

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАШИНСКИ ФАКУЛТЕТ

Миша Д. Стојићевић

Нелинеарна динамика сатних механизма

докторска дисертација

Београд, 2018.

UNIVERSITY OF BELGRADE
FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

Miša D. Stojićević

Nonlinear dynamic of clock mechanisms

Doctoral Dissertation

Belgrade, 2018.

Комисија за преглед и одбрану:

Ментори:

др Бранислав Попконстантиновић, редовни професор
Машински факултет у Београду

др Љубомир Миладиновић, редовни професор
Универзитет у Београду, Машински факултет

Чланови комисије:

др Драган Петровић, редовни професор
Универзитет у Београду, Машински факултет

др Зорана Јели, доцент
Универзитет у Београду, Машински факултет

др Ратко Обрадовић, редовни професор
Универзитет у Новом Саду, Факултет техничких наука

Датум одбране:

Предговор

Докторска дисертација „Нелинеарна динамика сатних механизма“ представља наставак истраживања које је, у последњих 15 година, покренуо проф. др Бранислав Попконстантиновић на Катедри за Теорију механизма и машина, Машинског факултета, Универзитета у Београду.

Проучавање сатних механизма представља својеврсни извор истраживања из области теоријске механике и теорије механизма. Проучавање поремећаја који утичу на равномерни рад сатних механизма захтева изузетно високу тачност мерних уређаја и није могуће извршити одређена занемаривања малих поремећаја као у неким другим областима механике. Главни фокус ове дисертације биће да се, уз одговарајући математички апарат, објасни како и у којој мери нелинеарни динамички фактори утичу на прецизност рада часовника. Како би се провериле тврдње дате математичким моделом, направљен је 3Д модел и извршена је симулација у одговарајућем софтверском пакету.

Желео бих да споменем да дугујем велику захвалност свом ментору, проф. др Браниславу Попконстантиновићу. Захваљујући његовом несебичном залагању и подршци, корисним саветима и огромној помоћи коју ми је пружио током израде ове дисертације успео сам да се изборим са овим огромним подухватом израде докторске дисертације.

Такође, желео бих да се захвалим и осталим члановима комисије: мом другом ментору проф. др Љубомиру Миладиновићу, проф. др Драгану Петровићу, доц. др Зорани Јели и проф. др Ратку Обрадовићу за корисне савете које су ми дали током израде докторске дисертације.

Чврсто верујем, да овај процес израде докторске дисертације не би био могућ да нисам имао велику подршку и разумевање људи у мојој најближој околини: моје породице и мојих колегиница и колега на факултету.

Аутор

Нелинеарна динамика сатних механизма

Резиме: Сатни механизми припадају области прецизне механике, који високим степеном равномерности свога хода мере протицање времена. Кључни подсклоп сатног механизма представља запречно-импулсни механизам који својим функцијама уноси поремећаје у осцилаторни процес тако да осцилације више нису сопствене, већ принудне са фреквенцом која је подложна промени. Зато се коректан математички и физикални опис функционисања сатних механизма не може исправно остварити занемаривањем малих поремећаја вишег реда, линеаризацијама диференцијалних једначина и апроксимацијама уобичајеним за класични приступ у изучавању механизма.

Предмет истраживања ове дисертације јесу управо ти мали поремећаји вишег реда који се јављају у запречно-импулсном механизму и нарушавају равномерност хода сатног механизма. Коришћењем теорије пертурбација биће изведени математички изрази за израчунавање грешака које генеришу две врсте запречно-импулсних механизма. Коректност како ових математичких израза, тако и оних општих, интегралних формула, проверена је компјутерском симулацијом и анализом кретања 3Д модела одговарајућих запречно-импулсних механизма. Приказана је квалитативна и квантитативна анализа грешака запречно-импулсних механизма односно, поремећаја фреквенце осцилатора часовника кога изазивају њихови запречно-импулсни механизми. Поред истраживања поремећаја рада запречно-импулсног механизма, дисертација даје приказ свих нелинеарних динамичких својстава осцилатора сатног механизма као и опис делова сата који су коришћени за симулацију сата. Нумерички резултати ових симулација показали су висок степен слагања са резултатима теоријских нумеричких прорачуна, чиме је потврђена коректност математичких израза изведених применом пертурбационог рачуна.

Кључне речи: сатни механизми, нелинеарна динамика, пертурбације, запречно-импулсни механизам, осцилације

Научна област: Машинство

Ужа научна област: Теорија механизма и машина

UDK 681.11.03 : 530.182(043.3)

Nonlinear dynamic of clock mechanisms

Abstract: Clock mechanisms belongs in the field of precision mechanics, and they measures the flow of time with a precision uniformity of its work. A key subassembly of the clock mechanism is a escapement mechanism that, by its functions, creates disruptions in the oscillatory process so that the oscillations are no longer their own, but are forced with a frequency that is subjective to change. Therefore, the correct mathematical and physical description of the functioning of clock mechanisms cannot be correctly achieved by neglecting small disorders of higher order, linearization of differential equations and approximations common to the classical approach in the study of mechanisms.

The subject of the study of this dissertation are precisely these small disorders of higher order that occur in the escapement mechanism and undermine the uniformity of the work of the clock mechanism. Using the theory of perturbation, mathematical expressions for the calculation of errors are derived for two types of impulse mechanisms. The correctness of both these mathematical expressions and those general integral formulas was verified by computer simulation and the analysis of the motion of the 3D model of the corresponding escapement mechanisms. A qualitative and quantitative analysis of errors of the escapement mechanisms, i.e. frequency disturbances of the clock oscillator caused by their escapement mechanisms are presented. In addition to investigating the disturbance of the work of the escapement mechanism, the dissertation provides an overview of all the non-linear dynamic properties of the clock mechanism oscillator as well as a description of the parts of the clock that were used to simulate the clock. The numerical results of these simulations showed a high degree of agreement with the results of the theoretical numerical calculations, which confirmed the correctness of mathematical expressions performed using the perturbation calculus.

Keywords: clock mechanisms, non-linear dynamics, perturbations, escapement mechanism, oscillations

Scientific discipline: Mechanical engineering

Scientific sub discipline: Theory of Mechanisms and Machines

UDK 681.11.03 : 530.182(043.3)

САДРЖАЈ

1.	Увод.....	1
1.1	Предмет истраживања.....	1
1.2	Научне методе истраживања и очекивани резултати.....	3
1.3	Хипотезе.....	4
1.4	Приказ дисертације по поглављима.....	5
2.	Теорија мерења времена.....	9
2.1	Историјат мерења времена.....	9
2.2	Јединице за мерење времена.....	27
3.	Теоријске основе пертурбационог рачуна.....	31
3.1	Метода двоструке размене времена (2Т).....	31
3.2	Пертурбациона метода усредњавања по Кривову и Богољубову.....	41
4.	Осцилатор.....	46
4.1	Основни појмови.....	46
4.1.1	Физичко клатно.....	46
4.1.2	Балансни точак.....	48
4.2	Нелинеарне осцилације физичког клатна.....	50
4.2.1	Циркуларна грешка.....	50
4.2.2	Одређивање циркуларне грешке пертурбационом методом двоструке размене времена.....	51
4.3	Спољашњи утицаји на осцилатор.....	59
4.3.1	Топлотне дилатације.....	59
4.3.2	Отпор ваздуха.....	61
4.3.3	Густина ваздуха.....	63
4.3.4	Аеростатички потисак.....	65
4.4	Компензације грешака осцилатора.....	67
4.4.1	Компензација топлотне дилатације клатна.....	67
4.4.2	Неутралисање и компензација промене густине ваздуха.....	75
5.	Запречно-импулсни механизми.....	78
5.1	Општи принцип.....	78
5.2	Класификација запречно-импулсних механизма.....	82
5.2.1	Котвене запречнице са повратним трзајем.....	82
5.2.2	Мирни запречно-импулсни механизми.....	85

5.2.3	Слободни запречно-импулсни механизми	89
5.3	Грешка запречно - импулсних механизма - дефиниција и математички модели грешке	96
5.3.1	Метода двоструке размере времена	96
5.3.2	Пертурбациона метода усредњавања по Кривову и Богољубову....	110
5.4	Оперативне формуле за грешке запречно-импулсних механизма	120
6.	Остали делови сата	128
6.1	Ремонтоар	128
6.2	Преносни механизам	132
6.3	Механизам за навијања часовника	135
7.	3Д модел сатног механизма и симулација рада	139
7.1	3Д модел часовника	139
7.2	Резултати симулације	152
7.2.1	3Д модели склопова запречница и балансног точка	152
7.2.2	Ток симулације и анализе кретања осцилатора	155
7.2.3	Резултати симулације и анализе кретања осцилатора	158
7.3	Физикално тумачење грешке запречно-импулсних механизма	173
8.	Закључак	181
8.1	Значај добијених резултата истраживања	181
8.2	Осврт на полазне хипотезе	184
8.3	Будућа истраживања	185
9.	Литература	187
10.	Списак слика	193
11.	Списак табела	196

Биографија

Прилог 1 – Изјава о ауторству

Прилог 2 – Изјава о истоветности штапане и електронске верзије докторског рада

Прилог 3 – Изјава о коришћењу

1. Увод

1.1 Предмет истраживања

Механизми часовника представљају праву ризницу, како теоријских, тако и практичних знања и вештина из готово свих области машинства, а посебно теоријске механике и теорије механизма. Како се упркос томе принципи њиховог рада, њихове конструктивне и функционалне карактеристике, геометрија, кинематика, анализа и синтеза мало изучавају у поменутих дисциплинама, они могу бити предмет бројних занимљивих и плодноносних истраживања. Резултати таквих истраживања могу бити значајни, не само као препоруке за правилну синтезу сатних механизма, већ и за теоријске дисциплине какве су кинематика, нелинеарна динамика, а посебно теорија нелинеарних осцилација, теорија механизма, за науку о машинским елементима и машинским материјалима, итд. Шта више, резултати ових истраживања могу се проширити и генерализовати и на друге области наука, какве су теорија аутоматског управљања, теорија детерминистичког хаоса, небеска механика, математичке основе теорије пертурбационог рачуна, итд.

Позната је чињеница да сатни механизми припадају областима прецизне механике, који високим степеном равномерности свога хода мере протицање времена [1], [2] и [3]. Најмањи поремећаји равномерности њиховог хода извор су неприхватљиве нетачности и непрецизности ових механичких инструмената. Управо зато се коректан математички и физикални опис функционисања сатних механизма не може исправно остварити занемаривањем малих поремећаја вишег реда, линеаризацијама диференцијалних једначина и апроксимацијама уобичајеним за класични приступ у изучавању механизма [4]. Такве апроксимације елиминисале би саму суштину динамике њиховог рада. Сагласно истакнутим чињеницама [5] и [6], предмет истраживања овог рада јесу управо мали поремећаји вишег реда који нарушавају равномерност хода сатног механизма и тако генеришу грешке мерења тока времена. Да би се разумели ефекти ових малих поремећаја хода часовника неопходно је да се изврши анализа његовог механизма што обухвата класификацију подсклопова и функционалну анализу сваког подсклопа сатног механизма.

Суштински сваки сатни механизам састоји се од пет подсклопова: погонски механизам, преносни механизам, осцилатор, запречница или запречно–импулсни механизам и цифрарник са казаљкама.

Тежиште истраживања ове дисертације биће нелинеарна динамичка својства осцилатора [7] и [8] и запречно-импулсних механизма [1], [9] и [10] као функционално најважнијих подсклопова сатног механизма. Карактеристике поменутих подсклопова имају одлучујући утицај на понашање сатног механизма као целине на сам процес мерења тока времена. Хипотетички је став да принудне пригушене осцилације осцилатора сатног механизма као што су клатно [11] или балансни точак са спиралном опругом [12] и [13], немају константну фреквенцу, већ да он трпи мале поремећаје [5] услед интеракције са запречно–импулсним механизмом. Такође, претпоставља се да је кључни фактор овог поремећаја фазна разлика између угаоне брзине осцилација и принудног момента силе који периодично делује на осцилатор. Хипотетички је став да је могуће извести аналитичко-алгебарски израз за промену фреквенце принудних пригушених осцилација сатног осцилатора употребом пертурбационог рачуна [14] и [2]. Познато је да клатно часовника представља физичко клатно чији период осциловања није константан, већ зависи од амплитуде [8] и [15]. Осим тога, ни спирална опруга на балансном точку часовника нема константан коефицијент крутости [12], већ је он функција угла ротације осцилатора. У складу са наведеним, оправдане су хипотезе да интензитет принудног момента, фактор пригушења односно фактор квалитета осцилатора и амплитуда осциловања имају значајан утицај на равномерност хода часовника. Како сопствена фреквенца осциловања осцилатора часовника (клатна [7] или балансног точка) зависи од геометријских карактеристика, распореда његових маса односно момента инерције осцилатора, разумна је претпоставка да и топлотне дилатације [16] имају знатан утицај на сам процес мерења времена. Претпоставка је и да се ове топлотне дилатације могу компензовати тако да се њихов штетни утицај смањи или евентуално сасвим елиминише [17].

Један од циљева истраживања у овој докторској дисертацији јесте, пре свега, да се одреди једна или више погодних метода пертурбационог рачуна [14] и [18] која би довела до уопштених аналитичких формула за промену фреквенце осцилатора услед његове интеракције са запречно–импулсним механизмом. Претпоставка је да ће поменути аналитички изрази моћи да се изведу употребом

методе усредњавања по Кривову и Богољубову [14] и [18], као и метода вишеструких скала односно времена [18].

Међу важнијим циљевима овог истраживања је да се добијене формуле општег карактера конкретизују за неколико типичних врста запречно–импулсних механизма и да се изврши евентуално њихова класификација, у зависности од тога да ли они повећавају или смањују сопствену фреквенцу сатног осцилатора. Даље, важно је да се изврши провера ваљаности ових формула методом компјутерских симулација и анализе кретања и тако верификују не само добијени аналитички изрази, већ и употребљене методе пертурбационог рачуна [14] и [18]. Осим формално – математичког и квантитативног описа, један од циљева овог рада представља и физикално и квалитативно разјашњење горе описаног феномена. Као један од важнијих циљева истраживања у овој дисертацији јесте и проучавање утицај топлотних дилатација на стабилност фреквенце осцилација сатног осцилатора [16] и [17]. Сагласно томе, потребно је да се пронађу погодне аналитичке и нумеричке методе, као и процедуре компјутерског моделирања и симулације којима би се извршила компензација ових штетних утицаја. Један од финалних циљ ове докторске дисертације јесте синтеза и изградња потпуно функционалног компјутерског 3Д модела сатног механизма, укључујући компјутерску симулацију и анализу његовог рада [19] и [20].

1.2 Научне методе истраживања и очекивани резултати

У поступку реализације научних резултата, у овој докторској дисертацији примењене су следеће опште научне методе:

- методе диференцијалног и интегралног рачуна,
- нумеричке методе,
- методе компјутерског моделирања облика,
- методе компјутерске симулације и анализе кретања.

У поступку реализације научних резултата, у овој докторској дисертацији примењене су следеће посебне научне методе:

- метода пертурбационог рачуна - поступак усредњавања по методи Кривову и Богољубову,

- метода пертурбационог рачуна – метода вишеструких скала односно времена,
- метода компјутерске симулације „Event based motion study“ у апликацији SolidWorks.

1.3 Хипотезе

Линеарна теорија осцилација показује да је фреквенца принудних пригушених осцилација константна ако је коефицијент пригушења константан. Емпиријске чињенице противе се резултатима линеарне теорије осцилација и откривају да фреквенца принудних пригушених осцилација може да се промени услед интеракције осцилатора са запречно–импулсним механизмом. У овој дисертацији претпоставља се и треба да се докаже да фреквенца сатног осцилатора (клатна или балансног точка) зависи од фазне разлике између угаоне брзине осцилација и принудног момента силе који периодично делује на осцилатор. Осим тога, полазећи од чињенице да сопствена фреквенца осцилатора часовника зависи од његовог момента инерције, претпоставља се да температурске дилатације имају значајан утицај на поменути фреквенцу. Претпоставка је да се погодном конструкцијом осцилатора ови утицаји могу смањити или потпуно елиминисати.

Сагласно истакнутом, кључне полазне хипотезе у овој дисертацији гласе:

- Коришћењем метода пертурбација могуће је извести аналитичке изразе за промену фреквенце принудних пригушених осцилација сатног осцилатора услед његове интеракције са запречно – импулсним механизмом.
- Аналитички изрази за промену сопствене фреквенце осцилатора услед његове интеракције са запречно–импулсним механизмом могу бити проверени компјутерском симулацијом принудних пригушених осцилација. Такође, претпоставка је да ће ова верификација потврдити тачност израза добијених теоријом пертурбационог рачуна.
- Могуће је извести аналитичке поступке за компензацију топлотних дилатација осцилатора часовника.
- Може бити формулисана и успешно спроведена итеративна процедура за приближну компензацију топлотних дилатација осцилатора часовника (клатна) коришћењем одговарајуће компјутерске апликације за 3Д моделирање.

- Могуће је остварити синтезу и генерисање потпуно функционалног компјутерског 3Д модела сатног механизма и извршити успешну компјутерску симулацију његовог рада.

1.4 Приказ дисертације по поглављима

Докторска дисертација „Нелинеарна динамика сатних механизма“ је подељена у 9 целина: увод, 6 поглавља и закључак.

Поглавље 2 „Теорија мерења времена“ приказује кратак историјат мерења времена, закључно са савременим дефиницијама јединице за мерење времена. Приказано је како је човек препознао потребу да поседује информацију о времену још у праисторији, посматрајући циклусе Сунца и Месеца. Потом су прве цивилизације старог Египта и Месопотамије развијале календаре. Ови календари коришћени су за предвиђања датума сезонских астрономских догађаја битних за успешно уређење државе и друштва. Ове цивилизације су дале прву поделу на шездесет делова која је остала и до данашњих дана (сат има 60 минута, минут има 60 секунди). Касније, цивилизације старе Грчке и Рима, унапређују методе и уређаје за мерење протока времена, тако да се јављају и први соларни и водени часовници. Средњи век бележи појаву првих примитивних механичких часовника које су правили монаси, од којих нам долазе и први записи о описима механичких сатова. У XVII веку почиње развој прецизног мерења протока времена и почиње ера трансформације – од часовника који су били толико велики да су могли само да буду смештени у торњевима до механизма који смањују сат тако да може да се носи на руци. На крају поглавља дат је преглед развоја јединице времена - од првих цивилизација (које су узимале дан као природну и основну јединицу) до савременог доба - где можемо секунду дефинисати преко периода зрачења у атому цезијума.

Поглавље 3, „Теоријске основе пертурбационог рачуна“, приказује сврху и смисао технике двоструке размере времена, који постају очигледни када се открије кључни недостатак методе регуларних пертурбација. Како је главна тема ове дисертације управо анализа грешака запречно-импулсних механизма ти поремећаји биће касније описани конкретним формулама за израчунавање промене хода часовника. Намера је да се анализа спроведе коришћењем теорије пертурбација и то, између осталог, методом двоструке размере (скеле) времена.

Најпре ће у овој глави бити сажето објашњена суштина поменуте методе. Зато ће бити демонстриран покушај да се методом регуларних пертурбација приближно реши линеарна диференцијална једначина другог реда са константним коефицијентима. После објашњења пертурбационе технике двоструке размене времена, објашњена је укратко и суштина методе Кривова и Богољубова. На тај начин, може се извршити контрола добијених резултата и евентуално упоредити обе методе и дати критички осврт на погодности и тешкоће њихових примена.

Поглавље 4, „Осцилатор“ представља опис првог од два најзначајнија подскопа сатног механизма. Осцилатор може бити конструисан као физичко клатно или као балансни точак. Физичко клатно представља тело које се врти око тачке која се налази ван центра равнотеже, док је балансни точак масивно тело, обртно око непокретне осе, која пролази кроз његов центар масе и врши осцилације под дејством еластичног релативног момента силе. Поред описа функционалности ове две изведбе осцилатора, дат је прорачун циркуларне грешке методом двоструког времена. Циркуларна грешка представља промену периода клатна која је проузрокована променом амплитуде. Ово поглавље такође даје увид у поремећаје рада осцилатора, који се јављају као последица спољашњих утицаја, као што су: температура, аеростатички потисак, отпор и густина ваздуха. Утицај температуре се сматра најзначајнијим, а манифестује се преко ширења и скупљања материјала клатна и на тај утиче на периодичне осцилације. Аеростатички потисак, сагласно Архимедовом закону, умањује тежину клатна за тежину клатном истиснутог ваздуха. На физичко клатно часовника, изузев релативне гравитационе силе, делује и сила отпора ваздуха, услед чега клатно губи енергију. Промена густине ваздуха, настала због промене притиска, влажности, и/или промене температуре ваздуха, има непосредан утицај на укупну енергију клатна које осцилује, остале енергетске параметре, па тако и на ход часовника. Она је, у суштини, проузрокована променом динамичког отпора који делује на тег клатна. Ове промене могу се сврстати као утицаји средине у којој се клатно креће и често се сматрају за ред нижим утицајима од температурне. Ово поглавље приказује њихов математички модел утицаја аеростатичког потиска, као и математички модел отпора и густине ваздуха. Са развојем механичких часовника тако су се развијала и решења за компензације грешака осцилатора. Највише пажње је посвећено температурној компензацији и дат је прорачун и пример клатна које је температурно компензовано. Утицај ваздуха (отпор, густина и аеростатички

потисак) су занемарљиви, мада код прецизних часовника (астрономских сатова, хронометара, квалитетних јавних и торањских часовника), ова грешка је уочљива и може да постане недопустиво велика, у случају дуготрајних периода изразито високог или ниског атмосферског притиска. Зато је дат основни прорачун ове грешке и приказан је њен ред величине.

Поглавље 5, „Запречно-импулсни механизми“, представља кључни подсклоп сваког механичког часовника, јер он одржава и пребројава осцилације осцилатора и тако мери протицање времена. Својим функцијама овај механизам уноси поремећаје у осцилаторни процес тако да осцилације више нису сопствене, већ принудне са фреквенцом која је подложна промени. Дакле, сам процес мерења времена ремети тачност тог мерења. Појава да запречно-импулсни механизам мења период осциловања осцилатора, па самим тим и ход часовника, назива се грешком запречно импулсног механизма или кратко – грешком запречнице. У оквиру класификације приказане су три врсте запречно-импулсног механизма: котвени запречно-импулсни механизам са повратним трзајем, мирни запречно-импулсни механизам и слободан запречно-импулсни механизам. Употребом одговарајућих дијаграма моментних интеракција, квалитативно су приказане конструктивне и динамичке карактеристике запречнице, са посебним освртом на грешке периода осциловања које оне генеришу. Након класификације запречно-импулсних механизма, изведена је општа формула за грешку запречно-импулсних механизма и то применом пертурбационе методе двоструке размере (скеле) времена. Такође је изведена општа формула за грешку запречно-импулсних механизма и то техником усредњавања по методи Крилова и Богољубова. У оба случаја разматрани су само они сатни механизми који садрже спиралне опруге са балансним точком као осцилатором, али потребно је нагласити да су резултати ових анализа универзално применљиви на све друге типове запречно – импулсних механизма, укључујући и оне који се уграђују у стационарне часовнике са клатном. Полази се од чињенице да балансни точак сатних механизма врши принудне пригушене осцилације, а претпоставља се да су пригушења последица вискозног момента силе који је сразмеран угаоној брзини осцилација. Приказује се идентичност свих апроксимативних решења и потпуна сагласност процене реда величине грешке апроксимације и реда величине временског интервала на коме те апроксимације важе по обе методе.

Поглавље 6, „Остали делови сата“, заокружује целу причу везану за подсклопове сата. Поглавље даје описе три преостала дела сата и то: ремонтара, преносне групе и механизма за навијање. Ремонтар представља механизма који се најчешће може видети код часовника у торњевима. Најважнија сврха овог механизма је да обезбеђује секундарни, уједначени и константни извор навијања за запречно-импулсни механизам и на тај начин обезбеђује тачност сата. Приказан је принцип рада ремонтара као и његови основни делови. Дати су параметри ремонтара који ће бити коришћен у 7 поглављу, „Модел целог сата“. Преносна група представља групу зупчаника који су упарени да преносе погон у једном смеру, са тега окаченог на добош до запречно-импулсног механизма, и у другом смеру уједначене интервале запречно-импулсног механизма претвара у приказ секунди, минута и часова. Механизам за навијање је приказан као посебан подсклоп који је испреплетан са преносном групом. Приказом његових саставних делова, као и принципа навијања и одржавања момента сата заокружује се прича о свим подсклоповима сата који ће бити направљен као 3Д модел и на коме се тестирају математички модели дати у претходним поглављима.

Поглавље 7, „3Д модел сатног механизма и симулација рада“, даје приказ резултата који су провера тачности формула за грешке запречно-импулсних механизма у квазистационарном режиму осциловања балансног точка, изведене применом теорије пертурбационог рачуна. На почетку је направљен 3Д модел целог сата у апликацији SolidWorks и извршен процес симулације рада. Сат који је измоделиран је направљен као сат са клатном. Поред симулације његовог рада, извршена је и симулација код часовника који уместо клатна користи балансну опругу. Код ове врсте часовника на самом почетку процеса симулација, извршено је мерење периода осциловања, односно фреквенце слободних пригушених осцилација балансног точка који је уграђен у оба склопа осцилатора и запречнице (склоп балансног точка и слободне запречнице и склоп балансног точка и запречнице са повратним трзајем). Сви резултати приказани су табеларно. Ако се узму у обзир само динамичке карактеристике, сви запречно-импулсни механизми могу да се поделе у три велике групе: брадихрони, тахихрони и изохрони.. Детаљном анализом квазистационарног режима осциловања осцилатора показан је и физикални узрок - грешке запречно-импулсних механизма нису последица линеарне теорије осцилација, већ управо нелинеарне динамике сатних механизм, која је у овој дисертацији математички обрађена методама пертурбационог рачуна.

2. Теорија мерења времена

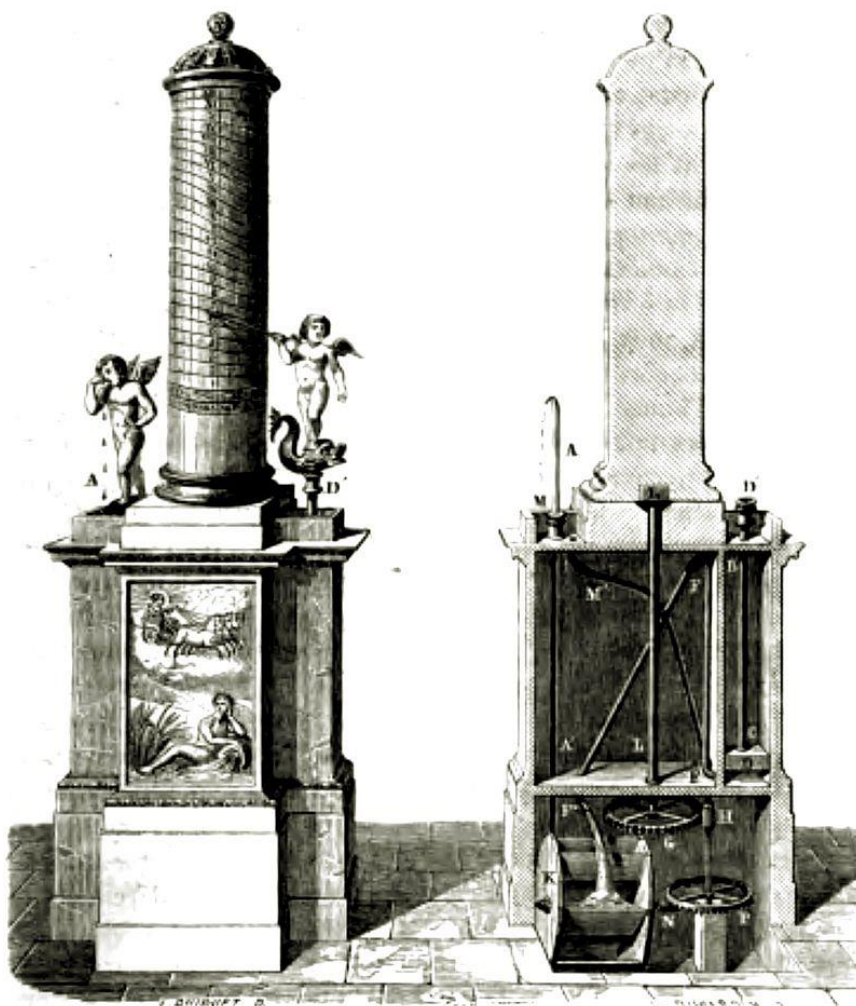
2.1 Историјат мерења времена

Не може се утврдити поуздано када се јавила свест о протицању времена, нити са сигурношћу одредити ко је и када почео да мери и бележи интервале времена. Претпоставља се да су мегалитске цивилизације праисторијског доба користиле једноставне календаре засноване на привидном кретању Сунца и Месеца односно, пролећној равнодневици и месечевим менама [21] и [22]. Извесно је да су током неолита и бронзаног доба грађени камени објекти и скулптуре кружног облика (Стоунхенџ [23]) и претпоставља да су коришћени као календари за примитивна мерења дужих временских интервала и предвиђања наступајућих сезонских догађаја – еквиноција и солстиција. Свест о времену, једном пробуђена, заувек је остала утемељена на снажној интуицији о равномерности временског тока. На тој интуитивној представи заснована су и сва мерења времена, од праисторијског доба, до данашњег дана.

Писана историја [24], [25], доказује да су античке цивилизације вршиле брижљива и опсежна посматрања и бележења цикличних кретања небеских тела и тако креирала прилично прецизне календаре. Ови календари коришћени су за предвиђања датума сезонских астрономских догађаја значајних за планирање пољопривредних радова, ратних похода, градитељских подухвата и других активности, битних за успешно уређење државе и друштва. Изузев календара, којима су се мерили дуги, секуларни, временски интервали, Антички Египат је користио сунчане часовнике за мерења краћих, дневних интервала времена. За мерење времена током ноћи, употребљаване су посебне справе за осматрање привидног кретања звезда или транзиције низа звезда кроз меридијан места. Изузев поменутих справа, стари Египћани су користили и водене часовнике [26], којима се протицање времена мерило приближно равномерним протицањем воде. Записивање временских интервала у шездесетичном бројном систему управо су тековина Старог Египта и Месопотамије.

Античка Грчка и Рим (300 п.н.е. – 500 н.е.) унапређују достигнућа старих Египћана. У том добу коришћени су математички прецизно конструисани сунчани часовници [27], [28]. Римски архитекта, Марко Витрувије Полио, у делу „О архитектури“ [29], детаљно анализира кретање сенке гномона и описује различите

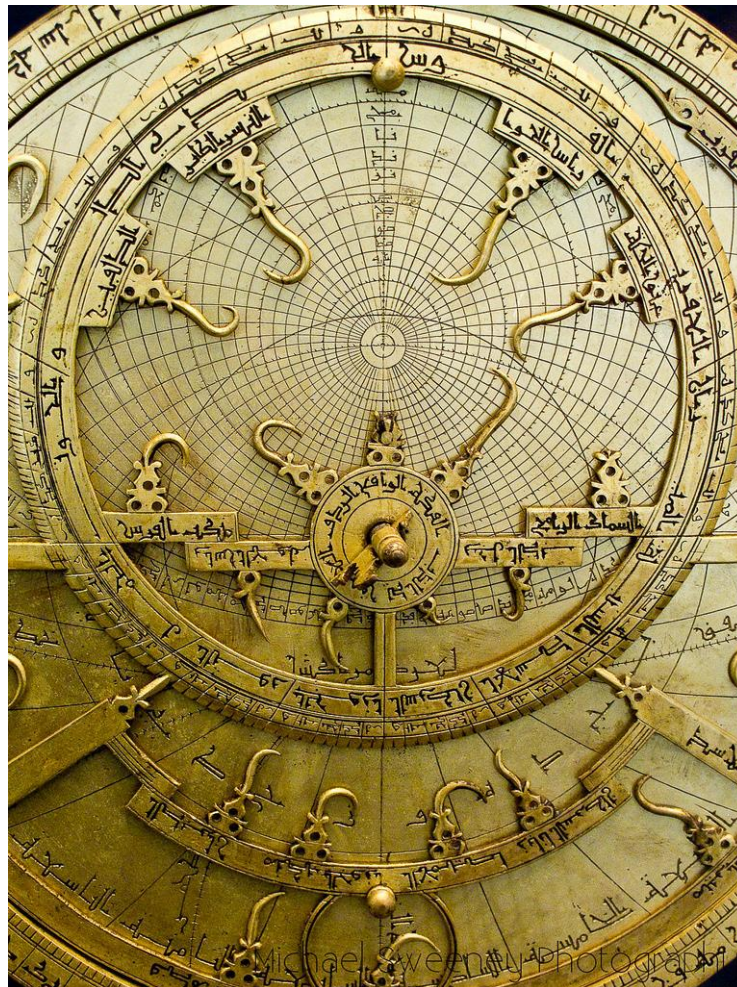
врсте и методе конструисања сунчаних часовника. Водени часовници (клепсидре) постају сложени хидро – механички уређаји са различитим методама побољшања тачности мерења временских интервала. Године 50 п.н.е., астроном Андроникос из Кира (Andronicus of Cyrrhus) гради у Атини Кулу ветрова и снабдева је сунчаним часовником, клепсидром и ветроказом [30]. Чувена је клепсидра (сл. 1) коју је 3 године п.н.е. конструисао проналазач, математичар и отац пнеуматике, Ктесибије Александријски (Ctesibius of Alexandria).



Слика 1 Клепсидра Ктесибија Александријског [31]

За бележења секуларних временских интервала, Стара Грчка користи соларне и лунисоларне календаре, а стари Рим искључиво соларне [28]. Када је реч о инструментима за мерење времена, Стара Персија остаће запамћена по клепсидрама врхунске тачности, која се може поредити са тачношћу савремених механичких часовника. Осим воденим часовницима, у старој Персији време се мерило и астролабима (сл. 2) - инструментима за одређивање позиција звезда и

Сунца на небеском своду односно алтернативно, географске дужине места и навигацију [32].

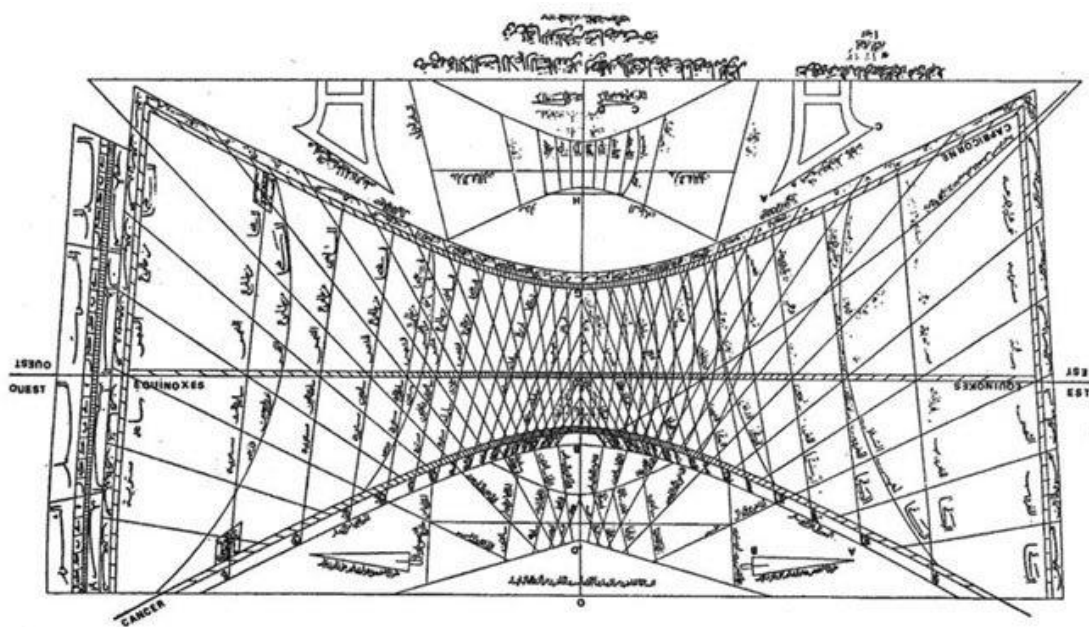


Слика 2 Астролаб [33]

Слично другим античким цивилизацијама, и у античкој Кини протицање времена мерило се сунчаним часовницима и клепсидрама разноврсних конструкција, сложености и нивоа тачности [34]. Традиционални лунарни календар који се и данас користи у Кини, тековина је античке кинеске цивилизације.

Цивилизације средњег века наслеђују, користе и усавршавају античка достигнућа и методе мерења времена. И даље су у широкој употреби сунчани часовници и клепсидре, а уз њих све већу примену налазе и часовници – свеће (сатне свеће), часовници – лампе (пламени часовници) и пешчани сатови. Идеја је свуда иста: приближно равномерно сагоревање воска и уља односно, истицање песка из стаклене посуде читава се на погодно конструисаним скалама и тако бележи протицање времена. Сатне свеће први пут се помињу у Кини, око 520.

године, за мерење времена током ноћи [35]. У Европи, у доба англосаксонског краља Алфреда Великог (849-899) користе се сатне свеће, брижљиво одмерене масе и пречника. Најславнији муслимански механичар, Будиузаман Ал-Дазари (1136-1206) конструисао је профињене механичке часовнике са бројчаницима и казалкама чији се рад заснивао на мерењу масе свеће која гори [36]. Вештина грађења сунчаних часовника, наслеђена из античког доба, у средњем веку посебно усавршавају муслимански проналазачи, математичари и астрономи. Тако, арапски астроном Ибн Ал Шатир (Ibn Al-Shatir, 1304-1375), први објашњава карактеристике екваторијалног сунчаног часовника и конструише, у гномонској пројекцији, чувени хоризонтални сунчани часовник (реплика на сл.3), на северном минарету велике џамије у Дамаску [37].



Слика 3 Реплика Ал Шатиоровог сунчаног часовника у Дамаску [37]

Од средине 15 века, концепт екваторијалних сунчаних часовника почиње да се примењује и у Европи. Италијански астроном Ђовани Падовани (Giovanni Padovani, рођен 1512) објављује 1570 године расправу о сунчаним часовницима у којој даје инструкције за њихову градњу на хоризонталним и вертикалним равнима. Слично овом делу, италијански астроном и математичар Ђузепе Бјанкани (Giuseppe Biancani, 1565-1624) објављује године 1620 књигу о конструисању различитих врста сунчаних часовника. Пешчани часовници почињу да се употребљавају у 11. веку, најпре за мерење времена и навигацију на бродовима, а затим и у свакодневном животу, кулинарству, у црквама, манастирима, мануфактурама, итд.

Они представљају прве инструменте за поуздано и прецизно мерење кратких временских интервала, једноставне израде и једноставног одржавања. Остало је забележено да је португалски морепловац Фердинанд Магелан (Ferdinand Magellan, 1480-1521) користио по 18 пешчаних сатова (сл. 4), на сваком броду током знаменитих поморских експедиција [38].



Слика 4 Пешчани сат

Средњи век бележи и појаву првих механичких часовника са зупчаницима и примитивним регулаторима хода односно, брзине. У конструисању таквих часовника посебно су се истакли кинески инжењери - конструктори раног средњег века што је описано у радовима [39] и [40]. Ји Ксинг (683-727) кинески инжењер, астроном и математичар гради астрономски часовник са примитивним запречним механизмом покретан снагом воденог тока. Године 976, астроном и војни инжењер Занг Сиксунг (X век), конструише часовник са живом, који је у часовној кули активирао звоно на сваких 15 минута. Су Сонг (1020-1101), математичар, астроном, картограф и хоролог, гради астрономски часовник са запречницом, армиларном сфером и механизмом за избијање односно, звучно оглашавање протеклих часова.

Изван Кине, конструкције сложених механичких часовника са регулаторима брзине, звонима и механизмима за избијање појавили су се током 11. и 12. века у Дамаску и Багдаду. Први часовник са епицикличним планетарним преносним механизмом, чија је сложеност надмашена тек у 14. веку, изградио је андалузијски математичар и астроном Ал Муради, у 11 веку [41].

У средњовековној Европи први конструктори сатних механизма били су монаси како би, прецизним мерењем времена, ефикасније организовали живот и рад унутар манастира, о чему сведоче летописи из 11. века [42]. Ћовани да Донди (Giovanni de Dondi, 1318.-1389.), италијански физичар, инжењер и професор астрономије у Падови, први објављује детаљан опис механичког сата у делу „Il Tractus Astarii“ 1364 године [43]. Изузев у Падови, значајни примерци средњовековних механичких часовника грађени су у Милану (1335), Штрасбургу (1354), Лунду (1380), Руану (1389), Москви (1402), Прагу (1462) и Венецији (1499), сл. 5.



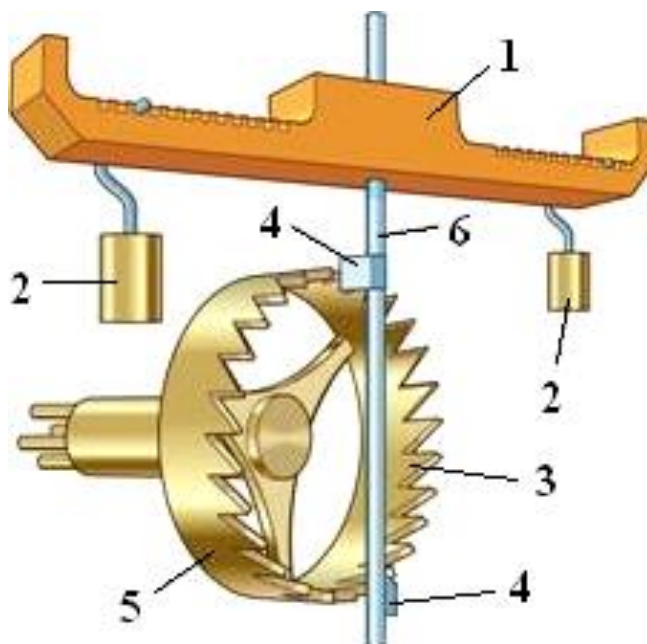
Слика 5 Часовник у Венецији, 1499.

Остало је забележено у другом тому руског илустрованог десетотомног летописа (Лицевой летописный свод) из друге половине XVI века да је српски монах Лазар Хиландарац (Лазар Црноризац) је конструисао први механички јавни часовник у Русији 1404. године (сл. 6) [44], [45]. За историју српског мерења времена важно је напоменути да се најстарији сачувани српски часовник налази у манастиру Студеници који је уклесан уз јужни портал Богородичине цркве.



Слика 6 Српски монах Лазар показује Великом кнезу свој часовник [45]

Кључна карактеристика механизма свих поменутих и других средњовековних часовника је присуство примитивних запречница „verge & foliot“ (сл. 7) који, снабдевени крунским точком (поз. 5) са зупцима (поз. 3) и вретеном (поз. 6) са палетама (поз. 4), регулишу ход сатног механизма периодичном променом смера обртања балансне полуге. На вретену се налази и полуга (поз. 1) са два тега (поз. 2).



Слика 7 Крунски точак, вретено и балансна полуга [46]

Балансна полука није осцилатор и нема устаљени период осциловања, већ регулише ход механизма часовника искључиво сопственом инерцијом. Овај изум везује се за 1273. годину и приписује француском градитељу Виларсу Дехонекорту (Villard de Honnecourt, XIII век) [47]. Већина средњовековних часовника немају минутне казаљке, већ као астрономски сатови приказују геоцентрична дневна и годишња кретања сунца у ортографској или стереографској пројекцији небеског свода. Прво помињање минутне казаљке забележено је у једном манускрипту из 1475. године, а секундне казаљке појављују се први пут у Немачкој, током 15. века [47]. Часовници са теговима, механизмима за избијање и запречницама типа „verge & foliot“ били су познати и у Отоманској империји. Један такав сатни механизам описује инжењер Таки Ал Дин (Taqi ad-Din Muhammad ibn Ma'ruf, 1526-1585) у техничком трактату о механичким часовницима из 1556. године.

Прекретница у развоју и усавршавању мерења времена догодила се 1656. године, када је холандски научник Кристијан Хајгенс (Christiaan Huygens, 1629-1695) конструисао први часовник са клатном и сат са спиралном опругом.



Слика 8 Кристијан Хајгенс (1629-1695) [48]

Године 1673. Хајгенс објављује научну студију „Horologium Oscillatorium: sive de motu pendulorum ad horologia aptato demonstrationes geometricae“ [49], његово животно дело, које се убраја у три најважније научне студије из теоријске механике седамнаестог века. У тој књизи, Хајгенс анализира механичке осцилације, изводи

формулу за период математичког и физичког клатна и разматра друге бројне проблеме теоријске механике и хорологије. Овим делом, као и сатним механизмима које је конструисао, Кристијан Хајгенс установио је нови метод мерења времена који се заснива на осцилаторним процесима. Наиме, како се механичке осцилације одликују довољно стабилном сопственом фреквенцом, односно стабилним периодом осциловања, пребројавањем тих осцилација може се прецизно мерити трајање временских интервала. Од Хајгенсовог времена, па до данашњег дана, овај метод је остао на снази и представља суштински принцип функционисања свих часовника, укључујући електронске – кварцне и атомске.

Током целокупног средњег века, часовници су били грађени претежно као јавни, торањски и били су снабдевени масивним механизмима великих димензија. Међутим, касни средњи век бележи и појаву ручних и цепних часовника. Први преносиви часовник, тзв. Нирнбершко јаје (сл. 9), који се могао носити у цепу или ташни (taschenuhr) конструисао је у Нирнбергу часовничар Петер Хенлајн (Peter Henlein, 1485-1542) [50].



Слика 9 Нирнбешко јаје, око 1550-те

Овај и часовници слични њему из истог периода (середина 16. века) имали су опружни погон и нису били снабдевени осцилатором, већ запречницама типа „verge & foliot“. Због изузетно мале тачности (грешка хода је била неколико часова дневно), користили су се више као модни детаљи и статусни симболи, а мање као инструменти за мерење времена. Тек после Хајгенсовог изума балансног точка са спиралном опругом 1656-1657. године, цепни и ручни часовници постају поуздани

и прецизни мерачи времена, и током наредних векова све савршенији, популарнији и значајнији у свакодневном животу.

Од 17. века историја инструмената за мерење времена својим најзначајнијим делом представља историју усавршавања запречно – импулсних механизма. Запречница типа „verge & foliot“ условљава огромне амплитуде осциловања клатна (чак преко $\pm 50^\circ$), што значајно повећава утицај циркуларне грешке на укупни пад изохронизма [46]. Управо је потреба за смањењем амплитуде осцилација клатна била основни разлог увођења нове врсте запречнице у конструкцију часовника. Реч је о котвеним или анкер запречницама са повратним трзајем, чију су конструкцију објаснили енглески часовничар Вилијам Клемент (William Clement, 1633-1704) и британски научник Роберт Хук (Robert Hooke, 1635.-1703.), 1670. године. Исте године је часовничар Јозеф Книб (Joseph Knibb, 1640.-1711.) изградио први сат са „Клемент-Хуковом“ котвеном запречницом у Оксфорду. Главна карактеристика запречница са повратним трзајем јесте непостојање сепарације импулсне од запречне функције. Обе се реализују на истим импулсно-запречним површинама палета анкера, само у различитим фазама периода осциловања клатна. Даље усавршавање котвених запречница, можда најзначајније у читавој историји науке и вештине градње часовника, остварио је Томас Томпион (Thomas Tompion, 1639.–1713.), сл. 10, отац британске хорологије, и то према идеји математичара и астронома Ричарда Таунлија (Richard Towneley, 1629.-1707.) 1675. године.



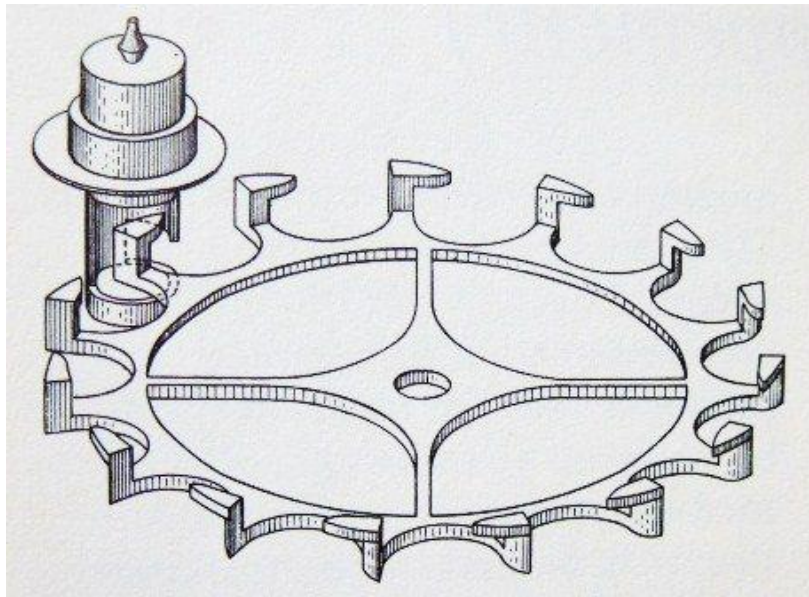
Слика 10 Томас Томпион (Thomas Tompion, 1639.–1713.) [51]

Реч је о изуму тзв. мирних запречно-импулсних механизмима, које конструктивно и функционално раздвајају импулсну од запречне функције. Џорџ Грејем (Honorable George Graham, 1673.–1751.), на слици 11, Томпионов ученик и својевремени Велики Мајстор Уважене гилде часовничара у Лондону, усавршио је овај изум 1715. године и омогућио његову масовну примену.



Слика 11 Џорџ Грејем (George Graham, 1673.–1751.) [48]

Осим Грејемовог мирне запречнице са котвом, истој класи припадају и многи други запречно-импулсни механизми. Наводимо имена неких који се уграђују у стационарне (торањске и зидне) часовнике: Аман-Лепо-ов (Amant–Leraute 1741., 1750.), „Брокó“ (Achille Brocot 1849.), механизам са игличастим палетама; као и називе мирних запречница за покретне (ручне и џепне) сатове: Томпионов цилиндарски (Tomption 1695.) приказан на слици 12, „дуплекс“ (Pierre Le Roy 1748.) и „virgule“ (Lépine Jean Antoine 1780.).

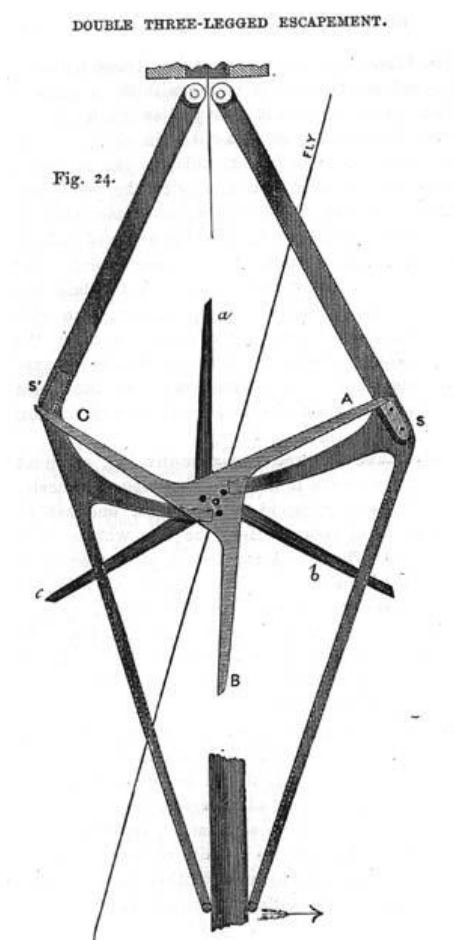


Слика 12 Томпионова цилиндарска запречница

Даљи развој запречница остварен је конструисањем тзв. слободних, запречно–импулсних механизма. Овај изум проиходи управо из идеје да се импулсна и запречна функција или сасвим ослободе од непосредног утицаја погона, или да сам осцилатор буде што дуже слободан од било каквог утицаја запречнице. Реализација првог принципа довела је до конструкције тзв. гравитационих запречно-импулсних механизма, а из другог су проиходила техничка решења хронометарских запречница и тзв. енглеске и швајцарске слободне запречнице са анкером. Прву гравитациону запречницу конструисали су енглески часовничари Томас Маџ (Thomas Mudge, 1715. – 1794.) и Александар Каминг (Alexander Cumming 1732. – 1814.) 1766. године [46]. Изум усавршавају Хенриј Катер (Henry Kater, 1777.-1835.) око 1830. године и Џ. М. Блоксам (James Mackenzie Bloxam) око 1850. године. Ипак, реализација ових идејних решења била је отежана нестабилним понашањем њихове запречне функције, познато под називом „посртање“ или „поскакивање“ (енг. approximate tripping, нем. galoppieren). Овај значајан проблем коначно је решио велики британски хоролог и правник Едмунд Бекет Денисон (Edmund Beckett Denison, 1st Baron Grimthorpe, Q.C., 1816.-1905.), (сл. 13), изумом чувене „двоструке трокраке гравитационе запречнице“, (сл. 14), која је уграђена у механизам часовника „Биг Бен“ 1856. године. Она и данас регулише ход Великог Вестминстерског Сата са изузетном тачношћу и поузданошћу [52].



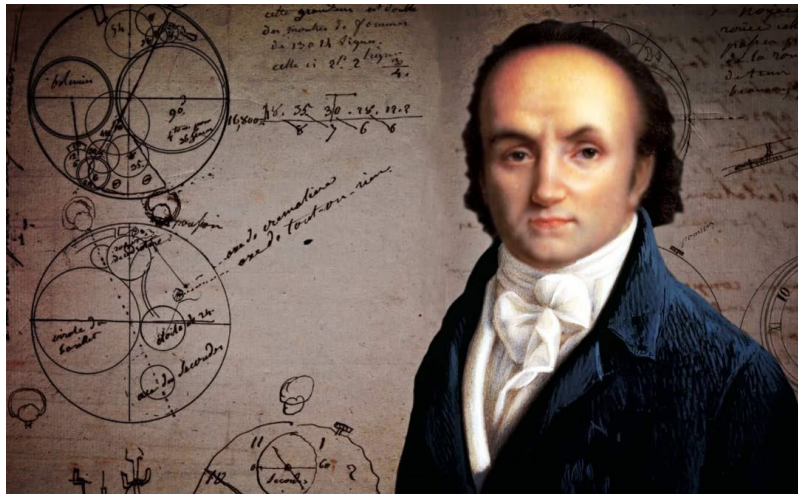
Слика 13 Едмунд Бекет Денисон (Edmund Beckett Denison,, 1816.-1905.) [52]



Слика 14 Двострука трокрака гравитациона запречница [52]

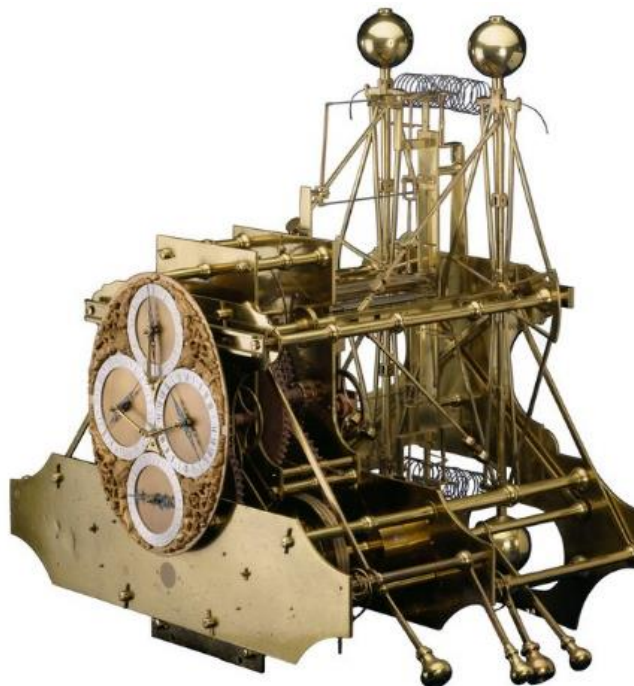
Енглеску слободну запречницу са анкером, карактеристичне по зашиљеним зупцима запречног точка, конструисао је Енглеz Томас Маџ 1757. године, а

усавршили је француски часовничари Абрахам Бреге (Abraham-Louis Bréguet, 1747.-1823., сл. 15) и Робин (Robert Robin, 1742.-1799.) [53].



Слика 15 Абрахам Бреге (Abraham-Louis Bréguet, 1747.-1823.

Швајцарску слободну запречницу са анкером, који се од енглеске варијанте разликује само по облику зуба запречног точка, настао је око 1910. године и, због једноставности израде, данас има најширу употребу у механизмима ручних и цепних сатова. Први морнарички хронометар, сл. 16, конструисао је 1730. године Џон Харисон (John Harrison 1693-1776), у кога је уградио једну верзију запречно-импулсног механизма са повратним трзајем – тзв. „grasshopper“ и решио чувени проблем одређивања географске ширине на мору [20].



Слика 16 Први морнарички хронометар Џона Харисона 1730. [20]

Пруа слободну хронометарску запречницу направио је француски часовничар Пјер Лероа (Pierre Le Roy 1717.-1785.) 1748. године. Изум су усавршили енглески часовничари Џон Арнолд (John Arnold 1736.-1799., сл. 17) 1779. године и Томас Ерншо (Thomas Earnshaw 1749.-1829., сл. 18) 1783. године, чиме је омогућена масовна производња морнаричких хронометара [48].



Слика 17 Џон Арнолд (John Arnold 1736.-1799.)



Слика 18 Томас Ерншо (Thomas Earnshaw 1749.-1829.) [48]

Изузев што се одликују свим побројаним карактеристикама слободних запречно-импулсних механизма, хронометарске запречнице, поседују још једно, драгоцено својство: спретним конструктивним решењем елиминисана је нужност подмазивања! Да није тако, стабилност хода хронометара била би делимично угрожена променама карактеристика уља које током времена мења своју вискозност услед оксидације и акумулације нечистоћа. За своја хоролошка открића, Џон Арнолд и Томас Ерншо су добили велика и заслужена државна признања јер се показало да су техничка решења која су управо они уградили у хронометарске запречно-импулсне механизме дословно спасла на десетине хиљада живота помораца и путника на мору!

На крају овог историјског прегледа развоја механичких часовника кроз векове, потребно је да се истакну још два механизма, и то из класе слободних запречница. Први је Рифлеров запречно-импулсни механизам Зигмунд Рифлер (Sigmund Riefler, 1847 – 1912, сл. 19, Deutsches Reichs Patent 1889.) који је у периоду од 1890. до 1965. године био инсталиран у астрономске сатове највише прецизности. Грешка хода ових часовника са клатном била је мања од 10 милисекунди дневно.



Слика 19 Зигмунд Рифлер (Sigmund Riefler 1847–1912) и његов астрономски часовник

Друга слободна запречница која је савремена, патентиран 2000. године од стране Бита Халдимана (Beat Haldimann, 1964.-, сл. 20), једног од 20 најзначанијих хоролога и часовничара данашњице [54]. Халдиманов рад и открића најбољи су доказ да је „уметност, наука и вештина“ градње механичких часовника не само жива, већ да пролази кроз нову ренесансу [48].



Слика 20 Бит Халдиман (Beat Haldimann, 1964.-)

У периоду од 17 до 19 века, вршена су и друга бројна усавршавања механизма часовника. Евард Берлоу (Edward Barlow, 1639-1719), енглески свештеник и механичар, побољшава постојећу верзију механизма за звучно означавање протеклих часова (тзв. Механизма за избијање), а стандардизују се начини и мелодије оглашавања протеклих четвртина и половина часова (Westminster's grande sonnerie, немачко и римско избијање, passing strike, итд.). Од времена великих часовничара Томаса Томпиона и Џорџа Грејема, када су израђивани појединачно и по поруџбини, џепни часовници постају све савршенији и тачнији, да би од средине 19. века прешли у масовну и високо стандардизовану производњу у чувеним швајцарским мануфактурама и фабрикама прецизне механике. Сматра се да је први ручни сат направио Абрахам-Луј Бреге (Abraham-Louis Breguet, 1747-1823) за Каролину Бонапарте, 1810. године. Међутим, популарност ручних часовника и њихова масовна производња почињу тек после Првог светског рата, током кога су постали стандардна опрема официра и пилота.

У периоду од 17. до 20. века остварене су бројна достигнућа у погледу усавршавања осцилатора сатних механизма. Најважнија иновација свакако је била компензација топлотних дилатација клатна и система балансни точак – спирална опруга, најштетнијег утицаја на тачност рада часовника. Прва успешна температурна компензација клатна остварена је од стране Џона Харисона око 1720 године, његовим изумом тзв. решеткастог клатна [17]. Ова компензација реализована је низом штапова – носача тега клатна сачињених од два различита метала (на пример, од челика и месинга) која трпе топлотне дилатације у супротним смеровима. Прорачун ове компензације врши се тако да резултујућа дилатација последњег носача буде једнака нули. Слично решење Харисон је уградио и у први морнарички хронометар, кога је конструисао 1730. године. Биметалну компензацију топлотних дилатација балансног точка и спиралне опруге остварио је француског часовничар Пјер Ле Рој (Pierre Le Roy, 1717-1785) 1765. године. Усавршена од стране енглеског часовничара Томаса Ерншоа, употребљавана је све до почетка 20. века.

Године 1896, француско - швајцарски физичар Шарл Едвард Гијом (Charles Edouard Guillaume, 1861-1938.) открива легуре никла и гвожђа - инвар, анибал и елинвар, и тако елиминише потребу за постојећим биметалним компензација [55]. Наиме, како инвар и анибал имају незнатну термичку експанзију погодне су за израду балансног точка, а елинвар за израду спиралних опруга јер трпи тек незнатну промену еластичности са променом температуре. Године 1933. инжењер др Раинхард Штрауман (Reinhard Straumann, 1892-1967) ствара легуру никла, хрома, мангана, титанијума, берилијума и гвожђа - ниварокс (Nivarox) која по својим квалитетима надмашује елинвар, па се зато од средине 20 века, управо она искључиво користи за израду спиралних опруга часовника [56].

Од 2007. године балансни точкови часовника претежно се израђују од глудирура (Glucydur), легуре берилијума, бакра и гвожђа која има незнатну топлотну дилатацију, немагнетична је и веома тврда. Широко је распрострањено уверење да ће будући развој индустрије сатова налазити ослонац управо у иновативним решењима у домену металургије и нових материјала [57].

2.2 Јединице за мерење времена

Мерење протицања времена, као и мерење свих других физичких величина, заснива се на дефинисању, усвајању и практичној реализацији извесних јединица мере. У овој глави биће укратко изложена и продискутована историја јединица мерења времена, од раних, древних цивилизација, па све до савременог доба.

Историјски извори сведоче да су антички народи користили дан као природну и основну јединицу мере протицања времена. У Старом Египту, од 2000. године п.н.е., дневни и ноћни периоди дана делили су се на по 12 часова сваки, одакле вероватно потиче и прва дефиниција ове мере као $1/24$ дела дана [35]. Она се разликује од савремене јер је трајање староегипатског сата било различито за дневне и ноћне периоде дана и мењало се сваким даном током године [24]. Описани начин деобе дана на ноћне и дневне часове задржао се у Европи све до касног средњег века, у току кога је мерење времена сунчаним часовницима постепено замењено механичким. У Старом Вавилону, од 300 године п.н.е, дан се делио на краће временске интервале, у складу са усвојеним шездесетичним бројним системом, на 60 делова, па сваки тако добијени део поново на 60 делова, итд. Користила се и подела дана на 12 једнаких делова, што одговара савременом временском интервалу од 2 сата (120 минута) [25]. За астрономска посматрања, у Старом Вавилону дефинисана је посебна јединица – тзв. један временски степен који траје 4 савремене минуте, као и мера од $4/3$ савремене секунде, идентична хебрејском хелеку. Међутим, ни једна шездесетична подела дана није коришћена у Старом Вавилону као независна јединица времена. Упркос томе, неоспорна је чињеница да су савремене стандардне поделе сата на минуте и секунде директна последица шездесетичног бројног система дефинисаног управо у цивилизацији Старог Вавилона. Народи Хеленске цивилизације користили су поделу дана на 6 делова и која представља већ поменуто наслеђе Старог Вавилона. Астрономи Хипарх (Hipparchus of Nicaea, 190-120 п.н.е.) и Птолемеј (Claudius Ptolemy, 100-170 н.е.) осим поменуте поделе, дефинишу и користе средњи сат као 24 . део средњег соларног (сунчевог) дана и целобројне умношке четвртине и трећине средњег сата [58]. Средњи дан и средњи сат нису трпели сезонске промене, већ су, као константе, представљали праве стандарде мерења времена као што је то чинила Старо Вавилонска и Хеленска цивилизација. Ове цивилизације користе за астрономска

мерења јединицу од једног временског степена као $1/360$ део средњег сунчевог дана односно, 4 минуте. (за 4 минуте, посматрано са Земље, Сунце се помери на еклиптици небеског свода за тачно 1 лучни степен). Све три поменуте цивилизације користиле су соларне, лунарне, као и лунисоларне календаре за мерење и бележење дужих временских интервала.

Секунда, као мера времена, помиње се први пут у Персији, приближно 1000. године наше ере [32]. Њихови астрономи деле временски период између два млада месеца - на дане, часове, минуте, секунде, трећине и четвртине секунди. У средњовековној Европи, сличну поделу користи и Роџер Бејкон (Rogerius Baconus, 1219-1292), енглески филозоф и научник [59]. Сагласно овим историјским чињеницама, може се закључити да је секунда изведена управо из лунисоларних циклуса, покушајем да се лунација прецизно измери и дефинише соларним мерама времена. Када је реч о мерењу и бележењу трајања лунација, потребно је да се укратко помене и седмица као јединица времена. Неоспорно, овај временски интервал ушао је у европску цивилизацију кроз Хебрејску и Јудеохришћанску традицију, а оне опет воде порекло од Старо Вавилонског лунисоларног календара који је, употребом интеркалационог дана, синхронизовао последњи дан задње недеље у месецу са појавом младог месеца. Хебрејски народ је седмицу почео да користе у доба Израелита, у 9. веку п.н.е. као временски интервал независан од циклуса месечевих мена. Старо Вавилонску седмицу прихватили су Стари Грци у 4. веку п.н.е, а Римска империја у периоду од 1. до 4. века н.е. Процесом християнизације, током раног средњег века, седмица је била прихваћена и од стране европских народа као део Јудео - хришћанске традиције. У наредних две хиљаде година она је постала непромењени стандардни временски интервал у највећем делу цивилизованог света.

Секунда, као основна мера времена, установљена је тек са усавршавањем механичких часовника, у другој половини 16. века. Наиме, секунда која представља 86400-ти део, дана постала је прецизније мерљива тек са дефинисањем средњег соларног времена кога приказују механички часовници, а напуштањем правог соларног времена кога приказују сунчани часовници. Историјски извори тврде да је швајцарски часовничар Јост Бурги (Jost Bürgi, 1552-1632) конструисао 1579 године први механички часовник који је имао секундару. Године 1581, у својој астрономској опсерваторији Ураниенборг, дански астроном Тихо Брахе (Tycho Brahe, 1546-1601) модификовао је часовнике тако да приказују секунде. Међутим,

присуство секундне казаљке још увек не значи да сат и прецизно одмерава секундне временске интервале. Наиме, недовољна техничка савршеност часовника који су грађени крајем 16. века није омогућавала и прецизно дефинисање и поуздано мерење секундних интервала. На часовницима из тог времена, секундаре су имале више декоративну улогу. Тек 1644 године, француски научник Маран Мерсен (Marin Mersenne, 1588-1648), рачунским путем показује да математичко клатно дужине 994 mm, у пољу земљине теже са стандардним брзањем $g=9,80665 \text{ m/s}^2$, осцилује са периодом од тачно 2 секунде. Ово сазнање отворило је пут за израду механичких часовника са клатном који ће моћи не само да приказују протицање секунди, већ и да прецизно и поуздано мере секундне временске интервале. Године 1670 године, енглески часовничар Вилијам Клемент (William Clement, 1638-1704) усавршава Хајгенсов часовник тако што га снабдева клатном са периодом од 2 секунде. Дакле, секунда је постала практична јединица за мерење времена тек када су у механичке часовнике почели да се уграђују прави осцилатори, са стабилним сопственим фреквенцама осциловања. Године 1832, немачки математичар Гаус (Carl Friedrich Gauss, 1777-1855), први предлаже секунду као основну меру времена у свом систему мера „милиметар – милиграм - секунда“. Године 1862. британска научна асоцијација BSA и формално предлаже CGS систем мера који је у наредних 70 година био постепено замењен MKS системом. У оба система мера секунда је усвојена као основна јединица времена. Током 1940 године, MKS је прихваћен као интернационални систем мера, у коме је секунда дефинисана као $1/86400$ део средњег соларног дана.

Године 1956. секунда је редефинисана као део средње соларне (синодичке или тропске) године и то за одговарајућу епоху, јер је уочено да ротација Земље око сопствене осе није довољно униформна да би се користила као стандард за дефинисање јединице времена. Од 1960. године, трајање средње тропске године више се не добија из астрономских мерења, већ прорачуном из посебних формула, чиме је прекинута експлицитна веза између трајања једне секунде и трајања дана. Наиме, развој науке, технике и технологије досегао је толико висок ниво средином 20. века, да заснивање дефиниције јединице времена на брзини Земљине ротације и револуције више није било довољно прецизно. Развој атомских часовника током педесетих година 20. века довео је 1967. године на Тринаестој генералној конференцији за тегове и мере до усвајања нове дефиниције секунде. Према тој дефиницији, она представља трајање од $9.192.631.770$ периода зрачења које

одговара квантном прелазу између два хиперфина нивоа основног стања атома цезијум 133. Дефиниција „атомске секунде“ установила је Интернационално атомско време (TAI – Temps atomique international) као координатни стандард времена високе прецизности добијен аритметичком средином времена кога мере и одржавају преко 400 атомских часовника који су у протеклих пет деценија инсталирани у више од педесет националних лабораторија широм света. Интернационално атомско време је основа и Координисаног универзалног времена (UTC – Coordinate Universal Time) које се користи за мерење протицања цивилног времена на Земљи. Током седамдесетих година 20. века, измерен је релативистички гравитациони утицај дилатације времена са променом надморске висине на ход атомских часовника. Године 1980. и формално је уведена корекција овог утицаја прерачунавањем времена кога показује сваки поједини атомски сат, са одговарајуће локалне на нулту надморску висину (универзалну, средњу висину нивоа мора). Данас, релативна грешка мерења фреквенција појединих атомских часовника не премашује вредност од 10^{-15} , а националне агенције за стандарде одржавају мрежу атомских часовника и синхронизују их са тачношћу од 10^{-9} s дневно. И поред овако високе тачности, атомски часовници се и даље усавршавају, тако да најновији, тзв. оптички часовници, мере и одржавају радну фреквенцију кохерентног зрачења у оптичкој области са релативном грешком од 10^{-18} [60].

3. Теоријске основе пертурбационог рачуна

3.1 Метода двоструке размере времена (2T)

Један од важних циљева ове дисертације јесте квалитативна и квантитативна анализа грешака запречно-импулсних механизма, односно, поремећаја фреквенце осцилатора часовника кога изазивају њихови запречно-импулсни механизми. Кључни резултати такве анализе биће описани конкретним формулама за израчунавање промене хода часовника. Како је намера да се анализа спроведе коришћењем теорије пертурбација и то, између осталог, методом двоструке размере (ске) времена, најпре ће у овој глави бити сажето објашњена суштина поменуте методе. У трећој глави ове дисертације, после објашњена пертурбационе технике двоструке размере времена, објашњена је укратко и суштина методе Крилова и Богољубова. На тај начин може се извршити контрола добијених резултата и евентуално упоредити обе методе и дао критички осврт на погодности и тешкоће њихових примена.

Техника двоструке размере времена припада једној општијој методи пертурбација познатој под именима: анализа вишеструким размерама или скала променљивих, експанзија вишеструким размерама или само метода вишеструких размера. Употребљава се за анализу појава чија се стања могу описати генералисаним координатама изразито различитих размера. Слабо пригушене осцилације (линеарне или нелинеарне, слободне или принудне), представљене диференцијалном једначином

$$\ddot{x} + \omega^2 x + \varepsilon f(x, \dot{x}) = 0; \varepsilon \in (0, 1), \varepsilon \ll 1, \quad (3.1)$$

типичан су пример таквих феномена. У једначини (3.1) слободне осцилације слабо су поремећене (пертурбиране) чланом $\varepsilon f(x, \dot{x})$ који је, у општем случају, нелинеаран. Константа ε може бити изабрана на различите начине, а у овом случају погодно је да она предствља управо фактор пригушења ξ . Наиме, ако је реч о слободним осцилацијама са малим пригушењем, брзина опадања амплитуде знатно је мања у односу на угаону фреквенцу осциловања, а у случају принудних пригушених осцилација, може се појавити и врло спора промена фазе осциловања. Утисак је да унутар поменутог осцилаторног процеса теку две различите скале времена. Увођење вишеструких размера променљивих у пертурбациони рачун

приписује се математичару и физичару Поенкареу, мада је он сам тврдио да идеја потиче од астронома Линдштета. Бавећи се генерално теоријом пертурбација, математичари Крилов и Богољубов су, осим методе усредњавања, детаљно развили и технику двоструке размере времена.

Да би поступак двоструке размере времена био сасвим јасан, потребно је најпре да се истакне мотивација за његову примену. Сврха и смисао технике двоструке размере времена постаће очигледни када се открије управо кључни недостатак методе регуларних пертурбација. Зато ће бити демонстриран покушај да се методом регуларних пертурбација приближно реши следећа линеарна диференцијална једначина другог реда са константним коефицијентима:

$$\ddot{\varphi} + 2\xi\omega_0\dot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = 0; \xi \in (0, 1), \xi \ll 1. \quad (3.2)$$

Она описује слободне осцилације, са сопственом угаоном фреквенцом ω_0 и малим пригушењем, ако је фактор пригушења $\xi \in (0, 1)$, $\xi \ll 1$. Почетни услови су познати ($\varphi(0) = \Phi_0, \dot{\varphi} = 0$), али за ову демонстрацију нису битни. Овај покушај неће довести до коректног решења. Управо ће тај неуспех илустровати ману регуларних пертурбација која ће оправдати разлог за увођење методе двоструке размере времена. Потребно је запазити да у једначини (3.2) члан $2\xi\omega_0\dot{\varphi}$ представља мали поремећај односно, малу пертурбацију слободних непригушених осцилација описаних једначином

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = 0; \quad (3.3)$$

јер је фактор пригушења ξ веома мали позитиван број. Метода регуларних пертурбација тражи приближно решење диференцијалне једначине (3.2) у облику пертурбационог реда

$$\varphi(t) = \varphi_0(t) + \xi^1\varphi_1(t) + \xi^2\varphi_2(t) + \dots + \xi^n\varphi_n(t) + O(\xi^{n+1}), \quad (3.4)$$

који представља збир егзактног решења $\varphi_0(t)$ упрошћене диференцијалне једначине (3.3), у којој је поремећај $2\xi\omega_0\dot{\varphi}$ занемарен, и низа пертурбационих чланова. Ознака $O(\xi^{n+1})$ представља ред величине остатка апроксимације и износи ξ^{n+1} . Ови чланови вишег реда ремете (пертурбирају) идеализовано решење $\varphi_0(t)$ и тако га коригују и приближавају траженом решењу $\varphi(t)$ једначине (3.2), у којој поремећај $2\xi\omega_0\dot{\varphi}$ није занемарен. Ако $\xi \in (0, 1)$, чланови вишег реда требало би sukcesивно да опадају, што значи да би требало да пертурбациона апроксимација

тачног решења (3.4) представља асимптотски функционални ред. У таквом развоју приближног решења у асимптотски ред, свака поједина функција, као члан реда, расте спорије у односу на претходну, на одговарајућем интервалу времена. Да то не мора увек да буде и нужност управо ће илустровати овај пример.

Апроксимативно решење једначине (3.2) тражимо у следећем облику збира иницијалног решења и корекције првог реда:

$$\varphi(t) \approx \varphi_0(t) + \xi \varphi_1(t), \quad (3.5)$$

у коме су занемарени сви чланови $\xi^n \varphi_n(t)$, $n > 1$. У овом случају извесно је да, за дато ξ , увек постоји коначан временски интервал $t \in [0, t_M]$, унутар кога остатак апроксимације има ред величине $O(\xi^2)$. Наведена чињеница непосредно следи из теореме коју Мардок (James Murdock) доказује у књизи „Perturbation - Theory and Methods“ [61]. Ако се израз (3.5) замени у диференцијалну једначину (3.2) добија се једначина:

$$\ddot{\varphi}_0 + 2\xi\omega_0\dot{\varphi}_0 + \omega_0^2\varphi_0 + \xi\ddot{\varphi}_1 + 2\xi^2\omega_0\dot{\varphi}_1 + \xi\omega_0^2\varphi_1 = 0. \quad (3.6)$$

У једначини (3.6) занемарује се члан $2\xi^2\omega_0\dot{\varphi}_1$ као мала вредност вишег реда. Диференцијална једначина (3.6) може се раставити на следећи систем од две диференцијалне једначине:

$$\ddot{\varphi}_0 + \omega_0^2\varphi_0 = 0 \quad (3.7)$$

$$\xi(\ddot{\varphi}_1 + \omega_0^2\varphi_1) = -2\xi\omega_0\dot{\varphi}_0. \quad (3.8)$$

Решење једначине (3.7) описује слободне непригушене осцилације и за почетне услове $\varphi_0(0) = \Phi_0$, $\dot{\varphi}_0 = 0$ гласи:

$$\varphi_0(t) = \Phi_0 \cos \omega_0 t. \quad (3.9)$$

Ако се решење (3.9) замени у једначину (3.8) добија се диференцијална једначина:

$$\ddot{\varphi}_1 + \omega_0^2\varphi_1 = 2\omega_0^2\Phi_0 \sin \omega_0 t. \quad (3.10)$$

Једначина (3.10) је обична нехомогена диференцијална једначина другог реда и може се решити Лагранжовом методом варијације констаната. За почетне услове $\varphi_1(0) = 0$, $\dot{\varphi}_1 = 0$, решење једначине (3.10) дато је изразом:

$$\varphi_1(t) = \Phi_0(\sin \omega_0 t - \omega_0 t \cos \omega_0 t). \quad (3.11)$$

Дакле, приближно решење диференцијалне једначине (3.2) гласи:

$$\varphi(t) = \Phi_0 \cos \omega_0 t + \xi (\Phi_0 (\sin \omega_0 t - \omega_0 t \cos \omega_0 t)) + O(\xi^2). \quad (3.12)$$

Одмах се запажа да решење (3.12), као збир израза (3.9) и (3.11) не одговара решењу кога даје линеарна теорија осцилација. Оно није коректно ни са становишта методе пертурбација јер нарушава асимптотско приближавање тачном решењу, процесу на коме се суштински и заснива теорија пертурбација. Основни узрок тог нарушавања јесте чињеница да, са временом t , члан $\xi t \omega_0 \Phi_0 \cos \omega_0 t$ расте неограничено и тако губи карактер малих корекција иницијалног решења $\varphi_0(t)$. Наиме, у изразу (3.12), већ за свако $t = O(1/\xi)$ други члан расте у толикој мери да његов ред величине постаје једнак реду величине првог члана, услед чега пертурбациона апроксимација тачног решења престаје да има карактер асимптотског развоја. Израз облика $t \cos \omega_0 t$ у решењу (3.12) назива се секуларним чланом (секуларан – од латинске речи *saeculum*; онај који постоји временски дуго, у векове) и формална је последица израза:

$$2\omega_0^2 \Phi_0 \sin \omega_0 t, \quad (3.13)$$

који се налази на десној страни једнакости, у диференцијалној једначини (3.10). Иако није активна спољашња принуда, израз (3.13) представља један фиктивни циклични утицај – принуду, који је у резонанци са сопственим осцилацијама описаних хомогеним делом диференцијалне једначине (3.10). Зато се овај израз назива фактором резонантне принуде или резонантног форсирања. И генерално, сваки израз облика $A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t$ у нехомогеној диференцијалној једначини облика:

$$\ddot{\varphi}_1 + \omega_0^2 \varphi_1 = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t \quad (3.14)$$

представља фактор резонантне принуде и, у њеном партикуларном решењу, проузрокује појаву секуларних чланова облика $t \cos \omega_0 t$ и $t \sin \omega_0 t$. Својства секуларних чланова детаљно разматра Мардок [61] и прецизније разјашњава у ком смислу је њихова појава „штетна“. Секуларност таквих чланова може бити и привидна [61], на пример у апроксимацијама периодичних функција бесконачним степеним редовима. У таквом случају, секуларни чланови могу бити прихватљиви, ако је прихватљива ограничена тачност приближног решења у довољно кратком временском интервалу. Исти аутор истиче да постоје случајеви када су секуларни

чланови неизбежни, на пример у приближним решењима која имају форму асимптотских функционалних редова, када ни егзактно решење није ограничено односно, када и оно садржи секуларне чланове [61]. У примеру решавања диференцијалне једначине (3.2) методом регуларних пертурбација, приближно решење (3.10) које садржи секуларне чланове може бити прихватљиве тачности, али само у довољно кратком временском интервалу, који се може проценити нумеричким прорачуном. Конкретно, за $t = t_S = 1/(\xi\omega_0)$ секуларни члан се изједначава са првим чланом и за $t \geq t_S$ престаје да важи асимптотски развој. Временски интервал $t \in [0, t_M]$ у коме приближно решење (3.10) има прихватљиву тачност обично је изузетно кратко $t_M \ll t_S$. Као што је већ истакнуто, у том временском интервалу, за неку одређену вредност фактора пригушења $\xi \in (0, 1)$, остатак апроксимације има ред величине $O(\xi^2)$. Ако би се у пертурбационом прорачуну користили чланови вишег реда $\xi^n \varphi_n(t), n > 1$, ред величине остатка апроксимације би се смањио $O(\xi^{n+1}), n > 1$, али би важио увек на оном истом интервалу времена $t \in [0, t_M]$ на коме су важиле и апроксимације нижег реда. Мардок [61], истиче у коментару теореме 3.2.1. да се временски интервал апроксимације првог реда може проширити на временски интервал $t \in [0, t_M/\xi]$ уз повећање реда величине остатка апроксимације са $O(\xi^2)$ на $O(\xi^1)$, под условом да функције $\varphi_0(t)$ и $\varphi_1(t)$ пертурбацине апроксимације не садрже секуларне чланове. Дакле, у општем случају, метода регуларних пертурбација неће бити погодна за примену када год диференцијалне једначине садрже факторе резонантне принуде, односно када год решења тих диференцијалних једначина последично садрже секуларне чланове. Ова чињеница је кључни недостатак методе регуларних пертурбација и мотив за примену неке друге технике пертурбационог рачуна.

Метод двоструке размере времена једна је од алтернативних техника која превазилази проблем секуларних чланова присутних у методи регуларних пертурбација. Осим тога, метода двоструке размере времена проширује временски интервал важења апроксимације и то за ред величине константе ξ , што је у случају регуларних пертурбација, у општем случају, немогуће постићи. Наиме, управо елиминацијом секуларних чланова, метода двоструке размере времена обезбеђује да остатак апроксимације приближног решења $\varphi(t) \approx \varphi_0(t)$ има ред величине $O(\xi)$ на временском интервалу $t \in [0, t_M/\xi]$. Овај временски интервал је за ред величине фактора пригушења ξ дужи од временског интервала $t \in [0, t_M]$ на коме остатак

апроксимације реда $n = 1$, добијен регуларном пертурбацијом, има ред величине $O(\xi^2)$. Реч је о хеуристичком поступку, чија се ваљаност доказује *post festum*. Овај метод ће укратко бити објашњен на примеру приближног решавања диференцијалне једначине слободних пригушених осцилација (3.2). Суштина методе двоструке скале времена заснива се на замени независно променљиве t двема променљивим t_1 и t_2 :

$$t_1 = 1 \cdot t; t_2 = \xi \cdot t, \xi \in (0, 1), \quad (3.15)$$

при чему се усваја да су оне, у току извођења пертурбационог рачуна, међусобно независне. Константа ξ је фактор пригушења.

Већ је наглашено да овај поступак има физикални смисао, јер је брзина опадања амплитуде слободних, слабо пригушених осцилација знатно мања у односу на угаону фреквенцу осцилација. У изразима (3.15), променљива t_1 представља протицање „обичног“ времена у коме се одвијају хармонијске осцилације, а променљива t_2 репрезентује „спору“ скалу времена у току које се одвија расипање енергије осцилатора и опадање амплитуде пригушених осцилација. Приближно решење $\varphi(t_1, t_2, \xi)$ тражи се у облику збира иницијалног решења $\varphi_0(t_1, t_2)$ и корекције првог реда $\xi \varphi_1(t_1, t_2)$, као што је приказано изразом

$$\varphi(t_1, t_2, \xi) \approx \varphi_0(t_1, t_2) + \xi \varphi_1(t_1, t_2). \quad (3.16)$$

Још једном се наглашава најважнији циљ ове методе, кога посебно истиче и Мардок у [61]. Реч је о намери да се, на неком временском интервалу, дефинише приближно решење (3.16) у форми асимптотског функционалног реда. Да би се таква намера остварила неопходно је да се обезбеди да на том временском интервалу функције пертурбационог реда (3.16) буду ограничене, односно да не садрже секуларне чланове. Почетни услови $\varphi(0) = \Phi_0, \dot{\varphi}(0) = 0$ формулисани су, за обе функције $\varphi_0(t_1, t_2)$ и $\varphi_1(t_1, t_2)$, изразима

$$\varphi_0(0, 0) = \Phi_0, \dot{\varphi}_0(0, 0) = 0, \varphi_1(0, 0) = 0, \dot{\varphi}_1(0, 0) = 0. \quad (3.17)$$

Сагласно формулама (3.15), први и други извод угаоне координате φ по времену t дат је следећим изразима, респективно:

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial \varphi}{\partial t_1} \cdot \frac{\partial t_1}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial t_2} \cdot \frac{\partial t_2}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial t_1} + \xi \frac{\partial \varphi}{\partial t_2}, \quad (3.18)$$

$$\ddot{\varphi} = \frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial t_1} + \xi \frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial t_2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t_1^2} + 2\xi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t_1 \partial t_2} + \xi^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t_1^2} \cong \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t_1^2} + 2\xi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t_1 \partial t_2}. \quad (3.19)$$

У изразу (3.19) члан који садржи ξ^2 занемарен је као мала вредност вишег реда. Применом израза (3.16) и занемаривањем чланова који садрже ξ^2 , релације (3.18) и (3.19) постају, респективно:

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial \varphi_0}{\partial t_1} + \xi \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial t_2} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_1} \right), \quad (3.20)$$

$$\ddot{\varphi} = \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial t_1^2} + 2\xi \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial t_1 \partial t_2} + \xi \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t_1^2}. \quad (3.21)$$

Када се изрази (3.16), (3.20) и (3.21) уврсте у диференцијалну једначину (3.2), после занемаривања чланова који садрже ξ^2 , добија се следећа диференцијална једначина:

$$\frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial t_1^2} + \omega_0^2 \varphi_0 + \xi \left(\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t_1^2} + \omega_0^2 \varphi_1 + 2 \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial t_1 \partial t_2} + 2\omega_0 \frac{\partial \varphi_0}{\partial t_1} \right) = 0. \quad (3.22)$$

Како је фактор пригушења ξ мали број али различит од нуле, лева страна једначине (3.22) биће једнака нули, ако су једначине:

$$\frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial t_1^2} + \omega_0^2 \varphi_0 = 0; \varphi_0 = \Phi_0, \frac{\partial \varphi_0}{\partial t_1} = 0, \text{ за } t_1 = t_2 = 0 \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t_1^2} + \omega_0^2 \varphi_1 &= -2 \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial t_1 \partial t_2} - 2\omega_0 \frac{\partial \varphi_0}{\partial t_1}; \varphi_1 = 0, \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_1} \\ &= -\frac{\partial \varphi_0}{\partial t_2}, \text{ за } t_1 = t_2 = 0 \end{aligned} \quad (3.24)$$

симултано задовољене. Уз сваку од поменутих једначина наведени су и специфични почетни услови, а сагласно њиховој општој формулацији (3.17), и у складу са изразом (3.16) и (3.20).

Систем диференцијалних једначина (3.23) - (3.24) решава се сукцесивно, при чему треба истаћи чињеницу да је диференцијална једначина (3.23) само формално парцијална, а да у суштини представља обичну диференцијалну једначину са константним коефицијентима по променљивој t_1 . Дакле, једначина (3.23) доводи до иницијалног решења $\varphi_0(t_1, t_2)$, које се поправља корекцијом првог реда $\xi \varphi_1(t_1, t_2)$. У овом корективном члану, функција $\varphi_1(t_1, t_2)$ представља решење једначине (3.24), које зависи од претходно добијене функције $\varphi_0(t_1, t_2)$. Једно решење једначина (3.23) дато је изразом:

$$\varphi_0(t_1) = \Phi \sin(\omega_0 t_1 + \gamma), \Phi = \text{const}, \gamma = \text{const}, \quad (3.25)$$

који описује слободне хармонијске осцилације по независној променљивој t_1 и у којој константа γ представља угао фазне разлике. Дакле, како је решење $\varphi_0(t_1)$ хомогене диференцијалне једначине (3.23) хармонијска функција (3.25) променљиве t_1 , она је ограничена $\varphi_0(t_1) = O(1)$ на произвољно дугом временском интервалу $t_1 \in [0, \infty)$. Неопходно је да се ово својство обезбеди и за функцију $\varphi_1(t_1, t_2)$ по променљивој t_1 , како приближно решење $\varphi(t_1, t_2, \xi)$ не би изгубило карактер асимптотског функционалног реда, по променљивој t_1 .

Да би се решила диференцијална једначина (3.24), уводи се претпоставка (“Ansatz“) да ни амплитуда ни фазна разлика нису константне величине, већ да представљају функције од променљиве t_2 :

$$\varphi_0(t_1, t_2) = \Phi(t_2) \sin(\omega_0 t_1 + \gamma(t_2)). \quad (3.26)$$

Парцијални извод функције (3.26) по променљивим t_1 дат је функцијом:

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial t_1} = \Phi(t_2) \omega_0 \cos(\omega_0 t_1 + \gamma(t_2)) = \Phi \omega_0 \cos \psi, \quad (3.27)$$

а парцијални извод функције (3.27) по променљивој t_2 дати је формулом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial t_1 \partial t_2} &= \frac{\partial \Phi(t_2)}{\partial t_2} \omega_0 \cos(\omega_0 t_1 + \gamma(t_2)) \\ &\quad - \Phi(t_2) \omega_0 \sin(\omega_0 t_1 + \gamma(t_2)) \frac{\partial \gamma(t_2)}{\partial t_2} \\ &= \frac{\partial \Phi}{\partial t_2} \omega_0 \cos \psi - \Phi \frac{\partial \gamma}{\partial t_2} \omega_0 \sin \psi. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Ради концизности, уведена је ознака за фазни угао (фазу) осцилација $\psi = \omega_0 t_1 + \gamma(t_2)$. Када се изрази (3.27) и (3.28) уврсте у диференцијалну једначину (3.24) добија се следећа једначина:

$$\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t_1^2} + \omega_0^2 \varphi_1 = 2\Phi \frac{\partial \gamma}{\partial t_2} \omega_0 \sin \psi - 2 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t_2} + \Phi \omega_0 \right) \omega_0 \cos \psi. \quad (3.29)$$

Чланови на десној страни једначине (3.29), који садрже функције $\cos \psi$ и $\sin \psi$ представљају чланове резонантне принуде, као функције времена t_1 , и проузрокују да решење ове диференцијалне једначине садржи секуларне чланове. Анулирањем поменутих чланова резонантне принуде у диференцијалној једначини (3.29), који су хармонијске функције променљиве t_1 , елиминишу се из решења $\varphi_1(t_1, t_2)$

секуларни чланови као функције исте променљиве t_1 и тако обезбеђује да $\varphi_1(t_1, t_2)$ буде ограничена по променљивој t_1 . Како овим поступком диференцијална једначина (3.29) постаје хомогена, њено решење $\varphi_1(t_1, t_2)$ мора бити хармонијска функција променљиве t_1 , што значи да је и она, као и функција $\varphi_0(t_1, t_2)$, ограничена по променљивој t_1 на временском интервалу $t_1 \in [0, \infty)$. Анулирање секуларних чланова извршено је једначинама:

$$\Phi(t_2) \frac{\partial \gamma(t_2)}{\partial t_2} = 0, \quad (3.30)$$

$$\frac{\partial \Phi(t_2)}{\partial t_2} + \Phi(t_2) \omega_0 = 0. \quad (3.31)$$

Како је $\Phi(t_2) \neq 0$, из једначина (3.30) непосредно следи да се фазна разлика не мења са временом односно, да је константна: $\gamma(t_2) = \gamma_0 = const$. Опште решење диференцијалне једначине (3.31) гласи:

$$\Phi(t_2) = C e^{-\omega_0 t_2} \quad (3.32)$$

у којој се константа $C = const$ одређује из почетних услова. Како једначина (3.30) описује експоненцијално опадање амплитуде слободних пригушених осцилација са временом t_2 , и она је ограничена за $t_2 \in [0, \infty)$. Заменом решења (3.32) у (3.26) добија се нулта апроксимација диференцијалне једначине (3.2) односно, формула првог члана пертурбационог реда:

$$\varphi_0(t_1, t_2) = C e^{-\omega_0 t_2} \cdot \sin(\omega_0 t_1 + \gamma_0). \quad (3.33)$$

Из почетних услова датих у (3.23) одређују се константе $C = \Phi_0$ и $\gamma_0 = \pi/2$, па коначан израз за нулту апроксимацију решења диференцијалне једначине (3.2) у функцији временских координата t_1 и t_2 гласи:

$$\varphi_0(t_1, t_2) = \Phi_0 e^{-\omega_0 t_2} \cdot \cos \omega_0 t_1. \quad (3.34)$$

Овим су исцрпљене могућности даљег решавања диференцијалне једначине (3.24), тако да функција $\varphi_1(t_1, t_2)$ остаје неодређена. Приближно решење једначине (3.2) дефинисано је само као нулта „побољшана“ апроксимација (3.34) пертурбационог реда. Преласком на координату „регуларног“ времена t , а сагласно једнакостима $t_1 = t$ и $t_2 = \xi \cdot t$, формула (3.34) постаје:

$$\varphi_0(t) = \Phi_0 e^{-\xi \omega_0 t} \cdot \cos \omega_0 t. \quad (3.35)$$

Ипак, упркос чињеници што није одређен аналитички израз за функцију $\varphi_1(t_1, t_2)$, дефинисане су неке њене битне карактеристике, на основу којих је могуће проценити ред величине остатка нулте апроксимације $\varphi_0(t)$, као и ред величине временског интервала на коме ова апроксимација важи. Та процена ће бити и доказ ваљаности спроведеног поступка решавања диференцијалне једначине (3.2) пертурбационом методом двоструке скале времена.

Да би се проценио ред величине остатка апроксимације и временског интервала на коме она може да се употребити, неопходно је да се продискутују својства асимптотског функционалног реда,

$$\begin{aligned}\varphi(t_1, t_2, \xi) &= \varphi_0(t_1, t_2) + \xi \varphi_1(t_1, t_2) + O(\xi^2) \\ &= \varphi_0(t_1, t_2) + O(\xi), \xi \in (0, 1),\end{aligned}\tag{3.36}$$

којим је апроксимирано егзактно решење диференцијалне једначине (3.2). Пре свега, кључно је својство асимптотског развоја (3.36) да је ред величине остатка апроксимације једнак реду величине првог изостављеног члана $\xi \varphi_1(t_1, t_2) = O(\xi)$, на неком интервалу променљивих t_1 и t_2 . У примеру решавања диференцијалне једначине (3.2) методом двоструке размене времена, обезбеђено је да функција $\varphi_0(t_1, t_2)$ буде ограничена $\varphi_0(t_1, t_2) = O(1)$ по обе променљиве t_1 и t_2 , на интервалима $t_1 \in [0, \infty)$ и $t_2 \in [0, \infty)$. Преласком на координату регуларног времена t , непосредно следи да је функција $\varphi_0(t)$ ограничена $\varphi_0(t) = O(1)$, за $t \in [0, \infty)$. Елиминацијом секуларних чланова из функције $\varphi_1(t_1, t_2)$ по променљивој t_1 , осигурана је и њена ограниченост на интервалу $t_1 \in [0, \infty)$. Међутим, пошто спроведеним поступком решавања диференцијалне једначине (3.29) није обезбеђена елиминација секуларних чланова из функције $\varphi_1(t_1, t_2)$ по променљивој t_2 , за функцију $\varphi_1(t_1, t_2)$ може се једино тврдити [61] да је ограничена $\varphi_1(t_1, t_2) = O(1)$ по променљивој t_2 , на неком коначном временском интервалу $t_2 \in [0, t_M]$. Преласком на координату регуларног времена, $t_2 = \xi \cdot t$, производи да је функција $\varphi_1(t)$ ограничена $\varphi_1(t) = O(1)$, на коначном временском интервалу $t \in [0, t_M/\xi]$ који је за ред величине фактора пригушења ξ дужи од интервала $t \in [0, t_M]$. Одавде непосредно следи да $\xi \varphi_1(t_1, t_2) = O(\xi)$, на $t \in [0, t_M/\xi]$, $t = O(1/\xi)$. За фиксирану вредност фактора пригушења ξ , наведени закључци су исправни и за сваку другу вредност броја $\xi_1 \leq \xi$ односно, апроксимација је утолико тачнија и важи на дужем временском интервалу, уколико је фактор пригушења мањи.

На основу изложеног, следи:

$$\varphi_0(t) = O(1), \text{ за } t \in [0, t_M/\xi_1] \text{ и за свако } \xi_1 \leq \xi, \xi \in (0, 1). \quad (3.37)$$

Како за грешку апроксимације, која се рачуна као разлика тачног решења и његове нулте апроксимације важи $|\varphi(t, \xi) - \varphi_0(t, \xi t)| = |\xi \varphi_1(t, \xi t)| = O(\xi)$, онда непосредно следи став да постоје константе c , ξ_1 и t_M , такве да тачно решење $\varphi(t, \xi)$ испуњава следећи услов:

$$|\varphi(t, \xi) - \varphi_0(t, \xi t)| \leq c\xi, \text{ за } t \in [0, t_M/\xi_1] \text{ и за свако } \xi_1 \leq \xi, \xi \in (0, 1). \quad (3.38)$$

Овим ставом се потврђује да се приближно решење $\varphi_0(t)$ асимптотски приближава тачном решењу $\varphi(t)$ на временском интервалу $t \in [0, t_M/\xi]$. Доказом теореме 5.2.1. у [61], Мардок потврђује да се пертурбациона метода двострука размере времена може успешно применити у решавању и нехомогених диференцијалних једначина које описују осцилаторне процесе. Теорема 5.2.1. има исти формални запис као став (3.38), као и исту суштину доказа који је овде изложен.

3.2 Пертурбациона метода усредњавања по Кривову и Богољубову

Већ је истакнута намера да се грешке запречно импулсних механизма анализирају коришћењем теорије пертурбација и то не само методом двоструке размере времена, већ и техником усредњавања по методи Кривова (Николај Митрофанович Крылов, 1879-1955) и Богољубова (Николај Николаевич Боголюбов, 1909-1992). У овој глави биће сажето објашњена суштина поменуте методе, као и њена сродност са методом двоструке размере времена. Пертурбациона техника Кривова и Богољубова математички је поступак апроксимативне анализе нелинеарних осцилаторних процеса, којом се егзактна диференцијална једначина замењује приближном, једноставнијом једначином, формираном посебном техником усредњавања. Осим у анализи нелинеарних осцилација, користи се и у небеској механици, на пример у одређивању спорих планетарних прецесија периапсиса.

Нека је дата диференцијална једначина осцилација у облику:

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \omega_0^2 u = a + \varepsilon \cdot f\left(u, \frac{du}{dt}\right); \varepsilon \in (0, 1), \varepsilon \ll 1. \quad (3.39)$$

Ако је $\varepsilon = 0$, једначина (3.39) описује хармонијски осцилатор са константном принудом (силом или моментом силе), па њено решење гласи:

$$u_0(t) = \frac{a}{\omega_0^2} + A \sin(\omega_0 t + B). \quad (3.40)$$

Константе A и B одређују се из почетних услова. Ако је $\varepsilon \neq 0$, решење (3.40) једначине (3.39) има мали поремећај, пертурбацију и, према методи Крилова и Богољубова, претпоставља се у истој форми, али тако да A и B више нису константе већ представљају функције времена t и параметра ε . Дакле, решење једначине (3.39) када $\varepsilon \neq 0$ тражи се у облику:

$$u_0(t) = \frac{a}{\omega_0^2} + A(t) \sin(\omega_0 t + B(t)). \quad (3.41)$$

Како су уведене две непознате функције времена t , неопходно је увести неко погодено ограничење односно, додатни услов. За ову методу уводи се следећи услов:

$$\frac{du_0}{dt} = A(t) \omega_0 \cos(\omega_0 t + B(t)). \quad (3.42)$$

Како су A и B функције времена t , први извод по времену једначине (3.41) гласи:

$$\begin{aligned} \frac{du_0}{dt} = \frac{dA(t)}{dt} \sin(\omega_0 t + B(t)) + A(t) \cos(\omega_0 t + B(t)) \\ \cdot \left(\omega_0 + \frac{dB(t)}{dt} \right). \end{aligned} \quad (3.43)$$

Из једначина (3.42) и (3.43), додатни услов може се изразити сажето једначином:

$$\frac{dA(t)}{dt} \sin(\omega_0 t + B(t)) + A(t) \frac{dB(t)}{dt} \cos(\omega_0 t + B(t)) = 0. \quad (3.44)$$

Сагласно изразима (3.41), (3.43) и (3.44), диференцијална једначина (3.39) еквивалентна је следећем систему једначина:

$$\frac{dA(t)}{dt} = \frac{\varepsilon}{\omega_0} f\left(\frac{a}{\omega_0^2} + A(t) \sin(\psi), \cos(\psi)\right) \cdot \cos(\psi), \quad (3.45)$$

$$\frac{dB(t)}{dt} = \frac{\varepsilon}{\omega_0} f\left(\frac{a}{\omega_0^2} + A(t) \sin(\psi), \cos(\psi)\right) \cdot \left(-\frac{1}{A(t)}\right) \sin(\psi), \quad (3.46)$$

у којима је $\psi = \omega_0 t + B(t)$ фазни угао (фаза) осциловања.

Једначине (3.45) и (3.46) егзактне су, јер до сада још увек није примењена било каква апроксимација. Како се функције $A(t)$ и $B(t)$ мењају споро са временом (јер је $\varepsilon \ll 1$), десне стране једначина (3.45) и (3.46) могу се апроксимативно заменити њиховим средњим вредностима на временском интервалу $t \in [0, 2\pi/\omega_0]$ односно, $\psi \in [0, 2\pi]$. Апроксимација се изводи тако да се претпоставља да су функције A и B на поменутом интервалу константне и независне од времена. На овај начин настају једначине

$$\frac{dA_{SR}(t)}{dt} = \frac{\varepsilon}{2\pi\omega_0} \int_0^{2\pi} f\left(\frac{a}{\omega_0^2} + A \sin(\psi), \cos(\psi)\right) \cdot \cos(\psi) d\psi, \quad (3.47)$$

$$\begin{aligned} \frac{dB_{SR}(t)}{dt} = \frac{\varepsilon}{2\pi\omega_0} \int_0^{2\pi} f\left(\frac{a}{\omega_0^2} + A \sin(\psi), \cos(\psi)\right) \\ \cdot \left(-\frac{1}{A}\right) \sin(\psi) d\psi, \end{aligned} \quad (3.48)$$

које представљају саму суштину методе Крилова и Богољубова. Истичемо још једном да су функције A и B , на десним странама једначина (3.9) и (3.10), унутар интеграла, константе. После решавања наведеног система диференцијалних једначина (3.47-3.48), може се добити приближно решење диференцијалне једначине (3.39), као нулта апроксимација, у облику:

$$u_0(t) = \frac{a}{\omega_0^2} + A_{SR}(t) \sin(\omega_0 t + B_{SR}(t)). \quad (3.49)$$

Сврха описаног поступка заснива се на претпоставци да је систем једначина (3.47-3.48) једноставнији за решавање од полазне диференцијалне једначине (3.39).

Грешка приближног решења рачуна се као разлика тачног решења $u(t)$ диференцијалне једначине (3.39) и његове нулте апроксимације $u_0(t)$. Ред величине ове грешке, којом се процењује тачност апроксимације

$$|u(t, \varepsilon) - u_0(t, \varepsilon)| = O(\varepsilon), \quad (3.50)$$

једнак је реду величине $O(\varepsilon)$ првог изостављеног члана у пертурбационом асимптотском развоју тачног решења. Кривов и Богољубов доказали су став да

постоје константе c , ε_1 и t_M , такве да грешка апроксимације (3.50) испуњава следећи услов:

$$|u(t, \varepsilon) - u_0(t, \varepsilon)| \leq c \cdot \varepsilon, \text{ за } t \in [0, t_M/\varepsilon] \text{ и за}$$

$$\text{свако } \varepsilon_1 \leq \varepsilon, \varepsilon \in (0, 1). \quad (3.51)$$

Треба запазити да је интервал важења апроксимације, као и у методи двоструке скале времена, проширен за ред величине параметра поремећаја ε . За фиксирану вредност параметра ε , наведени закључци су исправни и за сваку другу вредност параметра $\varepsilon_1 \leq \varepsilon$ односно, апроксимација је утолико тачнија и важи на дужем временском интервалу, уколико је број ε мањи. Став (3.51) потврђује да се приближно решење $u_0(t, \varepsilon)$ асимптотски приближава тачном решењу $u(t, \varepsilon)$ на временском интервалу $t \in [0, t_M/\varepsilon]$. Наводећи доказ овог става у [61], Мардок потврђује исправност пертурбационе методе Крилова и Богољубова као једног могућег хеуристичког поступка у приближном решавању диференцијалних једначина облика (3.39). Како диференцијална једначина (3.39) и једначине (3.47) и (3.48) представљају само математичке моделе једне групе физичких феномена, доказ практичне употребљивости ове, као и других пертурбационих поступака може се проверити само експериментом или компјутерском симулацијом поменутих физичких појава.

У овој анализи, једначина (3.47) описује очекивану спору промену ($\varepsilon \ll 1$) амплитуде осцилаторног процеса и спрегнута је са једначином (3.48). За потребе наше анализе, једначина (3.48) посебно је значајна и интересантна. Она открива да фазна разлика B осцилаторног процеса није константна, већ да се мења споро са временом и описује брзину те промене односно, поремећај фреквенце ω_0 осцилатора кога изазива спољашња принуда. Ако је реч о осцилатору часовника, једначина (3.48) управо представља формулу за израчунавање грешке запречно - импулсног механизма.

Потребно је да се уочи и продискутује сродност пертурбационе методе Крилова и Богољубова и методе две размере времена. Пре свега, уочава се потпуна сагласност процене реда величине грешке апроксимације и реда величине временског интервала на коме та апроксимација важи по обе методе (3.51) и (3.52). Метода двоструке размере времена уводи координату „регуларног“ времена t и координату „спорог“ времена εt и тако, уопштено говорећи, експлицитно раздваја

„брзе“ од „спорих“ промена унутар једног истог динамичког процеса. Метода Крилова и Богољубова то не чини експлицитно, али уводи претпоставку да се функције $A(t)$ и $B(t)$, мењају толико споро у односу на фазу осциловања $\psi(t)$ на временском интервалу $t \in [0, 2\pi/\omega_0]$, да се може усвојити да су оне, на том временском интервалу, приближно константне и независне од времена.

4. Осцилатор

4.1 Основни појмови

Мерење временских интервала заснива се на опште прихваћеној интуитивној представи да је протицање времена равномерно. Сагласно томе, мерење временског тока заснива се на мерењу параметара једноликих, односно равномерних кретања или неких других равномерних процеса. Свака справа или механизам који тако нешто омогућава или врши може бити часовник. Већ је истакнуто да је Холандски научник, математичар и физичар, Кристијан Хајгенс први предложио, теоријски образложио и практично применио бележење и пребројавање равномерног следа механичких осцилација у мерењу времена. Наиме, Хајгенс је открио да су слободне механичке осцилације приближно изохроне и да се одликују врло стабилним сопственим фреквенцама односно периодима осциловања. Механизам часовника броји механичке осцилације у њиховом равномерном следу, на погодан начин приказује ту информацију и тако мери протицање времена.

У механизам часовника уграђују се две врсте осцилатора: физичко клатно, и балансни точак (немирница) са спиралном опругом. Обе врсте осцилатора врше приближно изохроне осцилације под дејством силе релативности (гравитационе у случају физичког клатна и еластичне у случају балансног точака), као што је већ поменуто, одликују се стабилном, приближно константном, сопственом фреквенцом.

4.1.1 Физичко клатно

Масивно тело на кога делује сила гравитације, обртно услед своје тежине око непокретне хоризонталне осе која не пролази кроз његов центар маса зове се физичко клатно. Физичко клатно је осцилатор који се по правилу уграђује у стационарне механичке часовнике (зидне и велике, јавне – торањске) и приказано је на слици 21.

Диференцијална једначина која описује слободне непригушене осцилације физичког клатна у равни Oxy око осе Oz гласи:

$$J \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + mgl \sin \varphi = 0 \quad (4.1)$$

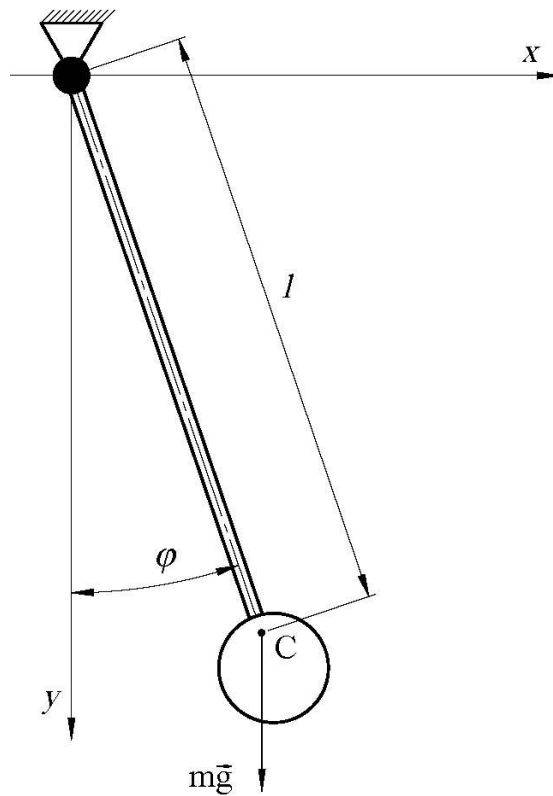
У којој је:

$\varphi = \varphi(t)$ – угао између вертикалне непокретне осе Ox и покретне осе клатна мерен у вертикалној равни Oxy ; генералисана координата која одређује положај клатна у функцији времена t .

J – моменат инерције клатна у односу на осу обртања клатна Oz

m – маса клатна

l – растојање центра масе од осе вешања клатна



Слика 21 Физичко клатно

У случају малих осцилација, $\sin \varphi \approx \varphi$, једначина 4.1 може да се напише у облику:

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \omega_0^2 \varphi = 0 \quad (4.2)$$

у којој је ω сопствена угаона фреквенца осцилација физичког клатна и дефинисана је следећим изразом:

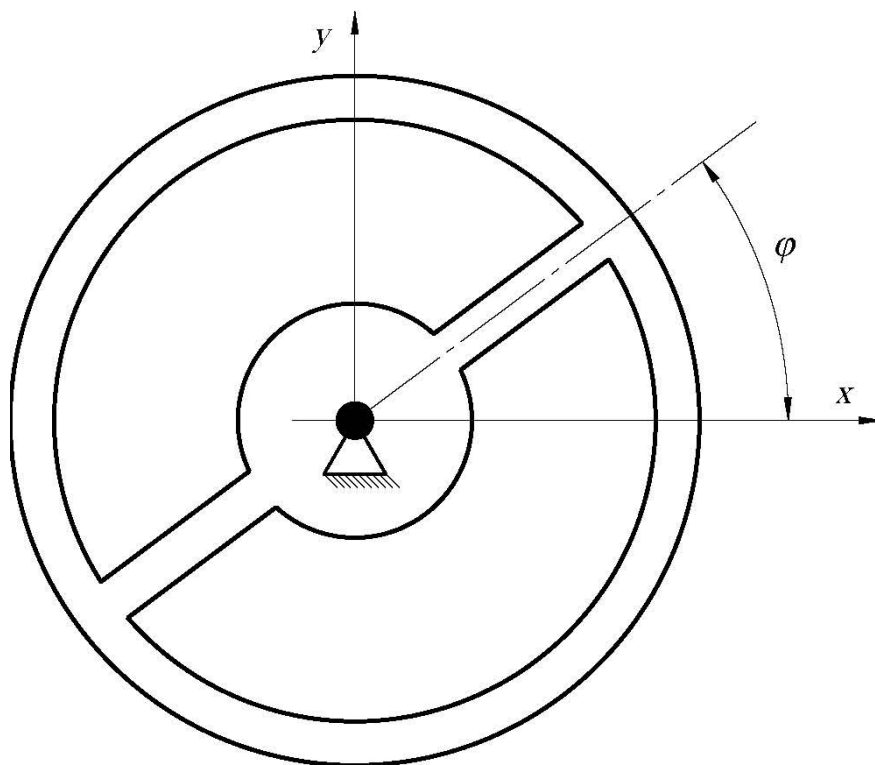
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgl}{J}} \quad (4.3)$$

Из једначине 4.3 непосредно следи формула за период малих осцилација физичког клатна:

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mgl}} \quad (4.4)$$

4.1.2 Балансни точак

Балансни точак је масивно тело, обртно око непокретне осе, која пролази кроз његов центар масе и врши осцилације под дејством еластичног реституционог момента силе. Балансни точак, заједно са спиралном опругом, уграђује се у механичке ручне и цепне часовнике, штоперице, хронометре, као и мале стационарне сатове и стоне будилнике. На слици 22 приказан је шематски приказ склопа балансног точка и спиралне опруге, заједно са запречницом, а на слици 23 њихова изведба у механизму ручног часовника фирме „Омега“.



Слика 22 Шематски приказ балансног точка



Слика 23 Балансна опруга код часовника фирме „Омега“

Диференцијална једначина која описује слободне непригушене осцилације балансног точка у равни Ox око осе Oz гласи:

$$J \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + k \sin \varphi = 0 \quad (4.5)$$

У којој је:

$\varphi = \varphi(t)$ – угао између непокретне осе Ox и покретне осе балансног точка Ox_1 , мерен у равни Ox ; генералисана координата која одређује положај балансног точка у функцији времена t .

J – моменат инерције клатна у односу на осу обртања балансног точка Oz

k – коефицијент крутости спиралне опруге.

Уз претпоставку да је коефицијент крутости спиралне опруге константан $k = const$, једначина 4.2 може се написати у облику:

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \omega_0^2 \varphi = 0 \quad (4.6)$$

у којој је ω сопствена угаона фреквенца осцилација балансног точка под утицајем еластичног реституционог момента силе и дефинисана је следећим изразом:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{J}} \quad (4.7)$$

Из једначине 4.4 непосредно следи формула за период изохроних осцилација балансног точка:

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{J}{k}} \quad (4.8)$$

Потребно је напоменути да је коефицијент крутости спиралне опруге k није константни параметар већ да је суштински функција од угла φ , $k = k(\varphi)$. Ипак, како се он мења тек незнатно са углом φ , може се у првој приближности усвојити да је константан $k \approx \text{const}$.

4.2 Нелинеарне осцилације физичког клатна

4.2.1 Циркуларна грешка

Као и у свим механичким системима и у раду осцилатора се морају се узети у обзир одређени утицаји на тачност рада осцилатора услед којих ход механичког часовника никада није савршено уједначен. Поред спољашњих утицаја на тачност осцилатора, постоји и сама нелинеарност у клатну која зависи од амплитуде - циркуларна грешка.

Диференцијална једначина која описује слободне непригушене осцилације физичког клатна у равни Oxy око осе Oz гласи:

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \sin \varphi = 0 \quad (4.9)$$

ω_0 је угаона фреквенца сопствених осцилација клатна, дата једначином 4.7. Реч је о нелинеарној диференцијалној једначини другог реда која се, у случају малих амплитуда осциловања, линеаризује апроксимацијом $\sin \varphi \approx \varphi$, односно, претвара у линеарну диференцијалну једначину другог реда са константним коефицијентима. Међутим, чињеница је да слободне осцилације физичког клатна нису хармонијске, да фреквенца и период тих осцилација нису константни већ да зависе од амплитуде осциловања односно, чињеница је да слободне осцилације физичког клатна нису изохроне. Као што је познато, у случају произвољно великих амплитуда, период осциловања физичког клатна израчунава се по формули:

$$T = 4K \left(\sin \frac{\theta_0}{2} \right) \sqrt{\frac{J}{mgl}} = 4K \left(\sin \frac{\theta_0}{2} \right) \frac{1}{\omega_0}, \quad (4.10)$$

У којој је θ_0 амплитуда осцилација, а функција $K(k)$ комплетни елиптички интеграл прве врсте дефинисан следећим изразом:

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta}} \quad (4.11)$$

Решење комплетног елиптичког интеграла прве врсте не може се изразити преко елементарних функција, већ се даје у форми бесконачног степеног реда:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mgl}} \cdot \left(1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\theta_0}{2} + \frac{9}{64} \sin^4 \frac{\theta_0}{2} + \frac{225}{2304} \sin^6 \frac{\theta_0}{2} + \dots \right) \quad (4.12)$$

Ако се у наведеном степеном реду уведе апроксимација

$$\sin \frac{\theta_0}{2} \approx \frac{\theta_0}{2} \Rightarrow \sin^2 \frac{\theta_0}{2} \approx \frac{\theta_0^2}{4} \quad (4.13)$$

Добија се следећи приближан израз за период осциловања физичког клатна

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mgl}} \cdot \left(1 + \frac{\theta_0^2}{16} \right) = \frac{2\pi}{\omega_0} \left(1 + \frac{\theta_0^2}{16} \right). \quad (4.14)$$

Релативна грешка хода часовника може да се дефинише следећом релацијом

$$H = \frac{T_0 - T}{T_0} = \frac{T_0 - (T_0 + \Delta T)}{T_0} = -\frac{\Delta T}{T_0}, \quad (4.15)$$

у којој је T_0 номинални, а T промењени односно, текићи период осциловања клатна.

Циркуларном грешком клатна назива се релативна грешка хода часовника кога индукује клатно са периодом T , амплитуде осциловања θ_0 , у односу на еквивалентно идеално изохроно клатно са периодом T_0 и дата је следећом релацијом:

$$H = \frac{T_0 - T}{T_0} = -\frac{\theta_0^2}{16} \quad (4.16)$$

Како су амплитуде осциловања клатна у савременим часовницима увек мање од 3° , члан $\theta_0^2/16$ за практичне потребе довољно тачно дефинише зависност периода осциловања клатна од амплитуде. Циркуларна грешка квантитативно описује чињеницу да осцилације физичког клатна нису изохроне односно, да промена амплитуде осциловања клатна мењају и његов период T , што посредно индукује грешку равномерности хода сатног механизма и грешку мерења времена.

4.2.2 Одређивање циркуларне грешке пертурбационом методом двоструке размене времена

Циркуларна грешка клатна може да се изведе и коришћењем пертурбационог рачуна. Ако се у диференцијалној једначини осцилација физичког

клатна (4.9) функција $\sin \varphi$ апроксимира са прва два члана њеног развоја у Маклоренов степени ред:

$$\sin \varphi \approx \varphi - \frac{\varphi^3}{6}, \quad (4.17)$$

диференцијална једначина (4.9) постаје

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi - \frac{\omega_0^2}{6} \varphi^3 = 0 \quad (4.18)$$

То је нелинеарна диференцијална једначина другог реда. Она ће бити решена пертурбационом методом двоструке скале времена, чиме ће бити одређен и период осцилација односно, циркуларна грешка клатна. Сагласно поменутој методи, чији су принципи сажето објашњена у поглављу 2, независно променљива t замењује се двама променљивим t_1 и t_2 ,

$$t_1 = t; t_2 = \varepsilon t; \varepsilon \ll 1. \quad (4.19)$$

Приближно решење $\varphi(t_1, t_2, \varepsilon)$ диференцијалне једначине (4.18) тражи се у облику збира иницијалног или нултог решења $\varphi_0(t_1, t_2)$ и корекције првог реда $\varepsilon \varphi_1(t_1, t_2)$, као што је приказано изразом:

$$\varphi(t_1, t_2, \xi) \approx \varphi_0(t_1, t_2) + \varepsilon \varphi_1(t_1, t_2) = \varphi_0 + \varepsilon \varphi_1. \quad (4.20)$$

Почетни услови $\varphi(0) = \Phi_0, \dot{\varphi}(0) = 0$ формулисани су за обе функције $\varphi_0(t_1, t_2)$ и $\varphi_1(t_1, t_2)$, изразима:

$$\varphi_0(0, 0) = \Phi_0, \dot{\varphi}_0(0, 0) = 0, \varphi_1(0, 0) = 0, \dot{\varphi}_1(0, 0) = 0 \quad (4.21)$$

У складу са изразима (4.21), први и други извод угаоне координате φ по времену t дат је следећим формулама, респективно:

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial \varphi}{\partial t_1} \cdot \frac{\partial t_1}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial t_2} \cdot \frac{\partial t_2}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial t_1} + \varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial t_2}, \quad (4.22)$$

$$\ddot{\varphi} = \frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial t_1} + \varepsilon \frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial t_2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t_1^2} + 2\varepsilon \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t_1 \partial t_2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t_2^2}. \quad (4.23)$$

После занемаривања члана уз ε^2 као мале величине вишег реда, Израз (4.22) постаје

$$\ddot{\varphi} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t_1^2} + 2\varepsilon \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t_1 \partial t_2}. \quad (4.24)$$

Заменом израза (4.20) у формулу (4.24) добија се релација

$$\ddot{\varphi} = \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial t_1^2} + \varepsilon \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t_1^2} + 2\varepsilon \left(\frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial t_1 \partial t_2} + \varepsilon \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t_1 \partial t_2} \right) \quad (4.25)$$

која, после занемаривања члана уз ε^2 , постаје

$$\ddot{\varphi} = \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial t_1^2} + \varepsilon \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t_1^2} + 2\varepsilon \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial t_1 \partial t_2}. \quad (4.26)$$

Ако се израз (4.20) замени у другом члану Маклореновог развоја функције $\sin \varphi$ добија се

$$\frac{1}{6} \varphi^3 = \frac{1}{6} (\varphi_0 + \varepsilon \varphi_1)^3 = \frac{1}{6} (\varphi_0^3 + 3\varphi_0^2 \varepsilon \varphi_1 + 3\varphi_0 \varepsilon^2 \varphi_1^2 + \varepsilon^3 \varphi_1^3). \quad (4.27)$$

Ако се у другом члану Маклореновог развоја (4.27) функције $\sin \varphi$ занемаре чланови који садрже ε^2 и ε^3 , функције $\sin \varphi$ постаје:

$$\frac{1}{6} \varphi^3 = \frac{1}{6} \varphi_0^3 + \frac{1}{2} \varphi_0^2 \varepsilon \varphi_1. \quad (4.28)$$

Заменом изрази (4.20), (4.26) и (4.28) у једначину (4.18) настаје следећа диференцијална једначина:

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi - \frac{\omega_0^2}{6} \varphi^3 = \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial t_1^2} + \omega_0^2 \varphi_0 + \varepsilon \left(\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t_1^2} + 2 \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial t_1 \partial t_2} + \omega_0^2 \varphi_1 - \frac{\omega_0^2}{6\varepsilon} \varphi_0^3 - \frac{\omega_0^2}{2} \varphi_0^2 \varphi_1 \right) = 0 \quad (4.29)$$

Да би лева страна једначине (4.29) била једнака нули, а сагласно чињеници да је фактор пригушења ε мали број али различит од нуле $\varepsilon \neq 0$, потребно је да су једначине:

$$\frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial t_1^2} + \omega_0^2 \varphi_0 = 0, \left(\varphi_0 = \Phi_0, \frac{\partial \varphi_0}{\partial t_1} = 0, \text{ за } t_1 = t_2 = 0 \right) \quad (4.30)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t_1^2} + \omega_0^2 \varphi_1 = -2 \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial t_1 \partial t_2} + \frac{\omega_0^2}{6\varepsilon} \varphi_0^3 - \frac{\omega_0^2}{2} \varphi_0^2 \varphi_1, \quad (4.31)$$

$$\left(\varphi_1 = 0, \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_1} = -\frac{\partial \varphi_0}{\partial t_2}, \text{ за } t_1 = t_2 = 0 \right)$$

уз дате почетне услове, симултано задовољене.

Решење једначине (4.30):

$$\varphi_0 = \Phi \sin(\omega_0 t_1 + \gamma) = \Phi \sin \psi, \quad \Phi = \text{const}, \gamma = \text{const} \quad (4.32)$$

је хармонијска функција фазе осциловања ψ .

Да би се решила диференцијална једначина (3), уводи се претпоставка (“Ansatz”) да ни амплитуда ни фазна разлика нису константне величине, већ да представљају функције од променљиве t_2 ($\psi = \psi(t_1, t_2)$, $\Phi = \Phi(t_2)$):

$$\varphi_0 = \Phi(t_2) \sin(\omega_0 t_1 + \gamma(t_2)) = \Phi \sin \psi. \quad (4.33)$$

Сагласно изразу (4.33) мешовити парцијални извод функције $\varphi_0(t_1, t_2)$ по променљивим t_1 и t_2 на десној страни једначине (4.31) гласи:

$$\frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial t_1 \partial t_2} = \frac{\partial \Phi}{\partial t_2} \omega_0 \cos \psi - \Phi \omega_0 \frac{\partial \gamma}{\partial t_2} \sin \psi. \quad (4.34)$$

Како се на десној страни једначине (4.31) појављују чланови φ_0^3 и φ_0^2 , употребом адитивних формула

$$\sin^3 \psi = \frac{3}{4} \sin \psi - \frac{1}{4} \sin 3\psi; \quad \sin^2 \psi = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\psi, \quad (4.35)$$

израз на десној страни једнакости једначине (4.31) постаје:

$$\begin{aligned} -2 \frac{\partial \Phi}{\partial t_2} \omega_0 \cos \psi + 2 \Phi \omega_0 \frac{\partial \gamma}{\partial t_2} \sin \psi + \frac{\omega_0^2}{6\varepsilon} \Phi^3 \left(\frac{3}{4} \sin \psi - \frac{1}{4} \sin 3\psi \right) \\ + \frac{\omega_0^2}{2} \varphi_1 \Phi^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\psi \right) \end{aligned} \quad (4.36)$$

У изразу (4.36) сви чланови уз функције $\sin \psi$ и $\cos \psi$ представљају чланове резонантне принуде, услед којих се у решење једначине (4.31) појављују секуларни чланови.

$$-2 \frac{\partial \Phi}{\partial t_2} \omega_0 \cos \psi + \left(2 \Phi \omega_0 \frac{\partial \gamma}{\partial t_2} + \frac{\omega_0^2}{8\varepsilon} \Phi^3 \right) \sin \psi \quad (4.37)$$

Сагласно пертурбационој методи двоструке скале времена, чији су принципи сажето већ објашњена у поглављу 2, неопходно је да се анулирањем чланова резонантне принуде изврши елиминација секуларних чланова из решења. Анулирање члана резонантне принуде уз функцију $\cos \psi$ извршено је изразом:

$$-2 \frac{\partial \Phi}{\partial t_2} \omega_0 = 0, \quad (4.38)$$

одакле непосредно следи да је амплитуда осциловања константна $\Phi = \Phi_0 = \text{const.}$

Анулирање члана резонантне принуде уз функцију $\sin \psi$ извршено је изразом:

$$2 \Phi \omega_0 \frac{\partial \gamma}{\partial t_2} + \frac{\omega_0^2}{8\varepsilon} \Phi^3 = 0, \quad (4.39)$$

који представља диференцијалну једначину првог реда

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t_2} = -\frac{\omega_0}{16\varepsilon} \Phi^2. \quad (4.40)$$

Решење диференцијалне једначине (4.40) гласи:

$$\gamma = \frac{\omega_0}{16\varepsilon} \Phi^2 t_2 + \gamma_0, \quad (4.41)$$

у којој је γ_0 интеграциона константа (угао фазне разлике) која се одређује из почетних услова $\gamma_0 = \pi/2$.

Преласком на промелјиву t изразом $t_2 = \varepsilon t$ и сагласно решењу диференцијалне једначине (4.38), решење диференцијалне једначине (4.40) постаје:

$$\gamma = -\frac{\omega_0}{16} \Phi_0^2 t + \frac{\pi}{2} \quad (4.42)$$

Коначно, решење диференцијалне једначине (4.9) која описује слободне непригушене осцилације клатна гласи:

$$\varphi(t) = \Phi_0 \cos \omega_0 \left(1 - \frac{\Phi_0^2}{16}\right) t \quad (4.43)$$

Период осциловања представљен је изразом:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0 \left(1 - \frac{\Phi_0^2}{16}\right)} \quad (4.44)$$

који, множењем имениоца и бројоца са $\left(1 + \frac{\Phi_0^2}{16}\right)$ и занемаривањем члана Φ_0^4 као мале величине вишег реда постаје израз:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} \left(1 + \frac{\Phi_0^2}{16}\right). \quad (4.45)$$

Исто решење може се добити применом пертурбационе методе двоструке скале времена, ако се диференцијална једначина (4.9) претходно трансформише у тзв. „Дафинг“ (Georg Duffing 1861-1944) једначину [62]. Као и у претходно спроведеној процедури, у диференцијалној једначини осцилација физичког клатна (4.9), функција $\sin \varphi$ апроксимира се са прва два члана њеног развоја у Маклоренов степени ред:

$$\sin \varphi \approx \varphi - \frac{\varphi^3}{6}. \quad (4.46)$$

После ове апроксимације диференцијална једначина (4.9) постаје:

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi - \omega_0^2 \frac{\varphi^3}{6} = 0 \quad (4.47)$$

Како су амплитуде осциловања клатна мале, члан φ^3 може се третирати као пертурбација односно, мали поремећај хармонијских осцилација. Да би се то експлицитно нагласило, уводи се погодна смена координате φ :

$$\varphi = \theta \sqrt{\varepsilon}, \quad \varepsilon \ll 1, \quad (4.48)$$

која диференцијалну једначину (4.9) претвара у нелинеарну тзв. Дафинг диференцијалну једначину:

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta - \varepsilon \omega_0^2 \frac{\theta^3}{6} = 0 \quad (4.49)$$

У њој се, као што је то већ било поменуто, експлицитно види да кубни члан θ^3 представља мали поремећај диференцијалне једначине слободних хармонијских осцилација. Сада се на Дафинг диференцијалну једначину непосредно примењује пертурбациони поступак двоструке размере времена. Независно променљива t замењује се двама променљивим t_1 и t_2 ,

$$t_1 = t; t_2 = \varepsilon t, \quad (4.50)$$

А Приближно решење $\theta(t_1, t_2, \varepsilon)$ диференцијалне једначине (4.9) тражи се у облику збира иницијалног или нултог решења $\theta_0(t_1, t_2)$ и корекције првог реда $\varepsilon \theta_1(t_1, t_2)$, као што је приказано изразом:

$$\theta(t_1, t_2, \varepsilon) \approx \theta_0(t_1, t_2) + \varepsilon \theta_1(t_1, t_2) = \theta_0 + \varepsilon \theta_1. \quad (4.51)$$

Почетни услови $\theta(0) = A_0, \dot{\theta}(0) = 0$ формулисани су за обе функције $\theta_0(t_1, t_2)$ и $\theta_1(t_1, t_2)$, изразима:

$$\theta_0(0, 0) = A_0, \dot{\theta}_0(0, 0) = 0, \theta_1(0, 0) = 0, \dot{\theta}_1(0, 0) = 0. \quad (4.52)$$

У складу са изразима (4.52), први и други извод угаоне координате φ по времену t дат је следећим формулама, респективно:

$$\dot{\theta} = \frac{\partial \theta}{\partial t_1} + \varepsilon \frac{\partial \theta}{\partial t_2} \quad (4.53)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial t_1^2} + 2\varepsilon \frac{\partial^2 \theta}{\partial t_1 \partial t_2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial t_2^2}. \quad (4.54)$$

После занемаривања члана уз ε^2 као мале величине вишег реда, израз (4.54) постаје

$$\ddot{\theta} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial t_1^2} + 2\varepsilon \frac{\partial^2 \theta}{\partial t_1 \partial t_2} \quad (4.55)$$

Заменом израза (4.51) у (4.55), и занемаривања члана уз ε^2 као мале величине вишег реда, добија се следећа релација:

$$\ddot{\theta} = \frac{\partial^2 \theta_0}{\partial t_1^2} + \varepsilon \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial t_2^2} + 2\varepsilon \frac{\partial^2 \theta_0}{\partial t_1 \partial t_2}. \quad (4.56)$$

Ако се израз (4.51) замени у другом члану Маклореновог развоја (4.46) функције $\sin \varphi$ добија се:

$$\frac{1}{6}\theta^3 = \frac{1}{6}(\theta_0 + \varepsilon\theta_1)^3 = \frac{1}{6}(\theta_0^3 + 3\theta_0^2\varepsilon\theta_1 + 3\theta_0\varepsilon^2\theta_1 + \varepsilon^3\theta_1^3). \quad (4.57)$$

Ако се у другом члану Маклореновог развоја (4.57) функције $\sin \varphi$ занемаре чланови који садрже ε^2 и ε^3 , функције $\sin \varphi$ постаје:

$$\frac{1}{6}\theta^3 = \frac{1}{6}\theta_0^3 + \frac{1}{2}\theta_0^2\varepsilon\theta_1. \quad (4.58)$$

Заменом израза (4.58), (4.51) и (4.56) у диференцијалну једначину (4.9) и занемаривањем члана који садржи ε^2 , настаје следећа диференцијална једначина:

$$\frac{\partial^2\theta_0}{\partial t_1^2} + \omega_0^2\theta_0 + \varepsilon\left(\frac{\partial^2\theta_1}{\partial t_2^2} + 2\frac{\partial^2\theta_0}{\partial t_1\partial t_2} + \omega_0^2\theta_1 - \omega_0^2\frac{\theta_0^3}{6}\right) = 0. \quad (4.59)$$

Да би лева страна једначине (4.59) била једнака нули, а сагласно чињеници да је фактор пригушења ε мали број али различит од нуле $\varepsilon \neq 0$, потребно је да су једначине,

$$\frac{\partial^2\theta_0}{\partial t_1^2} + \omega_0^2\theta_0 = 0, \left(\theta_0 = A_0, \frac{\partial\theta_0}{\partial t_1} = 0, \text{ за } t_1 = t_2 = 0\right) \quad (4.60)$$

$$\frac{\partial^2\theta_1}{\partial t_1^2} + \omega_0^2\theta_1 = -2\frac{\partial^2\theta_0}{\partial t_1\partial t_2} + \omega_0^2\frac{\theta_0^3}{6}, \quad (4.61)$$

$$\left(\theta_1 = 0, \frac{\partial\theta_1}{\partial t_1} = -\frac{\partial\theta_0}{\partial t_2}, \text{ за } t_1 = t_2 = 0\right).$$

за дате почетне услове, симултано задовољене. Решење једначине (4.60):

$$\theta_0 = A(t_2) \sin(\omega_0 t_1 + \gamma(t_2)) = A \sin \psi \quad (4.62)$$

хармонијска је функција фазе осциловања ψ . Да би се решила диференцијална једначина (3), уводи се претпоставка (“Ansatz”) да ни амплитуда ни фазна разлика нису константне величине, већ да представљају функције од променљиве t_2 :

$$A = A(t_2), \psi = \psi(t_1, t_2). \quad (4.63)$$

Сагласно изразу (4.62), мешовити парцијални извод функције $\theta_0(t_1, t_2)$ по променљивим t_1 и t_2 на десној страни једначине (4.61) гласи:

$$\frac{\partial^2\theta_0}{\partial t_1\partial t_2} = \frac{\partial A}{\partial t_2} \omega_0 \cos \psi - A \omega_0 \frac{\partial \gamma}{\partial t_2} \sin \psi, \quad (4.64)$$

Како се на десној страни једначине (4.61) појављују чланови θ_0^3 , сагласно изразу (4.62), употребом адиционе формуле,

$$\theta_0^3 = A^3 \frac{3}{4} \sin \psi - A^3 \frac{1}{4} \sin 3\psi \quad (4.65)$$

израз на десној страни једнакости једначине (4.61) постаје:

$$-2 \frac{\partial A}{\partial t_2} \omega_0 \cos \psi + 2A\omega_0 \frac{\partial \gamma}{\partial t_2} \sin \psi + \frac{A^3}{8} \omega_0^2 \sin \psi - \frac{A^3}{24} \omega_0^2 \sin 3\psi \quad (4.66)$$

У изразу (4.65) сви чланови уз функције $\sin \psi$ и $\cos \psi$ представљају чланове резонантне принуде, услед којих се у решењу једначине (4.61) појављују секуларни чланови.

Сагласно пертурбационој методи двоструке скале времена, чији су принципи сажето већ објашњени у поглављу 2, неопходно је да се анулирањем чланова резонантне принуде изврши елиминација секуларних чланова из решења.

Анулирање члана резонантне принуде уз функцију $\cos \psi$ извршено је изразом:

$$-2 \frac{\partial A}{\partial t_2} \omega_0 = 0, \quad (4.67)$$

одакле непосредно следи да је амплитуда осциловања константна $A = A_0 = \text{const.}$

Анулирање члана резонантне принуде уз функцију $\sin \psi$ извршено је изразом:

$$2A\omega_0 \frac{\partial \gamma}{\partial t_2} = -\frac{A^3}{8} \omega_0^2, \quad (4.68)$$

који представља диференцијалну једначину првог реда

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t_2} = -\frac{A^2}{16} \omega_0. \quad (4.69)$$

Решење диференцијалне једначине (4.69) гласи:

$$\gamma = \frac{\omega_0}{16} A^2 t_2 + \gamma_0, \quad (4.70)$$

у којој је γ_0 интеграциона константа (угао фазне разлике) која се одређује из почетних услова $\gamma_0 = \pi/2$. Преласком на промелјиву t изразом $t_2 = \varepsilon t$ и сагласно решењу диференцијалне једначине (4.67), решење диференцијалне једначине (4.69) постаје:

$$\gamma = -\frac{\omega_0}{16} A_0^2 \varepsilon t + \frac{\pi}{2} \quad (4.71)$$

Како је $\varphi = \sqrt{\varepsilon} \theta$, амплитуда A_0 функције $\varphi(t)$ је $\sqrt{\varepsilon}$ пута већа од амплитуде B_0 ,

$B_0 = \sqrt{\varepsilon} A_0$, непосредно следи

$$\gamma = -\frac{A_0^2}{16} \omega_0 \varepsilon t + \frac{\pi}{2} = -\frac{B_0^2}{16\varepsilon} \omega_0 \varepsilon t + \frac{\pi}{2} = -\frac{B_0^2}{16} \omega_0 t + \frac{\pi}{2}. \quad (4.72)$$

Сагласно наведеном, решење диференцијалне једначине (4.9) која описује слободне непригушене осцилације клатна гласи:

$$\varphi(t) = B_0 \cos \omega_0 \left(1 - \frac{B_0^2}{16}\right) t \quad (4.73)$$

Период осциловања представљен је изразом

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0 \left(1 - \frac{B_0^2}{16}\right)} \quad (4.74)$$

који, множењем имениоца и бројиоца са $\left(1 + \frac{B_0^2}{16}\right)$ и занемаривањем члана B_0^4 као мале величине вишег реда постаје израз:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} \left(1 + \frac{B_0^2}{16}\right). \quad (4.75)$$

Добијена релација, која садржи члан циркуларне грешке клатна, формално је идентична формули (4.9).

Поред наведене циркуларне грешке, постоје и грешке које се могу сврстати као грешке које су настале под утицајем спољног дејства на осцилатор. У овом делу биће приказани најзначајнији спољашњи утицаји на осцилатор: утицај температуре (топлотне дилатације), отпора, густине и аеростатичког потиска ваздуха. Сви ови утицаји биће приказани на примеру клатна у циљу приказа њихових промена.

4.3 Спољашњи утицаји на осцилатор

4.3.1 Топлотне дилатације

Промене температуре на промену фреквенце осциловања клатна сматра се најзначајнијим, односно највише штетном [63]. Приликом промене температуре долази до ширења и скупљања материјала клатна што према формули 4.4 утиче на период осциловања. Дужина клатна мора бити тачно дефинисана како би се одржала прецизност у опсегу од 1 секунде на 100 дана. Тражена прецизност од 1сек/100 дана је установљена 1700-их код првих механичких часовника и тада је дефинисано да се дужина клатна не сме променити за више од 230 nm [64].

Сваки материјал, па и материјал од кога је сачињено клатно, мења своје димензије са променом температуре. По том принципу, клатно које се налази у топлој средини се креће спорије од клатна у хладнијој средини. Формула за линеарне температурске дилатације је:

$$l = l_0 \cdot (1 + \alpha \cdot (t - t_0)) = l_0 \cdot (1 + \alpha \cdot \theta) \quad (4.76)$$

где су:

- α - линеарни коефицијент температурне (термичке) дилатације
- l – дужина клатна на температури t
- l_0 – дужина клатна на температури t_0

Коефицијент α дефинише релативну промену дужине по јединици у зависности од температуре. За неке материјале вредности коефицијента α су приказане у табели 1

Табела 1 Линеарни коефицијенти температурске дилатације за неке материјале

Материјал	$\alpha \cdot 10^{-6} \text{ [K}^{-1}\text{]}$	Материјал	$\alpha \cdot 10^{-6} \text{ [K}^{-1}\text{]}$
Инвар	1,2	Месинг	18-19
Јела	4	Олово	28
Челик	12	Цинк	39,7

Период осциловања физичког клатна, ако се занемари циркуларна грешка, може се израчунати по познатим формулама:

$$T \approx 2\pi \sqrt{\frac{J}{g \cdot S}} = 2\pi \sqrt{\frac{\sum m_i r_i^2}{g \cdot \sum m_i r_i}} = 2\pi \sqrt{\frac{l_r}{g}} \quad (4.77)$$

Где су J и S - квадратни и статички моменат инерције а g - убрзање земљине теже. Из формула 4.77 се јасно може видети да је:

$$J = \sum m_i r_i^2 \quad S = \sum m_i r_i \quad l_r = \frac{\sum m_i r_i^2}{\sum m_i r_i} \quad (4.78)$$

Где су m_i и r_i - масе и координате (у односу на тачку вешања) тежишта свих делова клатна а l_r је тзв. редукована дужина физичког клатна и, по дефиницији, представља ону дужину математичког клатна које има период осциловања као и дато физичко клатно. Статички момент S одређује координату тежишта а квадратни моменат J описује геометрију распореда маса око тачке вешања и тежишта целокупног клатна

Пошто је свака линијска координата у горе наведеним формулама подложна температурним дилатацијама, може се закључити да се и период сопствених осцилација физичког клатна мења са променом температуре. Тако, на пример, клатно са периодом осциловања од $T=2$ секунде, чији је носач израђен од обичног нискоугљеничног челика, губи око 0,5 секунди дневно по 1 степену целзијуса пораста температуре. Ако је температура порасла за 10 степени, часовник са таквим клатном, за 7 дана непрекидног рада, касни око 36 секунди. Под истим

температурним условима, часовник чије је клатно геометријски истоветно али направљено од дрвета беле јеле касниће 12 секунди за 7 дана. Данас се најчешће не користе клатна која су направљена од једног материјала већ комбинација материјала која омогућава компензацију промене дужине клатна при температурним дилатацијама. Иако је већ речено да су клатна од дрвета мање подложна утицају температуре, дрвена клатна имају проблем са влагом [65] тако да се захтева велика заштита дрвета од влаге пре употребе у клатну.

4.3.2 Отпор ваздуха

На физичко клатно часовника, изузев реституционе гравитационе силе, делује и сила отпора ваздуха, услед чега клатно губи енергију. Тај енергетски губитак надокнађује запречно-импулсни механизам, који својим импулсима преноси погонску енергију часовника на клатно и тако обезбеђује континуитет његових осцилација. У стационарном режиму осциловања, остварен је енергетски баланс осцилатора: у току сваке периоде осциловања, износ енергије дисипације једнак је износу енергије које клатно добија од запречно импулсног механизма.. Отпор ваздуха начелно се може разложити на две компоненте: једна је вискозно трење које је сразмерно брзини ($\sim v$), а друга отпор облика (отпор притиска или динамички отпор) који је сразмеран квадрату брзине ($\sim v^2$). Обе компоненте су усмерене супротно од смера брзине, тако да се укупан вектор отпора ваздуха може приказати следећим изразом:

$$\vec{R}(v) = -(bv + cv^2) \cdot \frac{\vec{v}}{v} \quad (4.79)$$

Коефицијенти b и c нису константе већ зависе од параметара који описују стање гаса односно, ваздуха (густина, притисак, температура и влажност) у коме клатно осцилује. Осим тога, параметар b је функција и вискозности ваздуха, а c зависи и од геометријских карактеристика тела на кога отпор делује. Као што је познато, који од ове две компоненте отпора има доминантан утицај на дисипацију енергије зависи од односа инерцијалних и вискозних сила у флуиду и дефинисан је Рејнолдсовим бројем Re . За мале вредности Рејнолдсовог броја $Re < 10^3$, преовлађује вискозно трење, док за његове велике вредности $Re > 10^5$ доминантан утицај има отпор притиска. Како се угаона брзина клатна мења по приближно хармонијском закону, па стога континуално периодично варира од нуле до

максималне вредности, немогуће је поуздано одредити која компонента отпора ваздуха преовлађује током његовог кретања. Ипак, оправдано је усвојити претпоставку да се најзначајнији удео дисипације енергије управо догађа на тегу клатна где је и Рејнолдсов број Re највећи. У складу са таквом претпоставком, у овом поглављу биће извршен прелиминарни прорачун утицаја силе отпора притиска односно, облика која је сразмерна квадрату брзине:

$$R = cv^2 = \frac{1}{2} C_x \rho v^2 S \quad (4.80)$$

У наведеној формули:

- C_x је коефицијент отпора,
- ρ густина ваздуха,
- v брзина тежишта теге клатна и
- S површина карактеристичног попречног пресека теге клатна.

Да ли је наведени утицај заиста доминантан и у којој мери он ($\sim v^2$) преовлађује у односу на утицај вискозног трења ($\sim v$), то могу поуздано да открију једино резултати експеримента, или евентуално компјутерских симулација. Дакле, прорачуни који следе односе се на дисипацију енергије клатна под утицајем динамичког отпора који је сразмеран квадрату брзине тежишта теге клатна. У складу са овом претпоставком, губитак енергије клатна у јединици времена (губитак снаге) услед отпора ваздуха клатна био би одређен следећом формулом:

$$P = R \cdot v = \frac{1}{2} C_x \rho |v^3| S. \quad (4.81)$$

Ако се угаона координата $\varphi(t)$ која одређује положај клатна у функцији времена мења по закону:

$$\varphi(t) = \Phi_0 \cos \omega t, \quad (4.82)$$

Онда се угаона брзина $\dot{\varphi}(t)$ мења по закону:

$$\dot{\varphi}(t) = -\omega \Phi_0 \sin \omega t. \quad (4.83)$$

у релацијама 4.82 и 4.83:

- ω је угаона фреквенца $\omega = 2\pi/T$, а
- Φ_0 амплитуда осцилација клатна.

Сагласно томе, дисипација снаге (енергије у јединици времена) рачунала би се по следећој формули:

$$P = \frac{1}{2} C_x \rho l^3 \Phi_0^3 \omega^3 |\cos^3 \omega t| S, \quad (4.84)$$

у којој је l дужина од тачке вешања до тежишта тег клатна.

Средња вредност дисипације снаге клатна услед динамичког отпора ваздуха дефинисана је следећим изразом:

$$P_{SR} = \frac{1}{2} C_x \rho l^3 \Phi_0^3 \omega^3 S \frac{1}{T} \int_0^T |\cos^3 \omega t| dt. \quad (4.85)$$

Како је

$$\frac{1}{T} \int_0^T |\cos^3 \omega t| dt = \frac{1}{T} \int_0^T \left| \cos^3 \frac{2\pi}{T} t \right| dt = \frac{4}{3\pi}, \quad (4.86)$$

средња вредност дисипације снаге износи:

$$P_{SR} = \frac{2}{3\pi} C_x \rho l^3 \Phi_0^3 \omega^3 S = K \rho l^3 \Phi_0^3 \omega^3, K = const. \quad (4.87)$$

Као што је то било већ наглашено, у стационарном стању осциловања клатна, енергетски губитак услед динамичког отпора ваздуха једнак је енергији коју запречно импулсни механизам предаје клатну током сваке периоде осциловања:

$$P_{SR} T = P_{SR} \frac{2\pi}{\omega} = \frac{4}{3} C_x \rho l^3 \Phi_0^3 \omega^2 S = const. \quad (4.88)$$

Из ове чињенице происходи да је, у стационарном режиму осциловања клатна, просечна енергија клатна константна. Међутим, ако из било којих разлога дође до промене густине ваздуха ρ , растојања тежишта од тачке вешања l , амплитуде Φ_0 или угаоне фреквенце ω , клатно ће ући у нестационарни режим осциловања, са врло сложеном транзицијом у нови стационарни режим, која ће се одликовати неком новом просечном енергијом клатна.

4.3.3 Густина ваздуха

Промена густине ваздуха, настала због промене притиска, влажности и/или промене температуре ваздуха, а сагласно формули 4.88, имаће непосредан утицај на укупну енергију клатна које осцилује, остале енергетске параметре, па тако и на ход часовника. Она је, у суштини, проузрокована променом динамичког отпора који делује на тег клатна. Ако је $l = const$ (нема топлотних дилатација), из формуле 4.88, непосредно следи да је :

$$\rho \Phi_0^3 \omega^2 = const. \quad (4.89)$$

Како је

$$\omega^2 = \omega_0^2 \left(1 - \frac{\Phi_0^2}{8} \right), \quad (4.90)$$

а сагласно изразу 4.89, следи релација:

$$\rho \Phi_0^3 \left(1 - \frac{\Phi_0^2}{8} \right) = \text{const.} \quad (4.91)$$

Први извод релације 4.91 по густини ваздуха ρ дата је изразом:

$$\Phi_0^3 + 3\rho \Phi_0^2 \frac{d\Phi_0}{d\rho} - \frac{\Phi_0^5}{8} - 5\rho \frac{\Phi_0^4}{8} \frac{d\Phi_0}{d\rho} = 0, \quad (4.92)$$

Из које произилази следећа формула:

$$\frac{d\Phi_0}{d\rho} = -\frac{\Phi_0}{\rho} \cdot \frac{8 - \Phi_0^2}{24 - 5\Phi_0^2}. \quad (4.93)$$

Формула 4.93 је први извод амплитуде осциловања клатна по густини ваздуха и представља меру брзине промене амплитуде Φ_0 по јединици густине ваздуха ρ . Очигледно, промена густине ваздуха има непосредан утицај на промену амплитуде осциловања клатна. А сагласно већ детаљно објашњеном феномену да физичко клатно није изохроно већ да његов период осциловања зависи од амплитуде, производи да ће промена густине ваздуха мењати и ход часовника. Да би се овај утицај анализирао потребно да се најпре одреди први извод релативне грешка хода часовника, дефинисана изразом (4.16), по амплитуди осциловања клатна:

$$\frac{dH}{d\Phi_0} = -\frac{\Phi_0}{8}. \quad (4.94)$$

Сада се први извод релативне грешка хода часовника по густини ваздуха може одредити из следеће релације:

$$\frac{dH}{d\rho} = \frac{dH}{d\Phi_0} \cdot \frac{d\Phi_0}{d\rho}. \quad (4.95)$$

Заменом израза (4.93) и (4.94) у (4.95) добија се формула:

$$\frac{dH}{d\rho} = \frac{\Phi_0^2}{8\rho} \cdot \frac{8 - \Phi_0^2}{24 - 5\Phi_0^2} \quad (4.96)$$

која представља меру брзине промене хода часовника односно, тенденцију релативне грешке хода часовника H по јединици густине ваздуха ρ , настале услед промене динамичког отпора ваздуха који делује на тег клатна. Дакле, промена густине ваздуха мења силу отпора која делује на клатно, па тако мења и износ дисипацију енергије клатна, што за последицу има промену амплитуде његових

осцилација. Како период осциловања клатна зависи од амплитуде осциловања преко циркуларне грешке, промена амплитуде доводи до промене периода осциловања клатна односно, хода часовника.

4.3.4 Аеростатички потисак

На клатно часовника које осцилује у ваздуху, изузев силе гравитације и отпора ваздуха, делује и аеростатички потисак. Сагласно Архимедовом закону, аеростатички потисак умањује тежину клатна за тежину клатном истиснутог ваздуха. На тај начин аеростатички потисак умањује реституциону силу, чији је моменат у односу на тачку вешања клатна и узрок његовог осцилаторног кретања. Смањење тежине клатна, услед аеростатичког потиска ваздуха, рачуна се према следећем изразу:

$$G - P = m_K g - m g = m_K g \left(1 - \frac{m}{m_K}\right) = m_K g \left(1 - \frac{\rho}{\rho_K}\right), \quad (4.97)$$

у коме је:

- G тежина клатна,
- P аеростатички потисак,
- m_K маса клатна
- m маса клатном истиснутог ваздуха,
- ρ_K густина материјала клатна,
- ρ густина ваздуха.

Диференцијална једначина која описује слободне непригушене осцилације физичког клатна у равни Ox око осе Oz на кога делује и аеростатички потисак ваздуха гласи:

$$J \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + m_K g l \left(1 - \frac{\rho}{\rho_K}\right) \sin \varphi = 0 \quad (4.98)$$

У којој је

- $\varphi = \varphi(t)$ – угао између вертикалне непокретне осе Ox и покретне осе клатна мерен у вертикалној равни Ox ; генералисана координата која одређује положај клатна у функцији времена t .
- J – моменат инерције клатна у односу на осу обртања клатна Oz
- l – растојање центра масе од осе вешања клатна.

У случају осцилација са малим угловима отклоне клатна, $\sin \varphi \approx \varphi$, период осциловања физичког клатна на кога делује аеростатички потисак одређен је формулом:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{m_K g l \left(1 - \frac{\rho}{\rho_K}\right)}} = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{\rho}{\rho_K}}}, \quad (4.99)$$

у којој је T_0

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{J}{m_K g l}}. \quad (4.100)$$

период осциловања еквивалентног клатна које осцилује у вакууму тј. Номинални период осциловања. Из формуле следи да је период осциловања клатна T у ваздуху увек дужи у односу на период његовог осциловања T_0 у вакууму. Међутим, ако би густина ваздуха била константна, наведена чињеница не би имала утицај на ход часовника. Проблем промене хода сатног механизма настаје управо због промене густине ваздуха, која мењајући аеростатички потисак, мења реституциону силу, па тако и дужину периода осциловања клатна. Овај утицај је предмет наредне анализе.

Из чињенице да је однос густине ваздуха према густини материјала клатна мала величина, много мања од јединице, $\rho/\rho_K \ll 1$, формула (4.99) може се развити у Маклоренов степени ред по промељивој ρ и апроксимирати са прва два члана овог развоја на следећи начин:

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{\rho}{\rho_K}}} \approx T_0 \left(1 + \frac{\rho}{2\rho_K}\right), \quad (4.101)$$

Релативна грешка хода часовника H_P , дефинисана изразом (4.92), настала под утицајем аеростатичког потиска ваздуха, а сагласно апроксимацији 4.101 дата је следећим изразом:

$$H_P = -\frac{\Delta T}{T_0} = -\frac{\rho}{2\rho_K}. \quad (4.102)$$

Први извод релативне грешке хода часовника, дате релацијом (4.102), по густини ваздуха

$$\frac{dH_P}{d\rho} = -\frac{1}{2\rho_K}, \quad (4.103)$$

дефинише брзину промене хода часовника односно, тенденцију релативне грешке хода часовника H_p по јединици густине ваздуха ρ , изазване променом аеростатичког потиска.

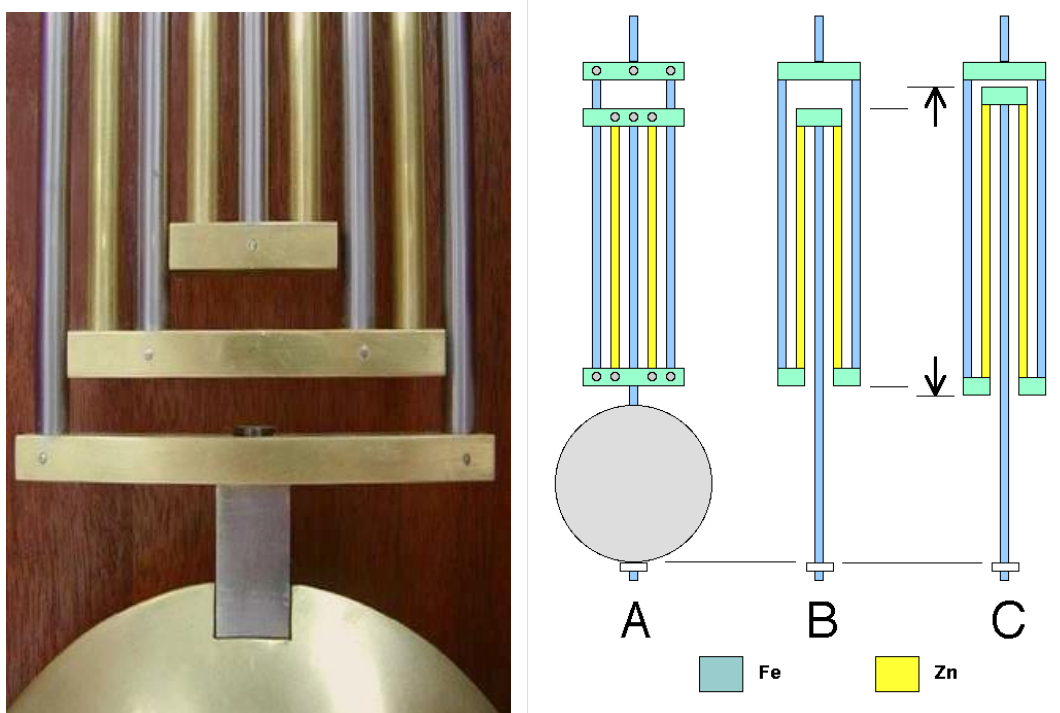
Да би се стекла представа о реду величине грешке хода часовника насталог под утицајем промене аеростатичког потиска, наводе се резултати кратког прорачуна. Ако је материјал тега клатна олово ($\rho_K = 11.34 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$), а густина ваздуха је порасла за 5% ($\Delta\rho = 0.06 \text{ kg/m}^3$), часовник ће за 24 сата да касни око 0,23 секунде. Ако је материјал тега клатна челик ($\rho_K = 7.8 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$), а густина ваздуха је порасла за 5% ($\Delta\rho = 0.06 \text{ kg/m}^3$), часовник ће за 24 сата да касни око 0,33 секунде. Грешка је мала и утолико мања што је густина материјала клатна већа.

4.4 Компензације грешака осцилатора

4.4.1 Компензација топлотне дилатације клатна

Проблем компензације топлотне дилатације клатна (температурне компензације) је преко 200 година стар и даље је важна тема многих истраживања. Методе за компензацију су многобројне и углавном су изведене математички и експериментално. У својој најједноставнијој форми, принципи компензације утицаја стохаистичких температурних промена на равномерност хода часовника заснивају се на избору оног материјала који има најмањи линеарни коефицијент температурне дилатације. Као што је већ речено у поглављу 4.3.1, носач клатна од јеле мање је подложен утицају температуре од челичног. Зато су први носачи клатна и били израђивани од дрвета а касније се прешло на комбинацију материјала. Чак и у XX веку са проналаском легуре „инвар“ не може се у потпуности извршити компензација само са једним материјалом. Да би компензација била потпуна неопходно је да се клатно изради од две различите врсте материјала.

Компензацију засновану на комбинацији челика и месинга први је применио Џон Харисон (John Harrison 1693.-1776.) у изградњи својих стационарних часовника и хронометра са ознаком „N1“. Реч је о тзв. „gridiron“ – решеткастом, биметалном клатну, чије се практично решење илуструје лево на слици Сл.24.



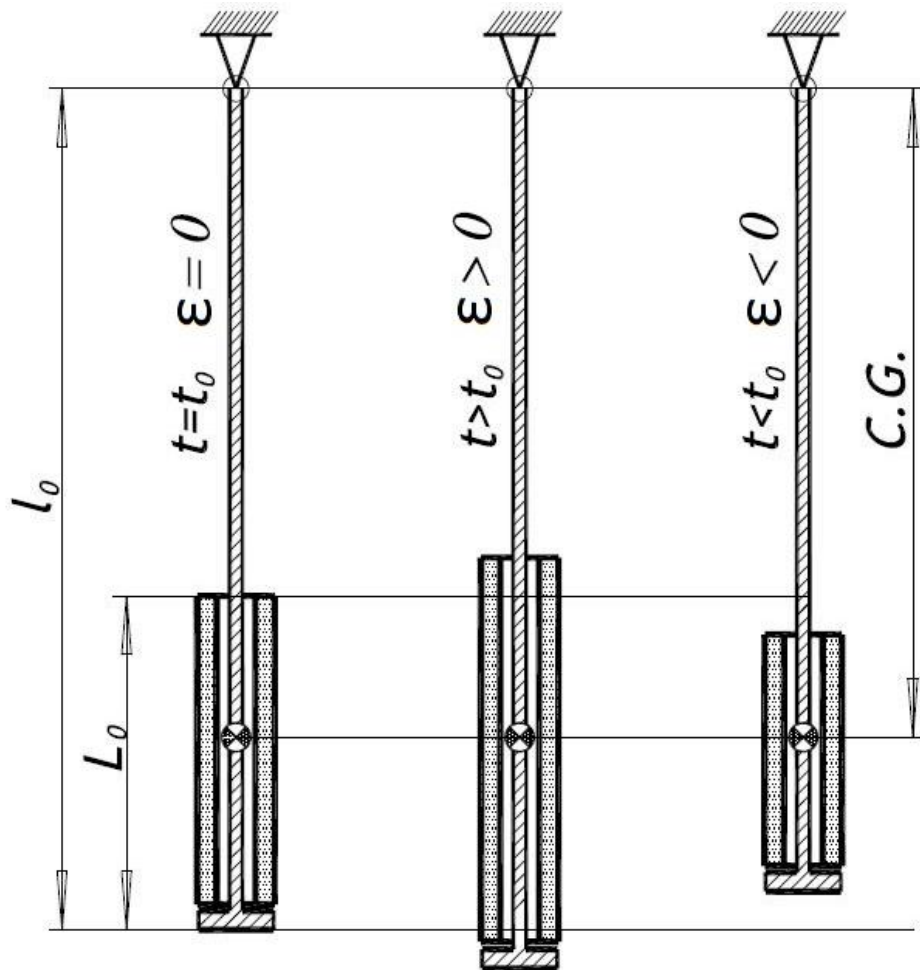
Слика 24 Техничка реализација „Gridiron“ и попречни пресек коаксијалних цеви носача клатна од челика и цинка [16]

Носач клатна је изграђен од 4 месингана и 5 челичних, паралелно и симетрично постављена штапа, чије су дужине једнаке и која су надовезана на такав начин да се челични штапови увек шире од, а месингани ка, тачки вешања.

Ова метода није дала задовољавајуће резултате па се зато прибегло сличном техничком решењу које се заснива на истом принципу као и описано „gridiron“ клатно, али које уместо штапова од челика и месинга користи коаксијалне цеви од челика и цинка (Сл. 24.). Како цинк има изузетно велики линеарни коефицијент топлотног ширења ($\alpha = 39,7 \cdot 10^{-6} [K^{-1}]$), компензација се остварује само са две челичне и једном цеви од цинка.

Најефикасније решење компензације топлотних дилатација клатна, које је истовремено и веома једноставно, остварује се комбинацијом дрвета и олова. Ако се носач клатна изради од дрвета беле јеле, а тег од оловне цеви одговарајуће дужине и масе, може се остварити технички скоро савршена температурна компензација редуковане дужине комплетног клатна. Дрво беле јеле има изузетно мали линеарни коефицијент топлотног ширења ($\alpha = 4 \cdot 10^{-6} [K^{-1}]$), а олово довољно велики ($b = 28 \cdot 10^{-6} [K^{-1}]$), па њихова једнострука комбинација, теоретски, може потпуно да компензује дилатацију клатна. Идејно решење ове спреге приказано је на слици сл. 25. Носач клатна је дрвени штап, на чијем доњем

крају је коаксијално учвршћена цев од олова. Штап се топлотно шири од тачке вешања наниже, а оловни тег - супротно.



Слика 25 Температурна компензација тежишта клатна и порекло резидуума грешке [16]

Прелиминарни прорачун се заснива на одређивању односа дужине штапа и цеви при коме је неутралисано топлотно померање тежишта читавог клатна. Из чињенице да је положај тежишта клатна одређен његовим статичким моментом S у којој су дужине зависне од температуре, следи:

$$S = m \frac{l_0(1 + a\varepsilon)}{2} + M \left(l_0(1 + a\varepsilon) - \frac{L_0(1 + b\varepsilon)}{2} \right); \quad (4.104)$$

У овој као и наредним формулама:

- l_0, L_0 - дужине дрвеног штапа и оловне цеви на температури t_0 ;
- m, M - масе дрвеног штапа и оловне цеви;
- a, b - линеарни коефицијенти топлотне дилатације дрвета и олова,
- $\varepsilon = t - t_0$ - температурна разлика

Како би се постигло да положај тежишта буде инваријантан у односу на ε довољно је да се топлотни градијент статичког момента анулира:

$$\frac{dS}{d\varepsilon} = \frac{m \cdot l_0 \cdot a}{2} + M \cdot l_0 \cdot a - \frac{M \cdot L_0 \cdot b}{2} \quad (4.105)$$

Пошто овај градијент не зависи од аргумента ε , може се закључити да ће утицај температуре на померање тежишта клатна бити потпуно неутралисано уколико је испуњен следећи услов:

$$\lambda = \frac{l_0}{L_0} = \frac{b}{a} \cdot \frac{M}{2M + m} \quad (4.106)$$

Процена ове компензације извршиће се на примеру часовника који је снабдевен описаним клатном, за кога се усваја: $m=0,4\text{кг}$ $M=20\text{кг}$ и $t=2\text{s}$. За 10 дана непрекидног рада, при порасту температуре од $\varepsilon=+100^\circ\text{C}$, часовник касни $-2,16\text{s}$ што је у односу на топлотно некомпензовани еквивалент ($-17,28\text{s}$) скоро 8 пута мање. Резидуум грешке потиче од чињенице да период осциловања клатна није само функција положаја тежишта већ и квадратног момента инерције. Његово смањење предмет је наредног, сложенијег прорачуна.

Порекло резидуума грешке у ходу часовника у кога је уграђено клатно са топлотно компензованим тежиштем је приказано на слици 25. У односу на непомично тежиште клатна, мењајући своју првобитну запремину услед промене температуре, извесна количина материјала је променила квадратни моменат инерције система. Овај феномен мора бити узет у разматрање код квалитетнијих компензација и урачунато његово неутралисање. Полази се од формуле за релативну редуковану дужину клатна, која је функција температуре:

$$\frac{l_r}{L_0} = \frac{\frac{1}{12}M(1+b\varepsilon)^2 + \frac{1}{3}m\lambda^2(1+a\varepsilon)^2 + M(\lambda(1+a\varepsilon) - \frac{1}{2}(1+b\varepsilon))^2}{\frac{1}{2}m\lambda(1+a\varepsilon) + M(\lambda(1+a\varepsilon) - \frac{1}{2}(1+b\varepsilon))} \quad (4.107)$$

Први, други и трећи члан бројиоца формуле 4.107 потичу од квадратних масених момената инерције и то: сопственог - оловне цеви, укупног – дрвеног штапа за тачку вешања и положајног - оловне цеви за тачку вешања. Први и други члан имениоца исте формуле потичу од статичких момената инерције дрвеног штапа и оловне цеви за тачку вешања.

У овој анализи поставља се услов анулирања температурног градијента релативне редуковане дужине клатна:

$$\begin{aligned} \frac{1}{L_0} \cdot \frac{dl_r}{d\varepsilon} = & \frac{\frac{2}{3}a\lambda^2m(1+a\varepsilon) + \frac{1}{6}M(1+b\varepsilon) - 2\left(\frac{b}{2} - \lambda\right)M\left(\lambda(1+a\varepsilon) - \frac{1}{2}(1+b\varepsilon)\right)}{\frac{1}{2}\lambda m(1+a\varepsilon) + M\left(\lambda(1+a\varepsilon) + \frac{1}{2}(1+b\varepsilon)\right)} - \quad (4.108) \\ & - \frac{\left(\frac{a\lambda}{2} - \left(\frac{b}{2} - a\lambda\right)M\right) \cdot \left(\frac{1}{3}\lambda^2m(1+a\varepsilon)^2 + \frac{1}{12}M(1+b\varepsilon)^2 + M(\lambda(1+a\varepsilon) - \frac{1}{2}(1+b\varepsilon))^2\right)}{\left(\frac{1}{2}\lambda(1+a\varepsilon) + M(\lambda(1+a\varepsilon) - \frac{1}{2}(1+b\varepsilon))\right)^2} \end{aligned}$$

Из чињенице да је температурни градијент редуковане дужине клатна функција температуре производи да није могуће, чак ни теоријски, да се оствари потпуна компензација линеарне температурске дилатације клатна. Могуће је направити такво конструктивно решење које ће топлотне поремећаје сопственог периода осциловања клатна свести на минимум. За такво конструктивно решење најважније је да се одреди она вредност параметра $\lambda=l_0/L_0$ која ће да анулира градијент $dl_r/d\varepsilon$ за просечну годишњу температуру места у коме би часовник био смештен. Анализа је спроведена на примеру конкретног часовника који је снабдевен клатном за кога су усвојени следећи параметри: $m=0,4\text{кг}$ $M=20\text{кг}$ и $T=2\text{с}$. Из услова да је $(dl_r/d\varepsilon)=0$, а за $\varepsilon=0^\circ\text{C}$, одређен је параметар $\lambda=3,0128$ који доводи до потпуне топлотне компензације клатна при $\varepsilon=0^\circ\text{C}$. Дужина дрвеног носача l_0 и оловне цеви L_0 одређују се из формуле за период сопствених осцилација физичког клатна и износе $l_0=1178,815\text{mm}$ и $L_0=390,569\text{mm}$.

Табела 2 приказује акумулацију грешке три еквивалентна сатна механизма, у току хода од 10 дана, на 7 различитих температура. Први је снабдевен некомпензованим клатном (ознака НК), други – клатном са компензованим тежиштем (ознака КТ) по прелиминарном прорачуну, а трећи – клатном са компензованим градијентом редуковане дужине (ознака КГРД). Резултати у табели показују, пре свега, супериорност компензације топлотне дилатације клатна која се заснива на компензовању температурног градијента редуковане дужине над неутралисањем топлотног померања тежишта. Поред тога, уочава се да одређени ниво грешке увек постоји, али да је у последњој колони готово занемарљив и за техничку примену више него прихватљив.

Табела 2 Поређење квалитета компензације

$\varepsilon[^\circ\text{C}]$	НК[s]	КТ[s]	КГРД[s]
-30	+54,8416	+6,48685	-0,004220
-20	+34,5607	+4,32520	-0,001876
-10	+17,2802	+2,16292	-0,000469
0	0,0000	0,00000	0,000000
10	-17,2798	-2,16356	-0,000469
20	-34,5593	-4,32775	-0,001876
30	-51,8384	-6,49258	-0,004220

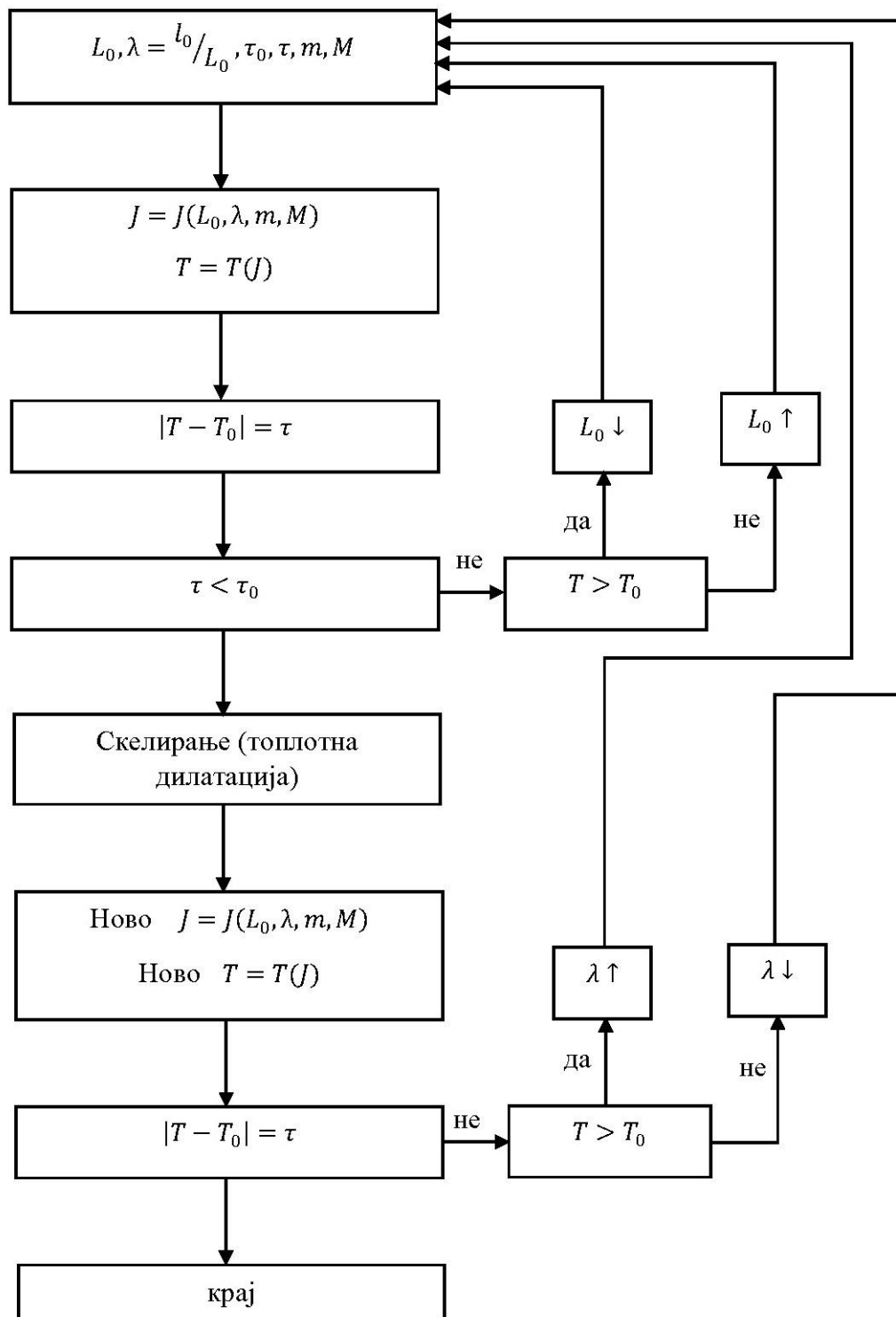
Прорачун топлотног градијента релативне редуковане дужине клатна који је у овом поглављу објашњен и спроведен може се непосредно применити и на комбинацију легуре „инвар“ (носач клатна) са нпр. челиком или месингом (тег). Код оваквих техничких решења питање неједнаке топлотне проводљивости није од практичног значаја јер су промене средњих годишњих, па и дневних температура ваздуха изузетно споре. Проблеми нумеричке реализације прорачуна за $(dl_r/d\varepsilon) = 0$, су готово непремостиви ако се спроводили без електронских помагала. То је можда био и једини разлог зашто се он није ни изводио у XVIII и XIX веку, већ се топлотна компензација клатна вршила пробама, постепеним скраћивањем тега од оловне цеви. Сви прорачуни који су дати у овом поглављу су извршени у софтверском пакету „Matlab“. Сврха ових прорачуна је да се укаже на саму стратегију нумеричке анализе која би евентуалне експерименте или лабораторијске пробе са метричким подешавањима скратила или учинила чак сувишним. Ови експерименти и пробе су увек дуготрајне и скупе и са развојем технике постају све више непотребне.

Иако доводи до врло добре компензације топлотне дилатације клатна, прорачун који је изведен у претходном поглављу има својих недостатака. Пре свега, прилично је компликован и, због те сложености, није у стању да обухвати све односно, најмање елементе клатна.

Уместо изведеног прорачуна, може се користити један приближни, итеративни поступак уз помоћ апликације за 3Д моделирање (на пример, SolidWorks). У том смислу, неопходно је да се у поменутој апликацији креира 3Д

модел клатна и такав модел излаже узастопним дилатацијама које се реализују скалирањем линеарних димензија, уз стално проверавање периода осциловања. Алгоритам овог поступка приказан је на слици 26. Ознаке у наведеној схеми идентичне су ознакама употребљеним у претходном поглављу, изузев ознака τ и τ_0 , које су нове. Ознака τ представља апсолутну вредност разлике стварног и номиналног периода осциловања клатна $\tau = |T - T_0|$, а τ_0 је максимално дозвољена вредност ове разлике. За усвојену почетну вредност дужине клатна L_0 и вредности количника $\lambda = l_0/L_0$, у коме је l_0 дужина оловне цеви која врши компензацију, апликација за 3Д моделирање (SolidWorks) израчунава вредност момента инерције клатна J у односу на тачку вешања, масе штапа m , масе оловне цеви M и положаја тежишта. Добра иницијална вредност за количник λ може се одредити из формуле (4.106). Затим се израчунава период сопствених осцилација клатна T и одређује разлика $\tau = |T - T_0|$. Ако је $\tau > \tau_0$, неопходна је корекција дужине клатна L_0 и то, ако је $T > T_0$, L_0 мора да се скрати односно, а ако је $T < T_0$, L_0 мора да се продужи. Овај поступак се понавља све док се не задовољи услов: $\tau < \tau_0$. Тада се приступа провери квалитета компензације.

Употребом апликације за 3Д моделирање, скалирањем свих димензија клатна, симулира се топлотна дилатација клатна. Скалирање се врши сразмерно линеарним коефицијентима топлотне дилатације за дрво и олово. Сада, употребом апликације за 3Д моделирање, поново се одређује вредност момента инерције клатна J у односу на тачку вешања, масе штапа m , масе оловне цеви M и положаја тежишта. Даље, израчунава се период сопствених осцилација клатна T и одређује разлика $\tau = |T - T_0|$. Ако је $\tau > \tau_0$, неопходна је корекција количника $\lambda = l_0/L_0$ и то тако да, ако је $T > T_0$, λ мора да се повећа односно, а ако је $T < T_0$, λ мора да се смањи. Сагласно дијаграму на слици (26), овај поступак се понавља све док се не задовољи услов: $\tau < \tau_0$, чиме се остварује топлотна компензација са унапред жељеном тачношћу. Исти овај алгоритам може се користити и у случају компензације топлотне дилатације клатна за комбинацију материјала инвар и челик односно, инвар и месинг.



Слика 26 Дијаграм итеративног поступка компензација топлотних дилатација клатна

4.4.2 Неутралисање и компензација промене густине ваздуха

Промена густине ваздуха настаје због промене температуре, влажности и промене притиска ваздуха и, сагласно претпоставкама, и формулама које су наведене у претходним поглављима, утиче на равномерност хода часовника. Пре више од 150 година, часовничари су уочавали везу између промене атмосферског притиска ваздуха и промене хода сатних механизма, па су зато тај утицај називали барометарском грешком сата. У овом раду се тај термин не користи јер није сагласан са самом суштином проблема да управо густина, а не притисак ваздуха имају непосредни утицај на период осциловања клатна часовника.

Утицај промене густине је мали и, приближно је за ред величине мањи од утицаја топлотних дилатација. Ипак, код прецизних часовника (астрономских сатова, хронометара, квалитетних јавних и торањских часовника), ова грешка је уочљива и може да постане недопустиво велика у случају дуготрајних периода изразито високог или ниског атмосферског притиска.

Постоји само један начин потпуног неутралисања утицаја промене густине ваздуха на ход часовника. Механизам часовника може да се, заједно са клатном, затвори у херметичку (стаклену) посуду, чиме се потпуно неутралише утицај варијације густине атмосферског ваздуха на промену густине ваздуха у коме осцилује клатно. Овај метод најчешће се примењивао код астрономских часовника. Ако, из било којих разлога, није могућа херметичка изолација сата, примењује се други, мање ефикасан поступак који може само делимично да компензује промену густине ваздуха. На клатно часовника уграђиван је механички барометар, анероид са малим тегом. Услед промене притиска ваздуха, анероид помера тег што, мењајући моменат инерције и положај тежишта клатна, мења период осциловања и то тако да се неутралише промена периода осциловања клатна услед промене аеростатичког потиска. Овај други метод, који захтева детаљан прорачун, може само делимично да буде успешан. Наиме, како промена густине ваздуха не зависи само од притиска, њен утицај на ход часовника и не може да буде потпуно неутралисан поступком који се искључиво заснива на мерењу притиска.

Најједноставнији поступак компензације, који не захтева коришћење или конструисање никаквог додатног уређаја заснива се на чињеници да промена густине ваздуха утиче на ход часовника на два различита начина. Један утицај

последица је промене динамичког отпора који делује на тег клатна и описан је формулом (4.109), која гласи:

$$\frac{dH}{d\rho} = \frac{\Phi_0^2}{8\rho} \cdot \frac{8 - \Phi_0^2}{24 - 5\Phi_0^2}. \quad (4.109)$$

Други фактор, који утиче на промену хода часовника због промене густине ваздуха, је аеростатички потисак и дефинисан је релацијом (4.110):

$$\frac{dH_P}{d\rho} = -\frac{1}{2\rho_K}. \quad (4.110)$$

Ова два фактора међусобно су супротстављена и имају тенденцију узајамне компензације која је описана следећом формулом:

$$\frac{dH_P}{d\rho} + \frac{dH}{d\rho} = 0. \quad (4.111)$$

Заменом израза (4.109) и (4.110) у формулу (4.111), добија се релација:

$$\frac{\Phi_0^2}{8\rho} \cdot \frac{8 - \Phi_0^2}{24 - 5\Phi_0^2} - \frac{1}{2\rho_K} = 0, \quad (4.112)$$

која, после сређивања, постаје биквадратна једначина по амплитуди осциловања Φ_0 :

$$\Phi_0^4 - \left(8 + 20\frac{\rho}{\rho_K}\right)\Phi_0^2 + 96\frac{\rho}{\rho_K} = 0 \quad (4.113)$$

Решење једначине (4.113) дефинише ону амплитуду осциловања клатна за коју је ће се промена хода часовника услед промене динамичког отпора и аеростатичког потиска ваздуха узајамно компензовати. Два нумеричка примера илустроваће практичну применљивост горе наведене анализе.

Ако је тег клатно од олова густине $\rho = 11,34 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ а густина ваздуха $1,225 \text{ kg/m}^3$ тада сагласно једначини (4.113) амплитуда Φ_0 за коју се промена хода часовника услед промене динамичког отпора и аеростатичког потиска ваздуха узајамно компензују:

$$\Phi_0^4 - 8.00216\Phi_0^2 + 0.01037 = 0. \quad (4.114)$$

Решења једначина (4.114) гласе:

$$\Phi_0 \approx \pm 0,0360 \text{ rad} \approx \pm 2,063^\circ$$

или

$$(4.115)$$

$$\Phi_0 \approx \pm 2,8286 \text{ rad} \approx \pm 162,067^\circ.$$

Решење $\Phi_0 \approx \pm 2,063^\circ$ има физички смисао.

Ако је тег клатно од челика густине $\rho=7,85 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ а густина ваздуха $1,225 \text{ kg/m}^3$ тада сагласно једначини (4.108) амплитуда Φ_0 за коју се промена хода часовника услед промене динамичког отпора и аеростатичког потиска ваздуха узајамно компензују

$$\Phi_0^4 - 8.00314\Phi_0^2 + 0.01508 = 0 \quad (4.116)$$

Решења једначина (4.116) гласе:

$$\Phi_0 \approx \pm 0,043413 \text{ rad} \approx \pm 2,487^\circ$$

или

$$(4.117)$$

$$\Phi_0 \approx \pm 2,8286 \text{ rad} \approx \pm 162,067^\circ$$

Решење $\Phi_0 \approx \pm 2,487^\circ$ има физички смисао.

Да би овај метод могао да се примени, неопходно је да се обезбеди да клатно добија увек константне износе енергије од запречно-импулсног механизма. Како се то постиже је тема наредног поглавља. Иако изведени прорачун није апсолутно тачан, јер се заснива искључиво на утицају динамичког отпора, односно отпора притиска на тег клатна, може да послужи за процену реда величине.

5. Запречно-импулсни механизми

5.1 Општи принципи

Запречно-импулсни механизам кључни је подсклоп сваког механичког часовника, јер он одржава и пребројава осцилације осцилатора и тако мери протицање времена. Али, у исти мах, својим функцијама овај механизам уноси поремећаје у осцилаторни процес тако да осцилације више нису сопствене, већ принудне, са фреквенцом која је подложна промени. Дакле, сам процес мерења времена ремети тачност тог мерења. Појава да запречно-импулсни механизам мења период осциловања осцилатора, па самим тим и ход часовника, назива се грешком запречно-импулсног механизма или кратко – грешком запречнице. Квалитативна и квантитативна анализа поменутог феномена теме су овог поглавља докторске дисертације.

Грешке запречно-импулсних механизма запажене су најпре емпиријски, од стране часовничара и конструктора сатних механизма. Наиме, већ крајем седамнаестог и почетком осамнаестог века, примећено је да само неки типови запречница поседују способност компензације циркуларне грешке клатна. Такође је уочено да, током опадања погонског момента часовника, неке запречнице изазивају продужавање, а друге скраћивање периода осциловања клатна односно, балансног точка. Другим речима, запажено је да са опадањем погонског момента неке запречнице имају тенденцију да успоре, а друге да, парадоксално, убрзају ход часовника. Прву математичку анализу грешака запречно-импулсних механизма остварио је краљевски астроном Џорџ Бидел Еири (George Biddell Airy 1801.-1892.) 1826. године [66]. Еири је изводио једначине промене периода и амплитуде осциловања клатна, решавајући диференцијалне једначине кретања његовог тежишта под утицајем сила које врше мале поремећаје гравитационе реституционе силе. На Харисоновом семинару Британског хоролошког института одржаног 1988. године Еиријеве једначине су оцењена можда претерано строго као „једноставно погрешне“. Иако имају извесних нејасноћа и недоречености (на пример, занемарују дисипацију енергије и не важе за стационарно стање осциловања), оне бар квалитативно исправно описују грешке неких врста запречно-импулсних механизма. Током деветнаестог века овим проблемима бавили су се углавном британски математичари, астрономи и часовничари. Најпознатији међу њима је

свакако Едмунд Бекет Денисон, који објављује у више издања обимне студије о механизмима часовника и у којима, између осталог, детаљно објашњава конструктивна и динамичка својства запречно-импулсних механизма. Он користи једначине Еирија, разрађује их, допуњава, тумачи и кроз конкретне нумеричке примере демонстрира промене периода осциловања клатна под утицајем импулса неких најпознатијих типова запречних механизма. Посебно је интересантна његова минуциозна анализа утицаја геометријских карактеристика запречница на поремећај хода часовника, као и могућности компензација овог поремећаја утицајима других подсклопова часовника. Осим теоријског, Денисонова студија о запречницама има и практични значај, јер њени закључци, упозорења и препоруке могу бити од велике користити управо часовничарима и конструкторима сатних механизма. Од савремених хоролога и градитеља часовника који су писали о својствима запречно-импулсних механизма, посебно је значајан Филип Вудвард (Philip Woodward, 1919-). У једној збирци [67] његових научних радова из области хорологије, он објављује пет научних расправа о запречницама, у којима, уз сасвим мало математике, даје један нов и оригиналан поглед на теорији запречно-импулсних механизма. На примеру пригушених осцилација клатна са хармонијском принудом, а у стационарном режиму осциловања, Вудвард открива физикални узрок промене периода осциловања, односно грешке запречнице. Истичући да је управо фазна разлика између принудне силе запречнице и силе вискозног отпора узрок грешака запречно-импулсних механизма, уводи појам фазног центра, дефинише тзв. тангенсно правило, објашњава како се из већ поменутих Еиријевих једначина може извести тангенсно правило и дијаграмима демонстрира како промена амплитуде осциловања утиче на величину грешке запречно-импулсних механизма. На крају својих студија о запречницама он презентује параметре, ток и резултате низа компјутерских симулација поремећаја периода и амплитуде пригушених и принудних осцилација клатна на кога, осим гравитационе реституционе силе и силе отпора пропорционалне угадној брзини клатна, делују и краткотрајне силе принуде запречно-импулсног механизма. Импулс запречнице је тако децентриран да делује у одређеном угаоном сегменту после проласка клатна кроз равнотежни положај. Резултати ових симулација углавном се добро слажу са теоријским прорачунима и емпиријски откривају значај утицаја грешке запречнице на тачност часовника. Мишљење да је Вудвард у потпуности успео да, без употребе сложеног математичког апарата, објасни саму

суштину овог сложеног феномена, сасвим је оправдана. Рад Петера Хојинга [68] анализира динамику принудних и пригушених осцилација клатна и посебно је интересантан јер користи пертурбациони рачун у решавању диференцијалне једначине кретања. Он изводи једначине за амплитуду и фазу осциловања, даје израз за циркуларну грешку клатна, као и једначину грешке запречно-импулсног механизма у интегралној форми. Аутор решава ову интегралну једначину за случај једног идеализованог модела запречно-импулсног механизма и, на крају рада, саопштава резултате компјутерске симулације утицаја принудног момента силе усвојеног модела запречнице на промену периода осциловања клатна. Овај рад је значајан и занимљив пре свега зато што примењује технику пертурбационог рачуна по методи Крилова и Богољубова у апроксимативној анализи нелинеарних осцилација клатна. Међутим, извесни пропусти сасвим су очигледни у садржају овог рада. Пре свега, чланови у већини изведених једначина су димензионо некохерентни, односно несагласни у јединицама мере. Зашто се аутору поткрала ова грешка и зашто је није исправио, о томе се на овоме месту неће дискутовати. Друго, Хојгинг анализира примере две апстрактне запречнице, али не успоставља везу са конкретним типовима ових механизма, па зато рад има више теоријски, а мање практичан значај. Другим речима, из презентованих математичких модела не може се сазнати каква је природа грешке коју генеришу неки типични запречно-импулсни механизми, као на пример: анкер запречнице са и без повратног трзаја, хронометарска запречница или слободне запречнице каква је, рецимо, швајцарска полужна. И треће, аутор врши компјутерску симулацију транзиције осцилатора (клатна) из нестационарног у ново квази-стационарно стање, описује промену грешке запречнице нумерички и графиконима, али нити изводи, нити решава диференцијалну једначину те транзиције. Примедба да је Хојгинг требало да реши поменути диференцијалну једначину сасвим је оправдана, бар за усвојене примере апстрактних запречница, не само зато што за њих постоје егзактна решења, већ и зато што је главна карактеристика његовог рада управо приказ темељне математике која се налази иза поменуте проблематике. Тиме би његова анализа постала и доследнија и потпунија. Рад [46] је посвећен еволуцији запречно-импулсних механизма кроз историју, објашњава постепено усавршавање конструктивних и динамичких карактеристика најпознатијих типова запречница. Управо грешку запречно-импулсних механизма аутори узимају као кључни критеријум за процену квалитета њихових својстава. Употребом одговарајућих дијаграма, рад

квалитативно описује конструктивне и динамичке карактеристике запречница, са посебним освртом на грешке периода осциловања које оне генеришу. Оно што је главна карактеристика овог рада, а то је анализа физикалне суштине грешке запречнице, Еиријева и Хојгингова анализа једва да спомињу. Оно што радови Еирија и Хојгинга имају изобилно, а то је математика, овом раду управо недостаје. Рад је занимљив јер, уводећи појмове брадихронизма, изохронизма и тахихронизма, објашњава природу и знак грешке за углавном све познате типове запречно-импулсних механизма. Од радова који се баве експерименталним одређивањем грешке запречно-импулсног механизма потребно је да се помене и кратко продискутује рад [69] Џорџа Фајнштајна. У њему аутор презентује резултате експерименталног мерења грешке запречнице и циркуларне грешке клатна, са циљем одређивања „идеалне локације“ дејства импулса на клатно које врши пригушене и принудне осцилације. Најважнији резултат овог рада јесте потврда да се подешавањем фазног угла, смера и интензитета импулса запречнице може неутралисати циркуларна грешка клатна. Интересантно је напоменути да је оно што је Фајнштајн открио својим савременим експериментима било познато још старим часовничарима, који су пре више од две стотине година утврдили да управо анкер запречнице са повратним трзајем могу да, под посебним околностима, пониште циркуларну грешку клатна.

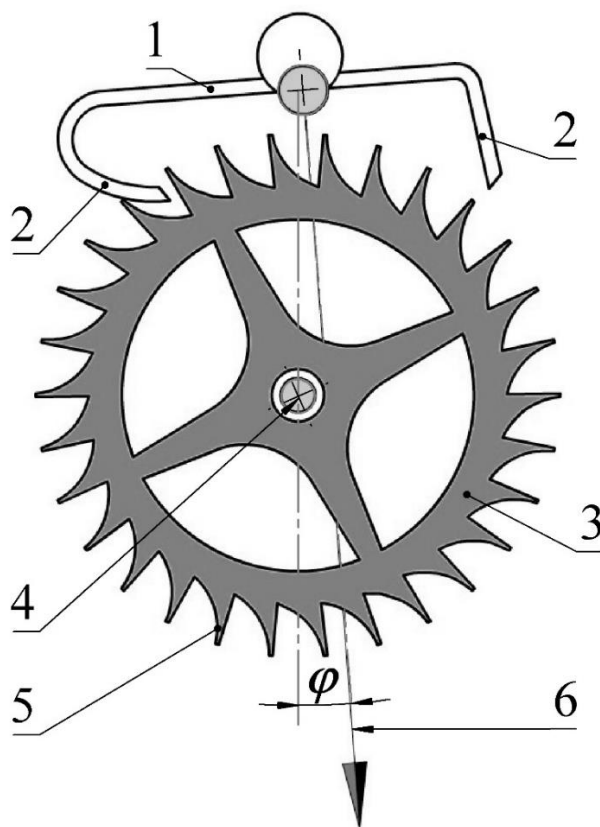
Намера је да се у овој дисертацији изврши анализа поремећаја периода осциловања осцилатора часовника које изазивају њихови запречно-импулсни механизми, коришћењем теорије пертурбација, и то методом двоструке скале времена и техником усредњавања по методи Крилова и Богољубова. Такође, један од циљева ове докторске дисертације јесте и да се овај проблем обради, не само употребом математичког формализма, већ и описом и разјашњавањем његове физикалне суштине. Сва теоријска разматрања конкретизоваће се кроз примере неких типичних запречно-импулсних механизма.

Нажалост, у литератури на српском језику тематика која се односи на грешке запречно-импулсних механизма није довољно обрађена. Због тога, многи термини и изрази коришћени у овој дисертацији немају одговарајући израз на српском језику и зато се појављују у свом оригиналном облику, или, као што је случај са запречно-импулсним механизмима, настају као опис њихових функционалности.

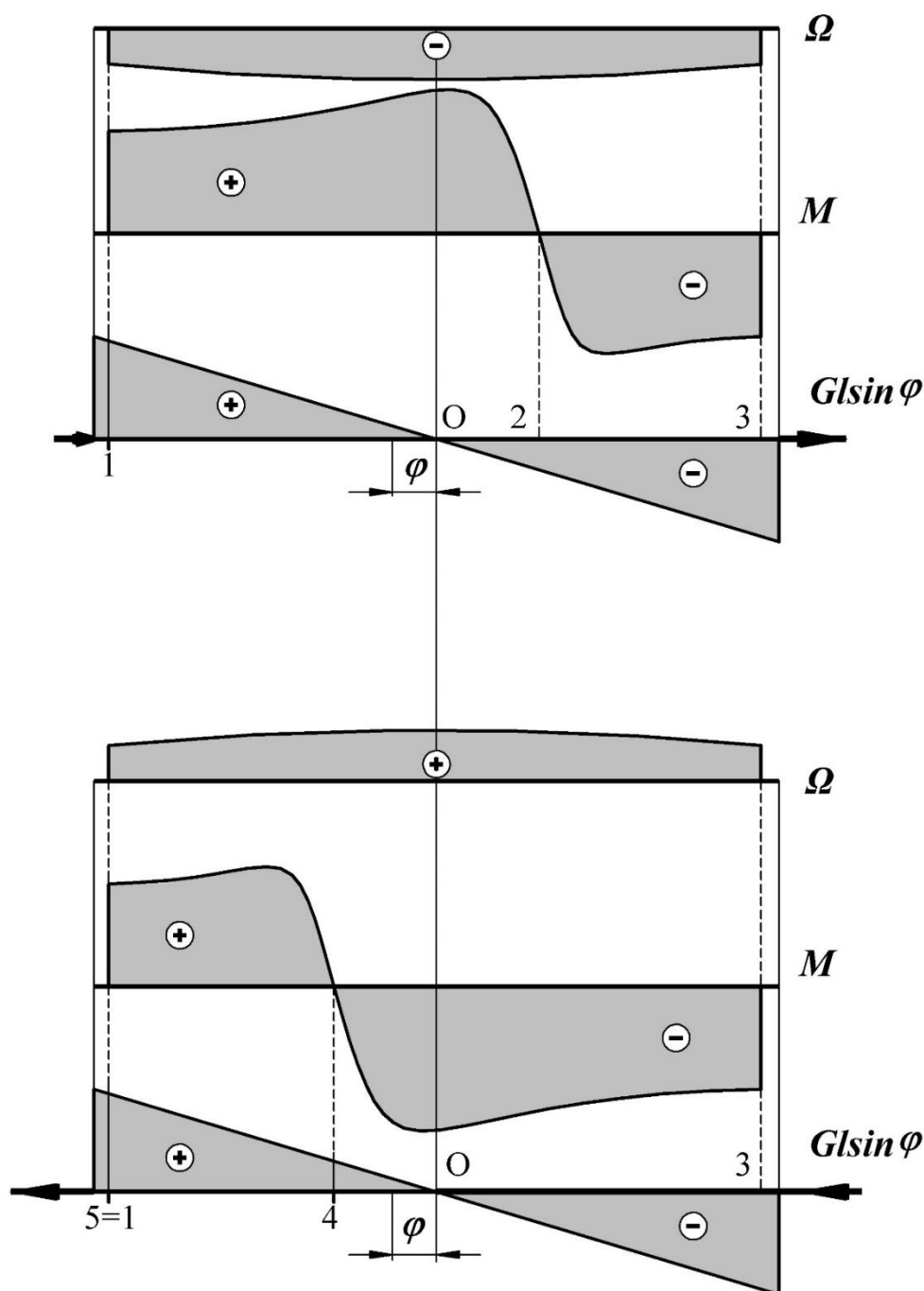
5.2 Класификација запречно-импулсних механизма

5.2.1 Котвене запречнице са повратним трзајем

Запречница типа „verge&foliot“ (слика 7), о коме је било речи у 2. поглављу, условљава огромне амплитуде осциловања клатна које иду и преко $\pm 50^\circ$. Ове огромне амплитуде значајно повећавају утицај циркуларне грешке (поглавље 4.2) на укупни пад изохронизма. Потреба за мањом амплитудом осцилација клатна била је главни разлог увођења нове врсте запречница у конструкцију часовника. У питању су котвени или анкер запречнице са повратним трзајем, чију су конструкцију објаснили енглески часовничар Вилијам Клемент и британски научник Роберт Хук 1670. године. Исте године је часовничар Јозеф Книб изградио први сат са „Клемент-Хуковом“ котвеном запречницом у торњу сата „Вадхам“ колеца у Оксфорду. Основна геометрија и функција котвених запречница са повратним трзајем је приказана на слици 27, а на слици 28 и одговарајући дијаграми моментних интеракција из којих происходе ставови о показатељима еволуције његових хоролошких карактеристика.



Слика 27 Котвени запречно-импулсни механизам са повратним трзајем; 1-котва, 2-запречно-импулсна површина, 3-запречни точка, 4-осовина запречног точка, 5-зуб запречног точка, 6-оса клатна.



Слика 28 Дијаграми моментних интеракција за котвени запречно-импулсни механизам са повратним трзајем

Дијаграм на слици 28 има следеће ознаке:

- „ $G \cdot l \cdot \sin \varphi$ “ - приказује момент реституционе силе гравитације клатна, где је G -тежина клатна,
- „ M “—момент силе импулсне функције запречнице и
- „ Ω “—момент силе отпора кога генерише запречница и делује на клатно.

Све три ознаке су дате у односу на тачку вешања и у зависности од угла отклона клатна φ . Приликом кретања клатна од левог амплитудног положаја „1“, кроз равнотежни „0“, па све до положаја „2“, момент M делује у смеру његовог обртања. У тачки „2“ момент мења смер и кочи клатно све до десног амплитудног положаја „3“, а запречни точак трпи повратни трзај. Циклус се сада понавља, али с десна на лево, кроз тачке 3-0-4-5=1. Момент силе сувог трења Ω увек има смер супротан од смера обртања клатна. У фазама 1-0-2 и 3-0-4 запречница остварује импулсну, а у фазама 2-3 и 4-5=1 запречну функцију са повратним трзајем. Из наведеног се може закључити да конструктивна сепарација импулсне и запречне функције не постоји. Обе се реализују на истим импулсно-запречним површинама палета анкера, само у различитим фазама периода осциловања клатна. Интеракција запречнице и осцилатора је непрекидна. Клатно ни у једном часу не вибрира слободно, већ под непосредним и сталним утицајем сила погонског момента. При кретању клатна с лева на десно, моменти M и $G \cdot l \cdot \sin \varphi$ су у зонама 1-0 и 2-3 истосмерни, што изазива тахихрони ефекат, а узајамно супротни у фази 0-2, што је брадихроно. У другој полупериоди, при кретању клатна с десна на лево, моменти M и $G \cdot l \cdot \sin \varphi$ су у зонама 3-0 и 4-5=1 истосмерни, што је тахихроно, а узајамно супротни у фази 0-4, што је брадихроно. Ефекат момента силе сувог трења је у свакој полупериоди интегрално изохрон. У целини преовладава тахихронизам, што значи да свако повећање погонског момента доводи до диминуције периода осциловања клатна и убрзања хода часовника. Све наведене карактеристике котвене запречнице са повратним трзајем су хоролошки лоше, што је сасвим објашњиво чињеницом да су настали на самом почетку њихове дуге еволуције. Ипак, у односу на „verge&foliot“, ови механизми су означили напредак јер су смањили амплитуду клатна са $\pm 50^\circ$ на $\pm(5^\circ - 10^\circ)$, па сразмерно смањењу амплитуде и утицај циркуларне грешке. Потребно је нагласити и да је амплитуда клатна спрегнутог са овом врстом запречница релативно константна и независна од промена погонског момента. Из овог феномена хоролози су дуго изводили погрешан закључак о високом степену изохронизма запречница са повратним трзајем. Међутим како један исти момент силе врши импулсну тако и запречну функцију може се указати на постојаност амплитуде, али не и константност периода осциловања. Конструктивна и динамичка сепарација ове две функције управо је и била најважнији циљ даљег усавршавања котвених запречница.

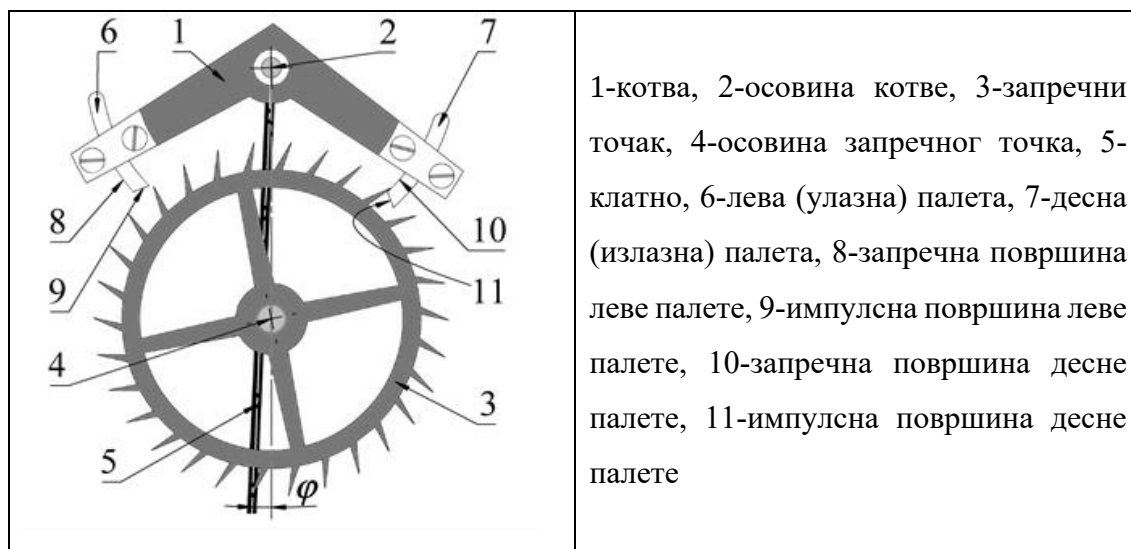
5.2.2 Мирни запречно-импулсни механизми

Конструктивно решење раздвајања импулсне од запречне функције котвених запречница реализовао је Томас Томпион и то према идеји математичара и астронома Ричарда Таунлија 1675. године. Џорџ Грејем, Томпионов ученик и својевремени Велики Мајстор Уважене гилде часовничара у Лондону, усавршио је овај изум 1715. године и омогућио његову масовну примену. Реч је о мирним запречно-импулсним механизмима (енгл. dead beat escapement, нем. ruhende Hemmungen) чији су облик и функција приказани на сликама 29 и 30.

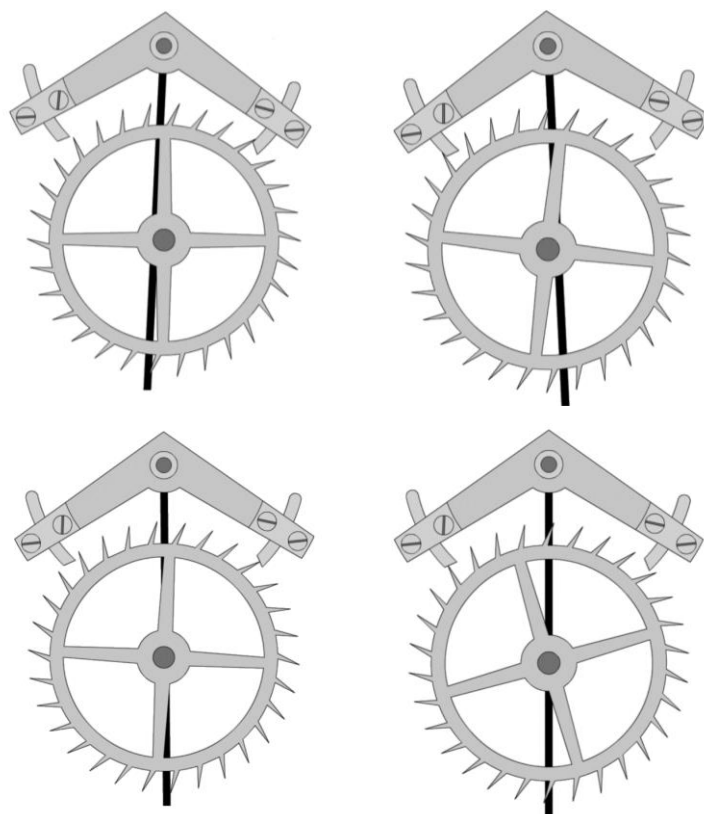
За разлику од котвених запречница са повратним трзајем, где се импулсна и запречна функција одвијају на истој површини, у овом случају палете имају јасно раздвојене запречне од импулсних површина. Запречне површине су делови кружних цилиндара са осом која пролази тачком вешања котве као што је приказано на слици 29. Ова конструктивна карактеристика анулира момент силе реакције запречне функције у односу на тачку вешања, чиме је потпуно елиминисан повратни трзај запречног точка. Импулсне површине, приказане на слици 30, су равне и подешене тако да преносе силу само у току непосредне транзиције клатна кроз равнотежни положај. На слици 31 дати су дијаграми моментних интеракција на основу којих ће бити приказани закључци о хоролошким карактеристикама мирних запречница. Ознаке „ $G \cdot l \cdot \sin \varphi$ “, „ M “ и „ Ω “ имају значење већ објашњена у претходном поглављу код котвених запречница. При кретању клатна из левог амплитудног положаја „1“, ка равнотежном „0“, момент M делује само у фази 2-0-3, а у другој полупериоди, када се клатно креће из положаја „4“ ка „0“, само у фази 5-0-6 и тада запречница врши импулсну функцију. Импулсна функција се огледа као контакт зуба запречног точка и импулсне површине палете. У осталим фазама запречница врши запречну функцију. Момент силе трења Ω је присутан готово непрекидно и усмерен увек супротно од смера ротације клатна. Уколико би била могућа савршено тачна израда и анкера и запречног точка, дијаграми „ M “ и „ Ω “ били би симетрични у односу на равнотежни положај „0“, а запречница изохрон. Како би се, упркос неизбежним грешкама израде, обезбедило сигурно спрезање палета анкера и запречног точка, неопходно је да се радијус цилиндричне запречне површине леве (улазне) палете смањи, а десне (излазне) повећа. Ова промена, иако тек незнатна, доводи до ефективног смањења импулсне површине која се спреже

са зубом запречног точка испред равнотежног положаја и то, како на улазној, тако и на излазној палети котве.

Описана промена геометрије има утицај на динамичке карактеристике запречнице. У првој полупериоди, дејство момента M је краће у фази 2-0 него у 0-3, а у другој полупериоди, M делује краће у фази 5-0 него у 0-6. Како је укупно истосмерно дејство момената M и $G \cdot l \cdot \sin \varphi$ (у фазама 2-0 и 5-0) краће у односу на узајамно супротно (у фазама 0-3 и 0-6), преовладава брадихрони ефекат.

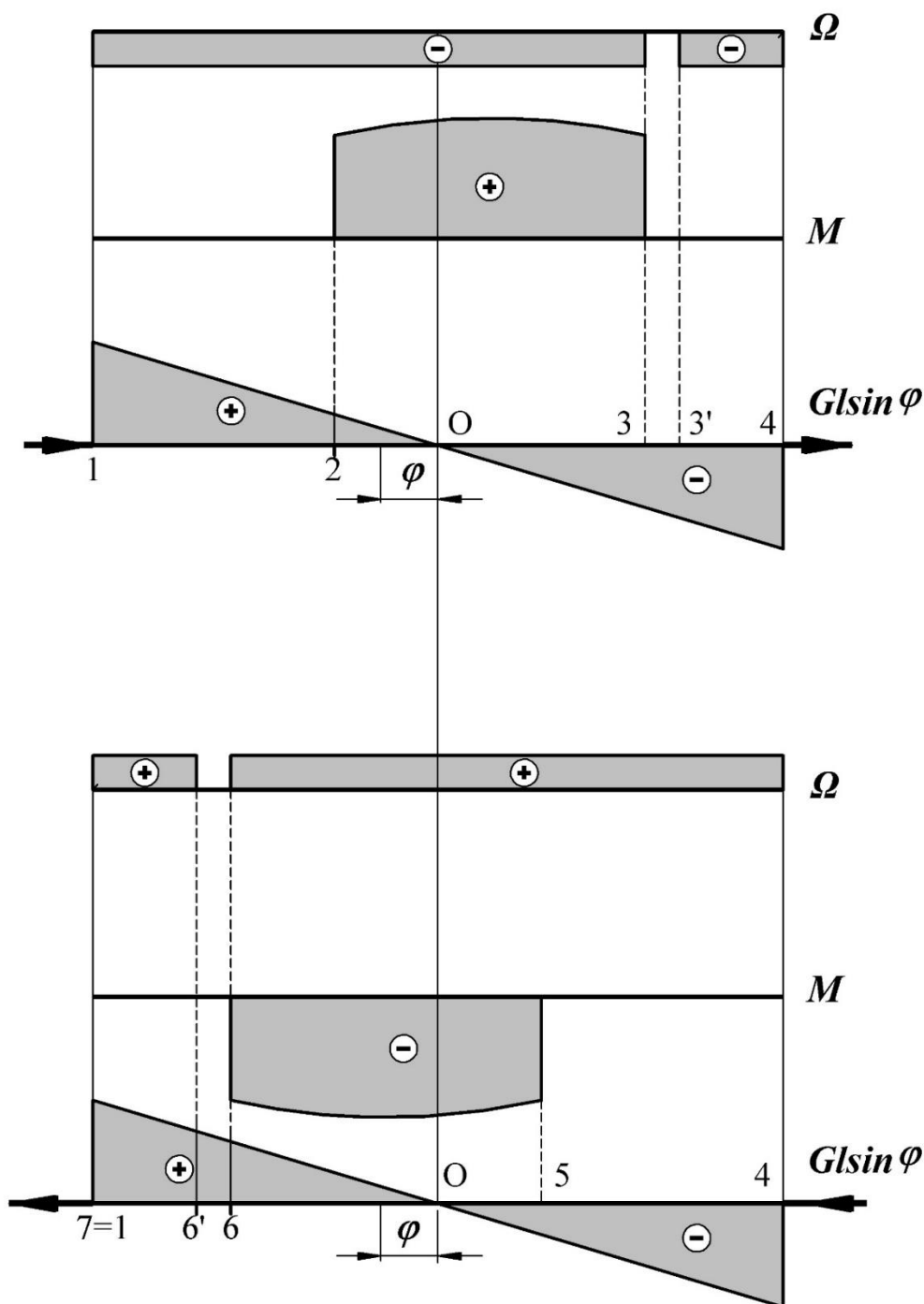


Слика 29 Грејемов запречно-импулсни механизам



Слика 30 Запречна и импулсна функција на десној и левој палети

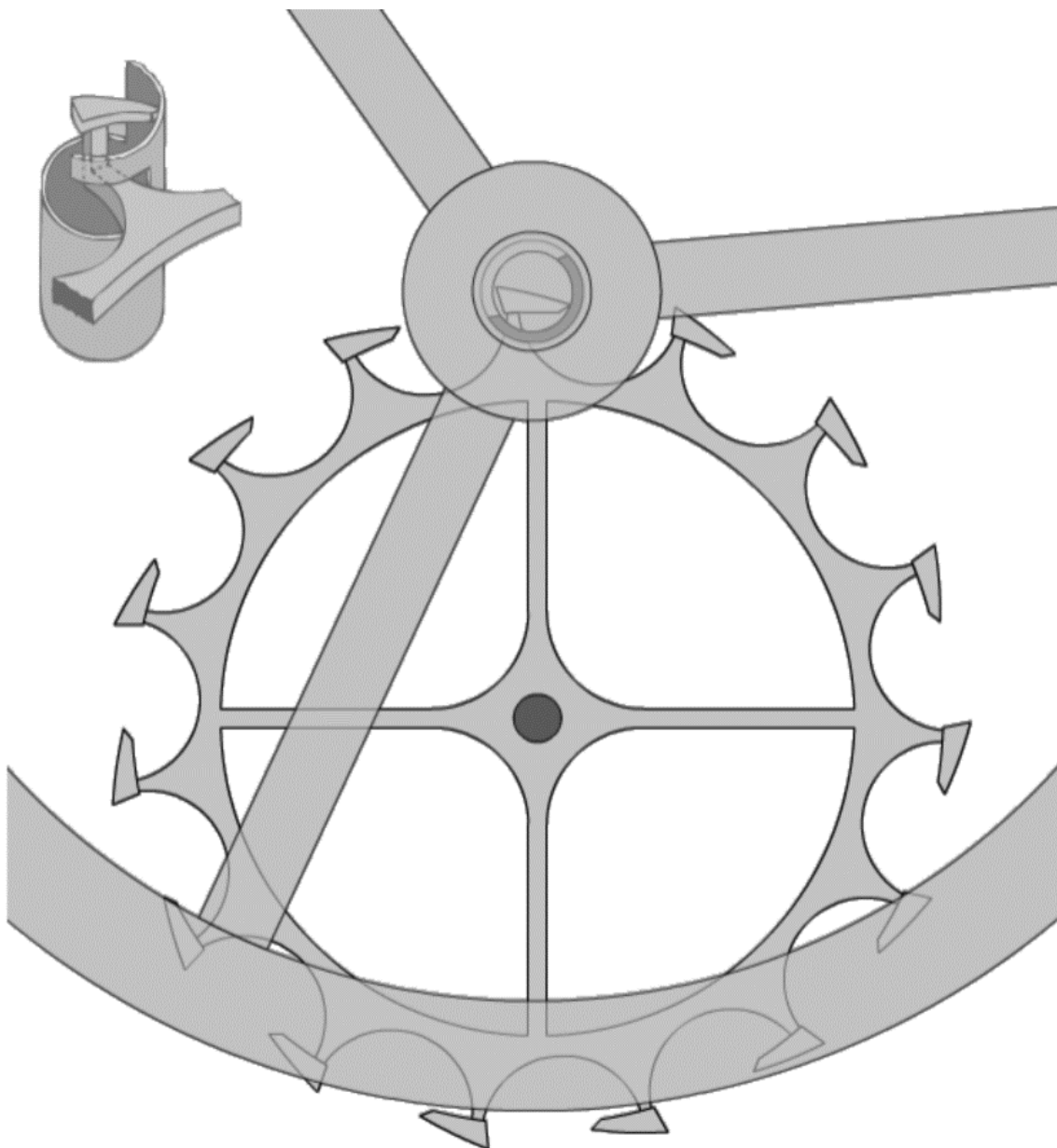
Слично је и код момента силе трења Ω . Због конструктивног зазора између површина палета и зубаца точка, запречне функције не почињу активност одмах по окончању импулсних у тачкама 3 и 6, већ у 3' и 6', тако да је укупно истосмерно дејство момената Ω и $G \cdot l \cdot \sin \varphi$ (у фазама 0-4 и 0-7=1) краће у односу на узајамно супротно (у фазама 1-0 и 4-0).



Слика 31 Дијаграми моментних интеракција мирних запречно-импулсних механизма

Оба момента, и M и Ω , делују суштински брадихроно, што значи да свако повећање погонског момента изазива повећање периода осциловања клатна и успоравање хода часовника. Како је пораст погонске снаге увек у извесној мери компензован расипањем енергије настале истовременим порастом силе трења на палетама, амплитуда осциловања клатна може бити тек незнатно измењена. У случају када је погонски момент константан, брадихрони ефекат евентуалног пораста коефицијента трења увек је парцијално компензован спрегнутим тахихронизмом циркуларне грешке настале истовременим смањењем амплитуде осциловања. Овакво понашање је типично за мирне запречно-импулсне механизме. Поред управо анализиране Грејемове мирне запречнице са котвом, приказане на сликама 29 и 30, истој класи припадају и многи други запречно-импулсни механизми. Међу онима који се уграђују у стационарне (торањске и зидне) часовнике: Аман-Лепо-ов (Amant-Lepaute 1741., 1750.), „Брокó“ (Achille Brocot 1849.), механизам са игличастим палетама; као и називе мирних запречница за покретне (ручне и џепне) сатове: Томпионов цилиндарски (слике 12 и 32) (Tompion 1695.), „дуплекс“ (Pierre Le Roy 1748.) и „виргуле“ (Lépine Jean Antoine 1780.).

Наведени сатни механизми имају исте или веома сличне карактеристике, супериорне у односу на запречнице са повратним трзајем: импулсна функција, конструктивно и динамички раздвојена од запречне, траје кратко, само у току непосредне транзиције клатна кроз равнотежни положај. Суптилнијим дејством, спољашња принуда сада слабије ремети његове сопствене осцилације. Амплитудни угао осцилација клатна је мали и износи око $\pm(2^0-3^0)$, а утицај циркуларне грешке незнатан. Квалитетном изградом брадихронизам постаје готово не приметан, итд. Ова конструктивна унапређења утичу да часовници са мирним запречницама показују дневну грешку хода од само $\pm(3-5)$ секунди. Недостаци код овог решења се огледају у томе што из дијаграма моментних интеракција производи да је осцилатор, посредством момената сила трења, и даље под непрекидним утицајем погонског момента. Свака промена или погонске снаге или коефицијента трења на импулсним и запречним површинама палета утиче стохастички компликовано на промену амплитуде и периода осциловања клатна. Намера хоролога и часовничара да овај утицај елиминише или бар сведе на минимум довела је до изума тзв. слободних запречно-импулсних механизма.



Слика 32 Цилиндарска мирна запрежница

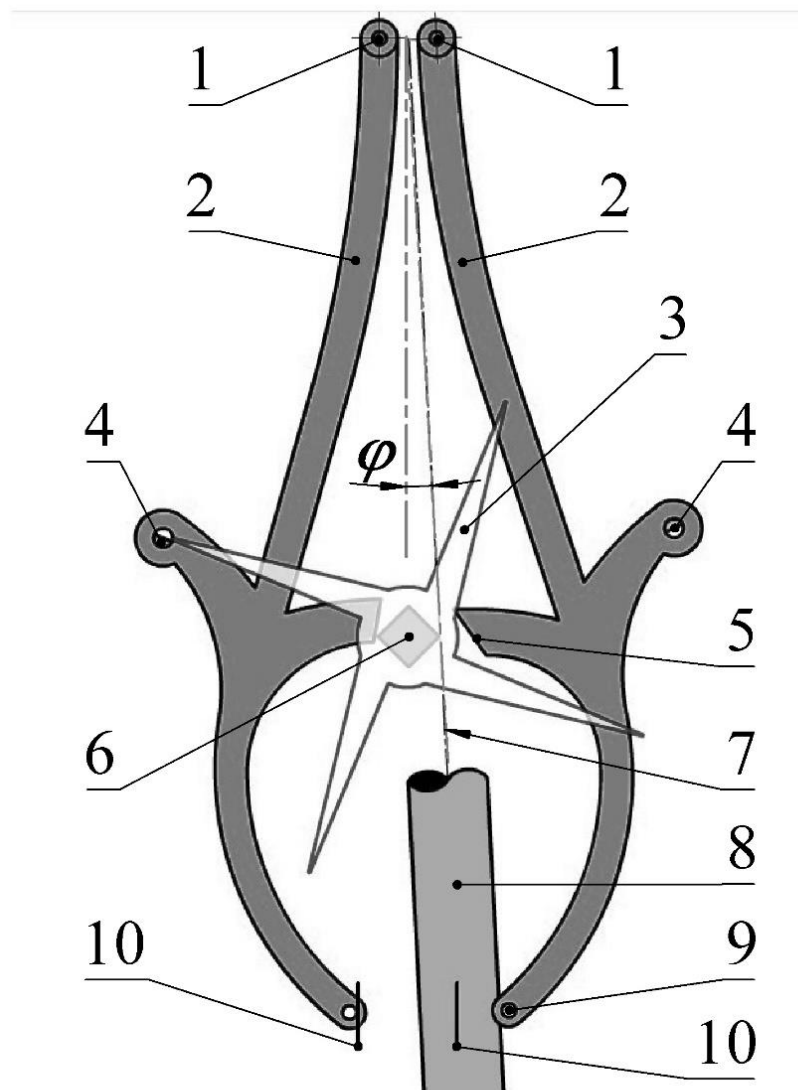
5.2.3 Слободни запречно-импулсни механизми

Губици енергије осцилатора намећу потребу постојања импулсне функције запрежница, а регулација саме брзине и дејство његове запречне функције. Ако се импулсна и запречна функција директно снабдевају погонском енергијом часовника, тада свака промена погона изазива варијацију импулса, енергије осцилатора и стандарда фреквенције. Изум слободних запречно-импулсних механизма происходи управо из идеје да се импулсна и запречна функција или сасвим ослободе од непосредног утицаја погона, или да сам осцилатор буде што

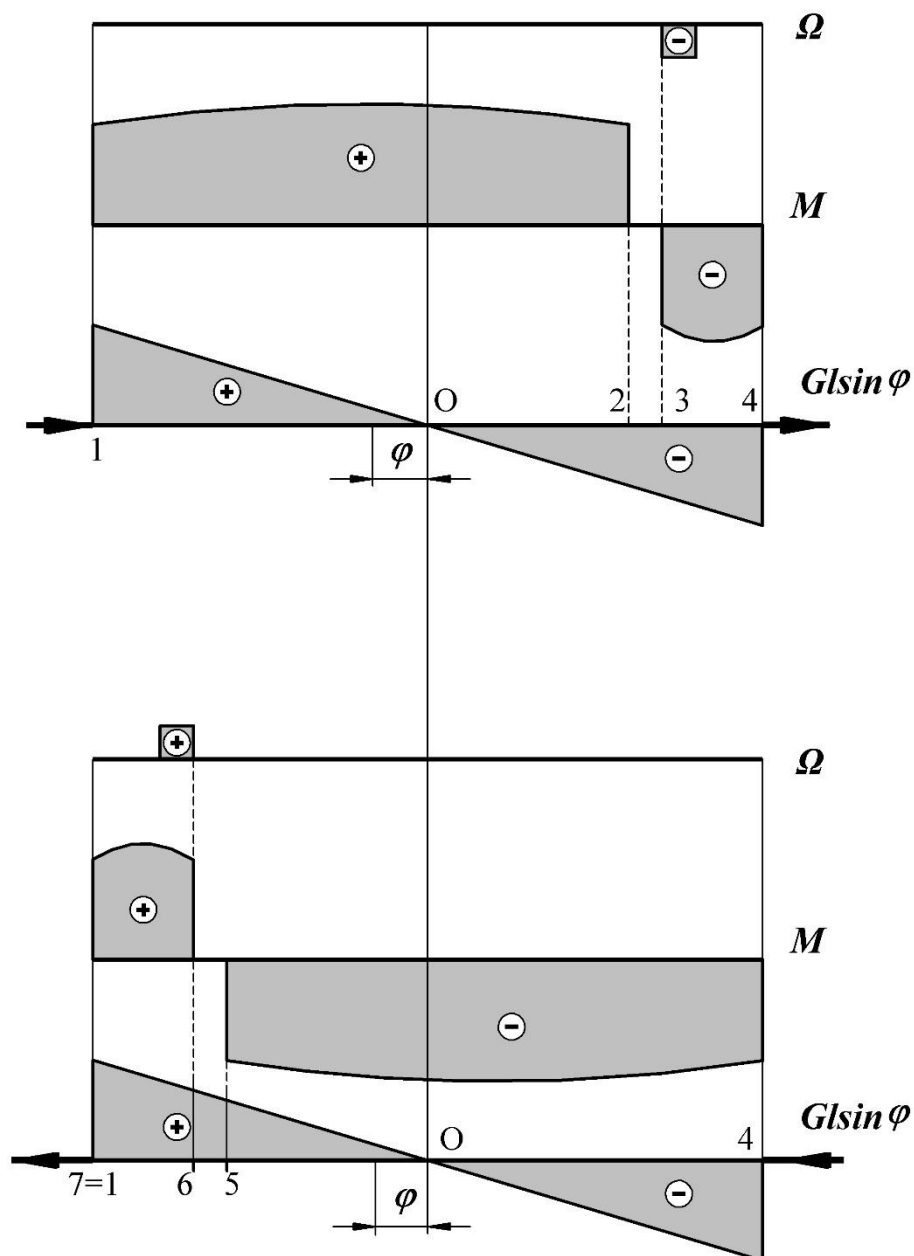
дуже слободан од било каквог утицаја запречница. Реализација првог принципа довела је до конструкције тзв. гравитационих запречно-импулсних механизма, а из другог су происходила техничка решења хронометарских запречница и тзв. енглеске и швајцарске слободне запречнице са анкером. Прву гравитациону запречницу конструисали су енглески часовничари Томас Маџ (Thomas Mudge, 1715. – 1794.) и Александар Каминг (Alexander Cumming 1732. – 1814.) 1766. године. Изум усавршавају Хенриј Катер (Henry Kater, 1777.-1835.) око 1830. године и Џ. М. Блоксам (James Mackenzie Bloxam) око 1850. године. Ипак, реализација ових идејних решења била је отежана нестабилним понашањем њихове запречне функције, познато под називом „посртање“ или „поскакивање“ (енгл. approximate tripping, нем. galoppieren). Овај значајан проблем коначно је решио велики британски хоролог и правник Едмунд Бекет Денисон (Edmund Beckett Denison, 1816.-1905.). У циљу контроле својих замисли, Денисон је извео серију експеримената са новим запречно-импулсним механизмима, који су трајали непрекидно од 1854. па све до 1859. године, када је и завршена градња куле Светог Стефана. Први покушај уградње трокраке мирне запречнице са директним дејством на клатно није дао очекивану тачност хода, па је убрзо одбачен. Експерименти су настављени са четворокраким и двоструким трокраким гравитационим запречно-импулсним механизмима, од којих је овај последњи показао изврсне резултате, па је коначно и уграђен у часовник 1859. године. Изумом ове чувене „двоструке трокраке гравитационе запречнице“ приказаној на слици 33, постигнута је изузетна тачност и поузданост у раду механизма часовника „Биг Бена“ који и данас регулише ход Великог Вестминстерског Сата. За стационарне часовнике високе прецизности Денисон је конструисао још једну, тзв. „четворокраку гравитациону запречницу“ на чијем примеру ће бити представљен рад слободних запречно-импулсних механизма.

На слици сл. 33. приказани су главни конструктивни елементи поменуте запречнице, а на слици сл. 34 и одговарајући дијаграми моментних интеракција. (Ознаке „ $G \cdot l \cdot \sin \varphi$ “, и „ Ω “ имају значење већ објашњено на претходним дијаграмима интеракција, а „ M “ је момент силе теже импулсних палета). Посматрајући кретање клатна од левог амплитудног положаја „1“, кроз равнотежни „0“, па све до положаја „2“ може се видети да је лева импулсна палета је у контакту са клатном преко импулсне игле. Том приликом лева импулсна палета саопштава импулс клатну на рачун смањења своје гравитационе потенцијалне енергије. За то време извршава се

и запречна функција јер је један крак запречног точка блокиран на упоришту десне импулсне палете. У положају „2“ лева импулсна палета, заустављена граничником, прекида контакт са клатном и окончава импулсну функцију. Клатно затим, у позицији „3“, прихвата и подиже десну импулсну палету ка десном амплитудном положају „4“, услед чега момент M мења смер дејства. У исти мах, клатно помера крак запречног точка са упоришта и, прекидањем запречне функције, омогућава ротацију запречног точка и брегасте осовине. У овом тренутку долази и до појаве краткотрајног момента силе трења Ω .



Слика 33 Денисонова гравитациона четворокрака запречница; 1-осовина импулсне палете, 2- импулсна палета, 3-крак запречног точка, 4-упориште, 5- клин импулсне палете, 6-брегаста осовина, 7-оса клатна, 8-клатно, 9-импулсна игла, 10-граничник

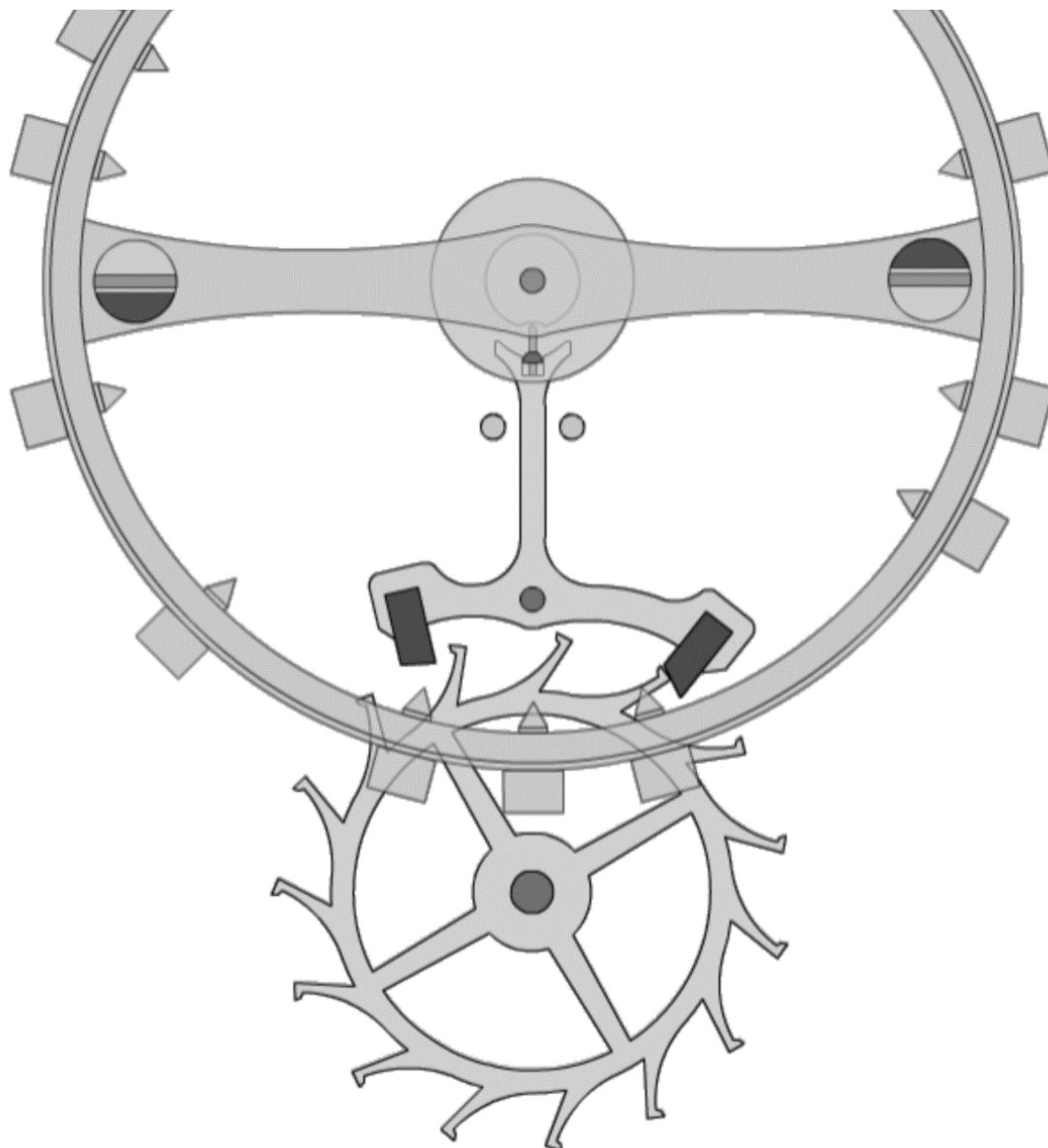


Слика 34 Дијаграми моментних интеракција Денисоновог гравитационог запречно-импулсних механизма

Док се клатно заједно са десном импулсном палетом креће из позиције „3“ у „4“, брегаста осовина запречног точка ступа у контакт са клином леве импулсне палете, подиже палету у позицију „6“ и тако јој саопштава извесну гравитациону потенцијалну енергију. Тај енергетски износ биће предат клатну нешто касније, у току извршења импулсне функције. Обртање брегасте осовине и подизање леве палете престаје у часу када се крак запречног точка поново блокира у контакту са упориштем леве импулсне палете. Циклус се сада понавља у другој полупериоду

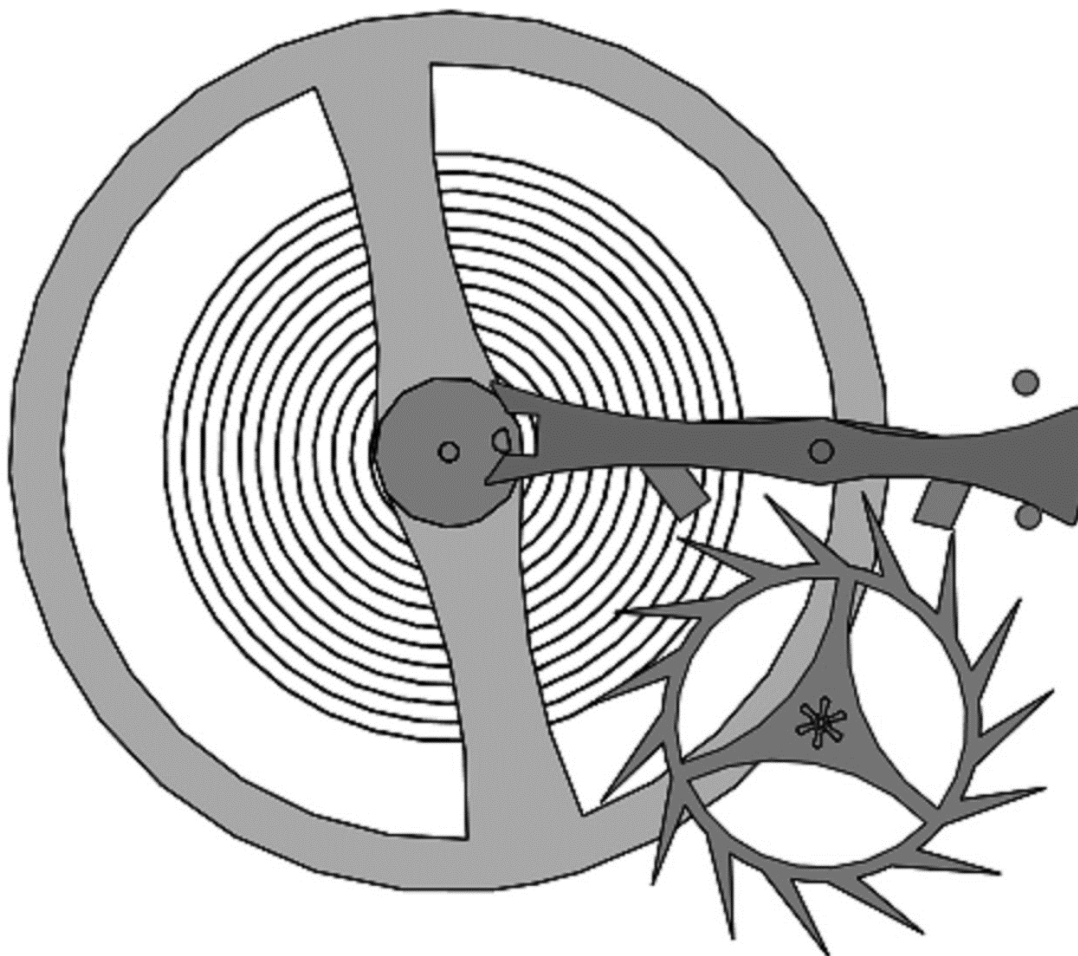
осциловања клатна, кроз позиције 4-0-5-6-7=1. Дејство момената M и $G \cdot l \cdot \sin \varphi$ је истосмерно у фазама 1-0, 3-4, 4-0 и 6-7=1, а супротно само у фазама 0-2 и 0-5, тако да преовладава тахихрони ефекат. Како је краткотрајно дејство момента Ω (силе трења на упориштима) истосмерно са моментом $G \cdot l \cdot \sin \varphi$ непосредно иза положаја 3 и 6, производи да и трење, мада тек незнатно, ипак доприноси тахихронизму. Дакле, оба момента, и M и Ω , делују интегрално тахихроно, што значи да би свако повећање момента силе теже импулсних палета и силе трења на упориштима изазвало диминуцију периода осциловања клатна и убрзање хода часовника. Међутим, како у овом случају момент M није погонски, већ је управо од утицаја погона потпуно слободан, загарантована је независност период осцилација клатна од било каквих алтерација погонске снаге. Шта више, из чињенице да момент M делује тахихроно производи и могућност најфиније регулације хода часовника. У том циљу се на импулсне палете понекад постављају завојна вретена са теговима чијим се померањем удешава момент њихове тежине, интензитет импулса, па тако и амплитуде осциловања клатна. Потребно је нагласити и један недостатак ове врсте гравитационих запречница. Момент силе трења Ω ипак зависи од погона јер се његовом променом мења интензитет притиска крака запречног точка на упоришту. Ипак, како је тај утицај краткотрајан и, због дужине крака, веома малог интензитета, може се занемарити. Напоследку треба нагласити чињеницу да је, мада тек 1986. године, и овај недостатак потпуно отклоњен од стране конструктора Џима Арнфилда патентом тзв. изодинамичке гравитационе запречнице. Потребно је да се још кратко продискутују и хоролошке карактеристике тзв. енглеске и швајцарске слободне запречнице са анкером, као и хронометарских запречница, који су приказани на сликама 35 и 36.

Пажљивим посматрањем ових слика могу се лако уочити основни принципи функционисања разматраних механизма. Идеја је једноставна и заједничка за све: највећи део периода осциловања спрегнутог осцилатора (немирнице са њихалицом) потпуно је ослобођен сваког утицаја запречнице. Наиме, у слободним запречно-импулсним механизмима са анкером немирнице су подешене тако да осцилују изохроно са веома великим амплитудним углом од $\pm 270^\circ$, а да се спрезање немирнице са анкером извршава за $\pm 15^\circ$, што значи да осцилатор слободно осцилује дуже од 88,88% трајања његовог периода осциловања. Код хронометарских запречница овај однос је још повољнији (95,5%) [46].



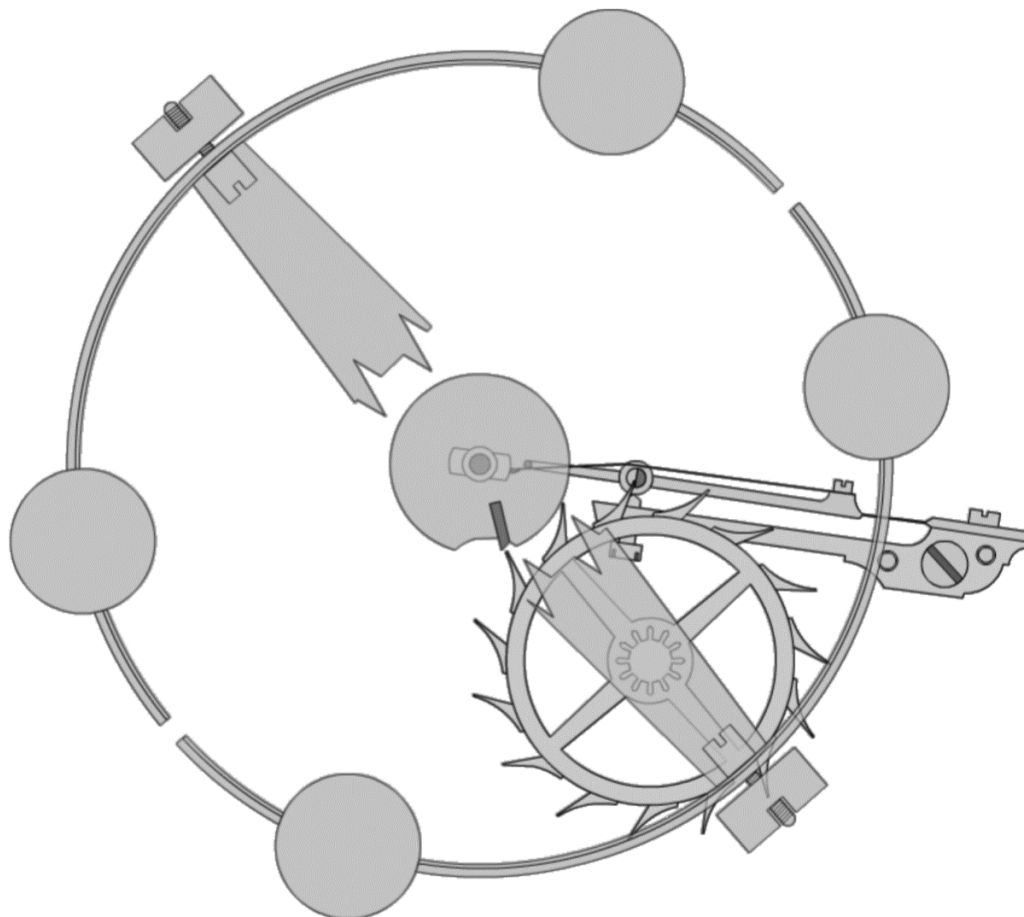
Слика 35 Швајцарска слободна полужна запречница

Енглеску слободну запречницу са анкером. приказану на слици 34, карактеристичну по зашиљеним зупцима запречног точка, конструисао је Енглеz Томас Маџ 1757. године, а усавршили је француски часовничари Бреге (Abraham-Louis Bréguet, 1747.-1823.) и Робин (Robert Robin, 1742.-1799.). Швајцарска слободна запречница са анкером, који се од енглеске варијанте разликује само по облику зуба запречног точка, настао је око 1910. године и, због једноставности израде, данас има најширу употребу у механизмима ручних и џепних сатова. И енглеска и швајцарска слободна запречница имају брадихрони ефекат на ход сатног механизма из истих разлога који су већ објашњени за Грејмову запречницу.



Слика 36 Слободна енглеска полужна запречница

Изузев што се одликују свим побројаним карактеристикама слободних запречно-импулсних механизма, хронометарске запречнице, поседују још једно, драгоцено својство: спретним конструктивним решењем елиминисана је нужност подмазивања. Да није тако, стабилност хода хронометара била би делимично угрожена променама карактеристика уља које током времена мења своју вискозност услед оксидације и акумулације нечистоћа. Прву слободну хронометарски запречницу направио је француски часовничар Пјер Лероа 1748. године. Изум, приказан на слици. 37, су усавршили енглески часовничари Џон Арнолд 1779. године и Томас Ерншо 1783. године, чиме је омогућена масовна производња морнаричких хронометара. За своја хоролошка открића, Џон Арнолд и Томас Ерншо су добили велика и заслужена државна признања јер се показало да су техничка решења која су управо они уградили у хронометарске запречно импулсне механизме дословно спасла на десетине хиљада живота помораца и путника на мору.

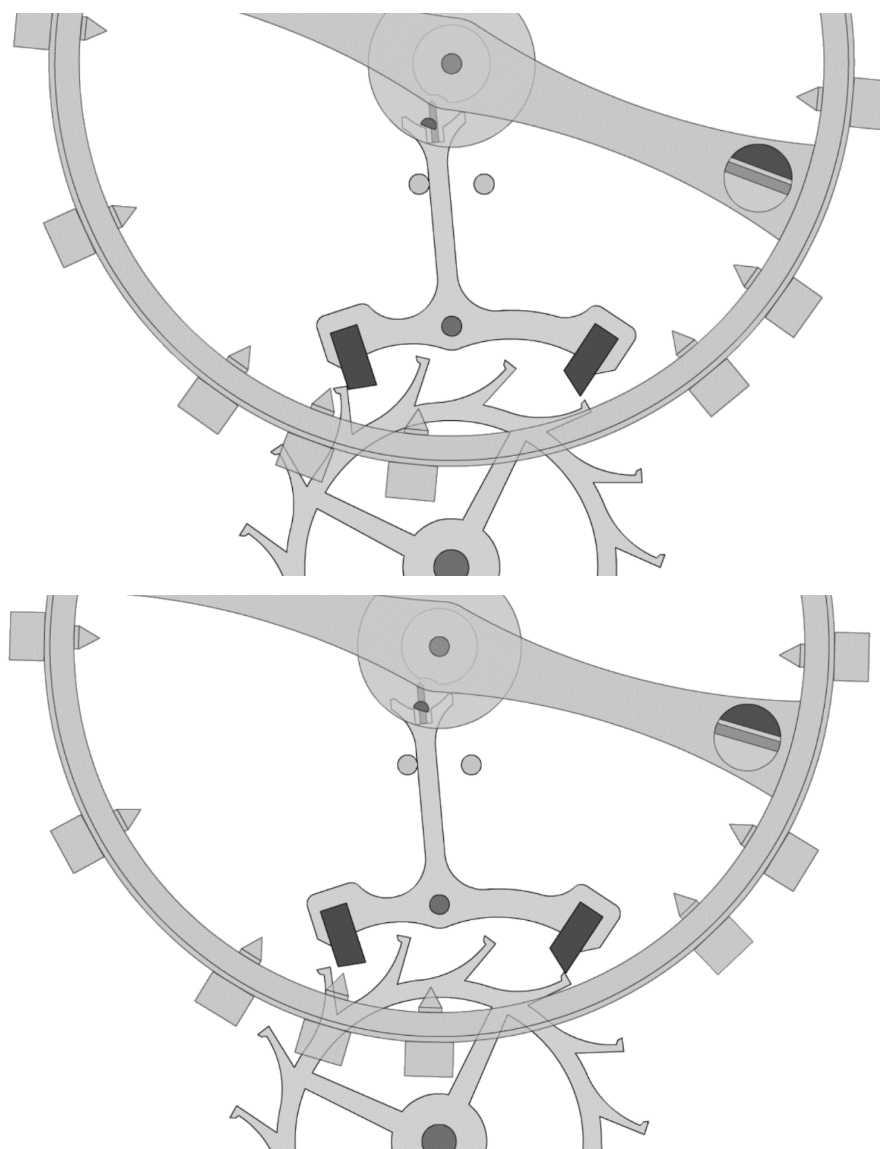


Слика 37 Хронометарски 3-III механизам

5.3 Грешка запречно - импулсних механизма - дефиниција и математички модели грешке

5.3.1 Метода двоструке размере времена

У овој глави дисертације биће изведена општа формула за грешку запречно–импулсних механизма и то применом пертурбационе методе двоструке размере (ске) времена. Разматрају се само они сатни механизми који садрже спиралне опруге са баланским точком као осцилатором као на сл. 38 али, потребно је нагласити да ће, независно од тога, резултати ове анализе бити универзално применљиви на све друге типове запречно–импулсних механизма, укључујући и оне који се уграђују у стационарне часовнике са клатном.



Слика 38 Конструктивно-геометријско порекло грешке слободне швајцарске полужне запречнице

Полази се од чињенице да балансни точак сатних механизма врши принудне пригушене осцилације, а претпоставља се да су пригушења последица вискозног момента силе који је сразмеран угаоној брзини осцилација $W = -c\dot{\varphi}$. Такође се усваја претпоставка да запречно – импулсни механизам делује на балансни точак принудним моменатом силе који је периодична функција само угаоне (генералисане) координате φ . У складу са чињеници да осцилатор сатног механизма увек осцилује у резонанци са принудним моментом силе запречно – импулног механизма, подразумева се да је угаона фреквенца принудног момента силе једнака угаоној фреквенци сопствених осцилација балансног точка.

Под овим претпоставкама, диференцијална једначина принудних пригушених осцилација балансног точка у равни Oxy око осе Oz гласи:, са одговарајућим почетним условима, дата је изразом:

$$J\ddot{\varphi} + c\dot{\varphi} + k\varphi = M(\varphi), \quad (5.1)$$

где је:

- φ – угао између вертикалне непокретне осе Ox и покретне осе клатна мерен у вертикалној равни Oxy ; генерализована координата која одређује положај осцилатора (балансног точка) сл. 22,
- J моменат инерције балансног точка односно, осцилатора,
- c константа вискозног отпора односно, вискозног момента силе $W = -c\dot{\varphi}$,
- k коефицијент крутости спиралне опруге,
- $M(\varphi)$ принудни моменат силе, који је периодична функција времена $M(\varphi(t))$, угаоне фреквенце ω_0 . Почетни услови гласе: $\varphi(0) = \Phi_0, \dot{\varphi}(0) = 0$.

Једначина (5.1) може се трансформисати у једначину:

$$\ddot{\varphi} + 2\xi\omega_0\dot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = \mu(\varphi), \quad (5.2)$$

где је:

- $\omega_0 = \sqrt{k/J}$ угаона фреквенца сопствених осцилација,
- $\xi = c/(2J\omega_0)$ коефицијент пригушења, $\xi \in (0, 1)$, $\xi \ll 1$,
- $\mu(\varphi) = M(\varphi)/J$ специфични принудни моменат силе.

Како је пригушење ξ мало, специфични принудни моменат силе $\mu(\varphi)$ представља мали поремећај слободних пригушених осцилација балансног точка. Да би се ово својство истакло и ток прорачуна учинио јаснијим, формално се уводи функција $\mu_1(\varphi)$ тако да је

$$\mu(\varphi) = \xi \cdot \mu_1(\varphi). \quad (5.3)$$

Сагласно методи двоструке скале времена чији су принципи сажето објашњена у глави 3, независно променљива t замењује се двама променљивим t_1 и t_2 ,

$$t_1 = 1 \cdot t; t_2 = \xi \cdot t, \xi \in (0, 1). \quad (5.4)$$

Усваја да су оне, у току извођења пертурбационог рачуна, међусобно независне. Константа ξ је фактор пригушења. Физикални смисао овог поступка заснива се на чињеници да је брзина промене амплитуде принудних, слабо пригушених осцилација балансног точка сатног механизма знатно мања у односу на угаону фреквенцу његових осцилација. Стиче се утисак да унутар поменутог осцилаторног

процеса теку две различите скале времена. У том смислу, временска координата t_1 описује протицање „регуларног“, а t_2 „спорог“ времена.

Приближно решење $\varphi(t_1, t_2, \xi)$ диференцијалне једначине (5.2) тражи се у облику збира иницијалног или нултог решења $\varphi_0(t_1, t_2)$ и корекције првог реда $\xi\varphi_1(t_1, t_2)$, као што је приказано изразом:

$$\varphi(t_1, t_2, \xi) \approx \varphi_0(t_1, t_2) + \xi\varphi_1(t_1, t_2). \quad (5.5)$$

Почетни услови $\varphi(0) = \Phi_0, \dot{\varphi}(0) = 0$ формулисани су за обе функције $\varphi_0(t_1, t_2)$ и $\varphi_1(t_1, t_2)$, изразима:

$$\varphi_0(0, 0) = \Phi_0, \dot{\varphi}_0(0, 0) = 0, \varphi_1(0, 0) = 0, \dot{\varphi}_1(0, 0) = 0. \quad (5.6)$$

У складу са изразима (5.4), први и други извод угаоне координате φ по времену t дат је следећим формулама, респективно:

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial \varphi}{\partial t_1} \cdot \frac{\partial t_1}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial t_2} \cdot \frac{\partial t_2}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial t_1} + \xi \frac{\partial \varphi}{\partial t_2}, \quad (5.7)$$

$$\ddot{\varphi} = \frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial t_1} + \xi \frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial t_2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t_1^2} + 2\xi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t_1 \partial t_2} + \xi^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t_2^2} \cong \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t_1^2} + 2\xi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t_1 \partial t_2}. \quad (5.8)$$

У изразу (5.8) члан који садржи ξ^2 занемарен је као мала вредност вишег реда. Када се изрази (5.3), (5.5), (5.7) и (5.8) уврсте у диференцијалну једначину (5.2), после занемаривања чланова који садрже ξ^2 , добија се следећа диференцијална једначина:

$$\frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial t_1^2} + \omega_0^2 \varphi_0 + \xi \left(\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t_1^2} + \omega_0^2 \varphi_1 + 2 \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial t_1 \partial t_2} + 2\omega_0 \frac{\partial \varphi_0}{\partial t_1} \right) = \xi \cdot \mu_1(\varphi). \quad (5.9)$$

Да би лева страна једначине (5.9) била једнака нули, а сагласно чињеници да је фактор пригушења ξ мали број али различит од нуле $\xi \neq 0$, потребно је да су једначине:

$$\frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial t_1^2} + \omega_0^2 \varphi_0 = 0; \left(\varphi_0 = \Phi_0, \frac{\partial \varphi_0}{\partial t_1} = 0, \text{ за } t_1 = t_2 = 0 \right) \quad (5.10)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t_1^2} + \omega_0^2 \varphi_1 &= \mu_1(\varphi) - 2 \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial t_1 \partial t_2} - 2\omega_0 \frac{\partial \varphi_0}{\partial t_1}; \\ \left(\varphi_1 &= 0, \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_1} = -\frac{\partial \varphi_0}{\partial t_2}, \text{ за } t_1 = t_2 = 0 \right) \end{aligned} \quad (5.11)$$

симултаном задовољене. Уз сваку од поменутих једначина наведени су и специфични почетни услови, а сагласно са њиховом општом формулацијом (5.6) и у складу са изразом (5.5).

Диференцијалне једначине у систему једначина (5.10) - (5.11) решавају се сукцесивно. Потребно је приметити чињеницу да је диференцијална једначина (5.10) само формално парцијална, а да у суштини представља обичну хомогену диференцијалану једначину другог реда са константним коефицијентима, по променљивој t_1 . Решење једначина (5.10) назива се иницијалним или нултим $\varphi_0(t_1, t_2)$ и поправља се корекцијом првог реда $\xi\varphi_1(t_1, t_2)$. У овом корективном члану, функција $\varphi_1(t_1, t_2)$ представља решење диференцијалне једначине (5.11), које зависи од претходно добијене функције $\varphi_0(t_1, t_2)$. Једно решење диференцијалне једначина (5.10) дато је изразом:

$$\varphi_0(t_1) = \Phi \sin(\omega_0 t_1 + \gamma), \Phi = \text{const}, \gamma = \text{const}, \quad (5.12)$$

који описује слободне хармонијске осцилације по независној променљивој t_1 и у којој је константа γ угао фазне разлике. Истакнуто је и продискутовано у глави 2 ове дисертације да је решење $\varphi_0(t_1)$ ограничено $\varphi_0(t_1) = O(1)$ на произвољно дугом временском интервалу $t_1 \in [0, \infty)$.

Да би се решила диференцијална једначина (5.11), уводи се претпоставка (“Ansatz“) да ни амплитуда ни угао фазне разлике осциловања нису константне величине, већ да представљају функције од променљиве t_2 :

$$\varphi_0(t_1, t_2) = \Phi(t_2) \sin(\omega_0 t_1 + \gamma(t_2)) = \Phi \sin \psi. \quad (5.13)$$

Ради концизности, уведена је ознака за фазни угао (фазу) осцилација $\psi = \omega_0 t_1 + \gamma(t_2)$. Парцијални извод функције (5.13) по променљивим t_1 дат је формулом:

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial t_1} = \Phi(t_2) \omega_0 \cos(\omega_0 t_1 + \gamma(t_2)) = \Phi \omega_0 \cos \psi, \quad (5.14)$$

а парцијални извод функције (5.14) по променљивој t_2 дати је формулом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial t_1 \partial t_2} &= \frac{\partial \Phi(t_2)}{\partial t_2} \omega_0 \cos(\omega_0 t_1 + \gamma(t_2)) \\ &\quad - \Phi(t_2) \omega_0 \sin(\omega_0 t_1 + \gamma(t_2)) \frac{\partial \gamma(t_2)}{\partial t_2} \\ &= \frac{\partial \Phi}{\partial t_2} \omega_0 \cos \psi - \Phi \frac{\partial \gamma}{\partial t_2} \omega_0 \sin \psi. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Специфични принудни момент силе $\mu(\varphi)$, као и $\mu_1(\varphi)$ функције су угаоне координате φ и, сагласно изразима (5.13), могу се формално представити као функција амплитуде Φ и тоталне фазе ψ :

$$\mu(\varphi) = \mu(\Phi(t), \psi(t)) = \mu(\Phi, \psi) = \xi \cdot \mu_1(\Phi(t), \psi(t)) = \xi \cdot \mu_1(\Phi, \psi) \quad (5.16)$$

Када се изрази (5.14) и (5.15) уврсте у диференцијалну једначину (5.11) добија се следећа једначина:

$$\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t_1^2} + \omega_0^2 \varphi_1 = \mu_1(\Phi, \psi) + 2\Phi \frac{\partial \gamma}{\partial t_2} \omega_0 \sin \psi - 2 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t_2} + \Phi \omega_0 \right) \omega_0 \cos \psi. \quad (5.17)$$

Већ је наглашено да је принудни моменат силе $M(\varphi)$ периодична функција времена t , $M(\varphi(t))$, угаоне фреквенце ω_0 , која је једнака угаоној фреквенци сопствених осцилација балансног точка. Из ове чињенице непосредно следи да је и функција $\mu_1(\Phi, \psi)$ периодична са угаоном фреквенцом ω_0 и може се развити у Фуријеов (Jean-Baptiste Joseph Fourier, 1768–1830) тригонометријски ред. Овај поступак неопходно је спровести како би се установила и сагледала појава оних чланова резонантне принуде које генеришу основни хармоници периодичног принудног момента силе.

Периодична, интеграбилна функција $f(x)$, периода 2π , на сегменту $[0, 2\pi]$, може се представити Фуријеовим тригонометријским редом

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(nx) + \sum_{n=0}^{\infty} B_n \sin(nx), \quad (5.18)$$

у коме се коефицијенти A_0 , A_n и B_n називају Фуријеовим коефицијентима функције $f(x)$ и одређују следећим релацијама (Ојлер - Фуријеовим формулама):

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx, \\ A_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) dx, \\ B_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) dx. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Сагласно формулама (5.18) и (5.19), функција $\mu_1(\Phi, \psi)$ може се развити у Фуријеов тригонометријски ред

$$\mu_1(\Phi, \psi) = \frac{a_0(\Phi)}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\Phi) \cos(n\psi) + \sum_{n=0}^{\infty} b_n(\Phi) \sin(n\psi), \quad (5.20)$$

у коме се коефицијенти a_0 , a_n и b_n , одређују следећим изразима:

$$\begin{aligned} a_0(\Phi) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \mu_1(\Phi, \psi) d\psi, \\ a_n(\Phi) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \mu_1(\Phi, \psi) \cos(n\psi) d\psi, \\ b_n(\Phi) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \mu_1(\Phi, \psi) \sin(n\psi) d\psi. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Ако се издвоје основни хармоници $a_1(\Phi) \cos \psi$ и $b_1(\Phi) \sin \psi$ у Фуријеовом развоју функције $\mu_1(\Phi, \psi)$ у тригонометријски ред, израз (4.21) гласи:

$$\begin{aligned} \mu_1(\Phi, \psi) &= \frac{a_0(\Phi)}{2} + a_1(\Phi) \cos \psi + b_1(\Phi) \sin \psi + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} a_n(\Phi) \cos(n\psi) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n(\Phi) \sin(n\psi). \end{aligned} \quad (5.22)$$

Основни хармоници су издвојени и тако посебно наглашени јер представљају управо оне чланове резонантне принуде које генерише периодична функција $\mu_1(\Phi, \psi)$. Заменом израза (5.22) у диференцијалној једначини (5.17) и груписањем чланова уз $\cos \psi$ и $\sin \psi$, који представљају чланове резонантне принуде, добија се:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t_1^2} + \omega_0^2 \varphi_1 &= \frac{a_0(\Phi)}{2} + \left(a_1(\Phi) - 2 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t_2} + \Phi \omega_0 \right) \omega_0 \right) \cos \psi + \\ &+ \left(b_1(\Phi) + 2 \Phi \frac{\partial \gamma}{\partial t_2} \omega_0 \right) \sin \psi + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} a_n(\Phi) \cos(n\psi) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n(\Phi) \sin(n\psi). \end{aligned} \quad (5.23)$$

У глави 3 ове дисертације објашњено је да чланови резонантне принуде, као функције времена t_1 , проузрокују да решење диференцијалне једначине (5.23) садржи секуларне чланове по променљивој t_1 . Анулирањем поменутих чланова резонантне принуде у диференцијалној једначини (5.23), елиминишу се из решења $\varphi_1(t_1, t_2)$ секуларни чланови као функције променљиве t_1 и тако обезбеђује да $\varphi_1(t_1, t_2)$ буде ограничена по променљивој t_1 на временском интервалу $t_1 \in [0, \infty)$.

Анулирање чланова резонантне принуде у једначини (5.23) врши се следећим изразима:

$$a_1(\Phi) - 2 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t_2} + \Phi \omega_0 \right) \omega_0 = 0, \quad (5.24)$$

$$b_1(\Phi) + 2\Phi \frac{\partial \gamma}{\partial t_2} \omega_0 = 0. \quad (5.25)$$

У складу са релацијама (5.21), чланови $a_1(\Phi)$ и $b_1(\Phi)$ у изразима (5.24) и (5.25) одређују се из следећих формула:

$$a_1(\Phi) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \mu_1(\Phi, \psi) \cos \psi d\psi, \quad (5.26)$$

$$b_1(\Phi) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \mu_1(\Phi, \psi) \sin \psi d\psi. \quad (5.27)$$

Сагласно са релацијом (5.3) и заменом израза (5.26) у (5.24) и добија се:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t_2} = -\omega_0 \Phi + \frac{1}{2\pi \xi \omega_0} \int_0^{2\pi} \mu(\Phi, \psi) \cos \psi d\psi. \quad (5.28)$$

Сагласно са релацијом (5.3) и заменом израза (5.27) у (5.25) и добија се:

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t_2} = -\frac{1}{2\pi \xi \omega_0 \Phi} \int_0^{2\pi} \mu(\Phi, \psi) \sin \psi d\psi. \quad (5.29)$$

Једначине (5.28) и (5.29) представљају систем диференцијалних једначина које се решавају симултано. Да би се одредила њихова решења неопходно је да се најпре реше наведени одређени интеграл по фази осциловања ψ која је функција променљиве t_1 . Како је амплитуда осциловања Φ функција времена t_2 , интеграл се решавају уз претпоставку да је $\Phi = const$, на интервалу $\psi \in [0, 2\pi]$. Специфични погонски моменат $\mu = \mu(\Phi, \psi)$ периодична је функција времена чија је амплитуда, у општем случају, такође променљива са временом. Међутимо, као што је претпостављено за амплитуду осциловања, и за амплитуду погонског момента усваја се да је константна унутар граница интегрисања $\psi \in [0, 2\pi]$. Претпоставка је оправдана јер, ако се амплитуда погонског момента уопште и мења, онда се та промена одвија толико споро да се на временском интервалу периода осциловања може занемарити. Када се наведени интеграл реше, приступа се решавању и система диференцијалних једначина (5.28) – (5.29) у којима ни амплитуда

осциловања Φ , нити амплитуда специфичног погонског момента више нису константе, већ величине које зависе од времена t .

Нека је решење интеграла у једначини (5.28) функција $F(\Phi)$, тада диференцијална једначина (5.28) гласи:

$$\int_0^{2\pi} \mu(\Phi, \psi) \cos \psi d\psi = F(\Phi). \quad (5.30)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t_2} = -\omega_0 \Phi + \frac{F(\Phi)}{2\pi\xi\omega_0}. \quad (5.31)$$

Решење диференцијалне једначине (5.31) је функција $\Phi = \Phi(C, t_2)$, у којој је C интеграциона константа. У почетном тренутку $t_2 = 0$, $\Phi(C, 0) = \Phi_0$, одакле се одређује интеграциона константа C као функција амплитуде осциловања $C = A(\Phi_0)$.

Нека је решење интеграла у једначини (5.29) функција $G(\Phi)$:

$$\int_0^{2\pi} \mu(\Phi, \psi) \sin \psi d\psi = G(\Phi). \quad (5.32)$$

Када се у једначину (4.31) уврсти решење диференцијалне једначине (5.31) $\Phi = \Phi(C, t_2) = \Phi(A(\Phi_0), t_2)$ и решење интеграла (5.32) $G(\Phi) = G(\Phi(A(\Phi_0), t_2))$, добија се следећа једначина:

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t_2} = -\frac{G(\Phi(A(\Phi_0), t_2))}{2\pi\xi\omega_0\Phi(A(\Phi_0), t_2)}. \quad (5.33)$$

Решење диференцијалне једначине (5.33) је функција $\gamma(t_2) = \gamma_1(t_2) + \gamma_0$, у којој је γ_0 интеграциона константа (угао почетне фазне разлике). Сагласно почетном услову $\partial\varphi_0/\partial t_1 = 0$, за $t_1 = t_2 = 0$ наведеном у релацијама (5.10), израз (5.14) гласи:

$$\frac{\partial\varphi_0(0,0)}{\partial t_1} = \Phi(0) \cdot \omega_0 \cos(\gamma_1(0) + \gamma_0) = 0, \quad (5.34)$$

из кога непосредно следи $\gamma_0 = \pi/2 - \gamma_1(0)$.

Овим је потпуно дефинисано иницијално односно, нулто решење (5.13) диференцијалне једначине (5.10) које, када се у њега уврсти решење диференцијалне једначине (5.31) $\Phi = \Phi(A(\Phi_0), t_2)$ и решење једначине (5.33) $\gamma(t_2) = \gamma_1(t_2) - \gamma_1(0) + \pi/2$ гласи:

$$\varphi_0(t_1, t_2) = \Phi(A(\Phi_0), t_2) \cdot \cos(\omega_0 t_1 + \gamma(t_2) - \gamma_1(0)). \quad (5.35)$$

Преласком на координату „регуларног времена“ t , а сагласно релацијама (5.4), нулто решење (5.35) формално гласи:

$$\varphi_0(t) = \Phi(A(\Phi_0), \xi t) \cdot \cos(\omega_0 t + \gamma(\xi t) - \gamma_1(0)). \quad (5.36)$$

Овим су исцрпљене могућности даљег решавања диференцијалне једначине (5.11), тако да функција $\varphi_1(t_1, t_2)$ остаје неодређена. Приближно решење једначине (5.5) $\varphi(t) \approx \varphi_0(t)$ дефинисано је само као нулта „побољшана“ апроксимација (5.36) пертурбационог реда. Међутим, упркос чињеници што није одређен аналитички израз за функцију $\varphi_1(t_1, t_2)$, поступком елиминације секуларних чланова обезбеђено је да она буде ограничена по променљивој t_1 на временском интервалу $t_1 \in [0, \infty)$. Али, како спроведеним поступком решавања диференцијалне једначине (5.11) није извршена елиминација секуларних чланова из функције $\varphi_1(t_1, t_2)$ по променљивој t_2 , за функцију $\varphi_1(t_1, t_2)$ може се једино тврдити да је ограничена $\varphi_1(t_1, t_2) = O(1)$ по променљивој t_2 , на неком коначном временском интервалу $t_2 \in [0, t_M]$. (За функцију $\varphi_0(t_1, t_2)$ већ је показано да је ограничена $\varphi_0(t_1, t_2) = O(1)$ по променљивој t_1 , на произвољно дугом временском интервалу $t_1 \in [0, \infty)$.) Преласком на координату регуларног времена, $t_2 = \xi \cdot t$, происходи да је функција $\varphi_1(t)$ ограничена $\varphi_1(t) = O(1)$, на коначном временском интервалу $t \in [0, t_M/\xi]$ који је за ред величине фактора пригушења ξ дужи од интервала $t \in [0, t_M]$. Одавде непосредно следи да $\xi \varphi_1(t_1, t_2) = O(\xi)$, на $t \in [0, t_M/\xi]$, $t = O(1/\xi)$. За фиксирану вредност фактора пригушења ξ , наведени закључци су исправни и за сваку другу вредност броја $\xi_1 \leq \xi$ односно, апроксимација је утолико тачнија и важи на дужем временском интервалу, уколико је фактор пригушења мањи. На основу изложеног, следи:

$$\varphi_0(t_1, t_2) = O(1), \text{ за } t_1 \in [0, t_M/\xi_1] \text{ и за свако } \xi_1 \leq \xi, \xi \in (0, 1). \quad 5.37$$

Сагласно анализи и закључцима који су спроведени у глави 2 ове дисертације, за грешку апроксимације, која се рачуна као разлика тачног решења и његове нулте апроксимације, важи:

$$|\varphi(t, \xi) - \varphi_0(t, \xi t)| = |\xi \varphi_1(t, \xi t)| = O(\xi). \quad 5.38$$

Релација (5.38) значи да је ред величине остатка пертурбационе апроксимације једнак реду величине првог изостављеног члана $\xi \varphi_1(t_1, t_2)$ асимптотског функционалног реда, којим се апроксимира тачно решење једначине (5.10). Одавде

непосредно следи став да постоје константе c , ξ_1 и t_M , такве да тачно решење $\varphi(t, \xi)$ испуњава следећи услов:

$$|\varphi(t, \xi) - \varphi_0(t, \xi t)| \leq c \cdot \xi, \text{ за } t \in [0, t_M/\xi_1] \text{ и за свако } \xi_1 \leq \xi, \xi \in (0, 1). \quad 5.39$$

Овим ставом се потврђује да се приближно решење $\varphi_0(t)$ асимптотски приближава тачном решењу $\varphi(t)$ на временском интервалу $t \in [0, t_M/\xi]$.

Како је ова дисертација посвећена грешкама запречно – импулсних механизма, неопходно је да се детаљније продискутују релације (5.28) и (5.29). У складу са релацијом $t_2 = \xi \cdot t$, израз (4.30) постаје:

$$\dot{\Phi} = \frac{d\Phi}{dt} = -\xi\omega_0\Phi + \frac{1}{2\pi\omega_0} \int_0^{2\pi} \mu(\Phi, \psi) \cos \psi d\psi, \quad (5.40)$$

а израз (5.29)

$$\dot{\gamma} = \frac{d\gamma}{dt} = -\frac{1}{2\pi\omega_0\Phi} \int_0^{2\pi} \mu(\Phi, \psi) \sin \psi d\psi. \quad (5.41)$$

Формула (5.40) је релација у општем облику која дефинише зависност брзине промене амплитуде принудних пригушених осцилација балансног точка од амплитуде осцилација и принудног момента силе који делује на балансни точак. Већ је наглашено да је то диференцијална једначина првог реда чијим се решавањем, за дате почетне услове, добија амплитуда осциловања у функцији времена $\Phi = \Phi(t)$. Формула (5.41) је релација, такође у општем облику, који дефинише зависност брзине промене фазне разлике γ принудних пригушених осцилација балансног точка од принудног момента силе и амплитуде његових осцилација. И за њу је речено да представља диференцијалну једначину првог реда чијим се решавањем, сагласно истим почетним условима, одређује зависност фазне разлике осциловања γ од времена $\gamma = \gamma(t)$. Формула (5.41) има посебан значај, јер управо она дефинише промену угаоне фреквенце ω_0 осциловања балансног точка (осцилатора) под утицајем принудног момента силе којим запречно – импулсно механизам делује на осцилатор. Ова промена угаоне фреквенце ω_0 назива се грешком запречног – импулсног механизма (енглески: Escapement error; немачки: Die Hemmungsfehler;) и представља феномен коме је ова дисертација и посвећена. Изрази под интегралима у формулама (5.40) и (5.41) функције су координате фазе ψ и амплитуде осциловања Φ као константног параметра, а границе интегрисања

су $0 \rightarrow 2\pi$. Наведени изрази могу бити дефинисани и као функције угаоне координате φ и амплитуде осциловања Φ (такође као константног параметра), услед чега интегрални постају криволинијски дуж затворене криве, са границама интегрисања $(-\Phi) \rightarrow (+\Phi) \rightarrow (-\Phi)$. Ова трансформација координата може да се изведе из релације (5.35). Како први извод по времену функције $\varphi(t) \approx \varphi_0(t)$ гласи:

$$\dot{\varphi} = \dot{\Phi}(\Phi_0, \xi t) \xi \cdot \sin \psi + \Phi \cos \psi \dot{\psi} = \dot{\Phi} \xi \sin \psi + \Phi \cos \psi \dot{\psi}, \quad (5.42)$$

њен тотални диференцијал $d\varphi$ дат је следећом релацијом:

$$d\varphi = \xi \sin \psi d\Phi + \Phi \cos \psi d\psi. \quad (5.43)$$

Али, сагласно чињеници да је $\xi \in (0, 1)$, $\xi \ll 1$, може се прихватити апроксимација да је $\xi d\Phi \approx 0$ као мала вредност вишег реда. Тада релација (4.45) постаје:

$$d\varphi \approx \Phi \cos \psi d\psi. \quad (5.44)$$

Сагласно са изразом (5.44), формуле којима се врши трансформација координате фазе осциловања ψ у угаону координату φ гласе:

$$\begin{aligned} \varphi &= \Phi \sin \psi; \quad d\varphi = \Phi \cos \psi d\psi; \\ \sin \psi &= \frac{\varphi}{\Phi}; \quad \cos \psi = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{\varphi}{\Phi}\right)^2} = \pm \frac{1}{\Phi} \sqrt{\Phi^2 - \varphi^2}; \\ d\psi &= \frac{d\varphi}{\Phi \cos \psi} = \pm \frac{d\varphi}{\sqrt{\Phi^2 - \varphi^2}} \end{aligned} \quad (5.45)$$

Апроксимација (5.44) је у складу и са чињеницом да се релације (5.45) користе за трансформацију координата у интегралима (5.30) и (5.32) по променљивој ψ , у којима је амплитуда осциловања константан параметар $\Phi = \text{const}$, на сегменту $\psi \in [0, 2\pi]$ односно, у границама интегрисања.

Када се изврши поменута трансформација координата, израз (5.40) постаје следећа формула:

$$\dot{\Phi} = \frac{d\Phi}{dt} = -\xi \omega_0 \Phi + \frac{1}{2\pi \omega_0 \Phi} \oint_{\varphi} \mu(\varphi) d\varphi. \quad (5.46)$$

Формула (5.46), као и (5.40), одређује зависност брзине промене амплитуде принудних пригушених осцилација балансног точка од амплитуде осцилација и принудног момента силе који делује на балансни точак. Као и у случају релације (5.40), а после решавања датог одређеног интеграла, израз (5.46) постаје диференцијална једначина првог реда, чије решење описује функционалну зависност амплитуде од времена $\Phi = \Phi(t)$.

Преласком на генерализану угаону координату φ , израз (5.41) постаје следећа формула:

$$\dot{\gamma} = \frac{d\gamma}{dt} = -\frac{1}{2\pi\omega_0\Phi^2} \oint_{\Phi} \frac{\mu(\varphi)\varphi d\varphi}{\sqrt{\Phi^2 - \varphi^2}} \quad (5.47)$$

Формула (5.47), као и (5.41), одређује зависност брзине промене фазне разлике γ принудних пригушених осцилација балансног точка од амплитуде осцилација и принудног момента силе који делује на балансни точак. Као и у случају изрази (5.41), а после решавања датог одређеног интеграла, израз (5.47) постаје диференцијална једначина првог реда, чије решење дефинише функцију фазне разлике од времена $\gamma = \gamma(t)$. Формула (5.47) описује промену угаоне фреквенце ω_0 осциловања балансног точка (осцилатора) под утицајем принудног момента силе. Већ је наглашено да се ова промена угаоне фреквенце ω_0 назива грешком запречно – импулног механизма.

Ако енергија дисипације осцилатора није једнака енергији коју он прима од запречно – импулног механизма, осцилатор се налази у нестационарном режиму који се описује диференцијалним једначинама (5.46) и (5.47) односно, (5.40) и (5.41). Нестационарне осцилације балансног точка појављују се увек када се мењају, као функције времена t , амплитуда периодичне функције погонског момента $M(\varphi)$, коефицијент пригушења ξ и моменат инерције балансног точка J . Ако је енергија дисипације осцилатора једнака енергији коју он прима од запречно–импулног механизма, осцилатор се налази у квазистационарном режиму осциловања. Употребљен је израз „квазистационарно“, а не „стационарно“ јер, између свака два импулса запречнице, амплитуда осцилатора ипак незнатно опада. Међутим, сагласно чињеници да је пад амплитуде анулиран сваким импулсом запречнице и то већ у току једног периода осциловања, може се усвојити да је у току дужих временских интервала, просечна вредност амплитуде константна. Осим тога, погонски моменат сатног механизма такође опада са временом, па строго говорећи, балансни точак никада није у стационарном режиму осциловања. Али, како је градијент погонског момента мали, може се занемарити односно, може се прогласити „квазистационарним“. Реч је о уобичајеном режиму рада сваког сатног механизма, у коме је $\dot{\Phi} = 0$, $\Phi = const$ или се Φ мења толико незнатно са временом, да се та промена може занемарити. Из формуле (5.40), непосредно следи израз за амплитуду осциловања балансног точка у квазистационарном режиму:

$$\Phi = \frac{1}{2\pi\xi\omega_0^2} \int_0^{2\pi} \mu(\Phi, \psi) \cos \psi d\psi \quad (5.48)$$

Заменом израза (5.48) у (5.41) добија се следећа формула за грешку запречно – импулсног механизма у квазистационарном режиму осциловања балансног точка:

$$R = \frac{d\gamma}{dt} = -\xi\omega_0 \cdot \int_0^{2\pi} \mu(\Phi, \psi) \sin \psi d\psi / \int_0^{2\pi} \mu(\Phi, \psi) \cos \psi d\psi \quad (5.49)$$

Ако се уместо фактора пригушења ξ користи фактор квалитета осцилатора $Q = 1/(2\xi)$, формула 5.49 постаје:

$$R = \frac{d\gamma}{dt} = -\frac{\omega_0}{2Q} \cdot \int_0^{2\pi} \mu(\Phi, \psi) \sin \psi d\psi / \int_0^{2\pi} \mu(\Phi, \psi) \cos \psi d\psi \quad (5.50)$$

Изрази под интегралима у формулама (5.48), (5.49) и (5.50) функције су фазе ψ и амплитуде осциловања Φ . И у тим изразима може се извршити трансформација координата (5.25), тако да они буду дефинисани као функције угаоне координате φ и амплитуде осциловања Φ . Сагласно чињеници да је у стационарном режиму рада часовника $\dot{\Phi} = 0$, амплитуда осцилација балансног точка константна $\Phi = const$, из формуле (5.46) непосредно следи:

$$\Phi^2 = \frac{1}{2\pi\xi\omega_0^2} \oint_{\Phi} \mu(\varphi) d\varphi \quad (5.51)$$

Заменом израза (5.51) у (5.47) добија се следећа формула за грешку запречно – импулсног механизма у квазистационарном режиму осциловања балансног точка:

$$R = \left(\frac{d\gamma}{dt}\right)_{SR} = -\xi\omega_0 \cdot \oint_{\Phi} \frac{\mu(\varphi)\varphi d\varphi}{\sqrt{\Phi^2 - \varphi^2}} / \oint_{\Phi} \mu(\varphi) d\varphi \quad (5.52)$$

Ако се уместо фактора пригушења ξ користи фактор квалитета осцилатора $Q = 1/(2\xi)$, формула 5.52 постаје:

$$R = \left(\frac{d\gamma}{dt}\right)_{SR} = -\frac{\omega_0}{2Q} \cdot \oint_{\Phi} \frac{\mu(\varphi)\varphi d\varphi}{\sqrt{\Phi^2 - \varphi^2}} / \oint_{\Phi} \mu(\varphi) d\varphi \quad (5.53)$$

Потребно је још једном нагласити да су изрази (5.40) и (5.46), (5.41) и (5.47), (5.48) и (5.51), (5.49) и (5.52), као и (5.50) и (5.53) само формално различити, али суштински еквивалентни. У првој групи формула интеграција се врши по координати тоталне фазе осциловања ψ , а у другој по угаоној координати φ . Дакле, наведени парови формула описују исте појаве, само у различитим координатним системима. Који изрази ће се користити у решавању конкретних проблема, то пре свега зависи од степена њихове формалне сложености и, у суштини, ствар је слободног избора.

5.3.2 Пертурбациона метода усредњавања по Кривову и Богољубову

У овој глави дисертације биће изведена општа формула за грешку запречно–импулсних механизма и то техником усредњавања по методи Кривова и Богољубова. Потребно је напоменути да се разматрају само они сатни механизми у које су уграђене спиралне опруге са баланским точком као осцилатором. Полази се од чињенице да балансни точак сатних механизма врши принудне пригушене осцилације, а претпоставља се да су пригушења последица вискозног момента силе који је сразмеран угаоној брзини осцилација $W = -c\dot{\varphi}$. Такође се усваја претпоставка да запречно – импулсни механизам делује на балансни точак принудним моменатом силе који је периодична функција само угаоне (генерализане) координате φ . Под овим претпоставкама, диференцијална једначина принудних пригушених осцилација балансног точка, са одговарајућим почетним условима, дата је изразима:

$$J\ddot{\varphi} + c\dot{\varphi} + k\varphi = M(\varphi), \quad (5.54)$$

где је:

- J моменат инерције балансног точка односно, осцилатора,
- c константа вискозног отпора односно, вискозног момента силе $W = -c\dot{\varphi}$,
- k коефицијент крутости спиралне опруге,
- $M(\varphi)$ принудни моменат силе.

Усваја се да је принудни моменат силе периодична функција угаоне фреквенце ω .

Почетни услови гласе: $\varphi(0) = \Phi_0, \dot{\varphi}(0) = 0$.

Диференцијална једначина (5.54), може се трансформисати у једначину:

$$\ddot{\varphi} + 2\xi\omega_0\dot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = \mu(\varphi), \quad (5.55)$$

где је:

$\omega_0 = \sqrt{k/J}$ угаона фреквенца сопствених осцилација,

$\xi = c/(2J\omega_0)$ коефицијент пригушења, $\xi \in (0, 1)$, $\xi \ll 1$,

$\mu(\varphi) = M(\varphi)/J$ специфични принудни моменат силе.

Ако је $\xi = 0$ и $\mu(\varphi) = 0$ односно, ако нема ни пригушења нити спољашње принуде, једначина (5.54) описује слободне осцилације балансног точка чије решење је дато изразом:

$$\varphi = \Phi \sin(\omega_0 t + \gamma), \quad (5.56)$$

у коме је Φ константна амплитуда, а γ константни угао фазне разлике освиловања. Диференцирањем израза (5.56) по времену добија се једначина

$$\dot{\varphi} = \Phi \omega_0 \cos(\omega_0 t + \gamma). \quad (5.57)$$

За дате почетне услове

$$t = 0, \varphi = \Phi_0, \dot{\varphi} = 0, \quad (5.58)$$

у једначини (5.56), одређују се вредности за константне Φ и γ .

Уколико је $\xi \neq 0$ и $\mu(\varphi) \neq 0$, решење једначине (5.55) тражи се у следећем облику:

$$\varphi = \Phi(t) \sin(\omega t + \gamma(t)), \quad (5.59)$$

у којој амплитуда $\Phi(t)$ и фазна разлика $\gamma(t)$ нису константе, већ функције од времена t . Како је истакнуто у глави 3 ове дисертације, релација (5.59) назива се нултим апроксимативним решењем диференцијалне једначине (5.55). Параметар ω је угаона фреквенца принудног момента силе, која у општем случају не мора да буде једнака угаоној фреквенци сопствених осцилација ω_0 . Потребно је напоменути да осцилатори часовника имају мало пригушење односно да је $\xi \ll 1$. Диференцирањем израза (5.59) по времену добија се израз

$$\dot{\varphi} = \dot{\Phi}(t) \sin(\omega t + \gamma(t)) + \Phi(t) \cos(\omega t + \gamma(t)) \cdot (\omega + \dot{\gamma}(t)). \quad (5.60)$$

Ради концизности, писаће се $\Phi(t) = \Phi$, а подразумевати да је амплитуда Φ функција времена t . Увођењем ознаке за фазни угао осциловања

$$\psi = \psi(t) = \omega t + \gamma(t), \quad (5.61)$$

израз (5.60) трансформише се у следећи израз:

$$\dot{\varphi} = \dot{\Phi} \sin \psi + \Phi \omega \cos \psi + \Phi \dot{\gamma} \cos \psi. \quad (5.62)$$

Како су уведене две непознате функције времена t , неопходно је увести неко погодно ограничење односно, додатни услов. У глави 3 објашњено је да се уводи додатни услов (3.42) који је, у случају решавања једначине (5.55), дат следећим изразом:

$$\dot{\varphi} = \Phi \omega \cos \psi. \quad (5.63)$$

Смисао овог израза биће објашњен и продискутован касније. Примена услова (5.63) на једначину (5.62) доводи до израза

$$\dot{\Phi} \sin \psi + \Phi \dot{\gamma} \cos \psi = 0. \quad (5.64)$$

Диференцирањем израза (5.63) по времену t добија се следећи израз:

$$\ddot{\varphi} = \dot{\Phi} \omega \cos \psi - \Phi \omega^2 \sin \psi - \Phi \omega \dot{\gamma} \sin \psi. \quad (5.65)$$

Специфични принудни момент силе $\mu(\varphi)$ функција је угаоне координате φ и, сагласно изразима (5.61) и (5.59), може се формално представити као функција амплитуде Φ и тоталне фазе ψ :

$$\mu(\varphi) = \mu(\Phi(t), \psi(t)) = \mu(\Phi, \psi). \quad (5.66)$$

Уврштавањем израза (5.59), (5.63), (5.65) и (5.66) у диференцијалну једначину (5.55), настаје следећа једначина:

$$\begin{aligned} \dot{\Phi} \omega \cos \psi - \Phi \omega^2 \sin \psi - \Phi \omega \dot{\gamma} \sin \psi + 2\xi \omega_0 \omega \Phi \cos \psi + \omega_0^2 \Phi \sin \psi \\ = \mu(\Phi, \psi). \end{aligned} \quad (5.67)$$

Ако се применом услова (5.64), у једначини (5.67) елиминише $\dot{\gamma}$ добија се једначина:

$$\dot{\Phi} = -\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\omega} \sin \psi \cos \psi - 2\xi \omega_0 \Phi \cos^2 \psi + \frac{\mu(\Phi, \psi)}{\omega} \cos \psi. \quad (5.68)$$

Ако се применом услова (5.64), у једначини (5.67) елиминише $\dot{\Phi}$ добија се једначина:

$$\dot{\gamma} = -\Phi \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\omega} \sin^2 \psi + 2\xi \omega_0 \sin \psi \cos \psi - \frac{\mu(\Phi, \psi)}{\Phi \omega} \sin \psi. \quad (5.69)$$

Једначине (5.68) и (5.69) још увек су еквивалентне једначини (5.54). Како се функције Φ и γ споро мењају са временом (јер је $\xi \ll 1$), десне стране једначина (5.68) и (5.69) могу се приближно заменити средњим вредностима на временском интервалу $t \in [0, 2\pi/\omega_0]$ односно, на одговарајућем интервалу фазе осциловања $\psi \in [0, 2\pi]$. Апроксимација се изводи тако што се претпоставља да су функције Φ и γ на поменутом временском интервалу константне односно, независне од времена. Ово је суштина пертурбационе технике усредњавања по методи Крилова и Богољубова која је објашњена у глави 3 ове дисертације. На интервалу $(0, 2\pi)$, средња вредност функције $\dot{\Phi}(\psi)$ дата је интегралом

$$\dot{\Phi}_{SR} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \dot{\Phi}(\psi) d\psi, \quad (5.70)$$

а функције $\dot{\gamma}(\psi)$, интегралом

$$\dot{\gamma}_{SR} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \dot{\gamma}(\psi) d\psi. \quad (5.71)$$

Сагласно формули (3.47), заменом израза (5.15) за $\dot{\Phi}$ у (5.17) добија се интеграл:

$$\dot{\Phi}_{SR} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(-\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\omega} \sin \psi \cos \psi - 2\xi \omega_0 \Phi \cos^2 \psi + \frac{\mu(\Phi, \psi)}{\omega} \cos \psi \right) d\psi, \quad (5.72)$$

а сагласно формули (3.48), заменом израза (5.16) за $\dot{\gamma}$ у (5.18), интеграл:

$$\dot{\gamma}_{SR} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(-\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\omega} \sin^2 \psi + 2\xi \omega_0 \sin \psi \cos \psi - \frac{\mu(\Phi, \psi)}{\Phi \omega} \sin \psi \right) d\psi. \quad (5.73)$$

Решавање наведених одређених интеграла, своди се на следеће изразе:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sin \psi \cos \psi d\psi &= -\frac{1}{2} \cos^2 \psi \Big|_0^{2\pi} = 0, \\ \int_0^{2\pi} \sin^2 \psi d\psi &= \frac{1}{2} (\psi - \sin \psi \cos \psi) \Big|_0^{2\pi} = \pi, \\ \int_0^{2\pi} \cos^2 \psi d\psi &= \frac{1}{2} (\psi + \sin \psi \cos \psi) \Big|_0^{2\pi} = \pi. \end{aligned} \quad (5.74)$$

Како осцилатор сатног механизма увек осцилује у резонанци са принудним моментом силе запречно – импулсног механизма, угаона фреквенца принудног момента силе и сопствених осцилација балансног точка једнаке су: $\omega = \omega_0$. Сагласно овој чињеници и наведеним изразима, интеграл (5.73) постаје:

$$\dot{\Phi}_{SR} = \left(\frac{d\Phi}{dt} \right)_{SR} = -\xi \omega_0 \Phi + \frac{1}{2\pi \omega_0} \int_0^{2\pi} \mu(\Phi, \psi) \cos \psi d\psi \quad (5.75)$$

а интеграл (5.74) претвара се у формулу:

$$\dot{\gamma}_{SR} = \left(\frac{d\gamma}{dt} \right)_{SR} = -\frac{1}{2\pi \omega_0 \Phi} \int_0^{2\pi} \mu(\Phi, \psi) \sin \psi d\psi \quad (5.76)$$

Формула (5.75) је израз у општем облику који одређује зависност брзине промене амплитуде принудних пригушених осцилација балансног точка од амплитуде тих осцилација и принудног момента силе који делује на балансни точак. Реч је о диференцијалној једначини првог реда чијим решавањем се, за дате почетне услове (5.58), добија амплитуда осциловања у функцији времена $\Phi = \Phi(t)$. Формула (5.76) је израз, такође у општем облику, који одређује зависност брзине промене фазне разлике γ принудних пригушених осцилација балансног точка од принудног момента силе и амплитуде његових осцилација. Она представља диференцијалну једначину првог реда чијим решавањем се, сагласно истим почетним условима

(5.58), одређује зависност фазне разлике осциловања γ од времена $\gamma = \gamma(t)$. Формула (5.76) има посебан значај, јер управо она дефинише промену угаоне фреквенце ω_0 осциловања балансног точка (осцилатора) под утицајем принудног момента силе којим запречно – импулсно механизам делује на осцилатор. Ова промена угаоне фреквенце ω_0 назива се грешком запречног – импулсног механизма (енглески: Escapement error; немачки: Die Hemmungsfehler;) и представља феномен коме је ова дисертација и посвећена.

Да би се нашло решење система диференцијалних једначина (5.75) и (5.76), неопходно је да се најпре реше наведени одређени интеграл. Сагласно методи усредњавања по Крилову и Богољубову, интеграл се решавају уз претпоставку да је амплитуда осциловања константан параметар $\Phi = const$, на интервалу $\psi \in [0, 2\pi]$. Специфични погонски моменат $\mu = \mu(\Phi, \psi)$ периодична је функција времена чија је амплитуда, у општем случају, такође променљива са временом. Међутим, као што је претпостављено за амплитуду осциловања, и за амплитуду погонског момента усваја се да је константна унутар граница интегрисања $\psi \in [0, 2\pi]$. Претпоставка је оправдана и потпуно у складу са методом Крилова и Богољубова јер, ако се амплитуда погонског момента уопште и мења, онда се та промена одвија толико споро (јер је $\xi \ll 1$) да се на временском интервалу периода осциловања може занемарити. Када се наведени интеграл реше, приступа се решавању и система диференцијалних једначина (5.75) – (5.76) у којима ни амплитуда осциловања Φ , нити амплитуда специфичног погонског момента више нису константе, већ величине које зависе од времена t . Решења ових једначина представљају функције $\Phi = \Phi(t)$ и $\gamma = \gamma(t)$ које описују нестационарни режим осциловања балансног точка.

Изрази под интегралима у формулама (5.75) и (5.76) функције су координате фазе ψ и амплитуде осциловања Φ као константног параметра, а границе интегрисања су $0 \rightarrow 2\pi$. Наведени изрази могу бити дефинисани и као функције угаоне координате φ и амплитуде осциловања Φ (такође као константног параметра), услед чега интеграл постају криволинијски дуж затворене криве, са границама интегрисања $(-\Phi) \rightarrow (+\Phi) \rightarrow (-\Phi)$. Ова трансформација координата може да се изведе непосредно из услова (5.63):

$$\dot{\varphi} = \Phi \omega \cos \psi \Rightarrow d\varphi = \Phi \cos \psi d\psi; \quad (5.77)$$

Сагласно са изразом (5.24), формуле којима се врши трансформација координате фазе осциловања ψ у угаону координату φ гласе:

$$\begin{aligned}\varphi &= \Phi \sin \psi; \quad d\varphi = \Phi \cos \psi \, d\psi; \\ \sin \psi &= \frac{\varphi}{\Phi}; \quad \cos \psi = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{\varphi}{\Phi}\right)^2} = \pm \frac{1}{\Phi} \sqrt{\Phi^2 - \varphi^2}; \\ d\psi &= \frac{d\varphi}{\Phi \cos \psi} = \pm \frac{d\varphi}{\sqrt{\Phi^2 - \varphi^2}}\end{aligned}\tag{5.78}$$

Смисао увођења израза (5.63), као посебног услова у методи Крилова и Богољубова, сагледава се у формулама за трансформацију координата (5.78). Наиме, егзактан израз за тотални диференцијал $d\varphi$ гласи:

$$d\varphi = \sin \psi \, d\Phi + \Phi \cos \psi \, d\psi.\tag{5.79}$$

Али, као што је већ објашњено, сагласно пертурбационој методи по Крлову и Богољубовову, усваја се претпоставка да је у интегралима усредњавања амплитуда осциловања константан параметар $\Phi = \text{const}$, у границама интеграла $\psi \in [0, 2\pi]$. Из ове претпоставке непосредно следи да је $d\Phi = 0$ односно, да је $d\varphi = \Phi \cos \psi \, d\psi$, на сегменту $\psi \in [0, 2\pi]$.

Када се изврши поменути трансформација координата, израз (5.75) постаје следећа формула:

$$\dot{\Phi}_{SR} = \left(\frac{d\Phi}{dt}\right)_{SR} = -\xi\omega_0\Phi + \frac{1}{2\pi\omega_0\Phi} \oint_{\varphi} \mu(\varphi) \, d\varphi.\tag{5.80}$$

Формула (5.80), као и формула (5.75), одређује зависност брзине промене амплитуде принудних пригушених осцилација балансног точка од амплитуде тих осцилација и принудног момента силе који делује на балансни точак. Као и у случају израза (5.75), а после решавања датог одређеног интеграла, израз (5.80) постаје диференцијална једначина првог реда, чије решење представља функционалну зависност амплитуде од времена $\Phi = \Phi(t)$.

Преласком на генералисану угаону координату φ , израз (5.76) постаје следећа формула:

$$\dot{\gamma}_{SR} = \left(\frac{d\gamma}{dt}\right)_{SR} = -\frac{1}{2\pi\omega_0\Phi^2} \oint_{\varphi} \frac{\mu(\varphi)\varphi \, d\varphi}{\sqrt{\Phi^2 - \varphi^2}}.\tag{5.81}$$

Формула (5.81), као и (5.76), одређује зависност брзине промене фазне разлике γ принудних пригушених осцилација балансног точка од амплитуде

осцилација и принудног момента силе који делује на балансни точак. Као и у случају израза (5.76), а после решавања датог одређеног интеграла, израз (5.81) постаје диференцијална једначина првог реда, чије решење дефинише функцију фазне разлике γ од времена $\gamma = \gamma(t)$. Формула (5.81) дефинише промену угаоне фреквенце ω_0 осциловања балансног точка (осцилатора) под утицајем принудног момента силе. Већ је наглашено да се ова промена угаоне фреквенце ω_0 назива грешком запречно–импулсног механизма.

Ако енергија дисипације осцилатора није једнака енергији коју он прима од запречно–импулсног механизма, осцилатор се налази у нестационарном режиму који се описује диференцијалним једначинама (5.75) и (5.76) односно, (5.80) и (5.81). Нестационарне осцилације балансног точка појављују се увек када се мењају, као функције времена t , амплитуда погонског момента $M(\varphi)$, коефицијент пригушења ξ и моменат инерције балансног точка J . Ако је енергија дисипације осцилатора једнака енергији коју он прима од запречно–импулсног механизма, осцилатор се налази у квазистационарном режиму осциловања. Употребљен је израз „квазистационарно“, а не „стационарно“ јер, између свака два импулса запречнице, амплитуда осцилатора ипак незнатно опада. Међутим, како тај пад амплитуде бива анулиран сваким импулсом запречнице и то већ у току једног периода осциловања, може се усвојити да је у току дужих временских интервала, просечна вредност амплитуде константна. Осим тога, погонски моменат сатног механизма такође опада, па строго говорећи, балансни точак никада није у стационарном режиму осциловања. Али, како је пад погонског момента веома спор и незнатан, може се занемарити односно, може се прогласити „квазистационарним“. Реч је о уобичајеном режиму рада сваког сатног механизма, у коме је $\dot{\Phi}_{SR} = 0$, $\Phi_{SR} = const$ или се Φ мења толико незнатно са временом, да се та промена може занемарити. Из формуле (5.75), непосредно следи израз за амплитуду осциловања балансног точка у квазистационарном режиму:

$$\Phi = \frac{1}{2\pi\xi\omega_0^2} \int_0^{2\pi} \mu(\Phi, \psi) \cos \psi d\psi \quad (5.82)$$

Заменом израза (5.82) у (5.76) добија се следећа формула за грешку запречно–импулсног механизма у квазистационарном режиму осциловања балансног точка:

$$R = \left(\frac{d\gamma}{dt} \right)_{SR} = -\xi\omega_0 \cdot \int_0^{2\pi} \mu(\Phi, \psi) \sin \psi d\psi / \int_0^{2\pi} \mu(\Phi, \psi) \cos \psi d\psi \quad (5.83)$$

Ако се уместо фактора пригушења ξ користи фактор квалитета осцилатора $Q = 1/(2\xi)$, формула 5.83 постаје:

$$R = \left(\frac{d\gamma}{dt}\right)_{SR} = -\frac{\omega_0}{2Q} \cdot \int_0^{2\pi} \mu(\Phi, \psi) \sin \psi d\psi / \int_0^{2\pi} \mu(\Phi, \psi) \cos \psi d\psi \quad (5.84)$$

Изрази под интегралима у формулама (5.82), (5.83) и (5.84) функције су фазе ψ и амплитуде осциловања Φ . И у тим изразима може се извршити трансформација координата (5.78), тако да они буду дефинисани као функције угаоне координате φ и амплитуде осциловања Φ . Сагласно чињеници да је у стационарном режиму рада часовника $\dot{\Phi}_{SR} = 0$, амплитуда осцилација балансног точка константна $\Phi_{SR} = const$, из формуле (5.80) непосредно следи:

$$\Phi^2 = \frac{1}{2\pi\xi\omega_0^2} \oint_{\Phi} \mu(\varphi) d\varphi \quad (5.85)$$

Заменом израза (5.85) у (5.81) добија се следећа формула за грешку запречно – импулсног механизма у квазистационарном режиму осциловања балансног точка:

$$R = \left(\frac{d\gamma}{dt}\right)_{SR} = -\xi\omega_0 \cdot \oint_{\Phi} \frac{\mu(\varphi)\varphi d\varphi}{\sqrt{\Phi^2 - \varphi^2}} / \oint_{\Phi} \mu(\varphi) d\varphi \quad (5.86)$$

Ако се уместо фактора пригушења ξ користи фактор квалитета осцилатора $Q = 1/(2\xi)$, формула 5.86 постаје:

$$R = \left(\frac{d\gamma}{dt}\right)_{SR} = -\frac{\omega_0}{2Q} \cdot \oint_{\Phi} \frac{\mu(\varphi)\varphi d\varphi}{\sqrt{\Phi^2 - \varphi^2}} / \oint_{\Phi} \mu(\varphi) d\varphi \quad (5.87)$$

Наглашава се још једном да су изрази (5.75) и (5.80), (5.76) и (5.81), (5.82) и (5.85), (5.83) и (5.86), као и (5.84) и (5.87) само формално различити, али суштински еквивалентни. У првој групи формула интеграција се врши по координати тоталне фазе осциловања ψ , а у другој по угаоној координати φ . Дакле, наведени парови формула описују исте појаве, само у различитим координатним системима. Који изрази ће се користити у решавању конкретних проблема, то пре свега зависи од степена њихове формалне сложености и, у суштини, ствар је слободног избора.

Потребно је да се продискутује и формирање нултог апроксимативног решења (5.59) диференцијалне једначине (5.57) за дате почетне услове (5.58). Нека је решење интеграла у једначини (5.75), односно у једначини (5.80) функција $F(\Phi)$:

$$\int_0^{2\pi} \mu(\Phi, \psi) \cos \psi d\psi = \oint_{\Phi} \frac{\mu(\varphi) d\varphi}{\Phi} = F(\Phi). \quad (5.88)$$

Тада диференцијална једначина (5.22) односно, (5.27) гласи:

$$\dot{\Phi}_{SR} = \left(\frac{d\Phi}{dt} \right)_{SR} = -\xi\omega_0\Phi + \frac{F(\Phi)}{2\pi\omega_0}. \quad (5.89)$$

Решење диференцијалне једначине (5.36) је функција $\Phi = \Phi(C, t)$, у којој је C интеграциона константа. У почетном тренутку $t = 0$, $\Phi(C, 0) = \Phi_0$, одакле се одређује интеграциона константа C као функција амплитуде осциловања $C = A(\Phi_0)$.

Нека је решење интеграла у једначини (5.76) односно (5.81) функција $G(\Phi)$:

$$\int_0^{2\pi} \mu(\Phi, \psi) \sin \psi d\psi = \oint_{\Phi} \frac{\mu(\varphi)\varphi d\varphi}{\Phi\sqrt{\Phi^2 - \varphi^2}} = G(\Phi). \quad (5.90)$$

Када се у једначину (5.76) односно, (5.81) уврсти решење диференцијалне једначине (5.89) $\Phi(C, t) = \Phi(A(\Phi_0), t)$ и решење интеграла (5.90) $G(\Phi) = G(\Phi(A(\Phi_0), t))$, добија се следећа једначина:

$$\dot{\gamma}_{SR} = \left(\frac{d\gamma}{dt} \right)_{SR} = -\frac{G(\Phi(A(\Phi_0), t))}{2\pi\omega_0\Phi(A(\Phi_0), t)}. \quad (5.91)$$

Решење диференцијалне једначине (5.91) је функција $\gamma(t) = \gamma_1(t) + \gamma_0$, у којој је γ_0 интеграциона константа (угао почетне фазне разлике). Сагласно релацији (5.63), почетни услов $\dot{\varphi}(0) = 0$ гласи:

$$\dot{\varphi}(0) = \Phi(A(\Phi_0), 0) \cdot \omega_0 \cos(\gamma_1(0) + \gamma_0) = 0, \quad (5.92)$$

из кога непосредно следи $\gamma_0 = \pi/2 - \gamma_1(0)$.

Када се добијене интеграционе константе уврсте у релацију (5.59), нулто апроксимативно решење $\varphi(t)$ може се написати у облику:

$$\varphi(t) = \Phi(A(\Phi_0), t) \cdot \cos(\omega_0 t + \gamma_1(t) - \gamma_1(0)). \quad (5.93)$$

Грешка приближног решења рачуна се као разлика тачног решења $\varphi_T(t, \xi)$ диференцијалне једначине (5.57) и његове нулте апроксимације $\varphi(t, \xi)$. Ред величине ове грешке, којом се процењује тачност апроксимације,

$$|\varphi_T(t, \xi) - \varphi(t, \xi)| = O(\xi), \quad (5.94)$$

једнак је реду величине $O(\varepsilon)$ првог изостављеног члана у пертурбационом асимптотском развоју тачног решења. У глави 3 ове дисертације истакнуто је да су Крилов и Богољубов доказали став да постоје константе c , ε_1 и t_M , такве да грешка апроксимације (5.94) испуњава следећи услов:

$$|\varphi_T(t, \xi) - \varphi(t, \xi)| \leq c \cdot \xi, \text{ за } t \in [0, t_M / \xi] \text{ и за свако } \xi_1 \leq \xi, \xi \in (0, 1). \quad (5.95)$$

Интервал важења апроксимације $t \in [0, t_M / \xi]$, као и у методи двоструке скале времена, проширен је за ред величине коефицијента пригушења ξ . За фиксирану вредност параметра ξ , наведени закључци су исправни и за сваку другу вредност параметра $\xi_1 \leq \xi$ односно, апроксимација је утолико тачнија и важи на дужем временском интервалу, уколико је број ξ мањи односно, пригушење слабије и дисипација енергије мања. Став (5.95) потврђује да се приближно решење $\varphi(t, \xi)$ асимптотски приближава тачном решењу $\varphi_T(t, \xi)$ на временском интервалу $t \in [0, t_M / \xi]$. Овим је потврђена исправност пертурбационе методе Крилова и Богољубова као једног могућег хеуристичког поступка у приближном решавању диференцијалних једначина облика (5.10).

Продискутоваће се сродност пертурбационе методе Крилова и Богољубова и методе две размере времена описане у глави 3 ове дисертације. Пре свега, уочава се идентичност свих апроксимативних решења и потпуна сагласност процене реда величине грешке апроксимације и реда величине временског интервала на коме те апроксимације важи по обе методе. Конкретно, идентичне су диференцијалне једначине (5.75) и (5.40), (5.80) и (5.46), чија решења одређују зависност брзине промене амплитуде принудних пригушених осцилација балансног точка од амплитуде осцилација и принудног момента силе који делује на балансни точак. Такође су идентичне диференцијалне једначине (5.76) и (5.41), (5.81) и (5.47), чија решења описују зависност брзине промене фазне разлике принудних пригушених осцилација балансног точка од амплитуде осцилација и принудног момента силе који делује на балансни точак. Већ је објашњено и наглашено да управо релације (5.76) и (5.41), (5.81) и (5.47) описују промену угаоне фреквенце ω_0 осциловања балансног точка (осцилатора) под утицајем принудног момента силе која се назива грешком запречно – импулсног механизма. Апроксимативна решења (5.93) и (5.36) диференцијалне једначине осциловања осцилатора сатног механизма такође су међусобно сагласне, као и процене реда величине грешке апроксимације (5.95) и (5.39) односно реда величине временског интервала на коме те апроксимације важе.

5.4 Оперативне формуле за грешке запречно-импулсних механизма

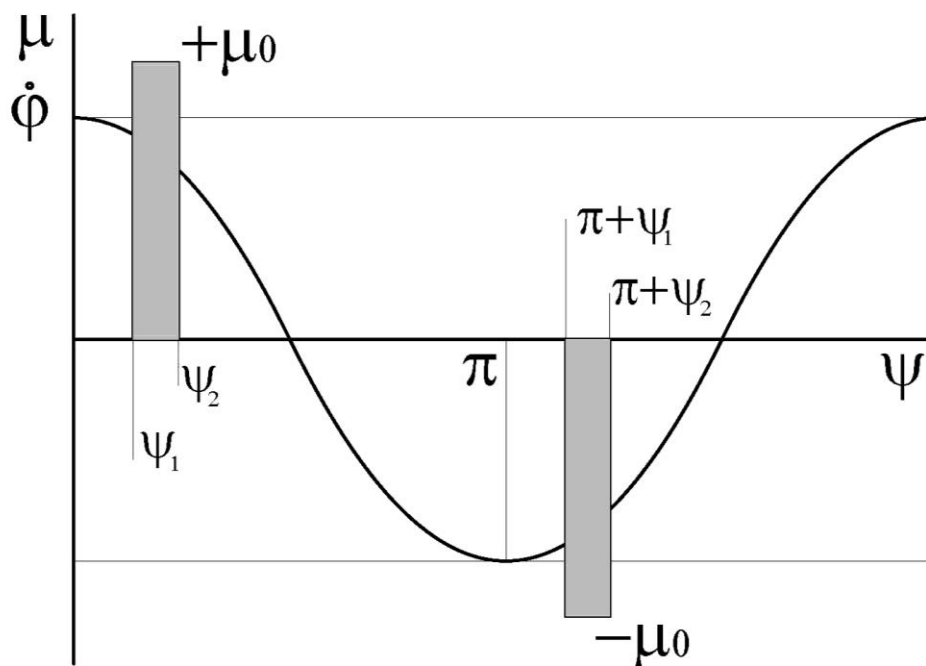
У овој глави дисертације биће извршена провера тачности формула за грешке запречно-импулсних механизма у квазистационарном режиму осциловања балансног точка, које су изведене применом теорије пертурбационог рачуна. Конкретно, коришћењем формула (5.82) и (5.83) односно, (5.84), израчунате су промене угаоне фреквенце ω_0 осциловања балансног точка (осцилатора) под утицајем принудног момента силе кога генеришу два различита модела запречно импулсних механизма. Затим, креирани су 3Д модели балансног точка и одговарајућих запречно импулсних механизма, извршене симулације њиховог рада и, на основу резултата ових симулација, такође одређене промене угаоне фреквенце ω_0 осцилатора. Упоредивањем теоријских резултата са резултатима симулације проверава се тачност формула (5.82), (5.83) и (5.84). Модели балансног точка и запречно-импулсних механизма, као и сам процес симулације и анализе кретања остварени су коришћењем апликације SolidWorks 2016.

Узимајући у обзир само динамичке карактеристике, сви запречно-импулсни механизми могу да се поделе у три велике групе: брадихрони, тахихрони и изохрони. Брадихроне запречнице продужавају, тахихроне скраћују а изохроне не мењају период сопствених осцилација балансног точка. У брадихроне запречнице спадају бројни типови запречно-импулсних механизма који се уграђују како у стационарне часовнике (на пример, Грејемова и Аман-Лепотова мирна запречница), тако и ручне сатове (на пример, дуплекс и цилиндарска односно, слободне - Швајцарска и Енглеска полужна запречница.) Као што је већ објашњено, њихова заједничка одлика је да генеришу периодични моменат силе који фазно касни за угаоном брзином обртања осцилатора (балансиног точка или клатна). Другим речима, брадихроне запречнице снабдевају осцилатор енергијом асиметрично у односу на равнотежни положај на такав начин да је половина укупног износа енергије по полупериоди осциловања предата осцилатору тек после његовог проласка кроз равнотежни положај. У тахихроне запречнице убрајају се сви запречно-импулсни механизми са повратним трзајем од којих су најпознатији котвени (или анкер) Клемент - Хукова запречница и Харисонов „grashopper“, као и запречнице са крунским точком које су се уграђивале у цепне сатове све до средине 19. века. У тахихроне запречнице убрајају се и сви гравитациони запречно-

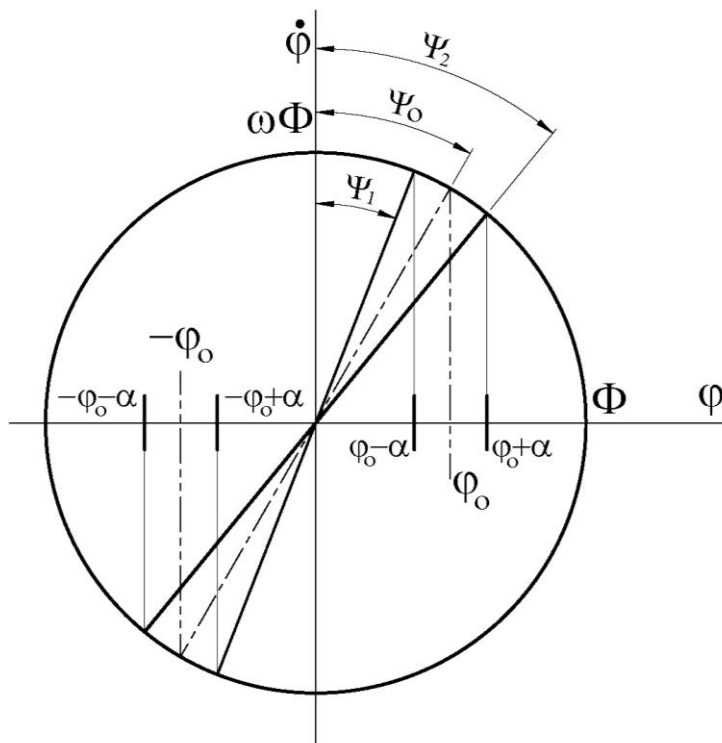
импулсни механизми којима су снабдевени велики, стационарни и торањски часовници, међу којима је свакако најпознатији Денисонова двострука трокрака гравитациона запречна. Њихова заједничка карактеристика је да генеришу периодични моменат силе који фазно предњачи у односу на угаону брзину обртања осцилатора. Другим речима, тахихроне запречнице снабдевају осцилатор енергијом асиметрично у односу на равнотежни положај на такав начин да је половина укупног износа енергије по полупериоди осциловања предата осцилатору пре његовог проласка кроз равнотежни положај. У изохроне запречнице спадају малобројне хронометарске (Арнолдова и Ерншоова запречна) које предају импулс балансног точка само у једној полупериоди осциловања балансног точка. Како овај импулс може да се конструктивно „центрира“ тако да буде у фази са угаоном брзином осциловања балансног точка, њихова главна особина је да снабдевају осцилатор енергијом симетрично у односу на равнотежни положај на такав начин да је половина укупног износа енергије по полупериоди осциловања предата осцилатору управо у тренутку његовог проласка кроз равнотежни положај. У овој глави дисертације креирана су и презентирана два математичка модела запречно импулсних механизма. Први је модел слободне запречнице који предаје осцилатору краткотрајне импулсе у свакој полупериоди његовог осциловања са брадихроним ефектом на ход сатног механизма. Други модел математички описује запречницу са повратним трзајем која врши непрекидну интеракцију са осцилатором и производи тахихрони ефекат на ход часовника.

Слободна запречна, као што је већ истакнуто, делује на балансни точак дискретним, периодичним моментом силе који фазно касни за угаоном брзином балансног точка. На слици (39) приказани су дијаграми угаоне брзине $\dot{\psi}$ балансног точка и специфичног момента силе μ , оба у функцији фазе осциловања ψ . Специфични моменат силе $\mu(\psi)$, константног интензитета μ_0 , фазно касни за угаоном брзином $\dot{\psi}(\psi)$ на такав начин да он делује на балансни точак само у интервалима $[\psi_1 + k\pi, \psi_2 + k\pi]$, $k = 0, 1, 2, 3 \dots$ и при томе наизменично мења смер. У овом примеру усвојено је да је интензитет специфичног момента силе μ константан, а у пракси он може бити и променљив као специфична функција $\mu = \mu(\varphi)$ сваког појединог запречног механизма. Под претпоставком да је амплитуда у току периода осциловања константна, на слици (40) приказан је фазни дијаграм

$(\dot{\phi}, \varphi) = (\dot{\phi}(\psi), \varphi(\psi))$ принудних пригушених осцилација балансног точка на кога делују моменти силе слободне запречнице.



Слика 39 Дијаграм угаоне брзине $\dot{\phi}$ балансног точка и специфичног момента силе $\mu(\psi)$ у функцији фазе осциловања ψ



Слика 40 Фазни дијаграм принудних пригушених осцилација балансног точка на кога делују моменти силе слободне запречнице

Као што је приказано на фазном дијаграму, ова врста запречно импулсног механизма ступа у интеракцију са осцилатором у два уска сегмента координате угаоног померања балансног точка $\varphi \in [\varphi_0 - \alpha, \varphi_0 + \alpha]$ и $\varphi \in [-\varphi_0 - \alpha, -\varphi_0 + \alpha]$, и делује на њега константним моментима силе, истог интензитета, али супротног смера. Углови φ_0 и α конструктивне су карактеристике запречно импулсног механизма. Веза између угаоних координата и фазе осциловања дата је следећим релацијама:

$$\begin{aligned}\psi_1 &= \arcsin \frac{\varphi_0 - \alpha}{\Phi}, \\ \psi_2 &= \arcsin \frac{\varphi_0 + \alpha}{\Phi}.\end{aligned}\quad (5.96)$$

Ако је амплитуда осциловања константна, а импулс запречнице краткотрајан ($\alpha \ll 1$), тада се може прихватити следећа апроксимација:

$$\psi_0 = \frac{\psi_1 + \psi_2}{2} = \frac{1}{2} \left(\arcsin \frac{\varphi_0 - \alpha}{\Phi} + \arcsin \frac{\varphi_0 + \alpha}{\Phi} \right), \quad (5.97)$$

која значи да угаоно средиште импулса приближно одговара фазном.

Формула, изведена у поглављу 5, која дефинише грешку запречно- импулсног механизма у квазистационарном режиму осциловања балансног точка гласи:

$$R = \left(\frac{d\gamma}{dt} \right)_{SR} = -\frac{\omega_0}{2Q} \cdot \oint_{\Phi} \frac{\mu(\varphi)\varphi d\varphi}{\sqrt{\Phi^2 - \varphi^2}} / \oint_{\Phi} \mu(\varphi) d\varphi, \quad (5.98)$$

у којој је Φ квазистационарна амплитуда осцилатора одређена следећом релацијом:

$$\Phi^2 = \frac{Q}{\pi\omega_0^2} \oint_{\Phi} \mu(\varphi) d\varphi. \quad (5.99)$$

Дакле, у формули (5.98) потребно је да се одреди решење следећег интеграла:

$$\oint_{\Phi} \frac{\mu(\varphi)\varphi d\varphi}{\sqrt{\Phi^2 - \varphi^2}} = \mu_0 \int_{\varphi_0 - \alpha}^{\varphi_0 + \alpha} \frac{\varphi d\varphi}{\sqrt{\Phi^2 - \varphi^2}} - \mu_0 \int_{-\varphi_0 + \alpha}^{-\varphi_0 - \alpha} \frac{\varphi d\varphi}{\sqrt{\Phi^2 - \varphi^2}}, \quad (5.100)$$

и оно гласи:

$$\oint_{\Phi} \frac{\mu(\varphi)\varphi d\varphi}{\sqrt{\Phi^2 - \varphi^2}} = 2\mu_0 \left(\sqrt{\Phi^2 - (\varphi_0 - \alpha)^2} - \sqrt{\Phi^2 - (\varphi_0 + \alpha)^2} \right). \quad (5.101)$$

У формулама (5.98) и (5.99) потребно је да се одреди решење следећег интеграла:

$$\oint_{\Phi} \mu(\varphi) d\varphi, \quad (5.102)$$

које гласи:

$$\oint_{\Phi} \mu(\varphi) d\varphi = \int_{\varphi_0-\alpha}^{\varphi_0+\alpha} \mu_0 d\varphi - \int_{-\varphi_0+\alpha}^{-\varphi_0-\alpha} \mu_0 d\varphi = 4\mu_0\alpha \quad (5.103)$$

Сагласно решењу (5.101) интеграла (5.100) и решењу (5.103) интеграла (5.102), оперативна формула на основу које се може ефективно израчунати грешка слободне запречнице дата је следећим изразом

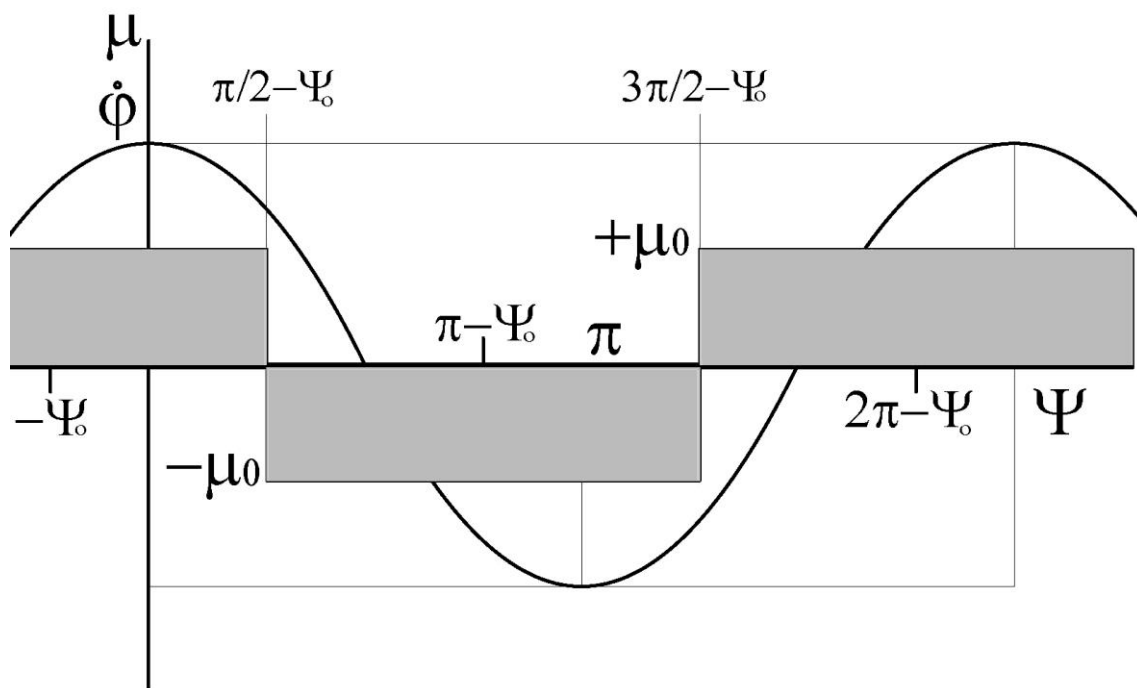
$$R = \left(\frac{d\gamma}{dt} \right)_{SR} = -\frac{\omega_0}{4Q} \cdot \frac{(\sqrt{\Phi^2 - (\varphi_0 - \alpha)^2} - \sqrt{\Phi^2 - (\varphi_0 + \alpha)^2})}{\alpha}. \quad (5.104)$$

Као што је већ наглашено, она одређује промену угаоне фреквенце сопствених осцилација балансног точка под брзихроним дејством принудног момента силе кога генерише слободни запречно импулсни механизам. Сагласно решењу (5.103) интеграла (5.102), оперативна формула на основу које може да се израчуна амплитуда у квазистационарном режиму осциловања балансног точка гласи:

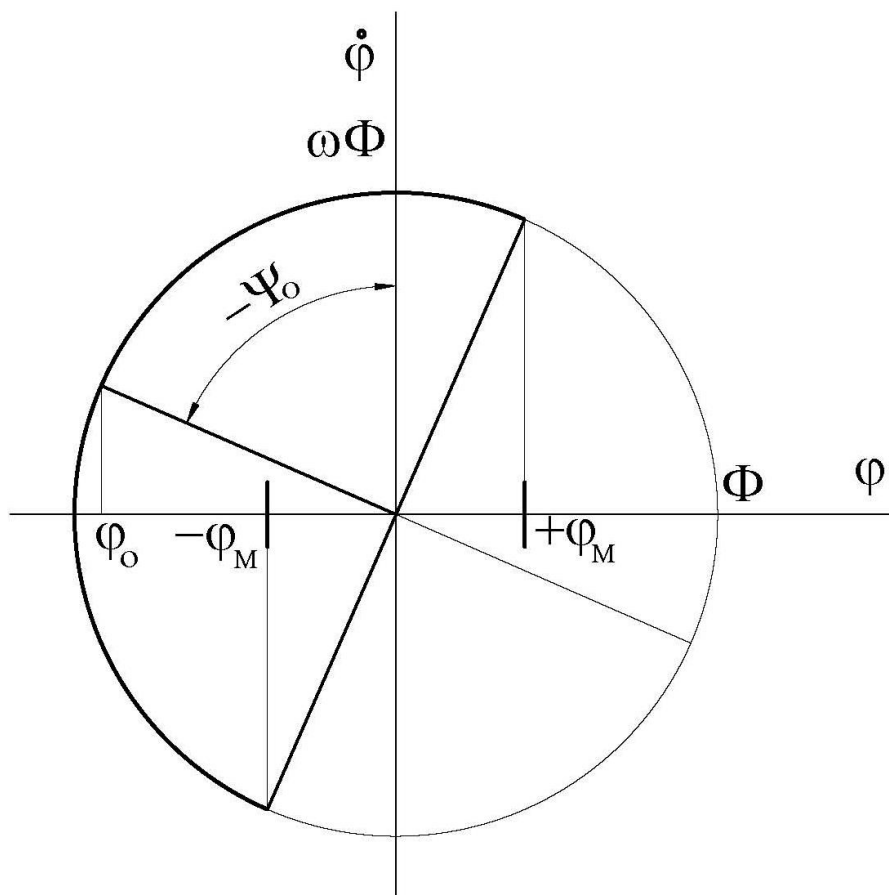
$$\Phi = \frac{2}{\omega_0} \sqrt{\frac{Q\mu_0\alpha}{\pi}} \quad (5.105)$$

Формула (5.104) проверава се непосредно, а формула (5.105) посредно, резултатима симулације и анализе кретања одговарајућег 3Д модела слободног запречно импулног механизма генерисаног апликацијом SolidWorks 2016.

Запречно-импулсни механизам са повратним трзајем, као што је већ истакнуто, делује на балансни точак непрекидно, периодичним моментом силе који фазно предњачи у односу на угаону брзину балансног точка. На слици (41) приказани су дијаграми угаоне брзине $\dot{\varphi}$ балансног точка и специфичног момента силе μ , оба у функцији фазе осциловања ψ . Специфични моменат силе $\mu(\psi)$, константног интензитета μ_0 , делује на балансни точак у интервалима $\left[\left(\frac{\pi}{2} - \psi_0 \right) + k\pi, \left(\frac{3\pi}{2} - \psi_0 \right) + k\pi \right]$, $k = 0, 1, 2, 3 \dots$ и при томе наизменично мења смер. Интензитет специфичног момента силе μ одабран је да буде константан у овом примеру, а у пракси он може бити и променљив и представља специфичну функцију $\mu = \mu(\varphi)$ самог запречног механизма. Под претпоставком да је амплитуда у току периода осциловања константна, на слици (42) приказан је фазни дијаграм $(\dot{\varphi}, \varphi) = (\dot{\varphi}(\psi), \varphi(\psi))$ принудних пригушених осцилација балансног точка на кога делују моменти силе запречно-импулног механизма са повратним трзајем.



Слика 41 Дијаграм угаоне брзине $\dot{\phi}$ балансног точка и специфичног момента силе $\mu(\psi)$, оба у функцији фазе осциловања ψ



Слика 42 Фазни дијаграм принудних пригушених осцилација балансног точка на кога делују моменти силе ЗИ механизма са повратним трзајем

Као што је приказано на фазном дијаграму, ова врста запречно импулсног механизма непрекидно је у интеракцији са осцилатором у следећим сегментима координате φ угаоног померања балансног точка:

$$\begin{aligned} (-\Phi) &\rightarrow (+\varphi_M), \mu_0 > 0, \\ (+\varphi_M) &\rightarrow (+\Phi), \mu_0 < 0, \\ (+\Phi) &\rightarrow (-\varphi_M), \mu_0 < 0, \\ (-\varphi_M) &\rightarrow (-\Phi), \mu_0 > 0 \end{aligned} \quad (5.106)$$

и делује на њега моментима силе константног интензитета, али променљивог смера. Интервал угаоне координате $\varphi \in (-\varphi_M, +\varphi_M)$ конструктивна је карактеристика свих запречница са повратним трзајем и представља угао спрезања палета запречно импулсног механизма са зупцима запречног точка. Он дговара оној минималној амплитуди осциловања балансног точка или клатна која обезбеђује континуирани рад запречнице. Ако би амплитуда осцилатора била мања од угла спрезања палета, запречница не би могла да функционише и сатни механизам би стао.

Дакле, да би се одредила грешка запречно импулсног механизма са повратним трзајем, потребно је да се у формули (5.98) одреди решење следећег интеграла:

$$\begin{aligned} \oint_{\Phi} \frac{\mu(\varphi)\varphi d\varphi}{\sqrt{\Phi^2 - \varphi^2}} &= +\mu_0 \int_{-\Phi}^{+\varphi_M} \frac{\varphi d\varphi}{+\sqrt{\Phi^2 - \varphi^2}} - \mu_0 \int_{+\varphi_M}^{+\Phi} \frac{\varphi d\varphi}{+\sqrt{\Phi^2 - \varphi^2}} - \\ &- \mu_0 \int_{+\Phi}^{-\varphi_M} \frac{\varphi d\varphi}{-\sqrt{\Phi^2 - \varphi^2}} + \mu_0 \int_{-\varphi_M}^{-\Phi} \frac{\varphi d\varphi}{-\sqrt{\Phi^2 - \varphi^2}} \end{aligned} \quad (5.107)$$

и оно гласи:

$$\oint_{\Phi} \frac{\mu(\varphi)\varphi d\varphi}{\sqrt{\Phi^2 - \varphi^2}} = -4\mu_0\sqrt{\Phi^2 - \varphi_M^2}. \quad (5.108)$$

У формулама (5.98) и (5.99) потребно је да се одреди решење следећег интеграла:

$$\oint_{\Phi} \mu(\varphi) d\varphi = +\mu_0 \int_{-\Phi}^{+\varphi_M} d\varphi - \mu_0 \int_{+\varphi_M}^{+\Phi} d\varphi - \mu_0 \int_{+\Phi}^{-\varphi_M} d\varphi + \mu_0 \int_{-\varphi_M}^{-\Phi} d\varphi, \quad (5.109)$$

које гласи:

$$\oint_{\Phi} \mu(\varphi) d\varphi = 4\mu_0\varphi_M \quad (5.110)$$

Сагласно решењу (5.108) интеграла (5.107) и решењу (5.110) интеграла (5.109), оперативна формула на основу које се може ефективно израчунати грешка запречно импулсног механизма са повратним трзајем дата је следећим изразом:

$$R = \left(\frac{d\gamma}{dt} \right)_{SR} = + \frac{\omega_0}{2Q} \cdot \frac{\sqrt{\Phi^2 - \varphi_M^2}}{\varphi_M}. \quad (5.111)$$

Као што је већ наглашено, релација (5.111) одређује промену угаоне фреквенце сопствених осцилација балансног точка под тахихроним дејством принудног момента силе кога генерише запречно импулсни механизам са повратним трзајем. Из саме формуле (5.111) непосредно происходи да запречница са повратним трзајем ради исправно ако је амплитуда осциловања Φ већа или једнака од угла спрезања палета φ_M . Једино у граничном случају $\Phi = \varphi_M$ овај тип запречнице ради без повратног трзаја и не генерише грешку односно, промену сопствене фреквенце осцилатора. Грешка запречнице постоји ако је $\Phi > \varphi_M$ и тада осцилатор ради са повратним трзајем. У пракси, осцилатор спрегнут са запречно импулсни механизам са повратним трзајем снабдева се увек толиким износом енергијом да је $\Phi > \varphi_M$, чиме се обезбеђује сигуран и постојан ход сатног механизма. Сагласно решењу (5.110) интеграла (5.109), оперативна формула на основу које може да се израчуна амплитуда у квазистационарном режиму осциловања балансног точка гласи:

$$\Phi = \frac{2}{\omega_0} \sqrt{\frac{\varphi_M Q \mu_0}{\pi}} \quad (5.112)$$

Формула (5.111) проверава се непосредно, а формула (5.112) посредно, резултатима симулације и анализе кретања одговарајућег 3Д модела запречно импулсног механизма са повратним трзајем генерисаног апликацијом SolidWorks 2016.

6. Остали делови сата

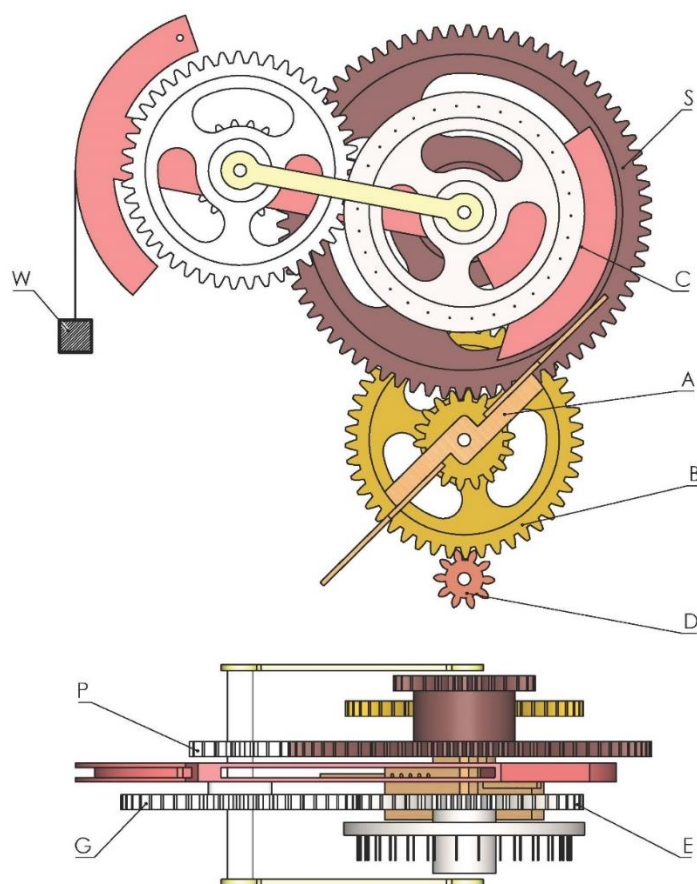
6.1 Ремонтоар

Још од Кријстијана Хајгенса позната је чињеница како период зависи од амплитуде и на тај начин физичко клатно није изохрони процес. У претходном поглављу је објашњена циркуларна грешка која се јавља код осцилатора а један од начина за умањивање грешке је уз помоћ ремонтара. Механизам ремонтара је подсклоп код механичких часовника и може се често видети у великим торњевима са сатом, као и код јавних часовника. Најважнија сврха овог механизма је да обезбеђује секундарни, уједначени и константни извор навијања за запречно-импулсни механизам и на тај начин обезбеђује тачност сата. Израз ремонтар потиче од француске речи “Remontoir” што значи намотавати, навијати. Први гравитациони ремонтар је направио Јост Бурги (Jost Bürgi 1552-1631) у Швајцарској 1595. године, док је први ремонтар са опругом развио Џон Харисон 1739. године за потребе свог поморског хронометра.

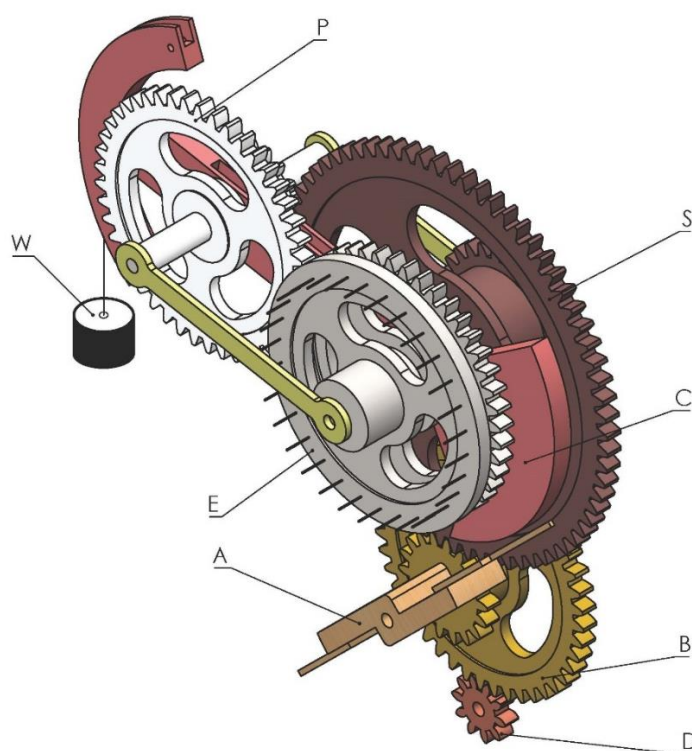
Да би синтеза механизма ремонтара била јасна и разумљива, морају се нагласити следећи захтеви као и сврха механизма:

- 1) Физички раздвојити запречно-импулсни механизам од остатка сата. Ово се постиже тако што се точак запречно-импулсног механизма раздвоји од остатка преносне групе (поглавље 6.2). Запречно-импулсни механизам се повезује са преносном групом преко ремонтара.
- 2) Да омогући помоћни и константни извор енергије за запречно-импулсни механизам који је независан од нестабилног преноса зупчаницима. Тај помоћни извор енергије за запречно-импулсни механизма се остварује преко полуге за коју је закачен тег.
- 3) Да периодично подигне горе наведени тег тако што ће користити снагу предату са клатна или балансне опруге. Овај захтев мора бити изведен тако да омогући несметани рад запречно-импулсног механизма.

На основу свих наведених захтева за потребе часовника у овој дисертацији користиће се гравитациони ремонтар и његови основни делови ремонтара су приказани на сликама 43 и 44. Зупчаник Е, који уједно представља и запречни точак код запречно импулсног механизма, спрегнут је са зупчаником Г на полузи С. На полузи С се такође налазе и зупчаници Р и S који су међусобно спрегнути.



Слика 43 Склоп ремонтара и основни делови



Слика 44 Склоп ремонтара

Зупчаник Р је на чврсто везан за супчаник G на осовини PG и спрегнут је са супчаником S. Осовина ES на којој се налазе супчаници E и S као и полуга C је непомична.

Полуга C преноси потенцијалну енергију масе тега W на запречни точак у виду кинетичке енергије. На тај начин запречно-импулсни механизам даје ротацију запречно-импулсном механизму. Супчаник Р орбитира око супчаника S. На доњој страни супчаника S спрегнут је супчаник B који преноси број обртаја на супчаник D који је повезан са „ветрењачом“ да уједначи обртање крака A. који је у истој равни са полугом C. Принцип рада ремонтара је приказан на слици 45.

Рад ремонтара се може поделити у две фазе које се понављају: опадајуће (сл. 45 а, б и в) и узлазна (сл. 45 г, д и ђ).

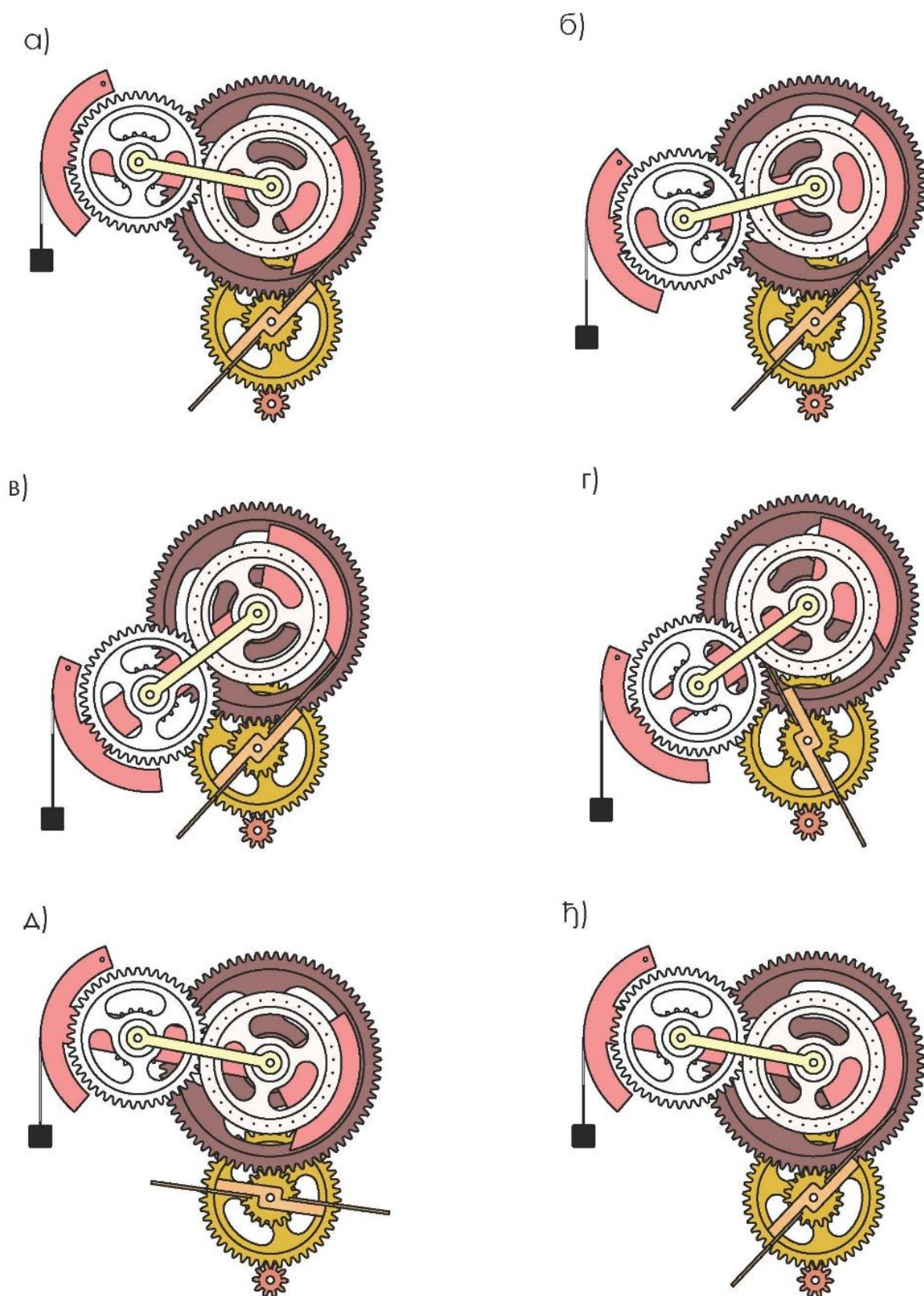
Фаза опадања:

- крак A додирује брег на полузи C и закључава полугу ремонтара у горњи положај (сл. 45а)
- тег масе W почиње да повлачи полугу C на доле и крак A клизи по брегу полуге C (слика 45б). Енергија која је том приликом предата запречном точку потиче од тежине тега W. Запречно импулсни механизам дефинише темпо спуштања полуге C.
- крак A је достигао критичну тачку и тада престаје контакт између крака A и брега полуге C (слика 45в)

Узлазна фаза:

- након што престане контакт између крака A и полуге C почиње ротација крака A. Главни извор напајања се преноси на ремонтар и полуга C почиње да се подиже око осовине ES (слика 45г).
- Супчаници E и S имају исти смер ротације а током ротације S супчаника ротације се преноси на ваздушну кочницу на супчанику D.
- Циклус се завршава тако што крак A додирне брег на полузи C а тег W је у свом максимално највишем положају (слика 45ђ).

Иако се не види на први поглед важно је напоменути да моменат који прави тег W се испоручује запречном точку E током обе фазе рада (узлазне и силазне). Такође, тај сила је константна и непрекидна што чини тег главним извором за запречно-импулсни механизам. Потенцијална енергија тега се повремено допуњује од стране главног навијања сата пре него што заврши свој циклус и пређе у најнижи положај.



Слика 45 Принцип рада ремонтара

Сви параметри неопходни за прорачун величине ремонтара могу се видети у раду [19]. У табели 3 су дате вредности за одређени ремонтар који се користи у овој дисертацији за потребе симулације рада часовника и испитивања утицаја нелинеарних параметара.

За сваки зупчаник је приказан полупречник као и његова угаона брзина у зависности у којој се фази налазе (узлазној или силазној).

Табела 3 Параметри ремонтара

	E	G	P	S	L	B
r [mm]	100	100	40	160	~	40
ω [rpm]	1/2	5/6	5/6	1/8	1/6	1/2
фаза	↓	↓	↓	↑	↓(↑)	↑

6.2 Преносни механизам

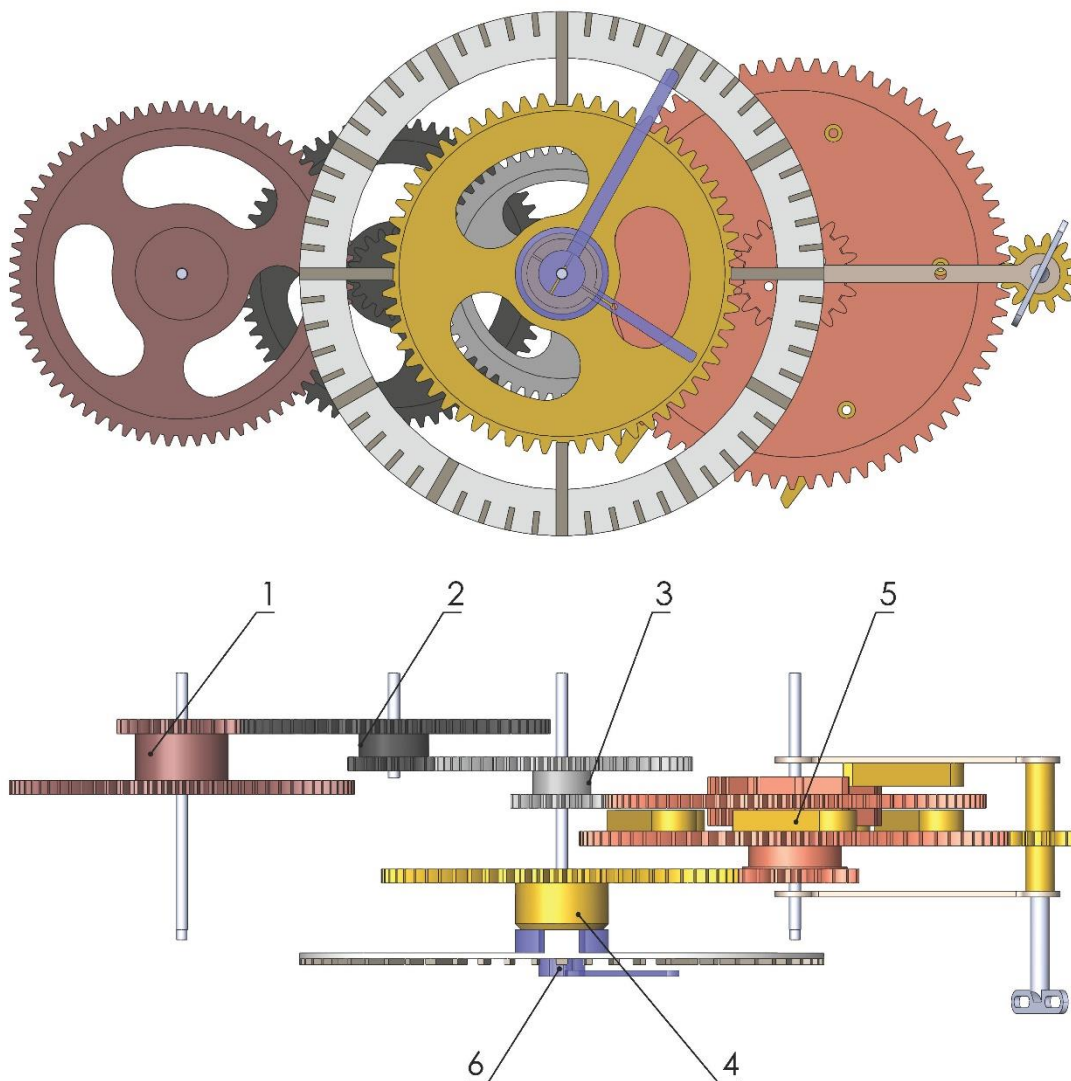
Преносни механизам је систем спрегнутих зупчаника који преносе погонску енергију од погонског механизма до запречнице (запречно-импулсног механизма), осцилатора и подсистема за приказивање времена [70].

На слици 46 је приказана преносни за пренос погонског момента. Основни делови су:

- 1) Зупчаник ремонтара
- 2) Зупчаник рем. – мин.
- 3) Зупчаник минутни
- 4) Зупчаник часовни
- 5) Систем за навијање
- 6) Подсистем за приказивање времена

Исправан рад подсистема за приказивање времена је омогућен адекватним радним преносним односима. Информацију о протеклим часовима даје зупчаник часовни који треба да изврши 2 обртаја дневно. Зупчаник минутни изврши 1 обртај на час а зупчаник који приказује секунде изврши један обртај у минути. Сходно томе радни преносни односи или односи угаоних брзина часовног, минутног и секунднoг зупчаника су 1:12:720. Да би сва три зупчаника имала исти смер неопходно је убацити по још један зупчаник између њих. Како у истим односима

опада погонски момент регулисање хода на запречном точку врши се веома малим импулсима силе. У претходном поглављу описан је рад ремонтара и његов запречни точак представља секундни зупчаник.



Слика 46 Преносни механизам

Запречни точак носи информацију о секундама и преносни однос од запречног точка до излаза из ремонтара је $i=8$. Након ремонтара преносни однос иде са зупчаника ремонтара на зупчаник рем.-мин. и износи $i=2,5$, а између зупчаника рем.-мин. и зупчаника минутног преносни однос износи $i=3$. Као што је већ речено, преносни однос између сатног и минутног зупчаника износи $1:12$. Са минутне на склоп за навијање преносни однос је $i=4$ а са склопа за навијање и сатног зупчаника је $i=3$. Зупчаник сатног и зупчаник минутног су коаксијални а проблем

осног растојања је решен тако што је један пар зупчаника модула 4 а број зубаца 20 и 80 а други пар зупчаника је модула 5 а број зубаца 20 и 60.

Подсистем за приказивање времена има задатак да визуелно и / или звучно саопштава информације о тачном времену. У свом најједноставнијем облику чине га бројчане са часовним, минутним и евентуално, секундном казаљком. Насупрот томе, најсложеније приказивање времена је присутно код астрономских јавних часовника какав је, на пример, Прашки Орлој. Као што је илустровано сликом 47, осим локалног соларног времена, он даје и комплексну визуелну информацију о низу астрономских и астролошких догађаја на покретној стереографској пројекцији небеске сфере. Присутни су: положај Сунца на еклиптици, положај и фаза Месеца на небу, прстен Зодијака, положај тачке пролећне равнодневице и сидеричко време, делови небеске сфере изнад и испод хоризонта, као и зона сумрака.



Слика 47 - "Прашки Орлој"

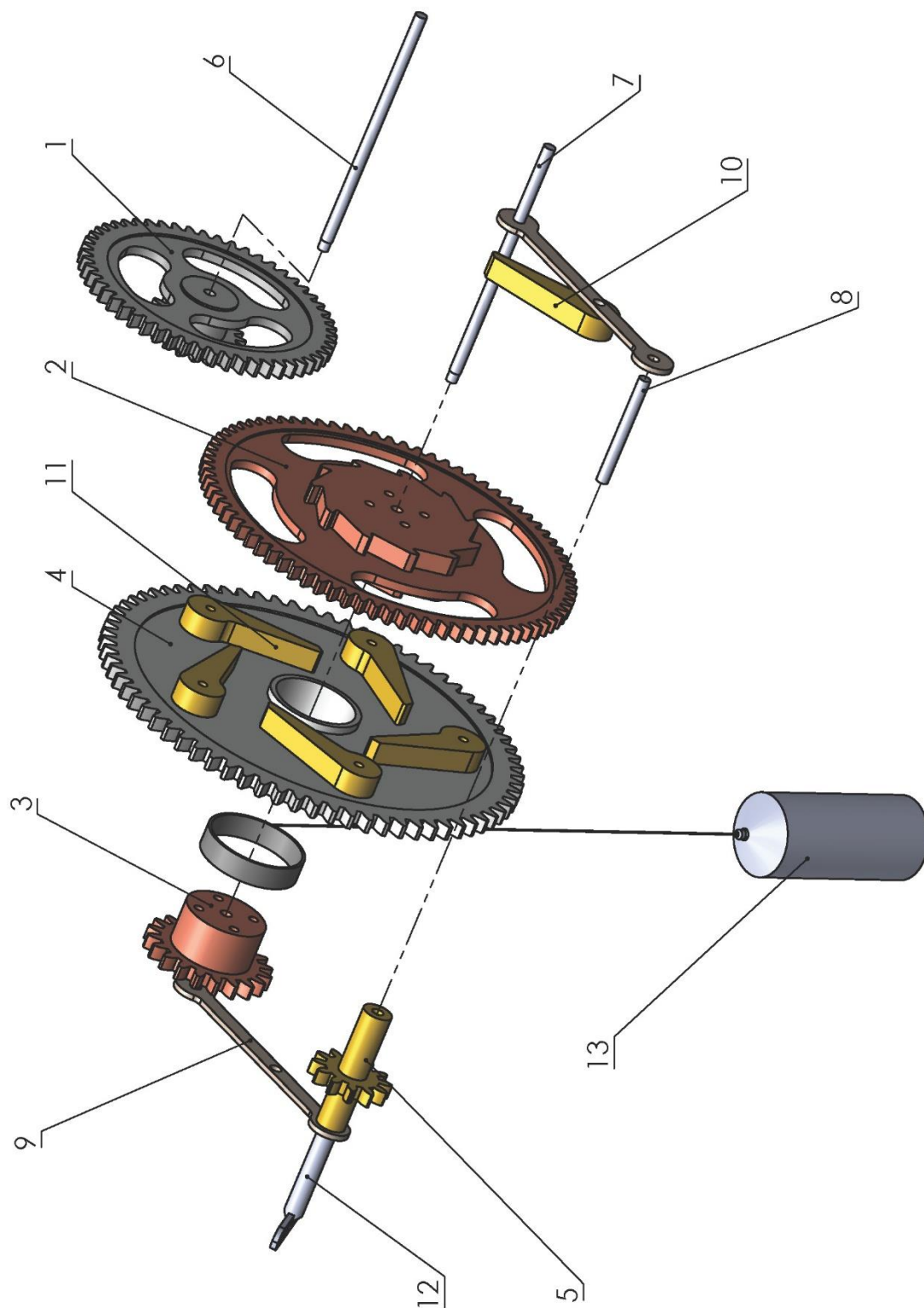
6.3 Механизам за навијања часовника

Механизам за навијање часовника је приказан на сликама 48 и 49. Погонски моменат потиче од тега (13) на ужету које је намотано на добош. Добош је чврсто повезан са зупчаником за навијање (4). На зупчанику за навијање (4) су радијално распоређене „клик“ полуге (11) једносмерне спојнице која је везана за зупчаник (2). Зупчаник (2) и зупчаник (3) су круто међусобно повезани а преко ова два зупчаника се преноси однос са минутног зупчаника (1) на сатни зупчаник као што је описано у претходном поглављу 6.2. Зупчаник (5) спреже се са зупчаником (4) а постављен је на носач који чине: две полуге (9), осовина (8) на којој се налази зупчаник (5) и кључ за навијање (12) који су круто међусобно повезани. На носачу се налази се „клик“ полуга (10) која се спреже са још једном спојницом на зупчанику (2).

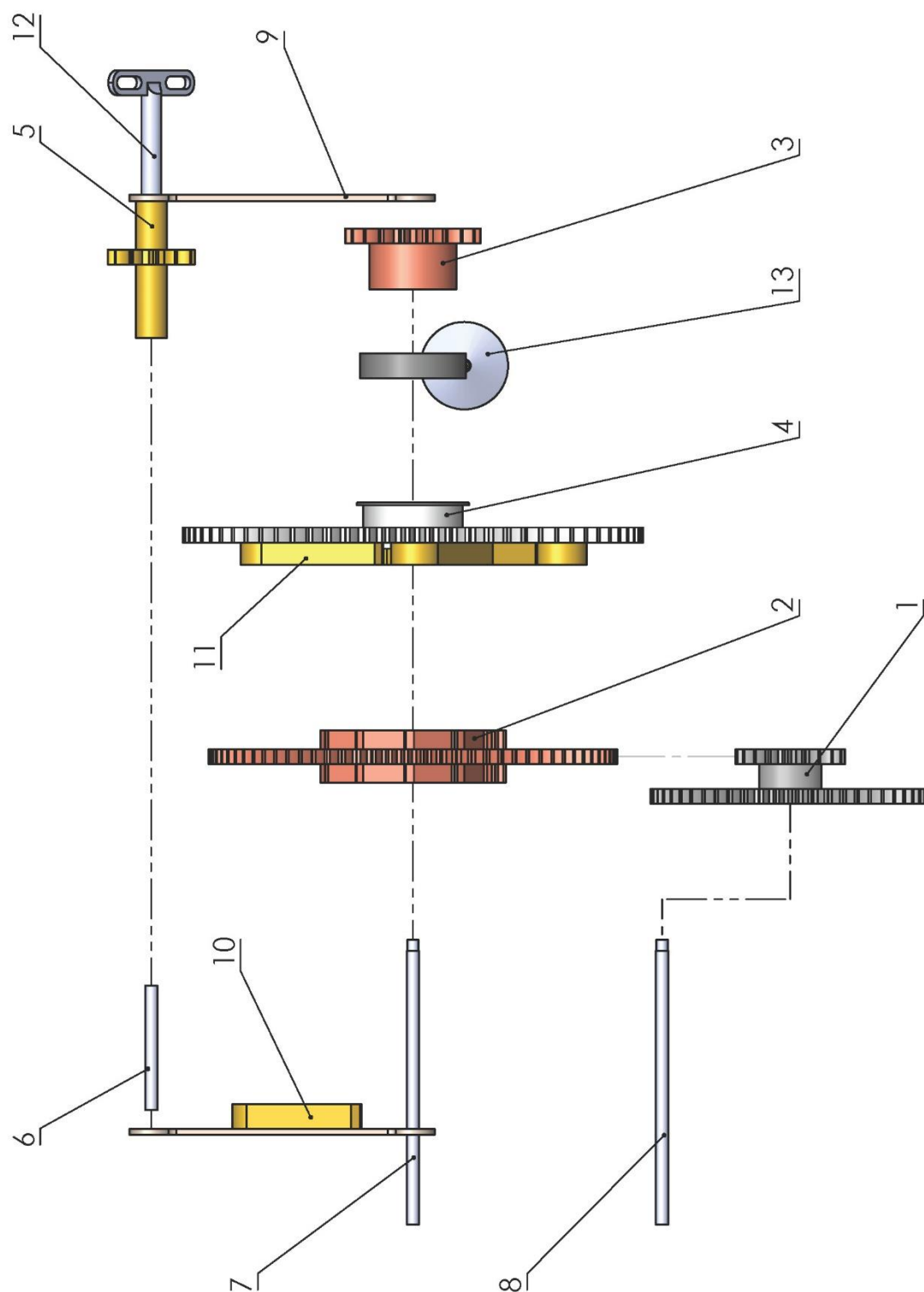
Као што је већ речено, погонски моменат читавог сатног механизма потиче од тега (13) који виси окачен о уже намотано на добош на зупчанику (4). Погонски моменат се потом преко „клик“ полуга (11) преноси на једносмерну спојницу зупчаника (2). После неког времена, тег падне на ниво када је неопходно да се сат навије. Окретањем зупчаника (5) преко кључа (12) у смеру супротном од смера казаљке на сату покреће се зупчаник (4) тако да се на добош намотава уже и подиже тег (13). Услед тога се „клик“ полуга (11) одваја од једносмерне спојнице и престаје преношење погонског момента на велики точак. Да сат не би стао, „клик“ полуга (10) спреже се са једносмерном спојницом и одржава погонски моменат докле год се тег подиже. У тренутку прекида навијања „клик“ полуга (11) се поново спреже са спојницом и погонски моменат се несметано преноси на велики точак. Навијање (подизање) тега (13) почиње слободним окретањем зупчаника (5) који се котрља по зупчанику (4) и подиже носач навише све док „клик“ полуга (10) не упадне у зуб спојнице. Тек тада тег почиње да се подиже али тако да се погонски моменат на зупчанику (2) не умањује или било који други начин ремети.

Овакав систем за навијање се може најчешће наћи у старим стојећим часовницима са теговима (енг. Grandfather clock). Као највећу предност овог система за навијање је то што не сат може да се навија док ради. На слици 50 је приказана једносмерна спојница са „клик“ полугама (11) приликом пребацивања момента са зупчаника (4) на зупчаник (2). Слика 51 приказује тренутак када је

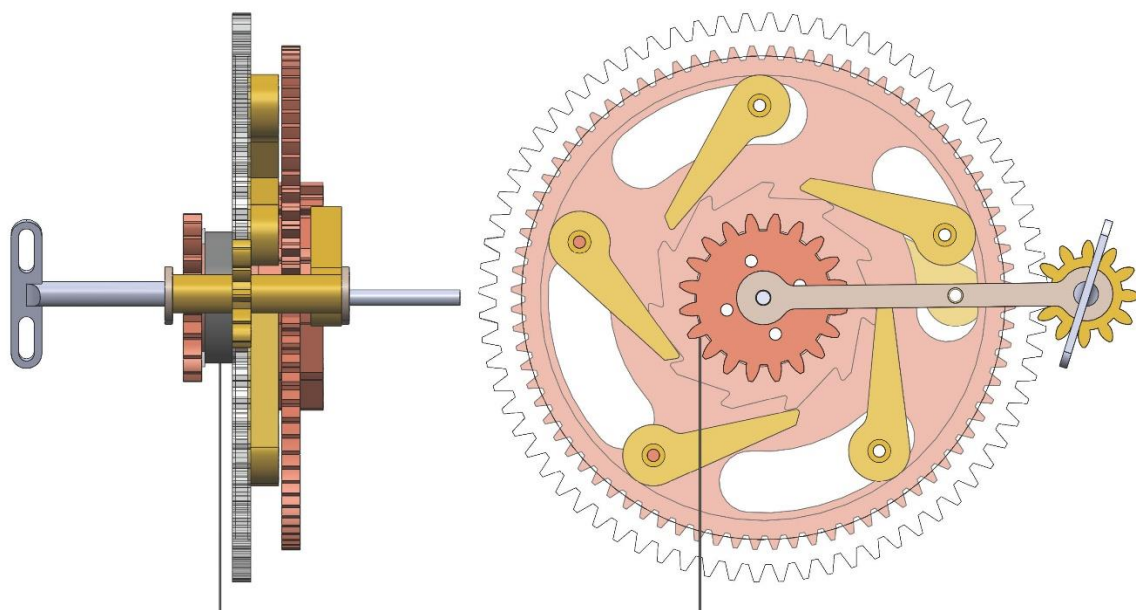
„клик“ полука упала у једносмерну спојницу на зупчанику (2) приликом окретања зупчаника (5).



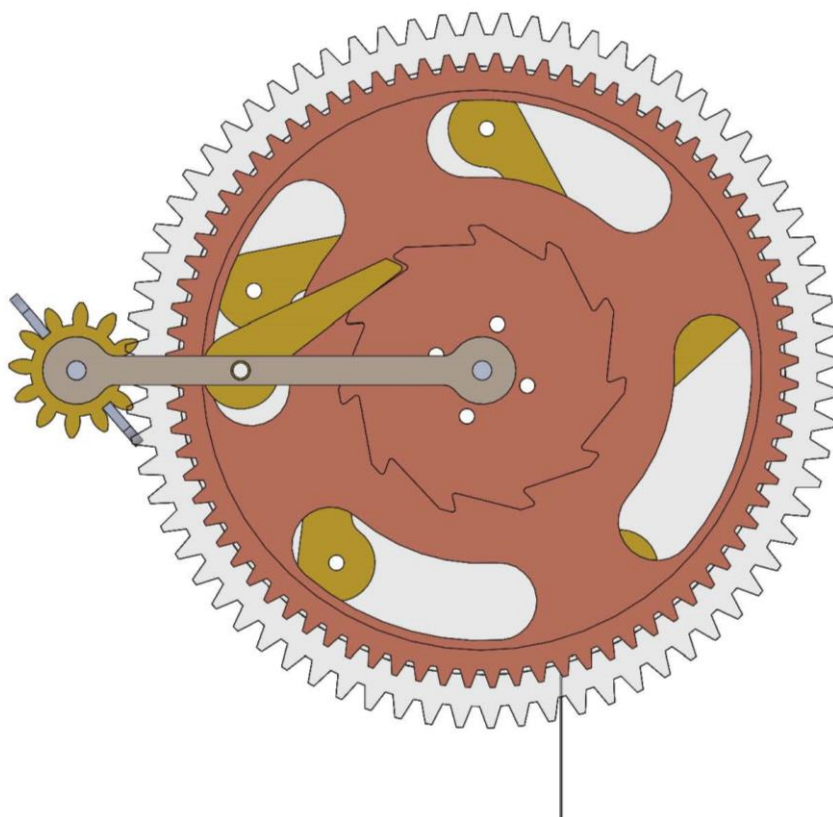
Слика 48 Развучени приказ подсклопа за навијање (изометрија)



Слика 49 Развучени приказ подсклопа за навијање (поглед одозго)



Слика 50 Подсклоп за навијање



Слика 51 Подсклоп за навијање

7. 3Д модел сатног механизма и симулација рада

7.1 3Д модел часовника

Претходна поглавља дају описе и прорачуне појединачних делова сатног механизма. Поглавље 2 је приказује развој сатних механизма кроз историју, поглавље 4 даје увид у две врсте осцилатора које се користе у сатовима. Поглавље 5 „Запречно-импулсни механизми“ приказује прорачун и даје ред величине за грешку запречно-импулсног механизма. Такође, 5. поглавље даје и приказ најчешће коришћене запречно-импулсне механизме при изради часовника. Како би се показало да грешка запречно-импулсног механизма одговара величини описаној у петом поглављу неопходно је да се направи адекватан модел на коме би могла да се уради симулација рада часовника и измере евентуалне грешке које се појављују. У радовима [71] и [72] је приказано да је симулација рада различитих механизма, у софтверском пакету SolidWorks, оправдала тачност и показали да је могуће извести симулације.

Модел часовника који се користи за симулације је приказан на сликама 46-57. Потреба за моделирањем часовника је исказа у жељи да се провери, пре свега, геометријска исправност свих делова сата. Геометријске карактеристике су директан производ кинематичких захтева самог часовника. Са кинематичке стране часовник представља осцилатор који је преко запречно-импулсног механизма снабдева зупчанике часовника равномерним кретањем док зупчаници преносе потенцијалну енергију тегова у кинетичку енергију. На сликама 52, 53 и 54 је приказан комплетан сат а на сликама 55-63 су приказани појединачни подсклопови спојени у једну целину.

Часовник се састоји из следећих подсклопова:

- Непомичног рама
- Клатна
- Запречно импулсног механизма - „Grasshopper“
- Преносне групе
- Ремонтоара
- Механизма за навијање.

Непомични рам (слика 63) се састоји из два ослонца између којих се налази рам у облику слова „Т“. Рам је замишљен тако да омогућава часовнику да се окачи на зид.

Као осцилатор, за потребе ове симулације, користи се клатно (слика 64) које има период осциловања од 2 секунде. У само клатно је уграђен систем за компензацију температуре о чему је било речи у поглављу 4.4.1 Температурна компензација клатна. Такође, одабир клатна као осцилатора је урађено и из практичних разлога зато што лакше за симулацију него балансни точак. Клатно је окачено о непомични рам и виси окачено за перо.

Због својства да не захтева подмазивање изабран је чувени „Grasshopper“ Цона Харисона (John Harrison, 1693.-1776.). Овај запречно-импулсни механизам Харисон је користио у првом поморском хронометру „N1“ и на тај начин решио „проблем лонгитуде“ [20]. На сликама 59 и 65 је приказан овај запречно-импулсни механизам. Контакт између палета и запречног точка је остварен коришћењем команде „contact surface“ и приказан је реалан контакт између површина на палетама и трнова на запречном точку. Клатно је, као што је већ речено, клатно чији период осциловања траје 2 секунде. Сходно томе, запречни точак има 30 трнова и на тај начин запречни точак уз помоћ „Grasshopper“ направи један обртај за 60 секунди.

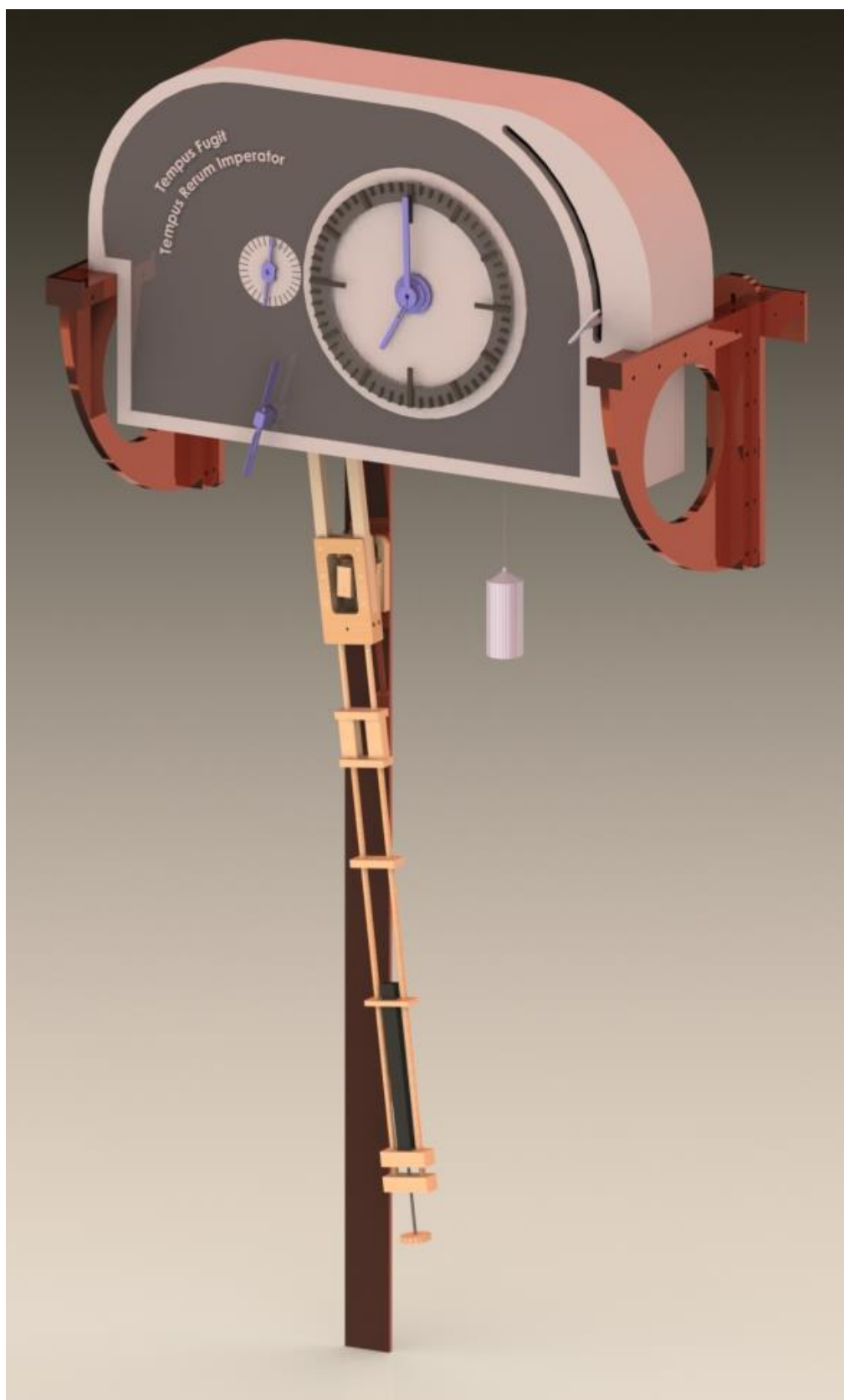
Преносну групу (слика 60) чине зупчаници који су упарени тако да преносе одређене односе са запречно импулсног механизма до подсистема за приказивање времена. О овој групи детаљнији приказ се може наћи у поглављу 6.2 „Преносни механизам“. У поглављу 6.2 су дати модул и број зубаца сваког зупчаника ове групе. Симулација у реалном времену је показала да је одабир зупчаника добар и да одговара траженим захтевима.

Механизам за навијање часовника снабдева цео механизма сата потребном механичком енергијом и приказан је на слици 61. Као што је већ речено у поглављу 6.3 читав механизам је направљен тако да омогућава навијање часовника док часовник ради тј. без заустављања механизма часовника.

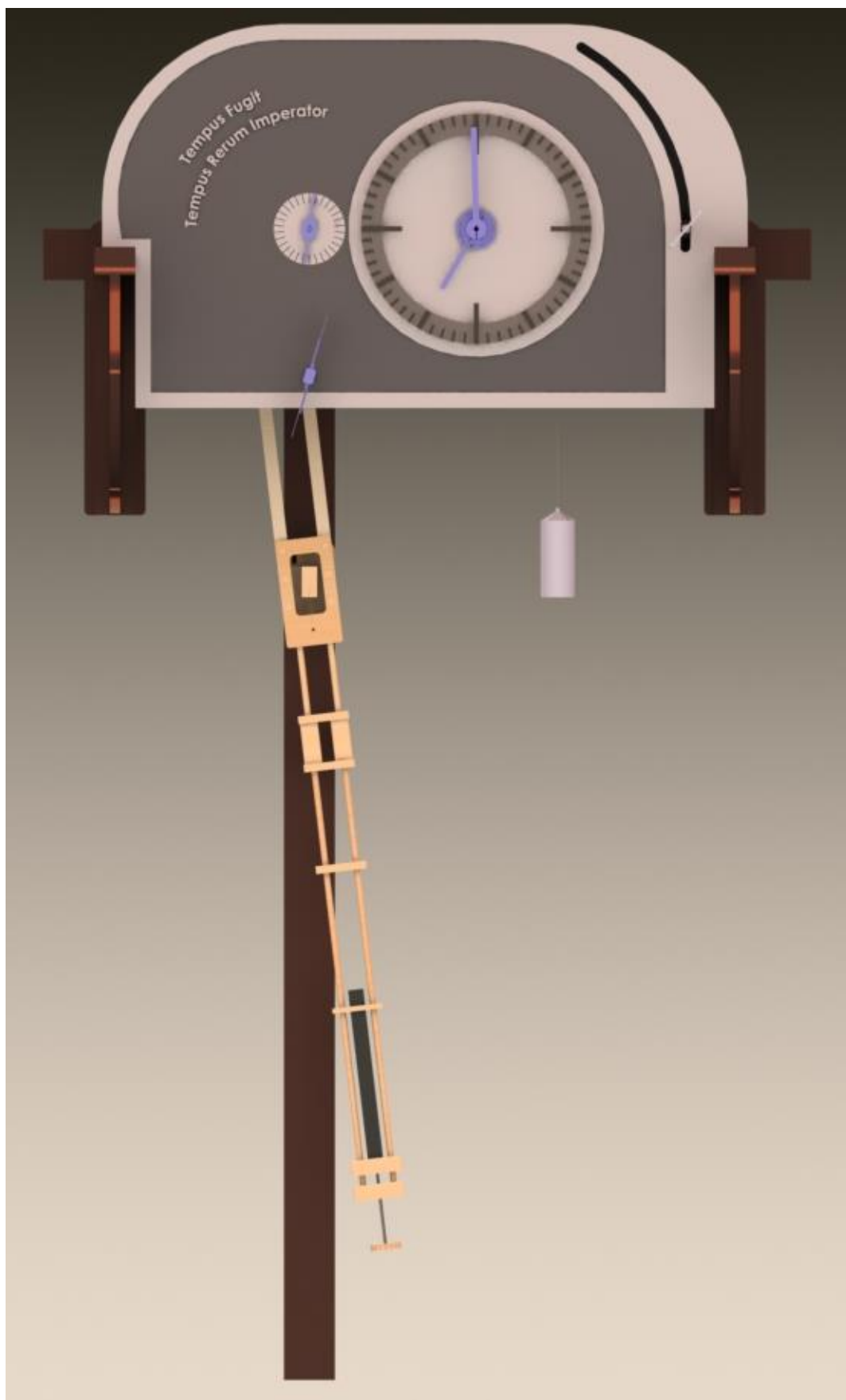
Ремонтоар је детаљно објашњен у поглављу 6.1 и представља помоћни извор енергије за запречно-импулсни механизам. На слици 56 може се видети ремонтоар уклопљен у часовник.

Сprovedена је симулација часовника током које су сви делови сата показали да су геометријски исправни и да кинематичке везе подешене у софтверском пакету SolidWorks одговарају реалним условима у којима ради сат. Као недостатак ових симулација може се навести чињеница да овај софтверски пакет не поседује

могућност провере рада механизма у условима када се температура и притисак мењају тако да то остаје као предмет будућих истраживања.



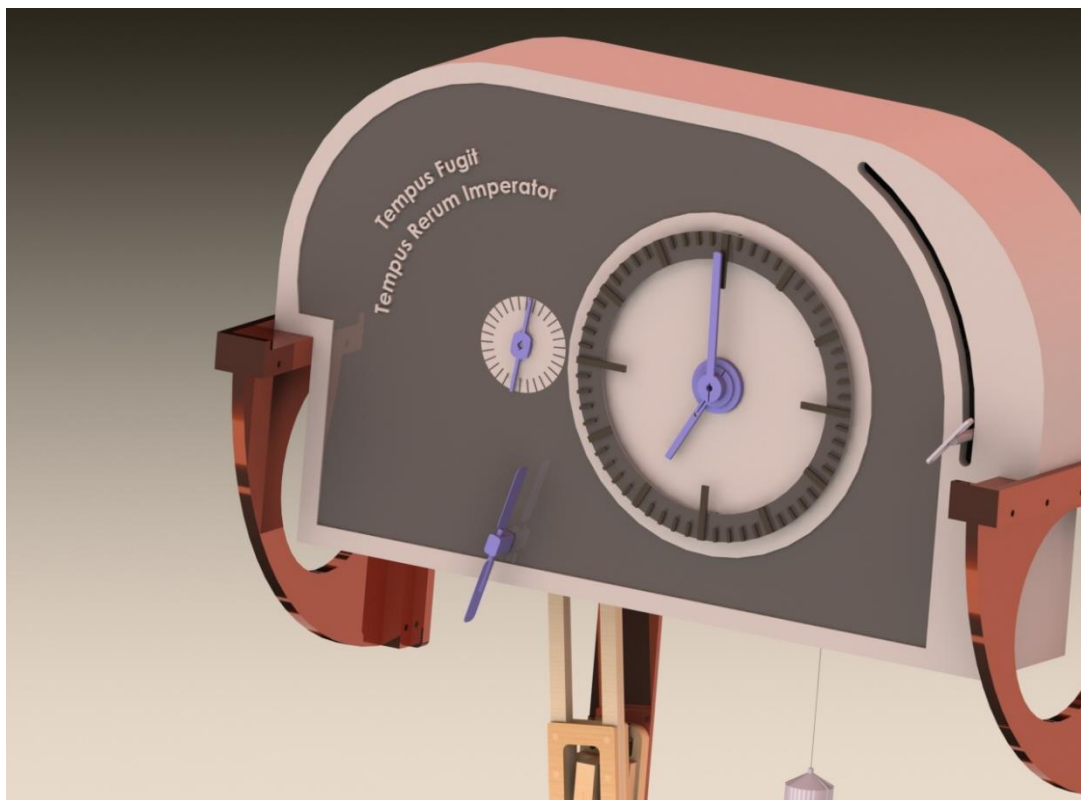
Слика 52 Модел сата



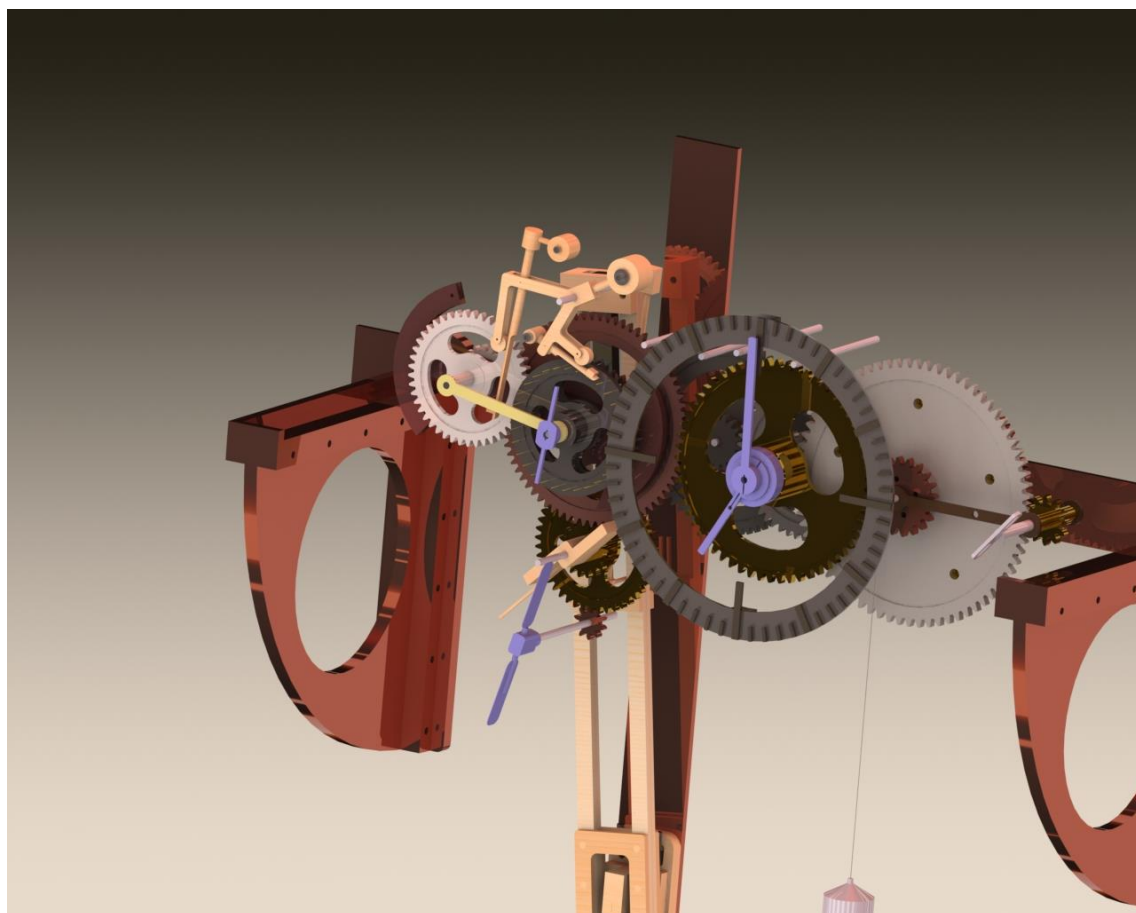
Слика 53 Модел сата



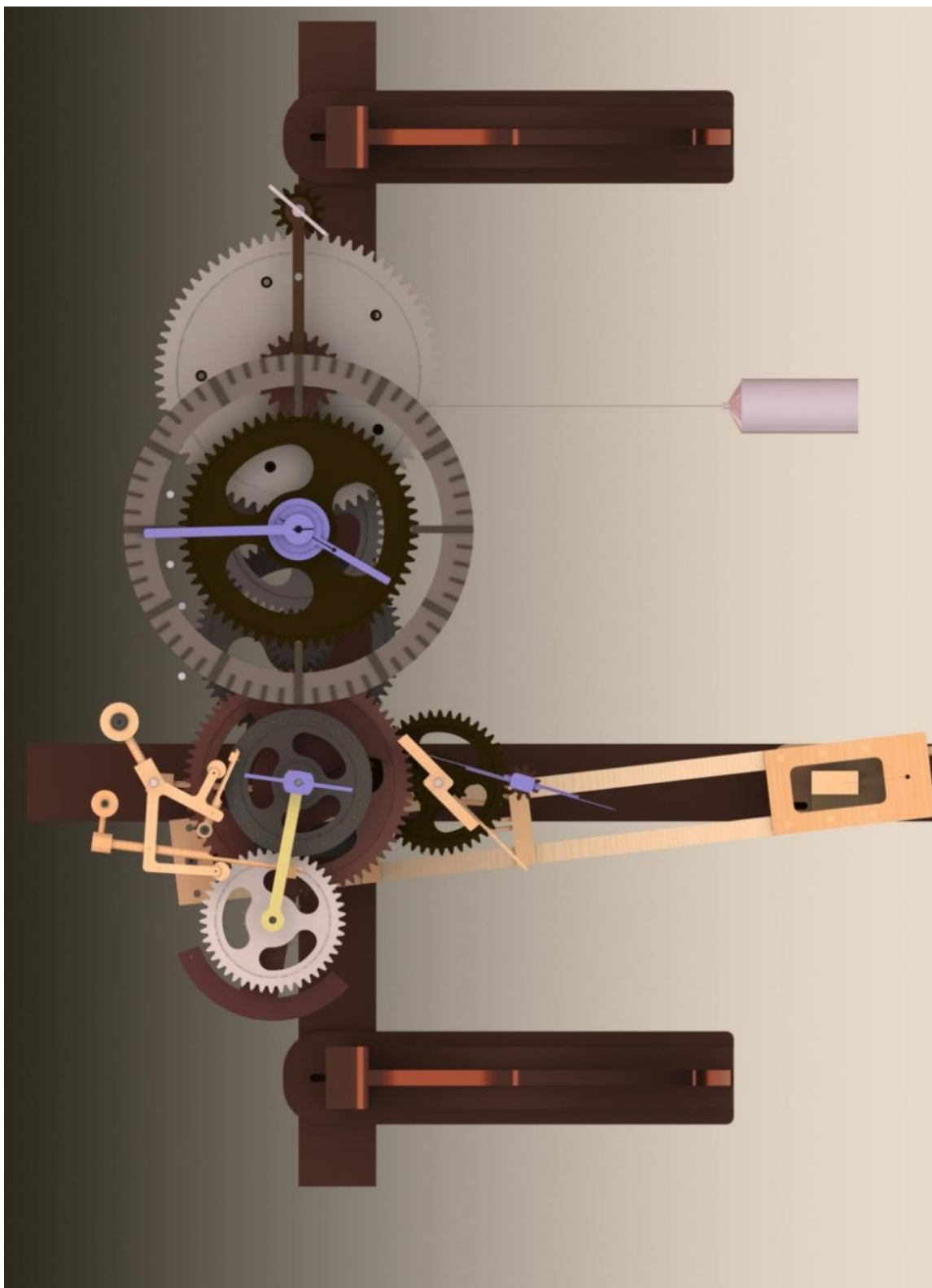
Слика 54 Модел целог сата



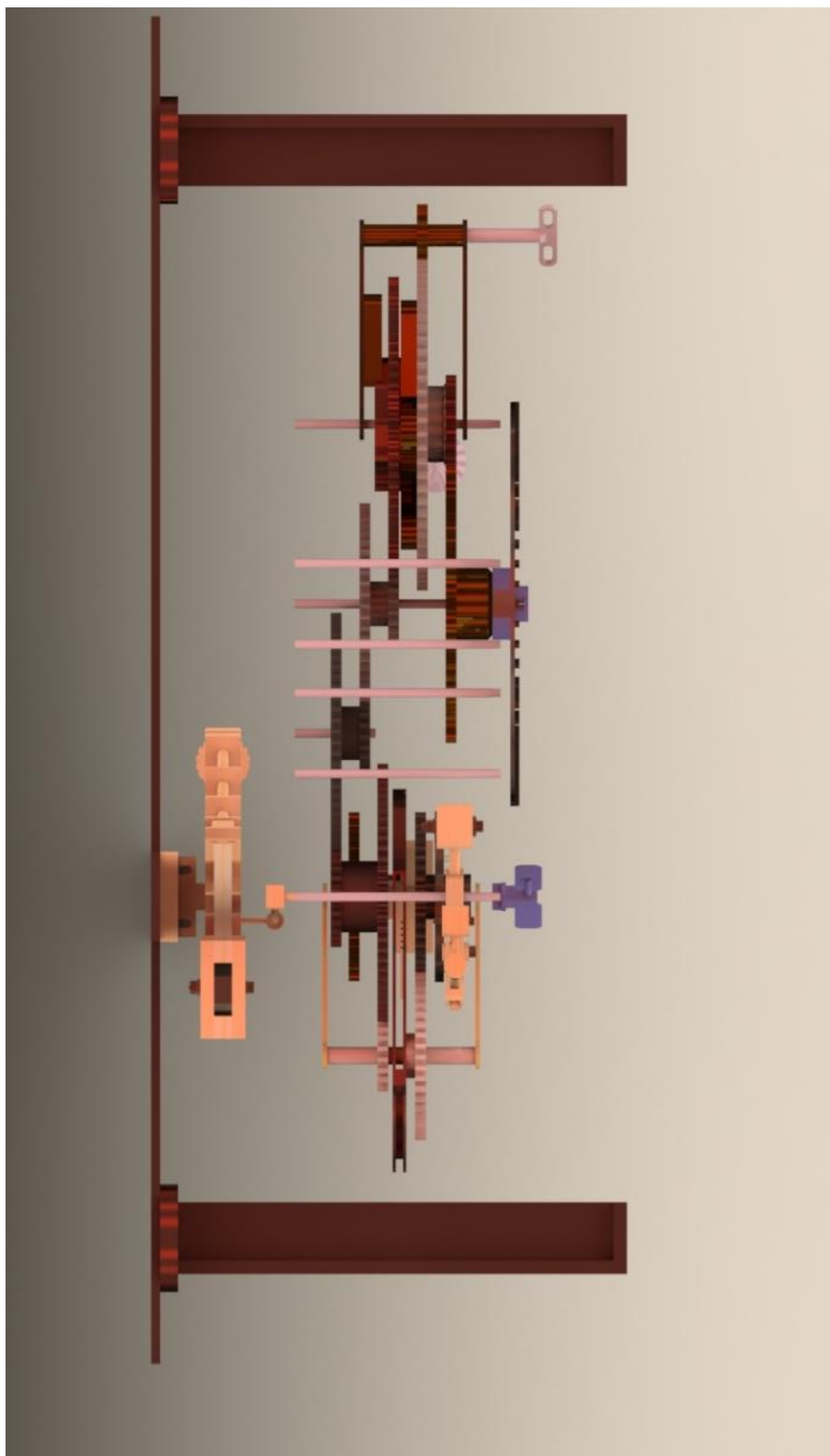
Слика 55 Детаљ модела сата



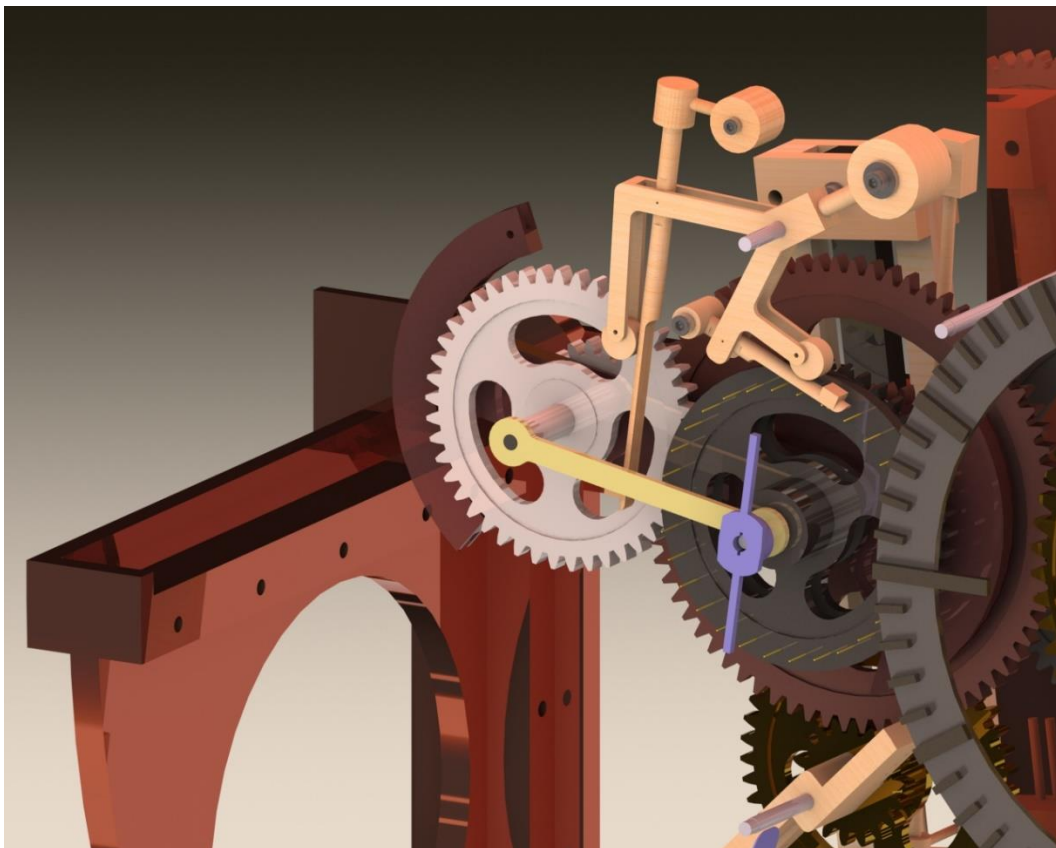
Слика 56 Механизми унутар часовника



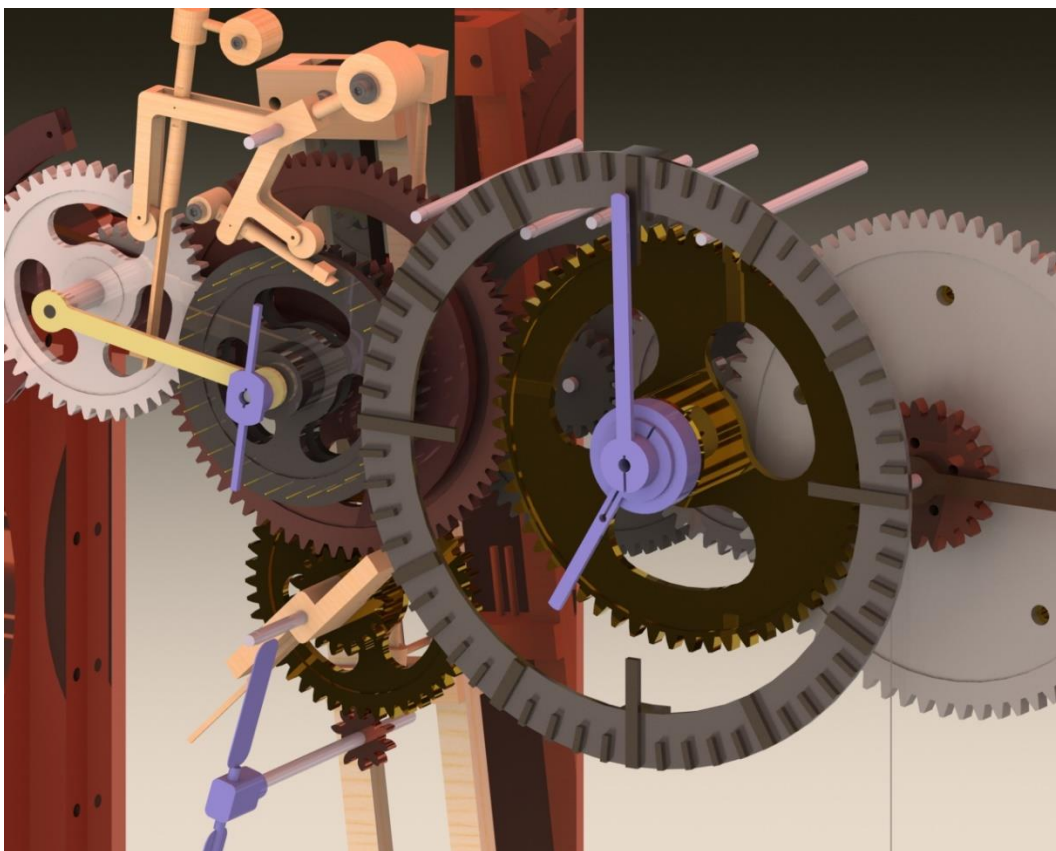
Слика 57 Механизми унутар часовника



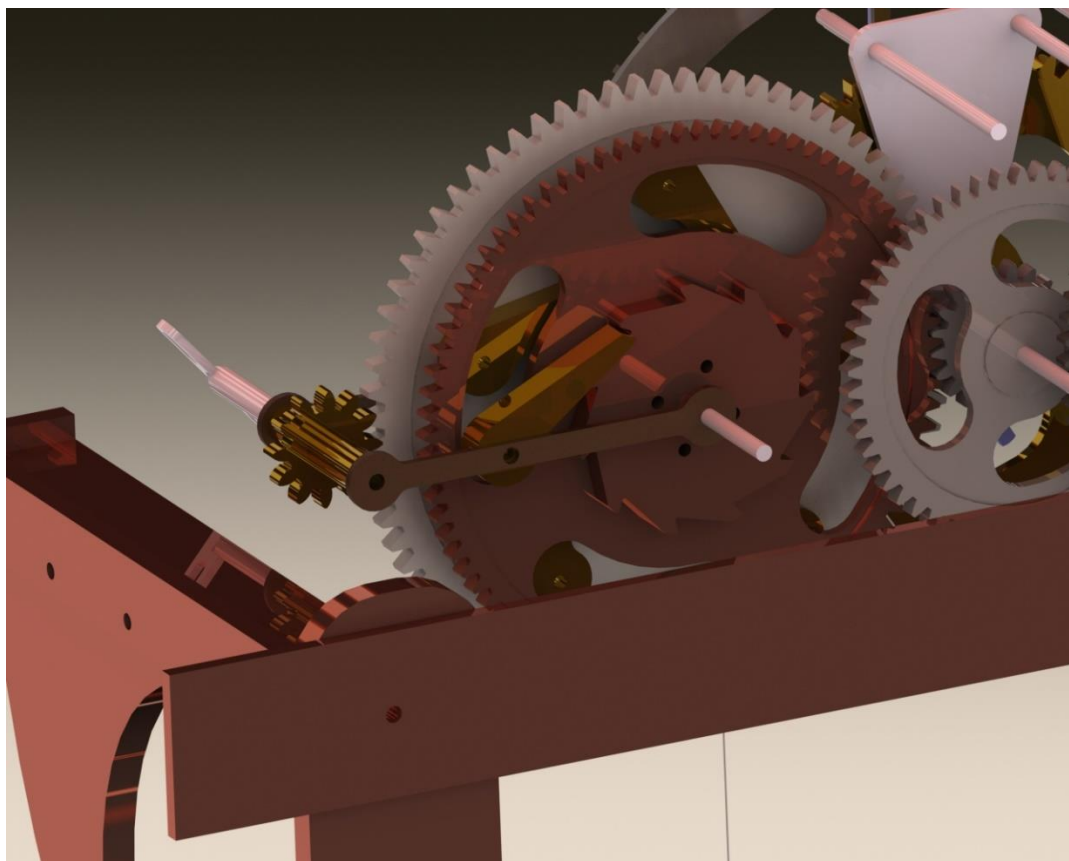
Слика 58 Механизми унутар часовника



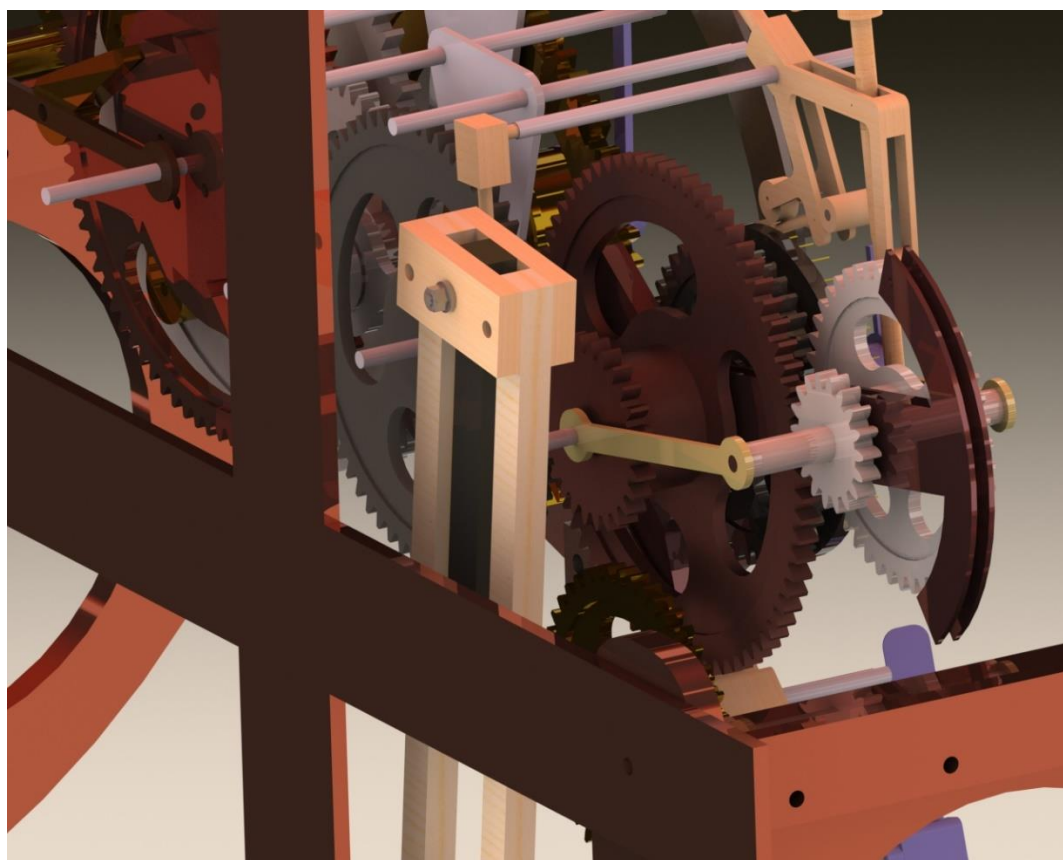
Слика 59 Ремонтоар и запречно-импулсни механизам



Слика 60 Преносна група



Слика 61 Механизам за навијање



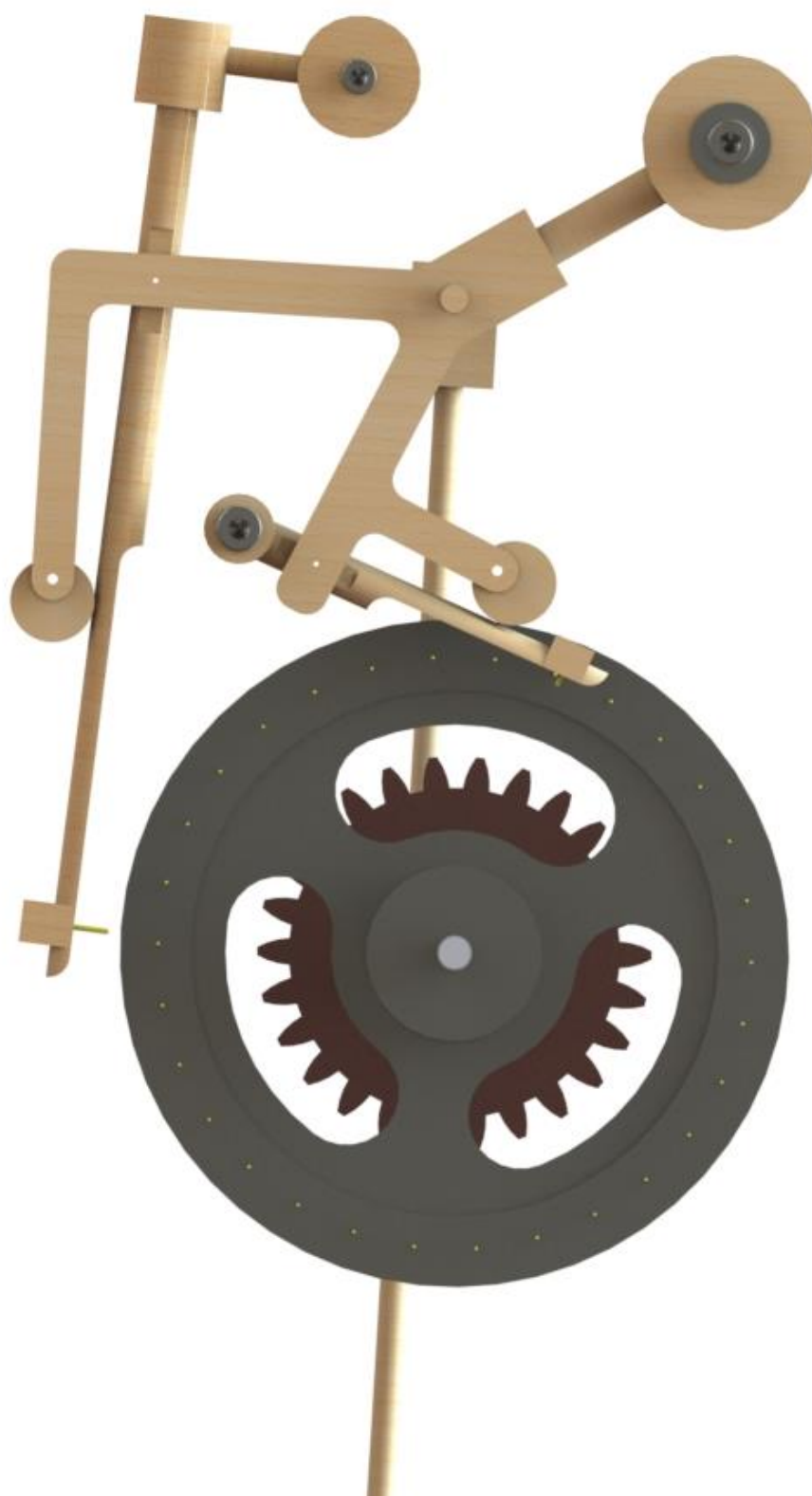
Слика 62 Ремонтоар



Слика 63 Непомични рам часовника



Слика 64 Клатно



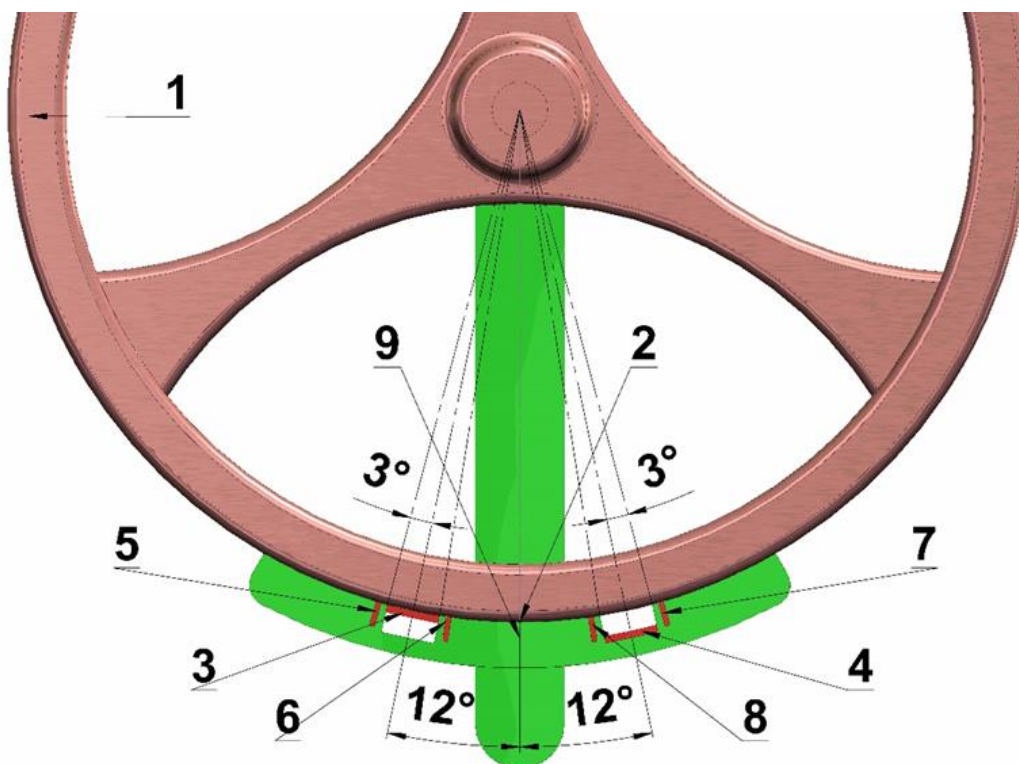
Слика 65 Запречно-импулсни механизам „Grasshopper“

7.2 Резултати симулације

7.2.1 3Д модели склопова запречница и балансног точка

Како се грешка запречно-импулсног механизма генерише у интеракцији запречно-импулсног механизма са осцилатором сата, неопходно је да се креира целокупан склоп запречнице и балансног точка и изврши анализа њиховог кретања као динамичке целине. Наглашава се да су модели апстрактни, креирани да материјализују у претходној глави изведене математичке формуле (5.104) и (5.111). Симулација и анализа кретања склопа запречнице и осцилатора извршена је методом „Event based motion study“, коришћењем апликације SolidWorks 2016, која се заснива на контроли стања и активности механизма групом посебно одабраних сензора [73]. Да би се наведене формуле коректно провериле анализом резултата компјутерске симулације, неопходно је да се најпре одреде и усвоје одговарајући параметри симулације.

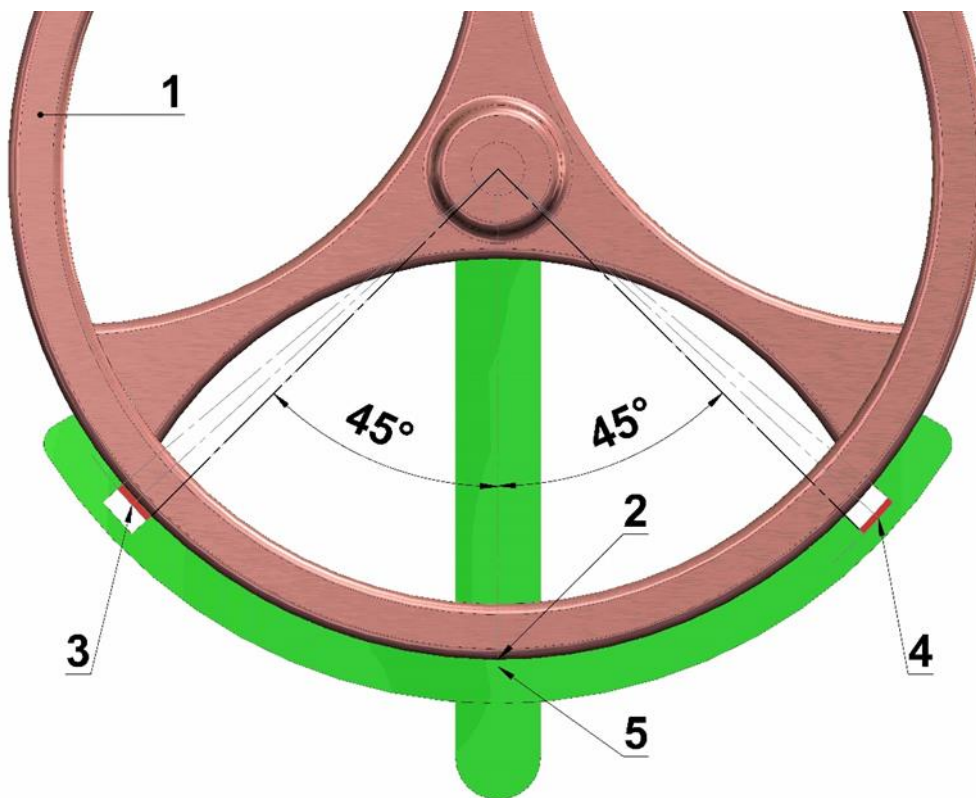
Модел склопа балансног точка са спиралном опругом и слободном запречницом (каква је Швајцарска или Енглеска полужна), чију грешку описује формула (5.104), приказан је на слици (66).



Слика 66 Модел склопа балансног точка

Као што је већ наглашено, овај тип запречнице делује на балансни точак дискретним импулсима, чији су параметри: $\varphi_0 = +12^\circ$, $\alpha = \pm 3^\circ$ и значе да запречница делује моментом силе на осцилатор у сегменту угаоне координате $\varphi \in (+9^\circ, +15^\circ)$. Усваја се да је амплитуда осциловања $\Phi = \pm 270^\circ$. Балансни точак (1) поседује пет различитих сензора близине на позицији (2). Склоп запречно импулсног механизма садржи две палете, (3) и (4), и пет активатора поменутих сензора близине (5)-(9). Четири активатора сензора (5)-(8) активирају посебно дефинисане сензоре близине којима могу да се мењају и контролишу позиције палета (3) и (4). Активатор сензора близине на позицији (9) детектује транзицију балансног точка кроз равнотежни положај $\varphi = 0^\circ$.

Модел склопа балансног точка са спиралном опругом и запречно импулсним механизмом са повратним трзајем (каква је „грасхопер“ или запречница са крунским точком), чију грешку описује формула (5.111), приказан је на слици (67).



Слика 67 Модел склопа балансног точка

У овом примеру, усваја се да је угао спрезања палета са зупцима запречног точка $\varphi_M = \pm 45^\circ$, а амплитуда осциловања $\Phi = \pm 90^\circ$. Балансни точак (1) носи три различита сензора близине на истој позицији (2). Склоп запречнице поседује две

палете (3) и (4), које имају функцију активатора одговарајућих сензора. Ови активатори активирају два сензора близине којима се контролишу и мењају позиције палета (3) и (4). Како је запречно импулсни механизам са повратним трзајем стално у интеракцији са осцилатором и тако предаје балансног точку спољашњи моменат силе промелјивог смера без прекида, сензор на позицији (2), активиран актоваторима на позицијама (3) и (4), мења искључиво смер момента силе. Активатор сензора близине на позицији (5) детектује транзицију балансног точка кроз равнотежни положај $\varphi = 0^\circ$.

У оба описана модела, положаји палета (3) и (4) мењају се променом одговарајућих мејтова (mates) апликације SolidWorks и контролишу сензорима који су лоцирани на посебно дефинисаним позицијама балансног точка који врши цикличну ротацију.

Осцилатор, балансни точак са спиралном опругом, за оба модела запречно импулсних механизма, креиран је са следећим карактеристикама:

- Материјал: берилијума бронза, густине $\rho = 0.0083 \text{ g/mm}^3$
- Моменат инерције балансног точка: $J = 180000.0 \text{ gmm}^2 = 1.8 \cdot 10^{-4} \text{ kgm}^2$
- Фреквенца сопствених пригушених осцилација балансног точка: $\nu = 4\text{s}^{-1}$
- Константа спиралне опруге: $k = 4\pi^2\nu_0^2 \cdot J = 0.11369784 \text{ Nm/rad} = 1.98440171 \text{ Nmm/deg}$
- Коефицијент пригушења: $c = 2\pi \cdot J \cdot \nu_0 / Q = 2.261947 \cdot 10^{-5} \text{ Nm} / \left(\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right) = 0.000394784 \text{ Nm} / \left(\frac{\text{deg}}{\text{s}}\right)$
- Фактор квалитета осцилатора $Q = 2\pi \cdot J \cdot \nu_0 / c = 200$
- Моменат силе за слободну запречницу: $M = J \cdot \mu_0 = J \cdot \pi^3 \cdot \nu_0^2 \cdot \Phi^2 / Q \cdot \alpha = 0.189363273 \text{ Nm} = 189.3632733 \text{ Nmm}$
- Моменат силе за запречницу са повратним трзајем: $M = J \cdot \mu_0 = J \cdot \pi^3 \cdot \nu_0^2 \cdot \Phi^2 / Q \cdot \varphi_M = 0.001402691 \text{ Nm} = 1.402690911 \text{ Nmm}$

Момент силе за слободну запречница израчунат је из формуле (5.105), на основу претходно усвојене стационарне амплитуде осциловања балансног точка $\Phi = \pm 270^\circ$ и угла $\alpha = \pm 3^\circ$ као конструктивне карактеристике запречнице. Моменат силе за запречницу са повратним трзајем израчунат је коришћењем формуле (5.112), на основу на основу претходно усвојене стационарне амплитуде осциловања балансног точка $\Phi = \pm 90^\circ$ и угла спрезања $\varphi_M = \pm 45^\circ$ која такође представља конструктивну карактеристику запречнице.

Потребно је да се нагласи да слободна запречница делује на балансни точак краткотрајним, дискретним моментима силе, а запречница са повратним трзајем непрекидно.

7.2.2 Ток симулације и анализе кретања осцилатора

Анализа кретања осцилатора (балансног точка) извршена је методом „Event based motion study“, употребом апликације SolidWorks. Ова метода заснива се на контроли тока симулације карактеристичним догађајима који се дешавају током кретања механизма и комплементарна је поступку симулације који се заснива на протоку времена. Како је дејство запречно импулсног механизма на балансни точак детерминисано и управљано кретањем самог балансног точка (положај осцилатора одређен је угаоном координатом φ), погодно је да се симулација и анализа кретања осцилатора реализује управо методом „Event based motion study“. Конкретно, ова метода је употребљена да би се анализирано комплексно динамичко понашање склопова два модела запречнице и осцилатора и тако одредиле нумеричке вредности тзв. грешака запречно импулсних механизма.

Подешавање параметара за „Event based motion study“ склопа слободне запречнице и осцилатора приказано је на слици (68).

	Tasks		Triggers			Actions		
	Name	Description	Trigger	Condition	Time/Delay	Feature	Action	Value
	Task1	Navijanje	Time		0s	RotaryMotor4	On	
	Task2		Time		1s	RotaryMotor4	Off	
	Task3		MOMENT LEVO	Alert On	<None>	Torque5	On	
	Task4		MOMENT LEVO	Alert Of	<None>	Torque5	Off	
	Task5		MOMENT DESNO	Alert On	<None>	Torque6	On	
	Task6		MOMENT DESNO	Alert Of	<None>	Torque6	Off	
	Task8		PALETA LEVO GORE	Alert On	<None>	LEVO-DOLE	Off	
	Task9		PALETA LEVO GORE	Alert On	<None>	LEVO-GORE	On	
	Task10		PALETA LEVO DOLE	Alert On	<None>	LEVO-GORE	Off	
	Task11		PALETA LEVO DOLE	Alert On	<None>	LEVO-DOLE	On	
	Task13		PALETA DESNO GORE	Alert On	<None>	DESNO-DOLE	Off	
	Task14		PALETA DESNO GORE	Alert On	<None>	DESNO-GORE	On	
	Task16		PALETA DESNO DOLE	Alert On	<None>	DESNO-GORE	Off	
	Task17		PALETA DESNO DOLE	Alert On	<None>	DESNO-DOLE	On	
	Task21		CENTRALNI S	Alert On	<None>	Force3	On	
	Task22		CENTRALNI S	Alert Of	<None>	Force3	Off	

Слика 68 Параметри „Event based motion study“ склопа слободне запречнице и осцилатора

Најпре је неопходно да се стакне главна карактеристика сензора близине који имају кључну улогу у контроли динамичког понашања склопа. Сваки сензор близине, на претходно дефинисани начин, детектује да ли је његова удаљеност мања од минималне од одговарајућег дела склопа – активатора сензора. Тако, палете (3) и (4), приказане на слици (66), имају улогу активатора сензора близине који је лоциран на позицији (2). Палете (3) и (4) у горњем положају, активирају сензор на позицији (2) балансног точка, који покреће дејство спољашњих момената силе. Палета (3) активира моменат силе у смеру казаљке на сату (негативном, индиректном смеру), а палета (4) у смеру супротном од смера казаљке на сату (позитивном, директном смеру). Положаји палета (горњи или доњи) мења се сензором на позицији (2), кога контролишу активатори на позицијама (5)-(8). Конкретно, активатор (5) поставља палету (3) у доњи положај, а активатор (6) исту палету у горњи положај. Симетрично томе, активатор (7) поставља палету (4) у горњи положај, а активатор (8) исту палету у доњи положај. Током осцилаторног обртања балансног точка, сензори лоцирани на позицији (2) активирају дејство спољашњих момената силе увек у смеру угаоне брзине балансног точка. Сагласно геометрији моделираног запречно импулсног механизма, спољашњи моменти силе делују на балансни точак искључиво у сегменту угаоне координате $\varphi \in (+9^\circ; +15^\circ)$.

Подешавање параметара за „Event based motion study“ склопа запречно-импулсног механизма са повратним трзајем приказано је на слици (69).

Tasks		Triggers			Actions		
Name	Description	Trigger	Condition	Time/Delay	Feature	Action	Value
Task23		Time		0s	RotaryMotor1	On	
Task2		Time		1s	RotaryMotor1	Off	
Task3		CENTRALNI SENZOR	Alert On	<None>	Force1	On	
Task4		CENTRALNI SENZOR	Alert Of	<None>	Force1	Off	
Task5		DESNI = M NaLevo+NaDesno-stop	Alert On	<None>	Torque1-NA LEVO	On	
Task6		DESNI = M NaLevo+NaDesno-stop	Alert On	<None>	Torque2-NA DESNO	Off	
Task7		DESNI = M NaLevo+NaDesno-stop	Alert On	<None>	DESNO-GORE	Off	
Task8		DESNI = M NaLevo+NaDesno-stop	Alert On	<None>	DESNO-DOLE	On	
Task9		DESNI = M NaLevo+NaDesno-stop	Alert On	<None>	LEVO-DOLE	Off	
Task10		DESNI = M NaLevo+NaDesno-stop	Alert On	<None>	LEVO-GORE	On	
Task11		LEVI = M NaDesno+NaLevo-stop	Alert On	<None>	Torque2-NA DESNO	On	
Task12		LEVI = M NaDesno+NaLevo-stop	Alert On	<None>	Torque1-NA LEVO	Off	
Task13		LEVI = M NaDesno+NaLevo-stop	Alert On	<None>	LEVO-GORE	Off	
Task14		LEVI = M NaDesno+NaLevo-stop	Alert On	<None>	LEVO-DOLE	On	
Task15		LEVI = M NaDesno+NaLevo-stop	Alert On	<None>	DESNO-DOLE	Off	
Task16		LEVI = M NaDesno+NaLevo-stop	Alert On	<None>	DESNO-GORE	On	

Слика 69 Параметри „Event based motion study“ склопа запречно-импулсног механизма са повратним трзајем

Палете (3) и (4), приказане на слици (67), функционишу као активатори сензора близине лоцираних на позицији (2). У горњем положају, они активирају сензор на позицији (2) обртног балансног точка и мењају смер спољашњег момента силе. Палета (3) мења смер моменат силе од негативног ка позитивном (од индиректног у директни смер) а палета (4) од позитивног ка негативном (од директног у индиректни смер). Осим тога, исте палете (3) и (4) активирају сензоре на позицији (2) чиме се наизменично мења њихов положај (од горњег у доњи и обратно). Палета (3) поставља свој сопствени положај у доњи, а положај палете (4) у горњи. Слично томе, палета (4) поставља свој сопствени положај у доњи, а положај палете (3) у горњи.

За оба склопа балансног точка са спиралном опругом и запречницом симулација је започела моторним навијањем спиралних опруга осцилатора (балансних точкова) у трајању од једне секунде, док сваки од осцилатора није постигао угаоно померање једнако одговарајућој стационарној амплитуди $\varphi = \Phi$, чија је вредност добијена прорачуном. Балансни точак у склопу са слободном запречницом окретан је мотором константне угаоне брзине од 45 обртаја у минути, док није достигнут $\varphi = 270^\circ$, а балансни точак у склопу са запречницом са повратним трзајем окретан је мотором константне угаоне брзине од 15 обртаја у минути, док није достигнут $\varphi = 90^\circ$. Након тога, мотори су исључени, а сваки балансни точак отпочео је да врши принудне пригушене осцилације у трајању од 9 секунди и за то време обавио 36 пуних осцилација.

Симулацијом и анализом кретања осцилатора (моделираног балансног точка), извршено је мерење трајања периода осциловања слободних пригушених осцилација, као и трајања периода осциловања принудних пригушених осцилација под дејством спољашњег момента силе кога генеришу како слободна запречница, тако и запречница са повратним трзајем. Из наведених података одређена је промена периода осциловања балансног точка под дејством принудних момената силе које генеришу оба модела запречно импулсних механизма. Упоређивањем резултата добијених теоријским прорачуном са резултатима симулације извршена је провера коректности формула изведених употребом пертурбационог рачуна.

7.2.3 Резултати симулације и анализе кретања осцилатора

На самом почетку процеса симулација у апликацији SolidWorks, извршено је мерење периода осциловања односно, фреквенце слободних пригушених осцилација балансног точка који је уграђен у оба склопа осцилатора и запречнице (склоп балансног точка и слободне запречнице и склоп балансног точка и запречнице са повратним трзајем). Сви резултати приказани су табеларно у табелама од T4 до T12.

Фреквенца слободних пригушених осцилација балансног точка у склопу са слободном запречницом добијена је на основу података приказаних у табелама T4, T5 и T6. Мерењем и израчунавањем средњег временског тренутка у коме балансни точак пролази кроз равнотежни положај ($\varphi = 0^\circ$, активатор сензора (9)) одређено је трајање 72 полупериода односно, 36 периода осциловања балансног точка и одређена средња вредност угаоне фреквенце ових осцилација. Она износи:

$$\omega_{01} = 25.13266316 \text{ rad/s}, \quad (7.1)$$

а сагласно томе, просечна вредност периода осциловања:

$$T_{01} = 0.25000078 \text{ s}. \quad (7.2)$$

Фреквенца слободних пригушених осцилација балансног точка у склопу са запречницом са повратним трзајем добијена је на основу података приказаних у табелама T7, T8 и T9. Мерењем и израчунавањем средњег временског тренутка у коме балансни точак пролази кроз равнотежни положај ($\varphi = 0^\circ$, активатор сензора (5)) такође је одређено трајање 72 полупериода односно, 36 периода осциловања балансног точка и одређена средња вредност угаоне фреквенце ових осцилација. Она износи:

$$\omega_{02} = 25.13262744 \text{ rad/s}, \quad (7.3)$$

а сагласно томе, просечна вредност периода осциловања:

$$T_{02} = 0.25000113 \text{ s}. \quad (7.4)$$

Фреквенца принудних пригушених осцилација балансног точка у склопу са слободном запречницом и грешка запречнице добијена је на основу података приказаних у табелама T13, T14 и T15. Детектовањем средњег временског тренутка у коме балансни точак пролази кроз равнотежни положај ($\varphi = 0^\circ$, активатор сензора (9)) одређено је трајање 72 полупериода односно, 36 периода принудних пригушених осциловања балансног точка у склопу са слободном

запречницом. Одређена је средња вредност угаоне фреквенце ових осцилација, и она износи:

$$\omega_1 = 25.12986985 \text{ rad/s}, \quad (7.5)$$

а сагласно томе, просечна вредност периода осциловања:

$$T_1 = 0.250028565 \text{ s}. \quad (7.6)$$

Грешка слободног запречно импулсног механизма израчунава се по дефиницији као разлика угаоне фреквенце принудних и угаоне фреквенце слободних пригушених осцилација балансног точка:

$$\begin{aligned} R_1 &= \omega_1 - \omega_{01} = 25.12986985 - 25.13266316 \\ &= -0.00279331 \text{ rad/s}. \end{aligned} \quad (7.7)$$

Нумеричка вредност грешка слободног запречно-импулсног механизма изведена теоријом пертурбација (5.104) рачуна се, сагласно усвојеним параметрима запречнице, из следећег израза:

$$R_{1T} = -\frac{25.13266316}{4 \cdot 200} \cdot \frac{(\sqrt{270^2 - (12 - 3)^2} - \sqrt{270^2 - (12 + 3)^2})}{3}, \quad (7.8)$$

и износи:

$$R_{1T} = -0.002795454 \text{ s} \quad (7.9)$$

Релативна разлика нумеричких вредности грешака слободне запречнице добијених теоријским прорачуном и компјутерском симулацијом израчуната је из следећег израза:

$$\delta_1 = \left| \frac{R_{1T} - R_1}{R_{1T}} \right| = \left| \frac{-0.002795454 + 0.00279331}{0.002795454} \right|, \quad (7.9)$$

и износи:

$$\delta_1 = 7.66959 \cdot 10^{-4} < 0.08\% \quad (7.9)$$

Може се констатовати да је добијена вредност (7.9) прихватљиво мала и да је овим нумеричким резултатом спроведене компјутерске симулације доказана исправност формуле за грешку слободног запречно импулсног механизма која је изведена применом теорије пертурбационог рачуна.

Фреквенца принудних пригушених осцилација балансног точка у склопу са запречницом са повратним трзајем и грешка запречнице добијена је на основу података приказаних у табелама Т10, Т11 и Т12. Детектовањем средњег временског тренутка у коме балансни точак пролази кроз равнотежни положај ($\varphi = 0^\circ$; активатор сензора (9) сл.67) одређено је трајање 72 полупериода односно, 36 периода принудних пригушених осциловања балансног точка у склопу са

слободном запречници. Одређена је средња вредност угаоне фреквенце ових осцилација, и она износи:

$$\omega_2 = 25.2413366 \text{ rad/s}, \quad (7.10)$$

а сагласно томе, просечна вредност периода осциловања:

$$T_2 = 0.24892443s. \quad (7.11)$$

Грешка запречно импулсног механизма са повратним трзајем израчунава се по дефиницији као разлика угаоне фреквенце принудних и угаоне фреквенце слободних пригушених осцилација балансног точка:

$$\begin{aligned} R_2 &= \omega_2 - \omega_{02} = 25.2413366 - 25.13262744 \\ &= 0.10870916 \text{ rad/s}. \end{aligned} \quad (7.12)$$

Нумеричка вредност грешка запречно импулсног механизма са повратним трзајем, изведена теоријом пертурбација (5.111) рачуна се, сагласно усвојеним параметрима запречнице, из следећег израза:

$$R_{2T} = + \frac{25.13262744}{2 \cdot 200} \cdot \frac{\sqrt{90^2 - 45^2}}{45}. \quad (7.13)$$

и износи:

$$R_{2T} = +0.108827469 \text{ s} \quad (7.14)$$

Релативна разлика нумеричких вредности грешака запречнице са повратним трзајем добијених теоријским прорачуном и компјутерском симулацијом израчуната је из следећег израза:

$$\delta_2 = \left| \frac{R_{2T} - R_2}{R_{2T}} \right| = \left| \frac{0.108827469 - 0.10870916}{0.108827469} \right|, \quad (7.15)$$

и износи:

$$\delta_2 = 0.001087 < 0.11\% \quad (7.16)$$

Може се констатовати да је добијена вредност (7.16) прихватљиво мала и да је овим нумеричким резултатом спроведене компјутерске симулације доказана исправност формуле за грешку запречно-импулсног механизма са повратним трзајем која је изведена применом теорије пертурбационог рачуна.

Табела 4 Резултати симулације за пригушене слободне осцилације балансног точка у склопу са запречницом са повратним трзајем (1 сек.-3 сек.)

Улаз t_1	Изаз t_2	Средња вредност $(t_2-t_1)/2$	Интервал полуериода	Период	Угаона фреквенција
1,06417946	1,06418517	1,06417946			
1,18918038	1,18918573	1,189180381	0,125000921		
1,31418119	1,31418665	1,314181192	0,125000811	0,25000173	25,13256711
1,43918152	1,43918723	1,439181518	0,125000326	0,25000114	25,13262693
1,56418219	1,5641881	1,564182189	0,125000671	0,250001	25,132641
1,68918281	1,68918872	1,689182808	0,125000619	0,25000129	25,13261154
1,81418333	1,81418919	1,814183332	0,125000524	0,25000114	25,13262632
1,93918398	1,93918986	1,939183983	0,125000651	0,25000118	25,13262311
2,06418472	2,06419062	2,064184724	0,125000741	0,25000139	25,13260129
2,18918574	2,18919161	2,189185736	0,125001012	0,25000175	25,132565
2,31418682	2,31419273	2,314186822	0,125001086	0,2500021	25,13253032
2,43918728	2,43919374	2,439187277	0,125000455	0,25000154	25,13258631
2,56418795	2,56419386	2,564187948	0,125000671	0,25000113	25,13262803
2,68918832	2,68919423	2,689188317	0,125000369	0,25000104	25,13263668
2,81418862	2,81419508	2,814188615	0,125000298	0,25000067	25,13267417
2,93918896	2,93919542	2,939188959	0,125000344	0,25000064	25,13267669
3,06418938	3,06419584	3,064189375	0,125000416	0,25000076	25,13266483
3,18918981	3,18919627	3,189189809	0,125000434	0,25000085	25,13265578
3,31419073	3,31419681	3,31419073	0,125000921	0,25000136	25,13260501
3,43919104	3,43919723	3,439191036	0,125000306	0,25000123	25,13261788
3,56419129	3,564198	3,564191292	0,125000256	0,25000056	25,13268473
3,68919196	3,68919827	3,689191964	0,125000672	0,25000093	25,13264794
3,81419248	3,81419881	3,814192476	0,125000512	0,25000118	25,1326222
3,93919272	3,93919943	3,939192723	0,125000247	0,25000076	25,13266493

Табела 5 Резултати симулације за пригушене слободне осцилације балансног точка у склопу са запречницом са повратним трзајем (4 сек.-6 сек.)

Улаз t_1	Изаз t_2	Средња вредност $(t_2-t_1)/2$	Интервал полуериода	Период	Угаона фреквенција
4,0641934	4,06419982	4,064193401	0,125000678	0,25000093	25,13264824
4,18919381	4,18920027	4,189193813	0,125000412	0,25000109	25,13263165
4,31419391	4,31420068	4,314193908	0,125000095	0,25000051	25,13269026
4,43919431	4,43920116	4,439194308	0,1250004	0,2500005	25,13269147
4,56419478	4,56420159	4,564194778	0,12500047	0,25000087	25,13265377
4,68919523	4,68920212	4,689195231	0,125000453	0,25000092	25,13264844
4,81419582	4,81420265	4,814195824	0,125000593	0,25000105	25,13263607
4,93919604	4,9392035	4,939196036	0,125000212	0,25000081	25,13266603
5,06419656	5,06420402	5,064196557	0,125000521	0,25000073	25,13266754
5,18919705	5,18920451	5,189197045	0,125000488	0,25000101	25,13263979
5,31419747	5,31420493	5,314197473	0,125000428	0,25000092	25,13264914
5,43919805	5,43920551	5,439198049	0,125000576	0,250001	25,1326403
5,56419857	5,56420603	5,564198571	0,125000522	0,2500011	25,13263085
5,68919967	5,68920713	5,689199668	0,125001097	0,25000162	25,13257847
5,81420022	5,81420768	5,814200217	0,125000549	0,25000165	25,13257576
5,93920079	5,93920826	5,939200794	0,125000577	0,25000113	25,13262803
6,06420112	6,06420874	6,064201119	0,125000325	0,2500009	25,13265055
6,18920197	6,18920935	6,189201968	0,125000849	0,25000117	25,13262321
6,31420243	6,31420982	6,314202429	0,125000461	0,25000131	25,13260953
6,43920262	6,43921037	6,439202616	0,125000187	0,25000065	25,13267608
6,56420336	6,56421093	6,564203356	0,12500074	0,25000093	25,13264804
6,68920387	6,6892115	6,689203873	0,125000517	0,25000126	25,13261486
6,81420424	6,81421199	6,814204235	0,125000362	0,25000088	25,13265286
6,93920473	6,93921319	6,939204726	0,125000491	0,25000085	25,13265548

Табела 6 Резултати симулације за пригушене слободне осцилације балансног точка у склопу са запречницом са повратним трзајем (7 сек.-9 сек.)

Улаз t_1	Изаз t_2	Средња вредност $(t_2-t_1)/2$	Интервал полу периода	Период	Угаона фреквенција
7,06420574	7,0642142	7,064205735	0,125001009	0,2500015	25,13259043
7,18920658	7,18921504	7,189206576	0,125000841	0,25000185	25,13255525
7,31420747	7,31421541	7,31420747	0,125000894	0,25000174	25,13256681
7,43920889	7,43921696	7,439208892	0,125001422	0,25000232	25,1325084
7,56420943	7,5642175	7,564209428	0,125000536	0,25000196	25,13254439
7,68920965	7,68921811	7,689209646	0,125000218	0,25000075	25,13266543
7,81420998	7,81421844	7,81420998	0,125000334	0,25000055	25,13268574
7,9392103	7,93921885	7,939210296	0,125000316	0,25000065	25,13267588
8,06421097	8,06421949	8,06421097	0,125000674	0,25000099	25,1326417
8,18921136	8,18921999	8,189211362	0,125000392	0,25000107	25,13263406
8,31421199	8,31422041	8,314211986	0,125000624	0,25000102	25,13263909
8,43921224	8,43922101	8,43921224	0,125000254	0,25000088	25,13265296
8,56421263	8,56422148	8,564212627	0,125000387	0,25000064	25,13267679
8,68921319	8,68922193	8,689213188	0,125000561	0,25000095	25,13264593
8,81421364	8,81422246	8,814213642	0,125000454	0,25000102	25,13263919
8,93921406	8,93922317	8,939214056	0,125000414	0,25000087	25,13265397
9,06421472	9,06422367	9,064214724	0,125000668	0,25000108	25,13263245
9,18921485	9,18922414	9,189214852	0,125000128	0,2500008	25,13266121
9,3142156	9,31422467	9,3142156	0,125000748	0,25000088	25,13265316
9,43921594	9,43922534	9,439215944	0,125000344	0,25000109	25,13263145
9,56421643	9,56422588	9,564216433	0,125000489	0,25000083	25,13265749
9,6892168	9,68922632	9,689216803	0,12500037	0,25000086	25,13265487
9,81421741	9,81422681	9,814217407	0,125000604	0,25000097	25,13264331
9,93921767	9,93922732	9,939217668	0,125000261	0,25000086	25,13265427

Табела 7 Резултати симулације за пригушене слободне осцилације балансног точка у склопу са слободном запречницом (1 сек.-3 сек.)

Улаз t_1	Изаз t_2	Средња вредност $(t_2-t_1)/2$	Интервал полу периода	Период	Угаона фреквенција
1,06418208	1,06418508	1,064183576			
1,18918161	1,18918323	1,189182418	0,124998842		
1,31418202	1,31418361	1,314182814	0,125000397	0,24999924	25,13281783
1,43918235	1,43918418	1,439183269	0,125000455	0,25000085	25,13265568
1,56418334	1,56418442	1,564183877	0,125000609	0,25000106	25,13263436
1,68918319	1,68918481	1,689183998	0,125000121	0,25000073	25,13266789
1,81418358	1,81418538	1,814184484	0,125000486	0,25000061	25,13268026
1,93918376	1,93918559	1,939184678	0,125000194	0,25000068	25,13267292
2,06418417	2,0641861	2,064185134	0,125000457	0,25000065	25,13267583
2,1891856	2,1891886	2,189187098	0,125001964	0,25000242	25,1324979
2,31418511	2,31418694	2,314186025	0,124998927	0,25000089	25,13265171
2,43918642	2,43918942	2,439187922	0,125001898	0,25000082	25,13265839
2,56418572	2,56418765	2,564186687	0,124998765	0,25000066	25,13267463
2,68918729	2,68919029	2,689188786	0,125002099	0,25000086	25,13265437
2,81418752	2,81419052	2,814189017	0,125000231	0,25000233	25,13250699
2,93918711	2,93918894	2,939188029	0,124999012	0,24999924	25,13281738
3,06418755	3,06418938	3,064188466	0,125000438	0,24999945	25,13279662
3,18918799	3,18918982	3,189188902	0,125000436	0,25000087	25,13265345
3,31418796	3,31419021	3,314189085	0,125000183	0,25000062	25,13267905
3,43918845	3,4391907	3,439189575	0,12500049	0,25000067	25,13267359
3,56419007	3,56419307	3,564191572	0,125001998	0,25000249	25,13249116
3,68919015	3,68919132	3,689190735	0,124999163	0,25000116	25,13262461
3,8141908	3,8141938	3,814192304	0,125001569	0,25000073	25,13266764
3,93919081	3,93919224	3,939191527	0,124999223	0,25000079	25,13266161

Табела 8 Резултати симулације за пригушене слободне осцилације балансног точка у склопу са слободном запречницом (4 сек.-6 сек.)

Улаз t_1	Изаз t_2	Средња вредност $(t_2-t_1)/2$	Интервал полу периода	Период	Угаона фреквенција
4,0641915	4,06419257	4,064192034	0,125000507	0,24999973	25,13276837
4,18919151	4,18919294	4,189192221	0,125000187	0,250000069	25,13267141
4,31419146	4,31419339	4,314192425	0,125000204	0,250000039	25,13270192
4,4391926	4,43919377	4,439193185	0,12500076	0,250000096	25,13264432
4,56419278	4,56419421	4,564193496	0,12500031	0,25000107	25,13263361
4,68919251	4,68919454	4,689193522	0,125000026	0,250000034	25,1327074
4,81419284	4,81419509	4,814193961	0,125000439	0,250000047	25,13269448
4,93919311	4,93919547	4,939194289	0,125000328	0,250000077	25,13266412
5,06419438	5,06419592	5,064195153	0,125000865	0,25000119	25,13262135
5,18919395	5,1891962	5,189195076	0,124999923	0,250000079	25,13266211
5,3141951	5,31419664	5,314195871	0,125000796	0,250000072	25,13266905
5,43919461	5,43919703	5,439195823	0,124999952	0,250000075	25,13266613
5,56419517	5,56419742	5,564196291	0,125000468	0,250000042	25,13269906
5,68919557	5,68919782	5,689196696	0,125000406	0,250000087	25,13265342
5,81419611	5,81419836	5,814197232	0,125000536	0,250000094	25,13264663
5,93919712	5,93919866	5,939197891	0,12500066	0,25000012	25,13262109
6,06419656	6,06419902	6,064197794	0,124999903	0,250000056	25,13268468
6,18919806	6,1891996	6,189198827	0,125001033	0,250000094	25,13264713
6,31419825	6,3141999	6,314199075	0,125000247	0,25000128	25,1326125
6,43919784	6,43920026	6,439199046	0,124999972	0,250000022	25,13271921
6,564199	6,56420071	6,564199854	0,125000808	0,250000078	25,13266287
6,6891996	6,68920114	6,689200373	0,125000519	0,25000133	25,13260788
6,81419901	6,81420166	6,814200333	0,12499996	0,250000048	25,13269312
6,93919926	6,93920194	6,9392006	0,125000267	0,250000023	25,13271836

Табела 9 Резултати симулације за пригушене слободне осцилације балансног точка у склопу са слободном запречницом (7 сек.-9 сек.)

Улаз t_1	Изаз t_2	Средња вредност $(t_2-t_1)/2$	Интервал полуериода	Период	Угаона фреквенција
7,06420098	7,0642024	7,064201689	0,125001089	0,25000136	25,13260491
7,18920023	7,18920287	7,18920155	0,124999861	0,25000095	25,13264577
7,31420142	7,31420314	7,314202281	0,125000731	0,25000059	25,13268171
7,43920117	7,43920359	7,439202377	0,125000096	0,25000083	25,13265809
7,56420234	7,56420399	7,564203168	0,125000791	0,25000089	25,13265206
7,6892018	7,68920448	7,689203138	0,12499997	0,25000076	25,13266467
7,81420301	7,81420477	7,814203892	0,125000754	0,25000072	25,13266844
7,93920354	7,93920519	7,939204364	0,125000473	0,25000123	25,13261798
8,06420285	8,06420564	8,064204248	0,124999884	0,25000036	25,13270539
8,18920423	8,18920618	8,189205205	0,125000957	0,25000084	25,13265668
8,31420457	8,31420655	8,31420556	0,125000355	0,25000131	25,13260933
8,43920499	8,43920698	8,439205984	0,125000424	0,25000078	25,13266297
8,56420447	8,56420726	8,564205869	0,124999886	0,25000031	25,13271016
8,68920573	8,68920771	8,689206721	0,125000851	0,25000074	25,13266714
8,81420625	8,8142082	8,814207221	0,125000501	0,25000135	25,13260531
8,93920544	8,93920855	8,939206995	0,124999774	0,25000027	25,13271363
9,06420585	9,06420897	9,064207409	0,125000414	0,25000019	25,13272238
9,18920635	9,18920943	9,189207886	0,125000477	0,25000089	25,13265171
9,31420662	9,31420973	9,314208174	0,125000288	0,25000076	25,13266432
9,43920811	9,43921021	9,439209161	0,125000988	0,25000128	25,132613
9,5642077	9,56421059	9,564209142	0,124999981	0,25000097	25,13264386
9,68920885	9,68921101	9,689209931	0,125000789	0,25000077	25,13266382
9,8142085	9,81421139	9,814209942	0,125000011	0,2500008	25,13266608
9,93920885	9,93921197	9,939210408	0,125000466	0,25000048	25,13269328

Табела 10 Резултати симулације за пригушене принудне осцилације балансног точка у склопу са запречницом са повратним трзајем (1 сек.-3 сек.)

Улаз t_1	Изаз t_2	Средња вредност $(t_2-t_1)/2$	Интервал полу периода	Период	Угаона фреквенција
1,06385598	1,06386169	1,06385976			
1,18831877	1,18832423	1,188318766	0,12446279		
1,31278147	1,31278719	1,312781474	0,124462708	0,2489255	25,24122823
1,43724478	1,43725024	1,437244778	0,124463304	0,24892601	25,24117611
1,56170759	1,5617133	1,561707586	0,124462808	0,24892611	25,24116597
1,68617032	1,68617578	1,686170322	0,124462736	0,24892554	25,24122357
1,81063313	1,81063838	1,810633126	0,124462804	0,24892554	25,24122397
1,9350958	1,93510107	1,935095803	0,124462677	0,24892548	25,24122995
2,05955813	2,05956384	2,059558132	0,124462329	0,24892501	25,24127812
2,18402103	2,18402621	2,184021025	0,124462893	0,24892522	25,24125622
2,30848379	2,30848906	2,308483789	0,124462764	0,24892566	25,24121211
2,43294632	2,43295211	2,432946319	0,12446253	0,24892529	25,24124892
2,55740864	2,55741435	2,557408644	0,124462325	0,24892486	25,24129343
2,68187103	2,68187674	2,681871028	0,124462384	0,24892471	25,24130824
2,80633368	2,80633893	2,806333684	0,124462656	0,24892504	25,24127467
2,93079583	2,93080154	2,930795826	0,124462142	0,2489248	25,24129921
3,05525836	3,05526361	3,055258358	0,124462532	0,24892467	25,24131178
3,17972041	3,17972612	3,179720406	0,124462048	0,24892458	25,24132132
3,30418289	3,30418816	3,304182893	0,124462487	0,24892454	25,24132588
3,42864514	3,42865042	3,428645143	0,12446225	0,24892474	25,2413054
3,55310721	3,55311292	3,553107205	0,124462062	0,24892431	25,24134849
3,67756953	3,67757499	3,677569527	0,124462322	0,24892438	25,24134119
3,80203175	3,80203721	3,802031753	0,124462226	0,24892455	25,24132456
3,92649395	3,92649966	3,926493952	0,124462199	0,24892443	25,24133703

Табела 11 Резултати симулације за пригушене принудне осцилације балансног точка у склопу са запречницом са повратним трзајем (4 сек.-6 сек.)

Улаз t_1	Изаз t_2	Средња вредност $(t_2-t_1)/2$	Интервал полу периода	Период	Угаона фреквенција
4. секунда					
4,05095622	4,05096193	4,050956215	0,124462263	0,24892446	25,24133328
4,17541839	4,1754241	4,17541839	0,124462175	0,24892444	25,24133571
4,29988068	4,29988639	4,299880677	0,124462287	0,24892446	25,24133328
4,42434295	4,42434843	4,424342954	0,124462277	0,24892456	25,24132294
4,54880541	4,54881066	4,548805411	0,124462457	0,24892473	25,2413057
4,67326756	4,67327284	4,673267557	0,124462146	0,2489246	25,24131898
4,79772952	4,79773523	4,797729517	0,12446196	0,24892411	25,24136938
4,92219171	4,92219742	4,922191708	0,124462191	0,24892415	25,24136482
5,04665416	5,04665944	5,046654155	0,124462447	0,24892464	25,24131543
5,17111657	5,17112182	5,171116572	0,124462417	0,24892486	25,24129252
5,29557874	5,2955842	5,295578744	0,124462172	0,24892459	25,2413204
5,42004071	5,42004642	5,420040707	0,124461963	0,24892414	25,24136644
5,54450281	5,54450836	5,544502808	0,124462101	0,24892406	25,24137364
5,66896521	5,66897046	5,668965214	0,124462406	0,24892451	25,24132872
5,79342703	5,79343249	5,793427027	0,124461813	0,24892422	25,24135792
5,91788914	5,91789485	5,917889139	0,124462112	0,24892393	25,24138773
6,04235149	6,04235673	6,042351486	0,124462347	0,24892446	25,24133359
6,16681365	6,16681882	6,166813651	0,124462165	0,24892451	25,24132821
6,29127564	6,29128135	6,291275643	0,124461992	0,24892416	25,24136421
6,41573781	6,41574315	6,415737812	0,124462169	0,24892416	25,2413638
6,54019996	6,5402052	6,540199956	0,124462144	0,24892431	25,24134839
6,66466177	6,66466721	6,664661766	0,12446181	0,24892395	25,24138479
6,78912382	6,78912953	6,789123816	0,12446205	0,24892386	25,24139433
6,91358592	6,91359145	6,913585916	0,1244621	0,24892415	25,24136492
5. секунда					
6. секунда					

Табела 12 Резултати симулације за пригушене принудне осцилације балансног точка у склопу са запречницом са повратним трзајем (7 сек.-9 сек.)

Улаз t_1	Изаз t_2	Средња вредност $(t_2-t_1)/2$	Интервал полуериода	Период	Угаона фреквенција
7,03804791	7,03805364	7,038047909	0,124461993	0,24892409	25,2413707
7,16251012	7,16251536	7,162510116	0,124462207	0,2489242	25,24135985
7,28697177	7,28697748	7,286971774	0,124461658	0,24892387	25,24139382
7,41143383	7,41143954	7,411433825	0,124462051	0,24892371	25,24140964
7,53589592	7,53590163	7,535895921	0,124462096	0,24892415	25,24136522
7,66035807	7,66036334	7,660358071	0,12446215	0,24892425	25,24135518
7,78481995	7,78482572	7,784819954	0,124461883	0,24892403	25,24137678
7,90928212	7,90928731	7,909282119	0,124462165	0,24892405	25,24137526
8,03374403	8,03374922	8,033744027	0,124461908	0,24892407	25,24137273
8,15820592	8,15821117	8,158205921	0,124461894	0,2489238	25,24140021
8,28266804	8,28267328	8,282668038	0,124462117	0,24892401	25,24137901
8,40712967	8,40713513	8,407129673	0,124461635	0,24892375	25,24140528
8,53159164	8,53159737	8,531591638	0,124461965	0,2489236	25,24142069
8,65605382	8,656059	8,656053816	0,124462178	0,24892414	25,24136563
8,78051551	8,78052122	8,780515507	0,124461691	0,24892387	25,24139341
8,9049776	8,90498331	8,904977603	0,124462096	0,24892379	25,24140173
9,02943964	9,02944535	9,029439639	0,124462036	0,24892413	25,24136674
9,15390151	9,15390724	9,153901508	0,124461869	0,24892391	25,24138976
9,2783634	9,27836887	9,278363404	0,124461896	0,24892377	25,24140396
9,40282522	9,40283068	9,402825219	0,124461815	0,24892371	25,24140943
9,52728746	9,52729292	9,527287459	0,12446224	0,24892406	25,24137455
9,65174963	9,65175535	9,651749628	0,124462169	0,24892441	25,24133866
9,77621171	9,77621695	9,776211705	0,124462077	0,24892425	25,24135518
9,90067332	9,90067878	9,900673322	0,124461617	0,24892369	25,24141116

Табела 13 Резултати симулације за пригушене принудне осцилације балансног точка у склопу са слободном запречницом (1 сек.-3 сек.)

Улаз t_1	Изаз t_2	Средња вредност $(t_2-t_1)/2$	Интервал полу периода	Период	Угаона фреквенција
1,06418207	1,06418507	1,064183569			
1,18919628	1,18919928	1,189197779	0,12501421		
1,31421049	1,31421349	1,314211988	0,125014209	0,25002842	25,12988456
1,43922477	1,43922777	1,439226266	0,125014278	0,25002849	25,12987773
1,56423904	1,56424204	1,564240544	0,125014278	0,25002856	25,12987079
1,68925324	1,68925624	1,689254736	0,125014192	0,25002847	25,12987944
1,81426705	1,81426847	1,814267758	0,125013022	0,25002721	25,13000568
1,93928128	1,9392828	1,939282042	0,125014284	0,25002731	25,12999648
2,06429553	2,06429705	2,064296287	0,125014246	0,25002853	25,12987351
2,1893103	2,1893133	2,189311798	0,125015511	0,25002976	25,12975014
2,31432458	2,31432758	2,314326081	0,125014283	0,25002979	25,12974637
2,43933886	2,43934186	2,439340363	0,125014282	0,25002857	25,12986989
2,56435277	2,56435419	2,564353475	0,125013112	0,25002739	25,12998759
2,689367	2,68936852	2,689367759	0,125014284	0,2500274	25,12998738
2,8143818	2,8143848	2,814383304	0,125015545	0,25002983	25,12974285
2,93939609	2,93939909	2,939397586	0,125014282	0,25002983	25,12974305
3,06441037	3,06441337	3,064411869	0,125014283	0,25002857	25,12986989
3,18942418	3,1894257	3,189424943	0,125013074	0,25002736	25,12999135
3,3144385	3,31443992	3,314439212	0,125014269	0,25002734	25,12999276
3,43945268	3,4394542	3,439453439	0,125014228	0,2500285	25,12987677
3,56446696	3,56446848	3,564467718	0,125014279	0,25002851	25,12987582
3,68948176	3,6894828	3,689482282	0,125014564	0,25002884	25,129842
3,81449561	3,81449713	3,814496368	0,125014086	0,25002865	25,12986135
3,93950987	3,93951139	3,939510632	0,125014265	0,25002835	25,12989145

Табела 14 Резултати симулације за пригушене принудне осцилације балансног точка у склопу са слободном запречницом (4 сек.-6 сек.)

Улаз t_1	Изаз t_2	Средња вредност $(t_2-t_1)/2$	Интервал полуериода	Период	Угаона фреквенција
4,06452414	4,06452566	4,064524897	0,125014265	0,25002853	25,12987351
4,18953846	4,18953999	4,189539225	0,125014329	0,25002859	25,12986708
4,31455273	4,31455425	4,31455349	0,125014265	0,25002859	25,12986708
4,43956699	4,43956852	4,439567754	0,125014265	0,25002853	25,12987351
4,56458132	4,56458285	4,564582083	0,125014329	0,25002859	25,12986703
4,68959559	4,68959711	4,689596348	0,125014265	0,25002859	25,12986703
4,81460985	4,81461137	4,814610612	0,125014265	0,25002853	25,12987351
4,93962418	4,9396257	4,939624941	0,125014329	0,25002859	25,12986708
5,06463844	5,06463997	5,064639205	0,125014265	0,25002859	25,12986708
5,18965277	5,1896543	5,189653534	0,125014329	0,25002859	25,12986708
5,31466704	5,31466856	5,314667798	0,125014265	0,25002859	25,12986708
5,4396813	5,43968282	5,439682063	0,125014265	0,25002853	25,12987351
5,56469563	5,56469715	5,564696392	0,125014329	0,25002859	25,12986703
5,68970989	5,68971142	5,689710656	0,125014265	0,25002859	25,12986703
5,81472422	5,81472575	5,814724985	0,125014329	0,25002859	25,12986708
5,93973849	5,93974001	5,939739249	0,125014265	0,25002859	25,12986708
6,06475267	6,06475425	6,064753462	0,125014213	0,25002848	25,12987868
6,18976706	6,18976858	6,189767821	0,125014359	0,25002857	25,12986924
6,31478124	6,31478283	6,314782034	0,125014213	0,25002857	25,12986924
6,43979563	6,43979715	6,439796392	0,125014359	0,25002857	25,12986924
6,56480981	6,5648114	6,564810605	0,125014213	0,25002857	25,12986924
6,68982427	6,68982569	6,689824983	0,125014378	0,25002859	25,12986733
6,81483857	6,81483999	6,814839279	0,125014296	0,25002867	25,12985898
6,93985286	6,93985429	6,939853575	0,125014296	0,25002859	25,12986718

Табела 15 Резултати симулације за пригушене принудне осцилације балансног точка у склопу са слободном запречницом (7 сек.-9 сек.)

Улаз t_1	Изаз t_2	Средња вредност $(t_2-t_1)/2$	Интервал полу периода	Период	Угаона фреквенција
7,06486716	7,06486858	7,064867871	0,125014296	0,25002859	25,12986718
7,18988138	7,1898829	7,189882139	0,125014268	0,25002856	25,12986999
7,3148957	7,31489728	7,314896489	0,12501435	0,25002862	25,12986456
7,43991008	7,4399116	7,439910838	0,12501435	0,2500287	25,12985637
7,5649245	7,56492598	7,564925238	0,1250144	0,25002875	25,12985135
7,68993858	7,68994037	7,689939475	0,125014237	0,25002864	25,12986265
7,81495296	7,81495458	7,814953765	0,12501429	0,25002853	25,12987371
7,93996799	7,93997099	7,939969487	0,125015722	0,25003001	25,12972446
8,06498153	8,06498333	8,064982428	0,125012941	0,25002866	25,12986009
8,18999654	8,18999954	8,189998039	0,125015611	0,25002855	25,1298712
8,31501086	8,31501386	8,315012362	0,125014323	0,25002993	25,12973224
8,44002437	8,4400262	8,440025285	0,125012922	0,25002725	25,13000251
8,56503941	8,56504241	8,565040912	0,125015628	0,25002855	25,1298714
8,69005367	8,69005667	8,690055173	0,125014261	0,25002989	25,12973687
8,81506793	8,81507093	8,815069434	0,125014261	0,25002852	25,12987421
8,94008148	8,94008332	8,9400824	0,125012966	0,25002723	25,13000442
9,06509576	9,06509759	9,065096675	0,125014275	0,25002724	25,13000301
9,19011004	9,19011187	9,190110951	0,125014276	0,25002855	25,1298713
9,31512513	9,31512813	9,315126627	0,125015677	0,25002995	25,12973044
9,44013942	9,44014046	9,440139943	0,125013316	0,25002899	25,12982697
9,56515296	9,56515479	9,565153871	0,125013928	0,25002724	25,13000271
9,69016799	9,69017099	9,690169492	0,125015621	0,25002955	25,12977094
9,81518229	9,81518333	9,815182807	0,125013315	0,25002894	25,1298326
9,94019662	9,94019962	9,940198122	0,125015315	0,25002863	25,12986336

7.3 Физикално тумачење грешке запречно-импулсних механизма

У глави (5.3) формулисана је и објашњена теорија грешака запречно-импулсних механизма применом пертурбационог рачуна и то како поступком двоструке размере времена, тако и методом Крилова и Богољубова. Изведене су формуле у општем, интегралном облику које дефинишу промену угаоне фреквенце осциловања осцилатора сатног механизма под утицајем принудног момента силе којим запречно–импулсно механизам делује на осцилатор. Као што је већ објашњено, ова промена угаоне фреквенце назива се грешком запречног – импулсног механизма и представља нелинеарни феномен коме је ова дисертација једним делом и посвећена. Обе поменуте пертурбационе методе довеле су до идентичних формула и та сагласност свакако је представљала прву проверу њихових ваљаности. Даље, у глави (5.4), коришћењем општих формула у интегралном облику, изведени су математички изрази за израчунавање грешака које генеришу две посебне врсте запречно импулсних механизма. Коректност како ових математичких изрази, тако и оних општих, интегралних формула, проверена је компјутерском симулацијом и анализом кретања 3Д модела одговарајућих запречно импулсних механизма. Нумерички резултати ових симулација показали су висок степен слагања са резултатима теоријских нумеричких прорачуна, чиме је потврђена коректност математичких изрази изведених применом пертурбационог рачуна. Остало је још да се изложи, објасни и прокоментарише физикално тумачење феномена промене угаоне фреквенце осцилатора часовника која је индукована принудним моментом силе запречно-импулсног механизма.

Разматра се квазистационарно режим принудних пригушених осцилација осцилатора часовника (балансног точка или клатна) у коме је енергија дисипације осцилатора једнака енергији коју он прима од запречно–импулсног механизма. Као што је то већ објашњено у претходној глави (5.3) ове дисертације, диференцијална једначина принудних пригушених осцилација балансног точка (осцилатора), дата је изразом:

$$J\ddot{\varphi} + c\dot{\varphi} + k\varphi = M(\varphi), \quad (7.17)$$

где је:

- $\varphi = \varphi(t)$ угаона координата којом се дефинише кретање осцилатора,
- J моменат инерције балансног точка односно, осцилатора,

- c константа вискозног отпора односно, вискозног момента силе $D = -c\dot{\varphi}$,
- k коефицијент крутости спиралне опруге,
- $M(\varphi)$ принудни моменат силе, који је периодична функција угаоне координате φ , односно времена t , $M(\varphi(t))$, у резонанци са осцилацијама осцилатора (балансног точка).

Једначина (7.17) може се трансформисати у једначину:

$$\ddot{\varphi} + 2\xi\omega_0\dot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = \mu(\varphi), \quad (7.18)$$

где је:

- $\omega_0 = \sqrt{k/J}$ угаона фреквенца сопствених осцилација,
- $\xi = c/(2J\omega_0)$ коефицијент пригушења, $\xi \in (0, 1)$, $\xi \ll 1$,
- $\mu(\varphi) = M(\varphi)/J$ специфични принудни моменат силе која је, као и $M(\varphi)$, периодична функција угаоне координате φ , односно времена t , у резонанци са осцилацијама осцилатора.

Сагласно изведеној теорији презентираној у глави 3 и одговарајућим почетним условима $\varphi(0) = 0, \dot{\varphi}(t) = \dot{\varphi}_0$, решење диференцијалне једначине (7.18) за квазистационарни режим осцилација балансног точка може се описати хармонијском функцијом:

$$\varphi(t) = \Phi \sin(\omega_0 t + \gamma(t)); \varphi(\psi) = \Phi \sin \psi, \quad (7.19)$$

у којој је Φ амплитуда, $\gamma(t)$ фазна разлика осциловања осцилатора, а ψ фаза осциловања $\psi = \omega_0 t + \gamma(t)$. У квазистационарном режиму амплитуда је константна $\Phi = const$, а $\gamma(t)$ описује феномен промене угаоне фреквенце осцилатора часовника која је индукована принудним моментом силе запречно-импулсног механизма. У складу са релацијом (5.63), угаона брзина осцилација дата је следећим изразом:

$$\dot{\varphi}(t) = \omega_0 \Phi \cos(\omega_0 t + \gamma(t)); \dot{\varphi}(\psi) = \omega_0 \Phi \cos \psi. \quad (7.20)$$

Као што је већ речено, специфични принудни моменат силе μ периодична је функција угаоне координате φ , односно времена t , и увек је у резонанци са осцилацијама које врши осцилатор. Усваја се, без умањења општости ове анализе, да је специфични принудни моменат силе μ хармонијска функција фазе осциловања ψ , $\mu = \mu(\psi)$ која је, у односу на угаону брзину осцилација $\dot{\varphi}(\psi)$, фазно померена за угао δ . Ако је фазна разлика позитивна $\delta > 0$, $\mu(\psi)$ фазно касни за $\dot{\varphi}(\psi)$ и описује се следећом функцијом:

$$\mu = \mu(\psi) = \mu_0 \cos(\psi - \delta), \quad (7.21)$$

у којој је μ_0 амплитуда. Сагласно изведеној релацији (5.84), грешка запречно-импулсног механизма који делује на осцилатор принудним моментом силе $M(\psi) = J \cdot \mu(\psi)$, рачуна се по следећој интегралној формули:

$$R = \frac{d\gamma}{dt} = -\frac{\omega_0}{2Q} \cdot \int_0^{2\pi} \mu(\Phi, \psi) \sin \psi d\psi / \int_0^{2\pi} \mu(\Phi, \psi) \cos \psi d\psi. \quad (7.22)$$

Решење интеграла у имениоцу разломка формуле (7.22) дато је следећим изразом:

$$\int_0^{2\pi} \mu(\Phi, \psi) \sin \psi d\psi = \mu_0 \cdot \int_0^{2\pi} \cos(\psi - \delta) \sin \psi d\psi = \pi \cdot \sin \delta, \quad (7.23)$$

а решење интеграла у бројиоцу разломка формуле (7.22) изразом:

$$\int_0^{2\pi} \mu(\Phi, \psi) \cos \psi d\psi = \mu_0 \cdot \int_0^{2\pi} \cos(\psi - \delta) \cos \psi d\psi = \pi \cdot \cos \delta. \quad (7.24)$$

Сагласно решењима (7.23) и (7.24), грешка запречно импулсног механизма у случају када је фазна разлика позитивна $\delta > 0$ дата је следећом релацијом:

$$R = \frac{d\gamma}{dt} = -\frac{\omega_0}{2Q} \cdot \operatorname{tg} \delta. \quad (7.25)$$

У овом случају, балансни точак осцилује са угаоном фреквенцом ω која је мања од ω_0 :

$$\omega = \omega_0 - R. \quad (7.26)$$

Из релације (7.26) непосредно следи да се у овом случају период осциловања продужава $T = 2\pi/(\omega_0 - R)$, а ход часовника успорава. Реч је о брадихроном ефекту грешке запречно импулсног механизма.

Ако је фазна разлика негативна $\delta < 0$, $\mu(\psi)$ фазно предњачи у односу на $\dot{\phi}(\psi)$ и описује се следећом функцијом:

$$\mu = \mu(\psi) = \mu_0 \cos(\psi + \delta). \quad (7.27)$$

У овом случају ($\delta < 0$), формула (7.25) мења знак, па релација која дефинише грешку запречно импулсног механизма гласи:

$$R = \frac{d\gamma}{dt} = +\frac{\omega_0}{2Q} \cdot \operatorname{tg} \delta. \quad (7.28)$$

Дакле, у наведеном случају ($\delta < 0$) балансни точак осцилује са угаоном фреквенцом ω која је већа од ω_0 :

$$\omega = \omega_0 + R. \quad (7.29)$$

Из релације (7.29) непосредно следи да се у овом случају период осциловања $T = 2\pi/(\omega_0 + R)$ скраћује, а ход часовника убрзава. Реч је о тахихроном ефекту грешке запречно импулсног механизма. У граничном, изохроном случају, када фазна разлика не постоји $\delta = 0$, $\mu(\psi)$ је у фази са угаоном брзином осциловања $\dot{\phi}(\psi)$, па грешка запречно импулсног механизма не постоји $R = 0$.

На осцилатор часовника делује реституциони моменат силе спиралне опруге, моменат силе вискозног трења и принудни моменат силе запречно импулсног механизма. У стационарном режиму осциловања, сагласно са (7.19), реституциони моменат силе спиралне опруге може се описати следећим изразом:

$$S = -k \cdot \phi = -k \cdot \Phi \sin \psi, \quad (7.30)$$

моменат силе вискозног трења формулом

$$D = -c \cdot \dot{\phi} = -c \cdot \Phi \omega_0 \cos \psi, \quad (7.31)$$

а, у складу са изразима (7.21) и (7.27), принудни моменат силе релацијом:

$$M(\psi) = J \cdot \mu_0 \cos(\psi \mp \delta). \quad (7.32)$$

За физикално објашњење феномена грешке запречно импулсних механизма од посебног је значаја чињеница да се принудни моменат силе описан релацијом (7.32) може приказати као збир две компоненте:

$$M(\psi) = J \cdot \mu_0 \cos(\psi \mp \delta) = J \cdot \mu_0 \cos \delta \cdot \cos \psi \pm J \cdot \mu_0 \sin \delta \cdot \sin \psi \quad (7.33)$$

Прва компонента $J \cdot \mu_0 \cos \delta \cdot \cos \psi$ увек је у контрафази са моменатом силе вискозног трења $-c \cdot \Phi \omega_0 \cos \psi$. Та два момента алгебарски се сабирају и, у квазистационарном режиму осциловања, алгебарски анулирају:

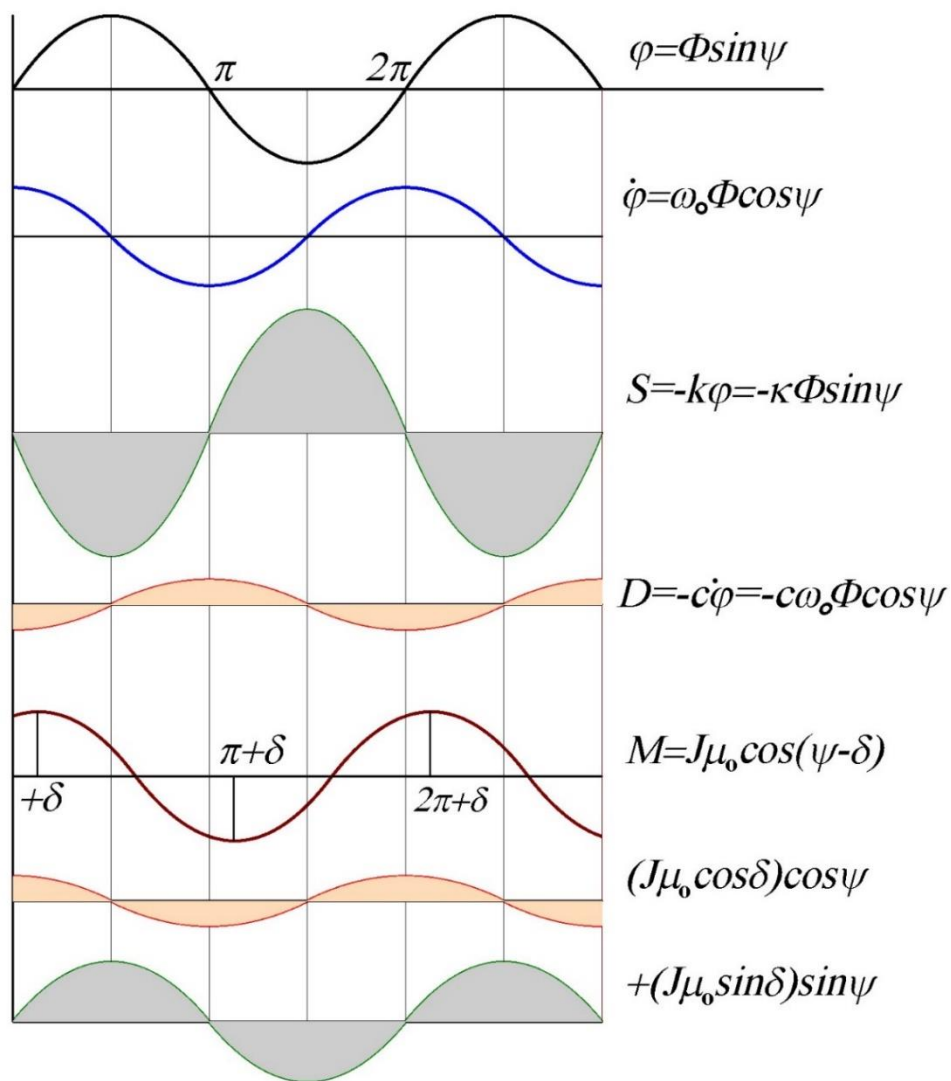
$$+J \cdot \mu_0 \cos \delta \cdot \cos \psi - c \cdot \omega_0 \Phi \cos \psi = 0. \quad (7.34)$$

Одавде непосредно следи да компонента $J \cdot \mu_0 \cos \delta \cdot \cos \psi$ принудног момента силе описује импулсну функцију запречно импулсног механизма, ону компоненту која надокнађује енергетске губитке осцилатора часовника.

У случају када је фазна разлика позитивна $\delta > 0$, друга компонента принудног момента силе има позитиван знак: $+J \cdot \mu_0 \sin \delta \cdot \sin \psi$ и алгебарски се сабира са реституционим моментом силе спиралне опруге $-k \cdot \Phi \sin \psi$. Сагласно чињеници да је, у овом случају, друга компонента принудног момента силе у контрафази са реституционим моментом силе спиралне опруге, та друга компонента умањује интензитет реституционог момента силе

$$+J \cdot \mu_0 \sin \delta \cdot \sin \psi - k \cdot \Phi \sin \psi, \quad (7.35)$$

стварајући ефекат који је еквивалентан умањује крутости спиралне опруге осцилатора. Како последично овај ефекат индукује продужавање периода осциловања, па тако и успоравање хода часовника, назива се брадихроним. Дијаграми формула (7.19), (7.20), (7.30), (7.31), (7.32) као и компоненте $J \cdot \mu_0 \cos \delta \cdot \cos \psi$ и $J \cdot \mu_0 \sin \delta \cdot \sin \psi$ који описују брадихрони ефекат грешке запречно-импулсног механизма приказани су на слици (70).



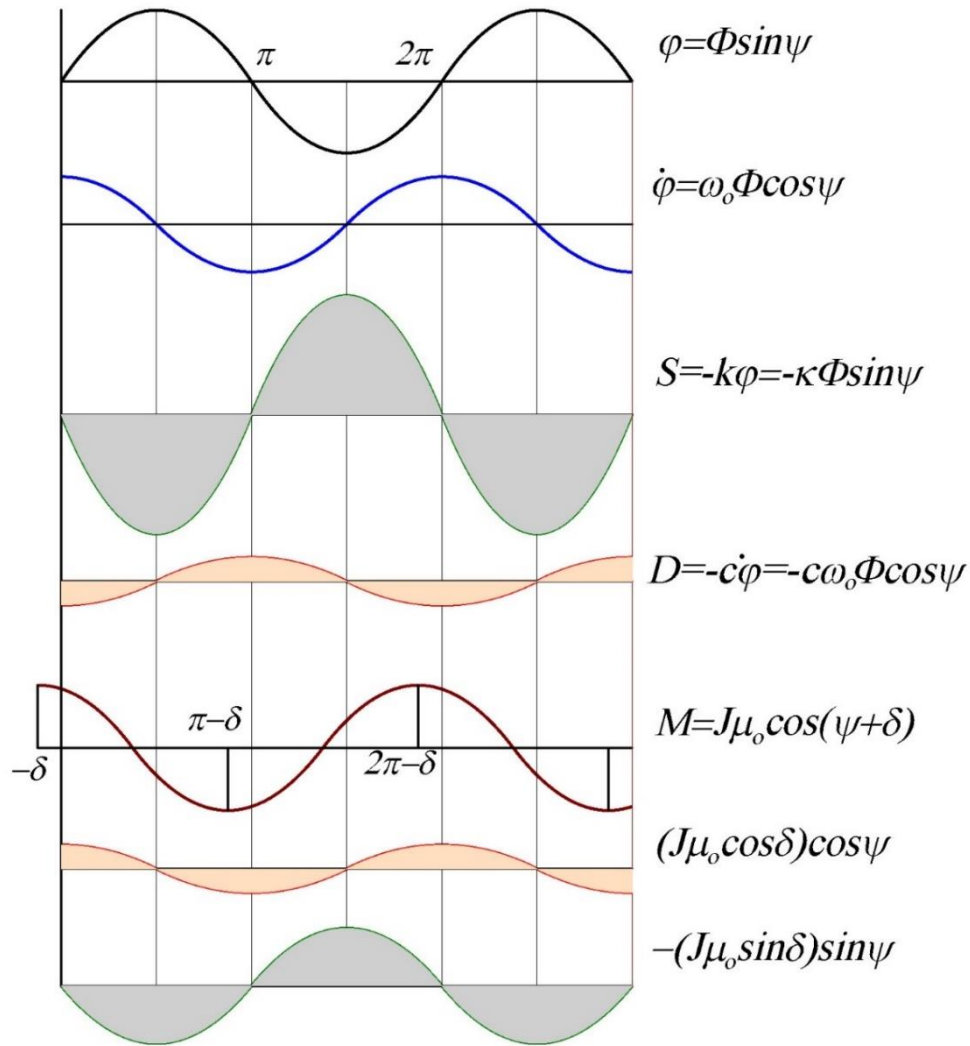
Слика 70 Дијаграми формула које описују брадихрони ефекат грешке запречно импулсног механизма

Тахихрони ефекат грешке запречно импулсног механизма приказан је на слици (71). У овом случају, у коме је фазна разлика негативна $\delta < 0$, друга компонента принудног момента силе има негативан предзнак: $-J \cdot \mu_0 \sin \delta \cdot \sin \psi$ и алгебарски се сабира са реституционим моментом силе спиралне опруге $-k \cdot \Phi \sin \psi$. Сагласно чињеници да је, у овом случају, друга компонента принудног момента силе

синфазна (у фази) са реституционим моментом силе спиралне опруге, та друга компонента појачава интензитет реституционог момента силе

$$-J \cdot \mu_0 \sin \delta \cdot \sin \psi - k \cdot \Phi \sin \psi, \quad (7.36)$$

стварајући ефекат који је еквивалентан повећању крутости спиралне опруге осцилатора. Како последично овај ефекат индукује скраћивање периода осциловања, па тако и убрзавање хода часовника, назива се тахихроним. Дијаграми формула (7.19), (7.20), (7.30), (7.31) и (7.32), као и компоненте $J \cdot \mu_0 \cos \delta \cdot \cos \psi$ и $-J \cdot \mu_0 \sin \delta \cdot \sin \psi$ који описују тахихрони ефекат грешке запречно-импулсног механизма приказани су на слици (71).



Слика 71 Дијаграми формула које описују тахихрони ефекат грешке запречно импулсног механизма

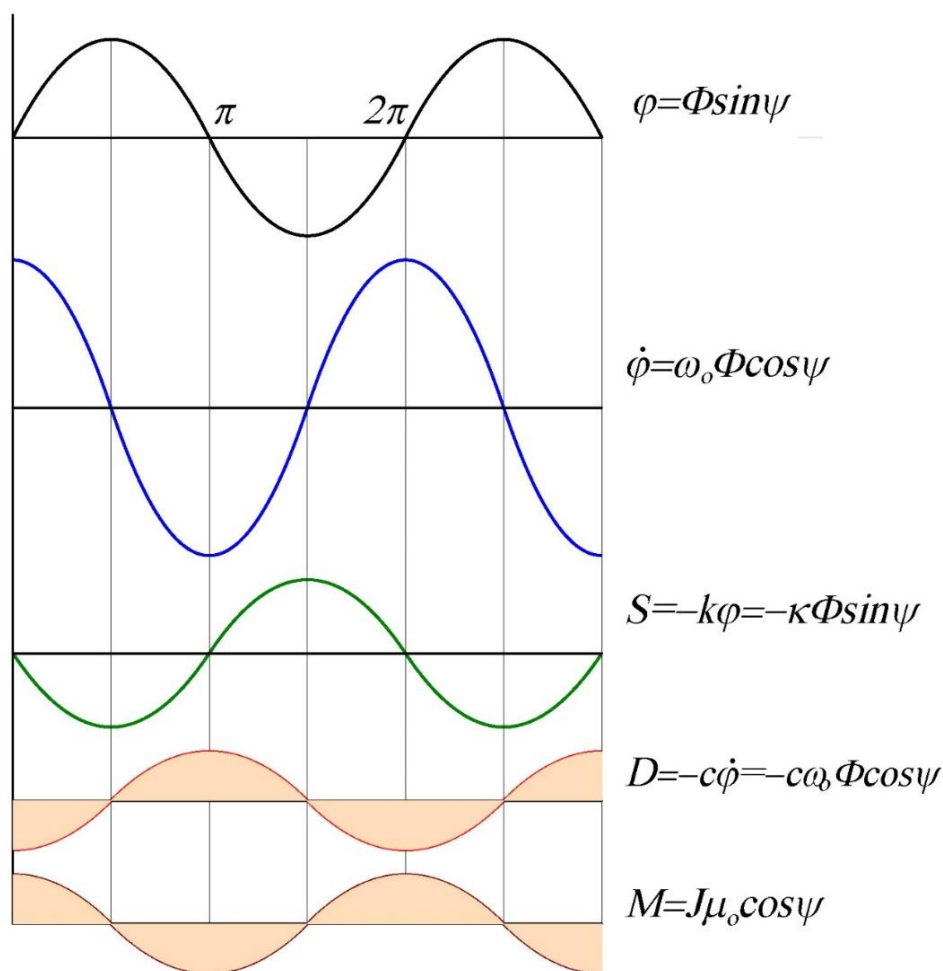
У случају када је принудни моменат силе запречно импулсног механизма у фази ($\delta = 0$) са угаоном брзином осциловања осцилатора,

$$M(\psi) = J \cdot \mu_0 \cos \psi, \quad (7.37)$$

он је у контрафази са моментом силе вискозног трења $-c \cdot \Phi \omega_0 \cos \psi$, са њим се алгебарски сабира и, у квазистационарном режиму осциловања, алгебарски анулира:

$$+J \cdot \mu_0 \cos \psi - c \cdot \omega_0 \Phi \cos \psi = 0. \quad (7.38)$$

Како у овом случају не постоји компонента принудног момента силе која утиче на промену реституционог момента силе спиралне опруге, не постоји ни промена угаоне фреквенце осцилатора. Другим речима, када је фазна разлика једнака нули, $\delta = 0$, грешка запречно импулсног механизма не постоји и ход часовника остаје не промењен. Реч је о изохроном ефекту грешке запречно импулсног механизма. Дијаграми формула (7.19), (7.20), (7.30), (7.31) и (7.37), који описују овај ефекат приказани су на слици (72).



Слика 72 Дијаграми формула које описују изохроном ефекат грешке запречно импулсног механизма

Пре самог краја, потребно је да се истакне генерални закључак ове анализе која је објаснила физикални смисао феномена промене угаоне фреквенце осциловања сатног осцилатора индукованог принудним моментом силе запречно

импулсног механизма односно, феномена грешке запречно импулсних механизма. Показано је да је фазна разлика између угаоне брзине осцилатора и принудног момента силе непосредно одговорна за промену фреквенце осцилатора. Ако је фазна разлика позитивна, принудни моменат силе фазно касни за угаоном брзином осцилатора, грешка запречно импулсног механизма је негативна и доводи до брадихроног ефекта продужавања периода осцилација и успоравања хода часовника. Ако је фазна разлика негативна, принудни моменат силе фазно предњачи у односу на угаону брзину осцилатора, грешка запречно импулсног механизма је тада позитивна и доводи до тахихроног ефекта скраћивања периода осцилација и успоравања хода часовника. Само у посебном случају, када поменута фазна разлика не постоји, не постоји ни грешка запречно импулсног механизма, па тако ни промена периода осцилација, нити промена хода сатног механизма. Детаљном анализом квазистационарног режима осциловања осцилатора показано је и физикални узрок грешке запречно-импулсних механизма. Наиме, ако фазна разлика између угаоне брзине осцилација и принудног момента силе постоји, само једна компонента момента силе запречно-импулсног механизма надокнађује енергетске губитак осцилатора. Енергија друге компоненте или се предаје или одузима од енергије спиралне опруге и тако привидно мења њену крутост, што непосредно утиче на промену фреквенце осцилација. У случају брадихроног ефекта, крутост се смањује, а у случају тахихроног ефекта крутост се повећава. Описани феномени нису последица линеарне теорије осцилација, већ управо нелинеарне динамике сатних механизма која је у овој дисертацији математички обрађена методама пертурбационог рачуна.

8. Закључак

8.1 Значај добијених резултата истраживања

Докторска дисертација „Нелинеарна динамика сатних механизма“ посвећена је анализи свих оних феномена који битно ремете и нарушавају функционисање сатних механизма као линеарних динамичких система. Наиме, ако би се ови феномени и утицаји занемарили односно, искључили из анализе, рад сатног механизма би се математички описивао линеарном теоријом осцилација. Таква линеарна динамика није у стању да, ни квалитативно нити квантитативно, дефинише узрок било какве промене равномерности хода часовника, па самим тим ни методе за корекцију такве промене. Сагласно томе, значај постигнутих резултата у овој дисертацији непосредно происходи управо из проучавања и анализе рада сатних механизма као нелинеарних динамичких система. У овој докторској дисертацији остварени су следећи резултати:

- Применом теорије пертурбација и то пертурбационом методом двоструке размере времена, као и методом усредњавања по Крилову и Богољубову, изведена је теорија грешака запречно-импулсних механизма. Изведене су опште аналитичке формуле у интегралном облику које квантитативно одређују промену угаоне фреквенце осциловања осцилатора под утицајем принудног момента силе којим запречно-импулсно механизам делује на осцилатор. Те формуле могу да се примене на све врсте запречно-импулсних механизма и добију оперативне релације за грешке сваке поједине запречнице.
- Изведена теорија грешака запречно-импулсних механизма показала је да промену угаоне фреквенце осциловања осцилатора настаје услед фазне разлике између принудног момента силе којим запречно-импулсни механизам делује на осцилатор и угаоне брзине осциловања осцилатора. У зависности од знака фазне разлике, изведена је класификација свих запречно-импулсних механизма на тахихроне и брадихроне.
- Изузев утицаја фазне разлике између принудног момента силе којим запречно-импулсни механизам делује на осцилатор и угаоне брзине осциловања осцилатора, показано је да фреквенца осцилатора зависи од амплитуде осцилација, коефицијента пригушења и интензитета принудног

момента силе. Ове чињенице типична су последица нелинеарне динамике сатних механизма јер не проистичу из линеарне теорије осцилација, већ из пертурбационог рачуна који је примењен у овој дисертацији.

- Изведене су оперативне формуле за грешке две врсте запречно–импулсних механизма у стационарном режиму осциловања осцилатора: запречнице са повратним трзајем и мирне полужне запречнице. Применом ових формула могу се добити нумеричке вредности промену угаоне фреквенце осциловања осцилатора под утицајем принудног момента силе којим запречно–импулсно механизам делује на осцилатор.
- Изведене оперативне формуле за грешке запречно–импулсних механизма проверене су компјутерским симулацијама и анализама осциловања сатног осцилатора (балансног точка са спиралном опругом). Симулације су изведене коришћењем посебно креираних модела запречнице и осцилатора, методом „Event based motion study“. Резултати ових симулација показали су висок степен сагласности са резултатима добијеним из теоријских оперативних формула.
- Применом теорије претурбација и то методе двоструке размере времена изведена је формула за циркуларну грешку физичког клатна односно, формула која квантитативно описује утицај амплитуде на период осциловања физичког клатна.
- Анализирани су спољашњи утицаји који делују на осцилатор часовника и мењају његову фреквенцу односно, период осциловања: топлотне дилатације, аеростатички потисак, отпор и густина ваздуха. За приказане спољашње утицаје дати су одговарајући математички изрази тако да се може видети у којој мери они утичу на ход часовника.
- Извршена је теоријска анализа и изведен је прорачун компензације топлотних дилатација клатна. Овај прорачун, који урачунава промену момента инерције физичког клатна са променом температуре, омогућава готово савршено неутралисање утицаја топлотних дилатација на период осциловања клатна.
- Наведен је и алгоритам итеративног поступка за компензовање топлотних дилатација физичког клатна употребом SolidWorks апликације. У наведеној апликацији, коришћењем 3Д модела физичког клатна, може се остварити компензација топлотних дилатација са унапред жељеном тачношћу.

- Дат је предлог методе за компензацију утицаја промене густине ваздуха на промену периода осциловања клатна.
- У дисертацији је објашњен рад запречно–импулсних механизма и истакнуто конструктивно - геометријско порекло њиховог утицаја на период осциловања осцилатора. Објашњено је физикално тумачење феномена промене угаоне фреквенце осцилатора часовника која је индукована принудним моментом силе запречно-импулсног механизма.
- Наведена је класификација запречно-импулсних механизма у којој су истакнуте карактеристике најзначајнијих запречно-импулсних механизма.
- Коришћењем софтверског програма Solidworks направљен је потпуно функционалан 3Д модел сатног механизма. Овај 3Д модел даје јасан увид у све подсклопове сатног механизма и пружа могућност симулације и анализе рада часовника са реалним параметрима.

Научни доприноси ове докторске дисертације се могу видети кроз:

- Дисертација доприноси бољем разумевању теорије пертурбација кроз њену примену на практичном примеру сатних механизма
- Коришћењем пертурбационих метода дат је допринос теоријској механици и теорији механизма
- Израдом функционалног 3Д модела на коме је могуће симулирати рад механизма у довољно реалним условима да се може направити јасно поређење са резултатима добијеним аналитичким формулама
- Коришћење напредних метода 3Д моделирања и инвентивно коришћење посебно дефинисаних итеративних процедура компјутерског моделирања осцилатора са циљем компензације његових топлотних дилатација
- Коришћење посебних метода компјутерске симулације које се не заснивају на току времена као независној променљивој, већ на унапред дефинисаним догађајима односно, стањима механизма у току његовог рада (event based motion study).
- Резултати научних истраживања у овој докторској дисертацији значајни су за квалитативно и квантитативно разумевање нелинеарне динамике механизма часовника, па се зато могу користити као практичне препоруке за ефикаснији дизајн механичких часовника што доводи до тачнијег и прецизнијег мерења тока времена.

- Резултати ове дисертације могу бити искоришћени за дизајн подсклопова запречно-импулсних механизма и осцилатора, као најважнијих делова сатних механизма.

8.2 Осврт на полазне хипотезе

Према свим претходним поглављима ове дисертације, истраживања која су спроведена показала су потпуно оправданост почетних хипотеза датих у уводном поглављу.

Прва хипотеза: коришћењем метода пертурбација могуће је извести аналитичке изразе за промену фреквенце принудних пригушених осцилација сатног осцилатора услед његове интеракције са запречно-импулсним механизмом.

Поглавље 3 даје теоријске основе за коришћење метода пертурбационог рачуна - поступак усредњавања по методи Крилову и Богољубову и по методи вишеструких скала односно времена. По овим методама добијени су аналитички изрази за одређивање промене фреквенце принудних пригушених осцилација сатног механизма у току интеракције са запречно-импулсним механизмом. Резултати ове анализе су универзално применљиви на све друге типове запречно-импулсних механизма, без обзира да ли као осцилатор имају балансни точак или клатно.

Друга хипотеза: Аналитички изрази за промену сопствене фреквенце осцилатора услед његове интеракције са запречно-импулсним механизмом могу бити проверени компјутерском симулацијом принудних пригушених осцилација. Такође, претпоставка је да ће ова верификација потврдити тачност изрази добијених теоријом пертурбационог рачуна.

Израдом 3Д модела у софтверском пакету Solidworks омогућена Ови добијени аналитички изрази су у поглављима 5.3 и 7.2 проверени тако што је извршена симулација сатног механизма и резултати ових симулација су табеларно приказани.

Трећа хипотеза: Могуће је извести аналитичке поступке за компензацију топлотних дилатација осцилатора часовника.

Топлотна дилатација осцилатора часовника представља један од најутицајнији поремећај рада часовника. У поглављу 4.3 дат опис утицаја температуре на физичко клатно и представљен нумерички пример

некомпензованог клатна. Поред утицаја температуре на осцилатор утичу аеростатички потисак, отпор и густина ваздуха тако да је описан и њихов утицај. Дат је ред величине њиховог поремећаја у односу на температурни ина тај начин је показано да је температурна дилатација озбиљнији поремећај него остали утицаји.

Четврта хипотеза: Може бити формулисана и успешно спроведена итеративна процедура за приближну компензацију топлотних дилатација осцилатора часовника (клатна) коришћењем одговарајуће компјутерске апликације за 3Д моделирање.

У поглављу 4.4 извршен је прорачун за компензацију клатна на основу температурних промена које утичу на равномерност хода часовника. Ове компензације се заснивају на избору оног материјала који има најмањи линеарни коефицијент температурне дилатације и њиховим међусобним комбиновањем тако да се при промени температуре ефекти дилатације међусобно потиру. Осим температурне приказано је и неутралисање и компензација клатна при промени густине клатна.

Пета хипотеза: могуће је остварити синтезу и генерисање потпуно функционалног компјутерског 3Д модела сатног механизма и извршити успешну компјутерску симулацију његовог рада

Направљен је и симулиран рад компјутерског 3Д модела сатног механизма који је у потпуности задовољио геометријске и функционалне критеријуме сваког дела овог склопа. Подешавања у оквиру саме симулације су се показала довољно реалним да се ти резултати могу узети за упоређивање са резултатима добијеним аналитичким путем што је и потврђено у 7. поглављу.

8.3 Будућа истраживања

Дисертација може послужити као основа за даља научна истраживања и развоју нових метода научно-истраживачког рада. Истраживања из области нелинеарне динамике као и из области проучавања сатних механизма издвајају се у неколико праваца а неки од њих су:

- Израда функционалних 3Д модела свих најважнијих типова запречно импулсних механизма (котвена запречница са повратним трзајем, Харисонов грасхопер, Грејемова мирна запречница, Денисонова гравитациона, слободна

полужна Швајцарска и Енглеска запречница и хронометарски запречно импулсни механизам)

- Симулације рада и анализе кретања свих горе наведених типова запречно - импулсних механизма са циљем откривања и дефинисања њихових карактеристичних импулсних функција. Дефинисање функционалне зависности момента силе којим запречно – импулсни механизам делује на осцилатор од угаоног померања осцилатора и фазе осциловања.
- Експерименталне провере могућности барометарске компензације односно компензације утицаја промене густине ваздуха на период осциловања осцилатора. Откривање и дефинисање утицаја вискозног и динамичког отпора (отпора притиска) на енергетске губитке осцилатора
- Компјутерска симулација рада епицикличног механизма за навијање часовника
- Експерименталне провере и провере компјутерским симулацијама утицаја нелинеарних карактеристика спиралне опруге на период осциловања балансног точка
- Теоријска анализа, експерименталне провере и провере компјутерским симулацијама грешака запречно–импулсних механизма у нестационарним режимима осциловања осцилатора.

9. Литература

- [1] Denny M.: *The pendulum clock: a venerable dynamical system* - European journal of physics, Vol. 23, No 4, 2002, pp 449.
- [2] Bennett M., Schatz M. F., Rockwood H., Wiesenfeld K.: *Huygens's clocks* - Proceedings: Mathematics, Physical and Engineering Science, 2002, pp. 563-579.
- [3] Headrick M. V.: *Origin and evolution of the anchor clock escapement* - IEEE Control Systems, Vol 22, No 2, 2002, pp. 41-52.
- [4] Marinca V. H. N.: *Nonlinear dynamical systems in engineering: Some approximate approaches* - Springer Science & Business Media, 2012.
- [5] Mao J., Fu Y., Li P.: *Dynamics of periodic impulsive collision in escapement mechanism* - Shock and Vibration, Vol. 20, No 5, 2013, pp. 1001-1010.
- [6] Roup A. V., Bernstein D. S., Nersesov S. G., Haddad W. M., Chellaboina, V.: *Limit cycle analysis of the verge and foliot clock escapement using impulsive differential equations and Poincare maps* - International Journal of Control, Vol. 76, No 17, 2003, pp. 1685-1698.
- [7] Hoyng P.: *Dynamics and performance of clock pendulums* - American Journal of Physics, Vol. 82, No 11, 2014, pp. 1053-1061.
- [8] Feinstein G.: *Impulsing the Pendulum: Escapement Error* - NAWCC bulletin , Vol. 48, No 5, 2006, pp. 569-575.
- [9] Moline D., Wagner J., Volk E.: *Model of a mechanical clock escapement* - American Journal of Physics, Vol. 80, No. 7, 2012., pp. 599-606
- [10] Roup, A. V., Bernstein, D. S.: *On the dynamics of the escapement mechanism of a mechanical clock* - Proceedings of the 38th IEEE Conference, Decision and Control, Vol. 3, 1999.,pp. 2599-2604.
- [11] Matthys R. J.: *Accurate clock pendulums*, Oxford: OUP Oxford, 2004..
- [12] Popkonstantinovic, B., Obradovic, R., Obradovic, M., Jeli, Z., Stojicevic, M.: *Geometrical and mechanical characteristics of deformed balance spring obtained by simulation study* - Simulation, Vol. 92, No 11, 2016., pp. 981-997
- [13] Xie L. H., Du R. X.: *Mechanics of Hairspring in Mechanical Watch Movement*. In Applied Mechanics and Materials - Trans Tech Publications, Vol. 117, 2012, pp. 252-255.

- [14] Bellman R.: *Perturbation Techniques in Mathematics, Engineering & Physics*, Dover Publications , 2003.
- [15] Beléndez A., Pascual C., Méndez D. I., Beléndez T., Neipp C.: *Exact solution for the nonlinear pendulum* - Revista brasileira de ensino de física, Vol 29, no. 4, 2007, pp 645-648.
- [16] Popkonstantinovic B., Miladinovic Lj., Obradovic M., Ostojic G., Stankovski S.: *Mathematical Principles and Optimal Design Solutions to Compensation for the Pendulum Temperature Dilatation* - Acta Polytechnica Hungarica Vol. 10, No 80, 2013, pp. 117-128
- [17] Popkonstantinovic B., Miladinovic L., Stoimenov M., Petrovic D., Petrovic N.: *Practical method for thermal compensation of long-period compound pendulum* - NISCAIR-CSIR, India, 2011, pp. 657-664
- [18] Marinca V. H. N.: *The Method of Multiple Scales - Nonlinear Dynamical Systems in Engineering*, 2012., pp. 83-102,
- [19] Popkonstantinović, B., Miladinović, L., Stoimenov, M., Petrović, D., Ostojić, G., Stankovski, S: *Design, modelling and motion simulation of the remontoire mechanism* - Transactions of Famena, Vol. 35, No 2, 2011., pp. 79-93.
- [20] Popkonstantinovic, B., Miladinovic Lj., Obradovic M., Stoicevic M: *Geometrical Characteristics and Solid Modeling of the Grasshopper Escapement Mechanism* - Proceedings of 4th International Scientific Conference MonGeometrija, Vlasina, 2014.
- [21] Krupp E. C.: *Echoes of the ancient skies: The astronomy of lost civilizations* - Courier Corporation, 2003.
- [22] Malmström V. H.: *Cycles of the Sun, Mysteries of the Moon: The Calendar in Mesoamerican Civilization* - University of Texas Press, 2014.
- [23] Sims L.: *The 'solarization' of the moon: manipulated knowledge at Stonehenge* - Cambridge archaeological journal, Vol. 16, No 2, 2006, pp. 191-207.
- [24] Depuydt L.: *Civil calendar and Lunar calendar in Ancient Egypt* - Peeters Publishers, 1997.
- [25] Horowitz W.: *The 360 and 364 day year in ancient Mesopotamia* - Journal of the Ancient Near Eastern Society, Vol 24, No 1, 1996.

- [26] Kurzweil R., Richter R., Kurzweil R., Schneider M. L.: *The age of intelligent machines* - Cambridge: MIT press, 1990.
- [27] Couprie D. L.: *Heaven and earth in ancient Greek cosmology: From Thales to Heraclides Ponticus* - Springer Science & Business Media, 2011.
- [28] Wright M. T.: *Greek and Roman Portable Sundials An Ancient Essay in Approximation* - Archive for history of exact sciences, Vol. 55, No 2, 2000, pp. 177-187.
- [29] Rowland I. D., Howe T. N. (editors): *Vitruvius: 'Ten Books on Architecture'* - Cambridge University Press, 2001..
- [30] Houston G. W.: *Using Sundials, Aspects of Ancient Institutions and Geography* - Studies in Honor of Richard JA Talbert, p. 298, 2014.
- [31] Flammarion C.: *Astronomie populaire* - Cambridge University Press, 2014..
- [32] Ansari S. R.: *Practical astronomy in Indo-Persian sources* - Indian journal of History of Science, Vol. 37, No 3, 2002, pp. 255-266.
- [33] Safiai M. H., Ibrahim I. A.: *Tracing the History of Astrolabe Inventions Across Civilisations* - Islamic Perspectives on Science and Technology, 2016, pp. 373-382.
- [34] Cullen C.: *Astronomy and Mathematics in Ancient China: The 'Zhou Bi Suan Jing'* - Cambridge University Press, 2006..
- [35] Aveni A. F.: *Empires of time: calendars, clocks and cultures* - Tauris Parke Paperbacks, 2000.
- [36] Paz E. B., Ceccarelli M., Otero J. E., Sanz J. L. M.: *Medieval machines and mechanisms*, Dordrecht: Springer, 2009., pp. 65-90.
- [37] Faruqi Y. M.: *Contributions of Islamic Scholars to the Scientific Enterprise* - International Education Journal , Vol. 7, No 4, 2006, pp. 391-399.
- [38] Allaby M. R. G.: *Exploration: New Lands, New Worlds* - Infobase Publishing, 2010..
- [39] Yan H., Tsung-Yi L.: *A systematic approach to the reconstruction of ancient Chinese escapement regulators* - International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference, 2002, pp. 407-414.

- [40] Yan H., Tsung-Yi L.: *Comparison between the escapement regulators of Su Song's clock-tower and modern mechanical clocks* - International Symposium on History of Machines and Mechanisms Proceedings HMM , 2000, pp. 141-148.
- [41] Hassaan G. A.: *Innovation of Mechanical Machinery in Medieval Centuries Part I: Windmills, Water Wheels and Automatic Fountains* - International Journal of Innovation and Applied Studies, Vol. 9, No 4 ,2014, p. 1497.
- [42] Gimpel J.: *The medieval machine: The industrial revolution of the Middle Ages* - New York: Penguin Books, 1976.
- [43] Álvarez V. P.: *The role of the mechanical clock in medieval science* - Endeavour, Vol. 1, No 39, 2015, pp. 63-68.
- [44] Williams E. V.: *The Bells of Russia: History and Technology* - Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 2014.
- [45] Dohrn-van Rossum G.: *History of the hour: Clocks and modern temporal orders* - Chicago, USA: University of Chicago Press, 1996.
- [46] Stoimenov, M., Popkonstantinović, B., Miladinović, L. and Petrović, D.: *Evolution of clock escapement mechanisms* - FME Transactions, Vol. 40, No 1, 2012, pp.17-23.
- [47] Usher A. P.: *A history of mechanical inventions: revised edition* - Courier Corporation, 2013.
- [48] Du R., Xie L.: *The mechanics of mechanical watches and clocks* - Springer Science & Business Media, Vol. 21, 2012.
- [49] Huygens C.: *Horologium oscillatorium: sive de motu pendulorum ad horologia aptato demonstrationes geometricae* - F. Muguet, 1966.
- [50] Hayes J.: *XII things you (probably) didn't know... about watches* - Engineering & Technology , Vol. 8, No 12, 2013, pp. 39-42.
- [51] Symonds R. W.: *Thomas Tompion: his life and work*, Spring Publications, 1969..
- [52] Čučaković A., Popkonstantinović B.: *Projekat i konstrukcija velikog vestminsterskog časovnika* - Proceedings of the 23rd Conference on Descriptive Geometry and Engineering Graphics, MoNGeometrija, Novi Sad, 2006..
- [53] Proctor T.: *Innovations in time: What can we learn from history?* - Creativity and Innovation Management Vol. 7, No. 4, 1998, pp. 204-211.

- [54] Gagneux S.: *Double-pendulum clock* - Horological Journal, Vol 142, No. 149, 2000, p. 70
- [55] Guillaume C.-É.: *L'invar et l'élinvar* - Lüdin, 1974.
- [56] Khairi R., Mininger X., Corcolle R., Pichon L., Bernard L.: *Modeling of Magnetic Field Perturbations on the Balance Spring of a Mechanical Watch* - IEEE Transactions on Magnetism, Vol 52, No. 3, 2016, pp. 1-4.
- [57] Masumoto T., Ohnuma S., Sugawara K., Kimura H.: *New Type Fe-Mn Based Alloys with Super Elinvar and Invar Characteristics* - Materials transactions, Vol 1; Vol. 58, No 4, 2017, pp.701-704.
- [58] Neugebauer O.: *Notes on Hipparchus* - Astronomy and History Selected Essays, Springer, New York, NY, 1983., pp. 320-324.,
- [59] Deely J.: *Four ages of understanding*, Toronto: University of Toronto Press, 2001.
- [60] Hinkley, N., J. A. Sherman, N. B. Phillips, M. Schioppo, N. D. Lemke, K. Beloy, M. Pizzocaro, C. W. Oates, A. D. Ludlow: *An atomic clock with 10⁻¹⁸ instability* -.Science , Vol 341, No. 6151, pp. 1215-1218.
- [61] Murdock J.: *Perturbation - Theory and Methods* - Philadelphia: Society for industrial and applied mathematics, 1999.
- [62] Kovacic I., Brennan M. J. T. *The Duffing equation: nonlinear oscillators and their behaviour* - John Wiley & Sons, 2011..
- [63] Luo J., Jie, Wu W., Shao C-G., Li Q., Liu J-P., Zhan W-Z., Wang D-H.: *Influence of temperature on period of torsion pendulum with a high-Q fused silica fiber* - Review of Scientific Instruments, Vol 9, No. 86, p. 094501., 2015.
- [64] Burgess, M: *The Scandalous Neglect of Harrison's Regulator Science* - The Proceeding of the Longitude Symposium, Harvard University, Cambridge Massachusetts, 1998, pp. 255-278.
- [65] Heldman A.: *Wooden pendulum rods and change of weight with change in humidity* - Columbia, PA.: Hor. Sci. Newslett, Available from NAWCC library, 2000.
- [66] Bennett J. A.: *George Biddell Airy and horology* - Annals of science, Vol 3, No. 37, pp. 269-285., 1980..
- [67] Woodward P.: *Woodward on Time: A Compilation of Philip Woodward's Horological Writings* - British Horological Institute, 2006..

- [68] Hoyng P.: *Dynamics and performance of clock pendulums*, - American Journal of Physics, 2014..
- [69] Feinstein G.: *Impulsing the Pendulum: Escapement Error* - NAWCC Horological Science, Chapter 161 , 2005, pp. 2-26.
- [70] Sambhavi K., Prabha K.A.: *Design, Analysis and Manufacturing of Planetary Gear Used in Clock Mechanism Using Rapid Prototype Technique* - The International Journal of Science and Technoledge, Vol 3, No 6, 2015, pp.158.
- [71] Andrejević R., Šiniković G., Stojićević M., Stoimenov M., Miladinović L., Popkonstantinović B., Ostojić G., Stankovski, S.: *A novel walker with mechanically established walking and standing mechanism* - Tehnički vjesnik, Vol 20, No. 6, 2013, pp.927-931.
- [72] Stojićević M., Stoimenov M., Jeli Z.: *A Bipedal Mechanical Walker with Balancing Mechanism* - Tehnički vjesnik, Vol 25, No. 1, 2018, pp. 118-124.
- [73] Popkonstantinovic B., Miladinovic L., Jeli Z., Stojicevic M.: *Event based motion analysis of escapement mechanism 3D model* - Proceedings of the 5th International Scientific Conferance on Geometry and Graphic moNGeometrija , Belgrade, 2016.

10. Списак слика

Слика 1 Клепидра Ктесибија Александријског [31].....	10
Слика 2 Астролаб [33].....	11
Слика 3 Реплика Ал Шатировог сунчаног часовника у Дамаску [37]	12
Слика 4 Пешчани сат.....	13
Слика 5 Часовник у Венецији, 1499.	14
Слика 6 Српски монах Лазар показује Великом кнезу свој часовник [45].....	15
Слика 7 Крунски точак, вретено и балансна полука [46]	15
Слика 8 Кристијан Хајгенс (1629-1695) [48]	16
Слика 9 Нирнбешко јаје, око 1550-те	17
Слика 10 Томас Томпион (Thomas Tompion, 1639.–1713.) [51].....	18
Слика 11 Џорџ Грејем (George Graham, 1673.–1751.) [48]	19
Слика 12 Томпионова цилиндарска запречница	20
Слика 13 Едмунд Бекет Денисон (Edmund Beckett Denison, 1816.-1905.) [52]	21
Слика 14 Двострука трокрака гравитациона запречница [52]	21
Слика 15 Абрахам Бреге (Abraham-Louis Bréguet, 1747.-1823.	22
Слика 16 Први морнарички хронометар Џона Харисона 1730. [20]	22
Слика 17 Џон Арнолд (John Arnold 1736.-1799.).....	23
Слика 18 Томас Ерншо (Thomas Earnshaw 1749.-1829.) [48]	23
Слика 19 Зигмунд Рифлер (Sigmund Riefler 1847–1912) и његов астрономски часовник	24
Слика 20 Бит Халдиман (Beat Haldimann, 1964.-)	25
Слика 21 Физичко клатно	47
Слика 22 Шематски приказ балансног точка.....	48
Слика 23 Балансна опруга код часовника фирме „Омега“	49
Слика 24 Техничка реализација „Gridiron“ и попречни пресек коаксијалних цеви носача клатна од челика и цинка [16].....	68
Слика 25 Температурна компензација тежишта клатна и порекло резидуума грешке [16]	69
Слика 26 Дијаграм итеративног поступка компензација топлотних дилатација клатна.....	74
Слика 27 Котвени запречно-импулсни механизам са повратним трзајем; 1-котва, 2-запречно-импулсна површина, 3-запречни точак, 4-осовина запречног точка, 5- зуб запречног точка, 6-оса клатна.....	82
Слика 28 Дијаграми моментних интеракција за котвени запречно-импулсни механизам са повратним трзајем	83
Слика 29 Грејемов запречно-импулсни механизам	86
Слика 30 Запречна и импулсна функција на десној и левој палети	86
Слика 31 Дијаграми моментних интеракција мирних запречно-импулсних механизма	87
Слика 32 Цилиндарска мирна запречница.....	89
Слика 33 Денисонова гравитациона четворокрака запречница; 1-осовина импулсне палете, 2- импулсна палета, 3-крак запречног точка, 4-упориште, 5-клин	

импулсне палете, 6-брегаста осовина, 7-оса клатна, 8-клатно, 9-импулсна игла, 10-граничник	91
Слика 34 Дијаграми моментних интеракција Денисоновог гравитациог запречно-импулсних механизма	92
Слика 35 Швајцарска слободна полужна запречница	94
Слика 36 Слободна енглеска полужна запречница	95
Слика 37 Хронометарски 3-И механизам	96
Слика 38 Конструктивно-геометријско порекло грешке слободне швајцарске полужне запречнице	97
Слика 39 Дијаграм угаоне брзине φ балансног точка и специфичног момента силе $\mu(\psi)$ у функцији фазе осциловања ψ	122
Слика 40 Фазни дијаграм принудних пригушених осцилација балансног точка на кога делују моменти силе слободне запречнице	122
Слика 41 Дијаграм угаоне брзине φ балансног точка и специфичног момента силе $\mu(\psi)$, оба у функцији фазе осциловања ψ	125
Слика 42 Фазни дијаграм принудних пригушених осцилација балансног точка на кога делују моменти силе 3И механизма са повратним трзајем	125
Слика 43 Склоп ремонтара и основни делови	129
Слика 44 Склоп ремонтара	129
Слика 45 Принцип рада ремонтара	131
Слика 46 Преносни механизам	133
Слика 47 - "Прашки Орлој"	134
Слика 48 Развучени приказ подскопа за навијање (изометрија)	136
Слика 49 Развучени приказ подскопа за навијање (поглед одозго)	137
Слика 50 Подсклоп за навијање	138
Слика 51 Подсклоп за навијање	138
Слика 52 Модел сата	141
Слика 53 Модел сата	142
Слика 54 Модел целог сата	143
Слика 55 Детаљ модела сата	144
Слика 56 Механизми унутар часовника	144
Слика 57 Механизми унутар часовника	145
Слика 58 Механизми унутар часовника	146
Слика 59 Ремонтар и запречно-импулсни механизам	147
Слика 60 Преносна група	147
Слика 61 Механизам за навијање	148
Слика 62 Ремонтар	148
Слика 63 Непомични рам часовника	149
Слика 64 Клатно	150
Слика 65 Запречно-импулсни механизам „Grasshopper“	151
Слика 66 Модел склопа балансног точка	152
Слика 67 Модел склопа балансног точка	153
Слика 68 Параметри „Event based motion study“ склопа слободне запречнице и осцилатора	155

Слика 69 Параметри „Event based motion study“ склопа запречно-импулног механизма са повратним трзајем	156
Слика 70 Дијаграми формула које описују брадихрони ефекат грешке запречно импулног механизма.....	177
Слика 71 Дијаграми формула које описују тахихрони ефекат грешке запречно импулног механизма.....	178
Слика 72 Дијаграми формула које описују изохроном ефекат грешке запречно импулног механизма.....	179

11. Списак табела

Табела 1	Линеарни коефицијенти температурске дилатације за неке материјале.	60
Табела 2	Поређење квалитета компензације	72
Табела 3	Параметри ремонтаара	132
Табела 4	Резултати симулације за пригушене слободне осцилације балансног точка у склопу са запречницом са повратним трзајем (1 сек.-3 сек.).....	161
Табела 5	Резултати симулације за пригушене слободне осцилације балансног точка у склопу са запречницом са повратним трзајем (4 сек.-6 сек.).....	162
Табела 6	Резултати симулације за пригушене слободне осцилације балансног точка у склопу са запречницом са повратним трзајем (7 сек.-9 сек.).....	163
Табела 7	Резултати симулације за пригушене слободне осцилације балансног точка у склопу са слободном запречницом (1 сек.-3 сек.).....	164
Табела 8	Резултати симулације за пригушене слободне осцилације балансног точка у склопу са слободном запречницом (4 сек.-6 сек.).....	165
Табела 9	Резултати симулације за пригушене слободне осцилације балансног точка у склопу са слободном запречницом (7 сек.-9 сек.).....	166
Табела 10	Резултати симулације за пригушене принудне осцилације балансног точка у склопу са запречницом са повратним трзајем (1 сек.-3 сек.).....	167
Табела 11	Резултати симулације за пригушене принудне осцилације балансног точка у склопу са запречницом са повратним трзајем (4 сек.-6 сек.).....	168
Табела 12	Резултати симулације за пригушене принудне осцилације балансног точка у склопу са запречницом са повратним трзајем (7 сек.-9 сек.).....	169
Табела 13	Резултати симулације за пригушене принудне осцилације балансног точка у склопу са слободном запречницом (1 сек.-3 сек.).....	170
Табела 14	Резултати симулације за пригушене принудне осцилације балансног точка у склопу са слободном запречницом (4 сек.-6 сек.).....	171
Табела 15	Резултати симулације за пригушене принудне осцилације балансног точка у склопу са слободном запречницом (7 сек.-9 сек.).....	172

Биографија

Миша (Драги) Стојићевић, рођен је 24.06.1987. године у Пожаревцу. По завршеној основној школи „Иво Лола Рибар“ у Великом Градишту уписао је техничку школу „Никола Тесла“ у Костолцу, где је матурирао 2006. године. Машински факултет Универзитета у Београду уписао је 2006. године, а дипломирао је 2011. године на модулу за Прехрамбено машинство, са средњом оценом 8,47.

Дипломски рад, на тему „Пројектовање структуре и кинематике робота у линији за палетизирање картонских кутија са производима од чоколаде" кандидат је одбранио на Машинском факултету у Београду, оценом 10.

Школске 2011/2012. уписује Докторске студије на Машинском факултету Универзитета у Београду. У школској 2011/12 био је ангажован као волонтер на одржавању вежби из предмета Хидраулички и пнеуматски механизми и инсталације и Основне технолошке операције у прехрамбеном машинству на трећој години основних академских студија. Од летњег семестра школске 2011/12 године ради као демонстратор-волонтер на предметима Конструктивна геометрија и графика и Инжењерска графика.

Од 06.03.2014. запослен је као асистент за ужу научну област Теорија механизма и машина и Инжењерско цртање са нацртном геометријом.

на Машинском факултету Универзитета у Београду на предметима Конструктивна геометрија и графика и Инжењерска графика.

Кандидат је положио све испите на Докторским Студијама са просечном оценом 10,00 (десет).

Учешће на пројектима

Током рада као студент Докторских студија је учествовао на пројекту Министарства просвете, науке и технолошког развоја под називом „Српска мини винарија“ евиденциони број 451-03-00605/2012-16/208 по Јавном позиву од 08.12.2011. године. Руководилац пројекта Миодраг Стоименов. Трајање пројекта 01.07.2012-01.07.2013. године

Познавање софтверских пакета и програмских језика

Користи се програмима из пакета Office као и програмима за просторно моделирање и конструисање уз помоћ рачунара: Solidworks, AutoCAD, Catia,

Proengineer, Working model. Такође користи се програмским пакетом MatLAB као и програмима за генерисање Г-кода: Mach3, Aspire, OpenSCAM и ArtCAM.

Познавање страних језика:

Течно говори енглески , а служи се немачким језиком.

Учешће у извођењу наставе

Учествује у извођењу вежби на предметима на Машинском факултету Универзитета у Београду:

- Конструктивна геометрија и графика (од 2012. до 2016)
- Инжењерска графика (од 2012. до 2016.)
- Основне технолошке операције у прехранбеном машинству (од 2012. до 2015.)
- Пројектовање механизма (2015. до 2016.)

Прилог 1.

Изјава о ауторству

Потписани-а Миша Д. Стојићевић, маст. инж. маш.

број

индекса Д9/11

Изјављујем

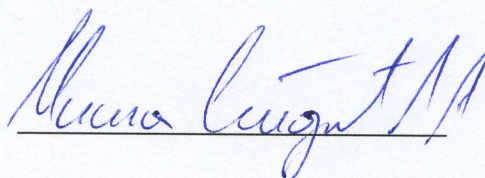
да је докторска дисертација под насловом

Нелинеарна динамика сатних механизма

- резултат сопственог истраживачког рада,
- да предложена дисертација у целини ни у деловима није била предложена за добијање било које дипломе према студијским програмима других високошколских установа,
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио/ла ауторска права и користио интелектуалну својину других лица.

Потпис докторанда

У Београду, 16.04.2018.



Прилог 2.

**Изјава о истоветности штампане и електронске
верзије докторског рада**

Име и презиме аутора

Миша Стојићевић

Број индекса

Д09/11

Студијски програм

Докторске академске студије (ДАС)

Наслов рада

Нелинеарна динамика сатних механизма

Ментори

др Љубомир Миладиновић, редовни професор и проф. Др Бранислав

Попконстантиновић, редовни професор

Потписани/а Миша Д. Стојићевић, маст. инж. маш

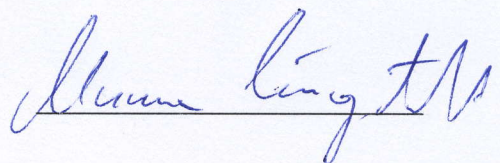
Изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предао/ла за објављивање на порталу **Дигиталног репозиторијума Универзитета у Београду.**

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Београду.

Потпис докторанда

У Београду, 16.04.2018.



Прилог 3.

Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом:

Нелинеарна динамика сатних механизма

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио/ла.

☒ 1. Ауторство

2. Ауторство - некомерцијално

3. Ауторство – некомерцијално – без прераде

4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима

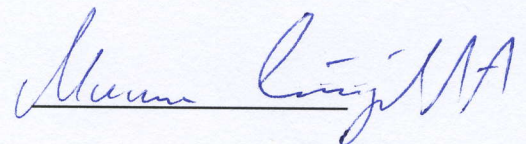
5. Ауторство – без прераде

6. Ауторство – делити под истим условима

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци, кратак опис лиценци дат је на полеђини листа).

Потпис докторанда

У Београду, 16.04.2018.



1. Ауторство - Дозвољавање умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце, чак и у комерцијалне сврхе. Ово је најслободнија од свих лиценци.

2. Ауторство – некомерцијално. Дозвољавање умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела.

3. Ауторство - некомерцијално – без прераде. Дозвољавање умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела. У односу на све остале лиценце, овом лиценцом се ограничава највећи обим права коришћења дела.

4. Ауторство - некомерцијално – делити под истим условима. Дозвољавање умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада.

5. Ауторство – без прераде. Дозвољавање умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела.

6. Ауторство - делити под истим условима. Дозвољавање умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада. Слична је софтверским лиценцама, односно лиценцама отвореног кода.