

UNIVERZITET U BEOGRADU
RUDARSKO – GEOLOŠKI FAKULTET

Miloš V. Gligorić

**STRATEŠKO PLANIRANJE PROIZVODNJE
KOD KOMORNO – STUBNE METODE
OTKOPAVANJA U USLOVIMA
NEODREĐENOSTI**

Doktorska Disertacija

Beograd, 2020

UNIVERSITY OF BELGRADE
FACULTY OF MINING AND GEOLOGY

Miloš V. Gligorić

**STRATEGIC ROOM AND PILLAR MINE
PRODUCTION PLANNING WITH
UNCERTAINTY**

Doctoral Dissertation

Belgrade, 2020

Mentor:

Dr Čedomir Beljić, redovni profesor
Univerzitet u Beogradu, Rudarsko – geološki fakultet

Članovi komisije:

Dr Čedomir Beljić, redovni profesor
Podzemna eksploatacija ležišta mineralnih sirovina
Univerzitet u Beogradu, Rudarsko – geološki fakultet

Dr Suzana Lutovac, vanredni profesor
Rudarski radovi, izrada podzemnih prostorija i rudarski materijali
Univerzitet u Beogradu, Rudarsko – geološki fakultet

Dr Nebojša Bojović, redovni profesor
Organizacija i menadžment u saobraćaju i transportu
Univerzitet u Beogradu, Saobraćajni fakultet

Datum odbrane: _____

Sažetak

Glavni cilj planiranja proizvodnje je težnja za postizanjem što veće profitabilnosti kompanije koja neminovno posluje u promenljivim i neizvesnim uslovima. Planiranje proizvodnje podzemnog rudnika igra ključnu aktivnost u poslovanju rudarske kompanije. To je potkrepljeno činjenicom da je mineralna industrija jedinstvena i nestabilna sredina.

Postoje dva neizvesna parametra kojima ne mogu upravljati planeri, a to su: cena metala i operativni troškovi. Oscilacija ova dva parametra može se očekivati na godišnjem, mesečnom, nedeljnom a u nekim slučajevima i na dnevnom nivou. Stoga je od izuzetne važnosti inkorporacija ovih oscilirajućih parametara u proces planiranja proizvodnje čime se postižu mnogo realniji i objektivniji rezultati. Sposobnost da se ovi parametri kvantifikuju i inkorporiraju u proces planiranja proizvodnje može pomoći kompanijama da posluju na mnogo lakši način. Kvantifikujemo ova dva neizvesna parametra procesom simulacije povratka na srednju vrednost odnosno Itô-Doob stohastičkom diferencijalnom jednačinom.

Rudno ležište je predstavljeno skupom blokova a kao način otkopavanja je odabrana komorno – stubna metoda otkopavanja. Algoritam višekriterijumskog klasterisanja je korišćen za kreiranje oblasti unutar rudnog ležišta koje imaju tehnološke karakteristike zahtevane od strane planera. Te oblasti unutar rudnog ležišta nazivaju se tehnološkim eksploatacionim poljima (*TEP* – ovi). Svaki kreirani *TEP* mora da ispuni zahtevane tehnološke karakteristike rudnog ležišta a to su: godišnji kapacitet proizvodnje, kompaktnost oblika *TEP* – a i standardnu devijaciju sadržaja korisne mineralne sirovine.

Takođe smo razvili način da prognoziramo nestabilnost ekonomskih vrednosti ovih oblasti kroz vreme planiranja. Model fazi 0 – 1 linearnog programiranja je korišćen za definisanje redosleda otkopavanja ovih oblasti maksimizacijom očekivane vrednosti fazi budućeg novčanog toka. Model je testiran na malom hipotetičkom olovo – cink rudnom ležištu i rezultati su pokazali da je naš pristup sposoban da reši tako složen problem.

Ključne reči: podzemni rudnik, planiranje proizvodnje, fazi linearno programiranje, particija grafova, stohastičke diferencijalne jednačine, fazi K – sredina

Naučna oblast: Rudarsko inženjerstvo

Uža naučna oblast: Podzemna eksploatacija ležišta mineralnih sirovina

UDK broj:

004.43:005.1:311:005.3

330.34

510.64+512.53:519.245/.856

622:622.172

658.5(043.3)

Abstract

The main aim of the production planning is tendency to maximize the profitability of the company that inevitably operates under changing and uncertain conditions. Production planning in an underground mine plays a key activity in the mining company business. It is supported by the fact that mineral industry is unique and volatile environment.

There are two uncertain parameters that cannot be managed by planners, metal price and operating costs. The oscillation of these two parameters can be expected on a annual, monthly, weekly and in some cases daily level. Therefore, the incorporation of these oscillated parameters into production planning process is of the great importance for achieving much more realistic and objective results. Having ability to quantify and incorporate them in the process of planning can help companies to do their business in much easier way. We quantify these uncertainties by the simulation of mean reverting process and Itô-Doob stochastic differential equation respectively.

Mineral deposit is represented as a set of mineable blocks and room and pillar mining method is selected as a way of mining. Multi-criteria clustering algorithm is used to create areas inside of mineral deposit that have technological characteristics required by the planners. These areas inside of mineral deposit are called technological mining cuts (*TMCs*). Each of created *TMC* must fulfill required technological characteristics of the mineral deposit such as annual capacity of production, compactness of the shape of *TMC* and standard deviation of the ore grade in *TMC*.

We also developed a way to forecast the volatility of economic values of these areas through the planning period. Fuzzy 0-1 linear programming model is used to define the sequence of mining of these areas by maximization the expected value of the fuzzy future cash flow. Model was tested on small hypothetical lead-zinc mineral deposit and results showed that our approach was capable to solve such complex problem.

Keywords: underground mine, production planning, fuzzy linear programming, graph partitioning, stochastic differential equations, fuzzy C-mean

Scientific field: Mining engineering

Scientific subfield: Underground mining

UDC:

004.43:005.1:311:005.3

330.34

510.64+512.53:519.245/.856

622:622.172

658.5(043.3)

Sadržaj

Spisak simbola i skraćenica.....	ii
Spisak slika i grafikona.....	iv
Spisak tabela.....	v
1. UVOD.....	1
1.1 Pregled literature	1
1.2 Predmet istraživanja, ciljevi i polazne hipoteze.....	3
1.3 Metode istraživanja	4
1.4 Postignuti naučni rezultati.....	4
1.5 Organizacija teze.....	4
2. KOMORNO – STUBNA METODA OTKOPAVANJA.....	6
3. OSNOVNI KONCEPTI TROUGLASTIH FAZI BROJEVA I ARITMETIČKE OPERACIJE.....	9
4. OSNOVNI KONCEPTI FAZI LINEARNOG PROGRAMIRANJA	14
5. MODEL PLANIRANJA PROIZVODNJE	18
6. FAZI VIŠEKRITERIJUMSKI ALGORITAM POLIGONALNOG PROSTORNOG KLASTERISANJA	19
6.1 Opis fazi TOPSIS metode u kontekstu klasterisanja	20
6.2 Prostorna homogenost TEP – a.....	24
6.3 Pojava „kradje“ u algoritmu klasterisanja.....	24
6.4 Pojava zastoja u algoritmu klasterisanja („ćorsokak“)	25
6.5 Kreiranje vektora atributa bloka, vektora atributa tehnološkog eksploatacionog polja i zahtevanog tehnološkog vektora	26
6.6 Proračun vrednosti tehnološkog eksploatacionog polja TEP - a u odnosu na (zahtevane) tehnološke kriterijume.....	28
6.7 Teorija grafova u kontekstu klasterisanja i algoritam kreiranja TEP – a.....	29
7. MODEL PROGNOZE CENE METALA I OPERATIVNIH TROŠKOVA.....	32
7.1 Fazi K – sredina algoritam klasterisanja	32
7.2 Lingvističke promenljive i njihova transformacija u trouglaste fazi brojeve i odgovarajuće kodove opsega.....	34
7.3 Stohastički difuzni proces	35
7.4 Stohastički sistemi.....	36
7.5 Simulacija cena metala.....	37
7.6 Simulacija operativnih troškova.....	41
8. DISKONTOVANA EKONOMSKA VREDNOST TEP – a.....	44
9. NUMERIČKI PRIMER	46
9.1 Proračun vrednosti klastera odnosno tehnološkog eksploatacionog polja u odnosu na ciljane vrednosti kriterijuma	50
9.2 Dvostepeni fazi TOPSIS	51
9.3 Grafički prikaz particije rudnog tela (ležišta)	55
9.4 Grafički prikaz konvergencije standardne devijacije olova i cinka	59
9.5 Realizovane vrednosti atributa tehnološkog eksploatacionog polja	61
9.6 Definisanje ekonomskih vrednosti svakog tehnološkog eksploatacionog polja.....	62
10. ZAKLJUČAK.....	71
LITERATURA	72
Biografija	
Prilog 1. Izjava o autorstvu	
Prilog 2. Izjava o istovetnosti štampane i elektronske verzije doktorskog rada	
Prilog 3. Izjava o korišćenju	

Spisak simbola i skraćenica

TEP – tehnološko eksploataciono polje

$TOPSIS$ – Tehnika za redosled prioriteta prema sličnosti sa idealnim rešenjem

$CPSC$ – Ograničeno poligonalno prostorno klasterisanje

$\tilde{F}$ – fazi funkcija cilja

$\tilde{v}_{it}^d$ – fazi sadašnja vrednost tehnološkog eksploatacionog polja, diskontovana vrednost

$\tilde{v}_{it}$ – fazi ekonomska vrednost tehnološkog eksploatacionog polja u vremenu t

x_{it} – binarna promenljiva, koja je jednaka 1 ako i samo ako se tehnološko eksploataciono polje i otkopava u vremenu t

N – broj tehnoloških eksploatacionih polja uključenih u planiranje. Jednak je broju godina eksploatacije (T)

S – skup tehnoloških eksploatacionih polja koji nisu dostupni iz x_{it} , tj. ovaj skup je sastavljen od “nesusednih” tehnoloških eksploatacionih polja

$\tilde{d}$ – fazi diskontna stopa

T – vreme planiranja

$\tilde{I}$ – fazi kapitalna investicija (kapitalni troškovi)

B – skup eksploatacionih blokova

VAB – vektor atributa bloka

H – ukupan broj blokova

A – ukupan broj atributa

$VATEP$ – vektor atributa tehnološkog eksploatacionog polja

K – ukupan broj atributa i jednak je ukupnom broju tehnoloških kriterijuma

C – vektor tehnološkog kriterijuma

$KORB$ – konačna relativna blizina

$f(a_{ic})$ – konačna relativna blizina ($KORB$) i – tog tehnološkog eksploatacionog polja do pozitivnog idealnog tehnološkog rešenja, uzimajući u obzir sve tehnološke kriterijume

a_c^l – je donja granična vrednost c – tog tehnološkog kriterijuma

a_c^u – je gornja granična vrednost c – tog tehnološkog kriterijuma

C^{zah} – zahtevani tehnološki vektor

$\tilde{x}_{ij}$ – proračunata vrednost tehnološkog eksploatacionog polja

KRB – koeficijent relativne blizine

TEP^{rast} – TEP koji treba da raste (izabrani klaster)

b^{dod} – blok koji treba da bude dodat izabranom klasteru (TEP^{rast})

KRB_M^{dod} – koeficijent nove relativne blizine novog TEP – a dobijen dodavanjem m – tog susednog bloka izabranom klasteru TEP^{rast} a susedni blok je blok koji ima makar jednu zajedničku ivicu sa TEP^{rast}

O_M^{dod} – funkcija penalizacije ili funkcija “troška”

M – broj susednih eksploatacionih blokova

$\tilde{\varphi}_{mj}$ – nova procenjena vrednost izabranog klastera u odnosu na tehnološki kriterijum

B^{pre} – broj eksploatacionih blokova koji okružuju TEP^{rast} pre dodavanja m – tog bloka

B_m^{posle} – broj eksploatacionih blokova koji okružuju TEP^{rast} posle dodavanja m – tog bloka

B_m^{zaj} – broj zajedničkih ivica između TEP^{rast} i bloka koji se dodaje

B_m^{zip} – broj zajedničkih ivica između bloka koji se dodaje i preostalih TEP – ova

B_m^{jal} – broj zajedničkih ivica između bloka koji se dodaje i jalovinskih blokova. Jalovinski blok je blok koji ne sadrži korisnu mineralnu sirovinu

$\tilde{a}_1^h$ – rezerve rude u bloku h (t), izražena kao trouglasti fazi broj

$a_{2,\gamma}^h$ – sadržaj h – tog bloka u odnosu na γ – ti metal (%)

γ – ukupan broj koncentrata sadržanih u rudi. Za polimetaličnu rudu, $\gamma > 1$

$\tilde{a}_{i1}$ – rezerve rude u TEP – u (t), izražena kao trouglasti fazi broj

a_{i2} – kompaktnost TEP – a
 $a_{i,3,\gamma}$ – standardna devijacija kvaliteta rude u TEP – u, u odnosu na γ – ti metal (%)
 P_i – obim i – tog TEP – a
 A_i – površina i – tog TEP – a
 l_i – ukupan broj blokova i – tog TEP – a
 b_e – dužina ivice bloka (m)
 $\tilde{c}_1^{zah}$ – godišnji kapacitet proizvodnje ($t/year$), izražen kao trouglasti fazi broj
 c_2^{zah} – željena ili ciljana kompaktnost TEP – a, definisana vrednošću 16
 $c_{3,\gamma}^{zah}$ – standardna devijacija kvaliteta rude, u odnosu na γ – ti metal
 $\tilde{C}_1$ – apsolutno rastojanje između godišnjeg kapaciteta proizvodnje i rezerve rude u TEP – u (t)
 C_2 – apsolutno rastojanje između ciljane vrednosti kompaktnosti i kompaktnosti TEP – a
 $C_{3,\gamma}$ – standardna devijacija kvaliteta rude u TEP – u u odnosu na γ – ti metal (%)
 RL – rudno ležište
 E – skup zajedničkih ivica blokova
 $NTEP$ – najbolje tehnološko eksploataciono polje za rast
 SB – lista susednih eksploatacionih blokova koji su kandidati za rast
 $NOVTEP$ – novo tehnološko eksploataciono polje
 P – mesečna vremenska serija praćenih cena metala
 Y – vektor koda opsega definisan na mesečnoj vremenskoj seriji praćenih cena metala
 $\bar{z}_m$ – dugoročna ravnoteža fazi stanja izražena preko odgovarajuće vrednosti koda opsega
 α – brzina povratka srednje vrednosti ka dugoročnoj ravnoteži vrednosti koda opsega
 σ – stopa devijacije koda opsega
 dW – inkrement (priraštaj) standardnog Braunovog kretanja
 $\Delta\tau$ – konstantan vremenski interval od τ do $\tau + 1$, jedan mesec
 $N(0,1)$ – normalna raspodela slučajne promenljive
 μ – trend (mera srednjeg rasta)
 σ_c – volatilnost (nestabilnost)
 W_τ – normalizovano Braunovo kretanje
 $\tilde{p}_m^{st}$ – jedinična prodajna cena metala u vremenu τ i simulacije s izražene kao trouglasti fazi broj (\$/t)
 m^{con} – sadržaj metala u koncentratu (%)
 m^{mr} – iskorišćenje u topionici (%)
 $|\tilde{V}^h|_{S \times T}^{sim}$ – ekonomska vrednost eksploatacionog bloka
 M_γ – iskorišćenje u flotaciji γ – tog metala (%)
 $\tilde{V}_t^h$ – očekivana ekonomska vrednost eksploatacionog bloka kroz vreme planiranja
 $|(\tilde{V}_t^h)^d|$ – diskontovana očekivana ekonomska vrednost eksploatacionog bloka za svaku godinu

Spisak slika i grafikona

Slika 1. Komorno – stubna metoda otkopavanja (preuzeto i modifikovano) [17].....	6
Slika 2. Komorno – stubna metoda otkopavanja (preuzeto i modifikovano) [18].....	6
Slika 3. Komorno stubna metoda (preuzeto i modifikovano) [21]	7
Slika 4. Oblik i dimenzije stubova (preuzeto i modifikovano) [21]	8
Slika 5. Grafički prikaz ograničenja	15
Slika 6. Prostorni plan TEP – ova	24
Slika 7. Krađa bloka od susednog klastera (TEP – a).....	25
Slika 8. Zastoj odnosno „ćorsokak“ algoritma klasterisanja.....	26
Slika 9. Jedan simuliran put evolucije vrednosti koda opsega na mesečnom rasponu	41
Slika 10. Raspodela vrednosti koda opsega dobijenih nakon 500 simulacija (20 – ti mesec).....	41
Slika 11. Rudno telo sa pravilnim izgledom i rasporedom kvadratnih stubova	46
Slika 12. Raspodela kvaliteta rude Pb i Zn (%)	47
Slika 13. Početni (inicijalni) TEP – ovi (semena).....	56
Slika 14. Rezultati algoritma nakon: a) 25 – e iteracije. b) 50 – iteracije. c) 75 – e iteracije. d) 100 – e iteracije. e) 125 – e iteracije. f) 150 – iteracije. g) 175 – e iteracije. h) 200 – iteracije. i) 225 – e iteracije.....	58
Slika 15. Konačna particija (podela) rudnog tela.....	59
Slika 16. Konvergencija standardne devijacije kvaliteta olova i cinka u TEP – u	60
Slika 17. Praćene cene metala na mesečnom nivou: a) Olovo b) Cink	63
Slika 18. Lingvističke promenljive izražene kao trouglasti fazi brojevi: a) olovo, b) cink	64
Slika 19. Praćene serije izražene preko fazi stanja i kodova opsega: a) fazi stanje cene olova, b) kod opsega cene olova, c) fazi stanje cene cinka, d) kod opsega cene cinka	65
Slika 20. Jedan mogući veštački scenario ekonomske vrednosti bloka 1	67
Slika 21. Očekivane ekonomske vrednosti bloka 1 – mesečni nivo	68
Slika 22. Prognozirane ekonomske vrednosti bloka 1 – godišnji nivo	68
Slika 23. Sadašnje ekonomske vrednosti bloka 1	68
Slika 24. Sadašnje ekonomske vrednosti TEP – ova na nivou godine	69
Slika 25. Optimalan plan proizvodnje.....	70

Spisak tabela

Tabela 1. Transformacija lingvističkih promenljivih u trouglaste fazi brojeve i kod opsega.....	35
Tabela 2. Ulazni parametri.....	48
Tabela 3. Rezerve eksploatacionih blokova.....	49
Tabela 4. Ulazni parametri TOPSIS metode u prvom stepenu	52
Tabela 5. Matrica odlučivanja.....	52
Tabela 6. Normalizovana matrica odlučivanja	52
Tabela 7. Normalizovana fazi težinska matrica odlučivanja	53
Tabela 8. Matrica fazi pozitivnog i fazi negativnog idealnog rešenja	53
Tabela 9. Rastojanje od svakog TEP – a do fazi pozitivnog idealnog rešenja	53
Tabela 10. Rastojanje od svakog TEP – a do fazi negativnog idealnog rešenja.....	53
Tabela 11. Koeficijent relativne blizine svakog TEP – a do idealnih rešenja	54
Tabela 12. Ulazni parametri TOPSIS metode u drugom stepenu	54
Tabela 13. Matrica odlučivanja.....	54
Tabela 14. Normalizovana matrica odlučivanja	54
Tabela 15. Normalizovana fazi težinska matrica odlučivanja	54
Tabela 16. Matrica fazi pozitivnog i fazi negativnog idealnog rešenja	55
Tabela 17. Rastojanje od svakog potencijalnog bloka do fazi pozitivnog idealnog rešenja.....	55
Tabela 18. Rastojanje od svakog potencijalnog bloka do fazi negativnog idealnog rešenja	55
Tabela 19. Koeficijent relativne blizine svakog potencijalnog bloka do idealnih rešenja.....	55
Tabela 20. Rezerve rude i kompaktnost TEP – a.....	61
Tabela 21. Karakteristike kvaliteta rude u TEP – u	62
Tabela 22. Klase centara cene metala	63
Tabela 23. Transformacija lingvističkih promenljivih.....	64
Tabela 24. Parametri simulacije.....	66
Tabela 25. Sadašnje ekonomske vrednosti TEP – ova.....	69

1. UVOD

Glavni cilj ovog rada je da pruži efikasnu podršku za donošenje odluke prilikom planiranja proizvodnje u podzemnom rudniku gde se otkopavanje ležišta vrši komorno – stubnom metodom. Model je baziran na maksimizaciji fazi funkcije cilja koja predstavlja sadašnju ili diskontovanu vrednost budućeg novčanog toka plana proizvodnje, uzimajući u obzir skup ograničenja. Ovaj problem razmatramo kao problem 0 – 1 linearnog programiranja kod koga su samo koeficijenti u funkciji cilja predstavljeni kao trouglasti fazi brojevi. Koeficijenti predstavljaju diskontovanu ekonomsku vrednost tehnološkog eksploatacionog polja (u daljem tekstu: *TEP*) koje je deo rudnog ležišta a okarakterisano je u odnosu na dati skup tehnoloških ograničenja kao što su: godišnji kapacitet proizvodnje, kompaktnost oblika *TEP* – a i standardna devijacija kvaliteta rude u *TEP* – u. Ukupan broj *TEP* – ova jednak je ukupnom broju godina proizvodnje.

Prvi korak u modelu planiranja proizvodnje rudnika se odnosi na kreiranje *TEP* – ova koja imaju vrednosti atributa približne vrednostima tehnoloških zahteva. U svrhu kreiranja takvih *TEP* – ova (klastera) razvili smo fazi višekriterijumski algoritam klasterisanja gde su neodređenosti nekih ulaznih podataka prikazane kao trouglasti fazi brojevi. Rudarski inženjeri koriste blok model ležišta da predstave ležište kao trodimenzionalni niz blokova (3D prikaz). U skladu sa tim, algoritam klasterisanja je primenjen na skupu ovih blokova. Drugi korak se bavi proračunom diskontovane ekonomske vrednosti *TEP* – ova. To ukazuje da smo suočeni sa dinamičkim problemom koji je opterećen nekim neodređenostima. Ove neodređenosti su u prvom redu cena metala i fluktuacija operativnih troškova tokom vremena planiranja. Za procenu budućeg stanja cene metala, razvili smo algoritam prognoze koji predstavlja hibrid fazi K – sredina algoritma klasterisanja i stohastičkog difuznog procesa nazvanog procesom povratka na srednju vrednost. Ovaj algoritam određuje buduće stanje cene metala preko fazi serija. Operativni troškovi su modelirani preko Itô-Doob stohastičke diferencijalne jednačine. Primenom istovremene simulacije ova dva parametra možemo da procenimo očekivanu fazi vrednost svakog tehnološkog eksploatacionog polja za svaku godinu u vremenu planiranja. Nakon toga proračunavamo ove vrednosti preko fazi diskontne stope i definišemo vrednosti koeficijenata funkcije cilja. Rešenje fazi funkcije cilja daje poredak otkopavanja *TEP* – ova.

Svi razvijeni modeli planiranja proizvodnje rudnika bili su bazirani na 0 – 1 linearnom programiranju pri čemu su bile primenjene različite metode za pronalaženje ekstremne vrednosti linearne funkcije cilja, kao što su na primer Simpleks metoda, Simulirano kaljenje, Algoritam grananja i ograničenja, Optimizacija mravlje kolonije, Neuronske mreže itd. Primenili smo 0 – 1 linearno programiranje da bismo inkorporirali neodređenosti u funkciju cilja i napravili problem planiranja proizvodnje mnogo realnijim. Na ovaj način, povećava se preciznost dobijenih rezultata. Ako uzmemo u obzir da planiranje proizvodnje rudnika pripada oblasti donošenja odluke tada nam fazi model zaista pomaže da donesemo odluku na mnogo efikasniji način.

Predloženi model je matematički prikaz stvarnog poslovanja rudnika i omogućava rukovodstvu rudarske kompanije da prevaziđe dinamičku optimizaciju poslovanja u uslovima neodređenosti. To pomaže kompaniji da preživi u veoma rizičnom okruženju.

1.1 Pregled literature

Sigurno, investiciono okruženje udruženo sa rudarskom industrijom je jedinstveno u poređenju sa okruženjem u kojima posluju tipične proizvodne industrije. Neke od karakteristika koje se često naglašavaju kao jedinstvene su sledeće. Praktično svaki posmatrač koji je upoznat sa tim bi se složio da su rudarski poduhvati izuzetno skupi. Čak i izuzetno mali rudnici plemenitih metala sa visokim kvalitetom rude koji zapošljavaju mali broj rudara retko se mogu otvoriti za manje od milion dolara. Vreme potrebno za otvaranje rudnika i pokretanje proizvodnje može značajno da varira. Nakon što

je ležište dobro istraženo, potrebno je nekoliko godina intenzivnog napora pre nego što se počne sa njegovim otkopavanjem i uspostavi kontinualna proizvodnja. Pored očiglednih rizika koji su povezani sa veoma visokim novčanim sredstvima i dugim predproizvodnim periodom, postoje i drugi brojni rizici povezani sa rudarskim poduhvatima. Uopšteno, ovi rizici mogu biti svrstani u opšte grupacije kao što su: geološki rizici, inženjerski rizici, ekonomski rizici i politički rizici. Možda je najupečatljiviji aspekt rudarske industrije činjenica da se ona bavi eksploatacijom neobnovljivog resursa [1].

Ako uzmemo u obzir sve ove karakteristike rudarske industrije, možemo da zaključimo da je planiranje proizvodnje suštinska aktivnost koja pomaže rudarskim kompanijama da posluju u takvom okruženju. Planiranje je problem optimizacije gde je traženje globalnog optimalnog rešenja vrlo težak i vremenski zahtevan zadatak. Postoje mnogi pristupi koji pokušavaju da reše ovaj problem optimizacije.

O'Sullivan i drugi su vrlo dobro objasnili zašto je planiranje proizvodnje podzemnog rudnika vrlo težak zadatak i dali su smernice koje se odnose na primenu heurističkih tehnika koje se oslanjaju na prostornu i/ili vremensku agregaciju kako bi proizvele rešenje [2]. Carlyle i drugi su koristili model mešovitog celobrojnog programiranja koji razmatra i neka ograničenja planiranja. Validacija ovog modela je testirana u jednom sektoru podzemnog rudnika platine [3].

Anani je primenila simulaciju diskretnih događaja da bi odredila optimalnu širinu komorno – stubnih panela uglja pod specifičnim rudarskim uslovima. Takođe je testirala hipotezu da se prethodna heuristička priprema podataka može iskoristiti za povećanje računске efikasnosti dobijanja rešenja metodom grananja i ograničavanja kod binarnog celobrojnog linearnog programiranja. Ovakav pristup primenjen je za planiranje otkopavanja ležišta komorno – stubnom metodom. Rezultati njenog istraživanja obuhvataju optimizaciju širine panela, determinističko modeliranje koje inkorporira višestruki rizik otkopavanja komorno – stubnom metodom, uzimajući u obzir usklađivanje kontinualne opreme promenljivim radnim uslovima [4]. Bakhtavar i drugi koriste 0 – 1 celobrojno programiranje za kreiranje modela koji optimizuje način prelaska iz površinskog kopa u podzemni rudnik [5]. Nehring i drugi su razvili novi model matematičkog programiranja za optimizaciju planiranja proizvodnje kod podetažne metode otkopavanja, koji značajno smanjuje vreme rešavanja bez promene rezultata uz ispunjenje svih ograničenja. Oni su predstavili sve faze proizvodnje u otkopu pomoću jedne binarne promenljive i tako povećali efikasnost mešovitog celobrojnog programiranja u procesu optimizacije [6]. Bai i drugi su razvili algoritam za optimizaciju izrade otkopa kod podetažne metode otkopavanja. Problem optimizacije je tretiran kao maksimalni protok kroz adekvatni graf [7]. Epstein i drugi razvili su generalni kapacitativni multiproizvodni model protoka koji je korišćen za dugoročno planiranje otkopavanja. U njihovom modelu pod proizvodom se smatra ruda sa srednjom granulacijom i sadržajem bakra, molibdena i arsena, pri čemu su ovi sadržaji definisani određenim opsezima [8]. Grieco i drugi su primenili pristup probabilističkog mešovitog celobrojnog programiranja za optimizaciju otkopa u podzemnom rudniku tj. za definisanje lokacije, veličine i broja aktivnih otkopa u uslovima neodređenosti uzimajući u obzir kvalitet rude i prihvatljiv nivo rizika [9]. Nehring i drugi su napravili matematički model optimizacije tako što su integrisali kratkoročno i srednjoročno planiranje proizvodnje kombinujući kratkoročni cilj minimizacije odstupanja od zadatog kvaliteta stočne hrane sa srednjoročnim ciljem maksimizacije neto sadašnje vrednosti [10]. Terblanche i Bley su smanjili kompleksnost problema planiranja podzemnog rudnika i primenili mešovito celobrojno programiranje kako bi poboljšali profitabilnost putem selektivnog otkopavanja [11]. Kuchta i drugi su koristili mešovito celobrojno programiranje za planiranje otkopavanja rudnika Kiruna, konkretno, koji eksploatacioni blokovi se otkopavaju i kada će se otkopati kako bi se smanjila odstupanja od mesečnih planiranih kapaciteta proizvodnje uz ispunjavanje operativnih ograničenja [12]. Topal je razvio algoritam ranog i kasnog početka koji definiše prioritet ograničenja vezanih za redosled otkopavanja svakog otkopa unutar modela mešovitog celobrojnog linearnog programiranja, a na primeru podzemnog rudnika Kiruna [13].

Hirschi je razvio algoritam dinamičkog programiranja kako bi zamenio postupak iteracija u određivanju i proceni redosleda otkopavanja kod komorno – stubne metode. Dinamičko programiranje primenjuje se u rudarstvu u svrhu optimizacije višefaznih procesa, pri čemu su parametri proizvodnje specificirani za svaku fazu ponaosob [14]. Gligoric i drugi su razvili model planiranja proizvodnje rudnika, koji minimalizuje odstupanje od prihvatljive stope povraćaja, koristeći multivarijabilnu Frobenijusovu težinsku funkciju rastojanja koja meri odstupanje od zadatih ciljeva [15].

1.2 Predmet istraživanja, ciljevi i polazne hipoteze

Komorno – stubna metoda otkopavanja predstavlja jednu od najstarijih metoda koja se koristi u podzemnoj eksploataciji ležišta mineralnih sirovina. Primenjuje se za eksploataciju kako metalčnih (polimetalčnih) tako i slojevitih ležišta. Primena ove metode zahteva određene uslove u ležištu. Kod metalčnih ležišta neophodno je da ona budu približno horizontalna, sa maksimalnom vrednošću ugla zaleganja oko 30° . Moćnost ležišta se kreće u rasponu 2 – 30 m a ponekad ona može biti i veća, ako su fizičko – mehaničke osobine visokog kvaliteta. Kod slojevitih ležišta ugao zaleganja je oko 15° . Komorno – stubne metode otkopavanja najčešće se odlikuju sistematskim rasporedom sigurnosnih stubova koji se definiše na osnovu fizičko – mehaničkih osobina stenskog masiva. Predmet istraživanja predložene doktorske disertacije je definisanje optimalnog plana proizvodnje kod komorno – stubne metode otkopavanja u uslovima neodređenosti ulaznih podataka. Uzimajući u obzir da plan proizvodnje pripada klasi strateških odluka tada pronalaženje optimalnog plana predstavlja jednu od najznačajnijih uloga u podzemnoj eksploataciji ležišta mineralnih sirovina. Istraživanja u okviru predložene disertacije obuhvataju definisanje najuticajnijih parametara na plan proizvodnje, njihovu kvantifikaciju, formiranje modela koji će ih integrisati u odgovarajuću funkciju cilja, kao i definisanje operativnih ograničenja pod kojima funkcija cilja dostiže svoju ekstremnu vrednost u zavisnosti od postavljenog kriterijuma optimalnosti.

Cilj istraživanja doktorske disertacije je pronalaženje plana proizvodnje primenom simulacija i optimizacionih metoda kod komorno – stubne metode otkopavanja za dati raspored sigurnosnih stubova. Definisanje plana proizvodnje zasnovano je na pronalaženju maksimalne vrednosti funkcije cilja unutar prostora operativnih ograničenja i u prisustvu neodređenosti parametara funkcije cilja. Formulacija modela pripada klasi fazi linearnog programiranja. Koeficijenti koji stoje uz promenljive predstavljaju sadašnju vrednost budućeg novčanog toka plana proizvodnje. Uzimajući u obzir da se radi o procesu koji tretira budući vremenski interval, nepoznanice po pitanju prihoda od mineralne sirovine i troškova proizvodnje predstavljaju značajan uticaj na pronalaženje optimalnog plana proizvodnje. Primenom simulacija stohastičkih difuznih procesa prognoziraće se njihove buduće vrednosti, a zatim adekvatnom transformacijom će se prevesti u trouglaste fazi brojeve. Primenom teorije fazi skupova definišaće se i diskontna stopa koja predstavlja značajan izvor neodređenosti, na koje planeri proizvodnje nemaju uticaj.

Osnovna polazna hipoteza za predlog istraživanja u okviru ove doktorske disertacije je činjenica da za dati raspored sigurnosnih stubova kod komorno – stubne metode otkopavanja postoji optimalan plan proizvodnje koji maksimizira funkciju sadašnje vrednosti budućeg novčanog toka. Razvoj modela se u prvoj fazi prezentuje u opštem teorijskom načinu, a zatim se formuliše za specifičan slučaj u preciznijoj matematičkoj formi. Osnovne pretpostavke su:

- usvojena metoda otkopavanja,
- definisan je raspored sigurnosnih stubova,
- ležište je definisano blok modelom,
- svaki blok ima svoje karakteristike (prostorni raspored, količina rude, sadržaj korisne komponente, itd),
- mogućnost da se ležište na osnovu kapaciteta podeli u celine koje predstavljaju skup blokova,

- mogućnost da se promenljive koje se karakterišu neodređenostima mogu kvantifikovati primenom adekvatnih metoda,
- poznat je skup operativnih ograničenja i
- postojanje optimalnog plana proizvodnje odnosno redosleda otkopavanja definisanih celina ležišta

Tokom unošenja ulaznih parametara postoji mogućnost da se u model uključe i neka od ograničenja koja su vezana za njihove minimalne i/ili maksimalne vrednosti.

1.3 Metode istraživanja

Plan istraživanja u predloženoj doktorskoj disertaciji obuhvataju primenu sledećih metoda:

- Teorija odlučivanja,
- Teorija fazi skupova,
- Simulacija stohastičkih difuznih procesa,
- Transformacija funkcije gustine verovatnoće u fazi trouglasti broj,
- Particija skupova, algoritam poligonalnog prostornog klasterisanja,
- Diskontovani novčani tok,
- Fazi linearno programiranje

1.4 Postignuti naučni rezultati

U okviru predložene disertacije razmatra se pronalaženje plana proizvodnje za komorno – stubnu metodu otkopavanja u uslovima neodređenosti ulaznih parametara. Ovaj problem predstavlja jedan od najznačajnijih problema kombinatorne prirode pri planiranju rudarske proizvodnje. Na dosadašnjih, tekućih i planiranih istraživanja, pored opšte analize problema, naučni doprinosi koji se očekuju su:

- razvoj modela particije ležišta predisponiranog za komorno – stubnu metodu otkopavanja na osnovu kapaciteta proizvodnje,
- tretiranje neodređenosti ulaznih podataka i smanjenje rizika u procesu planiranja proizvodnje,
- kreiranje pouzdanog dinamičkog modela planiranja proizvodnje,
- testiranje razvijenog pristupa i njegova validacija, kao jednog vrlo efikasnog načina za planiranje proizvodnje u rudnicima sa podzemnom eksploatacijom,
- podrška pri pronalaženju adekvatnih rešenja u procesu projektovanja rudnika sa podzemnom eksploatacijom.

1.5 Organizacija teze

Doktorska disertacija, pored opštih sastavnih elemenata, kao što su sažetak na srpskom i apstrakt na engleskom jeziku, ključne reči, sadržaj, spisak skraćenica, slika, tabela i literature, sadrži i sledeće strukturne celine:

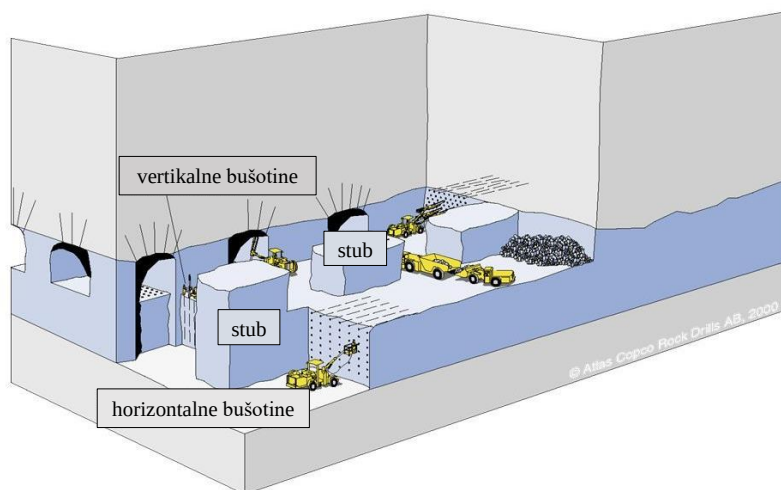
- Uvod – predmet istraživanja i teorijski okvir
- Prikaz komorno – stubne metode otkopavanja
- Uvod u osnove fazi skupova
- Uvod u osnove fazi celobrojnog programiranja
- Teorijske osnove particije skupova
- Teorijske osnove algoritma poligonalnog prostornog klasterisanja
- Diskontovani novčani tok

- Kvantifikacija neodređenosti ulaznih parametara
- Dinamički model plana proizvodnje
- Numerički primer
- Zaključak

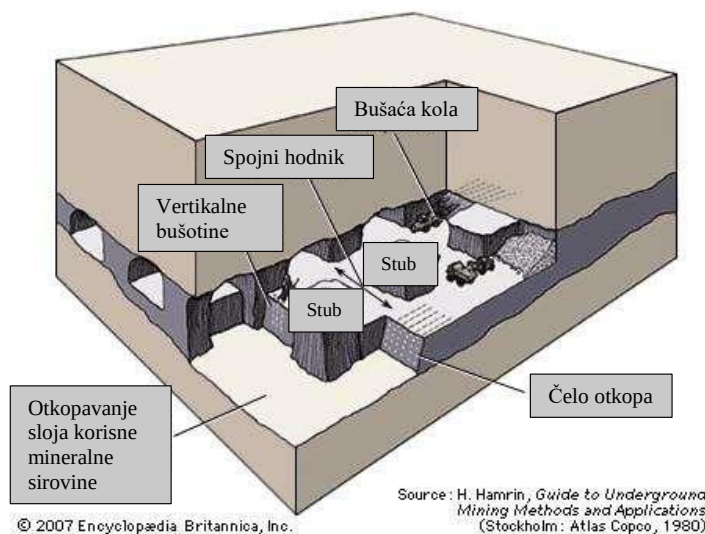
2. KOMORNO – STUBNA METODA OTKOPAVANJA

Komorno – stubna metoda je metoda otkopavanja slojevitih ležišta ograničene debljine. Ova metoda se koristi za otkopavanje rude otvorenim otkopima. Metoda podrazumeva ostavljanje neotkopanih (sigurnosnih) stubova koji podupiru krovinu. Kako bi se dobila maksimalna količina rude, rudari teže da ostave stubove što je moguće manjih dimenzija. Komore i stubovi se projektuju u pravilnom rasporedu. Stubovi mogu biti projektovani u vidu kružnog ili kvadratnog poprečnog preseka kao što je prikazano na slikama 1 i 2. Ruda koja se nalazi u stubovima se ne otkopava zbog čega nije uključena u ukupne rezerve ležišta [16].

Naš razvijeni model planiranja proizvodnje podrazumeva da ta „izgubljena“ odnosno neotkopana količina rude ne ulazi u proračun za konačan optimalan plan eksploatacije ležišta. Uprkos svesnom „gubitku“, model se pokazao kao prihvatljiv i profitabilan. Sa ekonomske tačke gledišta, ovaj pristup pruža mogućnost rudarskim planerima da nakon završene eksploatacije ležišta (primarne faze) ostvare ekstra dobit otkopavajući samo neotkopane stubove. Taj proces bi predstavljao sekundarnu fazu otkopavanja ležišta koja podrazumeva eksploataciju samo sigurnosnih stubova vodeći računa o obezbeđivanju maksimalnih mera zaštite osiguravajući krovinu stabilnom.



Slika 1. Komorno – stubna metoda otkopavanja (preuzeto i modifikovano) [17]

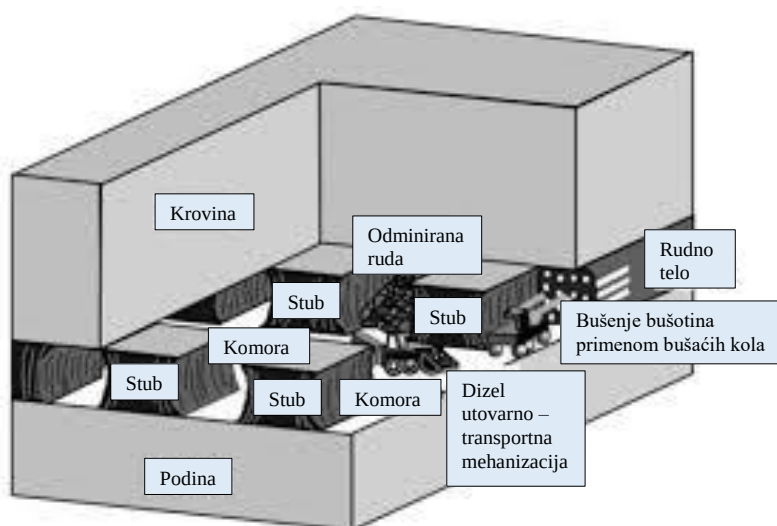


Slika 2. Komorno – stubna metoda otkopavanja (preuzeto i modifikovano) [18]

Na slikama 1 i 2 prikazana je komorno – stubna metoda otkopavanja pri čemu se otkopavanje vrši u dve etaže. Na gornjoj etaži se vrši utovar odminirane rude primenom utovarno – transportne mehanizacije. Pripremni radovi na bušenju i miniranju obavljaju se primenom bušaće opreme koja izrađuje horizontalne bušotine kako na gornjoj tako i na donjoj etaži. Na ovaj način se ostvaruje pravilna i bezbedna dinamika otkopavanja što podrazumeva sinhronizovano napredovanje otkopa korisne mineralne sirovine. Ostavljajući određenu količinu mineralne sirovine neotkopanom formiraju se stubovi različitih dimenzija i oblika čija je uloga da održavaju stabilnost i podnesu pritiske krovine. Otkopana ruda između tako izrađenih stubova obrazuje prostor u rudniku koji se naziva komora. Dvoetažni način otkopavanja ležišta se primenjuje kada je sloj rudnog tela nekoliko desetina metara pri čemu raspoloživa mehanizacija nije u mogućnosti da vrši eksploataciju čitavog sloja u jednoj etaži.

Ovu metodu karakteriše fleksibilnost (relativno jednostavna za projektovanje), pogodnost primene utovarno – transportne mehanizacije, jednostavno održavanje otkopa, niski operativni troškovi (ne zahteva velika kapitalna ulaganja za opremu kao što je slučaj kod širokočelne metode), niski troškovi otkopne pripreme i dobri uslovi za rad. Međutim, održavanje krovine, visoki kapitalni troškovi, nizak stepen iskorišćenja rude, nedostatak fleksibilnosti u strukturnom planiranju kao i problemi bezbednog transporta rude su glavni nedostaci komorno – stubne metode otkopavanja [19, 20].

Mnogi faktori utiču na dimenzionisanje i postavljanje stubova, kao što su: stabilnost krovine, čvrstoća rude u stubovima, debljina rudnog tela, dubina zaleganja ležišta itd. [19].



Slika 3. Komorno stubna metoda (preuzeto i modifikovano) [21]

Na slici 3 takođe je prikazana komorno – stubna metoda otkopavanja. Ova metoda je pogodna za slojevita ili približno horizontalna pločasta ležišta. Ukoliko su rudna tela umereno nagnuta ($> 30^\circ$), primena dizel utovarno – transportne mehanizacije nije praktična, što rezultuje smanjenjem produktivnosti [21].

Sigurnosni stubovi imaju ulogu da obezbede kako lokalnu i tako i globalnu stabilnost otkopa [22]. Oni se ostavljaju neotkopani da bi podneli pritiske stenske mase i da bi zaštitili ljudstvo. Bušaća kola se obično koriste za kretanje i povezivanje otkopnih hodnika. Odminirana ruda se utovara i transportuje pomoću dizel utovarno – transportne mehanizacije. U rudnicima uglja, slojevi uglja su generalno velikih razmera i relativno su ujednačeni, pa se u takvim slučajevima takođe primenjuje utovarno – transportna mehanizacija. Otkopi se otvaraju ortogonalno (pod pravim uglom međusobno) i u jednakim vremenskim intervalima da bi se ostavili pravougaoni ili kvadratni stubovi kao prirodna potpora, što u planu izgleda nalik šahovskom polju. U rudnicima bez uglja, nije neuobičajeno da su

stubovi nepravilnog oblika, dimenzija i slučajnog rasporeda što je prikazano na slici 4. Cilj postavljanja stubova je da se oni nalaze u siromašnim delovima ležišta ili jalovine. Otkopavanje maksimalne količine rude uz održavanje sigurnih i bezbednih uslova za rad predstavlja glavni zadatak prilikom postavljanja stubova [21].

Komorno – stubna metoda otkopavanja je umereno povoljna metoda u smislu produktivnosti i troškova. Shodno tome, pogodna je za ležišta velikih razmera sa relativno niskom ekonomskom vrednošću, tj., ležišta gde neka ruda može ostati neotkopana bez značajnog uticaja na ekonomsku vrednost plana proizvodnje [21].

Pravilan/Sistematski raspored stubova



Nepravilan raspored stubova

**Siromašna ruda
ili jalovina**



Slika 4. Oblik i dimenzije stubova (preuzeto i modifikovano) [21]

3. OSNOVNI KONCEPTI TROUGLASTIH FAZI BROJEVA I ARITMETIČKE OPERACIJE

Teorija fazi skupova, koju je predstavio Zadeh, bavi se problemima u koje je uključen izvor neodređenosti (nejasnoća) i koji se koristi za inkorporiranje neodređenih podataka u okvir za donošenje odluke [23, 24].

Fazi skupovima se mogu izraziti pristrasne odnosno subjektivne procene koje se, na primer, odnose na koeficijent iskorišćenja rudnih rezervi ili ukupni trošak proizvodnje rude. Koeficijent iskorišćenja rudnih rezervi „oko 80 %“ je ekspertska pretpostavka na osnovu prethodnog iskustva odnosno intuicije. Ova subjektivna procena karakteriše se određenom brojnom vrednošću. Očigledno je da je koeficijent iskorišćenja rudnih rezervi od „otprilike 80 %“ manji u odnosu na koeficijent iskorišćenja rudnih rezervi od „otprilike 90 %“ a veći u odnosu na koeficijent iskorišćenja rudnih rezervi od „otprilike 70 %“. Prema tome, prethodna diskusija nam govori o tome da fazi skup „koeficijent iskorišćenja rudnih rezervi je otprilike 80 %“ možemo da predstavimo kao broj. Takav nedefinisan odnosno nejasan broj naziva se fazi broj ili rasplinuti broj. U literaturi se pored izraza fazi broj često koristi i izraz neizvestan broj [27].

Trouglasti fazi broj označen kao $\tilde{A}$ je definisan na sledeći način: $\tilde{A} = (a, b, c)$, gde je $a \leq b \leq c$. a predstavlja najmanju moguću vrednost, b predstavlja vrednost koja najviše obećava a c predstavlja najveću moguću vrednost trouglastog fazi broja [23]. Oznaka „ $\sim$ “ koja se nalazi iznad simbola ukazuje na to da taj simbol predstavlja fazi skup. Fazi broj je proširenje običnog (jednoznačnog) broja u smislu da se ne odnosi na pojedinačnu vrednost već na povezan skup mogućih vrednosti, gde svaka ta moguća vrednost ima svoju težinu između 0 i 1. Ova težina se naziva funkcijom pripadnosti. Primena trouglastih fazi brojeva je jednostavna i razumljiva za donosioce odluka.

Karakteristična funkcija μ_A skupa $A \subseteq X$ dodeljuje vrednost 0 ili 1 svakom članu univerzalnog skupa X . Ova funkcija može biti uopštena funkcijom $\mu_{\tilde{A}}$ tako da vrednost dodeljena elementu univerzalnog skupa X pripada određenom opsegu tj. $\mu_{\tilde{A}}: X \rightarrow [0,1]$. Dodeljena vrednost ukazuje na stepen pripadnosti elementa skupu A . Funkcija $\mu_{\tilde{A}}$ se naziva funkcijom pripadnosti a skup $\tilde{A} = \{(x, \mu_{\tilde{A}}(x)): x \in X\}$ definisan funkcijom $\mu_{\tilde{A}}(x)$ za svako $x \in X$ se naziva fazi skupom [25, 26].

Za fazi broj $\tilde{A} = (a, b, c)$ se kaže da je trouglasti fazi broj ako je njegova funkcija pripadnosti data kao:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ \frac{x-c}{b-c}, & b \leq x \leq c \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (1)$$

Neka su $\tilde{A} = (a, b, c)$ i $\tilde{B} = (d, e, f)$ dva trouglasta fazi broja [23]. Fazi aritmetičke operacije su definisane na sledeći način:

1. Sabiranje:

$$\tilde{A} + \tilde{B} = (a + d, b + e, c + f) \quad (2)$$

Primer 1: Neka su $\tilde{A} = (1,6,9)$ i $\tilde{B} = (4,5,7)$ dva trouglasta fazi broja. Tada je:

$$\tilde{A} + \tilde{B} = (1,6,9) + (4,5,7) = (1 + 4, 6 + 5, 9 + 7) = (5,11,16) \quad (3)$$

2. Oduzimanje:

$$\tilde{A} - \tilde{B} = (a - f, b - e, c - d) \quad (4)$$

Primer 2: Neka su $\tilde{A} = (1,6,9)$ i $\tilde{B} = (4,5,7)$ dva trouglasta fazi broja. Tada je:

$$\tilde{A} - \tilde{B} = (1,6,9) - (4,5,7) = (1 - 4, 6 - 5, 9 - 7) = (-3,1,2) \quad (5)$$

3. Množenje:

$$\tilde{A} \cdot \tilde{B} = (a \cdot d, b \cdot e, c \cdot f) \quad (6)$$

Primer 3: Neka su $\tilde{A} = (1,6,9)$ i $\tilde{B} = (4,5,7)$ dva trouglasta fazi broja. Tada je:

$$\tilde{A} \cdot \tilde{B} = (1,6,9) \cdot (4,5,7) = (1 \cdot 4, 6 \cdot 5, 9 \cdot 7) = (4,30,63) \quad (7)$$

4. Deljenje:

$$\tilde{A} \div \tilde{B} = (a \div f, b \div e, c \div d) \quad (8)$$

Primer 4: Neka su $\tilde{A} = (1,6,9)$ i $\tilde{B} = (4,5,7)$ dva trouglasta fazi broja. Tada je:

$$\tilde{A} \div \tilde{B} = (1,6,9) \div (4,5,7) = (1 \div 4, 6 \div 5, 9 \div 7) = \left(\frac{1}{4}, \frac{6}{5}, \frac{9}{7}\right) \quad (9)$$

5. Množenje skalarom: Množenje trouglastog fazi broja i skalarne veličine koja je realan broj se vrši na sledeći način:

$$r \cdot \tilde{A} = \begin{cases} (r \cdot a, r \cdot b, r \cdot c), & \text{gde je } r \geq 0 \\ (r \cdot c, r \cdot b, r \cdot a), & \text{gde je } r < 0 \end{cases} \quad (10)$$

Primer 5: Neka je $\tilde{A} = (1,6,9)$ trouglasti fazi broj i skalarna veličina $r = 5$. Tada je:

$$r \cdot \tilde{A} = 5 \cdot (1,6,9) = (5 \cdot 1, 5 \cdot 6, 5 \cdot 9) = (5,30,45) \quad (11)$$

Primer 6: Neka je $\tilde{A} = (1,6,9)$ trouglasti fazi broj i skalarna veličina $r = -5$. Tada je:

$$r \cdot \tilde{A} = (-5) \cdot (1,6,9) = ((-5) \cdot 9, (-5) \cdot 6, (-5) \cdot 1) = (-45, -30, -5) \quad (12)$$

6. Inverzija:

$$(\tilde{A})^{-1} = \left(\frac{1}{c}, \frac{1}{b}, \frac{1}{a}\right) \quad (13)$$

Primer 7: Neka je $\tilde{A} = (1,6,9)$. Tada je:

$$(\tilde{A})^{-1} = \left(\frac{1}{9}, \frac{1}{6}, \frac{1}{1}\right) \quad (14)$$

7. Maksimum i minimum između dva trouglasta fazi broja:

$$\max(\tilde{A}, \tilde{B}) = (\max(a, d), \max(b, e), \max(c, f)) \quad (15)$$

$$\min(\tilde{A}, \tilde{B}) = (\min(a, d), \min(b, e), \min(c, f)) \quad (16)$$

Primer 8: Neka su $\tilde{A} = (1, 6, 9)$ i $\tilde{B} = (4, 5, 7)$ dva trouglasta fazi broja. Tada je :

$$\max(\tilde{A}, \tilde{B}) = (\max(1, 4), \max(6, 5), \max(9, 7)) = (4, 6, 9) \quad (17)$$

$$\min(\tilde{A}, \tilde{B}) = (\min(1, 4), \min(6, 5), \min(9, 7)) = (1, 5, 7) \quad (18)$$

8. Apsolutna vrednost trouglastog fazi broja: Apsolutna vrednost trouglastog fazi broja $\tilde{A} = (a, b, c)$ se označava kao $|\tilde{A}|$ i definiše se na sledeći način [23]:

$$|\tilde{A}|(x) = \begin{cases} \max\{\tilde{A}(x), -\tilde{A}(-x)\}, & \text{gde je } x \geq 0 \\ 0, & \text{gde je } x < 0 \end{cases} \quad (19)$$

Primer 9: Neka je $\tilde{A} = (2, 3, 6)$. Pošto je $a = 2 > 0$, tada je:

$$|\tilde{A}| = \tilde{A} = (2, 3, 6) \quad (20)$$

Primer 10: Neka je $\tilde{A} = (-7, -4, -2)$, pa je $-\tilde{A} = (2, 4, 7)$. Pošto je $c = -2 > 0$, tada je:

$$|\tilde{A}| = -\tilde{A} = (2, 4, 7) \quad (21)$$

Primer 11: Neka je $\tilde{A} = (-3, 5, 8)$, pa je $-\tilde{A} = (-8, -5, 3)$. Pošto $0 \in [a, c] = [-3, 8]$, tada je:

$$|\tilde{A}| = (0, 5, 8) \quad (22)$$

Primer 12: Neka je $\tilde{A} = (-7, 2, 5)$, pa je $-\tilde{A} = (-5, -2, 7)$. Pošto $0 \in [a, c] = [-7, 5]$, tada je:

$$|\tilde{A}| = (0, 2, 5) \quad (23)$$

9. Rastojanje između dva trouglasta fazi broja: Neka su $\tilde{A} = (a, b, c)$ i $\tilde{B} = (d, e, f)$ dva trouglasta fazi broja. Rastojanje između dva fazi broja $\tilde{A}$ i $\tilde{B}$ se računa kao:

$$d(\tilde{A}, \tilde{B}) = \sqrt{\frac{1}{3} \cdot [(a - d)^2 + (b - e)^2 + (c - f)^2]} \quad (24)$$

Primer 13: Neka su $\tilde{A} = (-2, 3, 7)$ i $\tilde{B} = (2, 5, 9)$ dva trouglasta fazi broja. Tada je:

$$\begin{aligned} d(\tilde{A}, \tilde{B}) &= \sqrt{\frac{1}{3} \cdot [(-2 - 2)^2 + (3 - 5)^2 + (7 - 9)^2]} = \sqrt{\frac{1}{3} \cdot [16 + 4 + 4]} = \\ &= \sqrt{\frac{24}{3}} = \sqrt{8} \approx 2.83 \end{aligned} \quad (25)$$

10. Agregacija (grupisanje, skupljanje) [23]: Pretpostavimo da grupa odluka ima D donosioca odluka DM_d ($d = 1, 2, \dots, D$) i fazi rang svakog donosioca odluke može biti predstavljen kao pozitivan trouglasti fazi broj $\tilde{A}_d = (a_d, b_d, c_d)$ sa funkcijom pripadnosti $\mu_{\tilde{A}_d}(x)$. Tada agregatni fazi rang $\tilde{A} = (a, b, c)$ može biti definisan na sledeći način:

$$a = \frac{1}{D} \cdot \sum_{d=1}^D a_d \quad (26)$$

$$b = \frac{1}{D} \cdot \sum_{d=1}^D b_d \quad (27)$$

$$c = \frac{1}{D} \cdot \sum_{d=1}^D c_d \quad (28)$$

Primer 14: Neka su $\tilde{A}_1 = (-1, 5, 9)$, $\tilde{A}_2 = (-4, 1, 5)$, $\tilde{A}_3 = (3, 5, 8)$ i $\tilde{A}_4 = (4, 7, 10)$ četiri trouglasta fazi broja. Tada je agregatni fazi rang $\tilde{A} = (a, b, c)$ sledeći:

$$a = \frac{(-1 - 4 + 3 + 4)}{4} = 0.5 \quad (29)$$

$$b = \frac{(5 + 1 + 5 + 7)}{4} = 4.5 \quad (30)$$

$$c = \frac{(9 + 5 + 8 + 10)}{4} = 8 \quad (31)$$

Pa je $\tilde{A} = (0.5, 4.5, 8)$

11. Defazifikacija: Defazifikovana vrednost trouglastog fazi broja $\tilde{A}$ je jedan aproksimiran (približan) realan broj. Predložene su različite strategije defazifikacije, dok je metoda centroida (često nazvana centar područja) najčešća i fizički najprivlačnija od svih metoda defazifikacije. Za trouglasti fazi broj $\tilde{A} = (a, b, c)$, defazifikovana vrednost se računa kao:

$$A = \frac{a + b + c}{3} \quad (32)$$

Primer 15: Pretpostavimo da je $\tilde{A} = (-5, 3, 8)$. Tada je defazifikovana vrednost trouglastog fazi broja $\tilde{A}$ jednaka:

$$A = \frac{-5 + 3 + 8}{3} = \frac{6}{3} = 2 \quad (33)$$

12. Funkcija rangiranja: Funkcija rangiranja je funkcija $\Re: F(R) \rightarrow R$, gde je $F(R)$ skup fazi brojeva definisanih na skupu realnih brojeva, koja uspostavlja relaciju između svakog fazi broja i realne vrednosti. Neka je $\tilde{A} = (a, b, c)$ trouglasti fazi broj onda je [25]:

$$\Re(\tilde{A}) = \frac{a + 2b + c}{4} \quad (34)$$

4. OSNOVNI KONCEPTI FAZI LINEARNOG PROGRAMIRANJA

Modeli planiranja proizvodnje rudnika, zasnovani na linearnom programiranju, koriste blok kao osnovnu promenljivu u funkciji cilja. Ovi modeli takođe koriste konstantne vrednosti cene metala i operativnih troškova kroz vreme planiranja. To znači da su ovi modeli statički sa tačke gledišta ova dva parametra. Ako želimo da uključimo fluktuaciju (varijaciju) ovih parametara u funkciji cilja, tada broj promenljivih značajno raste. Pretpostavimo da rudno ležište sadrži 1 000 blokova, i da eksploatacija traje 10 godina sa različitom cenom metala svake godine. Tada je broj promenljivih 10 000. Naš model smanjuje broj promenljivih u funkciji cilja kreiranjem *TEP* – ova. To znači da bi pomenuti primer imao samo 100 promenljivih dobijenih kao kvadriran broj godina eksploatacije. Ovo smanjenje postaje mnogo značajnije kada su dimenzije blokova male. Smanjenjem broja promenljivih, omogućili smo da neodređenosti budu uključene u model. Verujemo da je uključivanje neodređenosti mnogo važnije od maksimalne vrednosti funkcije cilja koja je dobijena primenom blokova u svojstvu promenljivih koje se odlikuju konstantnim vrednostima uticajnih parametara.

Primenom teorije fazi skupova i simulacije različitih stohastičkih procesa povećali smo fleksibilnost modela i model učinili mnogo realnijim. Model je testiran na malom hipotetičkom olovo – cink rudnom ležištu i rezultati su pokazali da model može biti korišćen za rešavanje problema planiranja proizvodnje u rudnicima.

Linearno programiranje je grana matematičke optimizacije koja se proučava i uspešno koristi za rešavanje stvarnih problema u svetu više od šezdeset godina. Takođe ima ogroman i rastući uticaj u gotovo svim oblastima nauke i inženjerstva [28]. Zbog svoje efikasnosti, linearno programiranje je široko primenjivan model optimizacije za rešavanje stvarnih problema. U današnje vreme, ljudske odluke sve više i više zavise od raspoloživosti informacija. Međutim, u stvarnosti, većina tih informacija je neprecizna i netačna. Ovo je težak izazov za donosioca odluke da dizajnira model optimizacije koji ima sposobnost donošenja racionalne odluke u nesigurnom okruženju. Linearno programiranje se najčešće koristi za rešavanje matematičkih modela koji odgovaraju maksimizaciji profita, odnosno minimizaciji troškova, pri određenim uslovima. Matematički model treba da sadrži [29]:

- Linearnu funkciju cilja
- Linearna ograničenja
- Dopustiv skup rešenja

Vrste linearnog programiranja koje se najčešće primenjuju u praksi su: celobrojno linearno programiranje (integer programming) i mešovito celobrojno linearno programiranje (mixed – integer programming) uz odgovarajuća linearna ograničenja. Pod celobrojn timer programiranjem podrazumeva se primena celih brojeva odnosno promenljive su ograničene isključivo na ceo broj, dok mešovito celobrojno programiranje pored celih brojeva podrazumeva primenu i nekih promenljivih koje nisu ceo broj.

Specijalni slučaj celobrojn timer programiranja koji je od izuzetnog značaja zbog svoje primene u modeliranju problema u kojima se iziskuje donošenje „da/ne” odluka je slučaj binarnog celobrojn timer programiranja. 0 – 1 linearno programiranje predstavlja vrstu binarnog celobrojn timer programiranja kod koga su nepoznate binarni brojevi, uz ispunjenje postavljenih ograničenja. To znači da celobrojne vrednosti predstavljaju odluke koje treba da imaju rešenja samo sa vrednošću 0 ili 1. Obzirom da postoje samo dve mogućnosti odluke, „da“ ili „ne“, uvodi se binarna promenljiva x koja može uzimati samo vrednosti iz skupa $\{0,1\}$ [30]:

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{ukoliko je } i - \text{ta odluka } \textbf{da} \\ 0, & \text{ukoliko je } i - \text{ta odluka } \textbf{ne} \end{cases} \quad (35)$$

Optimalan plan proizvodnje odnosno konačan redosled otkopavanja tehnoloških eksploatacionih polja (*TEP* – ova) može se definisati kao proces donošenja odluke gde „1“ predstavlja „otkopan“ a „0“ predstavlja „neotkopan“ blok odnosno klaster (*TEP*) u datom vremenskom trenutku [31].

Na slici 5. prikazan je grafički primer prostog i skraćenog modela fazi 0 – 1 linearnog programiranja koji će se primeniti u ovom radu. Data je funkcija cilja kao i skup ograničenja koja moraju biti ispunjena. Funkcija cilja predstavljena je dvema promenljivim x_1 i x_2 . Postoje dva ograničenja koja moraju biti ispunjena da bi funkcija cilja imala optimalno rešenje.

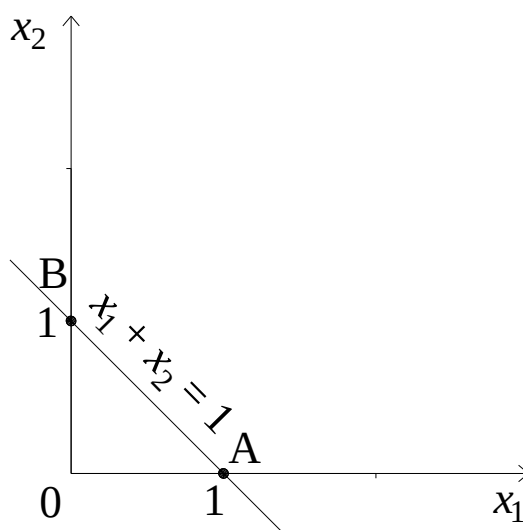
$$\tilde{F}(X) = \tilde{c}_1 x_1 + \tilde{c}_2 x_2 \rightarrow \max \quad (36)$$

Uz ograničenja

$$x_1 + x_2 = 1 \quad (37)$$

$$x_1, x_2 \in [0,1] \quad (38)$$

Prvo ograničenje odnosi se na to da samo jedna od dve promenljive može imati vrednost „1“ a drugo ograničenje podrazumeva da promenljive pripadaju skupu celih brojeva koji se sastoji samo od vrednosti „0“ i „1“. Prema tome, promenljive uzimaju vrednosti samo „0“ ili samo „1“. Na slici 5. dat je grafički prikaz skupa ograničenja datih u jednačinama (37) i (38). Oblast mogućih rešenja predstavljena je samo tačkama A i B.



Slika 5. Grafički prikaz ograničenja

Linearno programiranje je jedna od najčešće primenjivanih tehnika u operacionim istraživanjima. U konvencionalnom pristupu, vrednosti parametara modela linearnog programiranja moraju biti dobro definisane i precizirane. Međutim, u stvarnom okruženju, ovo nije realna pretpostavka. U stvarnim životnim problemima, može postojati neizvesnost (neodređenost) ovih parametara. U takvoj situaciji, parametri problema linearnog programiranja, mogu se predstaviti kao fazi brojevi [25].

U ovom radu, razmatrali smo problem 0 – 1 linearno programiranje kod koga su samo koeficijenti funkcije cilja predstavljeni kao trouglasti fazi brojevi. Ovakav problem se prvo pretvara u adekvatan jednoznačan model a nakon toga se rešava jednom od postojećih metoda.

Pretpostavimo da imamo problem linearnog programiranja sa fazi koeficijentima na sledeći način:

$$\max \sum_{j=1}^n (a_j, b_j, c_j) x_j \quad (39)$$

Uz ograničenja

$$\sum_{j=1}^n q_{ij} x_j \leq p_i, 1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n \quad (40)$$

$$x_j \in [0,1] \quad (41)$$

Budući da su promenljive x_j i koeficijenti q_{ij} jednoznačne vrednosti, potrebno je samo pretvoriti fazi funkciju cilja u jednoznačnu funkciju. Proces pretvaranja zasnovan je na način koji su razvili Kumar i drugi [18]. Fazi funkcija cilja može se izraziti na sledeći način:

$$\max \mathfrak{R} \left(\sum_{j=1}^n (a_j, b_j, c_j) x_j \right) \quad (42)$$

Primer 1: Razmatramo sledeću funkciju cilja i pretvaramo je po predloženoj metodi

$$\max((1,6,9)x_1 + (2,3,8)x_2 + (4,6,7)x_3) \quad (43)$$

Fazi funkcija cilja može se zapisati na sledeći način:

$$\max \mathfrak{R}(1x_1 + 2x_2 + 4x_3, 6x_1 + 3x_2 + 6x_3, 9x_1 + 8x_2 + 7x_3) \quad (44)$$

Koristeći aritmetičke operacije trouglastih fazi brojeva i jednačinu (34), fazi funkcija cilja pretvara se u sledeću jednoznačnu funkciju cilja:

$$\max \left(\frac{1}{4} (22x_1 + 16x_2 + 23x_3) \right) \quad (45)$$

Pretpostavimo da je rešenje ove funkcije cilja, uzimajući u obzir dati skup ograničenja, sledeći: $x_1 = x_3 = 1$ i $x_2 = 0$. Fazi optimalna vrednost naše funkcije cilja dobija se uvođenjem x_1 , x_2 i x_3 u jednačinu (43). Vrednost date funkcije cilja je:

$$((1,6,9) \cdot 1 + (2,3,8) \cdot 0 + (4,6,7) \cdot 1) = (5,12,16) \quad (46)$$

Važan koncept (pojam) vezan za primenu fazi brojeva je defazifikacija, kojom se fazi broj pretvara u jednoznačan broj. Postoje različite metode koje se koriste za transformaciju fazi broja u jednoznačan. Najčešće korišćena metoda defazifikacije je centroid metoda, koja je takođe poznata i kao centar gravitacije ili defazifikacija centra područja. Centroid metoda defazifikacije može se izraziti na sledeći način [32]:

$$\bar{x}_0(\tilde{A}) = \frac{\int_a^c x \mu_{\tilde{A}}(x) dx}{\int_a^c \mu_{\tilde{A}}(x) dx} \quad (47)$$

Gde je $\bar{x}_0(\tilde{A})$ defazifikovana vrednost. Formula za defazifikaciju trouglastog fazi broja $\tilde{A} = (a, b, c)$ je:

$$\bar{x}_0(\tilde{A}) = \frac{a + b + c}{3} \quad (48)$$

Ova formula će se koristiti u ovom radu. Defazifikovana (jednoznačna) vrednost naše funkcije cilja je $\bar{x}_0(5,12,16) = 11$.

5. MODEL PLANIRANJA PROIZVODNJE

Uopšteno govoreći, svaka ekonomska procena planiranja proizvodnje rudnika definisana je njenim finansijskim rezultatima. Model planiranja proizvodnje, sa ekonomske tačke gledišta, definisan je sledećom funkcijom cilja i skupom ograničenja:

$$\tilde{F}(\tilde{V}, X) = \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \tilde{v}_{it}^d x_{it} = \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \frac{\tilde{v}_{it}}{(1 + \tilde{d})^t} x_{it} \rightarrow \max \quad (49)$$

Uz ograničenja

$$\sum_{t=1}^T x_{it} = 1, \forall i \in N \quad (50)$$

$$\sum_{i=1}^N x_{it} = 1, \forall t \in T \quad (51)$$

$$x_{it} + \sum_{s=1}^S x_{s,t+1} \leq 1, \forall i \in N, \forall t \in T, s \in S \quad (52)$$

$$x_{it} \in [0,1], \forall i \in N, \forall t \in T \quad (53)$$

$$\tilde{F} - \tilde{I} \geq 0 \quad (54)$$

Gde su:

$\tilde{v}_{it}^d$ - fazi sadašnja vrednost tehnološkog eksploatacionog polja, diskontovana vrednost,

$\tilde{v}_{it}$ - fazi ekonomska vrednost tehnološkog eksploatacionog polja u vremenu t ,

x_{it} - binarna promenljiva, koja je jednaka 1 ako i samo ako se tehnološko eksploataciono polje i otkopava u vremenu t ,

N - broj tehnoloških eksploatacionih polja uključenih u planiranje. Jednak je broju godina eksploatacije (T),

S - skup tehnoloških eksploatacionih polja koji nisu dostupni iz x_{it} , tj. ovaj skup je sastavljen od "nesusednih" tehnoloških eksploatacionih polja

$\tilde{d}$ - fazi diskontna stopa,

T - vreme planiranja,

$\tilde{I}$ - fazi kapitalna investicija (kapitalni troškovi).

Funkcija cilja predstavlja sadašnju vrednost budućeg novčanog toka plana proizvodnje. Jednačine (50) i (51) obezbeđuju da svako tehnološko eksploataciono polje može biti otkopano jednom tokom vremena planiranja. Jednačina (52) definiše prostorno – vremensku nepovezanost između eksploatacionih polja od t do $t + 1$ i obezbeđuje koncentraciju proizvodnje. Jednačina (54) predstavlja ograničenje pri donošenju odluke da li je dobijeni plan proizvodnje profitabilan i prihvatljiv.

Model treba da maksimizira sadašnju vrednost plana proizvodnje koji se generiše otkopavanjem tehnoloških eksploatacionih polja tokom vremena planiranja.

6. FAZI VIŠEKRITERIJUMSKI ALGORITAM POLIGONALNOG PROSTORNOG KLASTERISANJA

Tehnološko eksploataciono polje (*TEP*) je deo rudnog ležišta kojeg karakteriše dati skup tehnoloških zahteva (kriterijuma). To znači da je *TEP* višekriterijumski objekat. Pretpostavimo da je rudno ležište podeljeno na konačan broj eksploatacionih blokova koji se otkopavaju. Prvi korak u modelu planiranja proizvodnje rudnika odnosi se na kreiranje *TEP* – ova koji imaju vrednosti atributa približne vrednostima tehnoloških zahteva. Stoga, prvi korak se bavi particijom ležišta u adekvatan broj *TEP* – ova. Stvarajući proces planiranja proizvodnje mnogo realnijim, primenili smo koncept teorije fazi skupova za neke ulazne podatke. Ovim pristupom, neodređenost ulaznih podataka se smanjuje i planiranje postaje mnogo fleksibilnije. Kreirajući takve *TEP* – ove (klustere) razvili smo fazi višekriterijumski algoritam poligonalnog prostornog klasterisanja koji je zasnovan na Tehnici za redosled prioriteta prema sličnosti sa idealnim rešenjem (*TOPSIS*) [33] i Ograničenom poligonalnom prostornom klasterisanju (*CPSC*) [34, 35, 36].

Rudarski inženjeri koriste blok model ležišta da predstave ležište kao trodimenzionalni poredak blokova. Takav model kreiran je primenom geostatističkih metoda na podatke dobijene istražnim bušenjem. U procesu planiranja proizvodnje, blok je definisan kao osnovni objekat.

Rudno ležište se može predstaviti kao skup eksploatacionih blokova $B = \{b_h\}_{h=1,2,\dots,H}$ i svaki blok okarakterisan je pomoću vektora atributa bloka $VAB_h = \{a_j^h\}_{j=1,2,\dots,A;\forall h \in H}$; gde je H ukupan broj blokova a A ukupan broj atributa, kao što su: tonaža bloka, kvalitet rude, itd.

Skup $TEP_i = \{b_l^i\}_{l \in H; \forall i \in N}$ definisan je kao podskup od B , i nazvan tehnološko eksploataciono polje. Svako *TEP* okarakterisano je pomoću vektora atributa tehnološkog eksploatacionog polja $VATEP_i = \{a_{ic}\}_{c=1,2,\dots,K;\forall i \in N}$; gde je K ukupan broj atributa i jednak je ukupnom broju tehnoloških kriterijuma. Vektor tehnološkog kriterijuma definisan je od strane planera proizvodnje rudnika (donosioca odluke); $C = \{C_j\}_{j=1,2,\dots,K}$.

Najzad, kreiranje *TEP* – ova može biti matematički formulisano kao višeciljni problem particije, u kome *TEP* – ovi moraju zadovoljiti tehnološke kriterijume, prema zadatim ograničenjima:

$$\begin{aligned} \max_{a_{1c} \in TEP_1} f(a_{1c}) &= [f_1(a_{11}), f_2(a_{12}), \dots, f_K(a_{1K})] \\ \max_{a_{2c} \in TEP_2} f(a_{2c}) &= [f_1(a_{21}), f_2(a_{22}), \dots, f_K(a_{2K})] \\ &\vdots \\ \max_{a_{ic} \in TEP_i} f(a_{ic}) &= [f_1(a_{i1}), f_2(a_{i2}), \dots, f_K(a_{iK})] \end{aligned} \quad (55)$$

Uz ograničenja

$$a_c^l \leq a_c \leq a_c^u, c = 1, 2, \dots, K \quad (56)$$

Gde je:

$f(a_{ic})$ – konačna relativna blizina (*KORB*) i – tog *TEP* – a do pozitivno idealnog tehnološkog rešenja, uzimajući u obzir sve tehnološke kriterijume

a_c^l – je donja granična vrednost c – tog tehnološkog kriterijuma

a_c^u – je gornja granična vrednost c – tog tehnološkog kriterijuma

Važno je napomenuti da neki od kriterijuma mogu biti isključeni iz skupa ograničenja; a to zavisi od prirode kriterijuma. Rešenje ovog problema je sledeće:

$$B = \bigcup_{i=1}^N TEP_i = TEP_1 \cup TEP_2 \cup \dots \cup TEP_i$$

$$TEP_\alpha \cap TEP_\beta = \emptyset, \alpha \neq \beta$$
(57)

6.1 Opis fazi TOPSIS metode u kontekstu klasterisanja

Kreiranje skupa tehnoloških eksploatacionih polja $TEP_i = \{b_l^i\}_{l < H; \forall i \in N}$ je dvostepeni višekriterijumski proces klasterisanja koji može biti tretiran kao dvostepeni višekriterijumski proces donošenja odluke. Prvi stepen podrazumeva donošenje odluke koji TEP (klaster) treba da raste, dok se u drugom stepenu donosi odluka koji blok treba da se doda izabranom klasteru. Ova dva stepena predstavljaju jednu iteraciju, i proces klasterisanja se sukcesivno ponavlja sve dok se u ležištu ne otkopaju svi slobodni blokovi odnosno dok svi slobodni blokovi ne budu dodeljeni nekom od TEP – ova (klastera).

Maksimizacija konačne sličnosti između vektora $VATEP_i = \{a_{ic}\}_{c=1,2,\dots,K; \forall i \in N}$ i vektora $C^{zah} = \{c_j^{zah}\}_{j=1,2,\dots,K}$, gde C^{zah} predstavlja zahtevani tehnološki vektor, je suština klasterisanja eksploatacionih blokova. Mera sličnosti izražena je preko koeficijenta relativne blizine. Izračunava se pomoću Tehnike za redosled prioriteta prema sličnosti sa idealnim rešenjem (*TOPSIS*). Za detaljan opis metode videti [33, 37, 38, 39, 40].

TOPSIS metoda je tehnika čiji je prioritet sličnost sa idealnim rešenjem predložena od strane Hwang i Yoon [33]. Osnovni koncept ove metode je da izabrana alternativa ima najkraće rastojanje od pozitivno idealnog rešenja i najdalje rastojanje od negativno idealnog rešenja.

Pretpostavimo da smo definisali N tehnoloških eksploatacionih polja. Problem prvog stepena koji se odnosi na to koji TEP treba da raste može biti koncizno izražen sledećom matricom odlučivanja:

$$\tilde{D} = [\tilde{x}_{ij}]_{N \times K} = \begin{bmatrix} TEP/C & C_1 & C_2 & \dots & C_j \\ TEP_1 & \tilde{x}_{11} & \tilde{x}_{12} & \dots & \tilde{x}_{1j} \\ TEP_2 & \tilde{x}_{21} & \tilde{x}_{22} & \dots & \tilde{x}_{2j} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ TEP_i & \tilde{x}_{i1} & \tilde{x}_{i2} & \dots & \tilde{x}_{ij} \end{bmatrix}$$
(58)

Gde je $\tilde{x}_{ij}$ izračunata vrednost tehnološkog eksploatacionog polja TEP_i u odnosu na tehnološki kriterijum C_j . Važno je napomenuti da postoji razlika između zahtevanog tehnološkog vektora i vektora tehnološkog kriterijuma, $C^{zah} \neq C$, i to će biti kasnije objašnjeno.

Korak 1. Konstrukcija normalizovane matrice odlučivanja $\tilde{R}$

Prvi korak se tiče normalizacije matrice odlučivanja $\tilde{D} = [\tilde{x}_{ij}]_{N \times K}$. Svaki član matrice $\tilde{x}_{ij}$ transformiše se korišćenjem sledeće jednačine:

$$\tilde{r}_{ij} = \frac{\tilde{x}_{ij}}{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^K \tilde{x}_{ij}} = \frac{(a_{ij}, b_{ij}, c_{ij})}{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^K (a_{ij}, b_{ij}, c_{ij})} \quad i = 1, 2, \dots, N \quad j = 1, 2, \dots, K$$
(59)

Normalizovana matrica odlučivanja je:

$$\tilde{R} = [\tilde{r}_{ij}]_{N \times K} = \begin{bmatrix} TEP/C & C_1 & C_2 & \cdots & C_j \\ TEP_1 & \tilde{r}_{11} & \tilde{r}_{12} & \cdots & \tilde{r}_{1j} \\ TEP_2 & \tilde{r}_{21} & \tilde{r}_{22} & \cdots & \tilde{r}_{2j} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ TEP_i & \tilde{r}_{i1} & \tilde{r}_{i2} & \cdots & \tilde{r}_{ij} \end{bmatrix} \quad (60)$$

Korak 2. Konstrukcija normalizovane težinske matrice odlučivanja $\tilde{P}$

Da bismo izbegli subjektivnost donosioca odluke o težinama kriterijuma, primenili smo koncept metode entropije [41, 42]. Shannon i Weaver [41] predložili su koncept entropije i ovaj koncept je istakao Zeleny [42] pri odlučivanju objektivne težine kriterijuma. Entropija je mera neodređenosti informacija formulisana korišćenjem teorije verovatnoće. Da bismo odredili težine kriterijuma pomoću entropije, uzima se u obzir normalizovana matrica odlučivanja $\tilde{R} = [\tilde{r}_{ij}]$ data u jednačini (60). Vrednost entropije svakog kriterijuma može se izračunati na sledeći način:

$$\tilde{e}_j = -k \sum_{i=1}^N \tilde{r}_{ij} \cdot \ln(\tilde{r}_{ij}) = -\frac{1}{\ln(N)} \sum_{i=1}^N \tilde{r}_{ij} \cdot \ln(\tilde{r}_{ij}), \forall j \in [1, K]; 0 \leq \tilde{e}_j \leq 1 \quad (61)$$

gde je $k = 1/\ln(N)$ konstanta sa vrednostima $0 \leq \tilde{e}_j \leq 1$, a N predstavlja broj alternativa (TEP – ova) u iteraciji.

Ciljana težina svakog kriterijuma data je sledećom jednačinom:

$$\tilde{w}_j = \frac{1 - \tilde{e}_j}{\sum_{j=1}^K 1 - \tilde{e}_j}, \forall j \in [1, K]; 0 \leq \tilde{w}_j \leq 1 \quad (62)$$

Radi jednostavnosti zapisa, sve vrednosti smo izrazili kao trouglaste fazi brojeve, ali neke od njih mogu biti izražene kao jednoznačna vrednost. Normalizovana težinska matrica odlučivanja $\tilde{P}$ izračunava se množenjem normalizovane vrednosti $\tilde{r}_{ij}$ sa težinama tehnoloških kriterijuma ($\tilde{w}_j$) i prikazana je sledećim izrazom:

$$\begin{aligned} \tilde{P} = [\tilde{p}_{ij}]_{N \times K} &= [\tilde{r}_{ij} \cdot \tilde{w}_j]_{N \times K} = \left[\frac{\tilde{r}_{ij}}{\sum_{i=1}^N \tilde{r}_{ij}} \cdot \tilde{w}_j \right]_{N \times K} = \\ &= \begin{bmatrix} TEP/C & C_1 & C_2 & \cdots & C_j \\ TEP_1 & \tilde{r}_{11}\tilde{w}_1 & \tilde{r}_{12}\tilde{w}_2 & \cdots & \tilde{r}_{1n}\tilde{w}_j \\ TEP_2 & \tilde{r}_{21}\tilde{w}_1 & \tilde{r}_{22}\tilde{w}_2 & \cdots & \tilde{r}_{2n}\tilde{w}_j \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ TEP_i & \tilde{r}_{i1}\tilde{w}_1 & \tilde{r}_{i2}\tilde{w}_2 & \cdots & \tilde{r}_{ij}\tilde{w}_j \end{bmatrix}, \forall j \in [1, K]; \sum_{j=1}^K \tilde{w}_j = 1 \end{bmatrix} \quad (63)$$

Korak 3. Definisanje idealnog i negativno – idealnog rešenja

Fazi pozitivno idealno rešenje $\tilde{A}^+$ i fazi negativno idealno rešenje $\tilde{A}^-$ definišu se kao:

$$\tilde{A}^+ = \left\{ \left(\max_{i=1,2,\dots,N} \tilde{p}_{ij} | j \in J \right), \left(\min_{i=1,2,\dots,N} \tilde{p}_{ij} | j \in J' \right) \right\} = \{\tilde{p}_1^+, \tilde{p}_2^+, \dots, \tilde{p}_K^+\} \quad (64)$$

$$\tilde{A}^- = \left\{ \left(\min_{i=1,2,\dots,N} \tilde{p}_{ij} | j \in J \right), \left(\max_{i=1,2,\dots,N} \tilde{p}_{ij} | j \in J' \right) \right\} = \{\tilde{p}_1^-, \tilde{p}_2^-, \dots, \tilde{p}_K^-\} \quad (65)$$

$$\max_{i=1,2,\dots,N} \tilde{p}_{ij} = \max_{i=1,2,\dots,N} (a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}) = \max_{i=1,2,\dots,N} (b_{ij}), \forall j \in [1, K] \quad (66)$$

$$\min_{i=1,2,\dots,N} \tilde{p}_{ij} = \min_{i=1,2,\dots,N} (a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}) = \min_{i=1,2,\dots,N} (b_{ij}), \forall j \in [1, K] \quad (67)$$

Gde su:

$J = \{j = 1, 2, \dots, K | j \text{ odgovara kriterijumu koji teži maksimumu}\}$

$J' = \{j = 1, 2, \dots, K | j \text{ odgovara kriterijumu koji teži minimumu}\}$

Korak 4. Mera rastojanja između alternativa i idealnih rešenja

Rastojanje od svakog TEP – a do $\tilde{A}^+$ i $\tilde{A}^-$ računa se prema sledećim jednačinama:

$$d_i^+ = \sum_{j=1}^K d(\tilde{p}_{ij}, \tilde{p}_j^+), \forall i \in [1, N] \quad (68)$$

$$d_i^- = \sum_{j=1}^K d(\tilde{p}_{ij}, \tilde{p}_j^-), \forall i \in [1, N] \quad (69)$$

Gde je $d(\tilde{p}_{ij}, \tilde{p}_j)$ mera rastojanja između dva trouglasta fazi broja, i računa se na sledeći način:

$$d(\tilde{p}_{ij}, \tilde{p}_j) = \sqrt{\frac{1}{3} [(a_{ij} - a_j)^2 + (b_{ij} - b_j)^2 + (c_{ij} - c_j)^2]} \quad (70)$$

Korak 5. Mera relativnog rastojanja do idealnog rešenja i konačni rang alternativa

Konačni rang alternativa dobija se iz odnosa vrednosti rastojanja do idealnog rešenja. Koeficijent relativne blizine KRB svakog TEP – a izračunava se kao:

$$KRB_i = \frac{d_i^-}{d_i^- + d_i^+}, \forall i \in [1, N] \quad (71)$$

Odluka o tome koji TEP treba da raste donosi se prema sledećem pravilu izbora:

$$TEP^{rast} = \max(KRB_1, KRB_2, \dots, KRB_N) \quad (72)$$

Problem drugog stepena koji se odnosi na to koji blok treba da bude dodat izabranom klasteru (TEP^{rast}) definisan je sledećim oblikom:

$$b^{dod} = \max(KRB_1^{dod} + O_1^{dod}, KRB_2^{dod} + O_2^{dod}, \dots, KRB_M^{dod} + O_M^{dod}) \quad (73)$$

Gde su:

KRB_M^{dod} – koeficijent nove relativne blizine novog TEP – a dobijen dodavanjem m – tog susednog bloka izabranom klasteru TEP^{rast} a susedni blok je blok koji ima makar jednu zajedničku ivicu sa TEP^{rast} ,

O_M^{dod} – funkcija penalizacije ili funkcija “troška”

M – broj susednih eksploatacionih blokova

Koeficijenti nove relativne blizine računaju se primenom $TOPSIS$ metode na sledećoj matrici odlučivanja:

$$\tilde{D}^{blok} = [\tilde{\varphi}_{mj}]_{M \times K} = \begin{bmatrix} (TEP^{rast} \cup b)/C & C_1 & C_2 & \cdots & C_j \\ TEP^{rast} \cup b_1 & \tilde{\varphi}_{11} & \tilde{\varphi}_{12} & \cdots & \tilde{\varphi}_{1j} \\ TEP^{rast} \cup b_2 & \tilde{\varphi}_{21} & \tilde{\varphi}_{22} & \cdots & \tilde{\varphi}_{2j} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ TEP^{rast} \cup b_m & \tilde{\varphi}_{m1} & \tilde{\varphi}_{m2} & \cdots & \tilde{\varphi}_{mj} \end{bmatrix} \quad (74)$$

Gde je:

$\tilde{\varphi}_{mj}$ – nova procenjena vrednost izabranog klastera $TEP^{rast} \cup b_m$; $m = 1, 2, \dots, M$ u odnosu na tehnološki kriterijum C_j

Vrednost $\tilde{\varphi}_{mj}$ procenjuje se nakon što se definiše unija između vektora atributa izabranog klastera TEP^{rast} i vektora atributa susednog bloka:

$$\tilde{\varphi}_{mj} = VATEP^{rast} \cup VAB^m = \{a_c^{rast}\}_{c=1,2,\dots,K} \cup \{a_j^m\}_{j=1,2,\dots,A; \forall m \in M}; K = A \quad (75)$$

Koristeći funkciju “troška” (penalizacije) naš cilj je da izaberemo klaster koji će da raste i koji će sačuvati maksimalni stepen fleksibilnosti za rast drugih klastera. Da bismo izabrali funkciju “troška” koja meri smanjenje fleksibilnosti rasta klastera, posmatramo efekat rasta jednog klastera na sposobnost rasta drugih klastera. Ova funkcija “troška” data je na sledeći način [34]:

$$O_M^{dod} = \frac{B_m^{pre} - B_m^{posle}}{B_m^{pre}} = \frac{B_m^{zaj} + B_m^{zip} + B_m^{jal} - 3}{B_m^{pre}}, \forall m \in [1, M] \quad (76)$$

Gde su:

B_m^{pre} – broj eksploatacionih blokova koji okružuju TEP^{rast} pre dodavanja m – tog bloka

B_m^{posle} – broj eksploatacionih blokova koji okružuju TEP^{rast} posle dodavanja m – tog bloka

B_m^{zaj} – broj zajedničkih ivica između TEP^{rast} i bloka koji se dodaje

B_m^{zip} – broj zajedničkih ivica između bloka koji se dodaje i preostalih TEP – ova

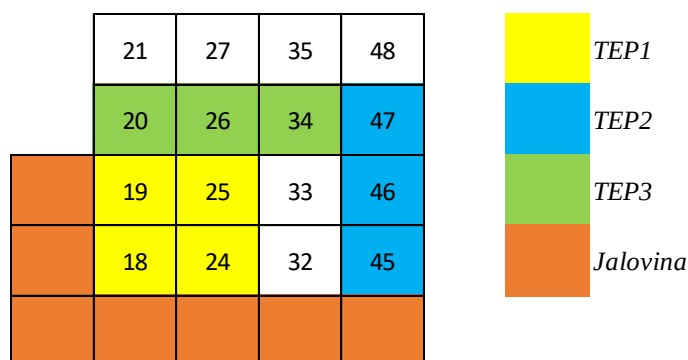
B_m^{jal} – broj zajedničkih ivica između bloka koji se dodaje i jalovinskih blokova. Jalovinski blok je blok koji ne sadrži korisnu mineralnu sirovinu

6.2 Prostorna homogenost TEP – a

Kada definišemo skupove B_m^{pre} i B_m^{postle} neophodno je da zadovoljimo sledeća dva prostorna ograničenja:

- Samo blokovi koji imaju makar jednu zajedničku ivicu sa TEP^{rast} mogu se dodati TEP^{rast} ,
- $TEP_i, \forall i \in [1, N]$ ne sme biti podeljeno na dve ili više celina, tj. tehnološko eksploataciono polje uvek mora biti homogeno

Drugo ograničenje znači da bilo koji eksploatacioni blok koji narušava prostornu homogenost bilo kojeg TEP – a ne može biti element B_m^{pre} odnosno B_m^{postle} . Pretpostavimo da je TEP_1 izabran da raste i prostorni plan tehnoloških eksploatacionih polja prikazan je na slici 6.



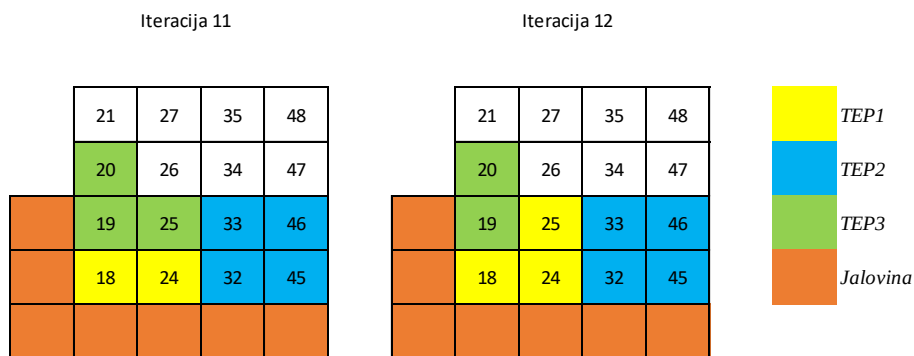
Slika 6. Prostorni plan TEP – ova

Prema prostornom ograničenju samo blokovi 20, 32 i 33 mogu biti elementi skupa B_m^{pre} zato što blok 26 narušava prostornu homogenost TEP_3 . Ako dodamo blok 33 klasteru TEP_1 tada samo blokovi 20, 32 i 34 mogu biti elementi skupa B_m^{postle} zato što blok 46 narušava prostornu homogenost TEP_2 . Dakle, za $TEP_1 \cup b_{33}$ vrednost funkcije penalizacije jednaka je 0. Važno je napomenuti da je uzajamna kradja blokova od strane TEP – ova dozvoljena, ali prostorna homogenost TEP – ova uvek mora biti sačuvana.

6.3 Pojava „kradje“ u algoritmu klasterisanja

„Krađa“ karakteriše fleksibilnost primenjenog algoritma klasterisanja pružajući klasterima tj. TEP – ovima mogućnost maksimalnog ispunjenja ciljanih tehnoloških zahteva. Na taj način, TEP – ovi poboljšavaju svoje karakteristike odnosno teže što približnijim vrednostima zahtevanom godišnjem kapacitetu proizvodnje, teže da budu što kompaktniji (da budu kvadratnog oblika) i teže ustaljenoj vrednosti standardne devijacije kvaliteta rude.

Kao što je i ranije pomenuto, „krađa“ susednog bloka je dozvoljena i moguća u dva slučaja. U prvom slučaju, kada je klaster odnosno TEP zarobljen a izabran je da raste i oko njega se ne nalaze slobodni blokovi, tada on oduzima tj. „krade“ blok od susednog klastera (TEP – a). U drugom slučaju, „krađa“ je moguća u trenutku kada su svi klasteri tj. TEP – ovi popunjeni odnosno kada nema slobodnih blokova u ležištu koji mogu da se dodaju nekom od klastera. U oba slučaja se može desiti zastoj odnosno „ćorsokak“ algoritma što će detaljno biti objašnjeno u narednom poglavlju 6.3. Na slici 7 prikazan je slučaj „kradje“ bloka od susednog klastera.



Slika 7. Krađa bloka od susednog klastera (TEP – a)

Na primer, u iteraciji 11, primenom dvostepenog višekriterijumskog procesa klasterisanja izabran je TEP_1 da raste. Potencijalni susedni blokovi koji ga okružuju su blokovi 25 i 32 (blok 19 ne može biti potencijalni susedni blok zbog narušavanja prostorne homogenosti objašnjene u poglavlju 6.2). Iz skupa potencijalnih susednih blokova, primenom pomenutog procesa klasterisanja, izabran je blok 25 koji će biti dodat eksploatacionom polju TEP_1 . To znači da je, u iteraciji 12, TEP_3 izgubio blok 25 tj. TEP_1 je oduzeo blok 25 od TEP_3 što znači da je došlo do „krađe“ bloka.

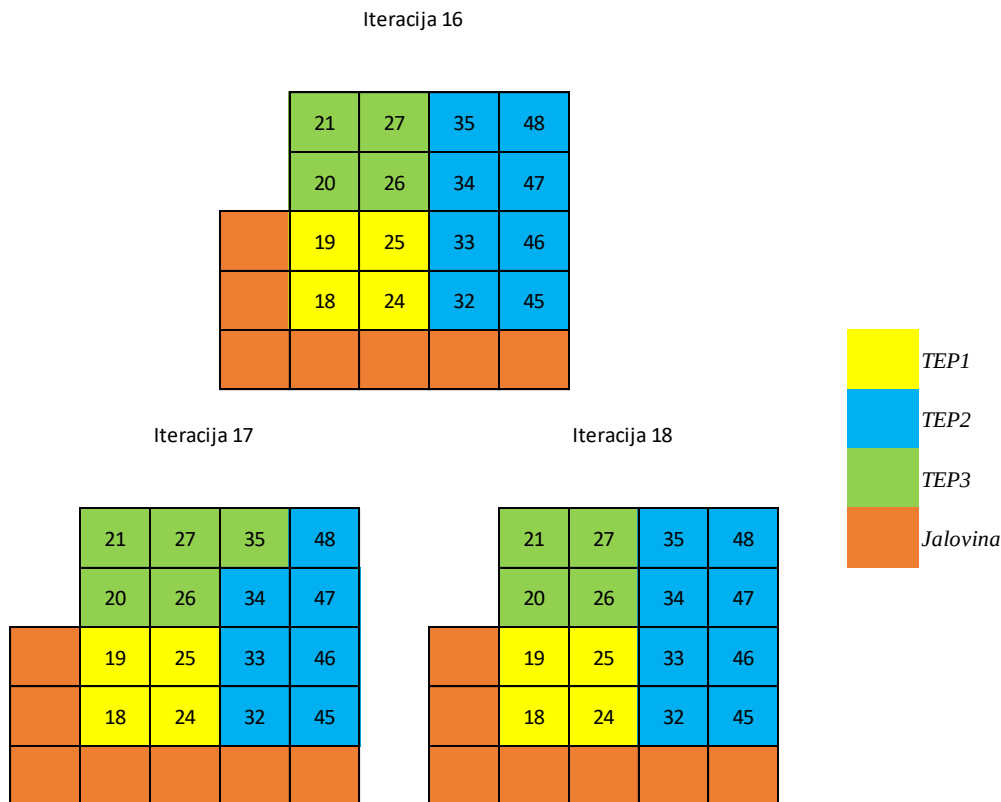
6.4 Pojava zastoja u algoritmu klasterisanja („ćorsokak“)

„Ćorsokak“ predstavlja stanje kod koga u procesu rasta klastera (TEP – ova) dolazi do beskonačnog međusobnog preuzimanja („krađe“) jednog bloka koji ima zajedničke ivice sa klasterima koji su u „sukobu“ u nekoliko uzastopnih iteracija [34, 35, 36].

Pod pojmom „ćorsokaka“ podrazumeva se situacija u kojoj se dva ili više klastera, u našem slučaju tehnoloških eksploatacionih polja, međusobno „bore“ oko pripadnosti jednog bloka u nekoliko uzastopnih iteracija. Ova pojava podrazumeva da su klasteri koji su u „sukobu“ zarobljeni, odnosno da se oko njih ne nalaze slobodni blokovi. Težnja za što boljim i približnijim ispunjenjem tehnoloških zahteva je glavni razlog zbog kog dolazi do zastoja algoritma tj. „ćorsokaka“. Drugim rečima, izabrani klaster koji treba da raste u određenoj iteraciji uzima („krađe“) blok od susednog klastera a već u sledećoj iteraciji se taj blok vraća u posed prvobitnom klasteru. Ukoliko se ova situacija dešava u nekoliko uzastopnih iteracija dolazimo do zaključka da je u pitanju zastoj, tj. „ćorsokak“. U toj situaciji se taj blok „zaključava“ odnosno stavlja se na tzv. „listu čekanja“ a proces iteracija se normalno nastavlja. Na taj način, izabrani klaster koji treba da raste usmerava se da raste u drugom pravcu, tj. dodaje mu se neki drugi susedni blok koji nije „zaključan“, odnosno koji nije na „listi čekanja“. Prema tome, u ovoj situaciji algoritam se ne može zaustaviti (ne može biti stopiran) i može da nastavi sa iteracijama beskonačno mnogo puta dok se ne ispuni zadato ograničenje ili dok ga sam planer ne zaustavi [34, 35, 36].

U i – toj iteraciji, dvostepenim fazi višekriterijumskim algoritmom poligonalnog prostornog klasterisanja izabran je TEP_a koji treba da raste i dodaje mu se blok b_h . U iteraciji $i + 1$, istim postupkom klasterisanja, izabran je susedni klaster – TEP_b da raste i iz skupa potencijalnih susednih blokova koji ga okružuju dodaje mu se isti blok b_h (dolazi do „krađe“ bloka). U iteraciji $i + 2$, istim postupkom klasterisanja, ponovo je izabran prvi klaster – TEP_a da raste. Sada, iz novog skupa potencijalnih susednih blokova koji ga okružuju dodaje mu se blok b_h (u ovom slučaju ukraden blok se vraća u posed TEP_a – a koji ga je izgubio u prethodnoj iteraciji $i + 1$). Ova situacija zapravo predstavlja „ćorsokak“. U iteraciji $i + 3$, taj blok b_h se stavlja na tzv. „listu čekanja“ odnosno „zaključava se“ i njega nije moguće dodati nijednom klasteru. Već u iteraciji $i + 4$, blok b_h se otključava i može biti potencijalno dodat nekom od klastera.

Primer. U iteraciji 16, dvostepenim fazi višekriterijumskim algoritmom poligonalnog prostornog klasterisanja izabran je TEP_2 koji treba da raste i dodaje mu se blok 35. U iteraciji 17, istim postupkom klasterisanja izabran je TEP_3 da raste. Iz skupa potencijalnih susednih blokova koji ga okružuju (19, 25, 34 i 35), poštujući pravilo o homogenosti klastera, dodaje mu se blok 35 (u ovom slučaju dolazi do oduzimanja – „krađe“ bloka od susednog TEP_2). U iteraciji 18, istim postupkom klasterisanja, ponovo je izabran susedni TEP_2 da raste. Iz skupa potencijalnih susednih blokova koji ga okružuju (24, 25, 26 i 35) dodaje mu se blok 35 (u ovom slučaju ukraden blok se vraća u posed TEP_2 kojeg je izgubio u prethodnoj iteraciji). Ova situacija zapravo predstavlja „ćorsokak“. Dalje, u iteraciji 19, blok 35 se stavlja na tzv. „listu čekanja“ odnosno „zaključava se“ i njega nije moguće dodati nijednom klasteru. Već u iteraciji 20, blok 35 se otključava i potencijalno se može dodati nekom od klastera. Na slici 8. prikazan je proces „ćorsokaka“ odnosno zastoja algoritma klasterisanja.



Slika 8. Zastoj odnosno „ćorsokak“ algoritma klasterisanja

6.5 Kreiranje vektora atributa bloka, vektora atributa tehnološkog eksploatacionog polja i zahtevanog tehnološkog vektora

U našem modelu, vektor atributa bloka $VAB_h = \{a_j^h\}_{j=1,2,\dots,A;\forall h \in H}$ sastoji se od sledećih komponenti:

$$VAB_h = \{\tilde{a}_1^h, a_{2,1}^h, a_{2,2}^h, \dots, a_{2,\gamma}^h\}_{j=1+\gamma;\forall h \in H} \quad (77)$$

Gde su:

$\tilde{a}_1^h$ – rezerve rude u bloku h (t), izražene kao trouglasti fazi broj,

$a_{2,\gamma}^h$ – sadržaj h – tog bloka u odnosu na γ – ti metal (%),

γ – ukupan broj koncentrata sadržanih u rudi. Za polimetaličnu rudu, $\gamma > 1$.

Vektor atributa eksploatacionog polja $VATEP_i = \{a_{ic}\}_{c=1,2,\dots,K;\forall i \in N}$ sastoji se od sledećih komponenti:

$$VATEP_i = \{a_{ic}\}_{c=1,2,\dots,K;\forall i \in N} = \{\tilde{a}_{i1}, a_{i2}, a_{i,3,1}, a_{i,3,2}, \dots, a_{i,3,\gamma}\}_{c=2+\gamma;\forall i \in N} \quad (78)$$

Gde su:

$\tilde{a}_{i1}$ – rezerve rude u TEP – u (t), izražene kao trouglasti fazi broj,

a_{i2} – kompaktnost TEP – a,

$a_{i,3,\gamma}$ – standardna devijacija kvaliteta rude u TEP – u, u odnosu na γ – ti metal (%)

Rezerve rude u TEP – u predstavljaju sumu rezervi rude u blokovima koji se nalaze unutar određenog TEP – a:

$$\tilde{a}_{i1} = \sum_{h=1}^{l_i} \tilde{a}_1^h, \forall i \in [1, N], l_1 + l_2 + \dots + l_N = H \quad (79)$$

Kompaktnost TEP – a definisana je sledećim odnosom: kvadriran obim podeljen sa površinom odgovarajućeg TEP – a:

$$a_{i2} = \frac{P_i^2}{A_i} = \frac{P_i^2}{l_i \cdot (b_e^2)}, \forall i \in [1, N] \quad (80)$$

Gde su:

P_i – obim i – tog TEP – a,

A_i – površina i – tog TEP – a,

l_i – ukupan broj blokova i – tog TEP – a,

b_e – dužina ivice bloka (m).

Standardna devijacija kvaliteta rude u TEP – u, u odnosu na γ – ti metal računa se na sledeći način:

$$a_{i,3,\gamma} = \sqrt{\frac{1}{l_i} \sum_{h=1}^{l_i} (\bar{a}_{2,\gamma} - a_{2,\gamma}^h)^2}, l_i < H, \forall i \in [1, N], \forall \gamma \in [1, Y] \quad (81)$$

Zahtevani tehnološki vektor $C^{zah} = \{c_j^{zah}\}_{j=1,2,\dots,K}$ uključuje sledeće komponente:

$$C^{zah} = \{c_j^{zah}\}_{j=1,2,\dots,K} = \{\tilde{c}_1^{zah}, c_2^{zah}, c_{3,1}^{zah}, c_{3,2}^{zah}, \dots, c_{3,\gamma}^{zah}\}_{j=2+\gamma} \quad (82)$$

Gde su:

$\tilde{c}_1^{zah}$ – godišnji kapacitet proizvodnje (t /godina), izražen kao trouglasti fazi broj,

c_2^{zah} – željena ili ciljana kompaktnost TEP – a, definisana vrednošću 16,

$c_{3,\gamma}^{zah}$ – standardna devijacija kvaliteta rude, u odnosu na γ – ti metal

Godišnji kapacitet proizvodnje predstavlja količinu rude koja treba da se eksploatiše za jednu godinu. Računa se kao suma rezervi rude u blokovima podeljena sa ukupnim brojem vremena planiranja (broj tehnoloških eksploatacionih polja):

$$\tilde{c}_1^{zah} = \frac{1}{N} \sum_{h=1}^H \tilde{a}_1^h \quad (83)$$

Ciljana vrednost kompaktnosti TEP – a izražena je Švarcbergovim indeksom kompaktnosti kvadrata [43]:

$$c_2^{zah} = \frac{(4e)^2}{e^2} = 16 \quad (84)$$

Gde je:

e – ivica kvadrata odnosno eksploatacionog bloka

Standardna devijacija kvaliteta rude, u odnosu na γ – ti metal, odgovara standardnoj devijaciji kvaliteta rude u TEP – u, u odnosu na γ – ti metal. Računa se na sledeći način i ne postoji ciljana vrednost za ovu komponentu:

$$c_{3,\gamma}^{zah} = a_{i,3,\gamma} \quad (85)$$

6.6 Proračun vrednosti tehnološkog eksploatacionog polja TEP - a u odnosu na (zahtevane) tehnološke kriterijume

Glavni cilj vektora tehnoloških kriterijuma je da omoguće kreiranje TEP – ova tako da je krajnja sličnost između vektora $VATEP_i = \{a_{ic}\}_{c=1,2,\dots,K; \forall i \in N}$ i $C^{zah} = \{c_j^{zah}\}_{j=1,2,\dots,K}$ maksimalizovana. To znači da svaki TEP mora zadovoljiti tehnološke zahteve što je moguće više. Vektor tehnoloških kriterijuma $C = \{C_j\}_{j=1,2,\dots,K}$ sastoji se od sledećih komponenti:

$$C = \{C_j\}_{j=1,2,\dots,K} = \{\tilde{C}_1, C_2, C_{3,1}, C_{3,2}, \dots, C_{3,\gamma}\}_{j=2+\gamma} \quad (86)$$

Gde su:

$\tilde{C}_1$ – apsolutno rastojanje između godišnjeg kapaciteta proizvodnje i rezerve rude u TEP – u (t),

C_2 – apsolutno rastojanje između ciljane vrednosti kompaktnosti i kompaktnosti TEP – a,

$C_{3,\gamma}$ – standardna devijacija kvaliteta rude u TEP – u u odnosu na γ – ti metal (%)

Vrednost tehnološkog eksploatacionog polja TEP - a u odnosu na tehnološki kriterijum $\tilde{C}_1$ računa se na sledeći način, i treba da bude minimalna:

$$\tilde{x}_{i1} = \frac{\bar{a}_0(\tilde{a}_{i1})}{\bar{c}_0(\tilde{c}_1^{zah})} \times 100\%, \forall i \in [1, N] \quad (87)$$

Vrednost tehnološkog eksploatacionog polja TEP - a u odnosu na tehnološki kriterijum C_2 računa se na sledeći način, i treba da bude minimalna:

$$x_{i2} = |16 - a_{i2}|, \forall i \in [1, N] \quad (88)$$

Vrednost tehnološkog eksploatacionog polja TEP - a u odnosu na tehnološki kriterijum $C_{3,\gamma}$ računa se na sledeći način, i treba da bude minimalna:

$$x_{i,3,\gamma} = a_{i,3,\gamma}, \forall i \in [1, N], \forall \gamma \in [1, Y] \quad (89)$$

Isti proračun primenjuje se kada definišemo vrednosti matrice odlučivanja $\tilde{D}^{blok} = [\tilde{\varphi}_{mj}]_{M \times K}$.

Skup ograničenja tehnoloških kriterijuma $a_c^l \leq a_c \leq a_c^u, c = 1, 2, \dots, K$ sastoji se samo od ograničenja vezanog za kriterijum $\tilde{C}_1$:

$$\begin{aligned} -10\% &\leq a_1 \leq +10\% \\ -10\% &\leq \left(1 - \frac{\bar{a}_0(\tilde{a}_{i1})}{\bar{c}_0(\tilde{c}_1^{zah})}\right) \times 100\% \leq +10\%; \forall i \in [1, N] \end{aligned} \quad (90)$$

Gde je $\bar{a}_0(\tilde{a}_{i1})$ defazifikovana vrednost rezervi rude u TEP - u a $\bar{c}_0(\tilde{c}_1^{zah})$ je defazifikovana vrednost godišnjeg kapaciteta proizvodnje (videti jednačinu (48)). Ovo ograničenje podrazumeva da je TEP ispunio ciljanu (zahtevanu) vrednost tehnološkog kriterijuma $\tilde{c}_1^{zah}$ i da može odstupati u intervalu od -10% do $+10\%$ od ciljane vrednosti godišnjeg kapaciteta proizvodnje za jednu godinu.

6.7 Teorija grafova u kontekstu klasterisanja i algoritam kreiranja TEP – a

U ovom radu, prema teoriji grafova, rudno ležište (RL) sastavljeno od svih eksploatacionih blokova, zamišljeno je kao graf $RL = (B, E)$, gde je $B = \{b_h\}_{h=1,2,\dots,H}$ skup eksploatacionih blokova, a $E = \{e_{uv} | u, v = 1, 2, \dots, H; u \neq v\}$ je skup ivica sa e_{uv} predstavljajući zajedničke ivice bloka u i bloka v [45,46].

Elementi skupa B odnosno eksploatacioni blokovi nazivaju se čvorovima grafa dok se elementi skupa E odnosno zajedničke ivice dva susedna bloka koje ih spajaju nazivaju grane grafa. [44]

Problem kreiranja TEP – ova rešen je višekriterijumskom particijom grafa RL . Ovaj pristup pokušava da naslovi situaciju u kojoj bi kreiranje TEP – a trebalo istovremeno da maksimizira konačnu relativnu blizinu ($KORB$) svakog TEP – a sa tehnološkim zahtevima, uzimajući u obzir tehnološke kriterijume i ograničenja. Dat je skup $B = \{b_h\}_{h=1,2,\dots,H}$, i ukupan broj TEP – ova, $N \geq 2$, tada se model kreiranja TEP – ova može formulisati na sledeći način:

$$Z = \max_{\forall i \in [1, N]} \{KORB_i\} = \max_{\forall i \in [1, N]} \left\{ \frac{d_i^-(\cup_{h=1}^{l_i < H} b_i^h)}{d_i^-(\cup_{h=1}^{l_i < H} b_i^h) + d_i^+(\cup_{h=1}^{l_i < H} b_i^h)} \right\} \quad (91)$$

Uz ograničenja

$$\sum_{i=1}^N b_i^h = 1, \forall h \in [1, H] \quad (92)$$

$$\tilde{a}_1^l \leq \left(1 - \frac{\text{defazifikovan}(\sum_{h=1}^H \tilde{a}_{1i}^h b_i^h)}{\text{defazifikovan}(\tilde{c}_1^{zah})}\right) \times 100\% \leq \tilde{a}_1^u, \forall i \in [1, N] \quad (93)$$

$$b_i^h \in [0,1], \forall h \in H, \forall i \in N \quad (94)$$

Gde $(\bigcup_{h=1}^{l_i < H} b_i^h)$ predstavlja uniju eksploatacionih blokova koji se nalaze u konačnom i – tom TEP – u. Ograničenje (92) primorava da eksploatacioni blok može pripadati jednom i samo jednom TEP – u. To znači da nema preseka između TEP – ova, $TEP_\alpha \cap TEP_\beta = \emptyset, \alpha \neq \beta$. Ograničenje (93) je već objašnjeno, i ono ne dozvoljava da bilo koji TEP bude podeljen na dve ili više celina, $TEP_i \neq \emptyset, \forall i \in [1, N]$. Ograničenje (94) odnosi se na binarnu promenljivu b_i^h , koja je jednaka 1 ako i samo ako eksploatacioni blok h pripada i – tom TEP – u.

Ovde smo predstavili algoritam particije grafa RL , i on je zasnovan na Algoritmu ograničenog poligonalnog prostornog klasterisanja [34, 35, 36]. Zapis algoritma predstavljen je u Algoritmu 1.

1. Podesiti iteraciju: $\xi = 1$;
2. Kreirati skup; $TEP_i = \{TEP_1, TEP_2, \dots, TEP_N\}$
3. Kreirati skup; $C = \{C_j\}_{j=1,2,\dots,K} = \{\tilde{C}_1, C_2, C_{3,1}, C_{3,2}, \dots, C_{3,\gamma}\}_{j=2+\gamma}$
4. Izabrati najbolje tehnološko eksploataciono polje ($NTEP$) za rast;
 $NTEP = TEP^{rast} = \max(KRB_1, KRB_2, \dots, KRB_N)$
5. Kreirati listu susednih eksploatacionih blokova (SB) kao kandidate za rast $NTEP$ – a tako da:
 - 5.1 blok ima makar jednu zajedničku ivicu sa TEP^{rast}
 - 5.2 nijedna homogenost preostalih TEP – ova nije narušena
 - 5.3 $NSB \notin SB$ ako:
 - za $\xi + 1, NSB \in TEP_\alpha^{rast}$
 - za $\xi + 2, NSB \in TEP_\beta^{rast}$
 - za $\xi + 3, b_h \in TEP C_\alpha^{rast}$

Ovo je da bi se izbeglo zaglavljivanje algoritma.
6. Izabrati najbolji eksploatacioni blok (NSB) iz SB – a i dodati $NTEP$ – u;
 $NSB = \max(KRB_1^{dod} + O_1^{dod}, KRB_2^{dod} + O_2^{dod}, + \dots +, KRB_M^{dod} + O_M^{dod})$
7. Dodati NSB $NTEP$ – u i kreirati novo tehnološko eksploataciono polje;
 $NOVTEP = NTEP \cup NSB$
8. Ažurirati stanje vektora atributa eksploatacionog polja $NOVTEP$ – a
9. Ako:
 - 9.1 nema slobodnih eksploatacionih blokova
 - 9.2 $-10\% \leq \left(1 - \frac{\bar{a}_0(\bar{a}_{i1})}{\bar{c}_0(\bar{c}_1^{zah})}\right) \times 100\% \leq +10\%; \forall i \in [1, N]$
 - 9.3 $a_{i,3,\gamma}, \forall i \in [1, N], \forall \gamma \in [1, Y] \rightarrow$ konvergira (teži)

onda zaustaviti
10. U suprotnom, idite u Korak 1 i podesite iteraciju $\xi + 1$

Algoritam 1. Algoritam kreiranja TEP – a.

Naš dvostepeni fazi višekriterijumski algoritam poligonalnog prostornog klasterisanja koristi se za particiju rudnog ležišta na adekvatan broj celina tako da svaka celina zadovoljava tehnološke zahteve date od strane planera proizvodnje rudnika. Kao što smo ranije pomenuli, ove celine nazivaju se tehnološka eksploataciona polja. Algoritam predstavlja iterativni proces koji počinje iz inicijalnog stanja sa ciljem ispunjenja željenih zahteva. Faza inicijalizacije (“sejanja”) podrazumeva izbor N tehnoloških eksploatacionih polja iz skupa eksploatacionih blokova koji imaju makar jednu zajedničku ivicu sa jalovinom. Kao što može da se vidi sa slike 7, ovi blokovi smešteni su na obodu rudnog ležišta a to su blokovi: 18, 19, 24, 32, 45 koji predstavljaju kandidate koji će biti izabrani kao

početni “inicijalni” TEP – ovi. Očigledno je da je inicijalni TEP sastavljen od jednog i samo jednog eksploatacionog bloka. Iz skupa obodnih blokova izabrali smo prvih N blokova prema opadajućem nizu vrednosti koeficijenta relativne blizine. Čim se izaberu početni TEP – ovi, oni počinju da „žive“ i proces rasta TEP – ova može da počne. Svaki TEP raste dodavanjem jednog po jednog susednog bloka dok se ne postigne željeno stanje TEP – a. Rast TEP – ova po prirodi je iterativni proces. Na početku svake iteracije najpre biramo koji TEP treba da raste. Izbor se zasniva na merenju višedimenzionalnih rastojanja između trenutnog i željenog stanja svakog TEP – a. Izražava se koeficijentom relativne blizine i TEP koji ima najveću vrednost KRB – a je najbolji za rast. Nakon izbora najboljeg TEP – a nastavljamo sa procesom iteracija koji blok je najbolji za dodavanje. Iz skupa susednih blokova koji okružuju izabrani TEP izabrali smo najbolji blok po istom pristupu po kom smo birali najbolji TEP ali sa dodatkom funkcije penalizacije. Međusobna krađa bloka između dva susedna TEP – a je dozvoljena ali homogenost svakog TEP – a uvek mora biti očuvana. Tokom procesa rasta, može doći do beskonačnog međusobnog preuzimanja (krađe). Ako je blok međusobno “prisvojen” jednom od dva susedna TEP – a u tri uzastopne iteracije možemo da kažemo da blok osciluje između njih. U tom slučaju algoritam je zaglavljen i lokalni optimum je postignut. Da bismo omogućili algoritmu da dostigne globalni optimum isključili smo oscilirajući blok iz skupa susednih blokova i algoritam nastavlja da vrši iteracije. Nakon toga, isključeni blok se vraća u proces klasterisanja. Pošto je blok dodat, vektor atributa eksploatacionog polja $VATEP_i = \{a_{ic}\}_{c=1,2,\dots,K; \forall i \in N}$ se mora ažurirati.

Uslovi zaustavljanja iterativnog algoritma 9.1 i 9.2 za razvijeni algoritam predstavljaju trenutak kada je algoritam izvršen, dok uslov 9.3 dozvoljava algoritmu da nastavi fino podešavanje. Proces rasta se nastavlja sve dok se ne otkopaju slobodni eksploatacioni blokovi i dok se ne postigne željeno stanje svakog eksploatacionog polja u odnosu na zadate greške.

7. MODEL PROGNOZE CENE METALA I OPERATIVNIH TROŠKOVA

Obično se ekonomska procena TEP – a zasniva na sledećim glavnim komponentama: cena metala, troškovi i diskontna stopa.

Jedna od najuticajnijih promenljivih na ekonomsku vrednost TEP – a je cena metala. Ova promenljiva pripada skupu spoljašnjih promenljivih na koje planeri proizvodnje nemaju uticaj. Cena metala je direktna posledica ponašanja tržišta metala. Sposobnost definisanja zakona ponašanja promenljive kroz vreme, može pomoći planerima da pronađu mnogo efikasnija i realnija rešenja. Na ovaj način takođe povećavamo fleksibilnost u procesu odlučivanja. U tu svrhu, razvili smo algoritam prognoze koji je zasnovan na kombinaciji fazi K – sredina algoritma klasterisanja i procesa povratka na srednju vrednost.

Fazi K – sredina algoritmom klasterisanja smo podelili vremenske serije praćenih cena metala u sedam celina odnosno sedam stanja. Svako stanje opisano je odgovarajućom lingvističkom promenljivom a zatim transformisano u trouglasti fazi broj koji je definisan kodom opsega. Prema tome, procesom povratka na srednju vrednost vršiće se prognoza budućih stanja cena metala a ne jednoznačne vrednosti cene metala.

Uzimamo u obzir cenu metala i označavamo je kao promenljivu X . Ako je vrednost te promenljive regulisana zakonima verovatnoće, onda se promenljiva X može tretirati kao stohastička promenljiva. Pretpostavimo da smo pratili vrednost X u jednakom intervalu, $\Delta\tau_i = \tau_i - \tau_{i-1} = const.; i = 2, 3, \dots, T$. U ovom radu interval praćenja je jedan mesec i koristimo simbole τ i T da bismo napravili razliku između intervala praćenja i intervala planiranja (jedna godina). Takav niz praćenih vrednosti, $X_\tau = \{x_1, x_2, \dots, x_T\}$, naziva se stohastička vremenska serija. Ako odredimo neku osnovnu raspodelu verovatnoće vremenske serije onda ona postaje stohastički proces.

Model prognoze ne pruža prognozu tačne jednoznačne vrednosti promenljive, već pre svega fazi stanje u kom će promenljiva biti u sledećem trenutku, tj. model generiše budući niz fazi stanja. Opšti koncept (ideja) je sledeći: praćene vremenske serije cene metala transformišu se u serije fazi stanja primenom fazi K – sredina algoritma klasterisanja, dok se buduća stanja prognoziraju stohastičkim difuznim procesom nazvanim procesom povratka na srednju vrednost. Cilj modela prognoze je da predvidi stanje u kojem će se naći cena metala, pri čemu su ova stanja unapred definisana. Ovaj model ima sposobnost da uzme u obzir dinamičku komponentu ponašanja cene metala i da napravi razliku između perioda rasta i opadanja cene. Stoga, efikasnost modela direktno zavisi od korišćenja relevantnih praćenih informacija koje se tiču ovog procesa. Primena prikupljenih informacija se primarno odnosi na kalibraciju modela, tj. na definisanje parametara koji će upravljati procesom prognoze.

7.1 Fazi K – sredina algoritam klasterisanja

Fazi K – sredina algoritam klasterisanja vrši particiju elemenata skupa podataka u k klastere $S_l (l = 1, 2, \dots, k)$ a klasteri S_l su predstavljeni centrima klastera C_l [47]. Veza između elementa skupa podataka i centra klastera je fazi. Stoga, funkcija pripadnosti $u_{i,j} = [0, 1]$ se koristi kako bi se predstavio stepen pripadnosti elementa skupa podataka X_i i centra klastera C_j . Skup podataka označen je kao $S = \{X_i\}$. Fazi K – sredina algoritam klasterisanja zasniva se na minimizaciji sledeće funkcije [47]:

$$J = \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^N u_{i,j}^m d_{ij} \quad (95)$$

Uzimajući u obzir centre klastera C_j i članove $u_{i,j}$, gde je N broj elemenata skupa podataka; m parametar fazifikacije; k broj klastera i d_{ij} kvadratno Euklidovo rastojanje između elementa skupa podataka X_i i centra klastera C_j . Važno je napomenuti da $u_{i,j}$ treba da zadovolji sledeće ograničenje:

$$\sum_{j=1}^k u_{i,j} = 1, \text{ za } i = 1 \text{ do } N \quad (96)$$

Glavni proces fazi K – sredina algoritma klasterisanja je mapiranje (preslikavanje) datog skupa vektora u sledeći poboljšani vektor kroz particiju elemenata skupa podataka. Započinje skupom inicijalnih centara klastera i ponavlja proces mapiranja sve dok ograničavajući kriterijum ne bude zadovoljen. Pretpostavlja se da dva klastera nemaju istog predstavnika (centra) klastera. U slučaju da se dva centra klastera podudaraju, centar klastera treba biti promenjen da bi izbegao podudaranje u iterativnom procesu. Ako je $d_{ij} < \eta$, onda je $u_{i,j} = 1$ i $u_{i,l} = 0$ za $l \neq i$, gde je η veoma mali pozitivan broj. Prema tome, fazi K – sredina algoritam klasterisanja je predstavljen na sledeći način:

- 1) Ulazni skup inicijalnih centara klastera $SC_0 = \{C_j(0)\}$ i vrednosti ε . Skup $p = 1$.
- 2) Za dati skup centara klastera SC_p , izračunati d_{ij} za $i = 1 \text{ do } N$ i $j = 1 \text{ do } k$. Ažurirati pripadnost $u_{i,j}$ koristeći sledeću jednačinu:

$$u_{i,j} = \left((d_{ij})^{\frac{1}{m-1}} \sum_{l=1}^k \left(\frac{1}{d_{il}} \right)^{\frac{1}{m-1}} \right)^{-1} \quad (97)$$

Ako je $d_{ij} < \eta$, skup $u_{i,j} = 1$, gde je η veoma mali pozitivan broj.

- 3) Izračunati centar svakog klastera koristeći jednačinu (98) da bi se dobio novi skup centara klastera SC_{p+1} .

$$C_j(p) = \frac{\sum_{i=1}^N u_{i,j}^m X_i}{\sum_{i=1}^N u_{i,j}^m} \quad (98)$$

- 4) Ako je $\|C_j(p) - C_j(p-1)\| < \varepsilon$ za $j = 1 \text{ do } k$, onda se algoritam zaustavlja, gde je $\varepsilon > 0$ veoma mali pozitivan broj. U suprotnom, ako skup $p+1 \rightarrow p$, vratiti se na korak 2.

Fazifikacija praćenih vremenskih serija cene metala vrši se fazi K – sredina algoritmom klasterisanja. Ovaj algoritam pripada metodama particije koje se sastoje od “deljenja” N objekata na određeni broj M razdvojenih grupa koje se takođe nazivaju klase ili klasteri. Fazi K – sredina algoritam zasnovan je na minimizaciji sledeće funkcije greške najmanjih kvadrata:

$$F = (U, X, C) = \sum_{\tau=1}^T \sum_{m=1}^M u_{\tau m}^\omega (x_\tau - c_m)^2 \quad (99)$$

Uz ograničenja

$$\sum_{m=1}^M u_{\tau m} = 1, \tau = 1, 2, \dots, T \quad (100)$$

$$0 \leq u_{\tau m} \leq 1, \quad m = 1, 2, \dots, M, \quad \tau = 1, 2, \dots, T \quad (101)$$

$$0 < \sum_{\tau=1}^T u_{\tau m} < m, \quad m = 1, 2, \dots, M \quad (102)$$

Gde je:

X – vektor praćenih cena metala; $X = \{x_1, x_2, \dots, x_T\} \subseteq R^T$,

C – vektor centara klase; $C = \{c_1, c_2, \dots, c_M\} \subseteq R^M$,

U – fazi matrica particije; $U = |u_{\tau m}|_{T \times M}$,

ω – koeficijent fazifikacije koji uzima vrednost 2.

Funkcija cilja F iterativno je minimalizovana. Proces iteracije zaustavlja se kada je $\|F^{(j+1)} - F^{(j)}\| < \delta$, gde je j broj iteracija a δ predstavlja minimalno poboljšanje. Za više detalja videti [47, 48, 49, 50]. Pretpostavimo da je izvršena particija $F(X, C)$ i da je redosled dobijenih centara sortiran prema rastućem redosledu; $c_1 < c_2 < \dots < c_M$.

7.2 Lingvističke promenljive i njihova transformacija u trouglaste fazi brojeve i odgovarajuće kodove opsega

Često se kao primer lingvističke promenljive navodi životno doba, ako se pretpostavi da su njene vrednosti fazi promenljive označene kao mlado, staro, veoma mlado, veoma staro, itd., pre nego brojevima 25, 65, 15, 85, ... Koncept lingvističke promenljive obezbeđuje sredstvo približnog opisivanja fenomena koji su isuviše kompleksni i nisu prikladni za opisivanje konvencionalnim kvantitativnim pojmovima. [51] Lingvističke, odnosno, jezičke promenljive imaju važnu ulogu u određenim oblastima finansija i menadžerskih sistema. One pomažu da se opišu pojmovi poput: „inflacija”, „profit”, „rizik”, „investicija” i sl [52]. Da bismo opisali vrednost (stanje) cene metala koristimo lingvističke promenljive. Lingvistička promenljiva je promenljiva čije su vrednosti reči ili rečenice izražene prirodnim ili veštačkim jezikom [51].

Sledećih sedam lingvističkih promenljivih korišćene su u tu svrhu: vrlo vrlo nisko (VVL), vrlo nisko (VL), nisko (L), srednje (M), visoko (H), vrlo visoko (VH), vrlo vrlo visoko (VVH), što može da se vidi na slici 18. Prema tome, broj klastera je takođe sedam ($M = 1, 2, \dots, 7$). Granice opsega svake lingvističke promenljive definisane su transformacijom lingvističke promenljive u adekvatan trouglasti fazi broj i odgovarajući kod opsega. Kod opsega izražen je kao jednoznačan broj.

Trouglasti fazi broj definisan je kao trojka $\tilde{A} = (a, b, c)$, gde parametri a , b i c redom ukazuju na najmanju moguću vrednost, vrednost koja najviše obećava, odnosno najveću moguću vrednost. Ova formulacija se tumači kao funkcija pripadnosti i sadrži sledeće uslove: 1) $a \leq b \leq c$, 2) funkcija pripadnosti povećava se u intervalu $[a, b]$ i smanjuje u intervalu $[b, c]$. Granice opsega i vrednosti koda opsega lingvističkih promenljivih prikazane su u Tabeli 1.

Tabela 1. Transformacija lingvističkih promenljivih u trouglaste fazi brojeve i kod opsega

Lingvistička promenljiva	Trouglasti fazi broj	Funkcija pripadnosti	Vrednost koda opsega $y_m, m = 1, 2, \dots, 7$
VVL	$\left(a < c_1, b = c_1, c_1 < c \leq \frac{c_1 + c_2}{2}\right)$	$(0; 1; 0)$	$y_1 = 1$
VL	$\left(\frac{c_1 + c_2}{2} < a, b = c_2, c_2 < c \leq \frac{c_2 + c_3}{2}\right)$	$(0; 1; 0)$	$y_2 = 2$
L	$\left(\frac{c_2 + c_3}{2} < a, b = c_3, c_3 < c \leq \frac{c_3 + c_4}{2}\right)$	$(0; 1; 0)$	$y_3 = 3$
M	$\left(\frac{c_3 + c_4}{2} < a, b = c_4, c_4 < c \leq \frac{c_4 + c_5}{2}\right)$	$(0; 1; 0)$	$y_4 = 4$
H	$\left(\frac{c_4 + c_5}{2} < a, b = c_5, c_5 < c \leq \frac{c_5 + c_6}{2}\right)$	$(0; 1; 0)$	$y_5 = 5$
VH	$\left(\frac{c_5 + c_6}{2} < a, b = c_6, c_6 < c \leq \frac{c_6 + c_7}{2}\right)$	$(0; 1; 0)$	$y_6 = 6$
VVH	$\left(\frac{c_6 + c_7}{2} < a, b = c_7, c_7 < c\right)$	$(0; 1; 0)$	$y_7 = 7$

Pretpostavimo da je data mesečna vremenska serija praćenih cena metala $P = \{p_\tau\}_{\tau=1,2,\dots,T}$ i vektor koda opsega $Y = \{y_m\}_{m=1,2,\dots,M}$ definisan je na njoj. Transformacija praćene serije u seriju fazi stanja (seriju koda opsega) izvodi se prema sledećem mehanizmu za označavanje:

$$P(Y)_{\forall \tau \in [1,T]} = \begin{cases} 1, & \text{if } \min \{p_\tau\}_{\tau=1,2,\dots,T} \leq p_\tau \leq \frac{c_1 + c_2}{2} \\ m, & \text{if } \frac{c_{m-1} + c_m}{2} < p_\tau \leq \frac{c_m + c_{m+1}}{2} \\ M, & \text{if } \frac{c_{m-1} + c_m}{2} < p_\tau < \max \{p_\tau\}_{\tau=1,2,\dots,T} \\ & m = 2, 3, \dots, M-1 \end{cases}, \quad (103)$$

Na kraju, praćena serija izražena je pomoću vremenske serije koda opsega:

$$P = \{p_\tau\}_{\tau=1,2,\dots,T} \rightarrow Z(\tau, m)_{\forall \tau \in [1,T]} = \{z_m^\tau\}_{\forall \tau \in [1,T]}, m = 1, 2, \dots, M \quad (104)$$

7.3 Stohastički difuzni proces

Pretpostavimo da u svakom trenutku $t \in T, T \subset R$ posmatramo neku promenljivu x koja svoje vrednosti uzima na slučajan način. U tom kontekstu promenljiva $x(t)$ predstavlja slučajnu promenljivu koja se menja za svako $t \in T$, a skup dobijenih slučajnih promenljivih predstavlja slučajnu veličinu u funkciji vremena [53].

Za opisivanje stohastičkog procesa neophodno je zadati prostor verovatnoća (Ω, Ψ, P) i parametarski skup T . Skup T je obično poluprava $[0, \infty)$, ali može biti i $[0, T]$ ili $\{t \in T\} \subset [0, \infty)$.

Stohastički (slučajni) proces $\{x(t)\}_{t \in T}$ je familija Ψ – merljivih slučajnih promenljivih $x(t)$ sa vrednostima u R^d , definisanih na istom prostoru verovatnoća (Ω, Ψ, P) . Skup T je parametarski skup, a realni prostor R^d je skup stanja procesa.

Kako je stohastički proces za fiksirano $t \in T$ slučajna promenljiva, a svaka slučajna promenljiva je funkcija od $\omega \in \Omega$, sledi da je stohastički proces funkcija dva argumenta, tj. $\{x(t, \omega) | t \in T, \omega \in \Omega\}$. Ukoliko je fiksirano $t \in T$, dobija se slučajna promenljiva $x(t): \Omega \rightarrow R^d$ koja se naziva zasek stohastičkog procesa u trenutku t . Za fiksirano $\omega \in \Omega$, dobija se realna funkcija vremena $t \rightarrow x_t(\omega) \in R^d, t \in T$ koja se naziva trajektorija ili realizacija stohastičkog procesa.

Ako je T diskretan skup, $T = \{0, 1, 2, \dots\}$, familija $\{x(t) | t \in T\}$ se naziva slučajnim nizom ili stohastičkim procesom sa diskretnim vremenom [53].

Slučajni proces se definiše familijom konačno – dimenzionalnih funkcija raspodela:

$$\begin{cases} F_{t_1, \dots, t_n}(u_1, \dots, u_n) = P\{x(t_1) < u_1, \dots, x(t_n) < u_n\}, \\ t_1 < t_2 < \dots < t_n, t_i \in [0, T], i = 1, \dots, n, n \in N \end{cases} \quad (105)$$

7.4 Stohastički sistemi

Sistemi koji se javljaju u našem okruženju, a koji imaju osobinu da se menjaju tokom vremena, možemo matematički izraziti običnim diferencijalnim jednačinama [54]. Ako trenutno stanje sistema označimo sa $x(t)$, tada odgovarajući deterministički model koji opisuje ponašanje sistema ima sledeći oblik:

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (106)$$

Međutim, realni sistemi koji se javljaju u različitim okruženjima, u većini slučajeva, karakterišu se velikim stepenom neodređenosti (neizvesnosti). Ova karakteristika predstavlja ograničenje koje se mora uzeti u obzir pri matematičkom opisivanju posmatranog sistema, odnosno sistem se ne može matematički opisati determinističkim modelima. U ovakvim uslovima, matematičko modeliranje sistema zasniva se na proširivanju determinističkog modela uvođenjem slučajnosti. Ove slučajnosti se opisuju terminima verovatnoće i krajnji ishod je stohastički model sistema. Uopšteni oblik stohastičkog modela predstavljen je sledećom funkcijom:

$$\begin{cases} \frac{dX(t)}{dt} = f(X(t), t) + g(X(t), t)\xi(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases} \quad (107)$$

gde je $X(t), t \geq 0$, nepoznati stohastički proces, a $\xi(t), t \geq 0$, dati stohastički proces uveden kao faktor slučajnosti u determinističkoj diferencijalnoj jednačini. Za početni uslov X_0 se takođe pretpostavlja da je slučajna promenljiva. Stohastički procesi transformišu stohastičke ulazne vrednosti u stohastičke vrednosti odziva [54].

7.5 Simulacija cena metala

Neodređenosti vezane za ponašanje budućih stanja cene metala modelirane su simulacijom stohastičkog difuznog procesa, nazvanog procesom povratka na srednju vrednost. Glavna karakteristika ovog procesa je tendencija da se cene metala vrate na dugoročni nivo ravnoteže nakon značajnih kratkoročnih fluktuacija. Osnovni proces opisan je sledećom jednačinom [55]:

$$dz_m = \alpha(\ln \bar{z}_m - \ln z_m)z_m d\tau + \sigma z_m dW \quad (108)$$

Gde je:

$\bar{z}_m$ – dugoročna ravnoteža fazi stanja izražena preko odgovarajuće vrednosti koda opsega,

α – brzina povratka srednje vrednosti ka dugoročnoj ravnoteži vrednosti koda opsega,

σ – stopa devijacije koda opsega,

dW – inkrement (priraštaj) standardnog Braunovog kretanja

Za dobijanje osnovnog procesa, koji je opisan jednačinom (108), veoma važnu ulogu ima primena Itô leme. Pretpostavimo da je data opšta stohastička diferencijalna jednačina na sledeći način [56]:

$$dX(t) = f(t, X(t))dt + g(t, X(t))dW(t) \quad (109)$$

Takođe neka je i dat proces $Y(t)$ koji je funkcija od $X(t)$:

$$Y(t) = \varphi(t, X(t)) \quad (110)$$

gde je funkcija $\varphi(t, X(t))$ neprekidno diferencijalna po t i dvostruko diferencijalna po X .

Uzimajući u obzir prethodno, zadatak se svodi na pronalaženje stohastičke diferencijalne jednačine za proces $Y(t)$ a koja je opisana sledećim izrazom:

$$dY(t) = \tilde{f}(t, X(t))dt + \tilde{g}(t, X(t))dW(t) \quad (111)$$

Funkcija $Y(t)$ može se predstaviti Tejlorovim polinomom na sledeći način:

$$dY(t) = \frac{\partial \varphi(t, X)}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi(t, X)}{\partial t^2} dt^2 + \frac{\partial \varphi(t, X)}{\partial X} dX(t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi(t, X)}{\partial X^2} (dX(t))^2 + \dots \quad (112)$$

Primenom izraza (109) za $dX(t)$ dobijamo:

$$\begin{aligned} dY(t) = & \frac{\partial \varphi(t, X)}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi(t, X)}{\partial X^2} [f^2(t, X(t))dt^2 + g^2(t, X(t))dW^2(t) \\ & + 2f(t, X(t))g(t, X(t))dtdW(t)] + \dots \end{aligned} \quad (113)$$

Primenjujući sledeća pravila [57]:

$$1. dW(t)dW(t) = dt \quad (114)$$

$$2. dt dt = 0 \quad (115)$$

$$3. dW(t)dt = 0 \quad (116)$$

$$4. dt dW(t) = 0 \quad (117)$$

i ne uzimajući u obzir članove višeg reda u Tejlorovom polinomu, dobijamo Itô lemu:

$$dY(t) = \left[\frac{\partial \varphi(t, X)}{\partial t} + \frac{\partial \varphi(t, X)}{\partial X} f(t, X(t)) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi(t, X)}{\partial X^2} g^2(t, X(t)) \right] dt + \frac{\partial \varphi(t, X)}{\partial X} g(t, X(t)) dW(t) \quad (118)$$

Veoma važna osobina pri rešavanju stohastičkih integrala $I(t)$ je Itô izometrija koja je data sledećim izrazom [58]:

$$Var(I(t)) = E \left[\left(\int_0^t X(t) dW(t) \right)^2 \right] = E \left[\int_0^t (X(t))^2 dt \right] \quad (119)$$

gde E označava matematičko očekivanje standardnog Braunovog kretanja.

Smenom $x = \ln z_m$ u jednačinu (108) dobijamo Ornstein – Uhlenbeck – ov stohastički proces povratka na srednju vrednost koji je prikazan na sledeći način:

$$dx = \alpha(\bar{x} - x)d\tau + \sigma dW \quad (120)$$

gde je

$$\bar{x} = \ln \bar{z}_m - \frac{\sigma}{2\alpha} \quad (121)$$

Uzmimo funkciju $\theta = xe^{\alpha\tau}$ i pronađimo njene parcijalne izvode:

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = e^{\alpha\tau} \quad (122)$$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = 0 \quad (123)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \alpha x e^{\alpha\tau} \quad (124)$$

Zamenom dobijenih parcijalnih izvoda, u jednačinu koja opisuje Itô lemu, dobijamo sledeći izraz:

$$\begin{aligned} d\theta &= \left\{ \alpha x e^{\alpha\tau} + \alpha(\bar{x} - x)e^{\alpha\tau} + \frac{1}{2} \sigma^2 \cdot 0 \right\} d\tau + \sigma e^{\alpha\tau} dW = \\ &= (\alpha x e^{\alpha\tau} + \alpha \bar{x} e^{\alpha\tau} - \alpha x e^{\alpha\tau} + 0) d\tau + \sigma e^{\alpha\tau} dW = \\ &= \alpha \bar{x} e^{\alpha\tau} d\tau + \sigma e^{\alpha\tau} dW \end{aligned} \quad (125)$$

Rešenje diferencijalne jednačine (125) dato je na sledeći način:

$$\begin{aligned}\theta_T - \theta_0 &= \int_0^T \alpha \bar{x} e^{\alpha\tau} d\tau + \int_0^T \sigma e^{\alpha\tau} dW = \alpha \bar{x} \int_0^T e^{\alpha\tau} d\tau + \sigma \int_0^T e^{\alpha\tau} dW = \\ &= \alpha \bar{x} \left(\frac{e^{\alpha T}}{\alpha} - \frac{1}{\alpha} \right) + \sigma \int_0^T e^{\alpha\tau} dW = \bar{x}(e^{\alpha T} - 1) + \sigma \int_0^T e^{\alpha\tau} dW\end{aligned}\quad (126)$$

Dalje se dobija:

$$x e^{\alpha T} - x_0 = \bar{x}(e^{\alpha T} - 1) + \sigma \int_0^T e^{\alpha\tau} dW \quad (127)$$

Rešenje jednačine (120) dato je sledećim izrazom:

$$\begin{aligned}x &= \frac{x_0}{e^{\alpha T}} + \frac{\bar{x}}{e^{\alpha T}} (e^{\alpha T} - 1) + \sigma \int_0^T \frac{e^{\alpha\tau}}{e^{\alpha T}} dW = \\ &= x_0 e^{-\alpha T} + \bar{x}(1 - e^{-\alpha T}) + \sigma \int_0^T e^{-\alpha(T-\tau)} dW\end{aligned}\quad (128)$$

Primenom pravila Itô – ove izometrije (jednačina 119), rešavamo stohastički integral $\sigma \int_0^T e^{-\alpha(T-\tau)} dW$ na sledeći način:

$$E = \left(\sigma \int_0^T e^{-\alpha(T-\tau)} dW \right)^2 = \sigma^2 \int_0^T (e^{-\alpha(T-\tau)})^2 d\tau = \sigma^2 \int_0^T e^{-2\alpha(T-\tau)} d\tau = \sigma^2 \frac{1 - e^{-\alpha T}}{2\alpha} \quad (129)$$

Varijansa stohastičkog integrala jednaka je:

$$Var = E = \sigma^2 \frac{1 - e^{-\alpha T}}{2\alpha} \rightarrow \sqrt{Var} = \sigma \sqrt{\frac{1 - e^{-\alpha T}}{2\alpha}} \quad (130)$$

Konačno rešenje stohastičke diferencijalne jednačine je:

$$x = x_0 e^{-\alpha \Delta\tau} + \bar{x}(1 - e^{-\alpha \Delta\tau}) + \sigma \sqrt{\frac{1 - e^{-\alpha \Delta\tau}}{2\alpha}} N(0,1) \quad (131)$$

Znajući da je $x = \ln z_m$ i $\bar{x} = \ln \bar{z}_m - \frac{\sigma}{2\alpha}$, a $x_0 = \ln(z_{m(\tau-1)})$ sledi da je:

$$x = \ln z_m \rightarrow z_m = e^x \quad (132)$$

Vremenski diskretan izraz kojim se simulira putanja uzorka $z_m(\tau)$ predstavlja stohastički proces i definisan je na sledeći način [59]:

$$z_m(\tau) = \exp \left\{ \ln(z_{m(\tau-1)}) e^{-\alpha \Delta\tau} + \left[\ln(\bar{z}_m) - \frac{\sigma^2}{2\alpha} \right] (1 - e^{-\alpha \Delta\tau}) + N(0,1) \sigma \sqrt{\frac{(1 - e^{-2\alpha \Delta\tau})}{2\alpha}} \right\} \quad (133)$$

Gde je:

$\Delta\tau$ – konstantan vremenski interval od τ do $\tau + 1$, jedan mesec,

$N(0,1)$ – normalna raspodela slučajne promenljive

Kalibracija procesa povratka na srednju vrednost zasnovana je na sledećoj regresiji:

$$z_{m(\tau+1)} = \beta_0 + \beta_1 z_{m(\tau)} + \varepsilon \quad (134)$$

Gde je:

β_0 – odsečak, $\beta_0 = \alpha \bar{x} d\tau$

β_1 – nagib, $\beta_1 = -\alpha d\tau$

Postupkom regresije dx u odnosu na x , dobijaju se sledeći parametri β_0 i β_1 . Brzina povratka na srednju vrednost (α) ekvivalentna je negativnoj vrednosti trenda. Dugoročna ravnoteža fazi stanja ($\bar{z}_m$) dobija se deljenjem odsečka sa brzinom povratka na srednju vrednost dok stopa devijacije koda opsega (σ) predstavlja standardnu devijaciju regresije.

Neka $z_m = \{z_m(\tau), \tau = 0, 1, \dots, T\}$ označava put evolucije vrednosti koda opsega sa trenutnim vrednostima $z_m(\tau)$, gde se $z_m(\tau)$ izračunava jednačinom (133). Simulacija jednačine (133), za svako $\tau = 1, 2, \dots, T - 1$, sastoji se iz sledećih koraka: a) izračunati jednačinu (133) i b) za dobijene rezultate odrediti vrednost koda opsega. Pretpostavimo da je $z_m^{sim}(\tau)$ vrednost dobijena jednačinom (133) u trenutku τ , tada se odgovarajuća vrednost koda opsega dodeljuje na sledeći način:

$$z_m(\tau)_{\forall \tau \in [1, T]} = \begin{cases} 1, & \text{if } 0 \leq z_m^{sim}(\tau) \leq \frac{1+2}{2} \\ m, & \text{if } \frac{y_{m-1} + y_m}{2} < z_m^{sim}(\tau) \leq \frac{y_m + y_{m+1}}{2}, \\ M, & \text{if } z_m^{sim}(\tau) > \frac{y_{m-1} + y_m}{2} \end{cases} \quad (135)$$

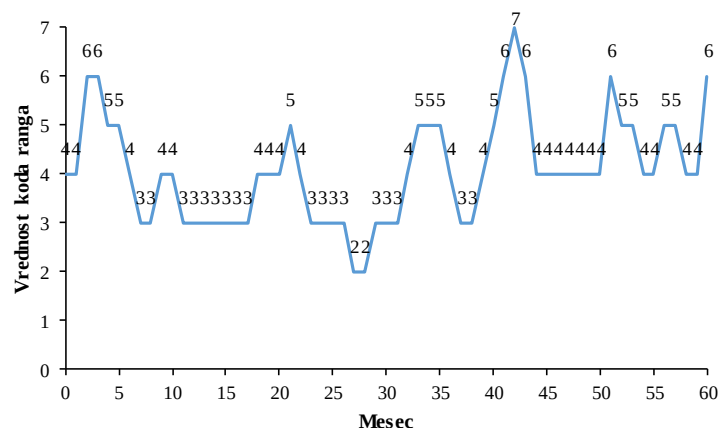
$m = 2, 3, \dots, M - 1$

Treba napomenuti da se vrednost dugoročne ravnoteže koda opsega, dobijene regresijom, takođe definiše jednačinom (135).

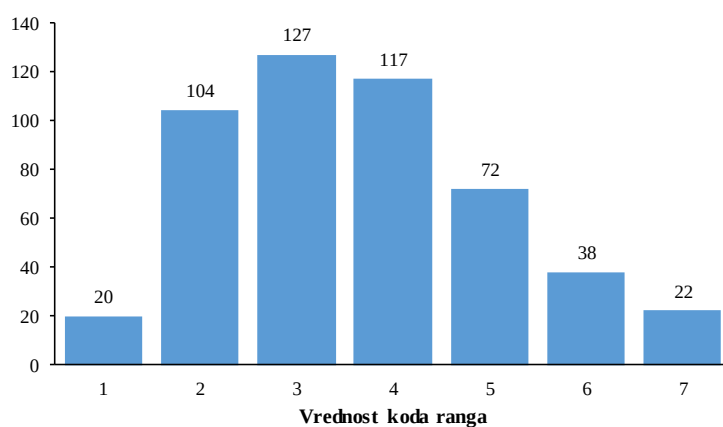
Prostor simulacije buduće cene metala i način fazifikacije opisan je na sledeći način:

$$|Z|_{S \times T}^{sim} = |z_m^{s\tau}|_{S \times T} \xrightarrow{\text{jednačina (135)}} |Y|_{S \times T}^{sim} = |y_m^{s\tau}|_{S \times T} \xrightarrow{\text{Tabela 1}} |\tilde{P}|_{S \times T}^{sim} = |\tilde{p}_m^{s\tau}|_{S \times T} \quad (136)$$

Gde S predstavlja ukupan broj simulacija a T vremenski raspon simulacije. Slika 9 predstavlja put evolucije vrednosti koda opsega dok slika 10 predstavlja raspodelu vrednosti koda opsega u 20 – tom mesecu, nakon S simulacija.



Slika 9. Jedan simuliran put evolucije vrednosti koda opsega na mesečnom rasponu



Slika 10. Raspodela vrednosti koda opsega dobijenih nakon 500 simulacija (20 – ti mesec)

7.6 Simulacija operativnih troškova

Pri izradi procene troškova važno je napraviti razliku između vrste troškova koji se procenjuju. Procenitelj se bavi osnovnim tipovima troškova za procenu projekta a to su: kapitalni troškovi i operativni troškovi. U rudarskoj industriji, kapitalni troškovi ili kapitalna investicija uopšteno znače ukupnu količinu novčanih sredstava uložениh za pokretanje proizvodnje u rudniku [1]. Ovi troškovi uključuju otvaranje podzemnog rudnika i troškove za izradu postrojenja za pripremu mineralnih sirovina, kao i nabavku opreme. Otvaranje podzemnog rudnika i izrada postrojenja za pripremu mineralnih sirovina su aktivnosti koje mogu trajati nekoliko godina. U tom periodu se opravdano može očekivati fluktuacija kapitalnih troškova. U takvom okruženju, desno – asimetrični trouglasti fazi broj može izraziti neodređenosti koje se odnose na kapitalne troškove: $\tilde{I} = (a, b, c), a < b < c, b - a < c - b$.

Operativni troškovi su takođe veoma značajan izvor neodređenosti vezanih za ekonomsku vrednost *TEP* – a. Operativni troškovi direktno nastaju u procesu proizvodnje. Ovi troškovi uključuju pripremu otkopa kako kroz rudu tako i kroz jalovinu, otkopavanje, logistiku (servisne službe) koja pruža podršku rudarima, kao i troškove mlevenja i pripreme rude [60]. Neke komponente operativnih troškova kao što su gorivo, električna energija, maziva, gume, kao i rezervni delovi i repromaterijali koji se koriste za pripremu rude, itd., obično se nabavljaju po tržišnim cenama koje se mesečno menjaju (fluktuiraju). Treba napomenuti da kada govorimo o operativnim troškovima mislimo na

jedinične operativne troškove. Neodređenosti koje se odnose na ove troškove nastaju kao posledica toga da mnogi snabdevači, koji posluju u tržišnim uslovima, nude kratkoročne ugovore rudnicima kao način zaštite svojih poslovnih aktivnosti. U takvom okruženju, i ako dodamo činjenicu da će se proizvodnja obavljati duži niz godina, veoma je važno prognozirati buduće ponašanje operativnih troškova. U tu svrhu, primenili smo neprekidni vremenski proces koristeći sledeću stohastičku diferencijalnu jednačinu Itô-Doob tipa [61]:

$$dc_\tau = \mu c_\tau d\tau + \sigma_c c_\tau dW_\tau \quad (137)$$

Gde su μ i σ_c trend (mera srednjeg rasta) i volatilnost (nestabilnost), a W_τ je normalizovano Braunovo kretanje.

Želimo da nađemo stohastičku diferencijalnu jednačinu za proces Y koji se odnosi na c_τ na sledeći način [56]:

$$Y(\tau) = \varphi(\tau, c_\tau) = \ln(c_\tau) \quad (138)$$

Parcijalni izvodi su:

$$\frac{\partial \varphi(\tau, c_\tau)}{\partial c_\tau} = \frac{1}{c_\tau} \quad (139)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi(\tau, c_\tau)}{\partial c_\tau^2} = -\frac{1}{c_\tau^2} \quad (140)$$

$$\frac{\partial \varphi(\tau, c_\tau)}{\partial \tau} = 0 \quad (141)$$

Primenjujući Itô lemu dobijamo:

$$\begin{aligned} dY(\tau) &= \left(\frac{\partial \varphi(\tau, c_\tau)}{\partial \tau} + \frac{\partial \varphi(\tau, c_\tau)}{\partial c_\tau} \mu c_\tau(\tau) + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi(\tau, c_\tau)}{\partial c_\tau^2} \sigma_c^2 c_\tau^2(\tau) \right) d\tau \\ &\quad + \left(\frac{\partial \varphi(\tau, c_\tau)}{\partial c_\tau} \sigma_c c_\tau dW_\tau \right) = \\ &= \left(0 + \frac{1}{c_\tau(\tau)} \mu c_\tau(\tau) + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{c_\tau^2(\tau)} \right) \sigma_c^2 c_\tau^2(\tau) \right) d\tau + \left(\frac{1}{c_\tau(\tau)} \sigma_c c_\tau(\tau) dW_\tau \right) = \\ &= \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma_c^2 \right) d\tau + \sigma_c dW_\tau \end{aligned} \quad (142)$$

Pošto je desna strana jednačine (142) nezavisna od $Y(\tau)$, možemo da izračunamo stohastički integral:

$$Y(\tau) = Y_0 + \int_0^\tau \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma_c^2 \right) d\tau + \int_0^\tau \sigma_c dW_\tau \quad (143)$$

Primenom pravila Itô – ove izometrije (jednačina 119) kao i pravila datog u jednačini (114), rešavamo stohastički integral $\int_0^\tau \sigma dW_\tau$ na sledeći način:

$$E = \left(\sigma_c \int_0^T dW_\tau \right)^2 = \sigma_c^2 \int_0^T dW_\tau dW_\tau = \sigma_c^2 \int_0^T d\tau = \sigma_c^2 T \quad (144)$$

Varijansa stohastičkog integrala jednaka je:

$$Var = E = \sigma_c^2 T \rightarrow \sqrt{Var} = \sigma_c \sqrt{T} \quad (145)$$

Konačno rešenje stohastičke diferencijalne jednačine je:

$$Y(\tau) = Y_0 + \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma_c^2 \right) \Delta\tau + \sigma_c \sqrt{\Delta\tau} \quad (146)$$

Pošto je $Y(\tau) = \ln c_\tau(\tau)$ i $Y_0 = \ln(c_{\tau-1})$ sledi da je:

$$Y(\tau) = \ln c_\tau(\tau) \rightarrow c_\tau(\tau) = e^{Y(\tau)} \quad (147)$$

Rešenje ove jednačine prikazano je na sledeći način i opisuje ponašanje operativnih troškova:

$$c_\tau = c_{\tau-1} \exp \left\{ \left(\mu - \frac{\sigma_c^2}{2} \right) \Delta\tau + N(0,1) \sigma_c \sqrt{\Delta\tau} \right\} \quad (148)$$

Primenjujući simulaciju nad jednačinom (148) možemo kreirati mnogo veštačkih scenarija ponašanja operativnih troškova kroz vreme. Prostor simulacije operativnih troškova prikazan je sledećom matricom:

$$|C|_{S \times T}^{sim} = |c^{s\tau}|_{S \times T} \quad (149)$$

8. DISKONTOVANA EKONOMSKA VREDNOST TEP – a

Imajući u vidu da je naš model zasnovan na maksimizaciji očekivane sadašnje vrednosti plana proizvodnje, očigledno je da diskontna stopa ima značajan uticaj. Precizno određivanje odgovarajuće diskontne stope koja će se koristiti za finansijske analize studija je izuzetno zahtevna i često raspravljana tema. Jasno je da troškovi pribavljanja investicionih fondova moraju pokriti skrivene troškove, troškove transakcije, nadoknaditi rizik kao i očekivanu inflaciju. Poput diskontne stope, svaku od ovih stavki je takođe teško kvantifikovati sa preciznošću [1]. Na primer, ako pitamo eksperte o vrednosti diskontne stope, možemo očekivati sledeći odgovor: “diskontna stopa je oko 10%”. Ova izjava je više opterećena nejasnošću nego slučajnošću. Diskontna stopa se može tretirati kao lingvistička promenljiva koja se kvantifikuje trouglastim fazi brojem: $\tilde{d} = (a, b, c), a < b < c$.

Nakon diskusije o svim glavnim komponentama ponaosob, moramo izračunati ekonomsku vrednost TEP – a prema njihovom objedinjenom uticaju.

Koncentrat metala je finalni proizvod rudarske kompanije sa podzemnom eksploatacijom koje nemaju topioničarska postrojenja. One ostvaruju prihode prodajom koncentrata metala kao finalnog proizvoda na tržištu. Vrednost koncentrata direktno zavisi od cene metala, sadržaja metala u koncentratu i iskorišćenja u topionici. Ako uzmemo u obzir da je neodređenost cene metala opisana simulacijom i fazifikacijom, onda se jedinična vrednost koncentrata računa na sledeći način:

$$|\tilde{V}^{con}|_{S \times T}^{sim} = m^{con} \cdot m^{mr} \cdot |\tilde{P}|_{S \times T}^{sim} = m^{con} \cdot m^{mr} \cdot |\tilde{p}_m^{ST}|_{S \times T} \quad (150)$$

Gde je:

$\tilde{p}_m^{ST}$ – jedinična prodajna cena koncentrata metala u vremenu τ i simulacije s izražene kao trouglasti fazi broj (\$/t),

m^{con} – sadržaj metala u koncentratu (%),

m^{mr} – iskorišćenje u topionici (%).

Ekonomska vrednost eksploatacionog bloka se računa na sledeći način [1]:

$$|\tilde{V}^h|_{S \times T}^{sim} = \tilde{a}_1^h \left\{ \left(\sum_{\gamma=1}^Y \frac{a_{2,\gamma}^h \cdot M_\gamma}{m_\gamma^{con}} |\tilde{V}^{con}|_{S \times T}^{sim} \right) - |C|_{S \times T}^{sim} \right\}, \forall h \in [1, H] \quad (151)$$

Gde je:

Y – ukupan broj (koncentrata) sadržanih u rudi,

M_γ – iskorišćenje u flotaciji γ – tog metala (%)

Prostor ekonomske vrednosti eksploatacionog bloka može se predstaviti sledećom fazi matricom:

$$|\tilde{V}^h|_{S \times T}^{sim} = |\tilde{V}_{ST}^h|_{S \times T} = \begin{bmatrix} (a, b, c)_{11}^h & (a, b, c)_{12}^h & \dots & (a, b, c)_{1\tau}^h \\ (a, b, c)_{21}^h & (a, b, c)_{22}^h & \dots & (a, b, c)_{2\tau}^h \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (a, b, c)_{s1}^h & (a, b, c)_{s2}^h & \dots & (a, b, c)_{sT}^h \end{bmatrix}, \forall h \in [1, H] \quad (152)$$

Očekivane ekonomske vrednosti eksploatacionog bloka kroz vreme planiranja dobijaju se kao srednje vrednosti svake kolone matrice $|\tilde{V}^h|_{S \times T}^{sim}$:

$$E(\tilde{V}^h)_{\forall \tau \in [1, T]} = \left| \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S (a, b, c)_{s\tau}^h \right|_{\forall \tau \in [1, T]}, \forall h \in [1, H] \quad (153)$$

Ako uzmemo u obzir da je naš model planiranja zasnovan na godišnjem nivou onda je neophodno transformisati prognozirane ekonomske vrednosti eksploatacionog bloka iz mesečnog u godišnji nivo:

$$E(E(\tilde{V}_\tau^h)_t)_{t=[1, T]} = \left| \frac{1}{12} \sum_{\tau=1}^{12} E(\tilde{V}_\tau^h)_t \right|_{t=[1, T]}, \forall h \in [1, H] \quad (154)$$

Neka je $\tilde{V}_t^h, \forall h \in [1, H], t = [1, T]$ očekivana ekonomska vrednost eksploatacionog bloka kroz vreme planiranja, onda se njegova diskontovana vrednost za svaku godinu definiše na sledeći način:

$$|(\tilde{V}_t^h)^d| = \left| \frac{\tilde{V}_t^h}{(1 + \tilde{d})^1} \quad \frac{\tilde{V}_t^h}{(1 + \tilde{d})^2} \quad \dots \quad \frac{\tilde{V}_t^h}{(1 + \tilde{d})^t} \right|, \forall h \in [1, H], t = [1, T] \quad (155)$$

Konačno, koeficijent $\tilde{v}_{it}^d$ koji predstavlja fazi sadašnju vrednost tehnološkog eksploatacionog polja (diskontovana vrednost) računa se sledećom jednačinom:

$$\tilde{v}_{it}^d = \sum_{h=1}^{l_i} (\tilde{V}_{it}^h)^d, \forall i \in [1, N], t = [1, T], l_1 + l_2 + \dots + l_N = H \quad (156)$$

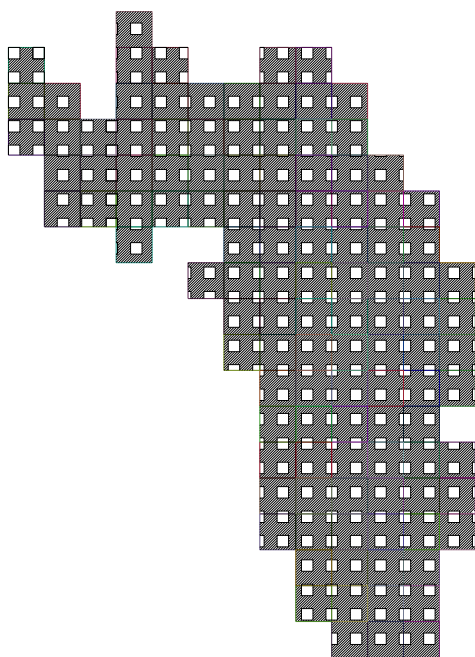
To znači da je diskontovana ekonomska vrednost TEP – a zbir diskontovanih ekonomskih vrednosti eksploatacionih blokova sadržanih u TEP – u.

9. NUMERIČKI PRIMER

Da bismo testirali razvijeni model planiranja proizvodnje pozajmili smo podatke iz malog hipotetičkog olovo – cink rudnog ležišta od Gligorića i drugih [15]. Komorno – stubna metoda je izabrana kao način otkopavanja rudnog ležišta. Rukovodstvo rudarske kompanije traži najbolji plan proizvodnje u uslovima neodređenosti vezanih za cenu metala i operativnih troškova. Eksploatacione rezerve rude su procenjene na oko 862 245 t. Za pokretanje proizvodnje potrebno je uraditi otvaranje rudnog tela i izgraditi postrojenje za pripremu mineralne sirovine. Sve ove aktivnosti definisane su na sledeći način:

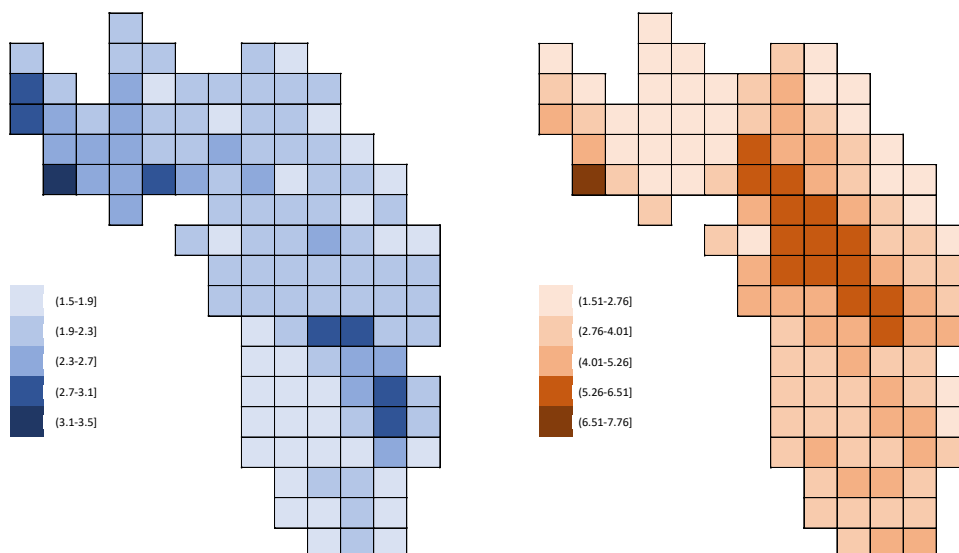
- Izrada sistema otvaranja se zasniva na kombinaciji niskopa i hodnika koji omogućavaju pristup rudnom telu. Koristiće se u svrhe prevoza ljudstva i dovođenja svežeg vazduha
- Izrada hodnika i niskopa koji omogućavaju odvođenje zagađenog vazduha nakon ventilacije radnih prostora rudnika
- Nabavka nove rudarske opreme
- Izgradnja postrojenja za pripremu mineralne sirovine
- Nabavka opreme za otkopavanje i pripremu mineralne sirovine

U svrhu planiranja, rudno telo je predstavljeno sa 115 blokova, svaki blok je dimenzija $25 \times 25 \times 5$ m. Ulazni parametri korišćeni za testiranje razvijenog modela dati su na slici 11, slici 12 i u tabeli 2 i tabeli 3.



Slika 11. Rudno telo sa pravilnim izgledom i rasporedom kvadratnih stubova

Pravilan izgled i raspored kvadratnih stubova podrazumeva da se stubovi ostavljaju neotkopani i rastojanje između njih je jednako. Rastojanje između stubova iznosi 9 m. Nasumično je izabran način postavljanja stubova s tim što su unutar bloka 1 prisutna četiri stuba. Ortogonalnim preslikavanjem ta četiri stuba po x i y osi, na odgovarajućem rastojanju od 9 m, formirana je mreža stubova odnosno formiran je raspored stubova kao što je i prikazano na slici 11.



Slika 12. Raspodela kvaliteta rude Pb i Zn (%)

Na slici 12 prikazana je raspodela kvaliteta rude Pb i Zn. Raspodela kvaliteta rude olova se kreće u rasponu od 1,5 do 3,5 % dok se raspodela kvaliteta rude cinka kreće u rasponu od 1,51 do 7,76 %.

U tabeli 2 prikazani su ulazni parametri. Pod ulaznim parametrima podrazumevaju se sledeći parametri: broj blokova, dimenzije blokova i stubova, vreme planiranja, broj *TEP* – ova, sadržaj metala u koncentratu, iskorišćenje u topionici i flotaciji, kapitalni troškovi, kapacitet proizvodnje i ograničenje kapaciteta, koeficijent fazifikacije kod fazi K – sredina algoritma klasterisanja, lingvističke promenljive cena metala i diskontna stopa.

Tabela 2. Ulazni parametri

Parametar	Vrednost
Broj blokova	115
Dimenzija bloka	25×25×5 m
Dimenzija stuba	8×8×5 m
Vreme planiranja	5 godina; 60 meseci
Broj tehnoloških eksploatacionih polja	5
Sadržaj metala u koncentratu	
Olovo Pb	70%
Cink Zn	50%
Iskorišćenje u topionici	
Olovo Pb	95 %
Cink Zn	$\begin{cases} \frac{(m^{con\%} - 8) \cdot 100}{m^{con\%}} \leq 85\%; m^{con} \cdot m^r \rightarrow m^{con\%} - 8 \\ \frac{(m^{con\%} - 8) \cdot 100}{m^{con\%}} > 85\%; m^{con} \cdot m^r \rightarrow 85\% \end{cases}$
	42 %
Iskorišćenje u flotaciji	
Olovo Pb	92 %
Cink Zn	80 %
Kapitalni troškovi (\$)	(12 000 000 13 000 000 15 000 000)
Kapacitet proizvodnje(t/year)-trouglasti fazi broj	(155 204 172 449 189 694)
Ograničenje kapaciteta (t/year)	± 10%
Fazi K – sredina klasterisanje-Koeficijent fazifikacije	2
Lingvističke promenljive cena metala $M = 7$	vrlo vrlo nisko (VVL), vrlo nisko (VL), nisko (L), srednje (M), visoko (H), vrlo visoko (VH), vrlo vrlo visoko (VVH)
Diskontna stopa-trouglasti fazi broj (%)	(10 11 12)

U tabeli 3 prikazane su rezerve eksploatacionih blokova. Rezerve eksploatacionih blokova predstavljene su kao trouglasti fazi brojevi. Ukupan broj eksploatacionih blokova u rudnom ležištu je 115. Sivom bojom su obeleženi obodni blokovi koji imaju kontakt sa jalovinom i koji predstavljaju skup potencijalnih početnih (inicijalnih) klastera.

Tabela 3. Rezerve eksploatacionih blokova

Blok	Rezerve (t) trouglasti fazi broj			Blok	Rezerve (t) trouglasti fazi broj		
1	5301	5891	6480	59	6458	7176	7893
2	6844	7604	8365	60	6954	7727	8499
3	5081	5646	6210	61	6293	6992	7691
4	7064	7849	8634	62	7119	7910	8701
5	7615	8461	9307	63	6128	6809	7489
6	6954	7727	8499	64	7284	8094	8903
7	7725	8583	9442	65	5962	6625	7287
8	5715	6350	6984	66	8977	9974	10972
9	6747	7497	8247	67	6128	6809	7489
10	5508	6120	6732	68	7119	7910	8701
11	7367	8186	9004	69	6293	6992	7691
12	6871	7635	8398	70	6954	7727	8499
13	7491	8323	9156	71	6458	7176	7893
14	6747	7497	8247	72	6789	7543	8297
15	7615	8461	9307	73	6623	7359	8095
16	6623	7359	8095	74	6623	7359	8095
17	7615	8461	9307	75	6789	7543	8297
18	5907	6564	7220	76	6458	7176	7893
19	6871	7635	8398	77	6954	7727	8499
20	5715	6350	6984	78	6293	6992	7691
21	7064	7849	8634	79	7119	7910	8701
22	5522	6135	6749	80	6128	6809	7489
23	6816	7574	8331	81	7284	8094	8903
24	6678	7421	8163	82	9130	10144	11158
25	7367	8186	9004	83	6334	7038	7742
26	6541	7268	7994	84	7243	8048	8853
27	7505	8339	9172	85	6486	7206	7927
28	6458	7176	7893	86	7092	7880	8667
29	6637	7375	8112	87	6637	7375	8112
30	6279	6977	7674	88	6940	7711	8482
31	6816	7574	8331	89	6789	7543	8297
32	6100	6778	7456	90	6789	7543	8297
33	6995	7772	8550	91	6940	7711	8482
34	5921	6579	7237	92	6637	7375	8112
35	7174	7971	8768	93	7092	7880	8667
36	6486	7206	7927	94	6486	7206	7927
37	7092	7880	8667	95	7243	8048	8853
38	6637	7375	8112	96	8895	9883	10872
39	6940	7711	8482	97	5921	6579	7237
40	6789	7543	8297	98	6995	7772	8550
41	6789	7543	8297	99	6100	6778	7456
42	6940	7711	8482	100	6816	7574	8331
43	6637	7375	8112	101	6279	6977	7674
44	7092	7880	8667	102	6637	7375	8112
45	6486	7206	7927	103	6458	7176	7893
46	7243	8048	8853	104	6458	7176	7893
47	6334	7038	7742	105	6637	7375	8112
48	7394	8216	9038	106	6279	6977	7674
49	6183	6870	7557	107	6816	7574	8331
50	6128	6809	7489	108	6100	6778	7456
51	7119	7910	8701	109	6678	7421	8163
52	6293	6992	7691	110	7229	8033	8836
53	6954	7727	8499	111	6816	7574	8331
54	6458	7176	7893	112	6954	7727	8499
55	6789	7543	8297	113	6954	7727	8499
56	6623	7359	8095	114	7092	7880	8667
57	6623	7359	8095	115	6816	7574	8331
58	6789	7543	8297				

* obodni blokovi su obojeni sivom bojom

9.1 Proračun vrednosti klastera odnosno tehnološkog eksploatacionog polja u odnosu na ciljane vrednosti kriterijuma

Da bismo definisali ulazne parametre dvostepene fazi *TOPSIS* metode neophodno je izvršiti proračun vrednosti svakog klastera (*TEP* – a) u odnosu na ciljane vrednosti svakog kriterijuma odnosno atributa. Kao što je i ranije pomenuto, ukupno je usvojeno tri kriterijuma od kojih je poslednji kriterijum podeljen na dva dela u zavisnosti od ukupnog broja koncentrata u rudi. Na osnovu ovih kriterijuma, izvršiće se izbor najpovoljnijeg *TEP* – a i bloka u oba stepena fazi *TOPSIS* metode višekriterijumskog odlučivanja.

Treba naglasiti da vrednost svakog klastera (*TEP* – a) teži da bude što približnija ciljanim vrednostima kriterijuma. Ti zahtevi potiču od strane planera proizvodnje rudnika čime se postiže ujednačen godišnji kapacitet po godinama proizvodnje, relativno kompaktne oblasti za otkopavanje kao i približno ujednačen kvalitet sadržaja rude olova i cinka u svakom klasteru (*TEP* – u).

Kao primer, iz nasumično odabrane iteracije izdvojeno je tehnološko eksploataciono polje *TEP4* koje se u nekoj od iteracija sastojalo iz blokova: 15, 16, 17, 21, 22, 27.

Kriterijum 1 – Godišnji kapacitet proizvodnje, $\tilde{C}_1$

Ciljana vrednost godišnjeg kapaciteta proizvodnje $\tilde{c}_1^{zah}$ za *TEP4* računa se primenom jednačine (83) i važi za svaki *TEP*:

$$\tilde{c}_1^{zah} = (155\ 204\ 172\ 449\ 189\ 694) \quad (157)$$

Primenom jednačine (79), rezerve rude $\tilde{a}_{i1}$ u *TEP4* iznose:

$$\tilde{a}_{i1} = 41943.42\ 46603.8\ 51264.18 \quad (158)$$

Vrednost tehnološkog eksploatacionog polja *TEP4* u odnosu na ciljanu vrednost $\tilde{c}_1^{zah}$ računa se primenom jednačine (87) i iznosi:

$$\tilde{x}_{i1} = \tilde{C}_1 = 22.1111\% \ 27.0247\% \ 33.0302\% \quad (159)$$

Kriterijum 2 – Kompaktnost oblika *TEP* – a, C_2

Ciljana vrednost kompaktnosti c_2^{zah} za *TEP4* računa se primenom jednačine (84) i važi za svaki *TEP*:

$$c_2^{cilj} = 16 \quad (160)$$

Primenom jednačine (80), kompaktnost oblika a_{i2} za *TEP4* iznosi:

$$a_{i2} = 24 \quad (161)$$

Vrednost tehnološkog eksploatacionog polja *TEP4* u odnosu na ciljanu vrednost c_2^{zah} računa se primenom jednačine (88) i iznosi:

$$C_2 = 8 \quad (162)$$

Kriterijum 3a – Standardna devijacija kvaliteta rude olova, $C_{3,Pb}$

Ciljana vrednost standardne devijacije kvaliteta rude olova $c_{3,Pb}^{zah}$ za $TEP4$ računa se primenom jednačine (85) i iznosi:

$$c_{3,Pb}^{zah} = 0.2311 \% \quad (163)$$

Primenom jednačine (81), standardna devijacija kvaliteta rude olova $a_{i,3,Pb}$ za $TEP4$ iznosi:

$$a_{i,3,Pb} = 0.2311 \% \quad (164)$$

Vrednost tehnološkog eksploatacionog polja $TEP4$ u odnosu na ciljanu vrednost $c_{3,Pb}^{zah}$ računa se primenom jednačine (89) i iznosi:

$$C_{3,Pb} = 0.2311 \% \quad (165)$$

Kriterijum 3b – Standardna devijacija kvaliteta rude cinka, $C_{3,Zn}$

Ciljana vrednost standardne devijacije kvaliteta rude olova $c_{3,Zn}^{zah}$ za $TEP4$ računa se primenom jednačine (85) i iznosi:

$$c_{3,Zn}^{zah} = 0.5535 \% \quad (166)$$

Primenom jednačine (81), standardna devijacija kvaliteta rude olova $a_{i,3,Zn}$ za $TEP4$ iznosi:

$$a_{i,3,Zn} = 0.5535 \% \quad (167)$$

Vrednost tehnološkog eksploatacionog polja $TEP4$ u odnosu na ciljanu vrednost $c_{3,Zn}^{zah}$ računa se primenom jednačine (89) i iznosi:

$$C_{3,Zn} = 0.5535 \% \quad (168)$$

Potpuno identičan postupak proračuna se primenjuje u svakoj iteraciji kako za svaki TEP u prvoj fazi tako i za svaki potencijalni blok u drugoj fazi $TOPSIS$ metode.

9.2 Dvostepeni fazi TOPSIS

U narednim koracima biće prikazan numerički primer dvostepene fazi $TOPSIS$ metode. Prvi stepen podrazumeva izbor najboljeg tehnološkog eksploatacionog polja $NTEP$ za rast u odnosu na tehnološke zahteve. Drugi stepen podrazumeva identičan proces višekriterijumskog odlučivanja primenjen u prvom stepenu. Drugi stepen obuhvata kreiranje liste susednih eksploatacionih blokova SB koji okružuju $NTEP$ i vrši izbor najboljeg eksploatacionog bloka NSB koji će biti dodat $NTEP$ – u.

- Prvi stepen

Prvi korak fazi $TOPSIS$ metode (a i svake metode višekriterijumskog odlučivanja) odnosi se na definisanje ulaznih parametara prikazanih u tabeli 4. To podrazumeva kreiranje tačnog broja alternativa kao i kriterijuma na osnovu kojih se donosi odluka o izboru najpovoljnije alternative. Alternative su predstavljene kao skup klastera odnosno tehnoloških eksploatacionih polja (TEP –

ova). Kriterijumi predstavljaju skup atributa koji karakterišu svaki blok odnosno svaki klaster (*TEP*) a to su: godišnji kapacitet proizvodnje, kompaktnost oblika *TEP* – a, standardna devijacija kvaliteta rude olova i standardna devijacija kvaliteta rude cinka. U tabeli 5 prikazana je matrica odlučivanja.

Tabela 4. Ulazni parametri TOPSIS metode u prvom stepenu

<i>TEP</i> – ovi	Godišnji kapacitet (%)*			Kompaktnost	STDev Pb	STDev Zn
<i>TEP1</i>	13.1534	16.0764	19.6489	9.0000	0.4490	1.2057
<i>TEP2</i>	11.4040	13.9382	17.0356	5.3333	0.4726	1.9436
<i>TEP3</i>	16.4781	20.1399	24.6154	12.8000	0.2065	0.4155
<i>TEP4</i>	22.1111	27.0247	33.0302	8.0000	0.2311	0.5535
<i>TEP5</i>	18.0896	22.1095	27.0227	12.8000	0.1622	0.5655

*Kriterijum Godišnji kapacitet je izražen kao trouglasti fazi broj

Tabela 5. Matrica odlučivanja

	K1			K2	K3	K4
A1	13.1534	16.0764	19.6489	9.0000	0.4490	1.2057
A2	11.4040	13.9382	17.0356	5.3333	0.4726	1.9436
A3	16.4781	20.1399	24.6154	12.8000	0.2065	0.4155
A4	22.1111	27.0247	33.0302	8.0000	0.2311	0.5535
A5	18.0896	22.1095	27.0227	12.8000	0.1622	0.5655

Sledeći korak fazi *TOPSIS* metode jeste normalizacija matrice odlučivanja. Normalizacija se vrši tako što se svaka vrednost iz tabele 5 deli sa zbirom odgovarajuće kolone (obratiti pažnju na aritmetičke operacije ukoliko se primenjuju fazi brojevi). Prema tome, normalizovana matrica odlučivanja je predstavljena u tabeli 6.

Tabela 6. Normalizovana matrica odlučivanja

	K1			K2	K3	K4
A1	0.1084	0.1619	0.2419	0.1878	0.2952	0.2574
A2	0.0940	0.1404	0.2097	0.1113	0.3106	0.4150
A3	0.1358	0.2028	0.3030	0.2670	0.1357	0.0887
A4	0.1822	0.2722	0.4066	0.1669	0.1519	0.1182
A5	0.1491	0.2227	0.3326	0.2670	0.1066	0.1207

Naredni korak fazi *TOPSIS* metode je funkcija *ln*. Svaka vrednost normalizovane matrice odlučivanja podleže ovoj funkciji bez obzira da li je realan broj ili fazi broj. Nakon toga se vrši operacija množenja ove dve matrice (normalizovane i *ln*). Primenom koncepta metode entropije dobijamo težinu svakog kriterijuma. Na osnovu toga, normalizovana težinska matrica odlučivanja je predstavljena u tabeli 7.

Tabela 7. Normalizovana fazi težinska matrica odlučivanja

	K1			K2			K3			K4		
A1	-0.0285	0.0129	0.4402	0.0150	0.0263	0.0572	0.0450	0.0790	0.1721	0.0752	0.1320	0.2875
A2	-0.0247	0.0112	0.3817	0.0089	0.0156	0.0339	0.0474	0.0832	0.1812	0.1212	0.2128	0.4634
A3	-0.0357	0.0161	0.5515	0.0213	0.0374	0.0814	0.0207	0.0364	0.0792	0.0259	0.0455	0.0991
A4	-0.0479	0.0216	0.7400	0.0133	0.0233	0.0508	0.0232	0.0407	0.0886	0.0345	0.0606	0.1320
A5	-0.0392	0.0177	0.6054	0.0213	0.0374	0.0814	0.0163	0.0285	0.0622	0.0353	0.0619	0.1348

Sledeći korak fazi *TOPSIS* metode je definisanje fazi pozitivnog idealnog rešenja $\tilde{A}^+$ i fazi negativnog idealnog rešenja $\tilde{A}^-$. U tabeli 8 prikazana je matrica fazi pozitivnog i fazi negativnog idealnog rešenja.

Tabela 8. Matrica fazi pozitivnog i fazi negativnog idealnog rešenja

	K1			K2			K3			K4		
A+	-0.0247	0.0112	0.3817	0.0089	0.0156	0.0339	0.0163	0.0285	0.0622	0.0259	0.0455	0.0991
A-	-0.0479	0.0216	0.7400	0.0213	0.0374	0.0814	0.0474	0.0832	0.1812	0.1212	0.2128	0.4634

Nakon definisanja matrice fazi pozitivnog i fazi negativnog idealnog rešenja pristupa se određivanju rastojanja između alternativa i idealnih rešenja. Drugim rečima, vrši se proračun rastojanja od svakog *TEP* – a do fazi pozitivnog i svakog *TEP* – a do fazi negativnog idealnog rešenja. U tabeli 9 dat je prikaz rastojanja od svakog *TEP* – a do fazi pozitivnog idealnog rešenja dok je u tabeli 10 prikazano rastojanje od svakog *TEP* – a do fazi negativnog idealnog rešenja.

Tabela 9. Rastojanje od svakog *TEP* – a do fazi pozitivnog idealnog rešenja

	A ⁺
A1	0.0211
A2	0.0785
A3	0.0167
A4	0.0741
A5	0.0290

Tabela 10. Rastojanje od svakog *TEP* – a do fazi negativnog idealnog rešenja

	A ⁻
A1	0.0558
A2	0.3774
A3	0.4200
A4	0.5183
A5	0.4419

Poslednji korak *TOPSIS* metode podrazumeva proračun relativnog rastojanja do idealnog rešenja. Proračun se sastoji iz odnosa fazi negativnog idealnog rešenja sa zbirom fazi negativnog i fazi pozitivnog idealnog rešenja. Na ovaj način se dobija konačan rang alternativa odnosno odluka o tome koji *TEP* treba da raste primenom funkcije *max*. Koeficijent relativne blizine svakog *TEP* – a do idealnih rešenja je prikazan u tabeli 11.

Tabela 11. Koeficijent relativne blizine svakog TEP – a do idealnih rešenja

	KRB
A1	0.7255
A2	0.8278
A3	0.9617
A4	0.8748
A5	0.9385

Primenom funkcije *max* dobija se konačan rang alternativa odnosno odluka o tome koji TEP treba da raste: TEP3 (0.9617), TEP5 (0.9385), TEP4 (0.8748), TEP2 (0.8278), TEP1 (0.7255).

- Drugi stepen

Drugi stepen fazi TOPSIS metode predstavlja identičan proces prethodno objašnjenom prvom stepenu. Jedina razlika je u tome što se u drugom stepenu iz skupa susednih potencijalnih blokova bira blok koji treba da bude dodat izabranom klasteru (TEP – u) iz prvog stepena.

Kao i u prvom, i u drugom stepenu takođe definišemo ulazne parametre prikazane u tabeli 12. U ovom slučaju, alternative predstavljaju skup potencijalnih blokova koji okružuju odabrani klaster (TEP) dok su kriterijumi ostali isti kao i u prvom stepenu. Pošto je u prvom stepenu TEP3 izabran da raste, potencijalni blokovi koji ga okružuju su 25 i 34. U tabeli 13 prikazana je matrica odlučivanja.

Tabela 12. Ulazni parametri TOPSIS metode u drugom stepenu

Potencijalni blokovi	Godišnji kapacitet (%)*			Kompaktnost	STDev Pb	STDev Zn
Blok 25	20.3617	24.8865	30.4168	16.6667	0.1932	0.4386
Blok 34	19.5995	23.9549	29.2782	16.6667	0.2743	0.7470

*Kriterijum Godišnji kapacitet je izražen kao trouglasti fazi broj

Tabela 13. Matrica odlučivanja

	K1			K2	K3	K4
A1	20.3617	24.8865	30.4168	16.6667	0.1932	0.4386
A2	19.5995	23.9549	29.2782	16.6667	0.2743	0.7470

Tabela 14. Normalizovana matrica odlučivanja

	K1			K2	K3	K4
A1	0.3411	0.5095	0.7612	0.5000	0.4133	0.3699
A2	0.3283	0.4905	0.7327	0.5000	0.5867	0.6301

Tabela 15. Normalizovana fazi težinska matrica odlučivanja

	K1			K2			K3			K4		
A1	8.8212	0.0019	-0.0977	0.0000	0.0000	0.0000	0.6274	0.1261	0.0204	1.2721	0.2557	0.0413
A2	8.4910	0.0018	-0.0941	0.0000	0.0000	0.0000	0.8908	0.1790	0.0289	2.1670	0.4355	0.0703

Tabela 16. Matrica fazi pozitivnog i fazi negativnog idealnog rešenja

K1				K2			K3			K4		
A+	8.4910	0.0018	-0.0941	0.0000	0.0000	0.0000	0.6274	0.1261	0.0204	1.2721	0.2557	0.0413
A-	8.8212	0.0019	-0.0977	0.0000	0.0000	0.0000	0.8908	0.1790	0.0289	2.1670	0.4355	0.0703

Tabela 17. Rastojanje od svakog potencijalnog bloka do fazi pozitivnog idealnog rešenja

	A ⁺
A1	0.2651
A2	0.7218

Tabela 18. Rastojanje od svakog potencijalnog bloka do fazi negativnog idealnog rešenja

	A ⁻
A1	64.9623
A2	62.6659

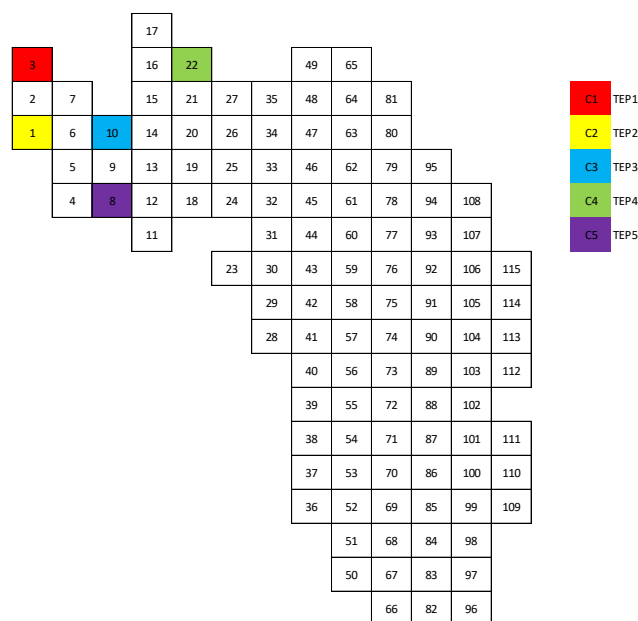
Tabela 19. Koeficijent relativne blizine svakog potencijalnog bloka do idealnih rešenja

	KRB
A1	0.9959
A2	0.9886

Primenom funkcije *max* dobija se konačan rang alternativa odnosno odluka o tome koji potencijalni blok treba da bude dodat ranije izabranom klasteru (*TEP* – u): Blok 25 (0.9959), Blok 34 (0.9886).

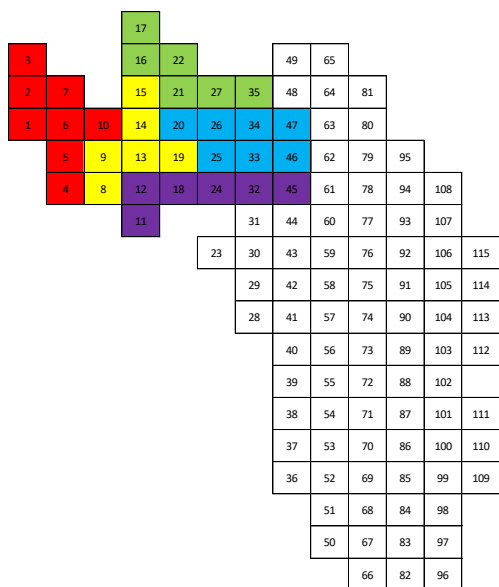
9.3 Grafički prikaz particije rudnog tela (ležišta)

Nulta ili početna iteracija podrazumeva izbor početnih (inicijalnih) blokova odnosno *TEP* – ova. Primenom algoritma klasterisanja na skup obodnih blokova izabrali smo pet blokova prema opadajućem nizu vrednosti koeficijenta relativne blizine (*KRB*). Ako uzmemo u obzir da svi obodni blokovi imaju istu kompaktnost a standardna devijacija kvaliteta rude olova i cinka jednaka nuli, tada se izbor zasniva samo na apsolutnom rastojanju između godišnjeg kapaciteta proizvodnje i rezervi (tonaže) rude obodnog bloka. Prema tome, izabrani su početni (inicijalni) blokovi odnosno klasteri (*TEP* – ovi) prema opadajućem nizu vrednosti koeficijenta relativne blizine (*KRB*), a to su: blok 3 (*TEP1*), blok 1 (*TEP2*), blok 10 (*TEP3*), blok 22 (*TEP4*) i blok 8 (*TEP5*). Na ovaj način, definisani su početni (inicijalni) *TEP* – ovi (semena), što je grafički predstavljeno na slici 13.

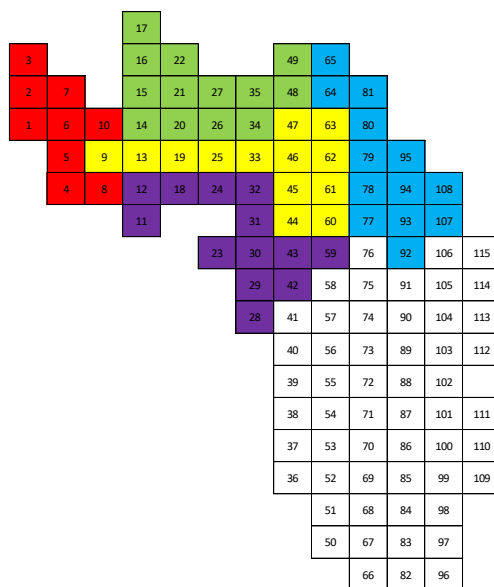


Slika 13. Početni (inicijalni) TEP – ovi (semena)

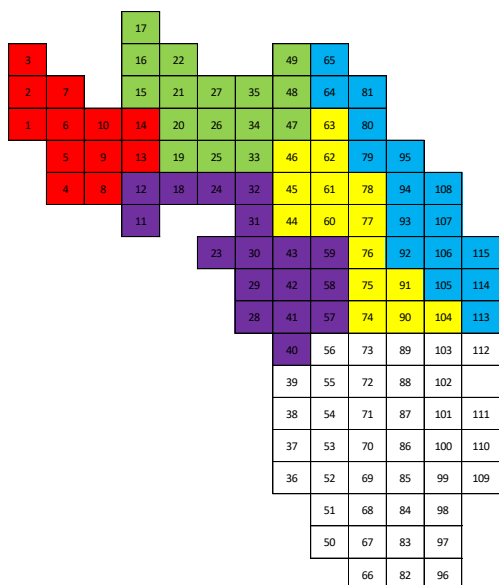
Posle izbora početnih (inicijalnih) *TEP* – ova algoritam nastavlja da izvršava iteracije a karakteristične faze tranzicije predstavljene su na slici 14.



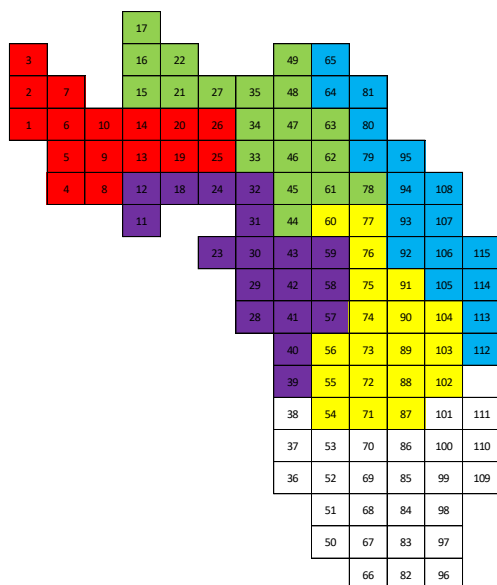
a)



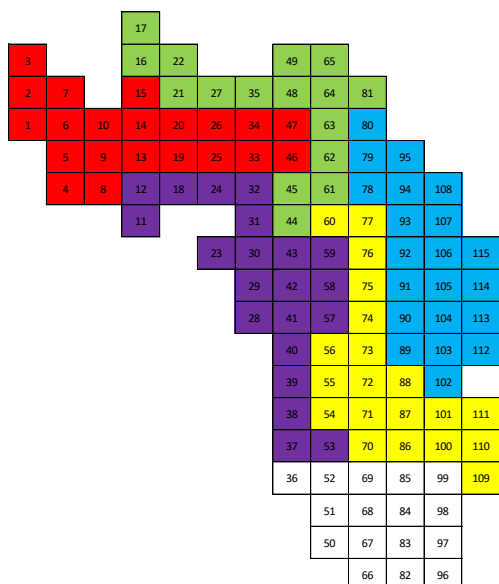
b)



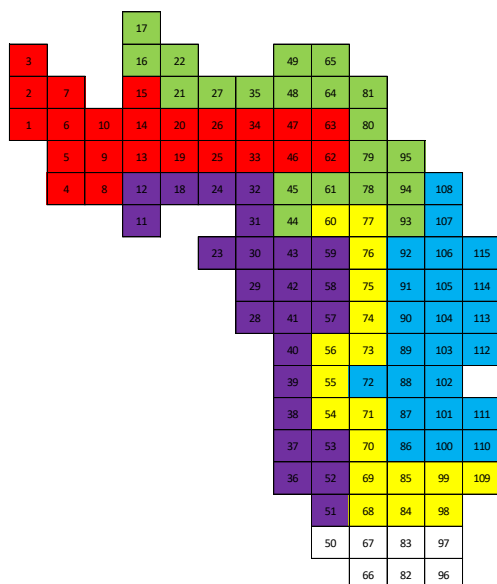
c)



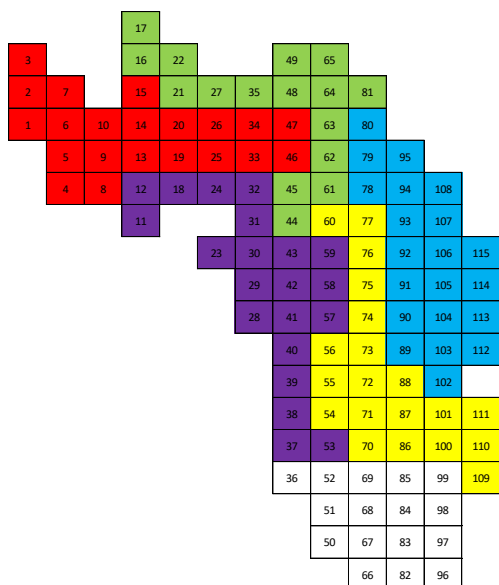
d)



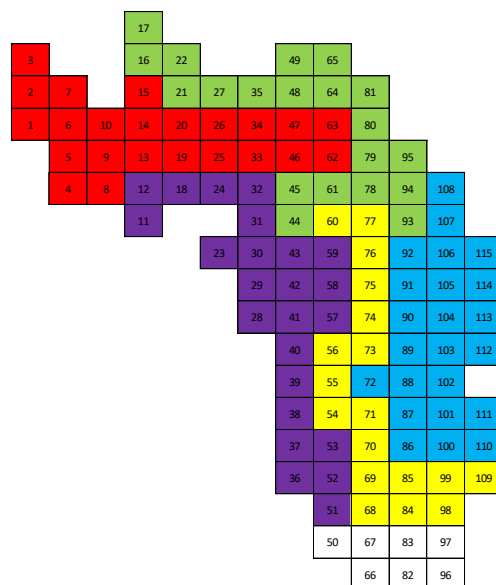
e)



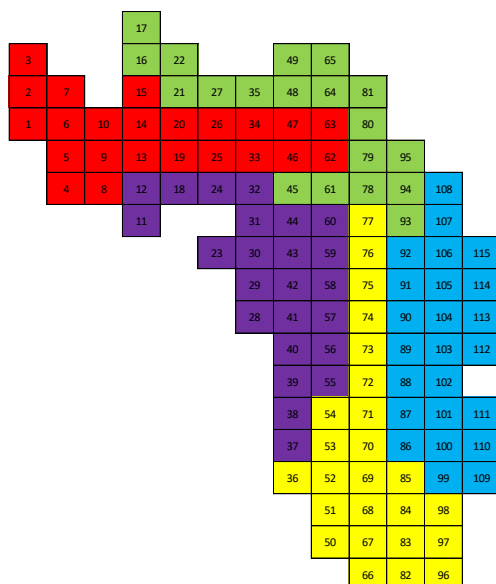
f)



g)



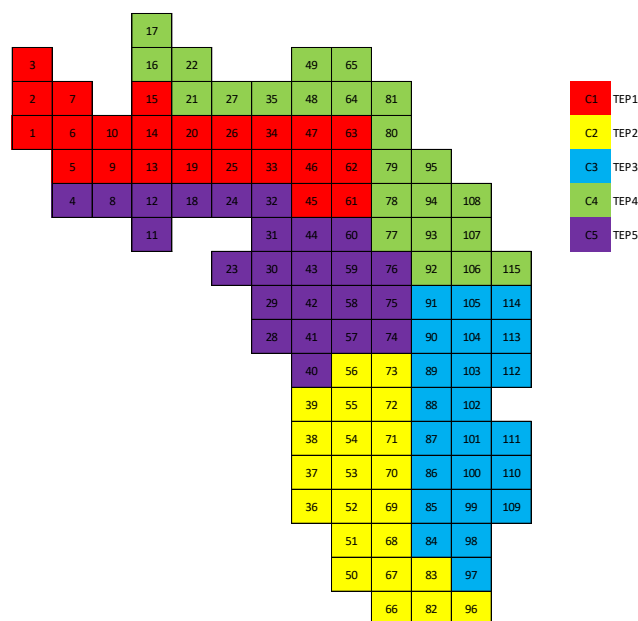
h)



i)

Slika 14. Rezultati algoritma nakon: a) 25 – e iteracije. b) 50 – iteracije. c) 75 – e iteracije. d) 100 – e iteracije. e) 125 – e iteracije. f) 150 – iteracije. g) 175 – e iteracije. h) 200 – iteracije. i) 225 – e iteracije

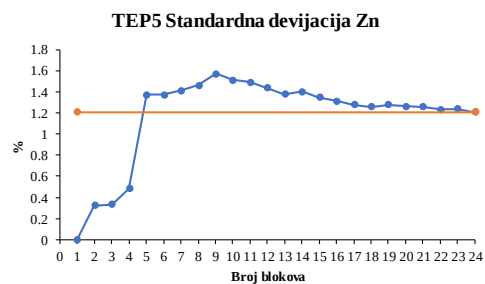
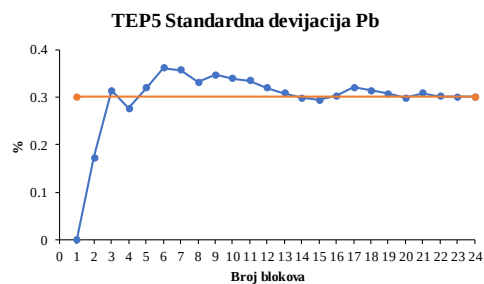
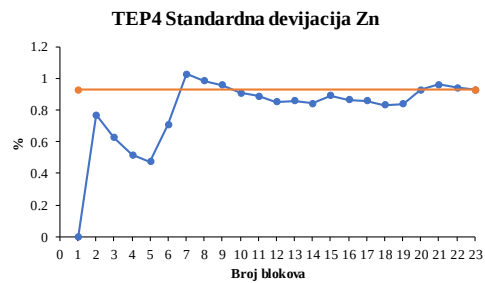
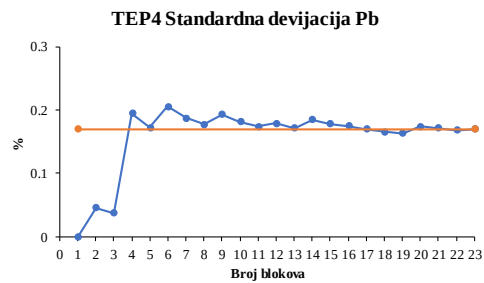
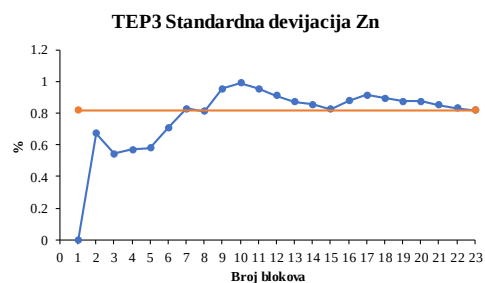
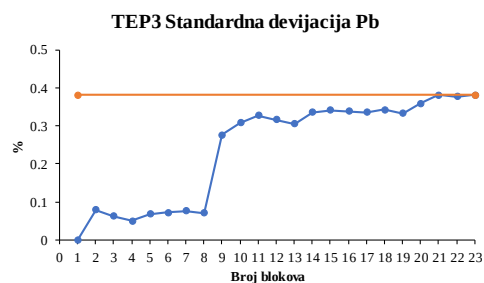
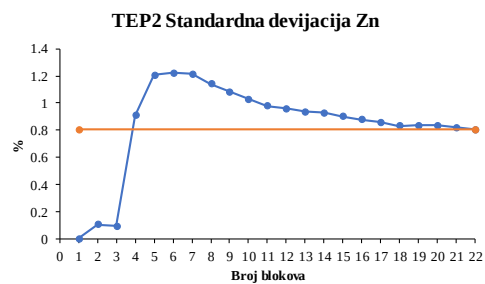
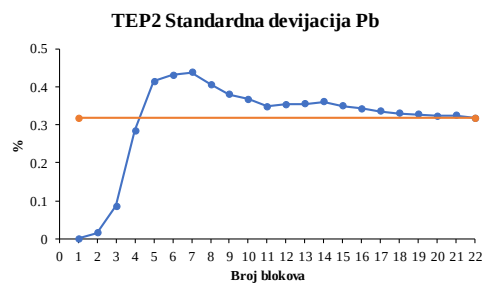
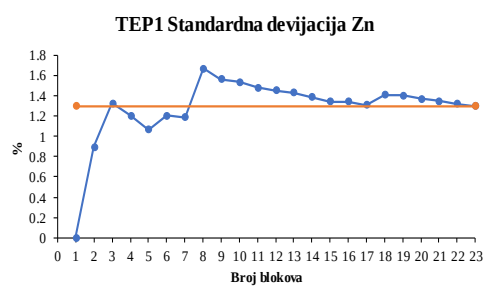
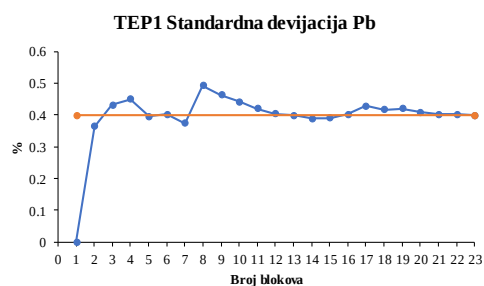
Konačno, algoritam je izvršio particiju (podelu) originalnog rudnog ležišta na pet konačnih tehnoloških eksploatacionih polja uzimajući u obzir grešku godišnjeg kapaciteta proizvodnje i konvergenciju standardne devijacije kvaliteta olova i cinka u *TEP* – u. Na slici 15 prikazana je konačna particija (podela) rudnog tela.



Slika 15. Konačna particija (podela) rudnog tela

9.4 Grafički prikaz konvergencije standardne devijacije olova i cinka

Kako broj iteracija raste, tako se i broj blokova u svakom *TEP* – u postepeno povećava što utiče na promenu vrednosti standardne devijacije kvaliteta rude. Standardna devijacija kvaliteta rude olova i cinka u svakom *TEP* – u treba da teži ustaljenoj vrednosti. Ova pojava nam pomaže da donesemo odluku o tome kada ćemo zaustaviti proces iteracija odnosno ukazuje nam na to da se algoritam polako „smiruje“ i da treba stopirati proces iteracija. Uslov zaustavljanja iterativnog algoritma 9.3 vezan za standardnu devijaciju kvaliteta rude olova i cinka u *TEP* – u je predstavljen na slici 16. Treba napomenuti da algoritam može nastaviti sa procesom iteracija (sa finim podešavanjem), međutim, ne očekuju se značajna odstupanja standardne devijacije kvaliteta rude od njene ustaljene vrednosti te stoga neće doći do drastičnog poboljšanja kvaliteta i primene ovog algoritma.



Slika 16. Konvergencija standardne devijacije kvaliteta olova i cinka u TEP – u

9.5 Realizovane vrednosti atributa tehnološkog eksploatacionog polja

Realizovane vrednosti atributa tehnološkog eksploatacionog polja koji uključuju rezerve rude i kompaktnost *TEP* – a su prikazane u tabeli 20. Kao što je ranije pomenuto, godišnji kapacitet proizvodnje odnosno rezerve rude u svakom *TEP* – u predstavljene su kao suma svih blokova sadržanih u svakom *TEP* – u koji treba da se eksploatišu za jednu godinu. Kako je unapred zadat tehnološki zahtev za godišnji kapacitet proizvodnje od (155204 172449 189694) svaki *TEP* bi trebalo da ima što približniju vrednost godišnjeg kapaciteta proizvodnje zadatoj (ciljanoj) vrednosti odnosno da odstupa od nje u intervalu od -10% do $+10\%$. Ovo ograničenje definisano je jednačinom (90). Najpribližniji godišnji kapacitet proizvodnje ima *TEP3* čije je odstupanje od ciljane vrednosti $-0,17\%$ dok *TEP5* ima godišnji kapacitet proizvodnje koji najviše odstupa od ciljane vrednosti sa $+2,86\%$. *TEP4* takođe ima vrlo visoku približnu vrednost godišnjeg kapaciteta proizvodnje ciljanoj vrednosti sa procentualnim odstupanjem od $+0,24\%$. *TEP2* odstupa od ciljane vrednosti sa $-1,28\%$ dok *TEP1* odstupa sa $-1,65\%$. Ova izuzetno mala odstupanja (greške kapaciteta proizvodnje) godišnjeg kapaciteta proizvodnje svakog *TEP* – a od ciljane vrednosti ukazuju na to da je algoritam u potpunosti ispunio ovaj kriterijum i da uspešno može da reši mnogo komplikovanije probleme.

Tabela 20. Rezerve rude i kompaktnost *TEP* – a

<i>TEP</i>	Rezerve rude (t)	Kompaktnost	Greška kapaciteta proizvodnje (%)
1	152640	39.13	-1.65
	169601		
	186561		
2	153217	30.72	-1.28
	170241		
	187266		
3	154940	29.39	-0.17
	172156		
	189371		
4	155573	62.78	+0.24
	172859		
	190145		
5	159649	48.16	+2.86
	177388		
	195127		

* (a, b, c) trouglasti fazi broj izražen kao kolona

Srednja apsolutna procentualna greška kapaciteta proizvodnje je:

$$(1.65 + 1.28 + 0.17 + 0.24 + 2.86)/5 = 1.24\% \quad (79)$$

Sam oblik odnosno kompaktnost rudnog ležišta je izuzetno složena i kompleksna što dodatno otežava ispunjenje ciljane vrednosti kompaktnosti *TEP* – a. Kompaktnost samog rudnog ležišta iznosi 47,62. Rudno telo je nepravilnog oblika pa je i kreiranje optimalnog plana otkopavanja ležišta veoma težak zadatak za planera. Zbog svoje nepristupačnosti odnosno nepravilnog oblika, otkopavanje i sam proces eksploatacije spada u ekstremno zahtevne inženjerske poduhvate.

I to ukazuje da je efikasnost algoritma veoma visoka. Ako uzmemo u obzir da je rudno ležište veoma složenog oblika onda su kompaktnosti *TEP* – ova, postignute algoritmom, pogodne. Algoritam je

uspeo da kreira tri *TEP* – a koja imaju sličnu kompaktnost a to je 60% originalnog ležišta. Pregled karakteristika koje uzimaju u obzir kvalitet rude u *TEP* – u prikazane su u tabeli 21. Ove karakteristike su veoma važne za planere u pripremi mineralnih sirovina.

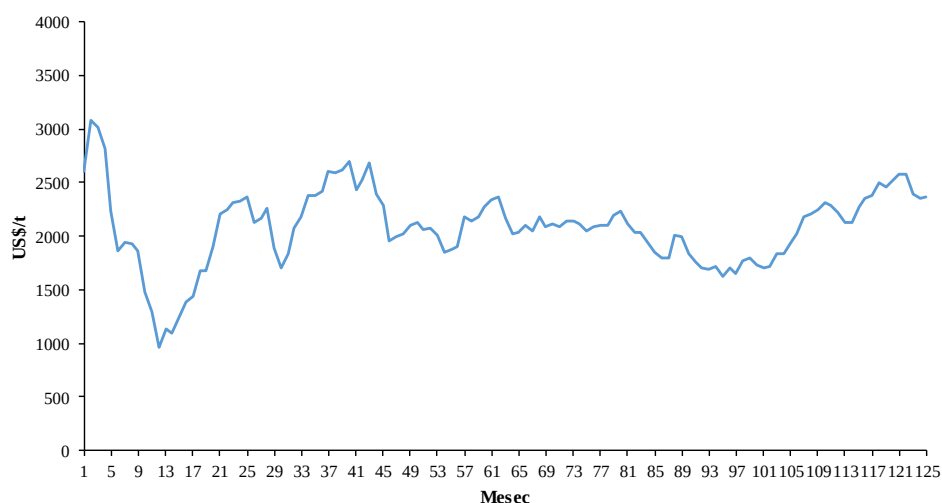
Tabela 21. Karakteristike kvaliteta rude u *TEP* – u

<i>TMC</i>	Srednja vrednost kvaliteta rude (%)		Standardna devijacija kvaliteta rude (%)		Koeficijent varijacije kvaliteta rude (%)	
	Olovo	Cink	Olovo	Cink	Olovo	Cink
1	2.263	3.364	0.325	1.198	14.392	35.607
2	1.801	3.832	0.292	0.418	16.222	10.931
3	2.170	3.937	0.381	0.820	17.565	20.823
4	1.950	2.573	0.169	0.928	8.710	36.079
5	2.136	4.636	0.267	1.262	12.531	27.226

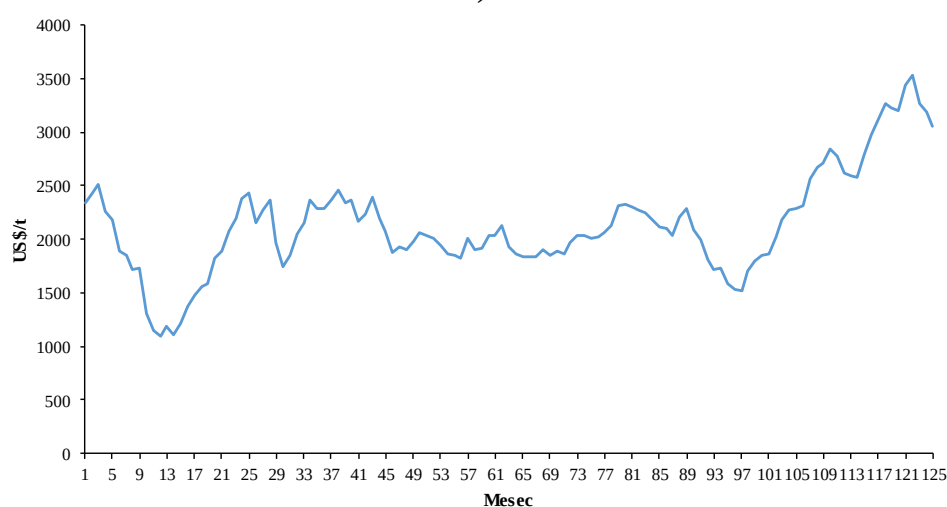
Raspodela kvaliteta rude je vezana za procese geneze (postanka) rudnog tela i planer ne može uticati na nju. Koeficijent varijacije kvaliteta rude za olovo i cink u celom rudnom ležištu iznosi 17,2% za olovo odnosno 32,7% za cink. Algoritam je takođe uspeo da podeli rudno telo na celine sa prikladnim koeficijentima varijacije kvaliteta rude. Možemo da vidimo da je samo u *TEP1* i u *TEP4* koeficijent varijacije kvaliteta cinka veći od 32,7% ali ne tako značajno. Ostvarena raspodela kvaliteta rude olova i cinka u *TEP* – ovima omogućava planerima u pripremi mineralne sirovine da kreiraju mnogo fleksibilnije planove jer su unapred obavešteni o očekivanoj raspodeli kvaliteta rude.

9.6 Definisanje ekonomskih vrednosti svakog tehnološkog eksploatacionog polja

Pošto su definisani svi atributi u *TEP* – ovima, sada možemo nastaviti sa definisanjem njihovih ekonomskih vrednosti. Na slici 17 predstavljene su dve praćene vremenske serije korišćene za definisanje klase centara cena olova i cinka. Praćene vremenske serije cena metala izražene su kao jednoznačni brojevi na mesečnom nivou. Period praćenja je bio 125 meseci. Fazi K – sredina algoritam je proizveo dva vektora klase centara cene metala što je prikazano u tabeli 22. Ukupno je definisano po sedam centara klastera za obe praćene serije cena metala. Pretvaranjem ovih centara klastera u trouglaste fazi brojeve stekli su se uslovi za njihovu transformaciju u odgovarajuće lingvističke promenljive kao i kodove opsega (stanja). Prema tome, svaka vrednost praćene serije cena metala je pripala jednom od sedam centara klastera čime se automatski konvertovala iz jednoznačnog broja u trouglasti fazi broj odnosno u odgovarajuću lingvističku promenljivu i kod opsega (stanje).



a)



b)

Slika 17. Praćene cene metala na mesečnom nivou: a) Olovo b) Cink

Tabela 22. Klase centara cene metala

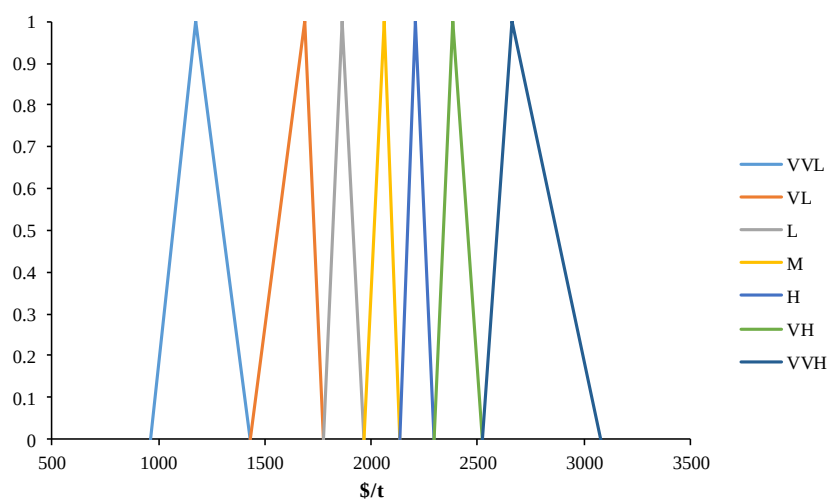
Cena metala	Klasa centra ($m = 1, 2, \dots, 7$)						
	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	c_7
Olovo (\$/t)	1176	1689	1863	2064	2205	2381	2665
Cink (\$/t)	1236	1816	2014	2176	2344	2695	3244

Minimalna vrednost cene olova je 963 \$/t a maksimalna 3080 \$/t dok je minimalna vrednost cene cinka 1101 \$/t a maksimalna 3533 \$/t. Transformacija lingvističkih promenljivih u adekvatne trouglaste fazi brojeve i odgovarajuće kodove opsega prema dobijenim klasama centara predstavljena je u tabeli 23 i na slici 18.

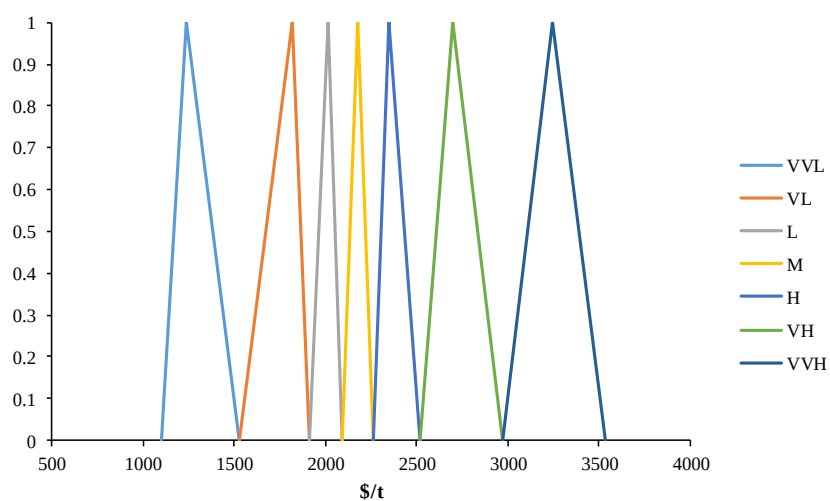
Tabela 23. Transformacija lingvističkih promenljivih

Lingvistička promenljiva	Trouglasti fazi broj cene metala (\$/t)		Funkcija pripadnosti	Vrednost koda opsega y_m, m $= 1, 2, \dots, 7$
	Olovo	Cink		
VVL	(963 1176 1433)	(1101 1236 1526)	(0; 1; 0)	$y_1 = 1$
VL	(1433 1689 1776)	(1526 1816 1915)	(0; 1; 0)	$y_2 = 2$
L	(1776 1863 1963)	(1915 2014 2095)	(0; 1; 0)	$y_3 = 3$
M	(1963 2064 2134)	(2095 2176 2260)	(0; 1; 0)	$y_4 = 4$
H	(2134 2205 2293)	(2260 2344 2519)	(0; 1; 0)	$y_5 = 5$
VH	(2293 2381 2523)	(2519 2695 2970)	(0; 1; 0)	$y_6 = 6$
VVH	(2523 2665 3080)	(2970 3244 3533)	(0; 1; 0)	$y_7 = 7$

Na slici 18 predstavljena je transformacija lingvističkih promenljivih u trouglasti fazi broj.



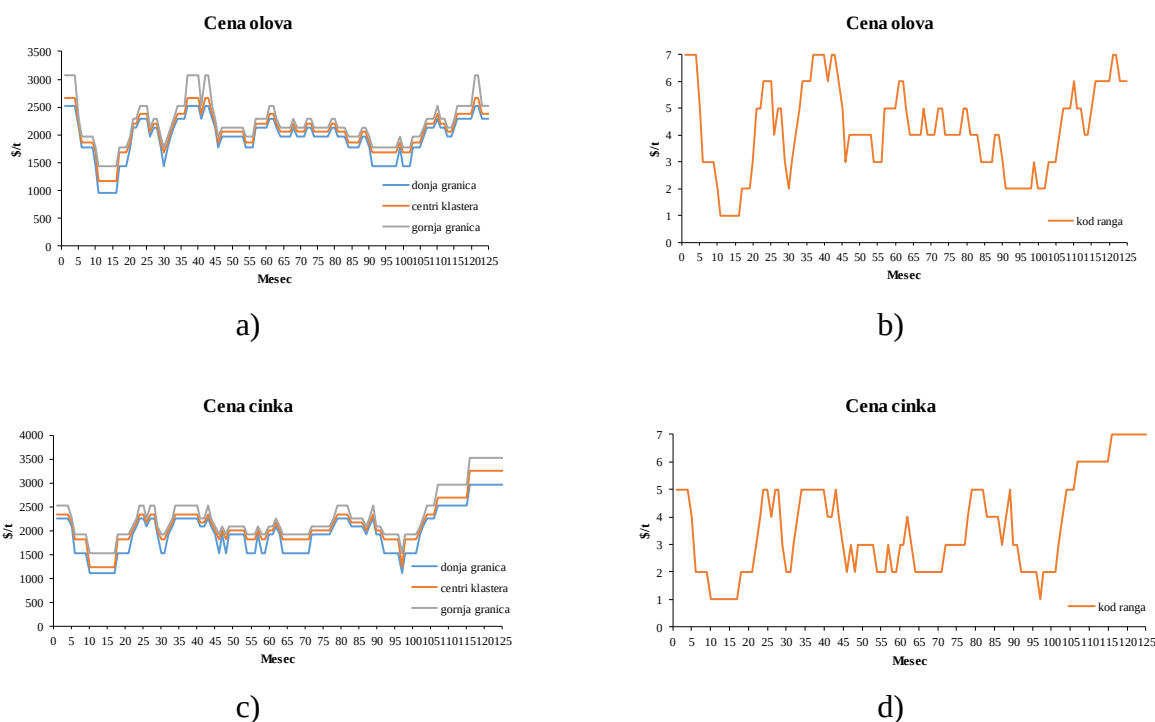
a)



b)

Slika 18. Lingvističke promenljive izražene kao trouglasti fazi brojevi: a) olovo, b) cink

Transformacija praćenih serija u serije fazi stanja (serije koda opsega) izvodi se prema mehanizmu označavanja, korišćenjem jednačine (103). Praćena vrednost je fazifikovana u odnosu na to gde je došlo do maksimalnog stepena pripadnosti. Rezultati mehanizma označavanja predstavljeni su na slici 19.



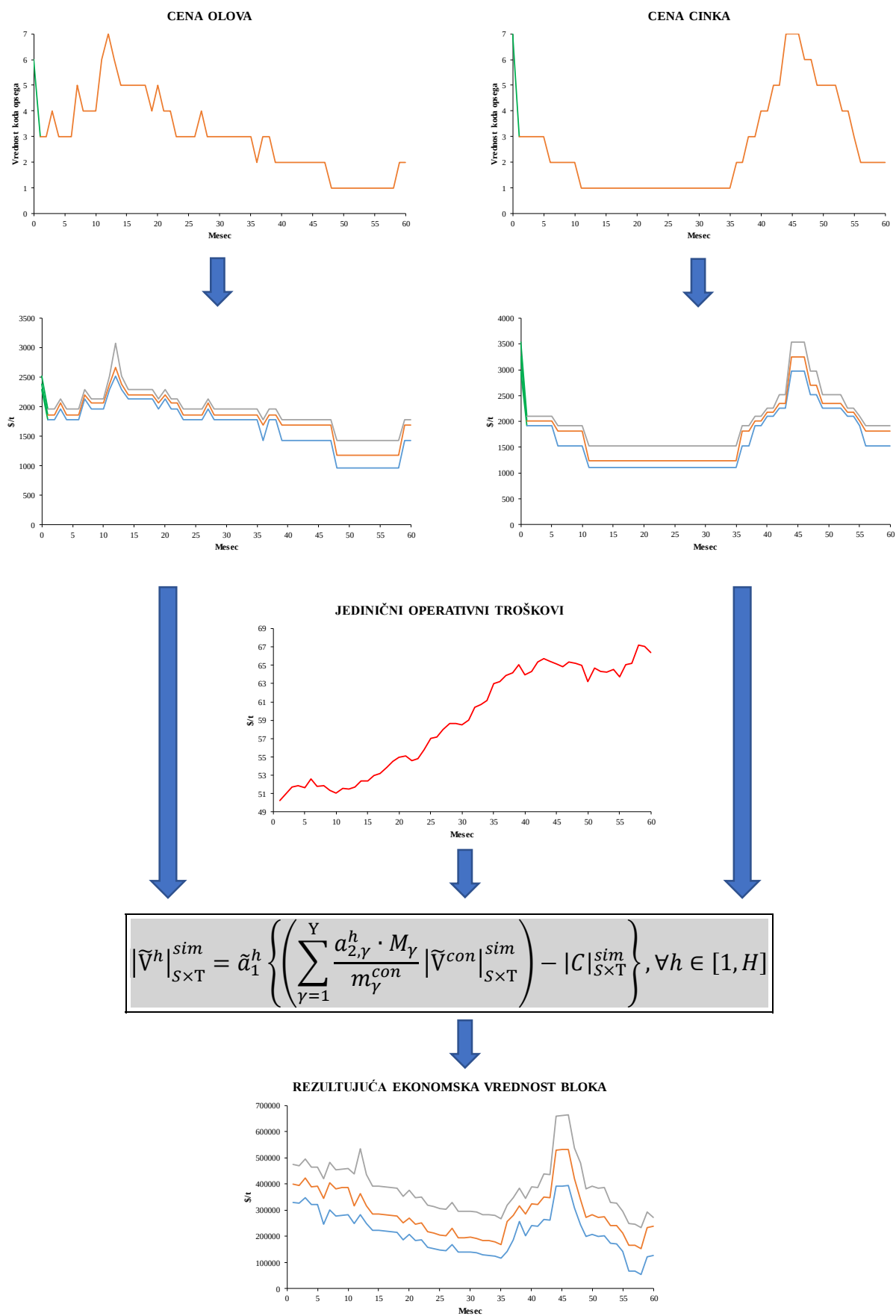
Slika 19. Praćene serije izražene preko fazi stanja i kodova opsega: a) fazi stanje cene olova, b) kod opsega cene olova, c) fazi stanje cene cinka, d) kod opsega cene cinka

Za kalibraciju procesa povratka na srednju vrednost, koji je korišćen za prognozu budućeg stanja cene metala olova i cinka, pojedinačno smo izvršili linearnu regresiju prvog reda na serijama koda opsega cene olova i serijama koda opsega cene cinka. Kalibracija stohastičkog procesa Itô-Doob, koji je korišćen za prognozu budućih stanja jediničnih operativnih troškova, zasniva se na ekspertskom znanju. Parametri potrebni za simulaciju ovih difuznih procesa prikazani su u tabeli 24.

Tabela 24. Parametri simulacije

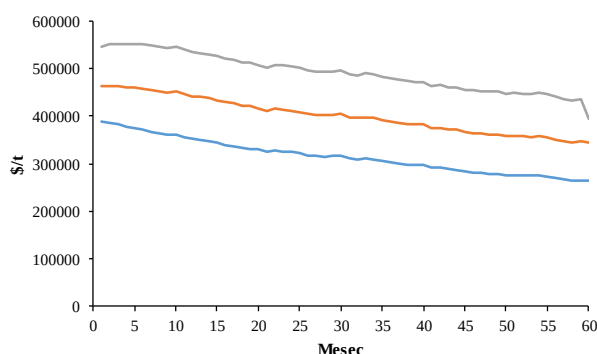
Proces	Vrednost
Cena olova Proces povratka na srednju vrednost – mesečni nivo	Početna vrednost ($\tau=0$) 2361 \$/t → kod opsega 6 → (2293 2381 2523) \$/t ravnoteža
	kod opsega 4 → (1963 2064 2134) \$/t
	brzina povratka na srednju vrednost 0.11251
	volatilnost (nestabilnost) 0.18491
Cena cinka Proces povratka na srednju vrednost – mesečni nivo	Početna vrednost ($\tau=0$) 3060 \$/t → kod opsega 7 → (2970 3244 3533) ravnoteža
	kod opsega 4 → (2095 2176 2260)
	brzina povratka na srednju vrednost 0.06133
	volatilnost (nestabilnost) 0.16416
Operativni troškovi Itô-Doob stohastički proces – mesečni nivo	Početna vrednost ($\tau=0$) 50 \$/t
	trend (mera srednjeg rasta) 0,0025
	volatilnost (nestabilnost) 0,0125
Vremenski raspon simulacije	($\tau=1,2,\dots,60$), $T=60$ meseci
Broj simulacija	500

Jedna simulacija cene metala olova i cinka, jediničnog operativnog troška i rezultujuće ekonomske vrednosti eksploatacionog bloka 1 predstavljena je na slici 20. Prvi mesec (označen zelenom bojom) predstavlja poslednji mesec praćene vremenske serije cene metala na osnovu koga će se vršiti prognoza budućeg stanja cene metala. Simulacija se zasniva na prognozi vrednosti kodova opsega odnosno stanja praćene vremenske serije cena metala. Vremenski raspon simulacije tj. period prognoze iznosi 60 meseci. Svako prognozirano buduće stanje cena metala na mesečnom nivou konvertuje se u odgovarajući trouglasti fazi broj. Procesom istovremene simulacije obe serije cena metala, uzimajući u obzir i jedinične operativne troškove, primenom jednačine (151) dobija se jedan mogući veštački scenario ekonomske vrednosti bloka. Ovaj proces se ponavlja 500 puta nakon čega se za svaki mesec računa srednja vrednost primenom jednačine (153). Na taj način se definiše očekivana ekonomska vrednost bloka na mesečnom nivou. Primenom jednačine (154) pretvaramo očekivanu ekonomsku vrednost bloka iz mesečnog u godišnji nivo. To se zasniva na sumi prvih 12 očekivanih ekonomskih vrednosti bloka na mesečnom nivou podeljenih sa 12 čime se dobija očekivana ekonomska vrednost bloka za prvu godinu. Postupak se ponavlja u zavisnosti od perioda prognoze što u našem slučaju iznosi 60 meseci odnosno 5 godina. Diskontovana ili sadašnja ekonomska vrednost bloka, na godišnjem nivou, računa se primenom jednačine (155) uzimajući u obzir promenljivu diskontnu stopu u svakoj godini predstavljenu kao trouglasti fazi broj. Na kraju, određuje se sadašnja ekonomska vrednost TEP – a na godišnjem nivou kao zbir svih diskontovanih tj. sadašnjih ekonomskih vrednosti blokova sadržanih u tom TEP – u.



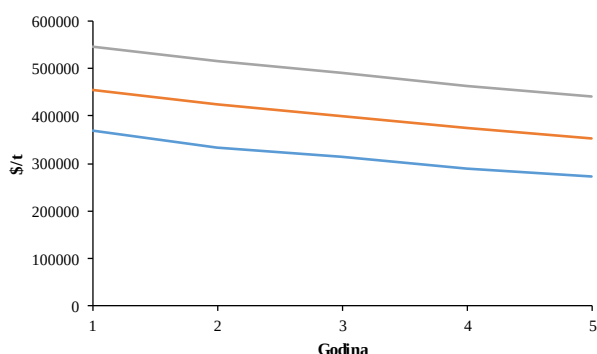
Slika 20. Jedan mogući veštački scenario ekonomske vrednosti bloka 1

Nakon 500 simulacija dobili smo uzorak koji je korišćen za definisanje očekivane ekonomske vrednosti eksploatacionog bloka 1 kroz vreme planiranja na mesečnom nivou. Za svaki mesec smo tražili srednju vrednost uzorka i očekivane ekonomske vrednosti eksploatacionog bloka 1 predstavljene su na slici 21.



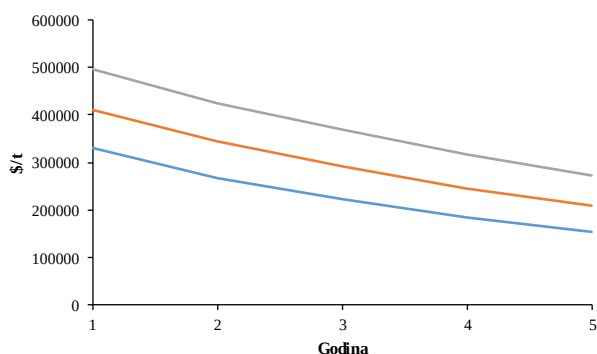
Slika 21. Očekivane ekonomske vrednosti bloka 1 – mesečni nivo

Transformacija prognoziranih ekonomskih vrednosti bloka 1, iz mesečnog u godišnji nivo, predstavljena je na slici 22.



Slika 22. Prognozirane ekonomske vrednosti bloka 1 – godišnji nivo

Diskontovane ili sadašnje ekonomske vrednosti eksploatacionog bloka 1 predstavljene su na slici 23.



Slika 23. Sadašnje ekonomske vrednosti bloka 1

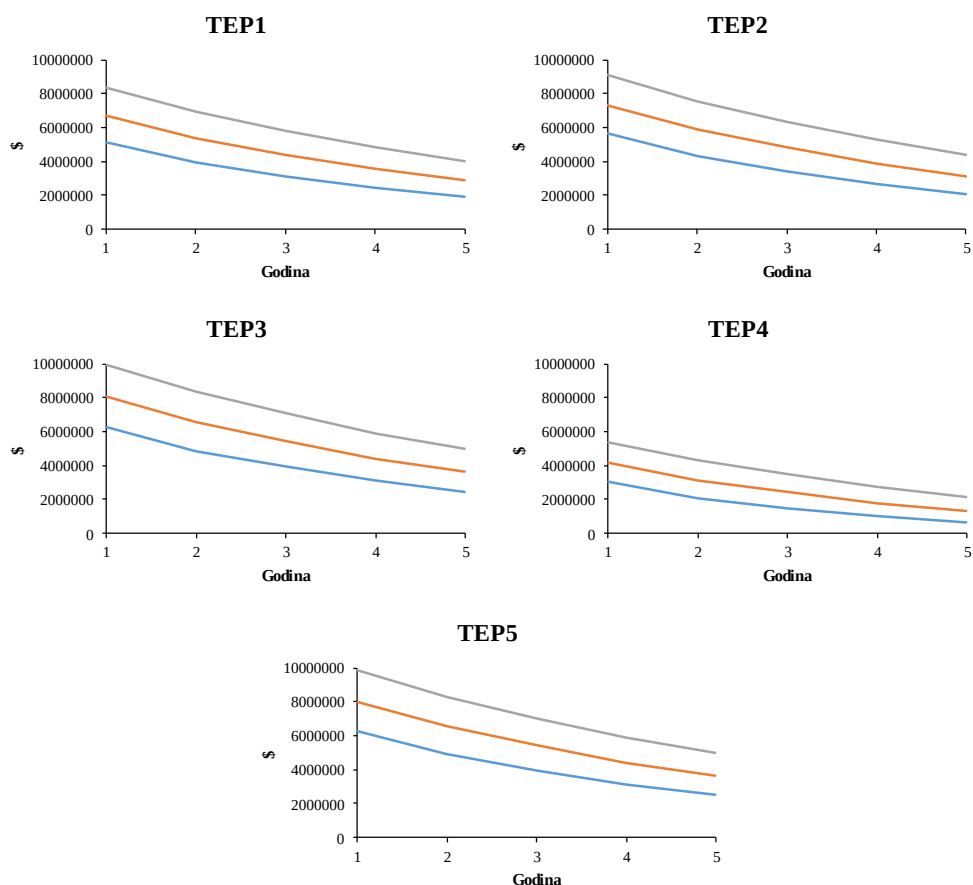
Primenom procesa simulacije na svim blokovima istovremeno, dobijamo njihove sadašnje ekonomske vrednosti i možemo izračunati sadašnje ekonomske vrednosti *TEP* – ova. Prema rezultatima particije rudnog ležišta, sadašnje ekonomske vrednosti svakog *TEP* – a prikazane su u tabeli 25 i na slici 24.

Tabela 25. Sadašnje ekonomske vrednosti TEP – ova

<i>TEP</i>	Vrednost (\$)				
	Godina 1	Godina 2	Godina 3	Godina 4	Godina 5
1	5104734	3944737	3044364	2443462	1924433
	6591226	5356427	4305812	3576349	2926394
	8228167	6904516	5704581	4871250	4096627
2	5583555	4336349	3366286	2691067	2117861
	7190095	5863841	4730052	3916424	3201541
	8951887	7536746	6246798	5320340	4472001
3	6213929	4891545	3857917	3139633	2524390
	7923489	6519182	5317593	4456306	3694805
	9796030	8298845	6935676	5958908	5056129
4	2976598	2108873	1450337	1038819	686021
	4063918	3133980	2351322	1834430	1374755
	5275030	4267887	3358689	2754948	2200817
5	6198802	4899506	3882193	3166488	2555475
	7882521	6503582	5321728	4466255	3712085
	9723915	8256167	6917828	5949400	5056656

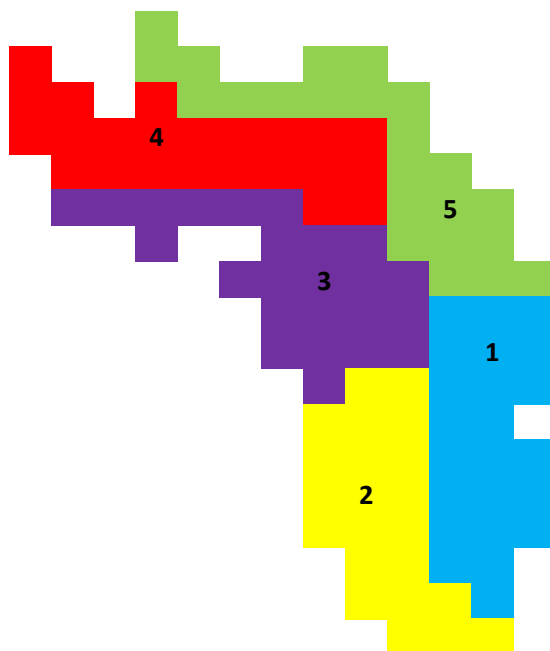
* (*a*, *b*, *c*) trouglasti fazi brojevi su izraženi kao kolona

Na slici 24 prikazane su sadašnje ekonomske vrednosti svakog *TEP* – a na nivou godine.



Slika 24. Sadašnje ekonomske vrednosti TEP – ova na nivou godine

Na ovaj način, svaki koeficijent $\tilde{v}_{it}^d, i = 1, 2, \dots, 5; t = 1, 2, \dots, 5$ funkcije cilja (jednačina (49)) je definisan. Rešenje fazi funkcije cilja je: $x_{14} = 1; x_{22} = 1; x_{31} = 1; x_{45} = 1; x_{53} = 1$, dok su ostale promenljive jednake nuli. To znači da je optimalan plan proizvodnje sledeći: *TEP3* (godina 1) → *TEP2* (godina 2) → *TEP5* (godina 3) → *TEP1* (godina 4) → *TEP4* (godina 5). Na slici 25 grafički je prikazan optimalan plan proizvodnje.



Slika 25. Optimalan plan proizvodnje

Vrednost funkcije cilja je $\tilde{F} = (17561955 \ 24060165 \ 31322673)$ \$. Vrednost jednačine (54) je:

$$\begin{aligned} \tilde{F} - \tilde{I} &= (17561955 \ 24060165 \ 31322673) \\ &- (12000000 \ 13000000 \ 15000000) = \\ &= (2561955 \ 11060166 \ 19322673) \$ \end{aligned} \quad (169)$$

Ova razlika predstavlja neto sadašnju vrednost realizovanog plana proizvodnje. Pošto je ona pozitivna, plan proizvodnje je profitabilan i prihvatljiv.

10. ZAKLJUČAK

Sposobnost optimizacije proizvodnje u uslovima neodređenosti je prepoznata kao kritična za konkurentnost pa čak i za preživljavanje rudarske kompanije. Prisustvo neodređenosti čini da model funkcioniše u dinamičkom okruženju proizvodeći optimalne rezultate i planove. Cena metala, operativni troškovi kao i godišnji kapacitet proizvodnje identifikovani su kao glavni izvori neodređenosti i kao takvi su opisani pomoću fazi brojeva. Svaki rudarski projekat zavisi od ovih neodređenih parametara koji imaju značajan uticaj na konačan finansijski rezultat. Na ovaj način, inkorporirali smo rizike u planiranje proizvodnje rudnika.

U ovom radu predstavili smo model fazi 0 – 1 linearnog programiranja za planiranje proizvodnje kod komorno – stubne metode otkopavanja. Model se zasniva na maksimizaciji fazi funkcije cilja koja predstavlja sadašnju ili diskontovanu vrednost budućeg novčanog toka plana proizvodnje, uzimajući u obzir skup ograničenja.

Naš pristup planiranja proizvodnje rudnika sadrži dva glavna dela. Prvi deo se odnosi na particiju (podelu) mineralnog ležišta kreirajući *TEP* – ove (klastere) u rudnom telu. Dvostepeni fazi višekriterijumski algoritam poligonalnog prostornog klasterisanja kao iterativni proces je primenjen za kreiranje *TEP* – ova gde svaki klaster ispunjava sledeće tehnološke zahteve: godišnji kapacitet proizvodnje, kompaktnost oblika *TEP* – a i standardnu devijaciju sadržaja rude u *TEP* – u. Kreiranjem *TEP* – ova, značajno smo smanjili broj promenljivih u funkciji cilja, čime smo njeno rešavanje učinili mnogo lakšim i vremenski prihvatljivim kako za planere tako i za rukovodstvo rudarske kompanije. Samim tim, stvorili smo prostor za primenu neodređenosti nekih ulaznih podataka i na taj način smo dobili mnogo realnije i objektivnije rezultate.

Drugi deo modela planiranja proizvodnje rudnika je vezan za proračun ekonomske vrednosti eksploatacionih blokova korišćenjem simulacije procesa povratka na srednju vrednost i Itô – Doob stohastičke diferencijalne jednačine. Ekonomska vrednost svakog eksploatacionog bloka je definisana preko cene metala i operativnih troškova u uslovima neodređenosti. Prema tome, razvili smo istovremene simulacije ova dva glavna ekonomska izvora pri čemu svaki eksploatacioni blok ima različitu ekonomsku vrednost kroz vreme planiranja. Na osnovu toga, odredili smo sadašnje ekonomske vrednosti (očekivane fazi vrednosti) svakog *TEP* – a za svaku godinu vremena planiranja. Koeficijenti fazi linearne funkcije cilja dobijeni su diskontovanjem ovih očekivanih vrednosti fazi diskontnom stopom. Rešenje fazi funkcije cilja daje poredak eksploatacije *TEP* – ova, tj. optimalan plan proizvodnje uzimajući u obzir operativna ograničenja. Imajući na umu da je vrednost funkcije cilja pozitivna, naš razvijeni algoritam je apsolutno realizovan i prihvaćen za rešavanje mnogo kompleksnijih problema.

Model nije „zatvoren“ i može biti proširen uključivanjem neodređenosti koje se odnose na sadržaj rude. Ova neodređenost je veoma važna i značajno utiče na plan proizvodnje. Fazi brojevi takođe mogu biti korišćeni u tu svrhu ali proračun standardne devijacije primenom fazi brojeva je veoma kompleksan i težak zadatak. Buduće istraživanje će biti fokusirano na uključivanje fazi brojeva kao načina za opis neodređenosti sadržaja rude.

Takođe, treba naglasiti da ovaj model planiranja proizvodnje predstavlja makroplan eksploatacije ležišta gde postoji mogućnost proširenja našeg razvijenog modela. To proširenje se odnosi na kreiranje modela koji se zasniva na mikroplanu eksploatacije ležišta. Mikroplan bi podrazumevao nekoliko pristupa pri planiranju proizvodnje. Jedan od pristupa odnosio bi se na particiju već kreiranih *TEP* – ova gde bismo na kvartalnom i mesečnom nivou vršili planiranje proizvodnje i eksploataciju. Drugi pristup mikroplana predstavljao bi dalje pojednostavljenje i uprošćavanje razvijenog modela koje bi se zasnivalo na planiranju proizvodnje i eksploatacije na nedeljnom a u nekim slučajevima i na dnevnom nivou.

LITERATURA

- [1] Gentry D.W., O'Neil T.J., 1984. Mine Investment Analysis, Society of Mining Engineers
- [2] O'Sullivan D., Brickey A. and Newman A., 2015. Is open pit production scheduling "easier" than its underground counterpart? Mining Engineering, 67(4), pp. 68-73. Official publication of the Society for Mining, Metallurgy & Exploration inc.
- [3] Carlyle W. M., Eaves B. C., 2001. Underground planning at Stillwater Mining Company, Interfaces, 31(4), pp 50–60
- [4] Konanu A., 2016. Applications of simulation and optimization techniques in optimizing room and pillar mining systems. Dissertations, pp. 1-2467.
http://scholarsmine.mst.edu/doctoral_dissertations/2467
- [5] Bakhtavar E., Shahriar K., Mirhassani A., 2012. Optimization of the transition from open-pit to underground operation in combined mining using (0-1) integer programming, The Journal of the Southern African Institute of Mining and Metallurgy, 112, pp 1059-1064.
- [6] Nehring M., Topal E. and Little J., 2010. A new mathematical programming model for production schedule optimization in underground mining operations. The Journal of The Southern African Institute of Mining and Metallurgy, 110, pp. 437-446.
- [7] Bai X., Marcotte D., Simon R., 2013. Underground stope optimization with network flow method, Computers and Geosciences, 52, pp 361-371.
- [8] Epstein R., Goic M., Weintraub A., Catalan J., Santibanez P., Urrutia R., Cancino R., Gaete S., Aguayo A. and Caro F., 2012. Optimizing Long-Term Production Plans in Copper Mines Operations Research 60(1), pp. 4–17. <http://dx.doi.org/10.1287/opre.1110.1003>
- [9] Grieco N., Dimitrakopoulos R., 2007. Managing grade risk in stope design optimization: Probabilistic mathematical programming model and application in sublevel stoping. Mining Tech.: IMM Trans. Sect. A, 116(2), pp 49–57
- [10] Nehring M., Topal E., Kizil M. and Knights P., 2012. Integrated short- and medium-term underground mine production scheduling. The Journal of The Southern African Institute of Mining and Metallurgy, 112(5), pp. 365-379.
- [11] Terblanche S.E. and Bley A., 2015. An improved formulation of the underground mine scheduling optimisation problem when considering selective mining. ORiON, 31(1), pp. 1-16. <http://dx.doi.org/10.5784/31-1-422>
- [12] Kuchta M., Newman A. and Topal E., 2004. Implementing a Production Schedule at LKAB's Kiruna Mine. Interfaces, 34(2), pp. 124–134. DOI: 10.1287/inte.1030.0059
- [13] Topal E., 2008. Early start and late start algorithms to improve the solution time for long-term underground mine production scheduling. Journal of the South African Institute of Mining & Metallurgy, 108(2), pp. 99-107.
- [14] Hirschi J.C., 2012. A Dynamic Programming Approach to Identifying Optimal Mining Sequences for Continuous Miner Coal Production Systems. Dissertations, pp. 1-542.

- [15] Gligoric Z., Gligoric M., Dimitrijevic B., Grozdanovic I., Milutinovic A., Ganic A, Gojkovic Z., 2018. Model of room and pillar production planning in small scale underground mines with metal price and operating cost uncertainty. Resources Policy. <https://doi.org/10.1016/j.resourpol.2018.07.011>
- [16] <http://www.ct.ufrgs.br/laprom/Underground%20Mining%20Methods.pdf>
- [17] https://www.google.com/search?biw=1920&bih=920&tbm=isch&sa=1&ei=j-URXaqMM5XfxgPoi5C4DA&q=tete+mining+Room+and+pillar+mining&oq=tete+mining+Room+and+pillar+mining&gs_l=img.3...1202909.1208981..1209805...3.0..0.103.1466.13j2.....0....1..gws-wiz-img.llZxglLwKSA#imgsrc=dzXEliqG6aJxMM:
- [18] Hamrin H., 1980. Guide to Underground Mining Methods and Applications, Stockholm, Atlas Copco
- [19] Rashad W., Abdellah E., 2015. Parametric stability analysis of room and pillar method in deep coal mines. Journal of Engineering Sciences, Assiut University, Faculty of Engineering, 43(2), pp. 253–262.
- [20] Kim J.G. , Mahrous A. M. Ali, Yang H.S., 2018. Robust Design of Pillar Arrangement for Safe Room-and-Pillar Mining Method, Geotechnical and Geological Engineering, DOI:10.1007/s10706-018-0734-1
- [21] Okubo S., Yamatomi J., 2009. Underground mining methods and equipment, Civil engineering, vol 2
- [22] Esterhuizen G.S., Dolinar D.R., Ellenberger J.L., 2011. Pillar strength in underground stone mines in the United States, International Journal of Rock Mechanics and Mining Science 48, pp. 42 – 50
- [23] Alguliyev R.M., Aliguliyev R.M., Mahmudova R.S., 2015. Multicriteria Personnel Selection by the Modified Fuzzy VIKOR Method, The Scientific World Journal, Volume 2015, Article ID 612767, 16 pages, Hindawi Publishing Corporation, <http://dx.doi.org/10.1155/2015/612767>
- [24] Zadeh L.A., 1965. Fuzzy sets, Information and Control, vol. 8, no. 3, pp. 338-353
- [25] Kumar A., Kaur J., Singh P., 2011. A new method for solving fully fuzzy linear programming problems, Applied Mathematical Modelling 35, pp. 817-823, doi:10.1016/j.apm.2010.07.037
- [26] Kaufmann A., Gupta M. M., 1985. Introduction to Fuzzy Arithmetic Theory and Applications, Van Nostrand Reinhold, New York
- [27] Jovanović S., 2016. Fuzzy stohastički model izbora sistema otvaranja podzemnog rudnika, Doktorska disertacija, Univerzitet u Beogradu, Rudarsko – geološki fakultet, Beograd
- [28] Pérez-Cañedo B., Concepción-Morales E.R., 2019. A method to find the unique optimal fuzzy value of fully fuzzy linear programming problems with inequality constraints having unrestricted L-R fuzzy parameters and decision variables, Expert Systems With Applications, 123, pp. 256-269, 10.1016/j.eswa.2019.01.041
- [29] [http://www.math.rs/p/files/16-OPERACIONA ISTRAC5%BDIVANJA, vezbe 2014.pdf](http://www.math.rs/p/files/16-OPERACIONA%20ISTRA%C5%BDIVANJA,vezbe2014.pdf)

- [30] Stefanović V., 2014. Optimizacija redova čekanja, Master rad, Univerzitet u Novom Sadu, Prirodno – Matematički fakultet, Departman za matematiku i informatiku, Novi Sad
- [31] Bakhtavar E., Shahriar K., Mirhassani A., 2012. Optimization of the transition from open-pit to underground operation in combined mining using (0-1) integer programming, The Journal of The Southern African Institute of Mining and Metallurgy, Vol. 112, pp. 1059-1064
- [32] Yager R.R., 1981. A procedure for ordering fuzzy subsets of the unit interval. Information Sciences, 24, pp 143-161.
- [33] Hwang C.L., Yoon K., 1981. Multiple Attribute Decision Making-Methods and Applications, A State of the Art Survey. Springer-Verlag, New York.
- [34] Joshi D., 2011. POLYGONAL SPATIAL CLUSTERING, A DISSERTATION, Lincoln, Nebraska, May,
- [35] Joshi D., Soh L-K. and Samal A., 2012. Redistricting Using Constrained Polygonal Clustering, IEEE TRANSACTIONS ON KNOWLEDGE AND DATA ENGINEERING, VOL. 24, NO. 11, pp. 2065-2079, doi: 10.1109/TKDE.2011.140.
- [36] Joshi D., Soh L-K. and Samal A., 2009. Redistricting using Heuristic-Based Polygonal Clustering, Ninth IEEE International Conference on Data Mining, pp. 830-835, DOI 10.1109/ICDM.2009.126
- [37] Wang Y.M., Elhag T.M.S., 2006. Fuzzy TOPSIS method based on alpha level sets with an application to bridge risk assessment. Expert Syst Appl 31, pp. 309-319
- [38] Chen C.T., 2000. Extension of the TOPSIS for group decision making under fuzzy environment. Fuzzy Sets Syst 114. pp.1-9
- [39] Chu T.C., 2002. Selecting plant location via a fuzzy TOPSIS approach. Int J Adv Manuf Technol 20: pp.859-864.
- [40] Yang T., Hung C.C., 2007. Multiple-attribute decision making methods for plant layout design problem. Robot Comput-Integr Manuf 23, pp.126-137.
- [41] Shannon C.E., Weaver V., 1947. The mathematical theory and communication. Urbana: The University of Illinois Press
- [42] Zeleney M., 1982. Multiple criteria decision making. New York: McGraw Hill
- [43] Schwartzberg J., 1996. Reapportionment, Gerrymanders, and the Notion of Compactness. Minnesota Law Rev, Vol. 50, pp. 443-452.
- [44] Cvetković D., 1990. Teorija grafova i njene primene, IDP Naučna Knjiga, Beograd, ISBN 86-23-20206-6.
- [45] Karypis G., Kumar V., 1998. Multilevel k-way Partitioning Scheme for Irregular Graphs. Journal of parallel and distributed computing, Vol. 48, pp. 96–129. ARTICLE NO. PC971404
- [46] Von Laszewski G., 1997. Intelligent Structural Operators for the k-way Graph Partitioning Problem. Northeast Parallel Architecture Center, paper 30. <http://surface.syr.edu/npac/30>

- [47] Chang C.T., Lai J.Z.C., Jeng M.D., 2011. A fuzzy K-means clustering algorithm using cluster center displacement. *Journal of Information Science and Engineering*, 27, pp. 995-1009
- [48] Bezdek J.C., Enrlich R., Full W., 1984. FCM: The fuzzy c-means clustering algorithm. *Computers&Geosciences*, Volume 10, Issue 2-3, pp.191-203, [https://doi.org/10.1016/0098-3004\(84\)90020-7](https://doi.org/10.1016/0098-3004(84)90020-7)
- [49] Lu. Y.H., Ma T.H., Yin C.H., Xie X.Y., Tian W., Zhong S.M., 2013. Implementation of the Fuzzy C-Means Clustering Algorithm in Meteorological Data. *International Journal of Database Theory and Application*, 6, No. 6, pp. 1-18; <http://dx.doi.org/10.14257/ijdta.2013.6.6.01>
- [50] Wang X., Wang Y., Wang L., 2004. Improving fuzzy c-means clustering based on feature-weight learning. *Pattern Recognition Letters*, 25, pp. 1123-1132
- [51] Zadeh L. A., 1975. The concept of a linguistic variable and its application to reasoning-1. *Information Sciences*, Volume 8, Issue 3, pp. 199-249, [https://doi.org/10.1016/0020-0255\(75\)90036-5](https://doi.org/10.1016/0020-0255(75)90036-5)
- [52] Karanović M., 2012. Modeliranje tolerancije rizika donosioca odluke primenom FLC procesa, Master rad, Univerzitet u Novom Sadu, Prirodno – Matematički fakultet, Departman za matematiku i informatiku, Novi Sad
- [53] Stanković M., 2014. Stohastičke diferencijalne jednačine, Master rad, Univerzitet u Nišu, Prirodno matematički fakultet, Departman za matematiku, Niš
- [54] Đanković, V. G., 2013. Egzistencija i jedinstvenost rešenja i metode za rešavanje nekih klasa stohastičkih diferencijalnih jednačina, Master rad, Univerzitet u Beogradu, Matematički fakultet, Beograd
- [55] Schwartz E., 1997. The stochastic behaviour of commodity prices: implication for valuation and hedging, *The Journal of Finance*, 52, pp. 923-973
- [56] Herzog, F., 2013. “Stochastic Differential Equations,” lecture notes
- [57] http://valexeev.yolasite.com/resources/documents/Seminar_01b.pdf
- [58] <http://www.columbia.edu/~ww2040/4701Sum07/lec0813.pdf>
- [59] Dixit A. K., Pindyck R. S., 1994. *Investment under uncertainty*, Princeton, NJ: Princeton University Press
- [60] Gligoric Z., Beljic C., Gluscevic B., Jovanovic S., 2011. Hybrid model of evaluation of underground lead-zinc mine capacity expansion project using Monte-Carlo simulation and fuzzy numbers. *Simulation, Transactions of the Society for Modeling and Simulation International*, 87(8), pp. 726-742, SAGE Publications, ISSN 0037-5497, DOI:10.1177/0037549711410902.
- [61] Ladde G.S., Sambandham M., 2004. *Stochastic Versus Deterministic Systems of Differential Equations*. Marcel Dekker, Inc., New York

Biografija

Miloš Gligorić, diplomirani inženjer rudarstva, rođen je 17. 02. 1990. godine u Vrbasu. Osnovnu školu i Gimnaziju završio je u Kuli i Vrbasu sa odličnim uspehom.

2009. godine upisao je Rudarsko – geološki fakultet, Univerziteta u Beogradu.

2013. godine završio je osnovne akademske studije sa prosečnom ocenom 9,18.

2014. godine završio je master akademske studije sa prosečnom ocenom 9,60.

Iste godine upisao je doktorske akademske studije na Rudarsko – geološkom fakultetu, Univerziteta u Beogradu. Ostvario je 175 ESPB bodova i položio sve ispite sa prosečnom ocenom 10 i time ispunio sve obaveze predviđene planom i programom doktorskih akademskih studija.

Od maja 2015. godine do oktobra 2017. godine, bio je stipendista Ministarstva prosvete, nauke i tehnološkog razvoja pri čemu je automatski uključen u naučnoistraživački projekat (TR 33003) pod nazivom „Višenamenski autonomni sistem za daljinsko praćenje parametara stanja u rudnicima i okruženju“.

Na predlog Katedre za podzemnu eksploataciju ležišta mineralnih sirovina Rudarsko – geološkog fakulteta i odlukom Nastavno – naučnog veća Rudarsko – geološkog fakulteta u Beogradu br S1 190/4 od 20.05.2016. godine izabran je u zvanje ISTRAŽIVAČ – PRIPRAVNIK.

Od 2017. godine zaposlen je na Rudarsko – geološkom fakultetu, Univerziteta u Beogradu, na Katedri za rudarske radove i izradu podzemnih prostorija u zvanju asistenta za užu naučnu oblast „rudarski radovi, izrada podzemnih prostorija i rudarski materijali“.

Marta 2018. godine na Javnom Pozivu talentovanim mladim istraživačima studentima doktorskih akademskih studija za učešće na naučnoistraživačkim projektima koji je objavljen od strane Ministarstva prosvete, nauke i tehnološkog razvoja konkurisao je i primljen je na Projekat 33029 pod nazivom „Izučavanje mogućnosti valorizacije preostalih rezervi uglja u cilju obezbeđenja stabilnosti energetskog sektora Republike Srbije“.

Oktobra 2018. godine bio je deo Projekta „Međunarodna rudarska škola za istočnu i jugoistočnu Evropu“ u Dubrovniku koji je deo međunarodnog projekta Evropske Unije za istraživanje i inovacije pod nazivom „Horizont 2020“.

Angažovan je u nastavi na osnovnim i master akademskim studijama u izvođenju vežbi iz sledećih predmeta: „Osnovi rudarstva“, „Tehnologija materijala“, „Tehnika bušenja i miniranja“, „Zaštita od miniranja“, „Eksplozivi i sistemi za iniciranje“, „Izrada podzemnih prostorija miniranjem“, „Izrada tunela i komora“, „Podzemni infrastrukturni objekti“.

U okviru naučno – stručnih aktivnosti, kao autor i koautor, objavio je 15 radova u domaćim i inostranim časopisima, od toga 4 rada u časopisima sa SCI liste.

Izjava o autorstvu

Ime i prezime autora: **Miloš Gligorić**

Broj indeksa: **R709/14**

Izjavljujem

da je doktorska disertacija pod naslovom

STRATEŠKO PLANIRANJE PROIZVODNJE KOD KOMORNO – STUBNE METODE OTKOPAVANJA U USLOVIMA NEODREĐENOSTI

- rezultat sopstvenog istraživačkog rada;
- da disertacija u celini ni u delovima nije bila predložena za sticanje druge diplome prema studijskim programima drugih visokoškolskih ustanova;
- da su rezultati korektno navedeni i
- da nisam kršio/la autorska prava i koristio/la intelektualnu svojinu drugih lica.

Potpis autora

U Beogradu, _____

Izjava o istovetnosti štampane i elektronske verzije doktorskog rada

Ime i prezime autora: **Miloš Gligorić**

Broj indeksa: **R709/14**

Studijski program: **Rudarsko inženjerstvo**

Naslov rada: **STRATEŠKO PLANIRANJE PROIZVODNJE KOD KOMORNO – STUBNE METODE OTKOPAVANJA U USLOVIMA NEODREĐENOSTI**

Mentor: **prof.dr Čedomir Beljić**

Izjavljujem da je štampana verzija mog doktorskog rada istovetna elektronskoj verziji koju sam predao/la radi pohranjena u **Digitalnom repozitorijumu Univerziteta u Beogradu**.

Dozvoljavam da se objave moji lični podaci vezani za dobijanje akademskog naziva doktora nauka, kao što su ime i prezime, godina i mesto rođenja i datum odbrane rada.

Ovi lični podaci mogu se objaviti na mrežnim stranicama digitalne biblioteke, u elektronskom katalogu i u publikacijama Univerziteta u Beogradu.

Potpis autora

U Beogradu, _____

Izjava o korišćenju

Ovlašćujem Univerzitetsku biblioteku „Svetozar Marković“ da u Digitalni repozitorijum Univerziteta u Beogradu unese moju doktorsku disertaciju pod naslovom:

STRATEŠKO PLANIRANJE PROIZVODNJE KOD KOMORNO – STUBNE METODE OTKOPAVANJA U USLOVIMA NEODREĐENOSTI

koja je moje autorsko delo.

Disertaciju sa svim prilogima predao/la sam u elektronskom formatu pogodnom za trajno arhiviranje. Moju doktorsku disertaciju pohranjenu u Digitalnom repozitorijumu Univerziteta u Beogradu i dostupnu u otvorenom pristupu mogu da koriste svi koji poštuju odredbe sadržane u odabranom tipu licence Kreativne zajednice (Creative Commons) za koju sam se odlučio/la.

1. Autorstvo (CC BY)
2. Autorstvo – nekomercijalno (CC BY-NC)
- ③ 3. Autorstvo – nekomercijalno – bez prerada (CC BY-NC-ND)
4. Autorstvo – nekomercijalno – deliti pod istim uslovima (CC BY-NC-SA)
5. Autorstvo – bez prerada (CC BY-ND)
6. Autorstvo – deliti pod istim uslovima (CC BY-SA)

(Molimo da zaokružite samo jednu od šest ponuđenih licenci.
Kratak opis licenci je sastavni deo ove izjave).

Potpis autora

U Beogradu, _____

1. **Autorstvo.** Dozvoljavate umnožavanje, distribuciju i javno saopštavanje dela, i prerade, ako se navede ime autora na način određen od strane autora ili davaoca licence, čak i u komercijalne svrhe. Ovo je najslobodnija od svih licenci.
2. **Autorstvo – nekomercijalno.** Dozvoljavate umnožavanje, distribuciju i javno saopštavanje dela, i prerade, ako se navede ime autora na način određen od strane autora ili davaoca licence. Ova licenca ne dozvoljava komercijalnu upotrebu dela.
3. **Autorstvo – nekomercijalno – bez prerada.** Dozvoljavate umnožavanje, distribuciju i javno saopštavanje dela, bez promena, preoblikovanja ili upotrebe dela u svom delu, ako se navede ime autora na način određen od strane autora ili davaoca licence. Ova licenca ne dozvoljava komercijalnu upotrebu dela. U odnosu na sve ostale licence, ovom licencom se ograničava najveći obim prava korišćenja dela.
4. **Autorstvo – nekomercijalno – deliti pod istim uslovima.** Dozvoljavate umnožavanje, distribuciju i javno saopštavanje dela, i prerade, ako se navede ime autora na način određen od strane autora ili davaoca licence i ako se prerada distribuira pod istom ili sličnom licencom. Ova licenca ne dozvoljava komercijalnu upotrebu dela i prerada.
5. **Autorstvo – bez prerada.** Dozvoljavate umnožavanje, distribuciju i javno saopštavanje dela, bez promena, preoblikovanja ili upotrebe dela u svom delu, ako se navede ime autora na način određen od strane autora ili davaoca licence. Ova licenca dozvoljava komercijalnu upotrebu dela.
6. **Autorstvo – deliti pod istim uslovima.** Dozvoljavate umnožavanje, distribuciju i javno saopštavanje dela, i prerade, ako se navede ime autora na način određen od strane autora ili davaoca licence i ako se prerada distribuira pod istom ili sličnom licencom. Ova licenca dozvoljava komercijalnu upotrebu dela i prerada. Slična je softverskim licencama, odnosno licencama otvorenog koda.