискурса и изграђивање разумевања математичких идеја користе се анализа и upoређивање ученичких приступа и аргумената.
5) Постављање сврсисходних питања. У настави је важно користити сврсисходна питања како би се проценило и унапредило резоновање и разумевање ученика о важним математичким идејама и односима.
6) Изграђивање процедуралне флуентности на основама концептуалног разумевања. Ефикасна настава

математике ставља акценат на флуентност поступака на темељу концептуалног разумевања, тако да ученици током времена постану вешти у коришћењу процедура и флексибилно решавају контекстуалне и математичке проблеме.

7) Подршка продуктивној „борби" у учењу математике. У настави математике важно је ученицима доследно пружити подршку, индивидуално и колективно, да се изборе са тешкоћама у разумевању математичких идеја и односа.
8) Праћење и коришћење начина резоновања ученика. Начине резоновања ученика важно је пратити и разумети како би се проценио напредак у учењу и континуирано се прилагођавала настава степену њиховог напретка.

Да сумирамо претходно, као што и сама математичка способност укључује испреплетене компоненте, и ефикасно поучавање математике укључује различите компоненте. У већини студија као доминантна карактеристика наставе наводи се потреба да се формулишу јасни циљеви и задаци. Циљеви су смерница наставнику при планирању садржаја, током наставног процеса и током евалуације наставног процеса и постигнућа ученика. Даље, као важне карактеристике издвајају се структурирање садржаја у логички повезане целине, коришћење вишеструких репрезентација за представљање математичких појмова, подстицање виших нивоа резоновања кроз имплементирање одговарајућих задатака и подстицање когнитивне активности ученика и то постављањем сврсисходних питања и подстицањем дискусије, образложења и оправдавања стратегија за решавање проблема. Сви процеси и активности се не могу испланирати унапред. Морамо имати у виду да је настава процес, интеракција наставника, ученика и садржаја.

6.2. *Компетенције и поступци наставника који воде ка ефикасној настави математике*

Један број аутора ефикасну наставу математике сагледава кроз компетенције и понашање наставника и фокусира се на наставника као детерминишућег фактора наставе математике. Вилсон и сарадници (Wilson et al., 2005) у свом истраживању закључили су да наставници математике издвајају следеће карактеристике наставника као фактора који обезбеђују квалитетну наставу: 1) наставник познаје садржај и своје ученике; 2) наставник промовише и подстиче разумевање од стране ученика; 3) наставник ангажује и мотивише ученике и 4) наставник ефикасно управља наставним процесом. Да би обезбедили високо квалитетну наставу, наставници морају да 1) концептуално разумеју математику и садржај који предају; 2) разумеју начин на који ученици уче математику, укључујући свест о развоју сопствених ученика и познавање уобичајених тешкоћа које имају у учењу и 3) одаберу смислене задатке и стратегије које ће побољшати учење.

Каур (Kaur, 2009) као карактеристике добрих наставних часова истиче: 1) наставни час има специфичне циљеве подучавања; 2) примери су пажљиво одабрани и варирају у сложености од конкретних према апстрактним; 3) наставници активно прате разумевање ученика током часа и бирају одговарајуће случајеве за дискусију пред целим разредом и 4) наставници јачају разумевање ученика кроз детаљну ревизију рада ученика (укључујући домаћи задатак). Листон (Liston, 2012) у својој студији разрађује критеријуме за вредновање часа математике који сагледавају поступке наставника. Ти критеријуми су:

1) Основа: дубина математичког знања, употреба терминологије, коришћење уџбеника;
2) Трансформација: како су појмови „саопштени” ученику; избор примера (примери из реалног живота, примери повезани са другим предметима);

3) Повезивање математичких појмова и поступака: истицати повезаност математичких поступака, секвенцирање садржаја, антиципирање (предвиђање ученичких потешкоћа);
4) Непредвиђене ситуације: Способност размишљања у ходу, одговор на неочекивано, одступање од плана часа ако је потребно.

На основу наведеног, издвојићемо основне компетенције и поступке наставника и груписаћемо их у две групе: 1) концептуално разумевање математике од стране наставника и 2) поступци когнитивне активације ученика и креирање одговарајуће климе у разреду.

1) Наставник треба да поседује концептуално знање садржаја који предаје.

- Наставник мора да јасно сагледава појмовну структуру садржаја, види везу садржаја који обрађује са оним који су већ обрађени и оним који ће се тек обрађивати и прилагођава томе специфичне циљеве сваког часа.
- Наставник препознаје математичке односе у примерима из окружујуће реалности (и када нису јасно наглашени), и у складу са тим бира адекватне примере из којих је могуће синтетизовати појам, а затим користи и апстрактније репрезентације. Наставник у даљем процесу учења бира и представља задатке који захтевају повезивање знања и више нивое мишљења.
- Анализирајући уџбеник као основну књигу за учење, наставник мора бити оспособљен да сагледава: адекватност логичке структуре садржаја, тј. да ли су појмови у уџбенику повезани у адекватне структуре, као и да ли у разради садржаја постоје недоследности у виду недостатака математичке прецизности и у виду преурањене формализације и симболизације.
- Наставник представља јасну улогу коју математика има у стварном свету и везу математике са окружујућом реалношћу, као и значај математичког моделовања.

- Наставник бира смислене инструкције и задатке који омогућавају развијање стратегија и генерализацију.

2) *Наставник подстиче когнитивну активност ученика и креира одговарајућу атмосферу у учионици.*
   - Наставник својим поступцима подстиче ученике да размишљају, постављају питања, решавају проблеме и дискутују о стратегијима и решењима.
   - Наставник треба да осмисли активности и поставља задатке који ангажују и изазивају интелект ученика, развијају математичка знања и вештине, подстичу ученике да успоставе везу између математичких појмова и идеја.
   - Наставник мора да познаје и прати развој ученика уз свест да су тешкоће у учењу очекивана фаза у развоју. У складу са тим, наставник мора знати да препозна природу грешке у резоновању ученика и да на адекватан начин реагује у циљу њиховог исправљања.
   - Улога наставника је примарни извор подршке ученичкој дискусији и учењу математичких појмова.
   - Наставник на основу посматрања и пажљивог слушања ученика одлучује када саопштава информације, када допушта да се ученици „боре” са математичким проблемима, подстиче и води дискусију о прикладним стратегијама.
   - Наставник прати учешће ученика у дискусијама и одлучује када и како да охрабри сваког ученика да учествује.
   - Наставник креира охрабрујућу атмосферу у учионици и води рачуна да се са поштовањем односи према идејама сваког ученика.

6.3. Развијање наставникових критеријума за вредновање наставе математике

Истраживања показују да искуства која су будући наставници стекли као ученици, а која не одражавају увек добру наставну праксу, значајно обликују њихов приступ математици и настави математике. Истраживање Шора и Леша (Schorr & Lesh, 2003) показало је да будући наставници не модификују значајно већ формиран концепт наставе математике уколико се за наставни рад припремају само путем предавања на факултету и да је трансформација већ формираних концепата могућа само кроз рефлексију о личном искуству у наставном раду.

Многе постојеће студије фокусирају се на промену улоге наставника од преносиоца знања до покретача процеса учења. Наставници мењају своју улогу у педагошком раду тако што уче, раде и рефлектују о свом раду: сарадњом са другим наставницима, посматрајући ученике и њихов рад и дељењем онога што виде са својим колегама. Развијање свесне саморефлексије наставника о сопственом учењу и систематско спровођење заједничке рефлексије са другим наставницима и/или истраживачима може допринети професионалном развоју наставника.

Иако је практично искуство у учионици значајно, оно није довољно. За напредак у педагошком раду потребна је систематска рефлексија о практичним активностима (Korthagen, 2001, 2004). Метод „студије часа” одиграо је значајну улогу у унапређивању професионалног образовања наставника математике у Јапану, а један од разлога популарности овог вида учења јесте тај што „студија часа” наставницима пружа могућност да дају смисао личним методичким концептима које примењују у пракси, да сагледају своју праксу из перспективе других и да развију или промене личне ставове о настави и учењу, и све то кроз конструктивну размену и сарадњу са колегама (Takahashi et al., 2006). Фридмен (Friedman, 2005) у истраживању посвећеном ефикасности методе „студије часа” у образовању наставника, дошао је до закључка да навику рефлексије о настави, коју формирају у програмима заснованим на „студији часа", наставници математике задржавају дуго и да је континуирано примењују у пракси. За стицање софистицираног знања и развијање праксе која се разликује од оне коју су и сами наставници доживели као студенти/ученици, неопходне су могућности учења за наставнике који су снажнији од пуког читања и разговора о новим педагошким идејама.

Истраживање које је спровео Малколм (Malcolm, 2007) показало је да се разликују два типа наставника математике: наставници који су у центар пажње ставили ученика и развијање концептуалних (повезаних) знања и наставници који су усмерени на пренос знања. Карактеристике понашања наставника представљене су у Табели 6:

Понашање наставника усмерено на стварање повезаних знања кроз дискусију и сарадњу	**Понашање наставника усмерено на пренос знања**
• *Организација часа*	
Флексибилна организација – садржај и временска артикулација одређени су реакцијама ученика. Неки задаци су се „развукли" на две лекције.	Унапред одређена организација – садржај и временска артикулација одређени унапред.
Проширена дискусија у којој учествују сви постоји на почетку и на крају сваког часа и у току часа „када је настала потреба".	Кратка дискусија у којој учествују сви постоји обично на почетку и на крају сваког часа. Таква дискусија је претходно пажљиво испланирана.
Ученици су радили у групама краће периоде без интервенције наставника.	Ученици су радили у групама током дужих периода без интервенција наставника.
• *Дискусија свих ученика и дискусија у групи*	
Омогућено ученицима да се „боре" са проблемима пре него што су понуђени савет и помоћ.	Понуђена је помоћ пре изазова. Наставници дају ученицима „једноставне" методе за решавање задатака пре него што су ученици решили задатке.

Питања подстичу рефлексију. Постављена су додатна питања усмерена на објашњење метода. Дуже паузе између питања.	Питања охрабрују меморисање. Постављано је више питања која „извлаче" чињенично знање. Краће паузе између питања.
Додатни проблеми су често остали нерешени.	Додатне проблеме решава наставник.
Ученици су водили дискусију: - наставник је седео иза ученика; - ученици су извештавали о раду група; - ученици су објашњавали другим ученицима.	Наставник је водио дискусију: - наставник је остао испред ученика; - интеракције под контролом наставника; - мала интеракција ученик – ученик.
Наставник је слушао и посматрао ученике пре интервенције у раду у малим групама: - наставник је слушао ученике пре давања предлога; - помоћ је произашла из посматрања ученика; - остали су неки нерешени проблеми.	Наставник је интервенисао пре извештаја малих група: - наставник интервенише увек када примети нешто погрешно; - унапред испланиран начин рада; - сви проблеми и питања су решени.
Наставник подстиче ученике на објашњење и исправљање сопствених грешака. Када наставник не може да реши проблем, замоли остале ученике да дају свој допринос или да објасне део проблема.	Покушај да се реше потешкоће ученика кроз поновљена објашњења. Када наставник не може да реши проблем, преузима улогу онога који објашњава.

Табела 6: Карактеристике понашања наставника ((Malcolm, 2007)

У наведеном истраживању истакнуто је да наставници нису мењали своја уверења кроз објашњавања и убеђивања од стране едукатора у процесу стручног усавршавања. Аутори закључују да полазна тачка промене уверења треба да буде сопствено истраживање наставника, а након тога треба да следи аргументација и рефлексија њихових закључака са колегама.

Како се критеријуми вредновања наставног часа из математике мењају под утицајем практичног искуства у учионици и рефлексије тог искуства пратили смо кроз истраживање са студентима будућим учитељима Учитељског факултета у Београду (Zeljić et al., 2016). Циљ истраживања био је да се сагледа да ли и у ком правцу студенти будући учитељи мењају критеријуме вредновања наставног часа из математике након што су имали прилику да стекну практично искуство у наставном раду. У истраживању су учествовала 53 студента четврте године Учитељског факултета у Београду. На четвртој години студија, у оквиру предмета Методика наставе математике II, студенти учествују у два циклуса методичких вежби: у оба циклуса је предвиђено да сваки студент држи по један наставни час из математике у школи вежбаоници, у присуству наставника/сарадника и мање групе својих колега (од 12 до 15), након чега група студената и наставник/сарадник дискутују о одржаном наставном часу. Пре првог циклуса методичких вежби, студентима – учесницима истраживања приказан је видео-снимак једног наставног часа из математике – час обраде наставне јединице „Сталност разлике” у четвртом разреду, са задатком да напишу своја запажања и мишљења (рефлексије) о наставном часу. На крају другог циклуса методичких вежби (у даљем тексту *пракса*), студентима је поново приказан исти видео-снимак наставног часа са истим задатком. На основу квалитативне анализе садржаја наративних бележака (у даљем тексту *белешке*) студената будућих учитеља (у даљем тексту *студенти*), издвојили смо следеће три основне категорије на основу којих студенти процењују квалитет посматраног наставног часа: 1) наставни садржај; 2) наставни процес и 3) временска артикулација наставног часа и однос планираног и реализованог. Међутим, унутар ове три опште категорије, студенти пре и после праксе, у којој су имали прилике да држе наставни час и да са колегама и наставницима дискутују о посматраним наставним часовима, пажњу усмеравају на различите аспекте.

Упоредна анализа бележака студената пре и после праксе показује да они у почетку наставни час процењују само уз површно повезивање са конкретним математичким садржајем, док после методичких вежби у школи вежбаоници имају развијене критеријуме вредновања у вези са селекцијом и структуром математичког садржаја. Студенти су и пре и након вежби у својим рефлексијама давали општу оцену наставног часа, али се учесталост критеријумâ процене наставног часа разликује: у белешкама студената пре праксе доминира „интересантност/занимљивост часа", затим следи по учесталости критеријум да „учитељ добро води наставни час" и, на крају, да ли су ученици научили и разумели математичко правило. Након праксе редослед критеријума по заступљености је обрнут.

Студенти као почетници нису правили разлику између климе на часу и когнитивне активације. Што се тиче улоге учитеља на часу, примећена је важна квалитативна промена. Након практичног искуства, у првом плану је „поспешивање комуникације и интеракције и укључивање ученика у дискусију" и „инсистирање учитеља на релационом разумевању".

Важност квалитативних промена критеријума вредновања наставног часа у вези са наставним процесом, као што је већа учесталост критеријума „исправљање погрешног математичког резоновања ученика", илустроваћемо примером. Приликом решавања задатка „израчунај вредност израза: а) 4 673 – 2 579 = ____; б) (4 673 + 37) – (2 579 + 37) = ____", неки ученици су прво израчунали вредност првог, а затим вредност другог израза. Учитељ је инсистирао на питању да ли је то једини начин решавања задатка, наводећи ученике на адекватну примену математичког правила – не морамо рачунати вредност другог израза, до резултата долазимо одмах – вредност другог израза једнака је вредности првог израза. Затим је тражио од ученика да објасне о ком је математичком правилу реч. Само 9.4% студената пре праксе осврнуло се на описано понашање учитеља у наведеној и сличним ситуацијама, док је 60.4% студената након праксе навело „исправљање погрешног математичког резоновања" као важну активност учитеља. Наведени пример илуструје и квалитативни помак у вези са критеријумом „инсистирање учитеља на правилној употреби математичког језика", који је након праксе присутан у далеко већем броју бележака студената.

Такође, студенти су након праксе у већем проценту акцентовали критеријуме вредновања наставног часа који су у вези са социјалном климом у одељењу. Промена у сагледавању активности учитеља повезана је са променом у сагледавању активности ученика: док је „самостално закључивање и уопштавање" пре праксе истакло 32.1% студената, након праксе је то учинило 84.9% студената. Указаћемо још и на то да су студенти и пре и након праксе концентрисани на активност учитеља – критеријуми вредновања рада учитеља бројнији су и разноврснији у белешкама и пре и након праксе. Коришћење времена, у белешкама и пре и након праксе, односи се на коментарисање временске артикулације часа. Такође, 50.9% студената пре праксе дало је негативну оцену одступању од планираног садржаја, а 71.7% студената после праксе дало је позитивну оцену овом аспекту часа. Пре него што су имали прилику да се опробају у улози учитеља, студенти су наставни час посматрали као процес који унапред може потпуно да се испланира. Након што су имали прилику да посматрају наставни рад својих колега и да сами држе наставне часове, студенти су узели у обзир реакције ученика и њихове одговоре.

Упоредна анализа критеријума вредновања наставног часа из математике студената будућих учитеља пре и након што су имали прилику да учествују у наставном процесу у улози учитеља показује да су практично искуство наставног рада и систематска рефлексија са наставником и колегама студентима допринели промени начина на који студенти вреднују наставу. Ови резултати говоре да је рефлексија одржаних часова допринела да се код студената развију квалитативно напредније форме критеријума вредновања наставе математике.

Узевши све претходно у обзир, можемо закључити да би наставник померио центар пажње са преноса знања на развијање концептуалних (повезаних) знања, неопходно је да осим искуства има прилике за конструктивну размену и сарадњу са колегама кроз коју би сагледавао и унапређивао карактеристике сопствене наставне праксе.

Килпатрик и сарадници (Kilpatrick et al., 2001) праве паралелу између компоненти које чине математичку способност (умеће) и компоненти које чине способност (умеће) поучавања математике. Као што математичка способност укључује испреплетене компоненте, тако и способност извођења квалитетне наставе подразумева међусобно повезане компоненте:

- концептуално разумевање основног знања потребног у пракси поучавања;
- флуентност у извршавању основних наставних поступака;
- стратешка компетентност у планирању ефикасне наставе и решавању проблема који настају током наставе;
- адаптивно резоновање у оправдавању и објашњавању наставних пракси и у промишљању о различитим наставним праксама у циљу њиховог унапређења;
- продуктивна диспозиција и позитиван став према математици, настави, учењу и унапређењу праксе.

Рутински поступци наставника у учионици односе се на питања како започети наставу сваког дана или како прикупити домаће задатке. Неки поступци наставника утемељени су на математичким активностима и разумевању математичких садржаја. На пример, наставници морају знати како да реагују на одговоре ученика који показују неразумевање садржаја или одсликавају заблуде које су препрека даљем учењу. Када наставници познају више начина на које могу да приступе проблемима у настави, могу покушати са другачијим приступом ако један приступ не даје очекиване резултате. Истраживања су показала да успешни наставници имају велики репертоар наставних поступака. Они могу да бирају између низа приступа за поучавање у оквиру датих садржаја или приликом реаговања на непредвиђену ситуацију која се јавља на њиховим часовима. Насупрот томе, наставници почетници имају ограничен спектар рутина и често не могу на одговарајући начин реаговати у одређеним ситуацијама. Стручни наставници не само да имају широк репертоар приступа, већ их могу флексибилно применити, знати када јесу одговарајући и могу их прилагодити различитим ситуацијама. Наставници се стално суочавају са одлукама у планирању и са спровођењем тих планова у интеракцији са ученицима. Не постоји идеално решење и алгоритам за решавање различитих проблема у настави, али наставници могу научити да решавају проблеме у својој пракси и да узимају у обзир карактеристике садржаја који ученици треба да разумеју, шта њихови ученици већ знају, репрезентације, активности и методичке процедуре које су се показеле ефикасним у обради дате теме. Баш као што ученици треба да развију продуктивну склоност према математици, тако и наставници треба да имају позитиван став према математици и настави математике.

Образовање наставника посматра се као професионални континуитет, процес који траје кроз читаву каријеру. Наставницима је потребна основа за континуирано учење. Они морају бити у стању да се прилагоде новим оквирима курикулума, новим материјалима, напретку у технологији и напретку у истраживању учениковог резоновања. Наставници континуирано уче било да је у питању начин разумевања и структурирања садржаја, начин разумевања размишљања ученика или поступци поучавања. Програми професионалног развоја представљају само један извор за наставак учења. Наставници могу учити из сопственог искуства тако што ће анализирати проблеме који су ученици имали у раду, шта су и на који начин ученици разумели, како су реаговали на одређене репрезентације, питања, и активности и сл. Програми образовања наставника и њиховог професионалног развоја засновани на истраживању у учионици интегришу проучавање математике и проучавање учења ученика тако да наставници могу створити везе између ова два домена. Разумевање математичког размишљања ученика зависи од разумевања математичких садржаја на које се то размишљање односи. Наставници могу постати рефлективни практичари, а рефлексија је од суштинског значаја за побољшање њихове праксе. Многи успешни програми образовања наставника и њиховог професионалног развоја подразумевају активност рефлексије наставника, али рефлексија треба да буде утемељена на конкретним примерима из учионице.

7. Закључна разматрања

Захтев за учењем са разумевањем тешко је операционализовати зато што је разумевање сложена и комплексна категорија. Разумевање се не може једноставно одредити као нешто што ученик има или нема. Учениково разумевање се константно мења и расте. Разумевање се може описати из различитих углова. Због његове важности и сложености, постоји низ одређења разумевања математике. Дефиниција разумевања која је функционална у контексту математике – а која се развијала током низа година и своје постојање дугује многим психолозима и математичарима који су је користили и усавршавали – односи се на грађење појмовне структуре и повезаности појмова и поступака. Ова дефиниција каже да нешто разумемо ако видимо како је то повезано са другим структурама знања које поседујемо (Skemp, 1993). Дефиниција разумевања у смислу односа или веза добро функционише као дефиниција, али не открива много о томе како ученици праве везе. Учење рачунских вештина и развијање концептуалног разумевања често се виде као супротстављени циљеви. Ако је наглашено разумевање, онда је развој вештина у другом плану. Ако је фокус на развоју вештина, онда се не развија разумевање. Верујемо да је ова дихотомија погрешна. Способности и вештине се развијају паралелно са разумевањем (интеграција процедуралног и концептуалног знања). Нешто шире одређење разумевања математичких садржаја, које се чини да јасније описује когнитивне промене које се дешавају да би ученици били успешни у учењу математике, дају

Килпатрик и сарадници (Kilpatrick et al., 2001). Аутори говоре о математичкој способности (умећу), а компоненте способности јесу: концептуално знање, процедурална флуентност, стратешка способност, прилагодљиво (адаптивно) расуђивање, продуктивна диспозиција. Ако ученици развију концептуално разумевање, процедуралну флуентност, стратешке компетенције и способност адаптивног расуђивања, они морају веровати да је математика разумљива, да се сопственим трудом може научити, да су способни да се баве математиком.

Питање које сматрамо значајним за развијање разумевања математике у настави јесте место и улога алгоритама у школској математици. Наставник може ученике учити неким математичким поступцима а да им не представи њихово значење. Наставник опише активност у виду јасних алгоритама који постају водиље активности. Имитирајући наставника, ученици успевају да овладају операцијама и поступцима, али те активности нису резултат стварног разумевања. Када ученици знају правила за манипулисање математичким симболима, можда ће добити тачна решења једноставних задатака, али на тај начин не уче праву математику. Поступци рачунања и флуентност у рачунању јесу теме којима се посвећује можда највећа пажња у оквиру математичког образовања. Као део светског покрета реформи основношколске математике 80-их година прошлог века истакнута је нова тема – *ментална аритметика.* Ментална аритметика искључује цифарско рачунање, већ се рачуна бројевима, а стратегија рачунања се флексибилно прилагођава структури задатка. Истраживања показују да ученици у ситуацијама у којима се подстиче проблемско решавање задатака и стимулише развој стратегија могу осмислити и примењивати широк степен формалних и неформалних стратегија у рачунању. Када учимо напамет имена романа и писаца, то не значи да се бавимо књижевношћу. Познавање алгоритама и њихова једноставна примена не значе да се заиста бавимо математиком. Многи истраживачи сугеришу да прекомерна употреба алгоритама у настави блокира математичко мишљење ученика.

Увођење алгоритама у наставу захтева поступке развијања значења, уопштавања и разумевања датих алгоритама. У прошлости, поучавање стандардном алгоритму често је значило поучавати нумеричке кораке, а да ученици пре памте кораке него што их разумеју и могу да их објасне. Данас постоји гледиште које сугерише да се опште методе које ће се генерализовати и постати стандардни алгоритми могу и треба развијати, а основа значења јесу визуелни модели. Да би постигли жељене исходе учења, ученици морају бити укључени у активности у којима се „боре" (у продуктивном смислу те речи) са математичким идејама, а морају се створити и услови како би се спречило да ове борбе постану препреке, а не прилике за учење.

Уобичајени је утисак да реформски покрети у настави математике углавном препоручују употребу манипулативних материјала и других репрезентација у настави. Али употреба манипулатива и репрезентација као носилаца значења појмова не дешава се аутоматски. Њихово значење ученици морају да конструишу сопственом когнитивном активношћу. Репрезентације и моделе видимо као основни ресурс и подршку за изградњу математичког разумевања, а репрезентације које ученици користе утичу на врсте разумевања која развијају. Ефикасно поучавање и учење подразумева ситуације које пружају различите могућности ученицима да развију интерне репрезентације које су структурално смислене математичке репрезентације. Када жељени структурни развој представа није постигнут, то може бити приписано, барем делом, непостојању различитих структуралних репрезентација у наставном процесу.

Знање се конструише кроз интеракцију и размену идеја у учионици. Ове активности имају велики потенцијал за препознавање и изградњу односа између идеја појмова или поступака. Комуникација укључује разговор, слушање, писање, демонстрацију, гледање итд. То значи учествовање у социјалној интеракцији, дељење мисли са другима и слушање других како деле своје идеје. Комуникација омогућава оспоравање идеја, тражење додатних објашњења у циљу разумевања туђих идеја и стратегија и поређење са сопственим идејама како би их јасније објаснили или их оправдали. Ученици који размишљају о томе шта раде и комуницирају са другима о својим идејама у најбољој су позицији да граде корисне везе у математици. Дељење стратегија и идеја у разреду укључује више од демонстрације поступка: захтева описивање, објашњавање, оправдавање и сл. Успостављање заједнице у којој ученици граде разумевање математике значи успостављање одређених очекивања и норми о начину интеракције ученика у вези са математиком. Интеракција је суштинска, јер, као што смо истакли, комуникација је неопходна за изградњу разумевања. Дакле, питање није да ли би ученици требало да комуницирају на часу математике, већ како би требало да комуницирају. То су важна питања, јер успешна имплементација аутентичних проблема, проблема који омогућавају и подстичу размишљање и комуникацију, зависи од климе у учионици и начина интеракције.

Различите врсте задатака воде ка различитим карактеристикама наставе. Верујемо да је настава која ученицима пружа могућност да размишљају и комуницирају заснована на когнитивно изазовним задацима. Задатке посматрамо као могућности за истраживање математике и изналажење различитих стратегија њиховог решавања. Одговарајући задаци, који су когнитивно изазовни, омогућавају ученицима да користе своја знања и умења на креативан начин и утемељени су на важним математичким идејама. То значи да у настави треба да доминирају истински математички проблеми како би подстакли ученике да размишљају и дискутују о математици. Такви задаци претпостављају успостављање културе у учионици у којој ученици индивидуално или групно раде на новим проблемима и расправљају и размишљају о различитим стратегијама. Наставник подстиче активности рефлексије и комуникације при решавању проблема, што води истинском учењу и разумевању математике. Улога наставника разликује се од традиционалне улоге у којој се наставник осећа одговорним да ученицима каже важне математичке идеје, демонстрира процедуре, а очекује да ученици увежбавају оно што су видели и чули док не постану вешти у томе. Улога коју описујемо за наставника не искључује га од учешћа у дискусијама на часовима и размене информација са ученицима. Међутим, преране и превелике интервенције наставника лако могу да смање когнитивни ниво задатака. Продуктивна „борба" са проблемима подразумева да ученици морају имати алате и претходно знање за решавање проблема, а не давање проблема који је сувише удаљен од њихових постојећих знања. Равнотежа између омогућавања ученицима да следе сопствени начин размишљања и начина подстицања ученика који су „заглављени" у поступку решавања проблема представља централно питање у дефинисању одговарајуће улоге наставника у процесу решавања проблема ученика. Наставници у току часа морају донети следеће одлуке: које ће аспекте задатка истакнути; како ће организовати и координисати рад ученика; која питања ће поставити како би подстакли ученике са различитим нивоима способности; како ће подржати ученике не управљајући директно процесом њиховог размишљања и на тај начин елиминисати изазове. Идеје које изрази било који учесник имају потенцијал да допринесу учењу свих ученика и, сходно томе, сваки одговор заслужује поштовање. Грешке морају водити ученика и наставника и посматрају се као могућности за учење и исправљање погрешног резоновања.

Развијање разумевања математике од стране ученика подразумева да наставници континуирано раде на разумевању тога шта значи поучавати математику. Разматране оквире који чине ефикасну наставу математике наставници могу користити док размишљају о сопственој пракси. Настава представља сложени систем који укључује много појединачних елемената који заједно креирају окружење за учење. То значи да је поучавање много више од укупног збира свих појединих елемената. Тешко је, ако не и немогуће, променити један елемент у систему без промене осталих. На пример, претпоставимо да наставник жели да промени врсту питања која поставља. Мало је вероватно да би он могао да промени само питања а све остало да остане исто.

Највероватније би се мењала природа одговора ученика, променили би се, такође, задаци за ученике, јер дивергентна питања и питања која захтевају више нивое размишљања имају свој пуни смисао при раду на задацима вишег нивоа когнитивних захтева, а таква питања нема смисла постављати на стереотипним задацима. Даље, начини на које наставник слуша и реагује на одговаре ученика се мењају, клима у учионици такође. Да поновимо, настава је систем, а не скуп појединих елемената, а елементи наставе се прожимају и одређују врсту средина за учење. Димензије које описујемо могу се сматрати скупом карактеристика које су груписане око заједничких тема. Ниједна од ових димензија, сама по себи, није одговорна за стварање окружења за учење које олакшава ученицима конструкцију разумевања.

8. *Индекс појмова*

Н

П

Р

9. Литература

1. Adnađević, D., Mićić, V. & Nešković, G. (1998). *Matematika za peti razred osnovne škole*. Beograd: Zavod za udžbenike i nastavna sredstva.
2. Ahmad, A., Tarmizi, R. A. & Nawawi, M. (2010). Visual representations in mathematical word problem solving among form four students in Malacca. *Procedia Social and Behavioral Sciences*, 8, 356–361.
3. Ainley, J. (1988). Perceptions of teachers' questioning styles. In: A Borbás (Ed.). *Proceedings of the 12th annual conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (92–99). Veszprém, Hungary: PME.
4. Ainsworth, S. (2006). DeFT: A conceptual framework for considering learning with multiple representations. *Learning and Instruction*, 16 (3), 183–198.
5. Alexander, R. (2008). Culture, dialogue and learning: Notes on an emerging pedagogy. In: N. Mercer & S. Hodgkinson (Eds.). *Exploring Talk in School* (91–114). London, UK: Sage Publications Ltd.
6. Alrø, H. & Skovsmose, O. (2004). *Dialogue and learning in mathematics education: Intention, reflection, critique*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
7. Ambrose, R., Baek, J.-M. & Carpenter, T. P. (2003). *Children's invention of multidigit multiplication and division algorithms.* In: A. J. Baroody & A. Dowker (Eds.). *Studies in mathematical thinking and learning. The development of arithmetic concepts and skills: Constructing adaptive expertise* (305–336). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

8. Anghileri, J. (2008). Uses of counting in multiplication and division. In: F. I. Thompson (Ed.). *Teaching and learning early number* (110–121). Maidenhead, England: Open University Press.
9. Arnhajm, R. (2003). *Novi eseji o psihologiji umetnosti*. Beograd: Studentski kulturni centar, Univerzitet umetnosti u Beogradu.
10. Baek, J. M. (1998). Children's invented algorithms for multidigit multiplication problems. In: L. J. Morrow & M. J. Kenney (Eds.). *The teaching and learning of algorithms in school mathematics* (151–160). Reston, VA: NCTM.
11. Baranes, R., Perry, M. & Stiegler, J. W. (1989). Activation of real-world knowledge in the solution of word problems. *Cognition and Instruction*, 6 (4). 287–318.
12. Barnes, D. R. (2008). Exploratory Talk for Learning. In: N. Mercer & S. Hodgkinson (Eds.). *Exploring Talk in Schools* (1–15). London, UK: Sage Publications Ltd.
13. Baroody, A. J. (1985). Mastery of basic number combinations: Internalization of relationships or facts? *Journal for Research in Mathematics Education, 16* (2), 83–98.
14. Baroody, A. J. (2003). The Development of Adaptive Expertise and Flexibility: The Integration of Conceptual and Procedural Knowledge. In: A. J. Baroody & A. Dowker (Eds.). *The Development of Arithmetic Concepts and Skills: Constructing Adaptive Expertise* (1–33). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.
15. Baroody, A. J. & Tiilikainen, S. H. (2003). Two perspectives on addition development. In: A. J. Baroody & A. Dowker (Eds.). *The development of arithmetic concepts and skills* (75–125). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.
16. Baroody, A. J., Feil, Y. & Johnson, A. R. (2007). An Alternative Reconceptualization of Procedural and Conceptual Knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education*, 38 (2), 115–131.
17. Baroody, A. J., Bajwa, N. P. & Eiland, M. (2009). Why can't Johnny remember the basic facts? *Developmental Disabilities Research Reviews*, 15, 69–79.
18. Blöte, A. W., Van der Burg, E. & Klein, A. S. (2001). Students' flexibility in solving two-digit addition and subtraction problems: Instructional effects. *Journal of Educational Psychology*, 93 (3), 627–638.
19. Blum, W. & Niss, M. (1991) Applied mathematical problem solving, modeling, applications, and links to other subjects: state, trends and

issues in mathematics instruction. *Educational studies in mathematics*, 22, 37–68.

20. Blum, W. & Leiss, D. (2007). How do students and teachers deal with modelling problems. In: C. Haines, P. Galbraith, W. Blum & S. Khan (Eds.). *Mathematical modeling: Education, engineering, and economics* (222–231). Chichester: Horwood.
21. Boaler, J. & Brodie, K. (2004). The importance, nature and impact of teacher questions. In: D. E. McDougall & J. A. Ross (Eds.). *Proceedings of the 26th Conference of the Psychology of Mathematics Education* (773–781). Toronto: OISE/UT.
22. Boesen, J., Lithner, J. & Palm, T. (2010). The relation between types of assessment tasks and the mathematical reasoning students use. *Educational Studies in Mathematics*, 75 (1), 89–105.
23. Boesen, J., Helenius, O., Lithner, J., Bergqvist, E., Bergqvist, T., Palm, T. & Palmberg, B. (2014). Developing mathematical competence: From the intended to the enacted curriculum. *Journal of Mathematical Behavior*, 33, 72–87.
24. Boonen, A. J. H., Van der Schoot, M., Van Wesel, F., De Vries, M. H. & Jolles, J. (2013). What underlies successful word problem solving? A path analysis in sixth grade students. *Contemporary Educational Psychology, 38,* 271–279.
25. Boonen, A. J. H., Van Wesel, F., Jolles, J. & Van der Schoot, M. (2014). The role of visual representation type, spatial ability, and reading comprehension in word problem solving: An item-level analysis in elementary school children. *International Journal of Educational Research*, 68, 15–26.
26. Borko, H., Stecher, B. M. & Alonzo, A. C. (2005). Artifact packages for characterizing classroom practice: A pilot study. *Educational Assessment*, 10 (2), 73.
27. Boulton-Lewis, G. M. & Tait, K. (1993). Young children's representations and strategies for addition. *British Journal of Educational Psychology*, 64, 231–242.
28. Brendefur, J. & Frykholm, J. (2000). Promoting mathematical communication in the classroom: Two preservice teachers' conceptions and practices. *Journalof Mathematics Teacher Education*, 3 (2), 125–153.
29. Breyfogle, M. L. & Williams, L. E. (2008). Designing and implementing worthwhile tasks. *Teaching Children Mathematics*, 15 (5), 276–280.

30. Brodie, K. (2013). *The power of professional learning communities. Education as Change*, 17 (1), 5–18.
31. Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
32. Brown, S., Seidelmann, A. & Zimmermann, G. (2002). *In the Trenches: Three Teachers' Perspectives on Moving Beyond the Math Wars*. Retrieved March 23, 2014. from http://mathematicallysane.com/in-the-trenches/.
33. Brown, M. C., McNeil, N. M. & Glenberg, A. M. (2009). Using concreteness in education: Real problems, potential solutions. *Child Development Perspectives, 3* (3), 160–164.
34. Cai, J. (2004). Why do U. S. and Chinese students think differently in mathematical problem solving? Exploring the impact of early algebra learning and teachers' beliefs. *Journal of Mathematical Behavior*, 23, 135–167.
35. Cai, J. & Lester, F. K. (2005). Solution representations and pedagogical representations in Chinese and U. S. classrooms. *The Journal of Mathematical Behavior*, 24 (3–4), 221–237.
36. Cai, J. (2006). U. S. and Chinese teachers' cultural values of representations in mathematics education. In: F. K. S. Leung, K. D. Graf & F. Lopez-Real (Eds). *Mathematics education in different cultural traditions: A comparative study of East Asian and the West* (46–482). New York, NY: Springer.
37. Carpenter, T. P., Moser, J. M. & Bebout, H. C. (1988). Representation of addition and subtraction word problems. *Journal for Research in Mathematics Education*, 19 (4), 345–357.
38. Carpenter, T. P., Ansell, E., Franke, M. L., Fennema, E. & Weisbeck, L. (1993). Models of problem solving: A study of kindergarten children's problem-solving processes. *Journal for Research in Mathematics Education*, 24, 428–444.
39. Carpenter, T. P., Franke, M. L., Jacobs, V., Fennema, E. & Empson, S. B. (1997). A longitudinal study of intervention and understanding in children's multidigit addition and subtraction. *Journal for Research in Mathematics Education*, 29, 3–30.
40. Carpenter, T. P., Franke, M. L., Jacobs, V. R., Fennema, E. & Empson, S. B. (1998). A longitudinal study of invention and understanding in children‘s multidigit addition and subtraction. *Journal for Research in Mathematics Education*, 29 (1), 3–20.

41. Carpenter, T., Ansell, E. & Levi, L. (2001). An alternative conception of teaching for understanding: Case studies of two first-grade mathematics classes. In: T. Wood, B. Nelson & J. Warfield (Eds.). *Beyond classical pedagogy: Teaching elementary school mathematics* (27–46). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.
42. Carruthers, E. & Worthington, M. (2003). *Children's mathematics. Making marks, making meaning*. London, UK: Paul Chapman Publishing.
43. Carter, S. (2008). Disequilibrium and Questioning in the Primary Classroom: Establishing Routines that Help Students Learn. *Teaching Children Mathematics*, 15 (3), 134–137.
44. Cazden, C. B. (1988). *Classroom Discourse: The Language of Teaching and Learning.* Portsmouth, NH: Heinemann.
45. Cazden, C. B. (2001). *Classroom Discourse: The Language of Teaching and Learning* (2nd ed.). Portsmouth, NH: Heinemann.
46. Chazan, D. & Ball, D. (1999). Beyond being told not to tell. *For the Learning of Mathematics*, 19 (2), 2–10.
47. Chapin, S. H., O'Conner, C. & Anderson, N. C. (2009). *Classroom discussions: Using math talk to help students learn*. Sausalito, CA: Math Solutions.
48. Chapman, O. (1999). Inservice teacher development in mathematical problem solving. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 2, 121–142.
49. Chapman, O. (2005). Constructing pedagogical knowledge of problems solving: preservice mathematics teachers. In: H. L. Chick & J. L. Vincent (Eds.). *Proceedings of the 29th Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* ,Vol. 2 (225–232). Melbourne, AU.
50. Chapman, O. (2013). Mathematical-task knowledge for teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 16 (1), 1–6.
51. Chapman, O. (2015). Mathematics teachers' knowledge for teaching problem solving. *Lumat*, 3 (1), 19–36.
52. Chin, C. (2006). Classroom interaction in science: Teacher questioning and feedback to students' responses. *International Journal of Science Education*, 28 (11), 1315–1346.
53. Chin, C. (2007). Teacher questioning in science classrooms: Approaches that stimulate productive thinking. *Journal of Research in Science Teaching*, 44 (6), 815–843.
54. Choike, J. R. (2000). Teaching strategies for "algebra for all". *Mathematics Teacher*, 93 (7), 556–560.

55. Clark, F. B. & Kamii, C. (1996). Identification of multiplicative thinking in children in grades 1–5. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27 (1), 41–51.
56. Clarke, D. M. & Clarke, B. A. (2004). Mathematics teaching in Grades K–2: Painting a picture of challenging, supportive, and effective classrooms. In: R. N. Rubenstein & G. W. Bright (Eds.). *Perspectives on the teaching of mathematics (66th Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics* (67–81). Reston, VA: NCTM.
57. Clarke, D. (2005). Written algorithms in the primary years: undoing the "good work"? In: M. Coupland, J. Anderson & T. Spencer (Eds.). Making mathematics vital: Proceedings of the Twentieth Biennial Conference *of the Australian Association of Mathematics Teachers* (93–98). Adelaide: Australian Association of Mathematics Teachers.
58. Clement, D. H. (1997). (Mis?)constructing constructivism. *Teaching Children Mathematics*, 4, 198–200.
59. Cooper, T. J. & Warren, E. (2011). Years 2 to 6 Students' Ability to Generalise: Models, Representations and Theory for Teaching and Learning. In: J. Cai & E. Knuth (Eds.). *Early Algebraization. A Global Dialogue from Multiple Perspectives* (187–215). Berlin: Springer.
60. Coquin-Viennot, D. & Moreau, S. (2003). Highlighting the role of the episodic situation model in the solving of arithmetical problems. *European Journal of Psychology of Education*, 18 (3), 267–279.
61. Craigen, R. (2011). Responses to "Why do kids need to learnalgorithms?". Retrieved January 23, 2017. from https://ahypatia.wordpress.com/2011/10/20/why-do-kids-need-to-learn-algorithms.
62. Cummins, D. D., Kintsch, W., Reusser, K. & Weimer, R. (1988). The role of understanding in solving word problems. *Cognitive Psychology*, 20 (4), 405–438.
63. Cunningham, R. T. (1987). What kind of question is that? In: W. W. Wilen (Ed.). *Questions, questioning techniques, and effective teaching* (67–94). Washington, DC: National Education Association.
64. Dabić, M. & Milinković, J. (2015). Teachers' representations of multiplication - do children understand them? In: J. Novotna & H. Moraova (Eds.). *Developing mathematical language and reasoning* (99–107), Prague: Charles University, Faculty of Education.
65. De Corte, E. & Verschaffel, L. (1985). Beginning first graders' initial representation of arithmetic word problems. *Journal of Mathematical Behavior*, 4, 3–21.

66. De Corte, E. & Verschaffel, L. (1986). Eye-movements of first graders during word problem solving. In: G. Lappan, R. Even (Eds.). *Proceedings of the 10th Conference of the International Group for the Psychology in Mathematics Education* (421–426). London, UK: PME.
67. De Corte, E. & Verschaffel, L. (1991). Some factors influencing the solution of addition and subtraction word problems. In: K. Durkin & B. Shire (Eds.). *Language and Mathematical Education* (117–130). Buckingham, UK: Open University Press.
68. De Corte, E., Greer, B. & Verschaffel, L. (1996). Mathematics teaching and learning. In: D. Berliner & R. Calfee (Eds.). *Handbook of Educational Psychology* (491–549). New York, NY: Macmillan.
69. De Corte, E. (2004). Mainstreams and perspectives in research on learning (mathematics) from instruction. *Applied Psychology: An International Review*, 5 (2), 279–310.
70. De Lange, J. (1995). Assessment: no change without problems. In: T. Romberg (Ed.). *Reform in school mathematics and authentic assessment* (87–172). Albany, NY: SUNY Press.
71. Dejić, M. (2013). *Broj, mera i bezmerje*. Beograd: Učiteljski fakultet.
72. Dejić, M., Egerić, M. & Mihajlović, A. (2015). *Metodika matematike u razrednoj nastavi*. Jagodina: Fakultet pedagoških nauka.
73. Depaepe, F., De Corte, E. & Verschaffel, L. (2010). Teachers' approaches towards word problem solving: elaborating or restricting the problem context. *Teaching and Teacher Education*, 26 (2), 152–160.
74. Develin, Kit (2001). *Matematički gen*. Beograd: Plato.
75. Dewolf, T., Van Dooren, W., Cimen, E. E. & Verschaffel, L. (2013). The Impact of Illustrations and Warnings on Solving Mathematical Word Problems Realistically. *The Journal of Experimental Education*, 00 (00), 1–18.
76. Diezmann, C. M. & English, L. D. (2001). Promoting the use of diagrams as tools for thinking. In: A. A. Cuoco (Ed.). *National Council of Teachers of Mathematics Yearbook:The role of representation in school mathenmatics* (77–89). Reston, VA: NCTM.
77. Diezmann, C. M. (2002). Enhancing students' problem solving through diagram use. *Australian Primary Mathematics Classroom*, 7 (3), 4–8.
78. Ding, M. & Li, X. (2014). Transition from concrete to abstract representations: the distributive property in a Chinese textbook series. *Educational Studies in Mathematics*, 87 (1), 103–121.

79. DiSessa, A. A. (2002). Students' criteria for representational adequacy. In: K. Gravemeijer, R. Lehrer, B. Van Oers & L. Verschaffel (Eds.). Symbolizing, modelling and tool use in mathematics education (105–130). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
80. DiSessa, A. A. (2004). Metarepresentation: Native competence and targets for instruction. *Cognition and Instruction*, 22, 293–331.
81. Dowker, A. (2004). *What works for children with mathematical difficulties? Research Report No. 554*. Nottingham: U. K. Department for Education and Skills.
82. Downton, A. & Sullivan, P. (2017). Posing complex problems requiring multiplicative thinking prompts students to use sophisticated strategies and build mathematical connections. *Educational Studies in Mathematics*, 95, 303–328.
83. Dreher, A. & Kuntze, S. (2015). Teachers' professional knowledge and noticing: The case of multiple representations in the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, 88, 89–114.
84. Dreyfus, T. (1991). Advanced mathematical thinking processes. In: D. Tall (Ed.). *Advanced Mathematical Thinking* (25–41). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
85. Duru, A., Peker, M., Bozkurt, E., Akgün, L. & Bayrakdar, Z. (2011). Pre-service primary school teachers' preference of the problem solving strategies for word problems. *Procedia Social and Behavioral Sciences*, 15, 3463–3468.
86. Duval, R. (1999). Representation, vision and visualization: Cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning. In: F. Hitt & M. Santos (Eds.). *Proceedings of the 21st North American PME Conference* (3–26). Cuernavaca, Morelos, Mexico.
87. Duval, R. (2006). A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61, 103–131.
88. Đokić, O. (2017). *Realno okruženje u početnoj nastavi geometrije*. Beograd: Učiteljski fakultet.
89. Đokić, O. (2019). Stavovi učenika četvrtog razreda osnovne škole o učenju na časovima geometrije. *Inovacije u nastavi*, 32 (1), 30–52.
90. Đokić, O. & Zeljić, M. (2017). Teorije razvoja geometrijskog mišljenja prema Van Hilu, Fišbajnu i Hudemon-Kuzniaku. *Teme*, 41 (3), 623–637.
91. Đokić, O., Jelić, M. & Ilić, S. (2020). The Correlation between Figural and Conceptual Properties of Angle and Cube in Pre-Service Teachers Geometric Reasoning. *Inovacije u nastavi*, 33 (1), 1–20.

92. Elia, I., Van den Heuvel-Panhuizen, M. & Kolovou, A. (2009). Exploring strategy use and strategy flexibility in non-routine problem solving by primary school high achievers in mathematics. *ZDM Mathematics Education*, 41 (5), 605–618.
93. Ellis, K. (1993). Teacher questioning behavior and student learning: What research says to teachers. Retrieved March 23, 2019. from https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED359572.pdf.
94. English, L. (2009). Promoting interdisciplinarity through mathematical modelling. *The International Journal on Mathematics Education*, 41 (1–2), 161–181.
95. Engle, R. A. & Conant, F. C. (2002). Guiding principles for fostering productive disciplinary engagement: Explaining an emergent argument in a community of learners classroom. *Cognition and Instruction*, 20 (4), 399–483.
96. Evans, S. & Swan, M. (2014). Developing Students' Strategies for Problem Solving. *Educational Designer*, 2 (7), 1–31.
97. Fagnant, A. & Vlassis, J. (2013). Schematic representations in arithmetical problem solving: Analysis of their impact on grade 4 students. *Educational Studies in Mathematics,* 84, 149–168.
98. Fan, L. & Bokhove, C. (2014). Rethinking the role of algorithms in school mathematics:a conceptual model with focus on cognitive development. *ZDM Mathematics Education*, 46, 481–492.
99. Fischbein, E., Deri, M., Nello, M. S. & Merino, M. S. (1985). The role of implicit models verbal problems in multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education*, 16, 3–17.
100. Foster, C. (2019). The fundamental problem with teaching problem solving. *Mathematics Teaching*, 265, 8–10.
101. Foxman, D. & Beishuizen, M. (2002). Mental calculation methods used by 11-year-olds in different attainment bands: A reanalysis of data from the 1987 APU survey in the UK. *Educational Studies in Mathematics*, 51, 41–69.
102. Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education*. China lectures. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
103. Friedman, R. E. (2005). *An examination of lesson study as a teaching tool in U.S. public schools* (doctoral dissertation). Ashland: Ashland University. Retrieved May 3, 2015. from https://etd.ohiolink.edu/apexprod/rws_olink/r/1501/10?clear=10&p10_accession_num=ashland1116871771.

104. Fuson, K. C. (1992). Research on learning and teaching addition and subtraction whole numbers. In: G. Leinhardt, R. Putnam & R. A. Hattrup (Eds.). *Analysis of arithmetic for mathematics teaching* (53–187). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.
105. Fuson, K. C., Wearne, D., Hiebert, J. C., Murray, H. G., Human, P. G., Olivier, A. I., Carpenter, T. P. & Fennema, E. (1997). Children's conceptual structures for multidigit numbers and methods of multidigit addition and subtraction. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28 (2), 130–162.
106. Fuson, K. C. (2003). Toward computational fluency in multidigit multiplication and division. *Teaching Children Mathematics*, 9 (6), 300–305.
107. Gerofsky, S. (1996). A linguistic and narrative view of word problems in mathematics education. *For the Learning of Mathematics*,16 (2), 36–45.
108. Gilbert, J. K. & Boulter, C. J. (Eds.) (2000). *Developing models in science education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
109. Glenberg, A. M., Gutierrez, T., Levin, J. R., Japuntich, S. & Kaschak, M. P. (2004). Activity and Imagined Activity Can Enhance Young Children's Reading Comprehension. *Journal of Educational Psychology, 96* (3), 424–436.
110. Goldin, G. & Shteingold, N. (2001). System of representations and the development of mathematical concepts. In: A. Cuoco & F. R. Curcio (Eds.). *The Roles of Representation in School Mathematics* (1–23). Reston, VA: NCTM.
111. Goldin, G. A. (2002). Representation in mathematical learning and problem solving. In: L. D. English (Ed.). *Handbook of international research in mathematics education* (197–218). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.
112. Goldstone, R. L. & Son, J. Y. (2005). The transfer of scientific principles using concrete and idealized simulations. *The Journal of the Learning Sciences*, 14, 69–110.
113. Gravemeijer, K. (1994). Educational development and developmental research in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education, 25* (5), 443–471.
114. Gravemeijer, K. (1997). Solving word problems: A case of modelling?, *Learning and Instruction*, 7 (4), 389–397.
115. Gravemeijer, K. (2002). Preamble: from models to modeling. In: K. Gravemeijer, R. Lehrer, B. Oers & L. Verschaffel (Eds.). *Symbolizing,*

modeling and tool use in mathematics education (7–22). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

116. Gravemeijer, K., Lehrer, R., Van Oers, B. & Verschaffel, L. (Eds.) (2003). *Symbolizing, modelling and tool use in mathematics education* (105–130). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
117. Greer, B. (1992). Multiplication and division as models of situations. In: D. A. Grouws (Ed.). *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (276–295). New York, NY: Macmillan.
118. Greer, B. (1993). The mathematical modeling perspective on world problems. *Journal of Mathematical Behavior*, 12, 239–250.
119. Güler, G. & Çiltaş, A. (2011). The visual representation usage levels of mathematics teachers and students in solving verbal problems. *International Journal of Humanities and Social Science*, 1 (11), 145–154.
120. Haavold, P. (2011). What characterises high achieving students' mathematical reasoning? In: B. Sriraman & K. Lee (Eds.). *The elements of creativity and giftedness in mathematics,* Vol. 1 (193–215). Rotterdam: Sense Publishers.
121. Hegarty, M., Mayer, R. E. & Green, C. E. (1992). Comprehension of arithmetic word problems: Evidence from students' eye fixations. *Journal of Educational Psychology*, 84, 76–84.
122. Hegarty, M. & Kozhevnikov, M. (1999). Types of visual–spatial representations and mathematical problem solving. *Journal of Educational Psychology*, 91 (4), 684–689.
123. Heinze, A. & Erhard, M. (2006). How much time do students have to think about teacher questions? an investigation of the quick succession of teacher questions and student responses in the German mathematics classroom. *International Journal on Mathematics Education*, 38 (5), 388–398.
124. Heinze, A., Star, J. R. & Verschaffel, L. (2009). Flexible and adaptive use of strategies and representations in mathematics education. *ZDM Mathematics Education*, 41, 535–540.
125. Heirdsfield, A., Dole, S. & Beswick, K. (2007). Instruction to support mental computation development in young children of diverse ability. In: P. L. Jeffery (Ed.). *Proceedings Australian Association for Research in Education Conference* (26–30), Adelaide, Australia.
126. Henningsen, M. & Stein, M. K. (1997). Mathematical tasks and student cognition: Classroom-based factors that support and inhibit

high-level mathematical thinking and reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28, 524–549.

127. Herscovics, N. & Bergeron, J. C. (1983). Models of Understanding. *International Reviews on Mathematical Education*, 15 (2), 75–83.
128. Hiebert, J. & Carpenter, T. (1992). Learning and teaching with understanding. In: D. Grouws (Ed.). *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (65–97). New York, NY: Macmillan.
129. Hiebert, J. (2003). What research says about the NCTM standards. In: J. Kilpatrick, G. Martin & D. Schifter (Eds.). *A research companion to principles and standards for school mathematics* (5–26). Reston, VA: NCTM.
130. Hiebert, J. & Grouws, D. A. (2007). The effects of classroom mathematics teaching on students' learning. In: F. K. Lester (Ed.). *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (371–404). Charlotte, NC: Information Age Publishing.
131. Higginson, W. (1982). Simbols, Icons, and Mathematical Understanding. *Vizible Language*, 16 (3), 239–248.
132. Hodge, L. L. & Cobb, P. (2003). Classrooms as design spaces for supporting students' mathematical learning and engagement. Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association, Chicago, IL.
133. Huang, R. & Cai, J. (2007). Constructing Pedagogical Representations to Teach Linear Relations in Chinese and U.S. Classrooms. In: J. H. Woo, H. C. Lew, K. S. Park & D. Y. Seo (Eds.). *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Vol. 3 (65–72). Seoul: PME.
134. Huang, H. M. E. & Witz, K. G. (2011). Developing children's conceptual understanding of area measurement:A curriculum and teaching experiment. *Learning and Instruction*, 21 (1), 1–13.
135. Ilić, S. & Zeljić, M. (2016). Razumevanje i primena pravila aritmetike učenika četvrtog razreda osnovne škole, *Pedagogija*, 71 (4), 419–432.
136. Imbo, I. & Vandierendonck, A. (2006). The development of strategy use in elementary school children: Working memory and individual differences. *Journal of Experimental Child Psychology*, 96, 284–309.
137. Ishida, J. (2002). Students' evaluation of their strategies when they find several solution methods. *Journal of Mathematical Behavior*, 21, 49–56.
138. Jaworski, B. (1994). *Investigating mathematics teaching: A constructivist enquiry*. London, UK: The Falmer Press.

139. Jiang, C. & Chua, B. L. (2010). Strategies for solving three fraction-related word problems on speed: A comparative study between Chinese and Singaporean students. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 8, 73–96.
140. Jimenez, L., & Verschaffel, L. (2014). Development of children‘s solutions of non-standard arithmetic word problem solving. *Revista de Psicodidactica*, 19 (1), 93–*123.*
141. Jonsson, B., Norqvist, M., Liljekvist, Y. & Lithner, J. (2014). Learning mathematics through algorithmic and creative reasoning. *Journal of Mathematical Behavior*, 36, 20–32.
142. Kamii, C. & Dominick, A. (1997). To teach or not to teach algorithms. *The Journal of Mathematical Behavior*, 16 (1), 51–61.
143. Kaminski, J. A., Sloutsky, V. M. & Heckler, A. F. (2008). The advantage of abstract examples in learning mathematics. *Science*, 320, 454–455.
144. Kaur, B. (2009). Characteristics of good mathematics teaching in Singapore grade 8 classrooms: a juxtaposition of teachers' practice and students' perception. *International Journal on Mathematics Education*, 41 (3), 333–347.
145. Keijzer, R. & Terwel, J. (2003). Learning for mathematical insight: A longitudinal comparative study on modelling. *Learning and Instruction*, 13 (3), 285–304.
146. Kieran, C. (1992). *The learning and teaching of school algebra.* In: D. A. Grouws (Ed.). *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (390–419). New York, NY: Macmillan.
147. Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: What is it? *The Mathematics Educator (Singapore)*, 8 (1), 139–151.
148. Kieran, C., Doorman, M. & Ohtani, M. (2015). Frameworks and Principles for Task Design. In: A. Watson & M. Ohtani (Eds.). *Task Design In Mathematics Education* (19–82) . New ICMI Study Series. New York, NY: Springer.
149. Kilpatrick, J., Swafford, J. & Findell, B. (Eds.) (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics*. Washington, DC: National Academy Press.
150. Klieme, E., Pauli, C. & Reusser, K. (2009). The Pythagoras study: investigating effects of teaching and learning in Swiss and German mathematics classrooms. In: T. Janik & T. Seidel (Eds.). *The power of video studies in investigating teaching and learning in the classroom* (137–160). Münster: Waxmann.

151. Kline, K. (2008). Learning to think and thinking to learn. *Teaching Children Mathematics*, 15, 144–151.
152. Koedinger, K. R., Alibali, M. W. & Nathan, M. J. (2008). Trade-offs between grounded and abstract representations: Evidence from algebra problem solving. *Cognitive Science*, 32, 366–397.
153. Korthagen, F. A. J. (2001). Working with groups of student teachers. In: J. A. F. Korthagen, J. Kessels, B. Koster, B. Lagerwerf & T. Wubbels (Eds.). *Linking practice and theory: The pedagogy of realistic teacher education* (149–174). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.
154. Korthagen, F. A. J. (2004). In search of the essence of a good teacher: Towards a more holistic approach in teacher education. *Teaching and Teacher Education*, 20 (1), 77–97.
155. Kouba, V. L. (1989). Children's solution strategies for equivalent set multiplication and division word problems. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20, 147–158.
156. Kozhevnikov, M., Hegarty, M. & Mayer, R. E. (2002). Revising the visualizer-verbalizer dimension: Evidence for two types of visualizers. *Cognition and Instruction*, 20, 47–77.
157. Kwon, O. N., Park J. S. & Park, J. H. (2006). Cultivating divergent thinking in mathematics through an open-ended approach. *Asia Pacific Education Review*, 7 (1), 51–61.
158. Lampert, M. (2001). *Teaching problems and the problems of teaching*. New Haven, CT: Yale University Press.
159. Leikin, R. (2003). Problem-solving preferences of mathematics teachers: focusing on symmetry. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 6 (4), 297–329.
160. Leikin, R. & Levav-Waynberg, A. (2007). Exploring mathematics teacher knowledge to explain the gap between theory-based recommendations and school practice in the use of connecting tasks. *Educational Studies in Mathematics*, 66, 349–371.
161. Lemonidis, C. (2016). *Mental Computation and Estimation: Implications for Mathematics Education, Teaching and Learning*. New York, NY: Routledge.
162. Lesh, R. A., Post, T. R. & Behr, M. J. (1987). Representations and translations among representations in mathematics learning and problem solving. In: C. Janvier (Ed.). *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (33–40). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

163. Lesh, R. A., Cramer, K., Doerr, H., Post, T. & Zawojewski, J. (2003). Model development sequences. In: R. A. Lesh & H. Doerr (Eds.). *Beyond constructivism: A models and modeling perspective on mathematics teaching, learning, and problem solving* (35–58). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.
164. Linsen, S., Verschaffel, L., Reynvoet, B. & De Smedt, B. (2015). The association between numerical magnitude processing and mental versus algorithmic multi-digit subtraction in children. *Learning and Instruction*, 35, 42–50.
165. Liston, M. (2012). Reflecting on Mathematics Teaching Situations: A Comparison of Preservice Mathematics Teachers' and Mathematics Teacher Educators' Views. *International Journal for Cross-Disciplinary Subjects in Education*, 3 (3), 816–823.
166. Lithner, J. (2003). Students' mathematical reasoning in university textbook exercises. *Educational Studies in Mathematics*, 52 (1), 29–55.
167. Lithner, J. (2008). A research framework for creative and imitative reasoning. *Educational Studies in Mathematics*, 67 (3), 255–276.
168. Lobato, J., Clarke, D. & Ellis, A. B. (2005). *Initiating and Eliciting in Teaching*: A *Reformulation of Telling. Journal for Research in Mathematics Education,* 36 (2), 101–36.
169. Lučić, Z. (1997). *Euklidska i hiperbolička geometrija*. Beograd: Matematički fakultet.
170. Maclellan, E. (2001). Mental Calculation: its place in the development of numeracy. *Westminster Studies in Education*, 24 (2), 145–154.
171. Malcolm, S. (2007). The impact of task-based professional development on teachers' practices and beliefs: a design research study. The *Journal* of *Mathematics Teacher Education*, 10, 217–237.
172. Manouchehri, A. & Goodman, T. (2000). Implementing mathematics reform: The challenge within. *Educational Studies in Mathematics*, 42, 1–34.
173. Maričić, S. & Lazić, B. (2015). The Influence of Content on the Development of Students' Critical Thinking in the Initial Teaching of Mathematics. *Croatian Journal of Education*, 18 (1), 1–40.
174. Marjanović, M. (2007). Metodološki aspekti nastave i udžbenika matematike. U: B. Marković (ur.). *Udžbenik i savremena nastava* (249–262). Beograd: Zavod za udžbenike.
175. Marjanović, M. (2014). Jedan pristup izvođenju nastave aritmetike, IV. *Nastava matematike*, 59 (4), 1–16.

176. Marjanović, M. & Mandić, A. (2009a). Numbers as visible shapes. *The Teaching of Mathematics*, 12 (1), 45–49.
177. Marjanović, M. & Mandić, A. (2009b). Understanding algorithms of vertical addition and subtraction. *The Teaching of Mathematics*, 12 (2), 57–72.
178. Marjanović, M., Mandić, A. & Zeljić, M. (2014). Structuring the subject matter of arithmetic I, *The Teaching of Mathematics*, 17 (2), 51–75.
179. Mason, J. (2000). Asking mathematical questions mathematically. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 31 (1), 97–111.
180. Mason, J. (2008). Making use of children's powers to produce algebraic thinking. In: J. J. Kaput, D. W. Carraher & M. L. Blanton (Eds.). *Algebra in the early grades* (57–94). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.
181. Mercer, N. (1995). *The guided construction of knowledge*. Clevedon, Philadelphia, Adelaide.
182. Mercer, N. & Littleton, K. (2007). *Dialogue and the development of children's thinking: A sociocultural approach*. London, UK: Routledge.
183. Mihajlović, A. (2012). *Razvijanje kreativnosti u početnoj nastavi matematike metodom otvorenog pristupa* (neobjavljena doktorska disertacija). Jagodina: Fakultet pedagoških nauka Univerziteta u Kragujevcu.
184. Milinković, J., Mihajlović, A. & Dejić, M. (2019). Effective choices of representations in problem solving. In: *U. T. Jankvist*, *M. van den Heuvel-. Panhuizen* & *M.* Veldhuis (Eds.). *Proceedings of the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (4557– 4564). Utrecht, Netherlands: Utrecht University.
185. Montague, M. & Applegate, B. (2000). Middle school students' perceptions, persistence, and performance in mathematical problem solving. *Learning Disability Quarterly*, 23, 215–227.
186. Moore, K. C. & Carlson, M. P. (2012). Students' images of problem contexts when solving applied problems. *Journal of Mathematical Behavior*, 31 (1), 48–59.
187. Mortimer, E. F. & Scott, P. (2003). *Meaning making in secondary science classrooms*. Buckingham, UK: Open University Press.
188. Mousley, J. (2004). An Aspect of Mathematical Understanding: The Notion of Connected Knowing. In: M. J. Høines & A. B. Fuglestad (Eds.). *Proceedings of the 28th conference of the International Group*

for the Psychology of Mathematics Education, Vol 3 (377–384). Bergen, Norway: Bergen University College.

189. Moyer, P. S. & Milewicz, E. (2002). Learning to question: categories of questioning used by preservice teachers during diagnostic mathematics interviews. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 5, 293–315.
190. Muijs, D. & Reynolds, D. (2000). School effectiveness and teacher effectiveness in mathematics: Some preliminary findings from the evaluation of the mathematics enhancement programme (primary). *School Effectiveness and School Improvement*, 11 (3), 273–303.
191. Mulligan, J. T. & Mitchelmore, M. C. (1997). Young children‘s intuitive models of multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28, 309–331.
192. National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (1991). *Professional standards for teaching mathematics.* Reston, VA: NCTM.
193. National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: NCTM.
194. National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2007). *Mathematics teaching today.* Reston, VA: NCTM.
195. National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2010). *Professional Standards for Teaching Mathematics*. Reston, VA: NCTM.
196. National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2014). *Principles to actions: Ensuring mathematical success for all*. Reston, VA: NCTM.
197. Nelson, B. (2001). Constructing facilitative teaching. In: T. Wood, B. Nelson & J. Warfield (Eds.). *Beyond classical pedagogy: Teaching elementary school mathematics* (251–274). Abingdon: Routledge.
198. Niss, M. (2007). Reactions on the state and trends in research on mathematics teaching and learning. From here to Utopia. In: F. Lester (Ed.). *2nd handbook of research on mathematics teaching and learning* (1293–1312).
199. Novick, L. R., Hurley, S. M. & Francis, M. (1999). Evidence for abstract, schematic knowledge of three spatial diagram representations. *Memory & Cognition*, 27 (2), 288–308.
200. Novick, L. R. (2006). Understanding spatial diagram structure: An analysis of hierarchies, matrices, and networks. *The Quarterly Journal of Experimental Psychology*, 59 (10), 1826–1856.

201. Novotna, J. (1997). Phenomena Discovered in the Process of Solving Word Problems. In: M. Hejny & J. Novotna (Eds.). *Proceedings ERCME 97* (105–109). Praha: Prometheus.
202. Novotna, J. & Rogers, L. (2003). Word Problems: A Framework for Understanding, Analysis and Teaching. In: L. Rogers & J. Novotna (Eds.). *Effective Learning and Teaching of Mathematics from Primary to Secondary School* (79–96). Bologna: Pitagora Editrice.
203. Nystrand, M. (1997). *Opening dialogue : understanding the dynamics of language and learning in the English classroom*. New York, NY: Teachers College Press.
204. OECD (2003). The PISA 2003 Assessment Framework – Mathematics, Reading, Science and Problem Solving knowledge and skills. Retrieved January 20, 2019. from http://www.oecd.org/education/school/programmeforinternationalstudentassessmentpisa/33694881.pdf.
205. Olivier, A. (1989). Handling pupils' misconceptions. *Pythagoras*, 21, 10–19.
206. Outhred, L. & Saradelich, S. (1997). Problem solving in Kindergarten: the development of children's Representations of numerical situations. In: K. Carr (Ed.). *People in Mathematics Education*, Vol. 2 (376–383). Rotorura: MERGA.
207. Panasuk, R. (2011). Taxonomy for assessing conceptual understanding in algebra Using multiple representations. *College Student Journal*, 45 (2), 219–232.
208. Pantziara, M., Gagatsis, A. & Elia, I. (2009). Using diagrams as tools for the solution of non-routine mathematical problems. *Educational Studies in Mathematics*, 72, 39–60.
209. Pape, S. J. (2003). Compare word problems: Consistency hypothesis revisited. *Contemporary Educational Psychology*, 28, 396–421.
210. Peker, M. (2009). The effects of an instruction using problem solving strategies in mathematics on the teaching anxiety level of the pre-service primary school teachers. *The New Educational Review*, 19 (3–4), 95–114.
211. Peled, I. & Segalis, B. (2005). It's Not Too Late to Conceptualize: Constructing a Generalized Subtraction Schema by Abstracting and Connecting Procedures. *Mathematical Thinking and Learning*, 7, 207–230.
212. Peltenburg, M., Van Den Heuvel-Panhuizen, M. & Robitzsch, A. (2012). Special education students' use of indirect addition in solving subtrac-

tion problems up to 100 – A proof of the didactical potential of an ignored procedure. *Educational Studies in Mathematics*, 79 (3), 351–369.
213. Penick, J. E., Crow, L. W. & Bonnstetter, R. J. (1996). Questions are the answer: A logical questioning strategy for any topic. *The Science Teacher*, 63, 27–29.
214. Pesek, D. D. & Kirshner, D. (2000). Interference of Instrumental Instruction in Subsequent Relational Learning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31 (5), 524–540.
215. Poland, M. & Van Oers, B. (2007). Effects of schematising on mathematical development. *European Early Childhood Education Research Journal*, 15 (2), 269–293.
216. Pravilnik o programu nastave i učenja za drugi razred osnovnog obrazovanja i vaspitanja (2018). *Službeni glasnik*, 16.
217. Presmeg, N. C. (1997). Generalization using imagery in mathematics. In: L. English (Ed.). *Mathematical reasoning: Analogies, metaphors, and images* (299–312). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.
218. Resnick, L. B. & Omanson, S. F. (1987). Learning to understand arithmetic. In: R. Glaser (Ed.). *Advances in instructional psychology* (41–95). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.
219. Reusser, K. & Stebler, R. (1997). Every word problem has a solution: The social rationality of mathematical modeling in schools. *Learning and Instruction, 7* (4), 309–327.
220. Richardson, V. (2001). Constructivist mathematics instruction and current trends in research on teaching. In: T. Wood, B. Nelson & J. Warfield (Eds.). *Beyond classical pedagogy: Teaching elementary school mathematics* (275–294). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.
221. Richland, L. E., Zur, O. & Holyoak, K. J. (2007). Cognitive supports for analogies in the mathematics classroom. *Science*, 316, 1128–1129.
222. Riley, M. S. & Greeno, J. G. (1988). Developmental analysis of understanding language about quantities and of solving problems. *Cognition and Instruction*, 5, 1, 49–101.
223. Rittle-Johnson, B. & Star, J. R. (2007). Does comparing solution methods facilitate conceptual and procedural knowledge? An experimental study on learning to solve equations. *Journal of Educational Psychology, 99* (3), 561–574.

224. Ross, S. M., Stringfield, S., Sanders, W. L. & Wright, S. P. (2003). Inside systemic elementary school reform: Teacher effects and teacher mobility. *School Effectiveness and School Improvement*, 14 (1), 73–110.
225. Schleppenbach, M., Perry, M., Miller, K. F., Sims, L. & Fang, G. (2007). The answer is only the beginning: Extended discourse in Chinese and U.S. mathematics classroom. *Journal of Educational Psychology*, 99 (2), 380–396.
226. Schliemann, A. D. & Carraher, D. W. (2002). Is everyday mathematics truly relevant to mathematics education? In: J. Moshkovich & M. Brenner (Eds.). *Everyday and Academic Mathematics in the Classroom. Monographs of the journal for research in mathematics education* (131–153).
227. Schneider, M. & Stern, E. (2009). The Inverse Relation of Addition and Subtraction: A Knowledge Integration Perspective. *Mathematical Thinking and Learning*, 11, 92–101.
228. Schneider, M., Rittle-Johnson, B. & Star, J. R. (2011). Relations among conceptual knowledge, procedural knowledge, and procedural flexibility in two samples differing in prior knowledge. *Developmental Psychology*, 47 (6), 1525–1538.
229. Schoenfeld, A. H. (1991). *On mathematics as sense-making: An informal attack on the unfortunate divorce of formal and informal mathematics.* In: J. F. Voss, D. N. Perkins & J. W. Segal (Eds.). *Informal reasoning and education* (311–343). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.
230. Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. In: D. A. Grows, (Ed.). Handbook of research on mathematics teaching and learning (334–370). New York, NY: Macmillan.
231. Schorr, R. Y. & Lesh, R. (2003). A modeling approach to providing teacher development. In: R. Lesh & H. Doerr (Eds.). *Beyond constructivism: a models and modeling perspective on teaching, learning, and problem solving in mathematics education* (141–57). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.
232. Schroeder, T. L. & Lester, F. K. J. (1989). Developing understanding in mathematics via problem solving. In: P. R. Trafton (Ed.). *New directions for elementary school mathematics* (31–42). Reston, VA: NCTM.
233. Schulz, A., Leuders, T. (2018). Learning trajectories towards strategy proficiency in multi-digit division – A latent leatransition analysis of

strategy and error profiles. *Learning and Individual Differences*, 66, 54–69.

234. Schwarzkopf, R. (2007). Elementary modelling in mathematics lessons: the interplay between "real-world" knowledge and "mathematical structures". In: W. Blum, P. L. Galbraith, H. W. Henn & M. Niss (Eds.). *Modelling and Applications in Mathematics Education* (209–216). New York, NY: Springer.
235. Scott, P. (2008). Talking a way to understanding in science classrooms. In: N. Mercer & S. Hodgkinson (Eds.). *Exploring Talk in School* (17–36). London UK: Sage Publications Ltd.
236. Selter, C. (2001). Addition and subtraction of three-digit numbers: German elementary children's success, methods and strategies. *Educational Studies in Mathematics*, 47, 145–173.
237. Selter, C., Prediger, S., Nührenbörger, M. & Hußmann, S. (2012). Taking away and determinig the difference – a longitudinal perspective on two models of subtraction and the inverse relation to addition. *Educational Studies in Mathematics*, 79 (3), 389–408.
238. Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 1–36.
239. Sfard, A. (2000). Simbolizing mathematical reality into being: How mathematical discourse and mathematical objects create eash other. In: P. Coob. K. E. Yackel, K. McClain (Eds.). *Simbolizing and communicating: Perspektives on Mathematical Discourse, Tools, and Instructional Design* (37–98). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.
240. Sfard, A. (2003). There is more discourse than meets the ears: Looking at thinking as communicating to learn more about mathematical learning. In: C. Kieran, E. A. Forman & A. Sfard (Eds.). *Learning discourse: Discursive approaches to research in mathematics education* (13–57). Dordrecht: Springer.
241. Sherin, B. & Fuson, K. (2005). Multiplication Strategies and the Appropriation of Computational Resources. *Journal for Research in Mathematics Education*, 36 (4), 347–395.
242. Shifter, D. (2001). Learning to see the invisible: What skills and knowledge are needed to engage with students' mathematical ideas? In: T. Wood, B. Nelson & J. Warfield (Eds.). *Beyond classical pedagogy: Teaching elementary school mathematics* (109–134). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

243. Siegler, R. S. (1996). *Emerging minds*. New York, NY: Oxford University Press.
244. Skemp, R. R. (1976). Relational Understanding and Instrumental Understanding, *Mathematics Teahhing*, 77, 20–26.
245. Skemp, R. R. (1989). *Mathematics in the Primary School*. London, UK: Routledge.
246. Smith, J. P. (1996). Efficacy and teaching mathematics by telling: A challenge for reform. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(4), 387–402.
247. Smith, E. (2006). Representational thinking as a framework for introducing functions in the elementary curriculum. In: J. Kaput, D. Carraher & M. Blanton (Eds.). *Algebra in the early grades* (133–160). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.
248. Smith, S. & Smith, M. (2006). Assessing elementary understanding of multiplication concepts. *School Science and Mathematics*, 106 (3), 140–149.
249. Sowder, J. T. (1992). Making sense of numbers in school mathematics. In: G. Leinhardt, R. Putnam & R. A. Hattrup (Eds.). *Analysis of arithmetic for mathematics teaching* (1–51). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.
250. Star, J. R. (2005). Reconceptualizing Procedural Knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education*, 36 (5), 404–411.
251. Star, J. R. & Seifert, C. (2006). The development of flexibility in equation solving. *Contemporary Educational Psychology*, 31 (3), 280–300.
252. Stein, M. K. & Smith, M. S. (1998). Mathematical tasks as a framework for reflection. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 3 (4), 268–275.
253. Stein, M. K., Smith, M. S., Henningsen, M. & Silver, E. A. (2000). *Implementing standards-based mathematics instruction: A casebook for professional development*. New York, NY: Teachers College Press.
254. Stein, M. K., Eagle, R. A., Smith, M. A. & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning*, 10, 313–340.
255. Stein, M. K., Smith, M. S., Henningsen, M. A. & Silver, E. A. (2009). *Implementing standards-based mathematics instruction: A casebook for professional development* (2nd ed.). New York, NY: Teachers.

256. Stylianou, D. A. (2010). Teachers' conceptions of representation in middle school mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 13 (4), 325–343.
257. Sullivan, P. & Lilburn, P. (2010). *Good Questions for Math Teching: Why Ask Them and What to Ask*. Math Solutions Publications Sausalito, CA.
258. Swafford, J. O. & Langrall, C. W. (2000). Grade 6 students' preinstructional use of equations to describe and represent problem situations. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31, 89–112.
259. Swan, M. (2001). Dealing with misconceptions in mathematics. In P. Gates (Ed.). *Issues in teaching mathematics* (147–165). London, UK: Falmer Press.
260. Špijunović, K. & Maričić, S. (2016). *Metodika početne nastave matematike*. Užice: Učiteljski fakultet.
261. Takahashi, A., Watanabe, T. & Yoshida, M. (2006). Developing good mathematics teaching practice through lesson study: A U. S. perspective. *Tsukuba Journal of Educational Study in Mathematics*, 25 (1), 197–204.
262. Tall, D. (2008). The transition to formal thinking in mathematics. *Mathematics Education Research Journal*, 20 (2), 5–24.
263. Taplin, M. (1998). Preservice Teachers' Problem-Solving Processes. *Mathematics Education Research Journal*, 10 (3), 59–76.
264. Terwel, J., Van Oers, B., Van Dijk, I. & Van den Eeden, P. (2009). Are representations to be provided or generated in primary mathematics education? Effects on transfer, *Educational Research and Evaluation*, 15 (1), 25–44.
265. Thevenot, C. (2010). Arithmetic word problem solving: Evidence for the construction of a mental model. *Acta Psychologica*, 133, 90–95.
266. Threlfall, J. (2009). Strategies and flexibility in mental calculation. *ZDM Mathematics Education*, 41, 541–555.
267. Tienken, C., Goldberg, S. & DiRocco, D. (2009). Questioning the Questions. *Kappa Delta Pi Record*, 46 (1), 39–43.
268. Tirosh, D., Tirosh, C., Graeber, A. & Wilson, J. (1991). Computer-based intervention to correct preservice teachers' misconceptions about the operation of division. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, 10, 71–78.
269. Tomm, K. (1988). Interventive interviewing: Part III. Intending to ask lineal, circular, strategic, or reflexive questions? *Family process*, 27 (1), 1–15.

270. Torbeyns, J. & Verschaffel, L. (2013). Efficient and flexible strategy use on multi-digit sums: A choice/no-choice study. *Research in Mathematics Education*, 15, 129–140.
271. Torbeyns, J., De Smedt, B., Ghesquiere, P. & Verschaffel, L. (2009). Acquisition and use of shortcut strategies by traditionally schooled children. *Educational Studies in Mathematics*, 71, 1–17.
272. Torbeyns, J., Verschaffel. L., & Ghesquiere, P. (2006). The development of children's adaptive expertise in the number domain 20 to 100. *Cognition and Instruction*, 24 (4), 439–465.
273. Turner, F. (2008). Beginning elementary teachers' use of representations in mathematics teaching. *Research in Mathematics Education*, 10, 209–210.
274. Ulleberg, I. & Solem, I. H. (2018). Which questions should be asked in classroom talk in mathematics? Presentation and discussion of a questioning model. *Acta Didactica Norge*, 12 (1), 1–21.
275. Ursini, S. & Trigueros, M. (2009). In search of characteristics of successful solution strategies when dealing with inequalities. In: M. Tzekaki, M. Kaldrimidou & H. Sakonidis (Eds.). *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Vol. 5 (265–272). Thessaloniki, Greece: PME.
276. Uttal, D. H., Scudder, K. V. & DeLoache, J. S. (1997). Manipulatives as symbols: A new perspective on the use of concrete objects to teach mathematics. *Journal of Applied Developmental Psychology*, 18, 37–54.
277. Van de Walle, J. A., Karp, K. S. & Bay-Williams, J. M. (2013). *Elementary and middle school mathematics: Teaching developmentally (8th ed.)*. Upper Saddle River, NJ: Pearson.
278. Van den Heuvel-Panhuizen, M. (Ed.) (2001). *Children learn mathematics.* Utrecht/Enschede: Freudenthal Institute, Utrecht University.
279. Van Den Heuvel-Panhuizen, M. (2003). The didactical use of models in realistic mathematics education: An example from a longitudinal trajectory on percentage. *Educational Studies in Mathematics*, 54 (1), 9–35.
280. Van Den Heuvel-Panhuizen, M. (2005). The role of contexts in assessment problems in mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 25 (2), 2–23.
281. Van der Schoot, M., Bakker, A. H., Horsley, T. M. & Van Lieshout, E. D. C. M. (2009). The consistency effect depends on markedness in less successful but not successful problem solvers: An eye movement study in primary school children. *Contemporary Educational Psychology*, 34, 58–66.

282. Van Dijk, I. M. A. W., Van Oers, B. & Terwel, J. (2003). Providing or designing? Constructing models in primary maths education. *Learning and Instruction*, 13 (1), 53–72.
283. Van Dooren, W., De Bock, D., Hessels, A., Janssens, D. & Verschaffel, L. (2005). Not everything is proportional: Effects of age and problem type on propensities for overgeneralization. *Cognition and Instruction*, 23, 57–86.
284. Van Dooren, W., De Bock, D., Vleugels, K. & Verschaffel, L. (2010). Just answering ... or thinking? Contrasting pupils' solutions and classifications of missing-value word problems. *Mathematical Thinking and Learning*, 12 (1), 20–35.
285. Van Dooren, W., Verschaffel, L. & Onghena, P. (2002). The impact of preservice teachers' content knowledge on their evaluation of students'strategies for solving arithmetic and algebra word problems. *Journal for Research in Mathematics Education*, 33 (5), 319–351.
286. Van Garderen, D. & Montague, M. (2003). Visual–spatial representation, mathematical problem solving, and students of varying abilities. *Learning Disabilities Research & Practice*, 18, 246–254.
287. Van Garderen, D. (2007). Teaching students with LD to use diagrams to solve mathematical word problems. *Journal of Learning Disabilities*, 40 (6), 540–553.
288. Van Garderen, D. (2006). Spatial visualization, visual imagery, and mathematical problem solving of students with varying abilities. *Journal of Learning Disabilities*, 39 (6), 496–506.
289. Van Oers, B. (2001). Contextualisation for abstraction. *Cognitive Science Quarterly*, 1 (3/4), 279–306.
290. Vauras, M., Kinnunen, R. & Rauhanummi, T. (1999). The role of metacognition in the context of integrated strategy intervention. *European Journal of Psychology of Education*, 555–569.
291. Verschaffel, L., De Corte, E. & Lasure, S. (1994). Realistic considerations in mathematical modeling of school arithmetic word problems. *Learning and Instruction*, 4, 273–294.
292. Verschaffel, L. & De Corte, E. (1997). Teaching Realistic Mathematical Modeling in the Elementary School: A Teaching Experiment With Fifth Graders. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28 (5), 577–601.
293. Verschaffel, L., De Corte, E. & Vierstraete, H. (1999a). Upper Elementary School Pupils' Difficulties in Modeling and Solving Nonstandar-

dAdditive Word Problems Involving Ordinal Numbers. *Journal for Research in Mathematics Education*, 30 (3), 265–285.
294. Verschaffel, L., De Corte, E., Lasure, S., Van Vaerenbergh, G., Bogaerts, H. & Ratinck, E. (1999b). Learning to solve mathematical application problems: A design experiment with fifth graders. *Mathematical Thinking and Learning*, 1, 195–229.
295. Verschaffel, L., Greer, B. & De Corte, E. (2000). *Making sense of word problems*. Lisse, The Netherlands: Swets & Zeitlinger.
296. Verschaffel, L., Greer, B. & Torbeyns, J. (2006). Numerical thinking. In: A. Gutierrez & P. Boero (Eds.). *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future* (51–82). Rotterdam: Sense Publishers.
297. Verschaffel, L., Greer. B. & De Corte, E. (2007). Whole number concepts and operations. In: F. K. Lester (Ed.). *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (557–628). Greenwich. CT: Information Age Publishing.
298. Verschaffel, L., Greer, B., Van Dooren W. & Mukhopadhyay, S. (Eds.) (2009a). *Words and Worlds Modelling Verbal Descriptions of Situations.* Rotterdam: Sense Publishers.
299. Verschaffel, L., Luwel, K., Torbeyns, J. & Van Dooren, W. (2009b). Conceptualizing, investigating, and enhancing adaptive expertise in elementary mathematics education. *European Journal of Psychology of Education*, 24 (3), 335–359.
300. Verschaffel, L., Van Dooren, W., Greer, B. & Mukhopadhyay, S. (2010a). Reconceptualising Word Problems as Exercises in Mathematical Modelling. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 31 (1), 9–29.
301. Verschaffel. L., Torbeyns. J., De Smedt. B., Peters, G. & *Ghesquière*. P. (2010b). Solving subtraction problems flexibly by means of indirect addition. In: R. Cowan, M. Saxton & A. Tolmie (Eds.). *Special issue of the British journal of educational psychology*. Understanding number development and difficulties [Monograph]. 2 (7). 51–63. The British Psychological Society.
302. Verschaffel, L., Schukajlow, S., Star, J. & Van Dooren, W. (2020). Word problems in mathematics education: a survey, *International Journal on Mathematics Education* , 52, 1–16.
303. Voyer, D. (2011). Performance in mathematical problem solving as a function of comprehension and arithmetic skills. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 9 (5), 1073–1092.

304. Wilson, P. S., Cooney, T. J. & Stinson, D. W. (2005). What constitutes good mathematics teaching and how it develops: Nine high school teachers' perspectives. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 8 (2), 83–111.
305. Wilson, S. M. (2003). *California dreaming: Reforming mathematics education*. New Haven, CT: Yale University Press.
306. Wood, T. (1995). From alternative epistemologies to practice in education: What it means to teach and learn. In: L. P. Steffe & J. Gale (Eds.). *Constructivism in education* (331–339). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.
307. Wood, T., Cobb, P. & Yackel, E. (1995). Reflections on learning and teaching mathematics. In: L. P. Steffe & J. Gale (Eds.). *Constructivism in education* (401–422). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.
308. Woodward, J. (2006). Developing automaticity in multiplication facts integrating strategy instruction with timed practice drills. *Learning Disability Quarterly*, 29, 269–289.
309. Wyndhamn, J. & Saljo, R. (1997). Word problems and mathematical reasoning-A study of children's mastery of reference and meaning in textual realities. *Learning and Instruction*, 7, 361–382.
310. Yang, D. C. (2005). Number sense strategies used by sixth grade students in Taiwan. *Educational Studies*, 31 (3), 317–334.
311. Yang, D. C. & Huang, K. L. (2014). An intervention study on mental computation for second graders in Taiwan. *The Journal of Educational Research*, 107, 3–15.
312. Yoshida, H., Verschaffel, L. & De Corte, E. (1997). Realistic considerations in solving problematic word problems: Do Japanese and Belgian children have the same difficulties? *Learning and Instruction*, 7, 329–338.
313. Zeljić, M. (2007). *Načini izražavanja procedura i pravila aritmetike.* Beograd: Učiteljski fakultet.
314. Zeljić, M. (2013). Metodički pristup nejednačinama u udžbenicima za treći razred osnovne škole. *Inovacije u nastavi*, 26 (3), 24–35.
315. Zeljić, M. (2014). *Metodički aspekti rane algebre*. Beograd: Učiteljski fakultet.
316. Zeljić, M. & Dabić, M. (2014). Odnos proceduralnog i konceptualnog znanja učenika u procesu ovladavanja postupcima računanja u početnoj nastavi matematike. *Nastava i vaspitanje*, 63 (4), 653–668.

317. Zeljić, M. (2015). Modelling the Relationships Between Quantities: Meaning in Literal Expressions. *Eurasia journal of mathematics science and technology education*, 11 (2), 431–442.
318. Zeljić, M., Đokić, O. & Dabić, M. (2016). Teachers' beliefs towards the various representations in mathematics instruction. In: C. Csíkos, A. Rausch & J. Szitányi (Eds.). *Proceedings of the 40th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Vol. 4 (403–410) Szeged, Hungary: PME.
319. Zeljić, M., Đokić, O. & Vujisić Živković, N. (2016). The role of practical experience in developing criteria for evaluation of pre-service teachers' lessons of mathematics. In: Z. Zacłona & I. Radovanović (Eds.). *The perspective of theory and practice* (97–108). State Higher Vocational School in Nowy Sącz, Institute of Pedagogy.
320. Zeljić, M., Ilić, S. & Jelić, M. (2017). Mentalna aritmetika – strategije oduzimanja. *Inovacije u nastavi*, 30 (4), 49–61.
321. Zeljić, M. & Dabić Boričić, M. (2018). Razumevanje konteksta problema. U: S. Marinković (ur.). Jezik, kultura, obrazovanje (639–650), Užice: Pedagoški fakultet.
322. Zeljić, M., Dabić Boričić, M. & Đokić, O. (2019). Multiplication strategies: progressive development and (or) systematic teaching. In: J. Novotna & H. Moraova (Eds.). *Opportunities in Learning and Teaching Elementary Mathematics* (418–427).
323. Zeljić, M. & Ivančević, M. (2019). Algoritamski i konceptualni pristup merenju površine figura. *Inovacije u nastavi*, 32 (1), 64–74.
324. Zeljić, M. & Dabić Boričić, M. (2020). Udžbenik u funkciji razvoja multiplikativnog mišljenja. U: Z. Opačić & G. Zeljić (ur.). Programske (re)forme u obrazovanju i vaspitanju – izazovi i perspektive (393–405). Beograd: Učiteljski fakultet.
325. Zeljić, M., Dabić Boričić, M. & Maričić, S. (2021). Problem Solving in Realistic, Arithmetic/algebraic and Geometric Context. *Education and science* (In the press).
326. Zhang, Y. & Patrick, P. (2012). Introducing Questioning Techniques to Pre-service Teachers. *Journal of Teacher Education and Educators*, 1 (2), 159–184.
327. Zhe, L. (2012). Survey of Primary Students ' Mathematical Representation Status and Study on the Teaching Model of Mathematical Representation. *Journal of Mathematics Education*, 5 (1), 63–76.

Маријана Зељић
УЧЕЊЕ И ПОУЧАВАЊЕ МАТЕМАТИКЕ –
ЈЕДНАКОСТ СА ВИШЕ (НЕ)ПОЗНАТИХ

Прво издање, 2021. година

Издавач
Учитељски факултет
Београд, Краљице Наталије 43
www.uf.bg.ac.rs

За издавача
проф. др Данимир Мандић, декан

Лектор и коректор
проф. др Горан Зељић

Графички уредник
Зоран Тошић

Штампа
Планета принт, Београд

Тираж
100 примерака

ISBN 978-86-7849-295-2

ЕДИЦИЈА СТУДИЈЕ

1. Биљана Требјешанин: Мотивација за учење – теорије, принципи, примена
2. Милица Радовић Тешић: С речима и речником
3. Аурел Божин: Божанска деца – прилози психологији
4. даровитости
5. Рајна Драгићевић: Лексикологија и граматика у школи, методички огледи
6. Сефедин Шеховић: Дидактика – теорија учења и поучавања
7. Ана Вујовић: Франкофонија у свету и код нас
8. Јасмина Милинковић: Огледи о учењу и настави математике
9. Зона Мркаљ: Од буквара до читанки (методичка истраживања)
10. Зорана Опачић: (Пре)обликовање детињства
11. Горан Зељић: Правопис и књижевнојезичка норма
12. **Маријана Зељић: Учење и поучавање математике – једнакост са више (не)познатих**

CIP - Каталогизација у публикацији
Народна библиотека Србије, Београд

37.091.3::51

ЗЕЉИЋ, Маријана, 1974-

Учење и поучавање математике - једнакост са више (не)познатих / Маријана Зељић. - 1. изд. - Београд : Учитељски факултет, 2021 (Београд : Планета принт). - 258 стр. : илустр. ; 21 cm. - (Едиција Студије / [Учитељски факултет, Београд] ; књ. 12)

Тираж 100. - Библиографија: стр. 231-258. - Регистар.

ISBN 978-86-7849-295-2

а) Математика -- Настава -- Методика

COBISS.SR-ID 42589961