УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ

ФАКУЛТЕТ ОРГАНИЗАЦИОНИХ НАУКА

Владимир Д. Добрић

МОДЕЛОВАЊЕ КОНЦЕПАТА КОНЗИСТЕНТНОМ ФАЗИ ЛОГИКОМ

докторска дисертација

Београд, 2016.

UNIVERSITY OF BELGRADE

FACULTY OF ORGANIZATIONAL SCIENCES

Vladimir D. Dobrić

CONCEPTS MODELLING USING CONSISTENT FUZZY LOGIC

doctoral dissertation

Belgrade, 2016

МЕНТОР:

____

др Братислав Петровић, редовни професор
Факултет организационих наука, Универзитет у Београду

ЧЛАНОВИ КОМИСИЈЕ:

____

др Милан Мартић, редовни професор
Факултет организационих наука, Универзитет у Београду

____

др Драган Радојевић, научни саветник
Институт „Михајло Пупин“, Универзитет у Београду

Датум одбране дисертације: ____________________

Пре свега захваљујем се ментору проф. др Петровићу на подршци, стручним и пријатељским саветима. Захваљујем се члановима комисије проф. др Мартићу, а нарочито др Радојевићу чија је теорија пружила основу за ово истраживање.

Захваљујем се др Ани Поледици, др Ивани Драговић, Александру Ракићевићу, а нарочито Павлу Милошевићу и др Дарку Ковачевићу на пријатељској подршци, конструктивним саветима и дискусији.

Посебно се захваљујем својој породици на безрезервној љубави и подршци.

МОДЕЛОВАЊЕ КОНЦЕПАТА КОНЗИСТЕНТНОМ ФАЗИ ЛОГИКОМ

Сажетак: Концепти су менталне репрезентације категорија. Теорија концепата треба да објасни како концепти функционишу као категорије и како се компонују у сложене концепте и мисли. Композиционалност објашњава креативност, како коначни ум може имати бесконачан когнитивни капацитет. Кључно питање у теорији је да ли је степен примене концепта бинаран или градиран. Теорија градације додатно објашњава репрезентативност инстанци категорија, али је теоретичари класичног погледа критикују да не може објаснити композиционалност те закључују да је погрешна.

У дисертацији су помоћу конзистентне фази логике формализовани и објашњени концепти у случају градације. Прототип теорија концепата формализована је у стандардном и случају логичких интеракција између атрибута. Теорија егземплара формализована је на два начина. Теорија граница категорија формализована је у биполарном оквиру. Каузална теорија концепата формализована је у стандардном, случају каузалних повратних спрега између атрибута и/ или логичких интеракција између узрока. Математички је објашњена композиционалност Булових концепата у складу са прототип, егземплар и теоријом граница категорија, под претпоставком да концепти имају векторску природу. Одговорено је на критику прототип теорије и оповргнута су два аргумента којима се она поткрепљује, да закони искључења трећег и неконтрадикције нису загарантовани у прототип оквиру и да неодређено много Булових концепата нема прототип иако га све компоненте имају. Моделовани су конкретни Булови концепти за које теоретичари класичног погледа сматрају да не могу бити објашњени у прототип оквиру.

У наставку дисертације генерализована су два експертска формализма за сложене системе, Булове мреже и фази когнитивне мапе. Дескриптивна снага формализама драстично је увећана чиме они постају употребљиви у знатно ширем спектру ситуација.

Класичне Булове мреже су бинарне и користе се за квалитативно моделовање система у којима се каузалне интеракције између компоненти могу објаснити „стрмим сигмоидама“. Булове мреже генерализоване су увођењем градације помоћу конзистентне фази логике чиме је омогућено да се формализам користи за квантитативно моделовање сложених система. Предложени приступ упоређен је са конвенционалним фази и Boolecube/ Hillcube приступима из литературе. Помоћу три приступа генерализована су два класична модела која су потом симулирана. Показано је да конвенционални фази приступ није Буловски конзистентан те логичка валидност динамике генерализованог модела није загарантована, а да је Boolecube/ Hillcube приступ специјални случај предложеног који је адекватан за системе чије компоненте су „различите природе“. Приступ предложен у дисертацији гарантује логичку валидност динамике модела и омогућава третирање природе компоненти система.

Конвенционалне фази когнитивне мапе користе се под претпоставком да компоненте система међусобно не интерагују када каузално утичу на друге компоненте. У литератури је као значајно ограничење формализма истакнута немогућност третирања логичких интеракција између узрока. Проблем је решаван увођењем оператора OWA у фази когнитивне мапе чиме је омогућено третирање AND/ OR интеракција. Проблем третирања произвољних логичких интеракција између узрока решен је у дисертацији увођењем оператора логичке агрегације у фази когнитивне мапе. Представљена су два приступа за увођење логике у формализам и илустровано је третирање AND/ OR/ NOT интеракција у складу са оба приступа. Предложен је и илустрован поступак за спајање генерализованих фази когнитивних мапа.

Кључне речи: концепти, категорије, градација, композиционалност, конзистентна фази логика, сложени системи, Булове мреже, фази когнитивне мапе.

Научна област: Техничке науке

Ужа научна област: Управљање системима

УДК број:

CONCEPTS MODELLING
USING CONSISTENT FUZZY LOGIC

Abstract: Concepts are mental representations of categories. Theory of concepts has to explain how concepts function as categories and how they compose into complex concepts and thoughts. The compositionality explains creativity – how a finite mind can have an infinite cognitive capacity. Fundamental question in theory of concepts is whether a degree of conceptual application is binary or graded. Theory of gradation additionally explains representativeness of category members, but it is criticized by classical theoreticians that it cannot explain compositionality, and thus, it is considered wrong.

In this doctoral dissertation, concepts in the case of gradation are formalized and explained using consistent fuzzy logic. Prototype theory of concepts is formalized in standard case and in case of logical interactions between attributes. Exemplar theory of concepts is formalized in two ways. Boundary theory of concepts is formalized in bipolar framework. Causal theory of concepts is formalized in standard case, in case of causal feedback between attributes and/ or logical interactions between causes. The compositionality of Boolean concepts is mathematically explained according to the prototype, exemplar and boundary theory, under the assumption that concepts have vector nature. The critique of the prototype theory has been addressed, and two arguments that support the critique are refuted - that laws of excluded middle and noncontradiction are not secured in the prototype framework, and that there isn't any prototype for indefinitely many Boolean concepts even though all components have one. Specific Boolean concepts, which are considered unexplainable in the prototype framework by classical theoreticians, are modelled.

In the rest of the dissertation, two expert-based formalisms for complex systems, Boolean networks and fuzzy cognitive maps, are generalized. The descriptive power of two formalisms is drastically increased, which allows their usage in much broader spectrum of cases.

Classical Boolean networks are binary and used for qualitative modelling of systems in which causal interactions among the components can be explained by using steep sigmoid functions. Boolean networks are generalized by the introduction of gradation using consistent fuzzy logic, which enables the formalism to be used for quantitative modelling of complex systems. The proposed approach is compared with conventional fuzzy and Boolecube/ Hillcube approaches from literature. By using these three approaches, two classical models are generalized and obtained models are simulated. It is shown that the conventional fuzzy approach is not Boolean consistent, so logical validity of a generalized model's dynamics cannot be secured, and that the Boolecube/ Hillcube approach is a special case of the proposed one, which is adequate for systems whose components are of "different nature". The approach proposed in dissertation secures the logical validity od model's dynamics and allows the nature of system components to be treated.

Conventional fuzzy cognitive maps are used under the assumption that system components are not interacting when they are causally influencing other components. The inability to treat logical interactions between causes has been recognized in literature as a major limitation of the formalism. This problem had been addressed by the introduction of ordered weighted averaging operator into fuzzy cognitive maps, which allowed AND/ OR interactions to be treated. The problem in the case of arbitrary logical interactions is solved in dissertation by the introduction of logical aggregation operator into fuzzy cognitive maps. Two approaches for the introduction of logic into the formalism are proposed, and the treatment of AND/ OR/ NOT interactions according to those two approaches is illustrated. The approach for combining generalized fuzzy cognitive maps is proposed and illustrated.

Keywords: concepts, categories, gradation, compositionality, consistent fuzzy logic, complex systems, Boolean networks, fuzzy cognitive maps.

Scientific field: Technical sciences

Specific scientific field: System control

UDK number:

САДРЖАЈ

1. УВОД

У уводном поглављу дефинисан је проблем, предмет и циљ истраживања, постављене су хипотезе и представљена је структура дисертације по поглављима.

1.1. Проблем, предмет и циљ истраживања

Концепти су менталне репрезентације категорија (*Fodor 1975, 1981, 1994, 1998, Laurence and Margolis 1999, Margolis and Laurence 2007, Pinker 1995, Ray 1983*). Категорије су групе објеката које се формирају према одговарајућим когнитивним захтевима. Објашњење концепата је фундаментално за вештачку интелигенцију, филозофију ума, когнитивну психологију и друге дисциплине (*Fodor 1994, Margolis and Laurence 1999, Rosch 2011*). Централна претпоставка когнитивне науке је да се ум може објаснити менталним репрезентацијама и операцијама над њима (*Thagard 1996*).

Теорија концепата треба да објасни (*Fodor and Lepore 1996, 2002,1998*):

- Функционисање концепата као категорија. Основна карактеристика концепата је да су примењиви на објекте које групишу у категорије. Објекти потпадају под концепте.
- Композиционалност, како се концепти компонују градећи тако сложене концепте и мисли. Композиционалност подразумева да се сложени концепти/ мисли формирају на основу компоненти и правила композиције. Композиционалност објашњава продуктивност и систематичност ума.

Фундаментално питање у теорији концепата је да ли је степен примене концепта бинаран или градиран тј. да ли је исправна класична или теорија градације. Теорија градације објашњава више од класичне и то репрезентативност инстанци категорија, али се стандардно критикује да не може објаснити композиционалност те се закључује да је погрешна тј. да степен примене концепта није градиран него бинаран (*Fodor and Lepore 1996, 2002, Fodor 1994, 1998, Osherson and Smith 1981,* *1982, 1997, Connolly et al. 2007, Gleitman et al. 2012*). Композиционалност се разматра у прототип оквиру у случају Булових концепата, сложених концепата формираних применом Булових операција над компонентама. Теоретичари класичног погледа сматрају да прототипови нису композиционални те концепти нису прототипови и степен примене концепта није градиран јер:

- „Проблем закона мишљења“: закони искључења трећег и неконтрадикције нису загарантовани у прототип оквиру (*Osherson and Smith 1981, 1982, 1997*).
- “The pet fish problem”: неодређено много Булових прототипова нису композиционални (*Fodor and Lepore 1996, 2002, Fodor 1998, Connolly et al. 2007, Gleitman et al. 2012*).
- “The uncat problem”: неодређено много Булових концепата нема прототип иако га све компоненте имају (*Fodor and Lepore 1996, 2002, Fodor 1981, 1998*).

Функционисање концепата у случају градације у складу са прототип, егземплар и теоријом граница категорија формализовано је у геометријском оквиру (*Smith and Minda 1998, 2000, Minda and Smith 2001, Danks 2007, Nosofsky 1992, 2011, Zaki et al. 2003, Ashby and Gott 1988, Ashby and Townsend 1986, Ashby and Maddox 1992*) док је функционисање у складу са каузалном теоријом формализовано у пробабилистичком оквиру коришћењем каузалних Бајесових мрежа (*Rehder 2003a, 2003b, 2010, Rehder and Kim, 2006, 2009, 2010*). Идентификовани су следећи недостаци/ проблеми у овим формализмима:

- Није формализована прототип теорија у случају логичких интеракција између атрибута прототипа.
- Није адекватно формализована теорија граница категорија.
- Није адекватно формализована каузална теорија у случају повратних спрега између атрибута концепта и/ или логичких интеракција између узрока.

Композиционалност концепата у складу са теоријом градације формално је третирана у случају Булових концепата у прототип оквиру коришћењем конвенционалне фази логике (*Osherson and Smith 1981, 1982, 1997, Zadeh 1982, Fuhrmann 1988a, 1988b, Bělohlávek et al. 2002, 2009, Bělohlávek and Klir 2011*). На основу тога што у конвенционалној фази логици, заснованој на принципу истинитосне функционалности, закони мишљења нису загарантовани, закључено је да прототипови нису композиционални те концепти нису прототипови и степен примене концепта није градиран (*Osherson and Smith 1981, 1982, 1997*).

У докторској дисертацији проблем концепата третира се са становишта теорије система и вештачке интелигенције и у складу са захтевом когнитивне теорије (*Fodor and Lepore 1996, 2002, Fodor 1975, 1981, 1994, 1998*) поставља се на следећи начин:

- Потребно је формализовати и објаснити концепте у случају градације степена примене, како они функционишу као категорије и како се компонују у сложене.

Као оквир за концепте предложена је конзистентна фази логика, заснована на принципу структурне функционалности (*Radojević 2000, 2005, 2008a, 2008b, 2008c, 2010, 2013a, 2013b, 2014, 2015*). Претпостављено је да је у конзистентном фази оквиру могуће превазићи уочене недостатке/ проблеме формализама функционисања, математички објаснити Булове концепте и одговорити на стандардну критику прототип теорије.

У наставку дисертације третира се проблем из домена теорије система (*Petrović 1998*). У фокусу су сложени системи окарактерисани мноштвом компоненти које каузално интерагују (*Ladyman et al. 2013*). Према принципу некомпатибилности, како сложеност система тј. број компоненти и интеракција расте, могућност да се добије релевантан и „прецизан“ модел опада те прецизне – конвенционалне математичке технике постају неадекватне (*Zadeh 1978*). У дисертацији се разматрају две експертска формализма које се стандардно користе за моделовање сложених система, Булове мреже и фази когнитивне мапе. Модели се користе у следећим ситуацијама:

- Булове мреже су бинарне и користе се за системе у којима се каузалне интеракције између компоненти могу објаснити „стрмим“ сигмоидама.
- Фази когнитивне мапе користе се под претпоставком да компоненте система међусобно не интерагују када каузално утичу на друге.

Потребно је унапредити формализме, учинити их употребљивим у ширем спектру ситуација, што се може постићи решавањем два проблема:

- Проблем увођења градације у Булове мреже. Увођењем градације добија се могућност да се формализам користи за квантитативно третирање сложених система. Проблем је у теорији неадекватно решаван помоћу конвенционалне фази логике (*Wittmann and Theis, 2011, Kok and Wang, 2006, Cao et al. 2007, Morris et al. 2011, Poret et al. 2014*) која није Буловски конзистентна и Boolecube/ Hillcube приступом (*Wittmann et al. 2009*) који је конзистентан, али није адекватан у многим ситуацијама.
- Проблем увођења логике у фази когнитивне мапе. Значајно ограничење формализма је немогућност третирања логичких интеракција између узрока (*Papageorgiou and Salmeron 2013*). Проблем је решаван увођењем оператора агрегације OWA у фази когнитивне мапе чиме је добијена могућност третирања AND/ OR интеракција (*Lv and Zhou 2007, Wang and Wang 2013*). Проблем није решен у случају произвољних логичких интеракција између узрока.

Докторска дисертација има следеће циљеве:

- Помоћу конзистентне фази логике формализовати и објаснити концепте у случају градације, како они функционишу као категорије и како се компонују у сложене.
- Генерализовати Булове мреже увођењем градације помоћу конзистентне фази логике да би се омогућило да се формализам користи за квантитативно третирање сложених система.
- Генерализовати фази когнитивне мапе увођењем оператора логичке агрегације да би се омогућило третирање произвољних логичких интеракција између узрока.

1.2. Полазне хипотезе

У дисертацији се полази од основне и помоћних хипотеза.

Основна хипотеза:

- Помоћу конзистентне фази логике могу се формализовати и објаснити концепти у случају градације.

Помоћне хипотезе:

- Помоћу конзистентне фази логике може се формализовати прототип теорија у стандардном и случају логичких интеракција између атрибута прототипа.
- Помоћу конзистентне фази логике може се формализовати теорија егземплара.
- Помоћу биполарне конзистентне фази логике може се формализовати теорија граница категорија.
- Помоћу функционалних каузалних модела, реализованих конзистентном фази логиком, може се формализовати каузална теорија у стандардном, случају каузалних повратних спрега између атрибута концепта и/ или логичких интеракција између узрока.
- Помоћу конзистентне фази логике могу се формализовати и објаснити Булови концепти у складу са прототип, егземплар и теоријом граница категорија, под претпоставком да концепти имају векторску природу.
- Помоћу конзистентне фази логике може се адекватно увести градација у Булове мреже.
- Помоћу конзистентне фази логике могу се генерализовати фази когнитивне мапе за случај произвољних логичких интеракција између узрока.

1.3. Структура рада

У првом поглављу дефинисан је проблем, предмет и циљ истраживања, постављене су хипотезе и представљена је структура дисертације по поглављима.

У другом поглављу представљене су теоријске основе неопходне за разумевање дисертације и то теорија концепата, Буловски конзистентна фази логика и два формализма за каузалност, каузалне Бајесове мреже и функционални каузални модели. Теорија концепата објашњава како концепти функционишу као категорије и композиционалност тј. како се концепти компонују у сложене концепте и мисли. Конзистентна фази логика је реалновредносна реализација коначне – атомске Булове алгебре. Каузалне Бајесове мреже су ограничене на домене чије се каузалне структуре могу представити директним ацикличним графовима док се функционални каузални модели могу користити и у случају директних цикличних графова.

У трећем поглављу коришћењем конзистентне фази логике формализовани су и објашњени концепти у случају градације степена примене. Формализована је прототип теорија у стандардном и случају логичких интеракција између атрибута прототипа. Формализована је теорија егземплара. Формализована је теорија граница категорија у биполарном конзистентном фази оквиру. Формализована је каузална теорија у стандардном, случају каузалних повратних спрега између атрибута концепта и/ или логичких интеракција између узрока. Математички су објашњени Булови концепти у прототип, егземплар и оквиру граница категорија, под претпоставком да концепти имају векторску природу. Одговорено је на стандардну критику прототип теорије и оповргнута су два аргумента којима се она поткрепљује. Теоретичари класичног погледа сматрају да степен примене концепта није градиран тј. да је прототип теорија погрешна јер закони искључења трећег и неконтрадикције нису загарантовани у прототип оквиру и јер неодређено много Булових концепата нема прототип иако га све компоненте имају (“The Uncat problem”). Моделовани су конкретни Булови концепти за које теоретичари класичног погледа сматрају да не могу бити објашњени у прототип оквиру.

У четвртом поглављу дисертације генерализоване су Булове мреже. Класични формализам је бинаран и користи се за сложене системе у којима се каузалне интеракције између компоненти могу објаснити „стрмим“ сигмоидама. Булове мреже генерализоване су увођењем градације помоћу конзистентне фази логике чиме је омогућено да се формализам користи за квантитативно третирање сложених система. Предложени приступ упоређен је са приступима из литературе. Показано је да конвенционални фази приступ није Буловски конзистентан те логичка валидност динамике генерализованог модела није загарантована, а да је Boolecube/ Hillcube приступ специјални случај предложеног који се добија под претпоставком да су све компоненте система који се моделује различите природе. У дисертацији предложени приступ гарантује логичку валидност динамике и омогућава третирање природе компоненти система.

У петом поглављу генерализоване су фази когнитивне мапе. Формализам се користи под претпоставком да компоненте система међусобно не интерагују када каузално утичу на друге. У литератури је као значајно ограничење фази когнитивних мапа истакнута немогућност третирања логичких интеракција између узрока. Проблем је у литератури решаван увођењем оператора OWA у формализам што омогућава моделовање AND/ OR интеракција. У овом поглављу фази когнитивне мапе генерализоване су увођењем оператора логичке агрегације чиме је омогућено третирање произвољних логичких интеракција између узрока. Предложена су два приступа за увођење логике у формализам и илустровано је третирање AND/ OR/ NOT интеракција у складу са оба приступа. Генерализована фази когнитивна мапа своди се на конвенционалну када је оператор логичке агрегације сваког чвора дефинисан као отежана сума. Предложен је и илустрован поступак за спајање генерализованих фази когнитивних мапа.

У шестом поглављу дат је закључак са освртом на постављене хипотезе и доприносе дисертације као и на могуће правце даљег истраживања.

На крају рада наведена је литература коришћена приликом израде докторске дисертације.

2. ОСНОВНЕ ТЕОРИЈСКЕ ПОСТАВКЕ

У овом поглављу представљена је теорија концепата, Буловски конзистентна фази логика, каузалне Бајесове мреже и функционални каузални модели.

2.1. Теорија концепата

Људи као коначна бића могу да интерагују са бесконачно много различитих објеката третирајући их као инстанце категорија. Груписање у категорије своди бесконачне разлике између објеката на когнитивно и бихевиорално употребљив ниво. Категорије треба да обезбеде максимум информација о свету уз минимум когнитивног напора (*Rosch and Lloyd 1978*). Категорије омогућавају интелигентном бићу да приликом интеракције са неким објектом користи знање стечено у интеракцијама са сличним објектима у прошлости.

Концепти су менталне репрезентације категорија (*Fodor 1975, 1981, 1994, 1998, Laurence and Margolis 1999, Margolis and Laurence 2007, Pinker 1995, Ray 1983, Rosch 2011*). Објашњење концепата је фундаментално за вештачку интелигенцију, филозофију ума, когнитивну психологију и друге дисциплине (*Margolis and Laurence 1999, Rosch 2011, Fodor 1994*). Централна хипотеза когнитивне науке је да се ум може објаснити менталним репрезентацијама и операцијама над репрезентацијама (*Thagard 1996*).

Теорија концепата треба да објасни (*Fodor and Lepore 1996, 2002, Fodor 1994, 1998*):

- Функционисање концепата као категорија. Основна карактеристика концепата је да су применљиви на објекте које групишу у категорије. Објекти потпадају под концепте.
- Композиционалност, како се концепти компонују у сложене концепте и мисли. Композиционалности подразумева да се сложени концепти/ мисли формирају на основу компоненти и правила композиције.

Композиционалност објашњава две кључне карактеристике ума, продуктивност и систематичност (*Fodor and Lepore 1996, 2002, Fodor 1975, 1981, 1994, 1998, Fodor and Pylyshyn 1988, Chomsky 1980, 2006*). Продуктивност – креативност је способност коначног ума који располаже коначним бројем примитивних концепата и коначним бројем правила композиције да формира бесконачно много различитих мисли. Композиционалност објашњава како коначни ум може имати бесконачан когнитивни капацитет. У процесу мишљења ограничене су само практичне способности, перформансе ума. Систематичност је способност ума да на основу неке мисли формира друге, систематично повезане. Када ум располаже неком мишљу располаже њеним компонентама и правилима композиције. Систематичне мисли формирају се истим правилима и компонентама које се пермутују. Продуктивност и систематичност основна су својства природних језика (*Pinker 1995, Ray 1983, Fodor and Lepore 2002, Fodor 1975, 1981,1998, Chomsky 1980, 2006*). Сматра се да речи језика наслеђују значења концепата које изражавају, а да разумевање реченица подразумева формирање мисли. Природни језици садрже коначан број речи на основу којих је мислилац - корисник језика у стању да формира и разуме бесконачно много различитих реченица. Сложеност и дужина реченице коју неко може разумети ограничена је само његовим практичним способностима. Сматра се да људи могу разумети најмање 10^{20} реченица које се састоје од двадесет речи што је милијарду пута више од броја неурона у мозгу (*Margolis and Laurence 2007*). Систематичност природног језика огледа се у томе што корисник језика који разуме неку реченицу као нпр. „Ана воли Милована“ аутоматски разуме и систематичну „Милован воли Ану“.

Кључно питање у теорији концепата је да ли је степен примене концепта бинаран или градиран, да ли је исправна класична или теорија градације.

Теорија градације, за разлику од класичне, објашњава репрезентативност инстанци категорија као нпр. интуицију да је врабац репрезентативнија птица од ноја или пингвина. Теоретичари класичног погледа сматрају да репрезентативност инстанци није могуће објаснити на нивоу концепата (*Fodor and Lepore 1996, 2002, Fodor 1998, Connolly et al 2007, Gleitman et al 2012, Osherson and Smith 1981, 1982, 1997*). У класичном оквиру објекат потпада или не потпада под концепт, припада или не припада категорији. Сви објекти који потпадају под неки концепт еквивалентне су инстанце релевантне категорије.

Концепт се у класичном оквиру објашњава као:

- Структуирана ментална репрезентација (*Peacocke 1992, Miller and Johnson-Laird 1976, Pitt 1999*). Концепт је дефиниција, скуп услова који су неопходни и довољни за припадност објеката релевантној категорији. На пример, концепт „Птица“ може бити репрезентација особина „Има перје“, „Има кљун“ и „Излеже се из јајета“. Класични концепт „Птица“ функционише као категорија објеката који задовољавају све три наведене особине, атрибута, примитивна - неструктуирана концепта.
- Неструктуирана ментална репрезентација (*Fodor 1981, 1998, Millikan 2000, Roelofs 1997*). Према атомистичком погледу концепти као нпр. „Птица“ нису структуирани тј. не састоје се од атрибута, већ су и сами примитивни концепти.

Композиционалност у класичном оквиру објашњава се у случају Булових концепата, сложених концепата формираних применом Булових операција над компонентама. Класични Булови концепти су са коначним бројем изузетака композиционални и функционишу у складу са принципом истинитосне функционалности. Степен примене Буловог концепта на неки објекат израчунава се применом Булових операција над степенима примене компоненти на тај објекат. На пример, класични Булов концепт „Птица певачица“ је коњукција концепата „Птица“ и „Пева“. Сви објекти на које се оба концепта могу применити потпадају под овај Булов концепт. У случају структуираних менталних репрезентација, Булов концепт „Птица певачица“ може бити репрезентација особина „Има перје“, „Има кљун“, „Излеже се из јајета“ и „Пева“ чије задовољење је неопходно и довољно да би се неки објекат третирао као птица певачица. Постоји коначан број Булових концепата који нису композиционални као нпр. „Слепи путник“ или „Мачка у џаку“ који не функционишу као категорије слепих људи који путују или мачака које се налазе у џаку.

Стандардна критика класичне теорије је да не објашњава репрезентативност инстанци категорија те је предложено више приступа концептима које то чине и то:

- Прототип теорија (*Rosch 1975, 2011, Rosch and Mervis 1975, Rosch and Lloyd 1978, Smith and Medin 1981, Lakoff 1987, Hampton 1987, 1993, 1995, 2011, Barsalou 1999, Murphy 2002a, Prinz 2004*). Према овој теорији концепт је ментална репрезентација статистички значајних особина инстанци релевантне категорије. Степен примене прототипа на неки објекат зависи од тога колико су објекат и прототип „слични“ тј. колико тај објекат задовољава статистички значајне особине. На пример, прототип „Птица“ може бити ментална репрезентација особина: „Има перје“, „Има кљун“, „Гнезди се на дрвећу“ и „Може да лети“. Ове особине нису неопходне и довољне као у класичном оквиру те их не морају задовољити све птице као нпр. ној. Чешљугар је репрезентативнија птица одноја јер задовољава све четири особине. Према сложенијим верзијама прототип теорије, концепти поред информације о статистички значајним особинама чувају и информацију о статистички значајним интеракцијама између особина (*Smith and Medin 1981 стр. 84–86, Malt and Smith, 1984, McRae et al. 1997, 1999*). На пример, прототип „Птица“ поред наведених особина може садржати и репрезентацију AND интеракције атрибута „Може да лети“ и „Гнезди се на дрвећу“ чиме се репрезентативност објеката који задовољавају (не задовољавају) обе особине фаворизује (пенализује). Прототип теорија формализована је у геометријском оквиру где се објекат и прототип представљају као тачке у *n*-димензионалном простору атрибута (*Smith and Minda 1998, 2000, Minda and Smith 2001, Danks 2007*). Степен примене прототипа на неки објекат одређен је дистанцом између објекта и прототипа.
- Теорија егземплара (*Brooks 1978, Medin and Schaffer 1978, Nosofsky 1992, 2011, Heit and Barsalou 1996, Zaki et al. 2003*). Према овој теорији концепт је колекција егземплара, менталних репрезентација инстанци релевантне категорије. Концепт чува комплетну информацију о категорији, а не апстрактну информацију како претпостављају остале теорије. Концепт

функционише на основу сличности објекта и егземплара. Објекат је репрезентативнија инстанца неке категорије што је сличнији егземпларима те категорије. На пример, егземплари концепта „Птица“ могу бити менталне репрезентације ласте, славуја, чешљугара, голуба, врапца, ноја, пингвина и многих других птица. Славуј је репрезентативнија птица од ноја јер је сличнији већем броју еземплара или статистички значајнијим егземпларима концепта „Птица“. Теорија егземплара формализована је у геометријском оквиру где се објекат и егземплари представљају као тачке у n-димензионалном простору атрибута (*Nosofsky 1992, 2011, Zaki et al. 2003, Danks 2007*). Степен примене концепта на неки објекат одређује се на основу дистанци између између објекта и егземплара који концепт чине.

- Теорија граница категорија (*Ashby and Gott 1988, Ashby and Townsend 1986, Ashby and Maddox 1992*). Према овој теорији концепт је ментална репрезентација тзв. границе категорије. Теорија је формализована у геометријском оквиру где се објекат представља као тачка, а граница као површ у n-димензионалном простору атрибута. Објекат потпада под концепт уколико се налази у „ограђеном“ делу простора атрибута. Степен примене концепта на објекат одређен је дистанцом између објекта и границе категорије.
- Каузална теорија (*Rehder 2003a, 2003b, 2010, Rehder and Kim, 2006, 2009, 2010*). Према овој теорији, концепт је ментална репрезентација особина и каузалних релација између особина инстанци релевантне категорије. Концепти функционишу на основу каузалних закона категорија. На пример, концепт „Птица“ може чувати информацију о релевантним особинама птица као што су „Има перје“, „Има кљун“, „Гнезди се на дрвећу“ и „Може да лети“ као и информацију о каузалној релацији између узрочне особине „Може да лети“ и последичне особине „Гнезди се на дрвећу“. Према тако дефинисаном концепту „Птица“, чешљугар је репрезентативнија птица од славуја који се не гнезди на дрвећу, већ на тлу или у ниском растињу те не задовољава овај каузални закон. Каузална теорија концепата формализована је у пробабилистичком оквиру. Степен примене концепта на неки објекат одређује се на основу функције

заједничке вероватноће атрибута специфициране каузалном Бајесовом мрежом која чува информацију колико објекат задовољава каузалне законе релевантне категорије.

Теорија градације објашњава више од класичне и то репрезентативност инстанци категорија, али се стандардно критикује да не може објаснити композиционалност те се закључује да је погрешна тј. да степен примене концепта није градиран него бинаран (*Fodor and Lepore 1996, 2002, Fodor 1981,1998,1994, Osherson and Smith 1981, 1982, 1997, Connolly et al 2007, Gleitman et al 2012*). Критика се демонстрира у случају Булових концепта у прототип оквиру где теоретичари класичног погледа постављају три проблема:

- „Проблем закона мишљења“: коришћењем конвенционалне фази логике, засноване на принципу истинитосне функционалности, показано је да закони мишљења, искључење трећег и неконтрадикција нису загарантовани у прототип оквиру, на основу чега је закључено је да прототипови нису композиционални те концепти нису прототипови и степен примене концепта није градиран (*Osherson and Smith 1981, 1982, 1997*). У одговору на овај проблем прототип теоретичари истичу да закони мишљења ни не треба да важе у случају градације, да то пружа нетривијалне информације о објектима те да је законе мишљења могуће задовољити адекватном реализацијом операција фази логике (*Zadeh 1982, Fuhrmann 1988a, 1988b, Lakoff 1987 стр. 141, Bělohlávek et al. 2002, 2009, Bělohlávek and Klir 2011*).
- „The petfish problem“: неодређено много Булових прототипова нису композиционални на основу чега је закључено да прототипови нису композиционални те концепти нису прототипови и степен примене концепта није градиран (*Fodor and Lepore 1996, 2002, Fodor 1998, Connolly et al 2007, Gleitman et al 2012, Osherson and Smith 1981, 1982, 1997*). Прототипови нису композиционални јер зависе од контекста композиције што је последица промене начина функционисања где је „неопходност и довољност“ класичне теорије релаксирана „статистичком поузданошћу“ прототип теорије. У одговору на ову критику прототип теоретичари истичу

да концепти не морају бити композиционални (*Hampton 1987, 2011, Hampton and Jönsson 2012, Rosch 2011, Rips 1995, Johnson and Keil 2000, Jönsson and Hampton 2008, Prinz 2004, Robbins 2002, Rosch 2011*). Композиционалност се посматра као резервна стратегија и концепти се формирају композиционално када мислилац, осим информације коју му пружају компоненте, не располаже другим релевантним информацијама. Уколико мислилац располаже додатном релеватном информацијом нема разлога да је не користи. Продуктивност и систематичност објашњавају се самом способношћу мислиоца да концепте компонује што он не мора нужно чинити. Теоретичари класичног погледа сматрају да концепти, чак и да нису композиционални, не могу бити прототипови јер компоновање прототипова није рационално, будући да особине које су статистички значајне за инстанце које потпадају под компоненте не морају бити значајне за инстанце које потпадају под сложени концепт (*Fodor and Lepore 1996, 2002, Fodor 1998, Connolly et al 2007, Gleitman et al 2012*). Прототип теоретичари ово тврђење оповргавају (*Schurz 2012, Prinz 2004, Jönsson and Hampton 2008, Hampton and Jönsson 2012*).

- „The uncat problem“: неодређено много Булових концепата нема прототип иако га све компоненте имају, на основу чега је закључено да прототипови нису композиционални те концепти нису прототипови и степен примене концепта није градиран и да су Булови концепти репрезентације класичних логичких форми (*Fodor and Lepore 1996, 2002, Fodor 1981, 1998*). У теорији концепата није предложено решење за овај проблем. Потребно је објаснити како Булови прототипови функционишу као категорије, које атрибуте садрже и колико су они значајни.

У докторској дисертацији биће предложена математичка теорија концепата у случају градације степена примене и биће одговорено на три проблема прототип теорије. Као алат за моделовање биће коришћена конзистентна фази логика, заснована на принципу структурне функционалности која ће бити представљена у одељку који следи.

2.2. Конзистентна фази логика

Конзистентна фази логика је реалновредносна реализација коначне – атомске Булове алгебре (*Radojević 2000, 2005, 2008a, 2008b, 2008c, 2010, 2013a, 2013b, 2014, 2015*). Коначна Вулова алгебра $BA(\Omega)$ је скуп примарних елемената - генератора $\Omega = \{x_1,...,x_n\}$ на коме су дефинисане бинарне операције $\wedge$ (коњукција) и $\vee$ (дисјункција) и унарна операција $\neg$ (негација) при чему за произвољне $x_i, x_j, x_k \in \Omega$ важи:

Асоцијативност:

$$\begin{aligned} x_i \vee \left(x_j \vee x_k\right) &= \left(x_i \vee x_j\right) \vee x_k \\ x_i \wedge \left(x_j \wedge x_k\right) &= \left(x_i \wedge x_j\right) \wedge x_k \end{aligned} \tag{2.1}$$

Комутативност:

$$\begin{aligned} x_i \vee x_j &= x_j \vee x_i \\ x_i \wedge x_j &= x_j \wedge x_i \end{aligned} \tag{2.2}$$

Дистрибутивност:

$$\begin{aligned} x_i \wedge \left(x_j \vee x_k\right) &= \left(x_i \wedge x_j\right) \vee \left(x_i \wedge x_k\right) \\ x_i \vee \left(x_j \wedge x_k\right) &= \left(x_i \vee x_j\right) \wedge \left(x_i \vee x_k\right) \end{aligned} \tag{2.3}$$

Идентитет:

$$\begin{aligned} x_i \vee 0 &= x_i \\ x_i \wedge 1 &= x_i \end{aligned} \tag{2.4}$$

Комплементација:

$$\begin{aligned} x_i \wedge \neg x_j &= 0 \\ x_i \vee \neg x_j &= 1 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Апсорпција:

$$\begin{aligned} x_i \wedge \left(x_i \vee x_j \right) = x_i \\ x_i \vee \left(x_i \wedge x_j \right) = x_i \end{aligned} \tag{2.6}$$

Идемпотентност:

$$\begin{aligned} x_i \vee x_i = x_i \\ x_i \wedge x_i = x_i \end{aligned} \tag{2.7}$$

Де Морганови закони:

$$\begin{aligned} \neg\left(x_i \wedge x_j \right) = \neg x_i \vee \neg x_j \\ \neg\left(x_i \vee x_j \right) = \neg x_i \wedge \neg x_j \end{aligned} \tag{2.8}$$

Инволуција:

$$\neg\neg x_i = x_i \tag{2.9}$$

Закон нуле:

$$\begin{aligned} x_i \wedge 0 = 0 \\ x_i \vee 1 = 1 \end{aligned} \tag{2.10}$$

У класичном случају елементи Булове алгебре су двовредносни. Вредност сложеног (непримарног) елемента израчунава се у складу са принципом истинитосне функционалности применом Булових операција над вредностима компоненти.

У случају градације елементи Булове алгебре имају вредност на интервалу $[0,1]$. У конвенционалном приступу градацији вредност сложеног елемента израчунава се на основу принципа истинитосне функционалности применом операција фази логике над вредностима компоненти (*Zadeh 1965, 1973, 1978, 1982, 1999, 2001, 2008*). Последица таквог приступа је немогућност очувања Буловог оквира, принцип истинитосне функционалности валидан је само у класичном случају (*Radojević 2000, 2008a, 2008c, 2013a, 2014*).

Проблем конзистентности фази случаја решен је усвајањем принципа структурне уместо истинитосне функционалности (*Radojević 2000, 2008a, 2008c, 2013a, 2014*). Према принципу структурне функционалности елементи Булове алгебре имају векторску природу што подразумева:

- Вредност елемента Булове алгебре израчунава се на основу иманентог бинарног вектора - структуре елемента.
- Структура сложеног елемента Булове алгебре добија се применом Булових операција над структурама компоненти.

Формално, вредност произвољног сложеног елемента Булове алгебре $f(x_1,\ldots,x_n) \in BA(\Omega)$ задаје се генерализованим Буловим полином који се дефинише на следећи начин:

$$\begin{aligned} & f^{\otimes}(x_1,\ldots,x_n) = \\ & = f(\vec{\sigma}_1,\ldots,\vec{\sigma}_n)\,\vec{\alpha} = \vec{\sigma}_f \vec{\alpha} = \\ & = \sum_{\sigma_f(S)=1} \underset{x_i \in S}{\otimes} x_i \underset{x_j \in \Omega \setminus S}{\otimes} (1 - x_j) \end{aligned} \tag{2.11}$$

где су $x_1,\ldots,x_n \in [0,1]$ примарни елементи $BA(\Omega)$, $f^{\otimes}(x_1,\ldots,x_n) \in [0,1]$ је генерализовани Булов полином елемента $f(x_1,\ldots,x_n) \in BA(\Omega)$, $\vec{\sigma}_f = f(\vec{\sigma}_1,\ldots,\vec{\sigma}_n)$, $\vec{\sigma}_f \in \{0,1\}^{2^{|\Omega|}}$ је структура сложеног елемента, $\vec{\sigma}_1,\ldots,\vec{\sigma}_n \in \{0,1\}^{2^{|\Omega|}}$ су структуре примарних елемената, $\vec{\alpha} \in [0,1]^{2^{|\Omega|}}$ је вектор атомских полинома $BA(\Omega)$, $\sigma_f(S) \in \{0,1\}$ је структурна функција $f(x_1,\ldots,x_n) \in BA(\Omega)$, $S \in P(\Omega)$, $\Omega = \{x_1,\ldots,x_n\}$, $P(\Omega)$ је скуп свих подскупова скупа Ω, $f(\vec{\sigma}_1,\ldots,\vec{\sigma}_n) \in BA(\Upsilon)$, $\Upsilon = \{\vec{\sigma}_1,\ldots,\vec{\sigma}_n\}$, $\otimes : [0,\,1] \times [0,\,1] \to [0,\,1]$ је оператор генерализованог производа.

Структура $\vec{\sigma}_f \in \{0,1\}^{2^{|\Omega|}}$ дефинише се на следећи начин:

$$\vec{\sigma}_f = \left[\sigma_f(S) \middle| S \in P(\Omega) \right] \tag{2.12}$$

где је $\sigma_f(S) \in \{0,1\}$ структурна функција.

Структурна функција $\sigma_f(S)$ елемента $f(x_1,...,x_n) \in BA(\Omega)$ дефинише се на следећи начин:

$$\sigma_f(S) = \begin{cases} 1, \alpha_S(x_1,...,x_n) \subseteq f(x_1,...,x_n) \\ 0, \alpha_S(x_1,...,x_n) \not\subset f(x_1,...,x_n) \end{cases} \tag{2.13}$$

где $S \in P(\Omega)$, $\alpha_S(x_1,...,x_n) \in BA(\Omega)$ је атомски елемент Булове алгебре, $P(\Omega)$ је скуп свих подскупова скупа Ω.

Атомски елемент дефинише се на следећи начин:

$$\alpha_S(x_1,...,x_n) = \bigwedge_{x_i \in S} x_i \bigwedge_{x_j \in \Omega \setminus S} \neg x_j \tag{2.14}$$

где $S \in P(\Omega)$.

Атоми имају следеће особине:

$$\begin{gathered} \alpha_P(x_1,...,x_n) \wedge \alpha_Q(x_1,...,x_n) = \begin{cases} 0, & P \neq Q \\ \alpha_P(x_1,...,x_n), & P = Q \end{cases} \\ \bigvee_{S \in P(\Omega)} \alpha_S(x_1,...,x_n) = 1 \end{gathered} \tag{2.15}$$

где $S, P, Q \in P(\Omega)$.

Структура $\vec{\sigma}_f \in \{0,1\}^{2^{|\Omega|}}$ чува информацију које атоме елемент $f(x_1,...,x_n) \in BA(\Omega)$ садржи.

Вектор атомских полинома Булова алгебре $\vec{\alpha} \in [0,1]^{2^{|\Omega|}}$ дефинише се на следећи начин:

$$\vec{\alpha} = \left[\alpha_S^{\otimes}(x_1,...,x_n) \middle| S \in P(\Omega) \right]^T \tag{2.16}$$

где је $\alpha_S^{\otimes}(x_1,...,x_n) \in [0,1]$атомски Булов полином, $P(\Omega)$ је скуп свих подскупова скупа Ω.

Атомски Булов полиномом даје вредност атомском елементу $BA(\Omega)$ што се дефинише на следећи начин:

$$\begin{aligned}&\alpha_S^{\otimes}\left(x_1,\ldots,x_n\right)=\\&=\vec{\sigma}_{\alpha_S}\vec{\alpha}=\\&=\underset{x_i\in S}{\otimes}x_i\underset{x_j\in\Omega\setminus S}{\otimes}\left(1-x_j\right)\end{aligned}\tag{2.17}$$

где $x_1,\ldots,x_n\in[0,1]$, $\vec{\sigma}_{\alpha_S}$ је структура атомског елемента, $\vec{\alpha}$ је вектор атомских полинома $BA(\Omega)$, $S\in P(\Omega)$, $P(\Omega)$ је скуп свих подскупова скупа Ω, $\otimes:[0,\,1]\times[0,\,1]\to[0,\,1]$ је оператор генерализованог производа.

Генерализовани производ задовољава следеће особине (*Radojević 2000, 2008a, 2008c, 2013a*):

- Комутатативност:

$$x_i\otimes x_j=x_j\otimes x_i\tag{2.18}$$

- Асоцијативност:

$$\left(x_i\otimes x_j\right)\otimes x_k=x_j\otimes\left(x_i\otimes x_k\right)\tag{2.19}$$

- Монотоност:

$$x_i\le x_j\quad\Rightarrow\quad x_i\otimes x_k\le x_j\otimes x_k\tag{2.20}$$

- Граница:

$$x_i\otimes 1=x_i\tag{2.21}$$

- Ненегативност:

$$\underset{x_i\in S}{\otimes}x_i\underset{x_j\in\Omega\setminus S}{\otimes}\left(1-x_j\right)\ge 0\tag{2.22}$$

где $x_i,x_j,x_k\in[0,1]$, $x_i,x_j,x_k\in\Omega$.

Оператор генерализованог производа одређен је природом елемената Булове алгебре на следећи начин:

- Ако су елементи исте природе одговарајући оператор је функција минумума:

$$x_i \otimes x_j = \min\left(x_i, x_j\right) \tag{2.23}$$

- Ако су елементи исте природе, али негативно корелисани одговарајући оператор је Лукашиевичев производ:

$$x_i \otimes x_j = \max\left(x_i + x_j - 1, 0\right) \tag{2.24}$$

- Ако су елементи различите природе одговарајући оператор је алгебарски производ:

$$x_i \otimes x_j = x_i * x_j \tag{2.25}$$

где $x_i, x_j \in \Omega$, $x_i, x_j \in [0,1]$.

У биполарном случају (*Radojević 2015*), вредност произвољног елемента $f\left(x_1,\ldots,x_n\right) \in BA(\Omega)$ се израчунава на следећи начин:

$$\begin{aligned} & f_{[-1,1]}^{\otimes}\left(x_1,\ldots,x_n\right) = \\ & = 2 f_{[0,1]}^{\otimes}\left(\frac{x_1+1}{2},\ldots,\frac{x_n+1}{2}\right) - 1 = \\ & = 2\vec{\sigma}_f\vec{\alpha} - 1 \end{aligned} \tag{2.26}$$

где $x_1,\ldots,x_n \in [-1,1]$, $f_{[-1,1]}^{\otimes}\left(x_1,\ldots,x_n\right) \in [-1,1]$ је биполарна вредност елемента $f\left(\frac{x_1+1}{2},\ldots,\frac{x_n+1}{2}\right) \in BA(\Omega)$, $f_{[0,1]}^{\otimes}\left(\frac{x_1+1}{2},\ldots,\frac{x_n+1}{2}\right) \in [0,1]$ је униполарна вредност $f\left(\frac{x_1+1}{2},\ldots,\frac{x_n+1}{2}\right) \in BA(\Omega)$, $\vec{\sigma}_f \in \{0,1\}^{2^{|\Omega|}}$ је структура $f\left(\frac{x_1+1}{2},\ldots,\frac{x_n+1}{2}\right) \in BA(\Omega)$, $\vec{\alpha} \in [0,1]^{2^{|\Omega|}}$ је вектор атомских полинома $BA(\Omega)$, $\Omega = \left\{\frac{x_1+1}{2},\ldots,\frac{x_n+1}{2}\right\}$.

Оператор логичке агрегације (*Radojević 1999, 2008b*) дефинише се на следећи начин:

$$\begin{aligned} & Agg\left(x_1,...,x_n\right)= \\ & =\sum_{j=1}^{m}\omega_j\, f_j^{\otimes}\left(x_1,...,x_n\right)= \\ & =\sum_{j=1}^{m}\omega_j\,\vec{\sigma}_{f_j}\,\vec{\alpha}= \\ & =\vec{\sigma}\vec{\alpha} \end{aligned} \tag{2.27}$$

где $Agg\left(x_1,...,x_n\right)\in[0,1]$, $x_1,...,x_n\in[0,1]$, $\omega_1,...,\omega_m\in[0,1]$, $\sum_{j=1}^{m}\omega_j=1$, $f_j^{\otimes}\left(x_1,...,x_n\right)\in[0,1]$ је генерализовани Булов полином произвољног елемента $f_j\left(x_1,...,x_n\right)\in BA(\Omega)$, $\vec{\sigma}_{f_j}\in\{0,1\}^{2^{|\Omega|}}$ је структура $f_j\left(x_1,...,x_n\right)\in BA(\Omega)$, $\vec{\sigma}=\sum_{j=1}^{m}\omega_j\,\vec{\sigma}_{f_j}$, $\vec{\sigma}=[0,1]^{2^{|\Omega|}}$ је структура оператора логичке агрегације, $\vec{\alpha}\in[0,1]^{2^{|\Omega|}}$ је вектор атомских полинома $BA(\Omega)$, $\Omega=\left\{x_1,...,x_n\right\}$.

Структура – иманенти вектор оператора логичке агрегације $\vec{\sigma}=[0,1]^{2^{|\Omega|}}$ дефинише се на следећи начин:

$$\vec{\sigma}=\left[\sigma(S)\middle|S\in\mathrm{P}(\Omega)\right]^{T} \tag{2.28}$$

где је $\sigma(S)\in[0,1]$ генерализована мера, $P(\Omega)$ је скуп свих подскупова скупа Ω.

Генерализована мера $\sigma(S)$ дефинише се на следећи начин:

$$\sigma(S)=\sum_{j=1}^{m}\omega_j\,\sigma_{f_j}(S) \tag{2.29}$$

где $\sigma(S)\in[0,1]$, $\sigma_{f_j}(S)\in\{0,1\}$ је структурна функција елемента $f_j\left(x_1,...,x_n\right)\in BA(\Omega)$, $\omega_1,...,\omega_m\in[0,1]$, $\sum_{j=1}^{m}\omega_j=1$, $S\in\mathrm{P}(\Omega)$, $P(\Omega)$ је скуп свих подскупова скупа Ω.

2.3. Каузалне Бајесове мреже

Каузална Бајесова мрежа је графичка техника за каузалност (*Pearl 2000*). Модел се може представити двојком:

$$CBN = (G, F) \tag{2.30}$$

где је $G = (X, E)$ директни ациклични граф, $X = \{X_1, ..., X_n\}$ је скуп чворова графа који представљају дискретне случајне променљиве, E је скуп оријентисаних грана графа које представљају каузалне релације између променљивих, $F = \left\{ P\left(X_1 \middle| X_{1_1}, ..., X_{1_{K_1}} \right), ..., P\left(X_n \middle| X_{n_1}, ..., X_{n_{K_n}} \right) \right\}$ је скуп функција условних вероватноћа чворова графа, $X_{i_1}, ..., X_{i_{K_i}}$ су директни узроци X_i тј. чворови који се уливају у X_i, K_i је број директних узрока чвора X_i, n је број чворова графа.

Функција заједничке вероватноће дефинисана над $G = (X, E)$ задовољава каузални Марковљев услов да су чворови чији су директни узроци познати независни од својих непоследица тј. непотомака (*Hausman and Woodward 1999*) те се може декомпоновати на следећи начин:

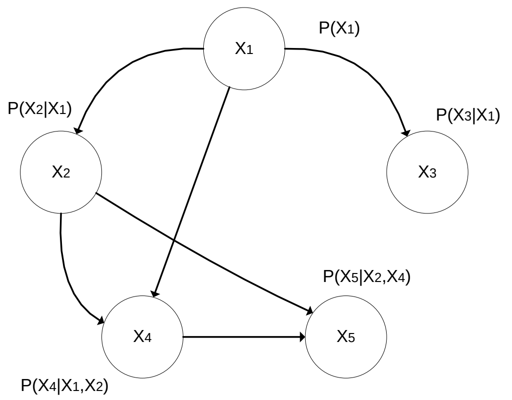
$$P(X) = \prod_{i=1}^{n} P\left(X_i \middle| X_{i_1}, ..., X_{i_{K_i}} \right) \tag{2.31}$$

Каузалном интервенцијом вредности одређених чворова се фиксирају и из графа се уклањају улазне гране истих. Интервенцијом се мења структура каузалне Бајесове мреже и индукује се функција заједничке вероватноће која се дефинише на следећи начин:

$$P_I(X) = \prod_{x_i \notin I} P\left(X_i \middle| X_{i_1}, ..., X_{i_{K_i}} \right) \tag{2.32}$$

где је $P_I(X)$ функција заједничке вероватноће након интервенције, $I \subseteq X$ је скуп чворова над којима се врши интервенција.

Пример каузалне Бајесове мреже је дат на Слици 1.

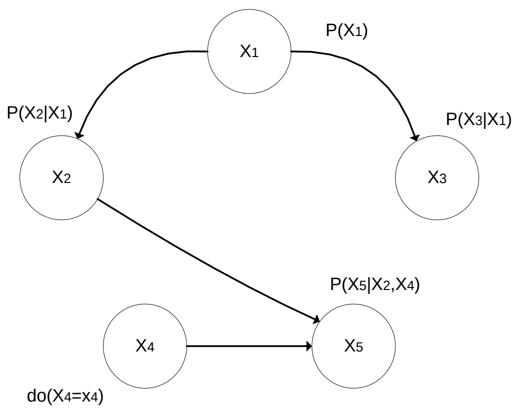


Слика 1. Каузална Бајесова мрежа

Функција заједничке вероватноће специфицирана каузалном Бајесовом мрежом са Слике 1 може се декомпоновати на следећи начин:

$$P(X)=P(X_1)P(X_2|X_1)P(X_3|X_1)P(X_4|X_1,X_2)P(X_5|X_2,X_4) \tag{2.33}$$

У случају интервенције $do(X_4=x_4)$ добија се каузална Бајесова мрежа са Слике 2.



Слика 2. Каузална Бајесова мрежа након интервенције

Функција заједничке вероватноће специфицирана каузалном Бајесовом мрежом са Слике 2 може се декомпоновати на следећи начин:

$$P_{X_4=x_4}(X)=P(X_1)P(X_2|X_1)P(X_3|X_1)P(X_5|X_2,X_4=x_4) \tag{2.34}$$

2.4. Функционални каузални модели

Пробабилистички каузални модел (*Pearl 2000*) може се представити четворком:

$$PCM = \left(X, U, CM, P(U)\right) \tag{2.35}$$

где је $X = \{X_1, ..., X_n\}$ скуп дискретних ендогених променљивих, $U = \{U_1, ..., U_n\}$ је скуп дискретних егзогених променљивих, CM је функционални каузални модел, $P(U)$ је функција заједничке вероватноће егзогених променљивих.

Каузални модел дефинише се системом структурних једначина на следећи начин:

$$\begin{aligned} X_1 &= f_1\left(X_{1_1}, ..., X_{1_{K_1}}, U_1\right) \\ &\vdots \\ X_n &= f_n\left(X_{n_1}, ..., X_{n_{K_n}}, U_n\right) \end{aligned} \tag{2.36}$$

где је $f_i\left(X_{i_1}, ..., X_{i_{K_i}}, U_i\right)$ функција ендогене променљиве X_i, $X_{i_1}, ..., X_{i_{K_i}}, U_i$ су директни узроци X_i, K_i је број директних узрока X_i, $i = 1, ..., n$.

Ако систем једначина (2.36) при свакој реализацији егзогених променљивих има јединствено решење, $P(U)$ индукује јединствену функцију заједничке вероватноће ендогених променљивих $P(X)$ која се дефинише на следећи начин:

$$P(X = x) = \sum_{\{u | CM(u) = x\}} P(U = u) \tag{2.37}$$

где су $x = (x_1, ..., x_n)$ и $u = (u_1, ..., u_n)$ реализације ендогених и егзогених променљивих.

Каузалном интервенцијом из система (2.36) уклањају се функције ендогених променљивих чије се вредности фиксирају. Добија се нови каузални модел који индукује функцију заједничке вероватноће ендогених променљивих која се дефише на следећи начин:

$$P_I(X=x)=\sum_{\{u|CM_I(u)=x\}} P(U=u) \qquad (2.38)$$

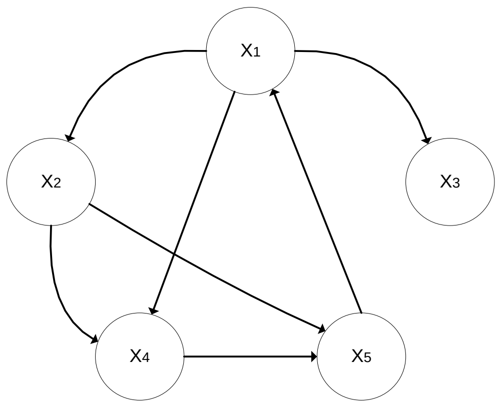
где је $P_I(X)$ функција заједничке вероватноће ендогених променљивих након интервенције, CM_I је каузални модел након интервенције, $I \subseteq X$ је скуп ендогених променљивих над којима се врши интервенција.

Функционални каузални модел (2.36) индукује каузални дијаграм, ациклични или циклични директни граф $G=(X,E)$ где је $X=\{X_1,...,X_n\}$ скуп чворова графа који представљају ендогене променљиве, а E је скуп грана графа које представљају каузалне релације између ендогених променљивих.

На пример, каузалном моделу:

$$\begin{aligned} X_1 &= f_1(X_5,U_1) \\ X_2 &= f_2(X_1,U_2) \\ X_3 &= f_1(X_1,U_3) \\ X_4 &= f_4(X_1,X_2,U_4) \\ X_5 &= f_5(X_2,X_4,U_5) \end{aligned} \qquad (2.39)$$

одговара циклични диграф са Слике 3.



Слика 3. Директни циклични граф

Пробабилистички каузални модел (2.35) је Марковљев ако је систем (2.36) рекурзиван те је каузални дијаграм ациклични диграф и ако су променљиве $U_1,...,U_n$ међусобно независне те важи:

$$P(U)=\prod_{i=1}^{n}P(U_i) \tag{2.40}$$

Функција заједничке вероватноће коју индукује Марковљев каузални модел може се декомпоновати према формули (2.31) (*Pearl and Verma 1995, Pearl 2000*). На пример, нека је Марковљев каузални модел дефинисан системом једначина:

$$\begin{aligned} X_1 &= f_1(U_1) \\ X_2 &= f_2(X_1,U_2) \\ X_3 &= f_1(X_1,U_3) \\ X_4 &= f_4(X_1,X_2,U_4) \\ X_5 &= f_5(X_2,X_4,U_5) \end{aligned} \tag{2.41}$$

Заједничка вероватноћа ендогених променљивих $P(X_1,...,X_5)$ индукована моделом (2.41) може се специфицирати каузалном Бајесовом мрежом са Слике 1 и декомпоновати према (2.33) на следећи начин:

$$\begin{aligned} & P(X_1=x_1,...,X_5=x_5)=\sum_{\{u|CM(u)=x\}}\prod_{i=1}^{5}P(U_i=u_i)= \\ & =P(X_1=x_1)P(X_2=x_2|X_1=x_1)P(X_3=x_3|X_1=x_1) \\ & P(X_4=x_4|X_1=x_1,X_2=x_2)P(X_5=x_5|X_2=x_2,X_4=x_4) \end{aligned} \tag{2.42}$$

где су $x=(x_1,...,x_5)$ и $u=(u_1,...,u_5)$ реализације ендогених и егзогених променљивих, $P(U)=\prod_{i=1}^{5}P(U_i)$ је заједничка вероватноћа егзогених променљивих.

Каузалном интервенцијом $do(X_4=x_4)$ у моделу (2.41) добија се следећи модел:

$$\begin{aligned} X_1 &= f_1(U_1) \\ X_2 &= f_2(X_1,U_2) \\ X_3 &= f_1(X_1,U_3) \\ X_4 &= x_4 \\ X_5 &= f_5(X_2,X_4=x_4,U_5) \end{aligned} \tag{2.43}$$

Заједничка вероватноћа индукована моделом (2.43) може се специфицирати каузалном Бајесовом мрежом са Слике 2 и декомпоновати према (2.34).

3. МАТЕМАТИЧКА ТЕОРИЈА КОНЦЕПАТА У СЛУЧАЈУ ГРАДАЦИЈЕ

У овом поглављу биће формализовани и објашњени концепти у случају градације степена примене. У складу са захтевом когнитивне теорије (*Fodor and Lepore 1996, 2002, Fodor 1975, 1981, 1994, 1998*) биће математички објашњено:

- Како концепти функционишу као категорије у складу са прототип, езгемплар, теоријом граница категорија и каузалном теоријом концепата.
- Како се концепти компонују у сложене у складу са прототип, егземплар и теоријом граница категорија.

Концети ће бити формализовани и објашњени помоћу конзистентне фази логике, реалновредносне реализације коначне Булове алгебре (*Radojević 2000, 2005, 2008a, 2008b, 2008c, 2010, 2013a, 2013b, 2014, 2015*).

3.1. Како концепти функционишу као категорије

Основна карактеристика концепата је да су применљиви на објекте које групишу у категорије. У овом одељку биће формализоване четири теорије концепата у случају градације степена примене и то:

- Прототип теорија у стандардном и случају логичких интеракција између атрибута прототипа.
- Теорија егземплара.
- Теорија граница категорија.
- Каузална теорија у стандардном, случају каузалних повратних спрега између атрибута концепта и/ или логичких интеракција између узрока.

3.1.1. Прототип теорија

Преовлађујуће мишљење у когнитивној науци је да су концепти прототипови (*Laurence and Margolis 1999, Gleitman et al 2012*). Према стандардној теорији прототип је ментална репрезентација статистички значајних особина објеката који припадају релевантној категорији (*Rosch 1975, Rosch and Mervis 1975, Rosch 1978, Smith and Medin, 1981, Hampton 1993, 1995, Murphy 2002a, Prinz 2004*). Према сложеној теорији прототипови поред информације о статистички значајним особинама чувају и информације о статистички значајним интеракцијама између особина (*Smith and Medin 1981 стр. 84–86, Malt and Smith, 1984, McRae et al. 1997, 1999*). Концепт функционише као категорија на основу информације колико су објекат и прототип „слични“ тј. колико објекат задовољава статистички значајне особине и/ или интеракције. Објекат је репрезентативнија инстанца категорије што је сличнији прототипу те категорије. На пример, прототип „Птица“ могу чинити атрибути „Има перје“, „Има кљун“, „Гнезди се на дрвећу“ и „Може да лети“. Чешљугар је репрезентативнија птица од ноја или пингвина јер задовољава све четири особине. У сложеном случају концепт „Птица“ може укључити и AND интеракцију атрибута „Може да лети“ и „Гнезди се на дрвећу“ чиме се фаворизује (пенализује) репрезентативност објеката који задовољавају (не задовољавају) обе особине.

Прототип теорија формализована је у геометријском оквиру (*Smith and Minda 1998, 2000, Minda and Smith 2001, Danks 2007*). Објекат и прототип представљају се као тачке у *n*-димензионалном простору атрибута. Степен примене прототипа на неки објекат зависи од удаљености објекта и прототипа што се у простору $[0,1]^n$ дефинише на следећи начин:

$$C(x) = f_C\left(d\left(x, p_C\right)\right) \tag{3.1}$$

где је $C(x) \in [0,1]$ степен примене концепта C на објекат $x = \left(A_1(x), \ldots, A_n(x)\right)$ $d\left(x, p_C\right) \in [0,1]$ је дистанца између објекта и прототипа $p_C = \left(A_1\left(p_C\right), \ldots, A_n\left(p_C\right)\right)$,

$A_1(x),...,A_n(x),A_1(p_C),...,A_n(p_C)\in[0,1]$ су степени примене атрибута на објекат и прототип, n је број атрибута, $f_C(d(x,p_C)):[0,1]\to[0,1]$ је опадајућа функција.

Дистанца између објекта и прототипа у стандардном случају (*Smith and Minda 1998, 2000, Minda and Smith 2001*) дефинише се на следећи начин:

$$d(x,p_C)=\left(\sum_{i=1}^{n}w_i\left|A_i(x)-A_i(p_C)\right|^r\right)^{\frac{1}{r}} \tag{3.2}$$

где су $w_1,...w_n\in[0,1]$ су тежине које дефинишу значај атрибута прототипа, $\sum_{i=1}^{n}w_i=1$, n је број атрибута, стандардно се користи Менхетн метрика када је $r=1$ или Еуклидска метрика када је $r=2$.

Дистанца између објекта и прототипа у сложеном случају (*Danks 2007*) дефинише се на следећи начин:

$$d(x,p_C)=\left(\sum_{i=1}^{m}w_i\left|f_i(x)-f_i(p_C)\right|^r\right)^{\frac{1}{r}} \tag{3.3}$$

где је $f_i(\cdot):[0,1]^k\to[0,1]$ атрибут *k*-тог реда који представља интеракцију $k\le n$ атрибута „првог“ реда, $A_1(\cdot),...,A_n(\cdot)$ су атрибути првог реда, $w_1,...w_m\in[0,1]$ су тежине које дефинишу значај атрибута прототипа, $\sum_{i=1}^{m}w_i=1$, m је број атрибута прототипа, n је број атрибута првог реда.

Прототип теорија у стандардном и сложеном случају може се формализовати коришћењем конзистентне фази логике. Степен примене прототипа на неки објекат у општем случају дефинише се на следећи начин:

$$C(x)=S(x,p_C) \tag{3.4}$$

где је $C(x)\in[0,1]$ степен примене концепта C на објекат $x=(A_1(x),...,A_n(x))$, $S(x,p_C)\in[0,1]$ је степен сличности објекта и прототипа $p_C=(A_1(p_C),...,A_n(p_C))$,

$A_1(x),...,A_n(x),A_1(p_C),...,A_n(p_C)\in[0,1]$ су степени примене атрибута на објекат и прототип, *n* је број атрибута.

Степен сличности објекта и прототипа у стандардном случају дефинише се као отежана сума сличности објекта и прототипа по атрибутима:

$$\begin{aligned} S(x,p_C) &= \sum_{i=1}^{n} w_i\left(A_i(x)\Leftrightarrow A_i(p_C)\right)^{\min} = \\ &= \sum_{i=1}^{n} w_i\left(1-A_i(x)-A_i(p_C)+2\min\left(A_i(x),A_i(p_C)\right)\right) \end{aligned} \tag{3.5}$$

где је $S(x,p_C)\in[0,1]$ степен сличности објекта и прототипа измерен оператором логичке агрегације $\sum_{i=1}^{n} w_i\left(A_i(x)\Leftrightarrow A_i(p_C)\right)^{\min}\in[0,1]$, $\left(1-A_i(x)-A_i(p_C)+2\min\left(A_i(x),A_i(p_C)\right)\right)\in[0,1]$ је генерализовани Булов полином елемента $\left(A_i(x)\Leftrightarrow A_i(p_C)\right)\in BA(\Omega)$ који мери сличност објекта и прототипа по атрибуту $A_i(\cdot)$, $\Omega=\{A_1(x),...,A_n(x),A_1(p_C),...,A_n(p_C)\}$, $A_1(x),...,A_n(x),A_1(p_C),...,A_n(p_C)\in[0,1]$, $w_1,...,w_n\in[0,1]$ су тежине које дефинишу значај атрибута прототипа, $\sum_{i=1}^{n} w_i=1$, *n* је број атрибута.

Степен сличности објекта и прототипа у сложеном случају дефинише се као отежана сума сличности објекта и прототипа по произвољним елементима Булове алгебре атрибута:

$$\begin{aligned} S(x,p_C) &= \sum_{j=1}^{m} w_j\left(f_j(x)\Leftrightarrow f_j(p_C)\right)^{\min} = \\ &= \sum_{j=1}^{m} w_j\left(1-f_j^{\otimes}(x)-f_j^{\otimes}(p_C)+2\min\left(f_j^{\otimes}(x),f_j^{\otimes}(p_C)\right)\right) \end{aligned} \tag{3.6}$$

где је $S(x,p_C)\in[0,1]$ степен сличности објекта и прототипа измерен оператором логичке агрегације $\sum_{j=1}^{m} w_j\left(f_j(x)\Leftrightarrow f_j(p_C)\right)^{\min}\in[0,1]$, $\left(1-f_j^{\otimes}(x)-f_j^{\otimes}(p_C)+2\min\left(f_j^{\otimes}(x),f_j^{\otimes}(p_C)\right)\right)\in[0,1]$ је генерализовани Булов полином елемента $\left(f_j(x) \Leftrightarrow f_j(p_C)\right) \in BA(\Omega)$ који мери сличност објекта и прототипа по атрибуту $f_j(\cdot)$, $f_j(\cdot):[0,1]^k \to [0,1]$, $k \le n$ је атрибут k-тог реда који се моделује као примарни или сложени елемент $BA(\Omega)$, $\Omega = \{A_1(x),...,A_n(x),A_1(p_C),...,A_n(p_C)\}$, $A_1(x),...,A_n(x),A_1(p_C),...,A_n(p_C) \in [0,1]$ су степени примене атрибута првог реда на објекат и прототип, $w_1,...,w_m \in [0,1]$ су тежине атрибута прототипа, $\sum_{j=1}^{m} w_j = 1$, m је број атрибута прототипа, n је број атрибута првог реда.

Више о третирању сличности у конзистентном фази оквиру у (*Radojević 2005, 2010, Poledica et al. 2013, Poledica et al. 2015, Milošević et al. 2013, Milošević et al. 2016a, 2016b, Dobrić et al. 2015*).

3.1.2. Теорија егземплара

Према овој теорији концепт је колекција егземплара, менталних репрезентација инстанци релевантне категорије (*Brooks 1978, Medin and Schaffer 1978, Nosofsky 1986, 1992, 2011, Heit and Barsalou 1996, Zaki et al. 2003*). Концепт чува комплетну информацију о категорији, а не апстрактну информацију како претпостављају остале теорије. Концепт функционише као категорија на основу сличности објекта и егземплара који концепт чине. Објекат је репрезентативнији инстанца неке категорије што је сличнији егземпларима те категорије. На пример, егземплари који чине концепт „Птица“ могу бити менталне репрезентације славуја, чешљугара, врапца, голуба, вране, ноја и пингвина. Према тако дефинисаном концепту „Птица“ славуј је репрезентативнија птица од ноја јер је сличнији егземпларима овог концепта него што је то ној.

Теорија егземплара формализована је у геометријском оквиру (*Nosofsky 1986, 1992, 2011, Zaki et al. 2003, Danks 2007*). Објекат и егземплари представљају се као тачке у *n*-димензионалном простору атрибута. Степен примене концепта зависи од удаљености објекта од егземплара који концепт чине што се у простору $[0,1]^n$ дефинише на следећи начин:

$$C(x) = f_C\left(d\left(x, e_C^1\right), \dots, d\left(x, e_C^m\right)\right) \tag{3.7}$$

где је $C(x) \in [0,1]$ степен примене концепта C на објекат $x = \left(A_1(x), \dots, A_n(x)\right)$, $d\left(x, e_C^i\right) \in [0,1]$ је дистанца између x и егземплара $e_C^i = \left(A_1\left(e_C^i\right), \dots, A_n\left(e_C^i\right)\right)$, $A_1(x), \dots, A_n(x), A_1\left(e_C^i\right), \dots, A_n\left(e_C^i\right) \in [0,1]$ су степени примене атрибута на објекат и егземплар e_C^i, , $i = 1, \dots, m$, m је број егземплара концепта *C*, $f_C\left(d\left(x, e_C^1\right), \dots, d\left(x, e_C^m\right)\right) : [0,1] \to [0,1]$ је опадајућа функција, *n* је број атрибута.

Дистанца између објекта и егземплара дефинише се на следећи начин:

$$d\left(x, e_C^i\right) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j \left|A_j(x) - A_j\left(e_C^i\right)\right|^r\right)^{\frac{1}{r}} \tag{3.8}$$

где $d\left(x, e_C^i\right) \in [0,1]$, $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$, $w_1, \dots, w_n \in [0,1]$ су тежине атрибута (енг. attention weights), *n* је број атрибута, стандардно се користи Менхетн метрика када је $r = 1$ или Еуклидска метрика када је $r = 2$.

Теорија егземплара може се формализовати у конзистентном фази оквиру. Степен примене концепта на неки објекат дефинише се као отежана сума степена сличности или као максимални степен сличности тог објекта и егземплара концепта на следећи начин:

$$\begin{aligned} C(x) &= \sum_{i=1}^{m} \omega_i S\left(x, e_C^i\right) \\ C(x) &= \max_{i=1,\dots,m}\left(S\left(x, e_C^i\right)\right) \end{aligned} \tag{3.9}$$

где је $C(x) \in [0,1]$ степен примене концепта C на објекат $x = \left(A_1(x), \dots, A_n(x)\right)$, $S\left(x, e_C^i\right) \in [0,1]$ је степен сличности објекта и егземплара $e_C^i = \left(A_1\left(e_C^i\right), \dots, A_n\left(e_C^i\right)\right)$, $A_1(x), \dots, A_n(x), A_1\left(e_C^i\right), \dots, A_n\left(e_C^i\right) \in [0,1]$ су степени примене атрибута на објекат и егземплар $e_C^i, i = 1,...,m$, $\omega_1,...,\omega_m \in [0,1]$ су тежине које дефинишу значај егземплара $e_C^1,...,e_C^m$, $\sum_{i=1}^{m} \omega_i = 1$, *m* је број егземплара који чине концепт C, *n* је број атрибута.

Степен сличности објекта и неког од егземплара концепта дефинише се као отежана сума сличности објекта и егземплара по атрибутима:

$$\begin{aligned} S\left(x, e_C^i\right) &= \sum_{j=1}^{n} w_j \left(A_j\left(x\right) \Leftrightarrow A_j\left(e_C^i\right)\right)^{\min} = \\ &= \sum_{j=1}^{n} w_j \left(1 - A_j\left(x\right) - A_j\left(e_C^i\right) + 2\min\left(A_j\left(x\right), A_j\left(e_C^i\right)\right)\right) \end{aligned} \tag{3.10}$$

где је $S\left(x, e_C^i\right) \in [0,1]$ степен сличности објекта x и егземплара e_C^i измерен оператором логичке агрегације $\sum_{j=1}^{n} w_j \left(A_j\left(x\right) \Leftrightarrow A_j\left(e_C^i\right)\right)^{\min} \in [0,1]$, $\left(1 - A_j\left(x\right) - A_j\left(e_C^i\right) + 2\min\left(A_j\left(x\right), A_j\left(e_C^i\right)\right)\right) \in [0,1]$ је генерализовани Булов полином који мери сличност објекта x и егземплара e_C^i по атрибуту $A_j(\cdot)$, $\Omega = \left\{A_1(x),...,A_n(x), A_1\left(e_C^i\right),...,A_n\left(e_C^i\right)\right\}$, $A_1(x),...,A_n(x), A_1\left(e_C^i\right),...,A_n\left(e_C^i\right) \in [0,1]$, $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$, $w_1,...,w_n \in [0,1]$ су тежине атрибута, *n* је број атрибута.

3.1.3. Теорија граница категорија

Према овој теорији концепт је ментална репрезентација тзв. границе категорије што је формализовано у геометријском оквиру (*Ashby and Gott 1988*, *Ashby and Townsend 1986*, *Ashby and Maddox 1992*). Објекат се представља као тачка, а граница категорије као површ у *n*-димензионалном простору атрибута. Граница категорије у простору $[0,1]^n$ дефинише се квадратном једначином на следећи начин:

$$h_C\left(x\right) = xMx^T + bx^T + c_0 = 0 \tag{3.11}$$

где је h_C граница категорије, M симетрична матрица, x и b су вектори димензије n, c_0 је скалар, n је број атрибута.

Објекат $x=\left(A_1(x),...,A_n(x)\right)$ налази се на граници категорије ако важи $h_C(x)=0$. Објекат потпада (не потпада) под концепт - припада (не припада) релевантној категорији ако важи $h_C(x)>0$ односно $h_C(x)<0$.

Степен примене концепта зависи од удаљености објекта од границе категорије што се дефинише на следећи начин:

$$C(x)=f_C\left(d\left(x,h_C\right)\right) \tag{3.12}$$

где је $C(x)\in[0,1]$ степен примене концепта C на објекат $x=\left(A_1(x),...,A_n(x)\right)$, $A_1(x),...,A_n(x)\in[0,1]$ су степени примене атрибута на објекат, $d\left(x,h_C\right)\in[0,1]$ је најкраћа дистанца између објекта и границе категорије, $f_C\left(d\left(x,h_C\right)\right):[0,1]\rightarrow[0,1]$ је растућа функција.

Теорија граница категорија може се формализовати на природнији начин у биполарном конзистентном фази оквиру. Биполарни степен примене концепта дефинише се на следећи начин:

$$C(x)=2Agg_C\left(\frac{A_1(x)+1}{2},...,\frac{A_n(x)+1}{2}\right)-1 \tag{3.13}$$

где је $C(x)\in[-1,1]$ биполарни степен примене концепта C на објекат $x=\left(A_1(x),...,A_n(x)\right)$, $A_1(x),...,A_n(x)\in[-1,1]$ су биполарни степени примене атрибута на објекат, $Agg_C\left(\frac{A_1(x)+1}{2},...,\frac{A_n(x)+1}{2}\right)\in[0,1]$ је оператор логичке агрегације, n је број атрибута.

Биполарни оквир на природан начин објашњава концепте у складу са теоријом граница категорија. Степен примене концепта може бити позитиван $C(x)\in(0,1]$, неутралан $C(x)=0$ или негативан $C(x)\in[-1,0)$. Неутрални степен примене означава објекте који се налазе на граници категорије. Позитивна вредност степена примене означава колико је објекат добар - репрезентативан, а негативна колико је објекат лош представник категорије.

3.1.4. Каузална теорија

Према каузалној теорији концепт је ментална репрезентација особина и каузалних релација између особина инстанци релевантне категорије (*Rehder 2003a, 2003b, 2010, Rehder and Kim 2006, 2009, 2010*). Степен примене концепта на неки објекат зависи од тога колико објекат задовољава каузалне законе категорије. На пример, концепт „Птица“ може чувати информацију о релевантним особинама птица „Има перје“, „Има кљун“, „Гнезди се на дрвећу“ и „Може да лети“ као и информацију о каузалној релацији између узрочне особине „Може да лети“ и последичне особине „Гнезди се на дрвећу“. Према тако дефинисаном концепту „Птица“, животиња врсте Carduelis carduelis (чешљугар) представља репрезентативнију инстанцу категорије птица од славуја који се не гнезди на дрвећу, него на тлу или у ниском растињу те не задовољава наведени каузални закон.

Каузална теорија концепата формализована је у пробабилистичком оквиру у случају дискретних атрибута (*Rehder 2003a, 2003b*). Степен примене концепта дефинише се на следећи начин:

$$C(x) = f_C\left(P_C\left(A_1(x) = a_1(x), \ldots, A_n(x) = a_n(x)\right)\right) \tag{3.14}$$

где је $C(x) \in [0,1]$ степен примене концепта C на објекат $x = (a_1(x), \ldots, a_n(x))$, $P_C\left(A_1(x) = a_1(x), \ldots, A_n(x) = a_n(x)\right) \in [0,1]$ је вредност функције заједничке вероватноће атрибута која представља информацију колико објекат x задовољава каузалне законе категорије одређене концептом C, $a_1(x), \ldots, a_n(x)$ су дискретне вредности атрибута $A_1(x), \ldots, A_n(x)$, n је број атрибута, $f_C : [0,1] \to [0,1]$ је растућа функција.

Функција заједничке вероватноће атрибута $P_C\left(A_1(x),...,A_n(x)\right)$ специфицира се каузалном Бајесовом мрежом:

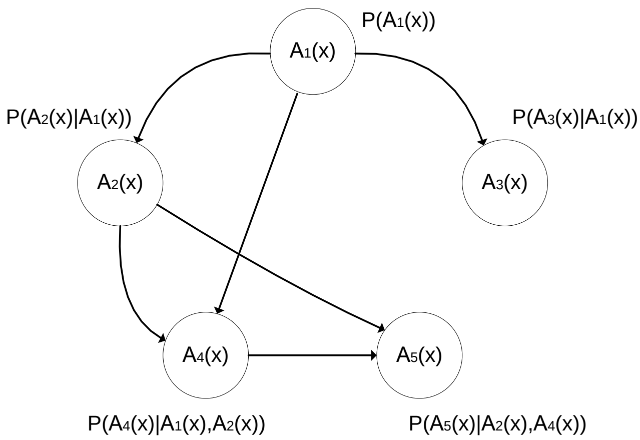
$$BN_C = \left(G_C, F_C\right) \tag{3.15}$$

где је $G_C = \left(V_C, E_C\right)$ директни ациклични граф, $V_C = \left\{A_1(x),...,A_n(x)\right\}$ је скуп чворова графа који представљају атрибуте концепта C који су случајне променљиве, E_C је скуп директних веза између чворова које представљају каузалне релације између атрибута, $F_C = \left\{P\left(A_1(x)\middle|A_{1_1}(x),...,A_{1_{K_1}}(x)\right),...,P\left(A_n(x)\middle|A_{n_1}(x),...,A_{n_{K_n}}(x)\right)\right\}$ је скуп функција условних вероватноћа чворова графа које представљају каузалне законе категорије, $A_{i_1}(x),...,A_{i_{K_i}}(x) \in V_C$ су атрибути који су директни узроци атрибута $A_i(x)$ тј. чворови који се уливају у чвор $A_i(x)$, K_i је број директних узрока $A_i(x)$, n је број атрибута - чворова графа.

Функција заједничке вероватноће атрибута концепта C специфицирана каузалном Бајесовом мрежом (3.15) може се декомпоновати на следећи начин:

$$P_C\left(A_1(x),...,A_n(x)\right) = \prod_{i=1}^{n} P\left(A_i(x)\middle|A_{i_1}(x),...,A_{i_{K_i}}(x)\right) \tag{3.16}$$

На пример, нека је концепт C дефинисан каузалном Бајесовом мрежом која је приказана на Слици 4.



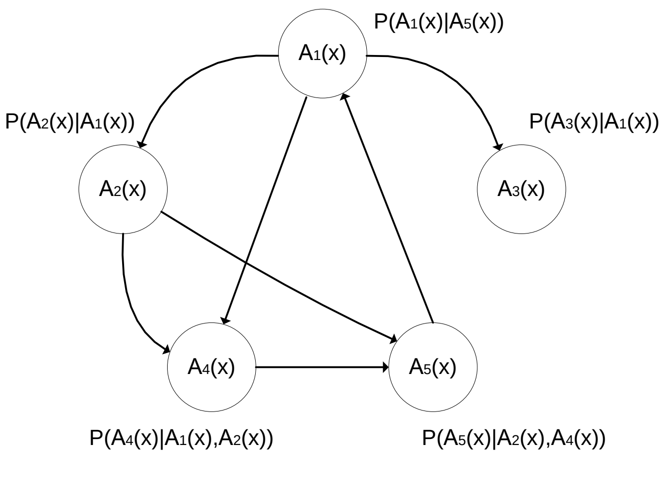
Слика 4. Концепт у каузалном оквиру

Степен примене концепта C дефинише се на следећи начин:

$$\begin{aligned} C(x) = f_C\left(P_C\left(A_1(x)=a_1(x),...,A_5(x)=a_5(x)\right)\right) = \\ = f_C\left(P\left(a_1(x)\right)P\left(a_2(x)\middle|a_1(x)\right)P\left(a_3(x)\middle|a_1(x)\right)\right. \\ \left.P\left(a_4(x)\middle|a_1(x),a_2(x)\right)P\left(a_5(x)\middle|a_2(x),a_4(x)\right)\right) \end{aligned} \tag{3.17}$$

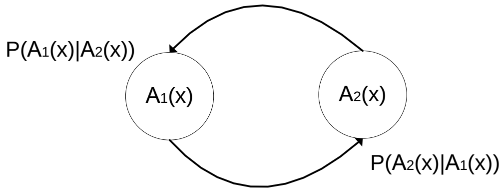
где је $C(x)\in[0,1]$ степен примене концепта C на објекат $x=\left(a_1(x),...,a_5(x)\right)$, $a_1(x),...,a_5(x)$ су дискретне вредности атрибута $A_1(x),...,A_5(x)$, $f_C:[0,1]\to[0,1]$ је растућа функција.

Проблем са формализмом се јавља у случају концепата који садрже каузалне повратне спреге између атрибута (*Rehder and Martin 2011*). На пример, нека концепт C поред каузалних релација које су приказане на Слици 4 садржи и каузалну релацију између узрочног атрибута $A_5(x)$ и последичног атрибута $A_1(x)$. Тако дефинисани концепт C садржи каузалну повратну спрегу и може се представити директним цикличним графом приказаним на Слици 5.



Слика 5. Концепт који садржи повратну спрегу

Функцију заједничке вероватноће дефинисану над директним цикличним графом није могуће декомпоновати према (3.16) тј. (2.31) (*Pearl and Dechter 1996*). Проблем се може илустровати на примеру графа са Слике 6.



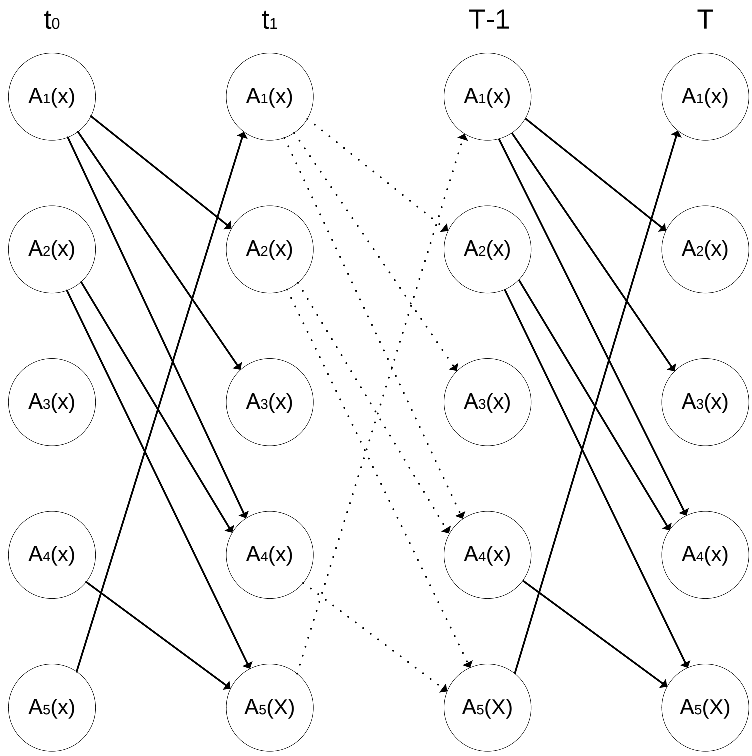
Слика 6. Директни циклични граф

Ако се функција заједничке вероватноће специфицирана графом са Слике 6 декомпонује према (3.16) добија се да су чворови независни:

$$
\begin{aligned}
&P\left(A_1(x), A_2(x)\right) = P\left(A_1(x) \middle| A_2(x)\right) P\left(A_2(x) \middle| A_1(x)\right) \\
&\Rightarrow P\left(A_1(x), A_2(x)\right) = P\left(A_1(x)\right) P\left(A_2(x)\right)
\end{aligned}
\tag{3.18}
$$

иако је специфицирано да каузално утичу један на другог.

Предложено решење проблема је „одмотавање“ (енг. unrolling) директног цикличног графа у дискретном времену (*Rehder and Martin 2011*). Одмотавање графа са Слике 5 приказано је на Слици 7.



Слика 7. Одмотавање директног цикличног графа у дискретном времену

Резултујући модел је динамичка Бајесова мрежа, верзија Бајесове мреже која се користи за моделовање стохастичких процеса (*Murphy 2002b*). Функција заједничке вероватноће специфицирана динамичком Бајесовом мрежом декомпонује се на следећи начин:

$$P\left(x_0,\ldots,x_T\right)=P\left(A_1^0\left(x\right),\ldots,A_n^0\left(x\right)\right)\prod_{t=1}^{T}\prod_{i=1}^{n}P\left(A_i^t\left(x\right)\middle|A_{i_1}^{t-1}\left(x\right),\ldots,A_{i_{K_i}}^{t-1}\left(x\right)\right) \tag{3.19}$$

где је $x_t=\left(A_1^t\left(x\right),\ldots,A_n^t\left(x\right)\right)$, $0\le t\le T$, $P\left(x_0\right)=P\left(A_1^0\left(x\right),\ldots,A_n^0\left(x\right)\right)$ је почетна вероватноћа, $P\left(A_i^t\left(x\right)\middle|A_{i_1}^{t-1}\left(x\right),\ldots,A_{i_{K_i}}^{t-1}\left(x\right)\right)$ функција условне вероватноће чвора $A_i^t\left(x\right)$ која се дефинише на исти начин за свако $t>0$ јер је претпостављен временски инваријантан Марковљев ланац, $A_{i_1}^{t-1}\left(x\right),\ldots,A_{i_{K_i}}^{t-1}\left(x\right)$, $t>0$ су директни узроци $A_i^t\left(x\right)$ - чворови који се уливају у чвор $A_i^t\left(x\right)$, K_i је број директних узрока $A_i^t\left(x\right)$, T је број тренутака времена узетих у разматрање, n је број атрибута.

Степен примене концепта у случају каузалних повратних спрега дефинише се на следећи начин:

$$C\left(x\right)=f_C\left(P_C\left(A_1^T\left(x\right)=a_1\left(x\right),\ldots,A_n^T\left(x\right)=a_n\left(x\right)\right)\right) \tag{3.20}$$

где је $C\left(x\right)\in\left[0,1\right]$ степен примене концепта C на објекат $x=\left(a_1\left(x\right),\ldots,a_n\left(x\right)\right)$, $P_C\left(A_1^T\left(x\right)=a_1\left(x\right),\ldots,A_n^T\left(x\right)=a_n\left(x\right)\right)\in\left[0,1\right]$ је информација колико објекат x задовољава каузалне законе категорије одређене концептом C, $a_1\left(x\right),\ldots,a_n\left(x\right)$ су дискретне вредности атрибута $A_1\left(x\right),\ldots,A_n\left(x\right)$, $f_C:\left[0,1\right]\to\left[0,1\right]$ је растућа функција.

Вероватноћа $P_C\left(A_1^T\left(x\right)=a_1\left(x\right),\ldots,A_n^T\left(x\right)=a_n\left(x\right)\right)$ дефинише се на следећи начин:

$$P_C\left(A_1^T\left(x\right)=a_1\left(x\right),\ldots,A_n^T\left(x\right)=a_n\left(x\right)\right)=\sum_{x_0,\ldots,x_{T-1}}P\left(x_0,\ldots,x_T\right) \tag{3.21}$$

У представљеном формализму није прецизирано како се приликом израчунавања (3.21) одређује број тренутака времена узетих у разматрање T.

Каузална теорија концепата може се формализовати на природнији начин коришћењем функционалних каузалних модела. Степен примене концепта у случају дискретних атрибута дефинише се на следећи начин:

$$C(x) = f_C\left(P_C\left(A_1(x) = a_1(x),...,A_n(x) = a_n(x)\right)\right) \tag{3.22}$$

где је $C(x) \in [0,1]$ степен примене концепта C на објекат $x = \left(a_1(x),...,a_n(x)\right)$, $P_C\left(A_1(x) = a_1(x),...,A_n(x) = a_n(x)\right) \in [0,1]$ је вредност функције заједничке вероватноће атрибута која представља информацију колико објекат x задовољава каузалне законе категорије одређене концептом C, $a_1(x),...,a_n(x)$ су дискретне вредности атрибута $A_1(x),...,A_n(x)$, n је број атрибута, $f_C : [0,1] \to [0,1]$ је растућа функција.

Функција заједничке вероватноће атрибута $P_C\left(A_1(x),...,A_n(x)\right)$ специфицира се помоћу пробабилистичког функционалног каузалног модела који се дефинише на следећи начин:

$$PCM_C = \left(X_C, U_C, CM_C, P_C(U_C)\right) \tag{3.23}$$

где је $X_C = \left\{A_1(x),...,A_n(x)\right\}$ скуп дискретних ендогених променљивих тј. атрибута концепта C, $U_C = \left\{U_1(x),...,U_n(x)\right\}$ је скуп дискретних егзогених променљивих, CM_C је функционални каузални модел концепта C који је у општем случају нерекурзиван, $P_C(U_C)$ је функција заједничке вероватноће егзогених променљивих.

Каузални закони категорије представљени су структурним једначинама каузалног модела који може бити нерекурзиван што омогућава третирање каузалних повратних спрега између атрибута концепта. Структурне једначине реализују се конзистентном фази логиком што омогућава експлицитно третирање логичких интеракција између узрока. Функционални каузални модел могуће је реализовати у униполарном или биполарном оквиру.

У униполарном оквиру функционални каузални модел концепта C дефинише се на следећи начин:

$$\begin{aligned}
&A_1(x) = Agg_1\left(A_{1_1}(x),...,A_{1_{K_1}}(x),U_1(x)\right)\\
&\vdots\\
&A_n(x) = Agg_n\left(A_{n_1}(x),...,A_{n_{K_n}}(x),U_n(x)\right)
\end{aligned} \tag{3.24}$$

где су $A_1(x),...,A_n(x) \in X_C$ и $U_1(x),...,U_n(x) \in U_C$ ендогене и егзогене променљиве чије дискретне вредности припадају униполарном интервалу $[0,1]$, $A_{i_1}(x),...,A_{i_{K_i}}(x) \in X_C$ и $U_i(x) \in U_C$ су директни узроци атрибута $A_i(x)$, K_i је број директних узрока $A_i(x)$, $Agg_i\left(A_{i_1}(x),...,A_{i_{K_i}}(x),U_i(x)\right) \in [0,1]$ је оператор логичке агрегације атрибута $A_i(x)$, $i=1,...,n$, n је број ендогених променљивих - униполарних атрибута концепта C.

У биполарном оквиру функционални каузални модел концепта C дефинише се на следећи начин:

$$\begin{aligned}
&A_1(x) = 2Agg_1\left(\frac{A_{1_1}(x)+1}{2},...,\frac{A_{1_{K_1}}(x)+1}{2},\frac{U_1(x)+1}{2}\right)-1\\
&\vdots\\
&A_n(x) = 2Agg_n\left(\frac{A_{n_1}(x)+1}{2},...,\frac{A_{n_{K_n}}(x)+1}{2},\frac{U_n(x)+1}{2}\right)-1
\end{aligned} \tag{3.25}$$

где су $A_1(x),...,A_n(x) \in X_C$ и $U_1(x),...,U_n(x) \in U_C$ ендогене и егзогене променљиве чије дискретне вредности припадају биполарном интервалу $[-1,1]$, $A_{i_1}(x),...,A_{i_{K_i}}(x) \in X_C$ и $U_i(x) \in U_C$ су директни узроци атрибута $A_i(x)$, K_i је број директних узрока $A_i(x)$, $Agg_i\left(\frac{A_{i_1}(x)+1}{2},...,\frac{A_{i_{K_i}}(x)+1}{2},\frac{U_i(x)+1}{2}\right) \in [0,1]$ је оператор логичке агрегације атрибута $A_i(x)$, $i=1,...,n$, n је број биполарних атрибута концепта C.

Вредност функције заједничке вероватноће $P_C\left(A_1(x)=a_1(x),...,A_n(x)=a_n(x)\right)\in[0,1]$ која се специфицира каузалним моделом (3.24) или (3.25), а на основу које се према (3.22) израчунава степен примене концепта дефинише се на следећи начин:

$$P_C\left(A_1(x)=a_1(x),...,A_n(x)=a_n(x)\right)=\sum_{\{u|CM_C(u)=x\}}P_C\left(U_C=u\right) \tag{3.26}$$

где је $x=\left(a_1(x),...,a_n(x)\right)$ објекат, $u=\left(u_1(x),...,u_n(x)\right)$ је реализација егзогених промењљивих, CM_C је функционални каузални модел концепта C.

Функционални каузални модел концепта C индукује каузални дијаграм, циклични или ациклични диграф $G_C=\left(V_C,E_C\right)$ где је $V_C=\left\{A_1(x),...,A_n(x)\right\}$ скуп чворова који представљају ендогене промењљиве каузалног модела CM_C тј. атрибуте концепта C, E_C је скуп директних веза између чворова које представљају каузалне релације између атрибута.

На пример, нека је концепт C дефинисан следећим пробабилистичким каузалним моделом:

$$PCM_C=\left(X_C,U_C,CM_C,P_C\left(U_C\right)\right) \tag{3.27}$$

где је $X_C=\left\{A_1(x),...,A_5(x)\right\}$ скуп ендогених промењљивих које представљају атрибуте концепта C, $U_C=\left\{U_1(x),...,U_5(x)\right\}$ је скуп егзогених промењљивих, CM_C је каузални модел концепта C, $P_C\left(U_C\right)$ је функција заједничке вероватноће егзогених промењљивих.

Нека је CM_C дефинисан системом структурних једначина на следећи начин:

$$\begin{aligned}
A_1(x)&=Agg_1\left(A_5(x),U_1(x)\right)\\
A_2(x)&=Agg_2\left(A_1(x),U_2(x)\right)\\
A_3(x)&=Agg_1\left(A_1(x),U_3(x)\right)\\
A_4(x)&=Agg_4\left(A_1(x),A_2(x),U_4(x)\right)\\
A_5(x)&=Agg_5\left(A_2(x),A_4(x),U_5(x)\right)
\end{aligned} \tag{3.28}$$

Модел (3.28) индукује циклични диграф са Слике 5.

Степен примене концепта C израчунава се на следећи начин:

$$C(x) = f\left(P_C\left(A_1(x) = a_1(x), ..., A_5(x) = a_5(x)\right)\right) = \\ = f\left(\sum_{\{u|CM_C(u)=x\}} P_C(U = u)\right) \tag{3.29}$$

где је $C(x) \in [0,1]$ степен примене концепта C на објекат $x = (a_1(x), ..., a_5(x))$, $P_C\left(A_1(x) = a_1(x), ..., A_5(x) = a_5(x)\right) \in [0,1]$ је информација колико објекат x задовољава каузалне законе категорије одређене концептом C, $f : [0,1] \to [0,1]$ је растућа функција, $u = (u_1(x), ..., u_5(x))$ је реализација егзогених променљивих.

Конвенционални формализам може се добити из предложеног када је функционални каузални модел (3.24) или (3.25) рекурзиван те је каузални дијаграм ациклични диграф и када су егзогене променљиве независне те важи:

$$P_C\left(U_1(x), ..., U_n(x)\right) = \prod_{i=1}^{n} P\left(U_i(x)\right) \tag{3.30}$$

У конвенционалном случају пробабилистички каузални модел (3.23) је Марковљев те се вероватноћа дефинисана према (3.26) може специфицирати каузалном Бајесовом мрежом дефинисаном према (3.15) и декомпоновати према (3.16), што се дефинише на следећи начин:

$$P_C\left(A_1(x) = a_1(x), ..., A_n(x) = a_n(x)\right) = \\ = \sum_{\{u|CM_C(u)=x\}} \prod_{i=1}^{n} P\left(U_i(x) = u_i(x)\right) = \\ = \prod_{i=1}^{n} P\left(A_i(x) = a_i(x) \middle| A_{i_1}(x) = a_{i_1}(x), ..., A_{i_{K_i}}(x) = a_{i_{K_i}}(x)\right) \tag{3.31}$$

где је $x = (a_1(x), ..., a_n(x))$ објекат, $u = (u_1(x), ..., u_n(x))$ је реализација егзогених променљивих, n је број атрибута концепта.

На пример, нека је концепт C дефинисан Марковљевим пробабилистичким каузалним моделом $PCM_C = \left(X_C, U_C, CM_C, P_C\left(U_C\right)\right)$, $X_C = \left\{A_1\left(x\right), ..., A_5\left(x\right)\right\}$, $U_C = \left\{U_1\left(x\right), ..., U_5\left(x\right)\right\}$, $P_C\left(U\right) = \prod_{i=1}^{5} P\left(U_i\left(x\right)\right)$, где је CM_C дефинисан као:

$$\begin{aligned}
&A_1\left(x\right) = U_1\left(x\right) \\
&A_2\left(x\right) = Agg_2\left(A_1\left(x\right), U_2\left(x\right)\right) \\
&A_3\left(x\right) = Agg_1\left(A_1\left(x\right), U_3\left(x\right)\right) \\
&A_4\left(x\right) = Agg_4\left(A_1\left(x\right), A_2\left(x\right), U_4\left(x\right)\right) \\
&A_5\left(x\right) = Agg_5\left(A_2\left(x\right), A_4\left(x\right), U_5\left(x\right)\right)
\end{aligned} \tag{3.32}$$

Вероватноћа $P_C\left(A_1\left(x\right) = a_1\left(x\right), ..., A_5\left(x\right) = a_5\left(x\right)\right)$ индукована Марковљевим моделом PCM_C може се спецификовати каузалном Бајесовом мрежом са Слике 4 и декомпоновати према (3.17) на следећи начин:

$$\begin{aligned}
&P_C\left(A_1\left(x\right) = a_1\left(x\right), ..., A_5\left(x\right) = a_5\left(x\right)\right) = \\
&= \sum_{\left\{u \mid CM_C\left(u\right) = x\right\}} \prod_{i=1}^{5} P\left(U_i\left(x\right) = u_i\left(x\right)\right) = \\
&= P\left(a_1\left(x\right)\right) P\left(a_2\left(x\right) \middle| a_1\left(x\right)\right) P\left(a_3\left(x\right) \middle| a_1\left(x\right)\right) \\
&P\left(a_4\left(x\right) \middle| a_1\left(x\right), a_2\left(x\right)\right) P\left(a_5\left(x\right) \middle| a_2\left(x\right), a_4\left(x\right)\right)
\end{aligned} \tag{3.33}$$

где је $x = \left(a_1\left(x\right), ..., a_5\left(x\right)\right)$ објекат, $u = \left(u_1\left(x\right), ..., u_5\left(x\right)\right)$ је реализација променљивих.

3.1.5. Закључак

Коришћењем конзистентне фази логике формализоване су четири теорије концепата у случају градације степена примене и то:

- Прототип теорија у стандардном и сложеном случају. Према прототип теорији концепт је ментална репрезентација статистички значајних особина и/ или интеракција између особина инстанци релевантне категорије. Степен примене прототипа на неки објекат зависи од сличности објекта и прототипа. У стандардном случају атрибути не интерагују те је степен примене формализован као отежана сума сличности објекта и прототипа по атрибутима. У сложеном случају атрибути логички интерагују те је степен примене формализован као отежана сума сличности објекта и прототипа по произвољним елементима Булове алгебре атрибута.

- Теорија егземплара. Према овој теорији концепт је колекција егземплара, менталних репрезентација инстанци релевантне категорије. Концепт функционише на основу сличности објекта и езгемплара. Степен примене концепта на неки објекат формализован је на два начина, као отежана сума степена сличности објекта и свих егземплара или као степен сличности објекта и најсличнијег егземплара концепта. Степен сличности објекта и неког од егземплара концепта формализован је као отежана сума сличности објекта и егземплара по атрибутима.
- Теорија граница категорија у биполарном оквиру. Према овој теорији концепт је ментална репрезентација тзв. границе категорије. Степен примене концепта је биполаран. Неутрални степен примене испољавају објекти који припадају граници категорије. Позитивна вредност степена примене означава колико је објекат добра тј. репрезентативна, а негативна колико је објекат лоша инстанца релевантне категорије.
- Каузална теорија у стандардном, случају повратних спрега између атрибута концепта и/или логичких интеракција између узрока. Према овој теорији концепт је ментална репрезентација особина и каузалних релација између особина инстанци релевантне категорије. Степен примене концепта на неки објекат зависи од тога колико објекат задовољава каузалне законе релевантне категорије. Каузално функционисање формализовано је на основу заједничке вероватноће атрибута који индукује пробабилистички каузални модел концепта. Каузални закони категорије представљени су структурним једначинама каузалног модела. Структурне једначине реализоване су конзистентном фази логиком што омогућава експлицитно третирање логичких интеракција између узрока. Каузални модел је у општем случају нерекурзиван што омогућава третирање каузалних повратних спрега између атрибута концепта.

3.2. Композиционалност

Теорија концепата треба да објасни композиционалност, како се концепти компонују у сложене концепте и мисли (*Fodor and Lepore 1996, 2002, Fodor 1998*). Композиционалност подразумева да се сложени концепти/ мисли нормално – са коначним бројем изузетака формирају на основу компоненти и правила композиције. Композиционалност концепата објашњава две кључне каракатеристике ума, продуктивност и систематичност (*Fodor and Lepore 1996, 2002, Fodor 1975, 1981, 1994, 1998, Fodor and Pylyshyn 1988*). Продуктивност је способност коначног ума који располаже коначним бројем примитивних концепата и коначним бројем правила композиције да формира бесконачно много различитих сложених концепата/ мисли. Систематичност је способност ума који располаже неким сложеним концептом да формира други, систематично повезани концепт. Када ум располаже неким сложеним концептом располаже његовим компонентама и правилом композиције. Систематични концепти формирају се на основу истог правила и компоненти које се пермутују. На пример, ум који располаже сложеним концептом $A \leq B$ располаже компонентама A и B и правилом композиције $\leq$ те располаже и систематичним концептом $B \leq A$.

Кључно питање у теорији концепата је да ли је степен примене концепта бинаран или градиран, да ли је исправна класична или теорија градације. Питање се разматра са становишта композиционалности Булових концепата, сложених концепата формираних применом Булових операција над компонентама.

У класичном оквиру Булови концепти су композиционални и функционишу у складу са принципом истинитосне функционалности. Степен примене Буловог концепта одређен је применом Булових операцијама над степенима примене компоненти. На пример, степен примене Буловог концепта „Птица певачица“ на животињу врсте Luscinia megarhynchos (славуј) зависи само од степена примене компоненти „Птица“ и „Певачица“ на ту животињу и од правила композиције - концептуалне коњукције. Славуј потпада под Булов концепт јер потпада под концепте „Птица“ и „Певачица“. Постоји коначан број Булових концепата који нису композиционални као нпр. „Слепи путник“ или „Мачка у џаку“ који не функционишу као категорије слепих људи који путују или мачака које се налазе у џаку.

Теоретичари класичног погледа сматрају да теорија градације не може да објасни композиционалност Булових концепата те закључују да је погрешна тј. да степен примене концепта није градиран него бинаран (*Fodor and Lepore 1996, 2002, Fodor 1994, 1998, Osherson and Smith 1981, 1982, 1997, Connolly et al 2007, Gleitman et al 2012*). Критика се демонстрира у прототип оквиру у коме теоретичари класичног погледа представљају три проблема:

- „Проблем закона мишљења“: коришћењем конвенционалне фази логике засноване на принципу истинитосне функционалности показано је да закони искључења трећег и неконтрадикције нису загарантовани у прототип оквиру на основу чега је закључено да прототипови нису композиционални те концепти нису прототипови и степен примене концепта није градиран (*Osherson and Smith 1981, 1982*).
- „The petfish problem“: неодређено много Булових прототипова нису композиционални на основу чега је закључено да прототипови нису композиционални те концепти нису прототипови и степен примене концепта није градиран (*Fodor and Lepore 1996, 2002, Fodor 1998, Connolly et al 2007, Gleitman et al 2012, Osherson and Smith 1981, 1982, 1997*).
- „The uncat problem“: неодређено много Булових концепата нема прототип иако га све компоненте имају на основу чега је закључено да прототипови нису композиционални те концепти нису прототипови, да су Булови концепти репрезентације класичних логичких форми и да степен примене концепта није градиран (*Fodor and Lepore 1996, 2002, Fodor 1981, 1998*).

У овом поглављу дисертације биће математички објашњени Булови концепти у складу са прототип, егземплар и теоријом граница категорија и биће одговорено на претходне проблеме. Формализам који ће бити предложен претпоставља векторску природу концепата.

3.2.1. Проблем закона мишљења

Булови концепти у прототип оквиру формално су анализирани коришћењем конвенционалне фази логике (*Osherson and Smith 1981, 1982, 1997*). Степен примене Буловог прототипа на неки објекат израчунаван је на основу принципа истинитосне функционалности применом операција фази логике над степенима примене компоненти на тај објекат. Степени примене компоненти израчунавани су на основу измерене сличности објекта и компоненти у геометријском оквиру, поступком представљеним у одељку 3.1.1. Утврђено је да закони искључења трећег и неконтрадикције дати у (2.5) нису загарантовани у прототип оквиру. Ови закони посматрају се као фундаментални закони рационалног мишљења још од античких времена (*Boole 1854*). Будући да закони мишљења нису загарантовани закључено је да прототипови нису композиционални те концепти нису прототипови и степен примене концепта није градиран.

У одговору на овај проблем прототип теоретичари истичу да закони искључења трећег и неконтрадикције ни не треба да важе у случају градације, да то пружа нетривијалне информације о објектима те да је законе мишљења могуће задовољити избором одговарајуће Т-норме и Т-конорме (*Zadeh 1982, Fuhrmann 1988a, 1988b, Lakoff 1987 стр. 141, Bělohlávek et al. 2002, 2009, Bělohlávek and Klir 2011*).

Избор одговарајуће Т-норме и Т-конорме решава проблем закона мишљења, али по цену губитка валидности других закона Булове алгебре. Будући да није могуће сачувати Булов оквир у фази логици базираној на принципу истинитосне функционалности (*Radojević 2000, 2008a, 2008c, Radojević 2014*) намеће се закључак да конвенционална фази логика није адекватан оквир за концепте. Будући да је проблем Булових закона у фази случају решен усвајањем принципа структурне уместо истинитосне функционалности (*Radojević 2000, 2008a, 2008c, Radojević 2014*), закључак да прототипови нису композиционални те концепти нису прототипови и степен примене концепта није градиран јер закони мишљења нису загарантовани у прототип оквиру (*Osherson and Smith 1981, 1982, 1997*) ставља се ван снаге.

3.2.2. “The pet fish problem”

Проблем је постављен на следећи начин:

- Концепти нису композиционални те концепти нису прототипови и степен примене концепта није градиран јер неодређено много Буловых прототипова нису композиционални (*Fodor and Lepore 1996, 2002, Fodor 1998*).

Проблем се демонстрира на примеру концептуалне коњукције „Риба која је љубимац“ (енг. pet fish). Компонента овог Буловог концепта - прототип „Риба“ репрезентација је статистички значајних особина риба као нпр. „Сива“, „Средње величине“, „Живи у мору/ реци/ језеру“, „Користи се за исхрану“ итд. Друга компонента - прототип „Љубимац“ репрезентација је статистички значајних особина љубимаца као нпр. „Крзнен“, „Има осећања/ емоције“, „Воли да се игра/ мази“, итд. Статистички значајне особине објеката - животиња која потпадају под Булов прототип „Риба која је љубимац“ су нпр. „Мала“, „Јарких боја“, „Живи у акваријуму“, итд. С обзиром да прототип „Риба која је љубимац“ садржи атрибуте који нису присутни код компоненти јасно је да није формиран композиционално. Исто важи у случају неодређено много Булових прототипова, а будући да је претпостављено да продуктивност и систематичност захтевају да концепти буду са коначним бројем изузетака композиционални, закључено је да прототипови нису композиционални те концепти нису прототипови и степен примене концепта није градиран.

Прототипови нису композиционални јер зависе од контекста композиције тј. сложеног концепта (*Connolly et al 2007, Gleitman et al 2012*). То се јасно може видети на примеру Буловог концепта „Црвена коса“. Статистички поуздана црвена боја у контексту концептуалне коњукције није статистички поуздана у неутралном контексту што је приказано на Слици 8. Функционисање концепата у класичном случају не зависи од контекста композиције, све нијасне црвене боје су еквивалентне у неутралном или контексту произвољног Буловог концепта формираног на основу компоненте – примитивног концепта „Црвена“.

Слика 8. Статистички поуздана црвена боја у контексту Буловог концепта „Црвена коса“ и у неутралном контексту

За разлику од теоретичара класичног погледа, прототип теоретичари сматрају да концепти не морају бити композиционални те да проблем не постоји (*Johnson and Keil 2000, Hampton 2011, Hampton and Jönsson 2012, Rosch 2011, Rips 1995, Jönsson and Hampton 2008, Prinz 2004, Robbins 2002*). Композиционалност се посматра као резервна стратегија која се користи када мислилац поред информације које чувају компоненте не располаже другим релевантним информацијама. Када мислилац располаже додатним информацијама нема разлога да их не користи. Према прототип теоретичарима Булови концепти „Риба која је љубимац“ и „Црвена коса“ нису композиционални, већ формирани на основу информација о инстанцама релевантних категорија којима мислилац располаже. Продуктивност и систематичност концепата објашњавају се самом способношћу мислиоца да концепте компонује што он не мора нужно чинити.

Теоретичари класичног погледа сматрају да концепти, чак и ако нису композиционални, не могу бити прототипови јер компоновање прототипова није рационално, будући да особине које су статистички значајне за инстанце које потпадају под компоненте не морају бити значајне за инстанце које потпадају под сложени концепт (*Fodor and Lepore 1996, 2002, Fodor 1998, Connolly et al 2007, Gleitman et al 2012*). Прототип теоретичари одбацују такво мишљење (*Schurz 2012, Prinz 2004, Jönsson and Hampton 2008, Hampton and Jönsson 2012*).

“The pet fish problem” демонстриран је коришћењем фази логике (*Osherson and Smith 1981, 1982, 1997*). Булов прототип „Риба која је љубимац“ може се дефинисати на следећи начин:

$$Риба\_која\_је\_љубимац(x) = T\left(Риба(x), Љубимац(x)\right) \tag{3.34}$$

где су $Риба\_која\_је\_љубимац(x), Риба(x), Љубимац(x) \in [0,1]$ степени примене Буловог прототипа и компоненти, $T(Риба(x), Љубимац(x)) \in [0,1]$ је Т-норма.

Степени примене компоненти израчунавају се на основу измерене сличности објекта и компоненти у геометријском оквиру поступком представљеним у одељку 3.1.1.

Нека је објекат x риба врсте Betta splendens (сијамски борац) која је типична акваријумска риба. Објекат x не задовољава наведене статистички значајне особине риба и љубимаца и представља лошу инстанцу ових категорија. Објекат x задовољава наведене статистички значајне особине риба које су љубимци и представља репрезентативну инстанцу ове категорије. Како би се формализовала ова интуиција потребно је да важи:

$$Риба\_која\_је\_љубимац(x) > Риба(x), Љубимац(x) \tag{3.35}$$

што не одговара дефиницији коњукције у фази логици где важи:

$$T(Риба(x), Љубимац(x)) \leq Риба(x), Љубимац(x) \tag{3.36}$$

Прототип теоретичари предлажу два модела концептуалне коњукције где се приликом израчунавања степена примене Буловог концепта у обзир узима и информација о инстанцама. Концептуална коњукција „Риба која је љубимац“ се према моделу нормализације (*Zadeh 1982*) и рекалибрације (*Kamp and Partee 1995*) дефинише према (3.37) и (3.38), респективно.

$$\begin{aligned} Риба\_која\_је\_Љубимац(x) &= \frac{T(Риба(x), Љубимац(x))}{MAX} \\ MAX &= \sup\{T(Риба(y), Љубимац(y)) \mid y \in D\} \end{aligned} \tag{3.37}$$

$$\begin{aligned} Риба\_која\_је\_Љубимац(x) &= \frac{Риба(x) - MIN}{MAX - MIN} \\ MAX &= \sup\{Риба(y) \mid Љубимац(y) > 0, y \in D\} \\ MIN &= \inf\{Риба(y) \mid Љубимац(y) > 0, y \in D\} \end{aligned} \tag{3.38}$$

где су $Риба\_која\_је\_љубимац(x), Риба(x), Љубимац(x) \in [0,1]$ степени примене прототипова, $T(Риба(x), Љубимац(x)) \in [0,1]$ је Т-норма, D је домен.

3.2.3. “The uncat problem”

Проблем је постављен на следећи начин:

- Прототипови нису композиционални те концепти нису прототипови и степен примене концепта није градиран јер неодређено много Булових концепата нема прототип иако га све компоненте имају (*Fodor and Lepore 1996, 2002, Fodor 1981, 1998*).

Проблем се демонстрира на примеру концептуалне негације „Није мачка“. Једина компонента овог Буловог концепта је прототип „Мачка“ који је ментална репрезентација статистички значајних особина мачака као нпр. „Има крзно“, „Воли млеко“, „Лови мишеве“, „Воли да се игра/ мази“, итд. Потребно је објаснити Булов прототип „Није мачка“. Прототип „Није мачка“ је ментална репрезентација статистички значајних особина објеката који не потпадају под концепт „Мачка“. Примери таквих објеката су пас, столица, планета Марс, црвена боја, број 2016, Питагорина теорема, итд. Теоретичарима класичног погледа није јасно које особине су статистички значајне за објекте који нису мачке те закључују да их нема и да Булов концепт „Није мачка“ није прототип већ репрезентација класичне логичке форме. Исто важи у случају неодређено много Булових концепата, а будући да је претпостављено да продуктивност и систематичност захтевају да концепти буду са коначним бројем изузетака композиционални теоретичари класичног погледа закључују да прототипови нису композиционални те да концепти нису прототипови и да степен примене концепта није градиран.

У теорији концепата није предложено решење за овај проблем. Потребно је објаснити како Булови прототипови функционишу као категорије, које атрибуте садрже и колико су они значајни, што ће бити учињено у одељку који следи.

3.2.4. Булови концепти

Булови концепти су сложени концепти формирани применом Булових операција над компонентама. У теорији су Булови концепти у случају градације формално анализирани у прототип оквиру коришћењем конвенционалне фази логике (*Osherson and Smith 1981, 1982, 1997, Zadeh 1982, Fuhrmann 1988a, 1988b, Bělohlávek et al. 2002, 2009, Bělohlávek and Klir 2011*). Степен примене Буловог прототипа на неки објекат израчунаван је према принципу истинитосне функционалности, применом операција фази логике над степененима примене компоненти на тај објекат. Степени примене компоненти израчунавани су на основу измерене сличности објекта и компоненти у геометријском оквиру, поступком представљеним у одељку 3.1.1. У одељку 3.2.1. објашњено је да конвенционални фази приступ сложеним концептима није адекватан јер није Буловски конзистентан. Даље, приступ не објашњава које атрибуте Булов прототип садржи и колико су они значајни, што је захтев когнитивне теорије представљен у одељку 3.2.3.

У овом одељку Булови концепти биће формализовани и објашњени у складу са прототип, егземплар и теоријом граница категорија, под претпоставком да концепти имају векторску природу. Одељак се ослања на резултате (*Radojević 2000, 2008a, 2008b, 2008c, 2013a, 2013b, 2014*) представљене у одељку 2.2. У одељку 3.1. степен примене концепта у случају градације формализован је оператором логичке агрегације који има векторску природу. Сходно томе, претпостављена векторска природа концепта биће представљена помоћу два вектора, структуре оператора логичке агрегације и вектора атомских полинома Булове алгебре атрибута. За први вектор у наставку рада биће коришћен назив структура концепта. Степен примене концепта на неки објекат скаларни је производ структуре концепта и вектора атомских полинома. Структура Буловог концепта добија се применом Булових операција, реализованих у конзистентном фази оквиру, над структурама компоненти. Структура Буловог прототипа индиректно информише које атрибуте Булов прототип садржи и колико су они значајни што решава “The uncat problem” из претходног одељка.

Нека су $C_1,...,C_N$ концепти у прототип, егземплар или оквиру граница категорија сачињени од атрибута тј. примитивних концепата $A_1,...,A_M$ на начин објашњен у одељцима 3.1.1., 3.1.2. и 3.1.3. У наставку следи математичко објашњење Булових концепата у три наведена оквира.

Прототип теорија. Степен примене концепта у стандардном случају дефинисан према (3.5) може се представити као скаларни производ структуре концепта и вектора атомских полинома на следећи начин:

$$\begin{aligned}
C_i(x) &= \sum_{j=1}^{M} w_j^i \left(A_j(x) \Leftrightarrow A_j(p_i)\right)^{\min} = \\
&= \sum_{j=1}^{M} w_j^i \left(1 - A_j(x) - A_j(p_i) + \min\left(A_j(x), A_j(p_i)\right)\right) = \\
&= \sum_{j=1}^{M} w_j^i \vec{\sigma}_{\left(A_j(x) \Leftrightarrow A_j(p_i)\right)^{\min}} \vec{\alpha}_i = \\
&= \vec{\sigma}_i \vec{\alpha}_i
\end{aligned} \tag{3.39}$$

где је $C_i(x) \in [0,1]$ степен примене концепта C_i на објекат $x = \left(A_1(x),...,A_M(x)\right)$, $\sum_{j=1}^{M} w_j^i \left(A_j(x) \Leftrightarrow A_j(p_i)\right)^{\min} \in [0,1]$ је оператор логичке агрегације који мери сличност објекта и прототипа $p_i = \left(A_1(p_i),...,A_M(p_i)\right)$, $\left(A_j(x) \Leftrightarrow A_j(p_i)\right)^{\min} \in [0,1]$ је генерализовани Булов полином који мери сличност објекта и прототипа по атрибуту $A_j(\cdot)$, $\vec{\sigma}_{\left(A_j(x) \Leftrightarrow A_j(p_i)\right)^{\min}} \in \{0,1\}^{2^{|\Omega_i|}}$ је структура елемента $\left(A_j(x) \Leftrightarrow A_j(p_i)\right)^{\min} \in BA(\Omega_i)$, $\vec{\alpha}_i \in [0,1]^{2^{|\Omega_i|}}$ је вектор атомских полинома Булове алгебре $BA(\Omega_i)$, $\vec{\sigma}_i = \sum_{j=1}^{M} w_j^i \vec{\sigma}_{\left(A_j(x) \Leftrightarrow A_j(p_i)\right)^{\min}}$, $\vec{\sigma}_i \in [0,1]^{2^{|\Omega_i|}}$ је структура концепта C_i представљена структуром оператора логичке агрегације, $\Omega_i = \left\{\left(A_1(x) \Leftrightarrow A_1(p_i)\right)^{\min},...,\left(A_M(x) \Leftrightarrow A_M(p_i)\right)^{\min}\right\}$, $A_1(x),...,A_M(x), A_1(p_i),...,A_M(p_i) \in [0,1]$ су степени примене атрибута на објекат и прототип, $w_1^i,...,w_M^i \in [0,1]$ су тежине које дефинишу значај атрибута прототипа, $\sum_{j=1}^{M} w_j^i = 1$, $i = 1,...,N$, M је број атрибута, N је број концепата.

На сличан начин могуће је објаснити векторску природу концепта у сложеном случају дефинисаном према (3.6).

Степен примене Буловог концепта на објекат x дефинише се на следећи начин:

$$B(x) = f^{\otimes}(\vec{\sigma}_1,...,\vec{\sigma}_N)\vec{\alpha} \tag{3.40}$$

где је $B(x) \in [0,1]$ степен примене Буловог концепта, $f^{\otimes}(\vec{\sigma}_1,...,\vec{\sigma}_N) \in [0,1]^{2^{|\Omega|}}$ је структура Буловог концепта представљена генерализованим Буловим полиномом елемента $f(\vec{\sigma}_1,...,\vec{\sigma}_N) \in BA(\Upsilon)$, $\vec{\sigma}_i \in [0,1]^{2^{|\Omega|}}$ је структура концепта C_i у контексту скупа Ω, $\vec{\alpha} \in [0,1]^{2^{|\Omega|}}$ је вектор атомских полинома $BA(\Omega)$, $\Omega = \left\{ \left(A_1(x) \Leftrightarrow A_1(p_1)\right)^{\min},...,\left(A_M(x) \Leftrightarrow A_M(p_1)\right)^{\min},...,\left(A_1(x) \Leftrightarrow A_1(p_N)\right)^{\min},...,\left(A_M(x) \Leftrightarrow A_M(p_N)\right)^{\min} \right\}$, $A_1(x),...,A_M(x),A_1(p_1),...,A_M(p_1),...,A_1(p_N),...,A_M(p_N) \in [0,1]$ су степени примене атрибута на објекат и прототипове $p_1,...,p_N$, N је број концепата, M је број атрибута, $\Upsilon = \{\vec{\sigma}_1,...,\vec{\sigma}_N\}$ је скуп структура концепата $C_1,...,C_N$.

Теорија егземплара. Степен примене концепта дефинисан према (3.9) може се представити као скаларни производ структуре концепта и вектора атомских полинома на следећи начин:

$$\begin{aligned}
C_i(x) &= \sum_{j=1}^{m_i} \omega_j^i \sum_{k=1}^{M} w_k^i \left(A_k(x) \Leftrightarrow A_k\left(e_i^j\right)\right)^{\min} = \\
&= \sum_{j=1}^{m_i} \omega_j^i \sum_{k=1}^{M} w_k^i \left(1 - A_k(x) - A_k\left(e_i^j\right) + 2\min\left(A_k(x), A_k\left(e_i^j\right)\right)\right) = \\
&= \sum_{j=1}^{m_i} \omega_j^i \sum_{k=1}^{M} w_k^i \,\vec{\sigma}_{\left(A_k(x) \Leftrightarrow A_k\left(e_i^j\right)\right)^{\min}} \vec{\alpha}_i = \\
&= \vec{\sigma}_i \vec{\alpha}_i \\
C_i(x) &= \max_{j=1,...,m_i} \left(\sum_{k=1}^{M} w_k^i \left(A_k(x) \Leftrightarrow A_k\left(e_i^j\right)\right)^{\min} \right) = \\
&= \max_{j=1,...,m_i} \left(\sum_{k=1}^{M} w_k^i \left(1 - A_k(x) - A_k\left(e_i^j\right) + 2\min\left(A_k(x), A_k\left(e_i^j\right)\right)\right) \right) = \\
&= \max_{j=1,...,m_i} \left(\sum_{k=1}^{M} w_k^i \,\vec{\sigma}_{\left(A_k(x) \Leftrightarrow A_k\left(e_i^j\right)\right)^{\min}} \vec{\alpha}_i \right) = \\
&= \vec{\sigma}_i \vec{\alpha}_i
\end{aligned} \tag{3.41}$$

где је $C_i(x) \in [0,1]$ степен примене концепта C_i на објекат $x = (A_1(x), ..., A_M(x))$, $e_i^j = (A_1(e_i^j), ..., A_M(e_i^j))$ је j-ти егземплар концепта C_i, $i = 1,...,N, j = 1,...,m_i$, $\sum_{j=1}^{m_i} \omega_j^i \sum_{k=1}^{M} w_k^i \left(A_k(x) \Leftrightarrow A_k(e_i^j)\right)^{\min} \in [0,1]$ или $\max_{j=1,...,m_i}\left(\sum_{k=1}^{M} w_k^i \left(A_k(x) \Leftrightarrow A_k(e_i^j)\right)^{\min}\right) \in [0,1]$ је оператор логичке агрегације који мери сличност између објекта и егземплара који чине концепт C_i, $\left(A_k(x) \Leftrightarrow A_k(e_i^j)\right)^{\min} \in [0,1]$ је генерализовани Булов полином који мери сличност објекта и егземплара e_i^j по атрибуту $A_j(\cdot)$, $\vec{\sigma}_{\left(A_k(x) \Leftrightarrow A_k(e_i^j)\right)^{\min}} \in \{0,1\}^{2^{|\Omega_i|}}$ је структура елемента $\left(A_k(x) \Leftrightarrow A_k(e_i^j)\right)^{\min} \in BA(\Omega_i)$, $\vec{\alpha}_i \in [0,1]^{2^{|\Omega_i|}}$ је вектор атомских полинома $BA(\Omega_i)$, $\vec{\sigma}_i = \sum_{j=1}^{m_i} \omega_j^i \sum_{k=1}^{M} w_k^i \, \vec{\sigma}_{\left(A_k(x) \Leftrightarrow A_k(e_i^j)\right)^{\min}}$ или $\vec{\sigma}_i = \max_{j=1,...,m_i}\left(\sum_{k=1}^{M} w_k^i \, \vec{\sigma}_{\left(A_k(x) \Leftrightarrow A_k(e_i^j)\right)^{\min}}\right)$, $\vec{\sigma}_i \in [0,1]^{2^{|\Omega_i|}}$ је структура концепта C_i представљена структуром оператора логичке агрегације, $A_1(x), ..., A_M(x), A_1(e_i^1), ..., A_M(e_i^1), ..., A_1(e_i^{m_1}), ..., A_M(e_i^{m_1}) \in [0,1]$ су степени примене атрибута на објекат и егземпларе концепта C_i, $\Omega_i = \left\{\left(A_1(x) \Leftrightarrow A_1(e_i^1)\right)^{\min}, ..., \left(A_M(x) \Leftrightarrow A_M(e_i^1)\right)^{\min}, ..., \left(A_1(x) \Leftrightarrow A_1(e_i^{m_i})\right)^{\min}, ..., \left(A_M(x) \Leftrightarrow A_M(e_i^{m_i})\right)^{\min}\right\}$, $w_1^i, ..., w_M^i \in [0,1]$ су тежине атрибута, $\sum_{k=1}^{M} w_k^i = 1$, $\omega_1^i, ..., \omega_{m_i}^i \in [0,1]$ су тежине које дефинишу значај егземплара $e_i^1, ..., e_i^{m_i}$ концепта C_i, $i = 1,...,N$, $\sum_{j=1}^{m_i} \omega_j^i = 1$, m_i је број егземплара који чине концепт C_i, M је број атрибута, N је број концепата.

Степен примене Буловог концепта дефинише се на следећи начин:

$$B(x) = f^{\otimes}(\vec{\sigma}_1, ..., \vec{\sigma}_N)\vec{\alpha} \tag{3.42}$$

где је $B(x) \in [0,1]$ степен примене Буловог концепта на објекат x, $f^{\otimes}(\vec{\sigma}_1, ..., \vec{\sigma}_N) \in [0,1]^{2^{|\Omega|}}$ је структура Буловог концепта представљена генерализованим Буловим полиномом елемента $f(\vec{\sigma}_1, ..., \vec{\sigma}_N) \in BA(\Upsilon)$, $\vec{\sigma}_i \in [0,1]^{2^{|\Omega|}}$ је структура концепта C_i у контексту скупа Ω, $i = 1,...,N$, $\vec{\alpha} \in [0,1]^{2^{|\Omega|}}$ је вектор атомских полинома Булове алгебре $BA(\Omega)$,

$$\Omega=\left\{\left(A_1(x)\Leftrightarrow A_1\left(e_1^1\right)\right)^{\min},...,\left(A_M(x)\Leftrightarrow A_M\left(e_1^1\right)\right)^{\min},...,\left(A_1(x)\Leftrightarrow A_1\left(e_1^{m_1}\right)\right)^{\min},...,\left(A_M(x)\Leftrightarrow A_M\left(e_1^{m_1}\right)\right)^{\min},\right.$$
$$\left.,...,\left(A_1(x)\Leftrightarrow A_1\left(e_N^1\right)\right)^{\min},...,\left(A_M(x)\Leftrightarrow A_M\left(e_N^1\right)\right)^{\min},...,\left(A_1(x)\Leftrightarrow A_1\left(e_N^{m_N}\right)\right)^{\min},...,\left(A_M(x)\Leftrightarrow A_M\left(e_N^{m_N}\right)\right)^{\min}\right\},$$

$A_1(x),...,A_M(x),A_1\left(e_1^1\right),...,A_M\left(e_1^1\right),...,A_1\left(e_1^{m_1}\right),...,A_M\left(e_1^{m_1}\right),...,A_1\left(e_N^1\right),...,A_M\left(e_N^1\right),...,A_1\left(e_N^{m_N}\right),...,A_M\left(e_N^{m_N}\right)\in[0,1]$ су степени примене атрибута на објекат и егземпларе концепата $C_1,...,C_N$, $\Upsilon=\left\{\vec{\sigma}_1,...,\vec{\sigma}_N\right\}$ је скуп структура концепата $C_1,...,C_N$.

Границе категорија – биполарна теорија. Степен примене концепта дефинисан према (3.13) може се представити као скаларни производ структуре концепта и вектора атомских полинома на следећи начин:

$$\begin{aligned}C_i(x)&=2Agg_i\left(\frac{A_1(x)+1}{2},...,\frac{A_M(x)+1}{2}\right)-1=\\&=2\vec{\sigma}_i\vec{\alpha}-1\end{aligned}\tag{3.43}$$

где је $C_i(x)\in[-1,1]$ степен примене концепта C_i на објекат $x=\left(A_1(x),...,A_M(x)\right)$, $Agg_i\left(\frac{A_1(x)+1}{2},...,\frac{A_M(x)+1}{2}\right)\in[0,1]$ је оператор логичке агрегације, $\vec{\sigma}_i\in[0,1]^{2^{|\Omega|}}$ је структура концепта C_i представљена структуром оператора логичке агрегације, $i=1,...,N$, $\vec{\alpha}\in[0,1]^{2^{|\Omega|}}$ је вектор атомских полинома Булове алгебре $BA(\Omega)$, $\Omega=\left\{\frac{A_1(x)+1}{2},...,\frac{A_M(x)+1}{2}\right\}$, $A_1(x),...,A_M(x)\in[-1,1]$ су биполарни степени примене атрибута на објекат, M је број атрибута, N је број концепата.

Степен примене Буловог концепта на објекат x дефинише се на следећи начин:

$$B(x)=2f^{\otimes}\left(\vec{\sigma}_1,...,\vec{\sigma}_N\right)\vec{\alpha}-1\tag{3.44}$$

где је $B(x)\in[-1,1]$ степен примене Буловог концепта, $f^{\otimes}\left(\vec{\sigma}_1,...,\vec{\sigma}_N\right)\in[0,1]^{2^{|\Omega|}}$ је структура Буловог концепта представљена генерализованим Буловим полиномом елемента $f\left(\vec{\sigma}_1,...,\vec{\sigma}_N\right)\in BA(\Upsilon)$, $\vec{\sigma}_i\in[0,1]^{2^{|\Omega|}}$ је структура концепта C_i, $\vec{\alpha}\in[0,1]^{2^{|\Omega|}}$ је вектор атомских полинома $BA(\Omega)$, $\Upsilon=\{\vec{\sigma}_1,...,\vec{\sigma}_N\}$ је скуп структура концепата $C_1,...,C_N$.

Структура Буловог концепта у општем тј. прототип, егземплар или биполарном оквиру дефинише се на следећи начин:

$$\begin{aligned} & f^{\otimes}\left(\vec{\sigma}_1,...,\vec{\sigma}_N\right)= \\ & =\sum_{\tau_f(S)=1}\bigotimes_{\vec{\sigma}_i\in S}\vec{\sigma}_i\bigotimes_{\vec{\sigma}_j\in\Upsilon\setminus S}\left(1-\vec{\sigma}_j\right)= \\ & =\vec{\tau}\vec{\gamma} \end{aligned} \tag{3.45}$$

где је $f^{\otimes}\left(\vec{\sigma}_1,...,\vec{\sigma}_N\right)\in[0,1]^{2^{|\Omega|}}$ структура Буловог концепта задата генерализованим Буловим полином елемента $f\left(\vec{\sigma}_1,...,\vec{\sigma}_N\right)\in BA(\Upsilon)$, $\vec{\sigma}_i\in[0,1]^{2^{|\Omega|}}$ је структура концепта C_i у контексту скупа Ω, $i=1,...,N$, N је број концепата, $\tau_f(S)\in\{0,1\}$ структурна функција елемента $f(\vec{\sigma}_1,...,\vec{\sigma}_N)\in BA(\Upsilon)$, $S\in P(\Upsilon)$, $\vec{\tau}\in\{0,1\}^{2^{|\Upsilon|}}$ је структура елемента $f\left(\vec{\sigma}_1,...,\vec{\sigma}_N\right)\in BA(\Upsilon)$, $\vec{\gamma}\in[0,1]^{2^{|\Upsilon|}}$ је вектор атомских полинома Булове алгебре $BA(\Upsilon)$, $\Upsilon=\{\vec{\sigma}_1,...,\vec{\sigma}_N\}$ је скуп структура концепата $C_1,...,C_N$, $P(\Upsilon)$ је скуп свих подскупова скупа Υ, $\otimes:[0,1]\times[0,1]\to[0,1]$ је оператор генерализованог производа.

Вектор $\vec{\tau}\in\{0,1\}^{2^{|\Upsilon|}}$ дефинише се на следећи начин:

$$\vec{\tau}=\left[\tau_f(S)\middle|S\in P(\Upsilon)\right] \tag{3.46}$$

Структурна функција дефинише се на следећи начин:

$$\tau_f(S)=\begin{cases}1, & \gamma_S\left(\vec{\sigma}_1,...,\vec{\sigma}_N\right)\subseteq f\left(\vec{\sigma}_1,...,\vec{\sigma}_N\right)\\ 0, & \gamma_S\left(\vec{\sigma}_1,...,\vec{\sigma}_N\right)\not\subset f\left(\vec{\sigma}_1,...,\vec{\sigma}_N\right)\end{cases} \tag{3.47}$$

где је $\gamma_S\left(\vec{\sigma}_1,...,\vec{\sigma}_N\right)\in BA(\Upsilon)$ атомски елемент Булове алгебре $BA(\Upsilon)$, $S\in P(\Upsilon)$.

Атомски елемент $BA(\Upsilon)$ дефинише се на следећи начин:

$$\gamma_S(\vec{\sigma}_1,...,\vec{\sigma}_N) = \bigwedge_{\vec{\sigma}_i \in S} \vec{\sigma}_i \bigwedge_{\vec{\sigma}_j \in \Upsilon \setminus S} \neg \vec{\sigma}_j \tag{3.48}$$

где $S \in \mathrm{P}(\Upsilon)$, $P(\Upsilon)$ је скуп свих подскупова скупа Υ.

Атомски генерализовани Булов полиномом дефинише се на следећи начин:

$$\gamma_S^{\otimes}(\vec{\sigma}_1,...,\vec{\sigma}_N) = \bigotimes_{\vec{\sigma}_i \in S} \vec{\sigma}_i \bigotimes_{\vec{\sigma}_j \in \Upsilon \setminus S} \left(1 - \vec{\sigma}_j\right) \tag{3.49}$$

где $\gamma_S^{\otimes}(\vec{\sigma}_1,...,\vec{\sigma}_N) \in [0,1]^{2^{|\Omega|}}$, $S \in \mathrm{P}(\Upsilon)$, $\vec{\sigma}_1,...,\vec{\sigma}_N \in [0,1]^{2^{|\Omega|}}$, $\otimes : [0,\ 1] \times [0,\ 1] \to [0,\ 1]$ је оператор генерализованог производа.

Вектор атомских полинома Булове алгебре $BA(\Upsilon)$ дефинише се на следећи начин:

$$\vec{\gamma} = \left[\gamma_S^{\otimes}(\vec{\sigma}_1,...,\vec{\sigma}_N) \mid S \in P(\Upsilon)\right]^T \tag{3.50}$$

где $\vec{\gamma} \in [0,1]^{2^{|\Upsilon|}}$, $\gamma_S^{\otimes}(\vec{\sigma}_1,...,\vec{\sigma}_N) \in [0,1]^{2^{|\Omega|}}$, $P(\Upsilon)$ је скуп свих подскупова скупа Υ.

У предложеном оквиру могуће је математички објаснити Булову композицију прототип и егземплар концепта. На пример, нека је концепт C_i представљен прототипом $p_i = \left(A_1(p_i),...,A_M(p_i)\right)$ и нека су $e_j^q = \left(A_1\left(e_i^q\right),...,A_M\left(e_i^q\right)\right)$, $q = 1,...,m_j$ еземплари који чине концепт C_j. Степен примене Буловог концепта дефинише се на следећи начин:

$$B(x) = f^{\otimes}\left(\vec{\sigma}_i, \vec{\sigma}_j\right)\vec{\alpha} \tag{3.51}$$

где је $B(x) \in [0,1]$ степен примене Буловог концепта на објекат $x = \left(A_1(x),...,A_M(x)\right)$ $f^{\otimes}\left(\vec{\sigma}_i, \vec{\sigma}_j\right) \in [0,1]^{2^{|\Omega|}}$ је структура Буловог концепта представљена генерализованим Буловим полиномом елемента $f\left(\vec{\sigma}_i, \vec{\sigma}_j\right) \in BA(\Upsilon)$, $\vec{\sigma}_i \in [0,1]^{2^{|\Omega|}}$ и $\vec{\sigma}_j \in [0,1]^{2^{|\Omega|}}$ су структуре концепата C_i и C_j у контексту скупа Ω, $\Upsilon = \left\{\vec{\sigma}_i, \vec{\sigma}_j\right\}$, $\vec{\alpha}$ је вектор атомских полинома Булове алгебре $BA(\Omega)$, $\Omega=\left\{\left(A_1(x)\Leftrightarrow A_1(p_i)\right)^{\min},...,\left(A_M(x)\Leftrightarrow A_M(p_i)\right)^{\min},...,\left(A_1(x)\Leftrightarrow A_1\left(e_j^1\right)\right)^{\min},...,\left(A_M(x)\Leftrightarrow A_M\left(e_j^1\right)\right)^{\min},\right.$ $\left.,...,\left(A_1(x)\Leftrightarrow A_1\left(e_j^{m_j}\right)\right)^{\min},...,\left(A_M(x)\Leftrightarrow A_M\left(e_j^{m_j}\right)\right)^{\min}\right\}$, $A_1(x),...,A_M(x),A_1(p_i),...,A_M(p_i),...,A_1\left(e_j^1\right),...,A_M\left(e_j^1\right),...,A_1\left(e_j^{m_j}\right),...,A_M\left(e_j^{m_j}\right)\in[0,1]$ су степени примене атрибута на објекат x, прототип p_i и егземпларе који чине концепт C_j.

У предложеном оквиру могуће је математички објаснити тзв. нелогичко мишљење (*Hampton 1987, 2011, Hampton and Jönsson 2012*). У наставку следи математичко објашњење нелогичке композиције у складу са три теорије градације.

Прототип теорија. Степен примене концепта дефинисан је према (3.39) и (3.60). Степен примене сложеног концепта може се дефинисати као скаларни производ структуре концепта и вектора атомских полинома на следећи начин:

$$S(x)=Agg(\vec{\sigma}_1,...,\vec{\sigma}_N)\vec{\alpha} \tag{3.52}$$

где је $S(x)\in[0,1]$ степен примене сложеног концепта на објекат $x=\left(A_1(x),...,A_M(x)\right)$, $Agg(\vec{\sigma}_1,...,\vec{\sigma}_N)\in[0,1]^{2^{|\Omega|}}$ је структура сложеног концепта представљена оператором логичке агрегације, $\vec{\sigma}_i\in[0,1]^{2^{|\Omega|}}$ је структура концепта C_i у контексту скупа Ω, $i=1,...,N$, $\vec{\alpha}\in[0,1]^{2^{|\Omega|}}$ је вектор атомских полинома $BA(\Omega)$, $\Omega=\left\{\left(A_1(x)\Leftrightarrow A_1(p_1)\right)^{\min},...,\left(A_M(x)\Leftrightarrow A_M(p_1)\right)^{\min},...,\left(A_1(x)\Leftrightarrow A_1(p_N)\right)^{\min},...,\left(A_M(x)\Leftrightarrow A_M(p_N)\right)^{\min}\right\}$, $A_1(x),...,A_M(x),A_1(p_1),...,A_M(p_1),...,A_1(p_N),...,A_M(p_N)\in[0,1]$ су степени примене атрибута на објекат и прототипове, N је број концепата, M је број атрибута,

Теорија егземплара. Степен примене концепта дефинисан је према (3.41). Степен примене сложеног концепта може се дефинисати као скаларни производ структуре концепта и вектора атомских полинома на следећи начин:

$$S(x)=Agg(\vec{\sigma}_1,...,\vec{\sigma}_N)\vec{\alpha} \tag{3.53}$$

где је $S(x) \in [0,1]$ степен примене сложеног концепта на објекат $x = (A_1(x),...,A_M(x))$, $Agg(\vec{\sigma}_1,...,\vec{\sigma}_N) \in [0,1]^{2^{|\Omega|}}$ је структура сложеног концепта представљена оператором логичке агрегације, $\vec{\sigma}_i \in [0,1]^{2^{|\Omega|}}$ је структура концепта C_i у контексту скупа Ω, $\vec{\alpha} \in [0,1]^{2^{|\Omega|}}$ је вектор атомских полинома $BA(\Omega)$,

$$\Omega = \Big\{ \left(A_1(x) \Leftrightarrow A_1(e_1^1)\right)^{\min},...,\left(A_M(x) \Leftrightarrow A_M(e_1^1)\right)^{\min},...,\left(A_1(x) \Leftrightarrow A_1(e_1^{m_1})\right)^{\min},...,\left(A_M(x) \Leftrightarrow A_M(e_1^{m_1})\right)^{\min},$$
$$,...,\left(A_1(x) \Leftrightarrow A_1(e_N^1)\right)^{\min},...,\left(A_M(x) \Leftrightarrow A_M(e_N^1)\right)^{\min},...,\left(A_1(x) \Leftrightarrow A_1(e_N^{m_N})\right)^{\min},...,\left(A_M(x) \Leftrightarrow A_M(e_N^{m_N})\right)^{\min} \Big\},$$

$A_1(x),...,A_M(x),A_1(e_1^1),...,A_M(e_1^1),...,A_1(e_1^{m_1}),...,A_M(e_1^{m_1}),...,A_1(e_N^1),...,A_M(e_N^1),...,A_1(e_N^{m_N}),...,A_M(e_N^{m_N}) \in [0,1]$ су степени примене атрибута на објекат и егземпларе концепата $C_1,...,C_N$, m_i је број егземплара који чине концепт C_i, $i = 1,...,N$, N је број концепата, M је број атрибута.

Границе категорија - биполарна теорија. Степен примене концепта дефинисан је према (3.43). Степен примене сложеног концепта може се дефинисати као скаларни производ структуре концепта и вектора атомских полинома на следећи начин

$$S(x) = 2 \cdot Agg(\vec{\sigma}_1,...,\vec{\sigma}_N)\vec{\alpha} - 1 \tag{3.54}$$

где је $S(x) \in [-1,1]$ степен примене сложеног концепта на објекат $x = (A_1(x),...,A_M(x))$, $Agg(\vec{\sigma}_1,...,\vec{\sigma}_N) \in [0,1]^{2^{|\Omega|}}$ је структура сложеног концепта представљена оператором логичке агрегације, $\vec{\sigma}_i \in [0,1]^{2^{|\Omega|}}$ је структура концепта C_i, $i = 1,...,N$, $\vec{\alpha} \in [0,1]^{2^{|\Omega|}}$ је вектор атомских полинома Булове алгебре $BA(\Omega)$, $\Omega = \left\{ \frac{A_1(x)+1}{2},...,\frac{A_M(x)+1}{2} \right\}$, $A_1(x),...,A_M(x) \in [-1,1]$ су биполарни степени примене атрибута на објекат, N је број концепата, M је број атрибута.

Структура сложеног концепта се у општем тј. прототип, егземплар и биполарном случају нелогичког мишљења дефинише на следећи начин:

$$
\begin{aligned}
&Agg(\vec{\sigma}_1,...,\vec{\sigma}_N)=\sum_{j=1}^{m}\omega_j f_j^{\otimes}(\vec{\sigma}_1,...,\vec{\sigma}_N)=\\
&=\sum_{j=1}^{m}\omega_j \sum_{\tau_{f_j}(S)=1} \bigotimes_{\vec{\sigma}_i\in S}\vec{\sigma}_p \bigotimes_{\vec{\sigma}_j\in\Upsilon\setminus S}(1-\vec{\sigma}_q)=\\
&=\sum_{j=1}^{m}\omega_j \vec{\tau}_{f_j}\vec{\gamma}=\\
&=\vec{\tau}\vec{\gamma}
\end{aligned}
\tag{3.55}
$$

где је $Agg(\vec{\sigma}_1,...,\vec{\sigma}_N)\in[0,1]^{2^{|\Omega|}}$ је структура сложеног концепта представљена оператором логичке агрегације, $\vec{\sigma}_i\in[0,1]^{2^{|\Omega|}}$ је структура концепта C_i у контексту скупа Ω, $f_j^{\otimes}(\vec{\sigma}_1,...,\vec{\sigma}_N)\in[0,1]^{2^{|\Omega|}}$ је генерализовани Булов полином елемента $f_j(\vec{\sigma}_1,...,\vec{\sigma}_N)\in BA(\Upsilon)$, $\tau_{f_j}(S)\in\{0,1\}$ структурна функција $f_j(\vec{\sigma}_1,...,\vec{\sigma}_N)\in BA(\Upsilon)$, $S\in P(\Upsilon)$, $\vec{\tau}_{f_j}\in\{0,1\}^{2^{|\Upsilon|}}$ је структура елемента $f_j(\vec{\sigma}_1,...,\vec{\sigma}_N)\in BA(\Upsilon)$, $\vec{\gamma}\in[0,1]^{2^{|\Upsilon|}}$ је вектор атомских полинома $BA(\Upsilon)$, $\vec{\tau}=\sum_{j=1}^{m}\omega_j\vec{\tau}_{f_j}$, $\vec{\tau}\in[0,1]^{2^{|\Upsilon|}}$ је структура оператора логичке агрегације, $\Upsilon=\{\vec{\sigma}_1,...,\vec{\sigma}_N\}$ је скуп структура концепата $C_1,...,C_N$, $P(\Upsilon)$ је скуп свих подскупова скупа Υ, $\omega_1,...,\omega_m\in[0,1]$, $\sum_{j=1}^{m}\omega_j=1$, $\otimes:[0,\,1]\times[0,\,1]\rightarrow[0,\,1]$ је оператор генерализованог производа.

3.2.4.1. Моделовање примера из литературе

У овом одељку биће моделовани Булови концепти: „Није мачка“, „Столица или лептир“ и „Ако је столица онда је виндзор“ (енг. “If it`s a chair, then it`s a Windsor”) који се у теорији стандардно наводе као примери сложених концепата који не могу бити објашњени у прототип оквиру (*Fodor and Lepore 1996, 2002, Fodor 1998, Kamp and Partee 1995*). Поред наведених биће моделовани и Булови прототипови „Мачка која није мачка“ (контрадикција), „Мачка или није мачка“ (искључење трећег), „Столица која није виндзор“, „Столица као виндзор“ (еквиваленција) и „Столица која није као виндзор“ (различитост).

Претпоставимо да мислилац располаже прототиповима „Мачка“, „Столица“, „Лептир“ и „Виндзор“ који су сачињени од примитивних концепата – атрибута $A_1,\ldots,A_M$ као што је објашњено у одељку 3.1.1.

Степени примене Булових прототипова „Није мачка“, „Мачка која није мачка“ и „Мачка или није мачка“ дефинишу се на следећи начин:

$$\begin{aligned}
&Није_Мачка(x)= \\
&=\left(\neg\vec{\sigma}_{Мачка}\right)^{\otimes}\vec{\alpha}=\left(\vec{1}-\vec{\sigma}_{Мачка}\right)\vec{\alpha}= \\
&=\left(\vec{1}-\sum_{j=1}^{M}w_j\vec{\sigma}_{\left(A_j(x)\Leftrightarrow A_j(p)\right)^{\min}}\right)\vec{\alpha}= \\
&=\left(\sum_{j=1}^{M}w_j\left(\vec{1}-\vec{\sigma}_{\left(A_j(x)\Leftrightarrow A_j(p)\right)^{\min}}\right)\right)\vec{\alpha}= \\
&=\vec{\sigma}_{Није_Мачка}\vec{\alpha}
\end{aligned} \tag{3.56}$$

односно:

$$\begin{aligned}
&Мачка_која_није_мачка(x)= \\
&=\left(\vec{\sigma}_{Мачка}\wedge\neg\vec{\sigma}_{Мачка}\right)^{\otimes}\vec{\alpha}= \\
&=\left(\vec{\sigma}_{Мачка}\otimes\left(1-\vec{\sigma}_{Мачка}\right)\right)\vec{\alpha}= \\
&=\left(\vec{\sigma}_{Мачка}-\vec{\sigma}_{Мачка}\otimes\vec{\sigma}_{Мачка}\right)\vec{\alpha}= \\
&=\vec{0}\vec{\alpha}=\vec{\sigma}_{Мачка_која_није_мачка(x)}\vec{\alpha}=0
\end{aligned} \tag{3.57}$$

односно:

$$\begin{aligned}
&Мачка_или_није_мачка(x)= \\
&=\left(\vec{\sigma}_{Мачка}\vee\neg\vec{\sigma}_{Мачка}\right)^{\otimes}\vec{\alpha}= \\
&=\left(\vec{\sigma}_{Мачка}+\left(\vec{1}-\vec{\sigma}_{Мачка}\right)-\vec{\sigma}_{Мачка}\otimes\left(\vec{1}-\vec{\sigma}_{Мачка}\right)\right)\vec{\alpha}= \\
&=\vec{1}\vec{\alpha}=\vec{\sigma}_{Мачка_или_није_мачка}\vec{\alpha}=1
\end{aligned} \tag{3.58}$$

где су $Није\_мачка(x)\in[0,1]$, $Мачка\_која\_није\_мачка(x)=0$ и $Мачка\_или\_није\_мачка(x)=1$ степени примене Булових прототипова на објекат $x=\left(A_1(x),\ldots,A_M(x)\right)$, $p=\left(A_1(p),\ldots,A_M(p)\right)$ је прототип „Мачка“, $A_1(x),\ldots,A_M(x),A_1(p),\ldots,A_M(p)\in[0,1]$ су степени примене атрибута на објекат и прототип, $\left(A_j\left(x\right)\Leftrightarrow A_j\left(p\right)\right)^{\min}\in\left[0,1\right]$ је генерализовани Булов полином који мери сличност објекта и прототипа по атрибуту $A_j\left(\cdot\right)$, $\vec{\sigma}_{\left(A_j(x)\Leftrightarrow A_j(p)\right)^{\min}}\in\left\{0,1\right\}^{2^{|\Omega|}}$ је структура елемента $\left(A_j\left(x\right)\Leftrightarrow A_j\left(p\right)\right)^{\min}\in BA(\Omega)$, $\vec{\sigma}_{Мачка}=\sum_{j=1}^{M}w_j\vec{\sigma}_{\left(A_j(x)\Leftrightarrow A_j(p)\right)^{\min}}, \vec{\sigma}_{Мачка}\in\left[0,1\right]^{2^{|\Omega|}}$ је структура прототипа „Мачка“, $\vec{\sigma}_{Није\_Мачка}=\sum_{j=1}^{M}w_j\left(\vec{1}-\vec{\sigma}_{\left(A_j(x)\Leftrightarrow A_j(p)\right)^{\min}}\right)$, $\vec{\sigma}_{Није\_Мачка}\in\left[0,1\right]^{2^{|\Omega|}}$, $\vec{\sigma}_{Мачка\_која\_није\_мачка(x)}=\vec{0}$, $\vec{\sigma}_{Мачка\_или\_није\_мачка}=\vec{1}$ су структуре Булових прототипова, $\vec{1}$ је јединични вектор, $\vec{0}$ је нулти вектор, $\vec{\alpha}\in\left[0,1\right]^{2^{|\Omega|}}$ је вектор атомских полинома $BA(\Omega)$, $\Omega=\left\{\left(A_1\left(x\right)\Leftrightarrow A_1\left(p\right)\right)^{\min},...,\left(A_M\left(x\right)\Leftrightarrow A_M\left(p\right)\right)^{\min}\right\}$, $w_1,...,w_M\in\left[0,1\right]$ су тежине које дефинишу значај атрибута прототипа „Мачка“, $\sum_{k=1}^{M}w_k=1$, M је број атрибута, $\otimes$ је оператор генерализованог производа.

Степен примене Буловог прототипа „Столица или лептир“ дефинише се као:

$$\begin{aligned}
&Столица_или_Лептир\left(x\right)=\\
&=\left(\vec{\sigma}_{Столица}\vee\vec{\sigma}_{Лептир}\right)^{\otimes}\vec{\alpha}=\\
&=\left(\vec{\sigma}_{Столица}+\vec{\sigma}_{Лептир}-\vec{\sigma}_{Столица}\otimes\vec{\sigma}_{Лептир}\right)\vec{\alpha}=\\
&=\left(\sum_{j=1}^{M}w_j^S\vec{\sigma}_{\left(A_j(x)\Leftrightarrow A_j(p_S)\right)^{\min}}+\sum_{j=1}^{M}w_j^L\vec{\sigma}_{\left(A_j(x)\Leftrightarrow A_j(p_L)\right)^{\min}}\right.\\
&\left.-\left(\sum_{j=1}^{M}w_j^S\vec{\sigma}_{\left(A_j(x)\Leftrightarrow A_j(p_S)\right)^{\min}}\right)\otimes\left(\sum_{j=1}^{M}w_j^L\vec{\sigma}_{\left(A_j(x)\Leftrightarrow A_j(p_L)\right)^{\min}}\right)\right)\vec{\alpha}=\\
&=\vec{\sigma}_{Столица_или_Лептир}\vec{\alpha}
\end{aligned}\tag{3.59}$$

где је $Столица\_или\_Лептир(x)\in[0,1]$ степен примене Буловог прототипа на објекат $x=\left(A_1\left(x\right),...,A_M\left(x\right)\right)$, $p_S=\left(A_1\left(p_S\right),...,A_M\left(p_S\right)\right)$ је прототип „Столица“, $p_L=\left(A_1\left(p_L\right),...,A_M\left(p_L\right)\right)$ је прототип „Лептир“, $\left(A_j\left(x\right)\Leftrightarrow A_j\left(p_S\right)\right)^{\min}\in\left[0,1\right]$ је генерализовани Булов полином који мери сличност објекта и прототипа „Столица“ по атрибуту $A_j\left(\cdot\right)$, $\vec{\sigma}_{\left(A_j(x)\Leftrightarrow A_j(p_S)\right)^{\min}}\in\left\{0,1\right\}^{2^{|\Omega|}}$ је структура елемента

$\left(A_j\left(x\right)\Leftrightarrow A_j\left(p_S\right)\right)^{\min}\in BA(\Omega)$, $\left(A_j\left(x\right)\Leftrightarrow A_j\left(p_L\right)\right)^{\min}\in\left[0,1\right]$ је генерализовани Булов полином који мери сличност објекта и прототипа „Лептир" по атрибуту $A_j\left(\cdot\right)$, $\vec{\sigma}_{\left(A_j(x)\Leftrightarrow A_j(p_L)\right)^{\min}}\in\left\{0,1\right\}^{2^{|\Omega|}}$ је структура елемента $\left(A_j\left(x\right)\Leftrightarrow A_j\left(p_L\right)\right)^{\min}\in BA(\Omega)$, $\vec{\sigma}_{Стол}=\sum_{j=1}^{M}w_j^S\vec{\sigma}_{\left(A_j(x)\Leftrightarrow A_j(p_S)\right)^{\min}}, \vec{\sigma}_{Стол}\in\left[0,1\right]^{2^{|\Omega|}}$ је структура прототипа „Столица", $\vec{\sigma}_{Лептир}=\sum_{j=1}^{M}w_j^L\vec{\sigma}_{\left(A_j(x)\Leftrightarrow A_j(p_L)\right)^{\min}}, \vec{\sigma}_{Лептир}\in\left[0,1\right]^{2^{|\Omega|}}$ је структура прототипа „Лептир", $\vec{\sigma}_{Сто\_или\_Леп}=\sum_{j=1}^{M}w_j^S\vec{\sigma}_{\left(A_j(x)\Leftrightarrow A_j(p_S)\right)^{\min}}+\sum_{j=1}^{M}w_j^L\vec{\sigma}_{\left(A_j(x)\Leftrightarrow A_j(p_L)\right)^{\min}}-\left(\sum_{j=1}^{M}w_j^S\vec{\sigma}_{\left(A_j(x)\Leftrightarrow A_j(p_S)\right)^{\min}}\right)\otimes\left(\sum_{j=1}^{M}w_j^L\vec{\sigma}_{\left(A_j(x)\Leftrightarrow A_j(p_L)\right)^{\min}}\right)$, $\vec{\sigma}_{Столица\_или\_лептир}\in\left[0,1\right]^{2^{|\Omega|}}$ је структура Буловог прототипа „Столица или лептир", $\vec{\alpha}\in\left[0,1\right]^{2^{|\Omega|}}$ је вектор атомских полинома Булове алгебре $BA(\Omega)$, $\Omega=\left\{\left(A_1\left(x\right)\Leftrightarrow A_1\left(p_S\right)\right)^{\min},...,\left(A_M\left(x\right)\Leftrightarrow A_M\left(p_S\right)\right)^{\min},...,\left(A_1\left(x\right)\Leftrightarrow A_1\left(p_L\right)\right)^{\min},...,\left(A_M\left(x\right)\Leftrightarrow A_M\left(p_L\right)\right)^{\min}\right\}$, $A_1\left(x\right),...,A_M\left(x\right),A_1\left(p_S\right),...,A_M\left(p_S\right),A_1\left(p_L\right),...,A_M\left(p_L\right)\in\left[0,1\right]$ су степени примене атрибута на објекат и прототипове, $w_1^S,...,w_M^S\in\left[0,1\right]$ су тежине које дефинишу значај атрибута прототипа „Столица", $\sum_{j=1}^{M}w_j^S=1$, $w_1^L,...,w_M^L\in\left[0,1\right]$ су тежине које дефинишу значај атрибута прототипа „Лептир", $\sum_{j=1}^{M}w_j^L=1$, M је број атрибута, $\otimes$ је оператор генерализованог производа.

Степени примене Булових прототипова „Ако је столица онда је виндзор", „Столица која није виндзор", „Столица као виндзор" и „Столица није као виндзор" дефинишу се на следећи начин:

$$\begin{aligned}
&Ако_је_столица_онда_је_виндзор\left(x\right)=\\
&=\left(\vec{\sigma}_{Столица}\rightarrow\vec{\sigma}_{Виндзор}\right)^{\otimes}\vec{\alpha}=\\
&=\left(\neg\vec{\sigma}_{Столица}\vee\vec{\sigma}_{Виндзор}\right)^{\otimes}\vec{\alpha}=\\
&=\left(\vec{1}-\vec{\sigma}_{Столица}+\vec{\sigma}_{Столица}\otimes\vec{\sigma}_{Виндзор}\right)\vec{\alpha}=\\
&=\left(\vec{1}-\sum_{j=1}^{M}w_j^s\vec{\sigma}_{\left(A_j(x)\Leftrightarrow A_j(p_S)\right)^{\min}}+\left(\sum_{j=1}^{M}w_j^s\vec{\sigma}_{\left(A_j(x)\Leftrightarrow A_j(p_S)\right)^{\min}}\right)\otimes\left(\sum_{j=1}^{M}w_j^w\vec{\sigma}_{\left(A_j(x)\Leftrightarrow A_j(p_W)\right)^{\min}}\right)\right)\vec{\alpha}=\\
&=\vec{\sigma}_{Ако_је_столица_онда_је_виндзор}\vec{\alpha}
\end{aligned}\qquad(3.60)$$

односно:

$$
\begin{aligned}
&Столица\_која\_није\_виндзор(x) = \\
&= \left(\vec{\sigma}_{Столица} \wedge \neg \vec{\sigma}_{Виндзор}\right)^{\otimes} \vec{\alpha} = \\
&= \left(\vec{\sigma}_{Столица} \otimes \left(\vec{1} - \vec{\sigma}_{Виндзор}\right)\right)^{\otimes} \vec{\alpha} = \\
&= \left(\vec{\sigma}_{Столица} - \vec{\sigma}_{Столица} \otimes \vec{\sigma}_{Виндзор}\right)\vec{\alpha} = \\
&= \left(\sum_{j=1}^{M} w_j^s \vec{\sigma}_{\left(A_j(x)\Leftrightarrow A_j(p_S)\right)^{\min}} - \left(\sum_{j=1}^{M} w_j^s \vec{\sigma}_{\left(A_j(x)\Leftrightarrow A_j(p_S)\right)^{\min}}\right) \otimes \left(\sum_{j=1}^{M} w_j^w \vec{\sigma}_{\left(A_j(x)\Leftrightarrow A_j(p_W)\right)^{\min}}\right)\right)\vec{\alpha} = \\
&= \vec{\sigma}_{Столица\_која\_није\_виндзор} \vec{\alpha}
\end{aligned} \tag{3.61}
$$

односно:

$$
\begin{aligned}
&Столица\_као\_виндзор(x) = \\
&= \left(\vec{\sigma}_{Столица} \Leftrightarrow \vec{\sigma}_{Виндзор}\right)^{\otimes} \vec{\alpha} = \\
&= \left(\left(\vec{\sigma}_{Столица} \wedge \vec{\sigma}_{Виндзор}\right) \vee \left(\neg \vec{\sigma}_{Столица} \wedge \neg \vec{\sigma}_{Виндзор}\right)\right)^{\otimes} \vec{\alpha} = \\
&= \left(\vec{1} - \vec{\sigma}_{Столица} - \vec{\sigma}_{Виндзор} + 2\vec{\sigma}_{Столица} \otimes \vec{\sigma}_{Виндзор}\right)\vec{\alpha} = \\
&= \left(\vec{1} - \sum_{j=1}^{M} w_j^s \vec{\sigma}_{\left(A_j(x)\Leftrightarrow A_j(p_S)\right)^{\min}} - \sum_{j=1}^{M} w_j^w \vec{\sigma}_{\left(A_j(x)\Leftrightarrow A_j(p_W)\right)^{\min}}\right. \\
&\left. +2\left(\sum_{j=1}^{M} w_j^s \vec{\sigma}_{\left(A_j(x)\Leftrightarrow A_j(p_S)\right)^{\min}}\right) \otimes \left(\sum_{j=1}^{M} w_j^w \vec{\sigma}_{\left(A_j(x)\Leftrightarrow A_j(p_W)\right)^{\min}}\right)\right)\vec{\alpha} = \\
&= \vec{\sigma}_{Столица\_као\_виндзор} \vec{\alpha}
\end{aligned} \tag{3.62}
$$

односно:

$$
\begin{aligned}
&Столица\_није\_као\_виндзор(x) = \\
&= \left(\neg\left(\vec{\sigma}_{Столица} \Leftrightarrow \vec{\sigma}_{Виндзор}\right)\right)^{\otimes} \vec{\alpha} = \\
&= \left(\vec{\sigma}_{Столица} \veebar \vec{\sigma}_{Виндзор}\right)^{\otimes} \vec{\alpha} = \\
&= \left(\left(\vec{\sigma}_{Столица} \wedge \neg \vec{\sigma}_{Виндзор}\right) \vee \left(\neg \vec{\sigma}_{Столица} \wedge \vec{\sigma}_{Виндзор}\right)\right)^{\otimes} \vec{\alpha} = \\
&= \left(\vec{\sigma}_{Столица} + \vec{\sigma}_{Виндзор} - 2\vec{\sigma}_{Столица} \otimes \vec{\sigma}_{Виндзор}\right)\vec{\alpha} = \\
&= \left(\sum_{j=1}^{M} w_j^s \vec{\sigma}_{\left(A_j(x)\Leftrightarrow A_j(p_S)\right)^{\min}} + \sum_{j=1}^{M} w_j^w \vec{\sigma}_{\left(A_j(x)\Leftrightarrow A_j(p_W)\right)^{\min}}\right. \\
&\left. -2\left(\sum_{j=1}^{M} w_j^s \vec{\sigma}_{\left(A_j(x)\Leftrightarrow A_j(p_S)\right)^{\min}}\right) \otimes \left(\sum_{j=1}^{M} w_j^w \vec{\sigma}_{\left(A_j(x)\Leftrightarrow A_j(p_W)\right)^{\min}}\right)\right)\vec{\alpha} = \\
&= \vec{\sigma}_{Столица\_није\_као\_виндзор} \vec{\alpha}
\end{aligned} \tag{3.63}
$$

где су $Столица\_као\_виндзор(x) \in [0,1]$, $Столица\_која\_није\_виндзор(x) \in [0,1]$, $Ако\_je\_столица\_онда\_je\_виндзор(x) \in [0,1]$, $Столица\_није\_као\_виндзор(x) \in [0,1]$ степени примене Булових прототипова на објекат $x = (A_1(x),...,A_M(x))$, $p_S = (A_1(p_S),...,A_M(p_S))$ је прототип „Столица“, $p_W = (A_1(p_W),...,A_M(p_W))$ је прототип „Виндзор“, $(A_j(x) \Leftrightarrow A_j(p_S))^{\min} \in [0,1]$ је генерализовани Булов полином који мери сличност објекта и прототипа „Столица“ по атрибуту $A_j(\cdot)$, $\vec{\sigma}_{(A_j(x)\Leftrightarrow A_j(p_S))^{\min}} \in \{0,1\}^{2^{|\Omega|}}$ је структура елемента $(A_j(x) \Leftrightarrow A_j(p_S))^{\min} \in BA(\Omega)$, $(A_j(x) \Leftrightarrow A_j(p_W))^{\min} \in [0,1]$ је генерализовани Булов полином који мери сличност објекта и прототипа „Виндзор“ по атрибуту $A_j(\cdot)$, $\vec{\sigma}_{(A_j(x)\Leftrightarrow A_j(p_W))^{\min}} \in \{0,1\}^{2^{|\Omega|}}$ је структура елемента Булове алгебре $(A_j(x) \Leftrightarrow A_j(p_W))^{\min} \in BA(\Omega)$, $\vec{\sigma}_{Стол} = \sum_{j=1}^{M} w_j^s \vec{\sigma}_{(A_j(x)\Leftrightarrow A_j(p_S))^{\min}}, \vec{\sigma}_{Стол} \in [0,1]^{2^{|\Omega|}}$ је структура прототипа „Столица“, $\vec{\sigma}_{Винд} = \sum_{j=1}^{M} w_j^w \vec{\sigma}_{(A_j(x)\Leftrightarrow A_j(p_W))^{\min}}, \vec{\sigma}_{Виндзор} \in [0,1]^{2^{|\Omega|}}$ је структура прототипа „Виндзор“,

$$\vec{\sigma}_{Ако\_je\_сто\_онда\_je\_вин} = \vec{1} - \sum_{j=1}^{M} w_j^s \vec{\sigma}_{(A_j(x)\Leftrightarrow A_j(p_S))^{\min}} + \left(\sum_{j=1}^{M} w_j^s \vec{\sigma}_{(A_j(x)\Leftrightarrow A_j(p_S))^{\min}} \right) \otimes \left(\sum_{j=1}^{M} w_j^w \vec{\sigma}_{(A_j(x)\Leftrightarrow A_j(p_W))^{\min}} \right)$$

$$\vec{\sigma}_{Столица\_која\_није\_виндзор} = \sum_{j=1}^{M} w_j^s \vec{\sigma}_{(A_j(x)\Leftrightarrow A_j(p_S))^{\min}} - \left(\sum_{j=1}^{M} w_j^s \vec{\sigma}_{(A_j(x)\Leftrightarrow A_j(p_S))^{\min}} \right) \otimes \left(\sum_{j=1}^{M} w_j^w \vec{\sigma}_{(A_j(x)\Leftrightarrow A_j(p_W))^{\min}} \right)$$

$$\vec{\sigma}_{Сто\_као\_вин} = \vec{1} - \sum_{j=1}^{M} w_j^s \vec{\sigma}_{(A_j(x)\Leftrightarrow A_j(p_S))^{\min}} - \sum_{j=1}^{M} w_j^w \vec{\sigma}_{(A_j(x)\Leftrightarrow A_j(p_W))^{\min}} + 2\left(\sum_{j=1}^{M} w_j^s \vec{\sigma}_{(A_j(x)\Leftrightarrow A_j(p_S))^{\min}} \right) \otimes \left(\sum_{j=1}^{M} w_j^w \vec{\sigma}_{(A_j(x)\Leftrightarrow A_j(p_W))^{\min}} \right)$$

$$\vec{\sigma}_{Сто\_није\_као\_вин} = \sum_{j=1}^{M} w_j^s \vec{\sigma}_{(A_j(x)\Leftrightarrow A_j(p_S))^{\min}} + \sum_{j=1}^{M} w_j^w \vec{\sigma}_{(A_j(x)\Leftrightarrow A_j(p_W))^{\min}} - 2\left(\sum_{j=1}^{M} w_j^s \vec{\sigma}_{(A_j(x)\Leftrightarrow A_j(p_S))^{\min}} \right) \otimes \left(\sum_{j=1}^{M} w_j^w \vec{\sigma}_{(A_j(x)\Leftrightarrow A_j(p_W))^{\min}} \right)$$

$\vec{\sigma}_{Ако\_je\_стол\_онда\_je\_винд}, \vec{\sigma}_{Стол\_која\_није\_винд}, \vec{\sigma}_{Стол\_као\_винд}, \vec{\sigma}_{Стол\_није\_као\_винд} \in [0,1]^{2^{|\Omega|}}$ су структуре Булових прототипова, $\vec{\alpha} \in [0,1]^{2^{|\Omega|}}$ је вектор атомских полинома $BA(\Omega)$, $\Omega = \left\{ (A_1(x) \Leftrightarrow A_1(p_S))^{\min},...,(A_M(x) \Leftrightarrow A_M(p_S))^{\min},...,(A_1(x) \Leftrightarrow A_1(p_W))^{\min},...,(A_M(x) \Leftrightarrow A_M(p_W))^{\min} \right\}$, $A_1(x),...,A_M(x), A_1(p_S),...,A_M(p_S), A_1(p_W),...,A_M(p_W) \in [0,1]$ су степени примене атрибута на објекат и прототипове, $\vec{1}$ је јединични вектор, $w_1^s,...,w_M^s \in [0,1]$,

$\sum_{j=1}^{M} w_j^s = 1$ су тежине које дефинишу значај атрибута прототипа „Столица“, $w_1^w,...,w_M^w \in [0,1]$, $\sum_{j=1}^{M} w_j^w = 1$ су тежине које дефинишу значај атрибута прототипа „Виндзор“, M је број атрибута, $\otimes$ је оператор генерализованог производа.

3.2.5 Закључак

Коришћењем конзистентне фази логике формализовани су и објашњени Булови концепти у складу са прототип, егземплар и теоријом граница категорија. Претпостављено је да концепти имају векторску природу што је математички објашњено помоћу два вектора, структуре концепта и вектора атомских полинома Булове алгебре атрибута. Степен примене концепта на неки објекат формализован је као скаларни производ структуре концепта и вектора атомских полинома. Структура Буловог концепта добија се применом Булових операција реализованих у конзистентном фази оквиру над структурама компоненти.

Разматрано је кључно питање теорије концепата, да ли је степен примене концепта бинаран или градиран тј. да ли је исправна класична или теорија градације. Питање је разматрано са становишта композиционалности коју теорија концепата треба да објасни, а која објашњава две кључне каратеристике ума, продуктивност и систематичност. У фокусу су Булови концепти који су у класичном оквиру композиционални и функционишу у складу са принципом истинитосне функционалности. Степен примене класичног Буловог концепта на неки објект одређује се на основу степена примене компоненти на тај објекат и Буловог правила композиције. Постоји коначан број класичних Булових концепата који нису композиционални као нпр. „Слепи путник“ или „Мачка у џаку“ који не функционишу као категорије слепих људи који путују или мачака које се налазе у џаку.

Теоретичари класичног погледа сматрају да теорија градације не може да објасни композиционалност Булових концепата те закључују да је погрешна тј. да степен примене концепта није градиран него бинаран (*Fodor and Lepore 1996, 2002, Fodor 1981, 1998, Osherson and Smith 1981, 1982, 1997, Connolly et al 2007, Gleitman et al 2012*). Критика се демонстрира у прототип оквиру где су представљена три проблема на које је у дисертацији одговорено и то:

- „Проблем закона мишљења": коришћењем конвенционалне фази логике засноване на принципу истинитосне функционалности показано је да закони искључења трећег и неконтрадикције нису загарантовани у прототип оквиру на основу чега је закључено да прототипови нису композиционални те концепти нису прототипови и степен примене концепта није градиран (*Osherson and Smith 1981, 1982, 1997*).

  Проблем је превазиђен у одељку 3.2.1. Закони мишљења као и сви закони Булове алгебре загарантовани су усвајањем принципа структурне уместо истинитосне функционалности (*Radojević 2000, 2008a, 2008c, Radojević 2014*).

- "The uncat problem": неодређено много Булових концепата нема прототип иако га све компоненте имају на основу чега је закључено да прототипови нису композиционални те концепти нису прототипови и степен примене концепта није градира, и да су Булови концепти репрезентације класичних логичких форми (*Fodor and Lepore 1996, 2002, Fodor 1981, 1998*).

  Проблем је превазиђен у одељку 3.2.4. у коме су математички објашњени Булови концепти у прототип оквиру под претпоставком да концепти имају векторску природу. Степен примене Буловог прототипа формализован је као скаларни производ структуре Буловог прототипа и вектора атомских полинома Булове алгебре атрибута. Структура Буловог прототипа индиректно информише које атрибуте Булов прототип садржи и колико су они значајни. Моделовани су Булови прототипови „Није мачка", „Столица или лептир" и „Ако је столица онда је виндзор" за које теоретичари класичног погледа сматрају да не могу бити објашњени (*Fodor and Lepore 1996, Fodor 1998, Kamp and Partee 1995*).

- “The Pet fish problem“: неодређено много Булових прототипова нису композиционални на основу чега је закључено да прототипови нису композиционални те концепти нису прототипови и степен примене концепта није градиран (*Fodor and Lepore 1996, 2002, Fodor 1998, Osherson and Smith 1981, 1982, 1997, Connolly et al 2007, Gleitman et al 2012*).

  Проблем захтева разјашњење да ли концепти морају бити композиционални. Теоретичари класичног погледа сматрају да је за објашњење продуктивности и систематичности неопходно да концепти буду са коначним бројем изузетака композиционални (*Fodor and Lepore 1996, 2002, Fodor 1981, 1998, Connolly et al 2007, Gleitman et al 2012, Osherson and Smith 1981, 1982, 1997*). У одељку 3.2.2. објашњено је да концепти у прототип оквиру нису такви јер зависе од контекста композиције, што је последица промене начина функционисања где је „неопходност и довољност“ класичне теорије релаксирана „статистичком поузданошћу“. Прототип теоретичари сматрају да концепти не морају бити композиционални те да проблем не постоји (*Hampton 1987, 2011, Hampton and Jönsson 2012, Rosch 2011, Rips 1995, Johnson and Keil 2000, Jönsson and Hampton 2008, Prinz 2004, Robbins 2002, Zadeh 1982, Kamp and Partee 1995*). Композиционалност се посматра као резервна стратегија коју мислилац користи када поред информације које чувају компоненте не располаже другим релевантним информацијама. Како би се објаснила продуктивност и систематичност довољно је објаснити способност ума да концепте компонује што је у учињено у одељку 3.2.4.

С обзиром да су у дисертацији превазиђена два проблема тј. оповргнута су два стандардна аргумента против прототип теорије и будући да је композиционалност концепата у случају градације математички објашњена под претпоставком да концепти имају векторску природу, на кључно питање теорије концепата може се дати следећи одговор:

- Степен примене концепта може бити градиран ако је композиционалност резервна стратегија.

4. УВОЂЕЊЕ ГРАДАЦИЈЕ У БУЛОВЕ МРЕЖЕ

Булова мрежа је експертски формализам за сложене системе, окарактерисане мноштвом компоненти које каузално интерагују. Користи се у биологији (*Kauffman 1969, Thomas 1973, 1979, 1991, Wang et al. 2012, Chaves et al. 2005, Saadatpour and Albert 2013, Fauré et al. 2005, Ruz et al. 2014*), геонаукама (*Wright et al. 1990, Darby and Mysak 1993, Saunders and Ghil 2001, Zaliapin et al. 2003a, 2003b*) и друштвеним наукама (*Easton 2008, Coluzzi et al. 2012, Gu et al. 2013, Kobayashi and Hiraishi 2014*).

Класична Булова мрежа је бинарна и користи се за квалитативно моделовање сложених система у којима се каузалне интеракције између компоненти могу објаснити „стрмим“ сигмоидама (енг. steep sigmoids). Стрма сигмоида приказана је тамном бојом на Слици 9.

Булове мреже могу се генерализовати увођењем градације што подразумева реалновредносну реализацију Булових променљивих и функција чворова. Увођење градације омогућава да се формализам користи за квантитативно моделовање сложених система. У литератури су предложена два приступа за увођење градације у Булове мреже и то:

- Конвенционални фази приступ (*Wittmann and Theis 2011, Kok and Wang 2006, Cao et al. 2007, Morris et al. 2011, Poret et al. 2014*).
- Boolecube/ Hillcube приступ (*Wittmann et al 2009*).

У овом поглављу дисертације Булове мреже биће генерализоване коришћењем конзистентне фази логике што ће бити реализовано у униполарном и биполарном оквиру. Предложени приступ увођењу градације у Булове мреже биће илустрован на примеру два класична модела преузета из литературе. Исти модели биће генерализовани и помоћу конвенционалог фази и Boolecube/ Hillcube приступа. Генерализовани модели добијени помоћу три приступа биће симулирани и упоређени.

4.1. Класични модел

Булова мрежа има форму директног цикличног графа што се дефинише двојком:

$$BN = (N, E) \tag{4.1}$$

где је $N = \{x_1, ..., x_M\}$ скуп чворова графа који представљају компоненте система, E је скуп оријентисаних грана графа које представљају каузалне интеракције између компоненти.

Булове мреже приказане су на Сликама 11 и 12.

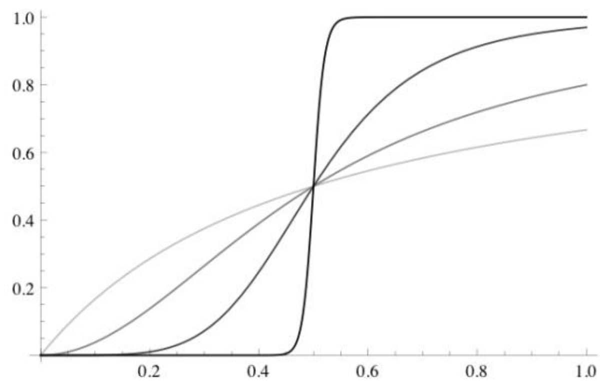
Динамика се уводи у Булову мрежу додељивањем Булове променљиве и функције чворовима графа што се у случају дискретног времена дефинише на следећи начин:

$$x_m(t+1) = f_m\left(x_{m_1}(t), ..., x_{m_{K_m}}(t)\right) \tag{4.2}$$

где је $x_m(t+1) \in \{0,1\}$ стање чвора x_m у тренутку t+1, $x_{m_1}(t), ..., x_{m_{K_m}}(t) \in \{0,1\}$ су стања из претходног тренутка времена чворова који се уливају у x_m, $f_m : \{0,1\}^{K_m} \to \{0,1\}$ је Булова функција чвора x_m, K_m је број чворова који се уливају у x_m, $m = 1, ..., M$, M је број чворова Булове мреже.

Класична Булова мрежа еволуира у времену на основу принципа истинитосне функционалности. Логичку валидност динамике модела гарантују закони Булове алгебре.

Булове мреже користе се за моделовање система у којима компоненте испод (изнад) одређеног нивоа активације не утичу или врло мало утичу на друге, а изнад (испод) тог нивоа утицај нагло расте и улази у сатурацију. Такве каузалне интеракције могу се представити „стрмим“ сигмоидама. Бинарна репрезентација интеракција у конвенционалним Буловим мрежама је идеализација сигмоидних интеракција. Сигмоиде су приказане на Сликама 9, 10 и 13.



Слика 9. Стрма сигмоида

4.2. Генерализација Булових мрежа - приступи из литературе

Предложено је да се Булове мреже генерализују увођењем градације што подразумева реалновредносну реализацију Булових променљивих и функција чворова. Увођење градације у Булове мреже омогућава да се формализам користи за квантитативно третирање сложених система (*Wittmann and Theis, 2011, Kok and Wang, 2006, Cao et al. 2007, Morris et al. 2011, Poret et al. 2014, Wittmann et al. 2009, Dobrić 2014, Dobrić et al. 2016*). У наставку биће представљени конвенционални фази и Boolecube/ Hillcube приступ генерализацији Булових мрежа.

4.2.1. Конвенционални фази приступ

Предложено је да се градација у Булове мреже уведе коришћењем конвенционалних, заснованих на принципу истинитосне функционалности, Геделове, Лукашиевичеве и фази логике производа (*Wittmann and Theis, 2011, Kok and Wang, 2006, Cao et al. 2007, Morris et al. 2011, Poret et al. 2014*).

Динамика генерализоване Булове мреже у конвенционалном фази оквиру дефинише се на следећи начин:

$$x_m(t+1) = F_m\left(x_{m_1}(t), \ldots, x_{m_{K_m}}(t)\right) \tag{4.3}$$

где је $x_m(t+1) \in [0,1]$ стање чвора x_m у тренутку t+1, $x_{m_1}(t), \ldots, x_{m_{K_m}}(t) \in [0,1]$ су стања из претходног тренутка времена чворова који се уливају у x_m, $F_m : [0,1]^{K_m} \to [0,1]$ је фази функција чвора x_m, K_m је број чворова који се уливају у x_m, $m = 1, \ldots, M$, M је број чворова Булове мреже.

Фази функција чвора добија се генерализацијом Булове функције где се операције $\wedge, \vee, \neg$ уопштавају функцијама Т-норме, Т-конорме и фази комплементом.

У три предложена случаја Т-норме и Т-конорме дефинишу се на следећи начин:

- У Геделовом случају као $T(x,y) = \min(x,y)$ и $S(x,y) = \max(x,y)$.
- У случају фази логике производа као $T(x,y) = x \cdot y$ и $S(x,y) = x + y - x \cdot y$.
- У Лукашиевичевом случају као $T(x,y) = \max\{0, x+y-1\}$ и $S(x,y) = \min\{x+y, 1\}$.

где $x, y \in [0,1]$.

Фази комплемент у општем случају дефинише се на следећи начин:

$$\neg x = 1 - x \tag{4.4}$$

где $x \in [0,1]$.

Булова мрежа генерализована конвенционалном фази логиком еволуира у времену на основу принципа истинитосне функционалности. Будући да није могуће сачувати Булове законе у конвенционалној фази логици (*Radojević 2000, 2005, 2008a, 2008b, 2008c, 2010, 2013a, 2013b, 2014, 2015*) намеће се закључак да логичка валидност динамике генерализованог модела није загарантована. Проблем је демонстриран у одељку 4.4.1. на примеру Булове мреже са Слике 11 коју није могуће адекватно – логички валидно генерализовати конвенционалним фази приступом.

4.2.2. Boolecube/ Hillcube приступ

Предложено је да се Булове мреже генерализују поступком мултилинеарне интерполације Булових функција (*Wittmann et al. 2009*).

Boolecube је реалновредносна реализација Булове функције која се дефинише на следећи начин:

$$\overline{f^B}\left(\overline{x}_1,..,\overline{x}_M\right)=\sum_{x_1=0}^{1}\sum_{x_2=0}^{1}\cdots\sum_{x_M=0}^{1}\left(f\left(x_1,...,x_M\right)\prod_{m=1}^{M}\left(x_m\overline{x}_m+\left(1-x_m\right)\left(1-\overline{x}_m\right)\right)\right) \tag{4.5}$$

где је $\overline{f^B}\left(\overline{x}_1,..,\overline{x}_M\right)\in\left[0,1\right]$ Boolecube, $f\left(x_1,...,x_M\right)\in\left\{0,1\right\}$ је Булова функција, $x_1,...,x_M\in\left\{0,1\right\}$, $\overline{x}_1,..,\overline{x}_M\in\left[0,1\right]$.

Hillcube је реалновредносна реализација Булове функције која се дефинише се на следећи начин:

$$\begin{aligned}\overline{f^H}\left(\overline{x}_1,..,\overline{x}_M\right)&=\overline{f^B}\left(\frac{h_1\left(\overline{x}_1\right)}{h_1\left(1\right)},..,\frac{h_M\left(\overline{x}_M\right)}{h_M\left(1\right)}\right)=\\&=\sum_{x_1=0}^{1}\sum_{x_2=0}^{1}\cdots\sum_{x_M=0}^{1}\left(f\left(x_1,...,x_M\right)\prod_{m=1}^{M}\left(x_m\frac{h_M\left(\overline{x}_m\right)}{h_M\left(1\right)}+\left(1-x_m\right)\left(1-\frac{h_M\left(\overline{x}_m\right)}{h_M\left(1\right)}\right)\right)\right)\end{aligned} \tag{4.6}$$

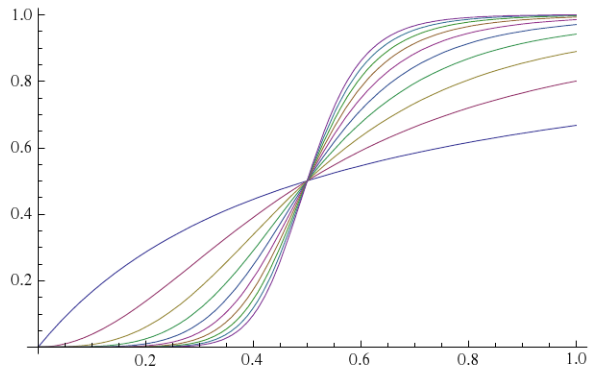
где је $\overline{f^H}\left(\overline{x}_1,..,\overline{x}_M\right)\in\left[0,1\right]$ Hillcube, $\overline{f^B}\left(\frac{h_1\left(\overline{x}_1\right)}{h_1\left(1\right)},..,\frac{h_M\left(\overline{x}_M\right)}{h_M\left(1\right)}\right)\in\left[0,1\right]$ је Boolecube, $h_m\left(\overline{x}_m\right)\in\left(0,1\right),m=1,...,M$ је Хилова функција, $x_1,...,x_M\in\left\{0,1\right\}$, $\overline{x}_1,..,\overline{x}_M\in\left[0,1\right]$.

Хилова функција дефинише се на следећи начин:

$$h_m\left(\overline{x}_m\right)=\frac{\overline{x}_m^{n_m}}{\overline{x}_m^{n_m}+k_m^{n_m}} \tag{4.7}$$

где су n_m и k_m параметри, $\overline{x}_m\in\left[0,1\right]$, $h_m\left(\overline{x}_m\right)\in\left(0,1\right),m=1,...,M$.

Хилова функција за $k_m=0.5$ и различите вредности параметра n_m приказана је на Слици 10.



Слика 10. Хилова функција

Boolecube се користи у случају линеарних каузалних интеракција између промењљивих, док се Hillcube користи у случају сигмоидних каузалних интеракција (*Wittmann et al. 2009*).

Динамика генерализоване Булове мреже у Boolecube случају дефинише се на следећи начин:

$$x_m(t+1) = \overline{f_m^B}\left(x_{m_1}(t),...,x_{m_{K_m}}(t)\right) \tag{4.8}$$

Динамика генерализоване Булове мреже у Hillcube случају дефинише се на следећи начин:

$$\begin{aligned} &= x_m(t+1) = \overline{f_m^H}\left(x_{m_1}(t),...,x_{m_{K_m}}(t)\right) = \\ &= \overline{f_m^B}\left(\frac{h_{m_1}\left(x_{m_1}(t)\right)}{h_{m_1}(1)},...,\frac{h_{m_{K_m}}\left(x_{m_{K_m}}(t)\right)}{h_{m_{K_m}}(1)}\right) \end{aligned} \tag{4.9}$$

где је $x_m(t+1)\in[0,1]$ стање чвора x_m у тренутку t+1, $x_{m_1}(t),...,x_{m_{K_m}}(t)\in[0,1]$ су стања из претходног тренутка времена чворова који се уливају у чвор x_m, $\overline{f_m^B}:[0,1]^{K_m}\to[0,1]$ је Boolecube чвора x_m, $\overline{f_m^H}:[0,1]^{K_m}\to[0,1]$ је Hillcube чвора x_m, K_m је број чворова који се уливају у x_m, $m=1,...,M$, M је број чворова генерализоване Булове мреже.

Boolecube (4.5) и Hillcube (4.6) специјални су случајеви генерализованог Буловог полинома (2.11) који се добијају када се сви оператори генерализованог производа третирају као алгебарски производи. У одељку 2.2. објашњено је да је алгебарски производ адекватан када су промењливе различите природе. Намеће се закључак да је Boolecube/ Hillcube приступ адекватан када су све компоненте система који се моделује различите природе. Проблем је илустрован у одељку 4.4.2. на примеру Булове мреже са Слике 12 коју није могуће адекватно генерализовати Boolecube/ Hillcube приступом.

4.3. Генерализација конзистентном фази логиком

Булове мреже могу се генерализовати на Буловски конзистентан начин трансформацијом Булових функција чворова у генерализоване Булове полиноме. Генерализација је могућа у униполарном и биполарном оквиру.

Динамика генерализоване Булове мреже у униполарном оквиру дефинише се на следећи начин:

$$\begin{aligned} x_m(t+1) &= f_m^{\otimes}\left(x_{m_1}(t),\ldots,x_{m_{K_m}}(t)\right) = \vec{\sigma}_{f_m}\vec{\alpha}(t) = \\ &= \sum_{\sigma_f(S)=1} \underset{x_{m_i}\in S}{\otimes} x_{m_i}(t) \underset{x_{m_j}\in N\setminus S}{\otimes}\left(1-x_{m_j}(t)\right) = \end{aligned} \tag{4.10}$$

где је $x_m(t+1)\in[0,1]$ стање чвора x_m у тренутку t+1, $x_{m_1}(t),\ldots,x_{m_{K_m}}(t)\in[0,1]$ су стања из претходног тренутка времена чворова који се уливају у чвор x_m, $f_m^{\otimes}\left(x_{m_1}(t),\ldots,x_{m_{K_m}}(t)\right)\in[0,1]$ је генерализовани Булов полином Булове функције $f_m\left(x_{m_1}(t),\ldots,x_{m_{K_m}}(t)\right)\in BA(N)$ чвора x_m, $\sigma_f(S)\in\{0,1\}$ и $\vec{\sigma}_{f_m}\in\{0,1\}^{2^{|N|}}$ су структурна функција и вектор елемента $f_m\left(x_{m_1}(t),\ldots,x_{m_{K_m}}(t)\right)\in BA(N)$, $S\in P(N)$, $P(N)$ је скуп свих подскупова скупа N, $\vec{\alpha}(t)$ је вектор атомских полинома $BA(N)$ у тренутку *t*, K_m је број чворова који се уливају у чвор x_m, $N=\left\{x_{m_1}(t),\ldots,x_{m_{K_m}}(t)\right\}$, $m=1,\ldots,M$, M је број чворова Булове мреже, $\otimes$ је оператор генерализованог производа.

Динамика генерализоване Булове мреже у биполарном оквиру дефинише се на следећи начин:

$$\begin{aligned} x_m(t+1) &= 2 f_m^{\otimes}\left(\frac{x_{m_1}(t)+1}{2},\ldots,\frac{x_{m_{K_m}}(t)+1}{2}\right)-1 = 2\vec{\sigma}_{f_m}\vec{\alpha}(t)-1= \\ &= 2\left(\sum_{\sigma_f(S)=1} \underset{x_{m_i}\in S}{\otimes} \frac{x_{m_i}(t)+1}{2} \underset{x_{m_j}\in N\setminus S}{\otimes}\left(1-\frac{x_{m_j}(t)+1}{2}\right)\right)-1= \end{aligned} \tag{4.11}$$

где је $x_m(t+1)\in[-1,1]$ стање чвора x_m у тренутку t+1, $x_{m_1}(t),\ldots,x_{m_{K_m}}(t)\in[-1,1]$ су стања из претходног тренутка времена чворова који се уливају у x_m, $f_m^{\otimes}\left(\frac{x_{m_1}(t)+1}{2},\ldots,\frac{x_{m_{K_m}}(t)+1}{2}\right)\in[0,1]$ је генерализовани Булов полином Булове функције $f_m\left(x_{m_1}(t),\ldots,x_{m_{K_m}}(t)\right)$ чвора x_m, $\sigma_{f_m}(S)\in\{0,1\}$ и $\vec{\sigma}_{f_m}\in\{0,1\}^{2^{|N|}}$ су структурна функција и вектор елемента $f_m\left(\frac{x_{m_1}(t)+1}{2},\ldots,\frac{x_{m_{K_m}}(t)+1}{2}\right)\in BA(N)$, $S\in P(N)$, $P(N)$ је скуп свих подскупова скупа N, $\vec{\alpha}(t)$ је вектор атомских полинома $BA(N)$ у тренутку *t*, K_m је број чворова који се уливају у чвор x_m, $N=\left\{\frac{x_{m_1}(t)+1}{2},\ldots,\frac{x_{m_{K_m}}(t)+1}{2}\right\}$, $m=1,\ldots,M$, M је број чворова генерализоване Булове мреже, $\otimes$ је оператор генерализованог производа.

Булова мрежа генерализована конзистентном фази логиком еволуира у времену на основу принципа структурне функционалности. Приступ чува Булов оквир и гарантује логичку валидност динамике модела. Када су почетна стања мреже бинарна предложени приступ своди се на конвенционални представљен у одељку 4.1. У складу са теоријом представљеном у одељку 2.2. оператор генерализованог производа у моделима (4.10) и (4.11) бира се у зависности од природе интерагујућих променљивих на следећи начин:

- Када су променљиве $x_{m_i}(t)$ и $x_{m_j}(t)$ исте природе адекватни оператор је функција минимума те важи:

$$x_{m_i}(t) \otimes x_{m_j}(t) = \min\left(x_{m_i}(t), x_{m_j}(t)\right)$$
$$\frac{x_{m_i}(t)+1}{2} \otimes \frac{x_{m_j}(t)+1}{2} = \min\left(\frac{x_{m_i}(t)+1}{2}, \frac{x_{m_j}(t)+1}{2}\right) \tag{4.12}$$

- Када су променљиве $x_{m_i}(t)$ и $x_{m_j}(t)$ исте природе, али негативно корелисане адекватни оператор је Лукашиевичев производ те важи:

$$x_{m_i}(t) \otimes x_{m_j}(t) = \max\left(x_{m_i}(t) + x_{m_j}(t) - 1, 0\right)$$
$$\frac{x_{m_i}(t)+1}{2} \otimes \frac{x_{m_j}(t)+1}{2} = \max\left(\frac{x_{m_i}(t)+1}{2} + \frac{x_{m_j}(t)+1}{2} - 1, 0\right) \tag{4.13}$$

- Када су променљиве $x_{m_i}(t)$ и $x_{m_j}(t)$ различите природе адекватни оператор је алгебарски производ те важи:

$$x_{m_i}(t) \otimes x_{m_j}(t) = x_{m_i}(t) \cdot x_{m_j}(t)$$
$$\frac{x_{m_i}(t)+1}{2} \otimes \frac{x_{m_j}(t)+1}{2} = \frac{x_{m_i}(t)+1}{2} \cdot \frac{x_{m_j}(t)+1}{2} \tag{4.14}$$

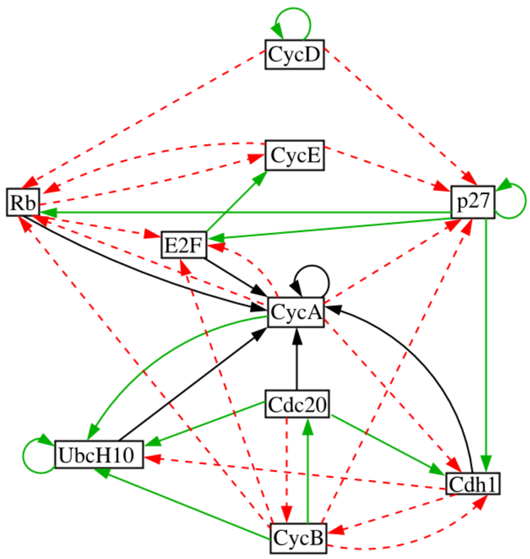
Boolecube/ Hillcube приступ Буловим мрежама дефинисан према (4.8) и (4.9) је специјални случај модела (4.10) када су сви оператори генерализованог производа реализовани као алгебарски производи. Модел (4.10) омогућава да се употребом различитих оператора генерализованог производа у обзир узме природа логички интерагујућих променљивих.

4.4. Поређење предложеног са приступима из литературе

У овом одељку генерализоване су две конвенционалне Булове мреже из литературе. Увођење градације реализовано је коришћењем у дисертацији предложеног конзистентног фази приступа и у литератури предложених конвенционалог фази и Boolecube/ Hillcube приступа. Динамика генерализованих модела је потом упоређена. Модели су генерализовани и симулирани помоћу софтвера представљеног у (*Dobrić et al. 2016*).

4.4.1. Поређење са конвенционалним фази приступом

На Слици 11 приказана је Булова мрежа преузета из (*Ruz et al. 2014*).



Слика 11. Булова мрежа[1]

Динамика Булове мреже са Слике 11 дефинисана је на следећи начин:

$$
\begin{aligned}
&CycA(t+1)=\left(E2F(t)\wedge\neg Rb(t)\wedge\neg Cdc20(t)\wedge\neg\left(Cdh1(t)\wedge UbcH10(t)\right)\right)\\
&\qquad\qquad\vee\left(CycA(t)\wedge\neg Rb(t)\wedge\neg Cdc20(t)\wedge\neg\left(Cdh1(t)\wedge UbcH10(t)\right)\right)\\
&CycB(t+1)=\neg Cdc20(t)\wedge\neg Cdh1(t)\\
&Rb(t+1)=\left(\neg CycD(t)\wedge\neg CycE(t)\wedge\neg CycA(t)\wedge\neg CycB(t)\right)\\
&\qquad\qquad\vee\left(p27(t)\wedge\neg CycD(t)\wedge\neg CycB(t)\right)\\
&CycD(t+1)=CycD(t)\\
&CycE(t+1)=E2F(t)\wedge\neg Rb(t)\\
&E2F(t+1)=\left(\neg Rb(t)\wedge\neg CycA(t)\wedge\neg CycB(t)\right)\\
&\qquad\qquad\vee\left(p27\wedge\neg Rb(t)\wedge\neg CycB(t)\right)\\
&p27(t+1)=\left(\neg CycD(t)\wedge\neg CycE(t)\wedge\neg CycA(t)\wedge\neg CycB(t)\right)\\
&\qquad\qquad\vee\left(p27(t)\wedge\neg\left(CycE(t)\wedge CycA(t)\right)\wedge\neg CycB(t)\wedge\neg CycD(t)\right)\\
&Cdh1(t+1)=\left(\neg CycA(t)\wedge\neg CycB(t)\right)\vee Cdc20(t+1)\vee\left(p27\wedge\neg CycB(t)\right)\\
&Cdc20(t+1)=CycB(t)\\
&UbcH10(t+1)=\neg Cdh1(t)\vee\left(Cdh1(t)\wedge UbcH10(t)\wedge\left(Cdc20(t)\vee CycA(t)\vee CycB(t)\right)\right)
\end{aligned}
\tag{4.15}
$$

[1] Преузето из (*Ruz et al. 2014*)

$CycA(t), CycB(t), Rb(t), CycD(t), CycE(t), E2F(t), p27(t), Cdh1(t), Cdc20(t), UbcH10(t) \in \{0,1\}$ су стања чворова Булове мреже у класичном случају.

Булова мрежа (4.15) генерализова је увођењем градације, помоћу у дисертацији предложеног приступа и конвенционалног фази приступа под претпоставком да су све променљиве различите природе.

У Прилогу А представљен је модел добијен применом конзистентног фази приступа где су сви оператори генерализованог производа реализовани као алгебарски производи.

Конвенционални фази модел реализован је фази логиком производа где је коњукција дефинисана као $T(x,y) = x \cdot y$, дисјункција као $S(x,y) = x + y - x \cdot y$ и негација као $\neg x = 1 - x$, $x, y \in [0,1]$. Булове функције компоненти $CycA, Rb, E2F, p27, Cdh1, UbcH10$ није могуће адекватно – Буловски конзистентно генерализовати конвенционалном фази логиком. Добијени модел није у Буловом оквиру те његова динамика није логички валидна.

У Табелама 1, 2, 3, 4 приказана је динамика конзистентног и конвенционалног фази модела за два почетна стања.

Табела 1. Динамика конзистентног фази модела

t	0	1	2	…	19	20	21
$CycA(t)$	0,3	0,01	0,03	…	0,16	0,16	0,16
$CycB(t)$	0,3	0,01	0,02	…	0,17	0,17	0,17
$Rb(t)$	0,3	0,47	0,44	…	0,48	0,48	0,48
$CycD(t)$	0,3	0,30	0,30	…	0,30	0,30	0,30
$CycE(t)$	0,3	0,63	0,25	…	0,20	0,21	0,21
$E2F(t)$	0,9	0,48	0,53	…	0,40	0,40	0,40
$p27(t)$	0,9	0,43	0,44	…	0,47	0,47	0,47
$Cdh1(t)$	0,9	0,97	0,99	…	0,80	0,80	0,80
$Cdc20(t)$	0,9	0,30	0,01	…	0,17	0,17	0,17
$UbcH10(t)$	0,9	0,87	0,30	…	0,30	0,30	0,30

Табела 2. Динамика конвенционалног фази модела

t	0	1	2	…	39	40	41
$CycA(t)$	0,30	0,02	0,04	…	0,04	0,04	0,04
$CycB(t)$	0,30	0,01	0,01	…	0,01	0,01	0,01
$Rb(t)$	0,30	0,58	0,53	…	0,86	0,86	0,86
$CycD(t)$	0,30	0,30	0,30	…	0,30	0,30	0,30
$CycE(t)$	0,30	0,63	0,27	…	0,04	0,04	0,04
$E2F(t)$	0,90	0,63	0,55	…	0,24	0,24	0,24
$p27(t)$	0,90	0,55	0,53	…	0,85	0,86	0,86
$Cdh1(t)$	0,90	0,98	0,99	…	0,99	0,99	0,99
$Cdc20(t)$	0,90	0,30	0,01	…	0,01	0,01	0,01
$UbcH10(t)$	0,90	0,79	0,26	…	0,01	0,01	0,01

Табела 3. Динамика конзистентног фази модела

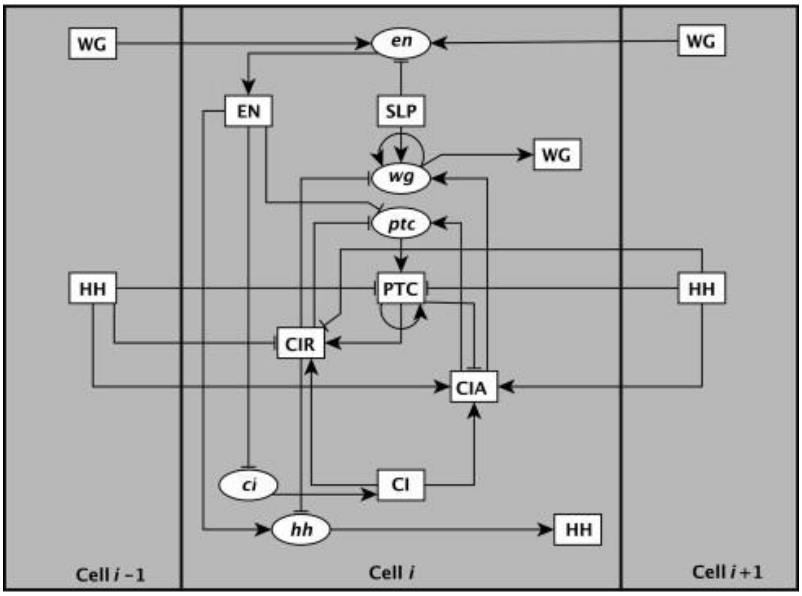
t	0	1	2	…	36	37	38
$CycA(t)$	0,5	0,14	0,06	…	0,24	0,24	0,24
$CycB(t)$	0,5	0,25	0,16	…	0,22	0,22	0,22
$Rb(t)$	0,5	0,16	0,26	…	0,23	0,23	0,23
$CycD(t)$	0,5	0,50	0,50	…	0,50	0,50	0,50
$CycE(t)$	0,5	0,25	0,16	…	0,37	0,37	0,37
$E2F(t)$	0,5	0,19	0,55	…	0,48	0,49	0,49
$p27(t)$	0,5	0,13	0,26	…	0,22	0,22	0,22
$Cdh1(t)$	0,5	0,69	0,83	…	0,71	0,71	0,71
$Cdc20(t)$	0,5	0,50	0,25	…	0,22	0,22	0,22
$UbcH10(t)$	0,5	0,72	0,65	…	0,47	0,47	0,47

Табела 4. Динамика конвенционалног фази модела

t	0	1	2	…	38	39	40
$CycA(t)$	0,50	0,18	0,09	…	0,30	0,30	0,30
$CycB(t)$	0,50	0,25	0,14	…	0,22	0,22	0,22
$Rb(t)$	0,50	0,18	0,27	…	0,25	0,25	0,25
$CycD(t)$	0,50	0,50	0,50	…	0,50	0,50	0,50
$CycE(t)$	0,50	0,25	0,19	…	0,37	0,37	0,37
$E2F(t)$	0,50	0,23	0,55	…	0,49	0,49	0,49
$p27(t)$	0,50	0,15	0,27	…	0,24	0,24	0,24
$Cdh1(t)$	0,50	0,72	0,83	…	0,71	0,71	0,71
$Cdc20(t)$	0,50	0,50	0,25	…	0,23	0,22	0,22
$UbcH10(t)$	0,50	0,61	0,50	…	0,41	0,41	0,41

4.4.2. Поређење са Boolecube/ Hillcube приступом

На Слици 12 приказана је Булова мрежа преузета из (*Saadatpour and Albert 2013*).



Слика 12. Булова мрежа[2]

[2] Преузето из (*Saadatpour and Albert 2013*)

Динамика Булове мреже са Слике 12 дефинише се на следећи начин:

$$
\begin{aligned}
&SLP_i(t+1)=\begin{cases}0, i\in\{1,2\}\\ 1, i\in\{3,4\}\end{cases}\\
&wg_i(t+1)=\left(CIA_i(t)\wedge SLP_i(t)\wedge\neg CIR_i(t)\right)\vee\left(wg_i(t)\wedge\left(CIA_i(t)\vee SLP_i(t)\right)\wedge\neg CIR_i(t)\right)\\
&WG_i(t+1)=wg_i(t)\\
&en_i(t+1)=\left(WG_{i-1}(t)\vee WG_{i+1}(t)\right)\wedge\neg SLP_i(t)\\
&EN_i(t+1)=en_i(t)\\
&hh_i(t+1)=EN_i(t)\wedge\neg CIR_i(t)\\
&HH_i(t+1)=hh_i(t)\\
&ptc_i(t+1)=CIA_i(t)\wedge\neg EN_i(t)\wedge\neg CIR_i(t)\\
&PTC_i(t+1)=ptc_i(t)\vee\left(PTC_i(t)\wedge\neg HH_{i-1}(t)\wedge\neg HH_{i+1}(t)\right)\\
&ci_i(t+1)=\neg EN_i(t)\\
&CI_i(t+1)=ci_i(t)\\
&CIA_i(t+1)=CI_i(t)\wedge\neg PTC_i(t)\vee HH_{i-1}(t)\vee HH_{i+1}(t)\vee hh_{i-1}(t)\vee hh_{i+1}(t)\\
&CIR_i(t+1)=CI_i(t)\wedge PTC_i(t)\wedge\neg HH_{i-1}(t)\wedge\neg HH_{i+1}(t)\wedge\neg hh_{i-1}(t)\wedge\neg hh_{i+1}(t)
\end{aligned}
\tag{4.16}
$$

$SLP_i(t), wg_i(t), WG_i(t), en_i(t), EN_i(t), hh_i(t), HH_i(t), ptc_i(t), PTC_i(t), ci_i(t), CI_i(t), CIA_i(t), CIR_i(t)\in\{0,1\}$

су стања чворова Булове мреже у класичном случају.

Булову мрежа (4.16) генерализована је увођењем градације, реалновредносном реализацијом Булових промењљивих и функција чворова помоћу у дисертацији предложеног приступа.

У Прилогу Б представљен је генерички модел добијен применом предложеног приступа. Реализација оператора генерализованог производа у генеричком моделу условљена је природом логички интерагујућих промењљивих што је објашњено у одељку 4.3.

У Прилогу Ц представљен је конзистентни фази модел добијен из генеричког модела где је претпостављено да су промењљиве $WG_{i-1}(t)$ и $WG_{i+1}(t)$, $HH_{i-1}(t)$ и $HH_{i+1}(t)$, $hh_{i-1}(t)$ и $hh_{i+1}(t)$ исте природе, а да су остале промењљиве различите природе. Оператор генерализованог производа у случају промењљивих исте природе је функција минимума док је у случају промењљивих различите природе то алгебарски производ.

У Прилогу Д представљен је Boolecube/ Hillcube модел добијен из генеричког модела под неоправданом претпоставком да су све променљиве различите природе. Булове функције компоненти en_i, PTC_i, CIA_i и CIR_i нису адекватно генерализоване Boolecube/ Hillcube приступом јег није уважена иста природа логички интерагујућих променљивих $WG_{i-1}(t)$ и $WG_{i+1}(t)$, $HH_{i-1}(t)$ и $HH_{i+1}(t)$, $hh_{i-1}(t)$ и $hh_{i+1}(t)$. Добијени модел нема валидну динамику јер није у стању да третира природу компоненти система.

У Табелама 5, 6, 7, 8 приказана је динамика конзистентног фази и Boolecube/ Hillcube модела за два почетна стања.

Табела 5. Динамика конзистентног фази модела

t	0	1	2	…	10	11	12
$SLP_i(t)$	0,50	0,50	0,50	…	0,50	0,50	0,50
$wg_i(t)$	0,50	0,25	0,09	…	0	0	0
$WG_i(t)$	0,50	0,50	0,25	…	0	0	0
$en_i(t)$	0,50	0,25	0,25	…	0,25	0,25	0,25
$EN_i(t)$	0,50	0,50	0,25	…	0,25	0,25	0,25
$hh_i(t)$	0,50	0,25	0.28	…	0,06	0,06	0,06
$HH_i(t)$	0,50	0,50	0,25	…	0,06	0,06	0,06
$ptc_i(t)$	0,50	0,13	0,02	…	0	0	0
$PTC_i(t)$	0,50	0,63	0,40	…	0,01	0	0
$ci_i(t)$	0,50	0,50	0,50	…	0,75	0,75	0,75
$CI_i(t)$	0,50	0,50	0,50	…	0,75	0,75	0,75
$CIA_i(t)$	0,50	0,06	0,08	…	0	0	0
$CIR_i(t)$	0,50	0,44	0,42	…	0,75	0,75	0,75

Табела 6. Динамика Boolecube/ Hillcube модела

t	0	1	2	…	6	7	8
$SLP_i(t)$	0,50	0,50	0,50	…	0,50	0,50	0,50
$wg_i(t)$	0,50	0,25	0,07	…	0	0	0
$WG_i(t)$	0,50	0,50	0,25	…	0	0	0
$en_i(t)$	0,50	0,38	0,38	…	0,38	0,38	0,38
$EN_i(t)$	0,50	0,50	0,38	…	0,38	0,38	0,38
$hh_i(t)$	0,50	0,25	0.26	…	0,14	0,14	0,14
$HH_i(t)$	0,50	0,50	0,25	…	0,19	0,14	0,14
$ptc_i(t)$	0,50	0,13	0,01	…	0	0	0
$PTC_i(t)$	0,50	0,56	0,25	…	0	0	0
$ci_i(t)$	0,50	0,50	0,50	…	0,63	0,63	0,63
$CI_i(t)$	0,50	0,50	0,50	…	0,63	0,63	0,63
$CIA_i(t)$	0,50	0,02	0,03	…	0	0	0
$CIR_i(t)$	0,50	0,48	0,47	…	0,63	0,63	0,63

Табела 7. Динамика конзистентног фази модела

t	0	1	2	…	44	45	46
$SLP_i(t)$	0,20	0,20	0,20	…	0,20	0,20	0,20
$wg_i(t)$	0,20	0,08	0,02	…	0	0	0
$WG_i(t)$	0,20	0,20	0,08	…	0	0	0
$en_i(t)$	0,20	0,16	0,16	…	0,16	0,16	0,16
$EN_i(t)$	0,20	0,20	0,16	…	0,16	0,16	0,16
$hh_i(t)$	0,20	0,16	0,17	…	0,03	0,03	0,03
$HH_i(t)$	0,20	0,20	0,16	…	0,03	0,03	0,03
$ptc_i(t)$	0,20	0,13	0,02	…	0	0	0
$PTC_i(t)$	0,20	0,33	0,36	…	0,01	0	0
$ci_i(t)$	0,20	0,80	0,80	…	0,84	0,84	0,84
$CI_i(t)$	0,20	0,20	0,80	…	0,84	0,84	0,84
$CIA_i(t)$	0,20	0,03	0,04	…	0	0	0
$CIR_i(t)$	0,20	0,17	0,16	…	0,84	0,84	0,84

Табела 8. Динамика Boolecube/ Hillcube модела

t	0	1	2	…	15	16	17
$SLP_i(t)$	0,20	0,20	0,20	…	0,20	0,20	0,20
$wg_i(t)$	0,20	0,08	0,02	…	0	0	0
$WG_i(t)$	0,20	0,20	0,08	…	0	0	0
$en_i(t)$	0,20	0,29	0,29	…	0,29	0,29	0,29
$EN_i(t)$	0,20	0,20	0,29	…	0,29	0,29	0,29
$hh_i(t)$	0,20	0,16	0,16	…	0,08	0,08	0,08
$HH_i(t)$	0,20	0,20	0,16	…	0,08	0,08	0,08
$ptc_i(t)$	0,20	0,13	0,01	…	0	0	0
$PTC_i(t)$	0,20	0,30	0,30	…	0,1	0	0
$ci_i(t)$	0,20	0,80	0,80	…	0,71	0,71	0,71
$CI_i(t)$	0,20	0,20	0,80	…	0,71	0,71	0,71
$CIA_i(t)$	0,20	0,02	0,03	…	0	0	0
$CIR_i(t)$	0,20	0,18	0,17	…	0,71	0,71	0,71

4.5. Закључак

Булова мрежа је експертски формализам који се користи за сложене системе у којима се каузалне интеракције између компоненти могу представити „стрмим“ сигмоидама. У таквим системима компоненте испод (изнад) одређеног нивоа активације не утичу или врло мало утичу на друге, а изнад (испод) тог нивоа утицај нагло расте и улази у сатурацију. Бинарна репрезентација интеракција у класичним Буловим мрежама је идеализација сигмоидних интеракција.

Класична Булова мрежа еволуира у времену на основу принципа истинитосне функционалности. Стање чвора класичне Булове мреже израчунава се применом Булових операција над стањима из претходног тренутка времена чворова који се у њега уливају. Логичку валидност динамике модела обезбеђују закони Булове алгебре. Формализам омогућава квалитативно третирање система окарактерисаних мноштвом компоненти које каузално интерагују.

Булове мреже могу се генерализовати увођењем градације што подразумева реалновредносну реализацију Булових променљивих и функција чворова. Увођење градације у Булове мреже омогућава да се формализам користи за квантитативно третирање сложених система. У литератури су предложена два приступа генерализацији Булове мреже и то:

- Конвенционални фази приступ, заснован на принципу истинитосне функционалности (*Wittmann and Theis, 2011, Kok and Wang, 2006, Cao et al. 2007, Morris et al. 2011, Poret et al. 2014*) .
- Boolecube/ Hillcube приступ, заснован на поступку мултилинеарне интерполације Булових функција (*Wittmann et al. 2009*).

У дисертацији Булове мреже су генерализоване коришћењем конзистентне фази логике. Увођење градације реализовано је трансформацијом Булових функција чворова у генерализоване Булове полиноме што је учињено у униполарном и биполарном оквиру. Предложени приступ заснован је на принципу структурне функционалности. Генерализоване Булове мреже своде се на конвенционалне када су почетна стања бинарна.

Помоћу у дисертацији предложеног приступа, конвенционалног фази и Boolecube/ Hillcube приступа генерализована су два класична модела из литературе. Генерализовани модели симулирани су за различита почетна стања и њихова динамика је упоређена. Показано је да конвенционални фази приступ није Буловски конзистентан те логичка валидност динамике генерализованог модела није загарантована, а да је Boolecube/ Hillcube приступ специјални случај предложеног који се добија када се сваки оператор генерализованог производа реализује као алгебарски производ. Boolecube/ Hillcube приступ је адекватан за системе чије су све компоненте различите природе. У дисертацији предложени приступ гарантује логичку валидност динамике модела и омогућава третирање природе компоненти система употребом различитих оператора генерализованог производа.

5. УВОЂЕЊЕ ЛОГИКЕ У ФАЗИ КОГНИТИВНЕ МАПЕ

Фази когнитивна мапа је експертски формализам за сложене системе (*Kosko 1986, 1988, Dickerson and Kosko 1994, Papageorgiou and Stylios 2008*). Користи се у менаџменту и организационим наукама, политичким и друштвеним наукама, инжењерству, екологији, медицини, биологији, роботици, информационим технологијама (*Aguilar 2005, Papageorgiou 2013a, 2013b, Papageorgiou and Salmeron 2013, Glykas 2010*).

Фази когнитивне мапе користе се под претпоставком да компоненте система међусобно не интерагују када каузално утичу на друге. Немогућност третирања логичких интеракција између узрока представља значајно ограничење формализма. (*Papageorgiou and Salmeron 2013*). Проблем је решаван увођењем оператора OWA у фази когнитивне мапе чиме је омогућено третирање AND/ OR интеракција (*Lv and Zhou 2007, Wang and Wang 2013*).

У овом поглављу дисертације фази когнитивне мапе биће генерализоване увођењем оператора логичке агрегације чиме ће бити омогућено третирање произвољних логичких интеракција између узрока. Биће предложена техника за спајање генерализованих фази когнитивних мапа.

5.1. Конвенционални модел

Фази когнитивна мапа има форму отежаног цикличног диграфа што се дефинише тројком:

$$CM = (N, E, W) \tag{5.1}$$

где је $N = \{x_1, ..., x_M\}$ скуп чворова графа који представљају компоненте система, E је скуп грана графа које представљају каузалне интеракције између компоненти, W је скуп биполарних тежина грана које дефинишу природу и интензитет каузалних релација.

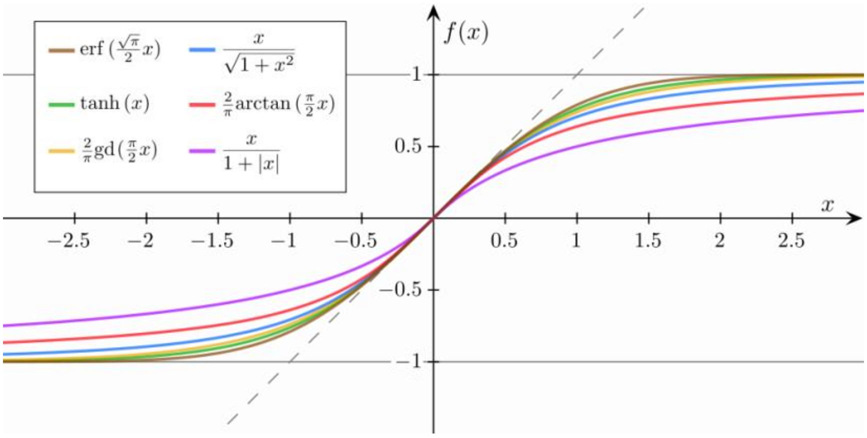
Фази когнитивне мапе приказане су на Сликама 14, 15, 16.

Динамика се уводи у фази когнитивне мапе додељивањем реалновредносне променљиве и функције чворовима графа што се дефинише на следећи начин:

$$x_m(t+1) = f\left(w_{m_1} x_{m_1}(t) + \ldots + w_{m_{K_m}} x_{m_{K_m}}(t)\right) \tag{5.2}$$

где је $x_m(t+1) \in [-1,1]$ стање чвора x_m у тренутку *t+1*, $x_{m_1}(t),\ldots,x_{m_{K_m}}(t) \in [-1,1]$ су узроци чвора x_m тј. стања из претходног тренутка времена чворова који се уливају у x_m, K_m је број узрока тј. чворова који се уливају у x_m, $w_{m_k} \in [-1,1]$ је тежина гране графа која дефинише природу (позитивну или негативну) и интензитет каузалног утицаја чвора x_{m_k} на x_m, $k=1,\ldots,K_m$, $m=1,\ldots,M$, M је број чворова графа, $f : R \to [-1,1]$ је сигмоида која нормализује суму на биполарни интервал.

Сигмоиде су приказане на Слици 13.



Слика 13. Сигмоидне функције[3]

Моделу (5.2) описује систем у коме узроци $x_{m_1}(t),\ldots,x_{m_{K_m}}(t)$, $m=1,\ldots,M$ не интерагују када утичу на последицу $x_m(t+1)$. Значајно ограничења формализма је немогућност третирања AND/ OR/ NOT интеракција између узрока (*Papageorgiou and Salmeron 2013*).

[3] Аутор графика је Georg Johann. Преузето са https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Gjl-t(x).svg#file у складу са лиценцом https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/.

5.1.1. Спајање конвенционалних модела

Произвољне фази когнитивне мапе могу се агрегирати - спојити у јединствен модел (*Kosko 1988, Dickerson and Kosko 1994*). Агрегацијом се постиже консензус експерата о домену у случају спајања модела истог домена или се добија опис сложеног система у случају спајања фази когнитивних мапа различитих домена.

Фази когнитивној мапи одговара квадратна матрица:

$$W = \begin{bmatrix} w_{1_1} & \cdots & w_{1_M} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{M_1} & \cdots & w_{M_M} \end{bmatrix} \tag{5.3}$$

где је $w_{m_i} \in [-1,1]$ интензитет каузалног утицаја чвора x_i на x_m, $i,m = 1,...,M$, M је број чворова графа.

Уколико у графу не постоји грана од чвора x_i ка x_m тада је $w_{m_i} = 0$.

Динамика фази когнитивне може се дефинисати на следећи начин:

$$x(t+1) = f\left(Wx(t)\right) \tag{5.4}$$

где је $x(t) = [x_m(t) \mid m = 1,...,M]^T$ стање фази когнитивне мапе у тренутку *t*, $x_m(t) \in [-1,1]$ је стање чвора x_m у тренутку t, $m = 1,...,M$, $f : R \to [-1,1]$ је сигмоида.

Нека су $M_1,...,M_F$ фази когнитивне мапе које је потребно агрегирати и нека овим моделима одговарају матрице $W_1,...,W_F$. Први корак агрегације је проширивање матрица како би све биле исте димензије. Матрица $W_i^P, i = 1,...,F$ добија се проширивањем матрице W_i редом и колоном за сваки чвор која није дефинисан у моделу M_i, а јесте у осталим моделима. Елементи додатих редова и колона добијају вредност нула јер чворови укључени у проширени модел не интерагују каузално са осталим чворовима.

Матрица агрегираног модела је отежана сума проширених матрица $W_1^P,...,W_F^P$ што се дефинише на следећи начин:

$$W_A = \sum_{i=1}^{F} \omega_i W_i^P \tag{5.5}$$

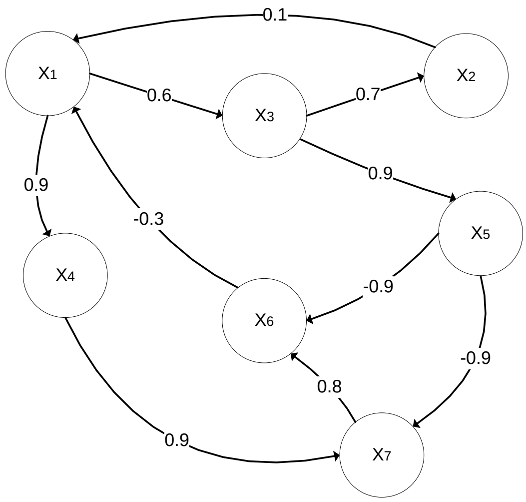
где је W_A матрица агрегираног модела, W_i^P је проширена матрица модела $M_i, i=1,...,F$, F је број модела који се спајају, $\omega_1,...,\omega_F \in [0,1]$, $\sum_{i=1}^{F} \omega_i = 1$ су тежине које дефинишу значај – релевантност модела $M_1,...,M_F$.

Динамика агрегираног модела дефинише се на следећи начин:

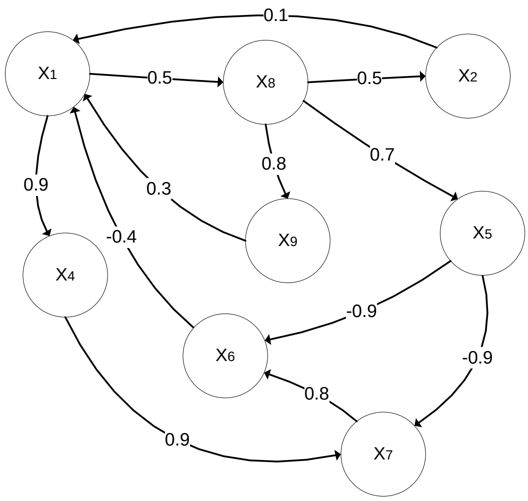
$$x(t+1) = f\left(W_A x(t)\right) \tag{5.6}$$

где је $x(t)=[x_m(t) \,|\, m=1,...,D]^T$ стање агрегиране фази когнитивне мапе у тренутку *t*, $x_m(t) \in [-1,1]$ је стање чвора x_m у тренутку *t*, $m=1,...,D$, D је димензија матрице агрегираног модела и проширених матрица модела $M_1,...,M_F$, $f: R \to [-1,1]$ је сигмоида.

Агрегација је илустрована у случају две фази когнитивне мапе истог домена које су приказане на Сликама 14 и 15. Први модел преузет је из (*Hagiwara 1992*), а други из (*Khan and Quaddus 2004*).



Слика 14. Фази когнитивна мапа – први модел



Слика 15. Фази когнитивна мапа - други модел

Модел са Слике 15 за разлику од модела са Слике 14 садржи чворове x_8 и x_9, а не садржи чвор x_3.

Матрица W_{14} фази когнитивне мапе са Слике 14 проширује се додавањем реда и колоне за чворове x_8 и x_9 где елементи нових редова и колона добијају вредност нула.

Матрица W_{15} фази когнитивне мапе са Слике 15 проширује се додавањем реда и колоне за чвор x_3 где елементи новог реда и колоне добијају вредност нула.

Матрица која одговара графу са Слике 14 је:

$$W_{14} = \begin{bmatrix} 0 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & -0.3 & 0 \\ 0 & 0 & 0.7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.9 & 0 & 0.8 \\ 0 & 0 & 0 & 0.9 & -0.9 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{5.7}$$

Проширена матрица модела са Слике 14 је:

$$W_{14}^{P}=\begin{bmatrix}0 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & -0.3 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0.7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0.6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0.9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0.9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.9 & 0 & 0.8 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0.9 & -0.9 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \tag{5.8}$$

Проширена матрица модела са Слике 15 је:

$$W_{15}^{P}=\begin{bmatrix}0 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & -0.4 & 0 & 0 & 0.3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0.9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.7 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.9 & 0 & 0.8 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0.9 & -0.9 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8 & 0\end{bmatrix} \tag{5.9}$$

Матрица агрегираног модела дефинише се на следећи начин:

$$W_A = \omega_1 W_{14}^{P} + \omega_2 W_{15}^{P} \tag{5.10}$$

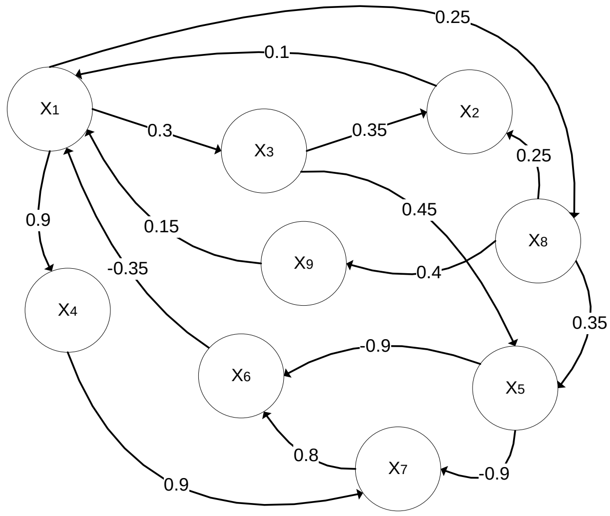
где $\omega_1, \omega_2 \in [0,1]$, $\omega_1 + \omega_2 = 1$.

Динамика агрегираног модела дефинише се на следећи начин:

$$\begin{aligned} x(t+1) &= f\left(W_A x(t)\right) = \\ &= f\left(\left(\omega_1 W_{14}^{P} + \omega_2 W_{15}^{P}\right) x(t)\right) \end{aligned} \tag{5.11}$$

где је $x(t) = [x_m(t) \mid m = 1,...,9]^T$ стање агрегиране фази когнитивне мапе у тренутку *t*, $x_m(t) \in [-1,1]$ је стање чвора x_m у тренутку *t*, $m = 1,...,9$, $\omega_1, \omega_2 \in [0,1]$, $\omega_1 + \omega_2 = 1$, $f : R \to [-1,1]$ је сигмоида.

На пример, за $\omega_1 = \omega_2 = 0.5$, граф агрегираног модела приказан је на Слици 16.



Слика 16. Агрегирана фази когнитивна мапа

5.2. Генерализација оператором OWA

Предложено је да се фази когнитивне мапе генерализују увођењем оператора OWA што омогућава третирање AND/ OR интеракција између узрока (*Lv and Zhou 2007, Wang and Wang 2013*).

Динамика генерализоване фази когнитивне мапе дефинише се на следећи начин:

$$\begin{aligned} x_m(t+1) &= f\left(K_m \cdot OWA_m\left(w_{m_1} x_{m_1}(t),\dots,w_{m_{K_m}} x_{m_{K_m}}(t)\right)\right) = \\ &= f\left(K_m \cdot \left(\omega_{m_1} a_{m_1}(t) + \dots + \omega_{m_{K_m}} a_{m_{K_m}}(t)\right)\right) \end{aligned} \tag{5.12}$$

где је $x_m(t+1) \in [-1,1]$ стање чвора x_m у тренутку *t+1*, $x_{m_1}(t),\dots,x_{m_{K_m}}(t) \in [-1,1]$ су узроци тј. стања из претходног тренутка времена чворова који се уливају у x_m, K_m је број узрока тј. чворова који се уливају у x_m, $w_{m_k} \in [-1,1]$ је тежина гране графа која дефинише природу (позитивну или негативну) и интензитет каузалног утицаја чвора x_{m_k} на x_m, $k = 1,\dots,K_m$, $OWA_m\left(w_{m_1} x_{m_1}(t),\dots,w_{m_{K_m}} x_{m_{K_m}}(t)\right) \in [-1,1]$ је оператор агрегације чвора x_m, $a_{m_i}(t), i=1,...,K_m$ је i-та највећа вредност колекције $\{w_{m_1} x_{m_1}(t),..., w_{m_{K_m}} x_{m_{K_m}}(t)\}$, $a_{m_1}(t),...,a_{m_{K_m}}(t) \in [-1,1]$, $a_{m_1}(t) \geq ... \geq a_{m_{K_m}}(t)$, $a_{m_1}(t) \geq \omega_{m_1} a_{m_1}(t) + ... + \omega_{m_{K_m}} a_{m_{K_m}}(t) \geq a_{m_{K_m}}(t)$, $\omega_{m_1},...,\omega_{m_{K_m}} \in [0,1]$, $\omega_{m_1} + ... + \omega_{m_{K_m}} = 1$, $m=1,...,M$, M је број чворова графа, $f: R \to [-1,1]$ је сигмоида.

Генерализована фази когнитивна мапа (5.12) при различитим вредностима тежина $\omega_{m_1},...,\omega_{m_{K_m}}$, $m=1,...,M$ описује различите ситуације и то:

- У конвенционалном случају узроци $x_{m_1}(t),...,x_{m_{K_m}}(t)$ не интерагују те се тежине дефинишу на следећи начин:

$$\omega_{m_1},...,\omega_{m_{K_m}} = \frac{1}{K_m} \tag{5.13}$$

- У случају дисјункције узрока $x_{m_1}(t),...,x_{m_{K_m}}(t)$ тежине се дефинишу на следећи начин:

$$\begin{aligned} \omega_{m_1} &= 1 \\ \omega_{m_2},...,\omega_{m_{K_m}} &= 0 \end{aligned} \tag{5.14}$$

- У случају коњукције узрока $x_{m_1}(t),...,x_{m_{K_m}}(t)$ тежине се дефинишу на следећи начин:

$$\begin{aligned} \omega_{m_{K_m}} &= 1 \\ \omega_{m_1},...,\omega_{m_{K_m-1}} &= 0 \end{aligned} \tag{5.15}$$

Увођењем оператора OWA у фази когнитивне мапе добијена је могућност третирања AND/ OR интеракција између узрока. У литератури је истакнута потреба за третирањем AND/ OR/ NOT интеракција (*Papageorgiou and Salmeron 2013*). Проблем третирања произвољних логичких интеракција између узрока биће решен у следећем одељку.

5.3. Генерализација консистентном фази логиком

У овом одељку фази когнитивне мапе биће генерализоване увођењем оператора логичке агрегације што ће омогућити третирање произвољних логичких интеракција између узрока. Предложена су два приступа за увођење логике у фази когнитивне мапе и илустровано је третирање AND/ OR/ NOT интеракција у складу са оба приступа.

5.3.1. Први приступ

Према првом приступу модел (5.12) генерализује се тако што се уместо оператора OWA користи оператор логичке агрегације.

Динамика генерализоване фази когнитивне мапе дефинише се на следећи начин:

$$
\begin{aligned}
x_m(t+1) &= f\left(K_m \cdot \left(2 \cdot Agg_m\left(\frac{w_{m_1} x_{m_1}(t)+1}{2}, \dots, \frac{w_{m_{K_m}} x_{m_{K_m}}(t)+1}{2}\right) - 1\right)\right) = \\
&= f\left(K_m \cdot \left(2 \cdot \vec{\sigma}_m \vec{\alpha}_m(t) - 1\right)\right)
\end{aligned}
\tag{5.16}
$$

где је $x_m(t+1) \in [-1,1]$ стање чвора x_m у тренутку *t+1*, $x_{m_1}(t), \dots, x_{m_{K_m}}(t) \in [-1,1]$ су узроци тј. стања из претходног тренутка времена чворова који се уливају у x_m, K_m је број узрока тј. чворова који се уливају у x_m, $w_{m_k} \in [-1,1]$ је тежина гране графа која дефинише природу (позитивну или негативну) и интензитет каузалног утицаја чвора x_{m_k} на x_m, $k = 1, \dots, K_m$, $\vec{\sigma}_m \vec{\alpha}_m(t) \in [0,1]$ је вредност оператора логичке агрегације чвора x_m у тренутку *t*, $\vec{\sigma}_m$ је структура оператора логичке агрегације, $\vec{\alpha}_m(t)$ је вектор атомских полинома Булове алгебре $BA(\Omega_m)$ у тренутку *t*, $\Omega_m = \left\{\frac{w_{m_1} x_{m_1}(t)+1}{2}, \dots, \frac{w_{m_{K_m}} x_{m_{K_m}}(t)+1}{2}\right\}$, $m = 1, \dots, M$, M је број чворова графа, $f : R \to [-1,1]$ је сигмоида.

У конвенционалном случају узроци логички не интерагују те је оператор логичке агрегације аритметичка средина. Динамика чвора x_m дефинише се на следећи начин:

$$x_m(t+1) = f\left(K_m\left(2\left(\frac{1}{K_m}\frac{w_{m_1}x_{m_1}(t)+1}{2}+\ldots+\frac{1}{K_m}\frac{w_{m_{K_m}}x_{m_{K_m}}(t)+1}{2}\right)-1\right)\right)= \\ = f\left(K_m\left(2\cdot\vec{\sigma}_m^{AVG}\vec{\alpha}_m(t)-1\right)\right) \tag{5.17}$$

где $x_m(t+1)\in[-1,1]$, $x_{m_1}(t),\ldots,x_{m_{K_m}}(t)\in[-1,1]$, $w_{m_k}\in[-1,1]$, $k=1,\ldots,K_m$, K_m је број чворова који се уливају у чвор x_m, $\vec{\sigma}_m^{AVG}\vec{\alpha}_m(t)\in[0,1]$ је вредност оператора логичке агрегације у случају логички неинтерагујућих узрока у тренутку *t*, $\vec{\sigma}_m^{Avg}=\frac{1}{K_m}\vec{\sigma}_{\frac{w_{m_1}x_{m_1}(t)+1}{2}}+\ldots+\frac{1}{K_m}\vec{\sigma}_{\frac{w_{m_{K_m}}x_{m_{K_m}}(t)+1}{2}}$ је структура оператора логичке агрегације (аритметичке средине), $\vec{\sigma}_{\frac{w_{m_1}x_{m_1}(t)+1}{2}},\ldots,\vec{\sigma}_{\frac{w_{m_{K_m}}x_{m_{K_m}}(t)+1}{2}}$ су структуре примарних елемената $BA(\Omega_m)$, $\vec{\alpha}_m(t)$ је вектор атомских полинома Булове алгебре $BA(\Omega_m)$ у тренутку *t*, $f:R\to[-1,1]$ је сигмоида.

Оператор логичке агрегације може да опише произвољну логичку интеракцију између узрока. На пример, у случају XOR интеракције узрока $x_{m_1}(t)$ и $x_{m_2}(t)$, под претпоставком да остали узроци логички не интерагују, динамика чвора x_m може се дефинисати на следећи начин:

$$x_m(t+1)= \\ = f\left(K_m\left(2\left(\frac{2}{K_m}\left(\left(\frac{w_{m_1}x_{m_1}(t)+1}{2}\right)\underline{\vee}\left(\frac{w_{m_2}x_{m_2}(t)+1}{2}\right)\right)^{\min}+\ldots+\frac{1}{K_m}\left(\frac{w_{m_{K_m}}x_{m_{K_m}}(t)+1}{2}\right)\right)-1\right)\right)= \\ = f\left(K_m\left(2\left(\frac{2}{K_m}\left(\frac{w_{m_1}x_{m_1}(t)+1}{2}+\frac{w_{m_2}x_{m_2}(t)+1}{2}-2\min\left(\frac{w_{m_1}x_{m_1}(t)+1}{2},\frac{w_{m_2}x_{m_2}(t)+1}{2}\right)\right.\right.\right.\right. \\ \left.\left.\left.\left.+\ldots+\frac{1}{K_m}\frac{w_{m_{K_m}}x_{m_{K_m}}(t)+1}{2}\right)-1\right)\right)= \\ = f\left(K_m\left(2\cdot\vec{\sigma}_m^{XOR}\vec{\alpha}_m(t)-1\right)\right) \tag{5.18}$$

где $x_m(t+1)\in[-1,1]$, $x_{m_1}(t),...,x_{m_{K_m}}(t)\in[-1,1]$, $w_{m_k}\in[-1,1]$, $k=1,...,K_m$, K_m је број узрока тј. чворова који се уливају у чвор x_m, $\vec{\sigma}_m^{XOR}\vec{\alpha}_m(t)\in[0,1]$ је вредност оператора логичке агрегације у случају XOR интеракције узрока $x_{m_1}(t)$ и $x_{m_2}(t)$ и неинтерагујућих осталих узрока у тренутку *t*, $\vec{\sigma}_m^{XOR}=\frac{2}{K_m}\vec{\sigma}_{\frac{w_{m_1}x_{m_1}(t)+1}{2}}\veebar\vec{\sigma}_{\frac{w_{m_2}x_{m_2}(t)+1}{2}}+...+\frac{1}{K_m}\vec{\sigma}_{\frac{w_{m_{K_m}}x_{m_{K_m}}(t)+1}{2}}$ је структура оператора логичке агрегације, $\vec{\alpha}_m(t)$ је вектор атомских полинома Булове алгебре $BA(\Omega_m)$ у тренутку *t*, $f:R\rightarrow[-1,1]$ је сигмоида.

У случају коњукције узрока $x_{m_1}(t),...,x_{m_{K_m}}(t)$ динамика чвора x_m дефинише се на следећи начин:

$$\begin{aligned}
x_m(t+1)&=f\left(K_m\left(2\left(\left(\frac{w_{m_1}x_{m_1}(t)+1}{2}\right)\wedge...\wedge\left(\frac{w_{m_{K_m}}x_{m_{K_m}}(t)+1}{2}\right)\right)^{\otimes}-1\right)\right)=\\
&=f\left(K_m\left(2\cdot\left(\frac{w_{m_1}x_{m_1}(t)+1}{2}\otimes...\otimes\frac{w_{m_{K_m}}x_{m_{K_m}}(t)+1}{2}\right)-1\right)\right)=\\
&=f\left(K_m\left(2\cdot\vec{\sigma}_m^{AND}\vec{\alpha}_m(t)-1\right)\right)
\end{aligned}\tag{5.19}$$

где $x_m(t+1)\in[-1,1]$, $x_{m_1}(t),...,x_{m_{K_m}}(t)\in[-1,1]$, $w_{m_k}\in[-1,1]$, $k=1,...,K_m$, K_m је број узрока тј. чворова који се уливају у чвор x_m, $\vec{\sigma}_m^{AND}\vec{\alpha}_m(t)\in[0,1]$ је вредност оператора логичке агрегације у случају коњукције узрока у тренутку *t*, $\vec{\sigma}_m^{AND}=\vec{\sigma}_{\frac{w_{m_1}x_{m_1}(t)+1}{2}}\wedge...\wedge\vec{\sigma}_{\frac{w_{m_{K_m}}x_{m_{K_m}}(t)+1}{2}}$ је структура оператора логичке агрегације, $\vec{\alpha}_m(t)$ је вектор атомских полинома Булове алгебре $BA(\Omega_m)$ у тренутку *t*, $f:R\rightarrow[-1,1]$ је сигмоида, $\otimes$ је оператор генерализованог производа.

У случају дисјункције узрока $x_{m_1}(t),...,x_{m_{K_m}}(t)$ динамика чвора x_m дефинише се на следећи начин:

$$x_m(t+1) = f\left(K_m\left(2\left(\left(\frac{w_{m_1}x_{m_1}(t)+1}{2}\right)\vee\ldots\vee\left(\frac{w_{m_{K_m}}x_{m_{K_m}}(t)+1}{2}\right)\right)^{\otimes}-1\right)\right)= \\ = f\left(K_m\left(2\cdot\vec{\sigma}_m^{OR}\vec{\alpha}_m(t)-1\right)\right) \tag{5.20}$$

где $x_m(t+1)\in[-1,1]$, $x_{m_1}(t),\ldots,x_{m_{K_m}}(t)\in[-1,1]$, $w_{m_k}\in[-1,1]$, $k=1,\ldots,K_m$, K_m је број узрока - чворова који се уливају у чвор x_m, $\vec{\sigma}_m^{OR}\vec{\alpha}_m(t)\in[0,1]$ је вредност оператора логичке агрегације у случају дисјункције узрока у тренутку *t*, $\vec{\sigma}_m^{OR}=\vec{\sigma}_{\frac{w_{m_1}x_{m_1}(t)+1}{2}}\vee\ldots\vee\vec{\sigma}_{\frac{w_{m_{K_m}}x_{m_{K_m}}(t)+1}{2}}$ је структура оператора логичке агрегације, $\vec{\alpha}_m(t)$ је вектор атомских полинома Булове алгебре $BA(\Omega_m)$ у тренутку *t*, $\otimes$ је оператор генерализованог производа.

Уколико се у моделу (5.19) или (5.20) сви оператори генерализованог производа реализују као функције минимума добија се OWA модел, што је дефинисано према (5.21) и (5.22), респективно.

$$x_m(t+1) = f\left(K_m\left(2\left(\left(\frac{w_{m_1}x_{m_1}(t)+1}{2}\right)\wedge\ldots\wedge\left(\frac{w_{m_{K_m}}x_{m_{K_m}}(t)+1}{2}\right)\right)^{\min}-1\right)\right)= \\ = f\left(K_m\left(2\cdot\min\left(\frac{w_{m_1}x_{m_1}(t)+1}{2},\ldots,\frac{w_{m_{K_m}}x_{m_{K_m}}(t)+1}{2}\right)-1\right)\right)= \\ = f\left(K_m\cdot OWA\left(w_{m_1}x_{m_1}(t),\ldots,w_{m_{K_m}}x_{m_{K_m}}(t)\right)\right)= \\ = f\left(K_m\cdot\left(\omega_{m_1}a_{m_1}(t)+\ldots.+\omega_{m_{K_m}}a_{m_{K_m}}(t)\right)\right)= \\ = f\left(K_m\cdot a_{m_{K_m}}(t)\right) \tag{5.21}$$

$$x_m(t+1) = f\left(K_m\left(2\left(\left(\frac{w_{m_1}x_{m_1}(t)+1}{2}\right)\vee\ldots\vee\left(\frac{w_{m_{K_m}}x_{m_{K_m}}(t)+1}{2}\right)\right)^{\min}-1\right)\right)= \\ = f\left(K_m\left(2\max\left(\frac{w_{m_1}x_{m_1}(t)+1}{2},\ldots,\frac{w_{m_{K_m}}x_{m_{K_m}}(t)+1}{2}\right)-1\right)\right)= \\ = f\left(K_m\cdot a_{m_1}(t)\right) \tag{5.22}$$

где је $x_m(t+1)\in[-1,1]$ стање чвора x_m у тренутку $t+1$, $x_{m_1}(t),...,x_{m_{K_m}}(t)\in[0,1]$ су узроци тј. стања из претходног тренутка времена чворова који се уливају у x_m, $w_{m_k}\in[-1,1]$ је тежина гране графа која дефинише природу (позитивну или негативну) и интензитет каузалног утицаја чвора x_{m_k} на x_m, $k=1,...,K_m$, K_m је број чворова који се уливају у чвор x_m, $\min\left(\frac{w_{m_1}x_{m_1}(t)+1}{2},...,\frac{w_{m_{K_m}}x_{m_{K_m}}(t)+1}{2}\right)\in[0,1]$ је вредност оператора логичке агрегације у случају коњукције узрока у тренутку *t*, $\max\left(\frac{w_{m_1}x_{m_1}(t)+1}{2},...,\frac{w_{m_{K_m}}x_{m_{K_m}}(t)+1}{2}\right)\in[0,1]$ је вредност оператора логичке агрегације у случају дисјункције узрока у тренутку *t*, $OWA\left(w_{m_1}x_{m_1}(t)+...+w_{m_{K_m}}x_{m_{K_m}}(t)\right)\in[-1,1]$, $a_{m_{K_m}}(t)$ и $a_{m_1}(t)$ су најмања и највећа вредност колекције $\left\{w_{m_1}x_{m_1}(t),...,w_{m_{K_m}}x_{m_{K_m}}(t)\right\}$ $a_{m_1}(t)\geq\omega_{m_1}a_{m_1}(t)+...+\omega_{m_{K_m}}a_{m_{K_m}}(t)\geq a_{m_{K_m}}(t)$, $\omega_{m_{K_m}}=1$ и $\omega_{m_1},...,\omega_{m_{K_m-1}}=0$ у случају коњукције узрока, $\omega_{m_1}=1$ и $\omega_{m_2},...,\omega_{m_{K_m}}=0$ у случају дисјункције узрока.

5.3.2. Други приступ

Динамика чвора конвенционалне фази когнитивне дефинисана је према (5.2) на следећи начин:

$$x_m(t+1)=f\left(w_{m_1}x_{m_1}(t)+....+w_{m_j}x_{m_j}(t)+...+w_{m_{K_m}}x_{m_{K_m}}(t)\right) \tag{5.23}$$

где је $x_m(t+1)\in[-1,1]$ стање чвора x_m у тренутку $t+1$, $x_{m_1}(t),...,x_{m_{K_m}}(t)\in[0,1]$ су узроци тј. стања из претходног тренутка времена чворова који се уливају у x_m, K_m је број узрока тј. чворова који се уливају у x_m, $w_{m_k}\in[-1,1]$ је тежина гране графа која дефинише природу (позитивну или негативну) и интензитет каузалног утицаја чвора x_{m_k} на x_m, $k=1,...,K_m$, $m=1,...,M$, M је број чворова графа, $f:R\rightarrow[-1,1]$ је сигмоида.

Увођење логике у модел (5.23) илуструјемо под претпоставком да сви узроци осим $x_{m_j}(t)$ позитивно утичу на $x_m(t+1)$. Динамика чвора x_m у том случају може се дефинисати на следећи начин:

$$\begin{aligned} x_m(t+1) &= f\left(w_{m_1}x_{m_1}(t)+....+w_{m_j}x_{m_j}(t)+...+w_{m_{K_m}}x_{m_{K_m}}(t)\right)= \\ &= f\left(\sum_{k=1}^{K_m}\left|w_{m_k}\right|\left(2\left(\frac{w_{m_1}}{\sum_{k=1}^{K_m}\left|w_{m_k}\right|}\frac{x_{m_1}(t)+1}{2}+...+\frac{\left|w_{m_j}\right|}{\sum_{k=1}^{K_m}\left|w_{m_k}\right|}\frac{-x_{m_j}(t)+1}{2}+...+\frac{w_{m_{K_m}}}{\sum_{k=1}^{K_m}\left|w_{m_k}\right|}\frac{x_{m_{K_m}}(t)+1}{2}\right)-1\right)\right) \\ &= f\left(\sum_{k=1}^{K_m}\left|w_{m_k}\right|\left(2\cdot\vec{\sigma}_m^{\Sigma}\vec{\alpha}_m(t)-1\right)\right) \end{aligned} \quad (5.24)$$

где $x_m(t+1)\in[-1,1]$ стање чвора x_m у тренутку t+1, $x_{m_1}(t),...,x_{m_{K_m}}(t)\in[0,1]$ су узроци тј. стања из претходног тренутка времена чворова који се уливају у x_m, $w_{m_k}\in[-1,1]$ је тежина гране графа која дефинише природу (позитивну или негативну) и интензитет каузалног утицаја чвора x_{m_k} на x_m,, $k=1,...,K_m$, K_m је број узрока тј. чворова који се уливају у чвор x_m, $\vec{\sigma}_m^{\Sigma}\vec{\alpha}_m(t)\in[0,1]$ је вредност оператора логичке агрегације (отежана сума) у случају неинтерагујућих узрока у тренутку t, $\vec{\sigma}_m^{\Sigma}=\frac{w_{m_1}}{\sum_{k=1}^{K_m}\left|w_{m_k}\right|}\vec{\sigma}_{\frac{x_{m_1}+1}{2}}+...+\frac{\left|w_{m_j}\right|}{\sum_{k=1}^{K_m}\left|w_{m_k}\right|}\vec{\sigma}_{\frac{-x_{m_j}+1}{2}}+...+\frac{w_{m_{K_m}}}{\sum_{k=1}^{K_m}\left|w_{m_k}\right|}\vec{\sigma}_{\frac{x_{m_{K_m}}+1}{2}}$ је структура отежане суме, $\vec{\sigma}_{\frac{x_{m_1}+1}{2}},...,\vec{\sigma}_{\frac{-x_{m_j}+1}{2}},...,\vec{\sigma}_{\frac{x_{m_{K_m}}+1}{2}}$ су структуре примарних елемената $BA(\Omega_m)$, $\vec{\alpha}_m(t)$ је вектор атомских полинома Булове алгебре $BA(\Omega_m)$ у тренутку t, $\Omega_m=\left\{\frac{x_{m_1}(t)+1}{2},...,\frac{-x_{m_j}(t)+1}{2},....,\frac{x_{m_{K_m}}(t)+1}{2}\right\}$, $f:R\to[-1,1]$ је сигмоида.

Оператор логичке агрегације може да опише произвољну логичку интеракцију између узрока. На пример, у случају XOR интеракције узрока $x_{m_1}(t)$ и $x_{m_j}(t)$, под претпоставком да остали узроци логички не интерагују, динамика чвора x_m дефинише се на следећи начин:

$$x_m(t+1)=$$
$$f\left(\sum_{k=1}^{K_m}\left|w_{m_k}\right|\left(2\left(\frac{W_{m_1}+\left|W_{m_j}\right|}{\sum_{k=1}^{K_m}\left|W_{m_k}\right|}\left(\left(\frac{x_{m_1}(t)+1}{2}\right)\veebar\left(\frac{-x_{m_j}(t)+1}{2}\right)\right)^{\min}+\ldots+\frac{W_{m_{K_m}}}{\sum_{k=1}^{K_m}\left|W_{m_k}\right|}\frac{x_{m_{K_m}}(t)+1}{2}\right)-1\right)\right)=$$
$$=f\left(\sum_{k=1}^{K_m}\left|w_{m_k}\right|\left(2\left(\frac{W_{m_1}+\left|W_{m_j}\right|}{\sum_{k=1}^{K_m}\left|W_{m_k}\right|}\left(\frac{x_{m_1}(t)+1}{2}+\frac{-x_{m_j}(t)+1}{2}-2\min\left(\frac{x_{m_1}(t)+1}{2}\frac{-x_{m_j}(t)+1}{2}\right)\right)\right.\right.\right. \tag{5.25}$$
$$\left.\left.\left.+\ldots+\frac{W_{m_{K_m}}}{\sum_{k=1}^{K_m}\left|W_{m_k}\right|}\frac{x_{m_{K_m}}(t)+1}{2}\right)-1\right)\right)=$$
$$=f\left(\sum_{k=1}^{K_m}\left|w_{m_k}\right|\left(2\cdot\vec{\sigma}_m^{XOR}\vec{\alpha}_m(t)-1\right)\right)$$

где $x_m(t+1)\in[-1,1]$, $x_{m_1}(t),\ldots,x_{m_j}(t),\ldots,x_{m_{K_m}}(t)\in[-1,1]$, $w_{m_k}\in[-1,1]$, $k=1,\ldots,K_m$, K_m је број узрока тј. чворова који се уливају у чвор x_m, $\vec{\sigma}_m^{XOR}\vec{\alpha}_m(t)\in[0,1]$ је вредност оператора логичке агрегације у случају XOR интеракције узрока $x_{m_1}(t)$ и $x_{m_j}(t)$ и неинтерагујућих осталих узрока, $\vec{\sigma}_m^{XOR}=\frac{w_{m_1}+\left|w_{m_j}\right|}{\sum_{k=1}^{K_m}\left|w_{m_k}\right|}\vec{\sigma}_{\frac{x_{m_1}+1}{2}}\veebar\vec{\sigma}_{\frac{-x_{m_j}+1}{2}}+\ldots+\frac{w_{m_{K_m}}}{\sum_{k=1}^{K_m}\left|w_{m_k}\right|}\vec{\sigma}_{\frac{x_{m_{K_m}}+1}{2}}$ је структура оператора логичке агрегације, $\vec{\alpha}_m(t)$ је вектор атомских полинома $BA(\Omega_m)$ у тренутку *t*, $f:R\to[-1,1]$ је сигмоида.

У случају коњукције узрока $x_{m_1}(t),\ldots,x_{m_j}(t),\ldots,x_{m_{K_m}}(t)$ динамика чвора x_m дефинише се на следећи начин:

$$x_m(t+1)=f\left(\sum_{k=1}^{K_m}\left|w_{m_k}\right|\left(2\left(\left(\frac{x_{m_1}(t)+1}{2}\right)\wedge\ldots\wedge\left(\frac{-x_{m_j}(t)+1}{2}\right)\wedge\ldots\wedge\left(\frac{x_{m_{K_m}}(t)+1}{2}\right)\right)^{\otimes}-1\right)\right)=$$
$$=f\left(\sum_{k=1}^{K_m}\left|w_{m_k}\right|\left(2\left(\frac{x_{m_1}(t)+1}{2}\otimes\ldots\otimes\frac{-x_{m_j}(t)+1}{2}\otimes\ldots\otimes\frac{x_{m_{K_m}}(t)+1}{2}\right)-1\right)\right)= \tag{5.26}$$
$$=f\left(\sum_{k=1}^{K_m}\left|w_{m_k}\right|\left(2\cdot\vec{\sigma}_m^{AND}\vec{\alpha}_m(t)-1\right)\right)$$

где $x_m(t+1)\in[-1,1]$, $x_{m_1}(t),...,x_{m_j}(t),...,x_{m_{K_m}}(t)\in[-1,1]$, $w_{m_k}\in[-1,1]$, $k=1,...,K_m$, K_m је број узрока тј. чворова који се уливају у чвор x_m, $\vec{\sigma}_m^{AND}\vec{\alpha}_m(t)\in[0,1]$ је вредност оператора логичке агрегације у случају коњукције узрока у тренутку *t*, $\vec{\sigma}_m^{AND}=\vec{\sigma}_{\frac{x_{m_1}+1}{2}}\wedge...\wedge\vec{\sigma}_{\frac{-x_{m_j}+1}{2}}\wedge...\wedge\vec{\sigma}_{\frac{x_{m_{K_m}}+1}{2}}$ је структура оператора логичке агрегације, $\vec{\alpha}_m(t)$ је вектор атомских полинома $BA(\Omega_m)$ у тренутку *t*, $f:R\to[-1,1]$ је сигмоида, $\otimes$ је оператор генерализованог производа.

У случају дисјункције узрока $x_{m_1}(t),...,x_{m_j}(t),...,x_{m_{K_m}}(t)$ динамика чвора x_m дефинише се на следећи начин:

$$\begin{aligned}x_m(t+1)&=f\left(\sum_{k=1}^{K_m}\left|w_{m_k}\right|\left(2\left(\left(\frac{x_{m_1}(t)+1}{2}\right)\vee...\vee\left(\frac{-x_{m_j}(t)+1}{2}\right)\vee...\vee\left(\frac{x_{m_{K_m}}(t)+1}{2}\right)\right)^{\otimes}-1\right)\right)=\\&=f\left(\sum_{k=1}^{K_m}\left|w_{m_k}\right|\left(2\cdot\vec{\sigma}_m^{OR}\vec{\alpha}_m(t)-1\right)\right)\end{aligned}\tag{5.27}$$

где $x_m(t+1)\in[-1,1]$, $x_{m_1}(t),...,x_{m_j}(t),...,x_{m_{K_m}}(t)\in[-1,1]$, $w_{m_k}\in[-1,1]$, $k=1,...,K_m$, K_m је број узрока тј. чворова који се уливају у чвор x_m, $\vec{\sigma}_m^{OR}\vec{\alpha}_m\in[0,1]$ је вредност оператора логичке агрегације у случају дисјункције узрока у тренутку *t*, $\vec{\sigma}_m^{OR}=\vec{\sigma}_{\frac{x_{m_1}+1}{2}}\vee...\vee\vec{\sigma}_{\frac{-x_{m_j}+1}{2}}\vee...\vee\vec{\sigma}_{\frac{x_{m_{K_m}}+1}{2}}$ је структура оператора логичке агрегације, $\vec{\alpha}_m(t)$ је вектор атомских полинома $BA(\Omega_m)$ у тренутку *t*, $f:R\to[-1,1]$ је сигмоида, $\otimes$ је оператор генерализованог производа.

Динамика генерализоване фази когнитивне мапе у општем случају дефинише се на следећи начин:

$$\begin{aligned}x_m(t+1)&=f\left(\sum_{k=1}^{K_m}\left|W_{m_k}\right|\cdot\left(2\cdot Agg_m\left(g\left(\frac{x_{m_1}(t)+1}{2}\right),...,g\left(\frac{x_{m_{K_м}}(t)+1}{2}\right)\right)-1\right)\right)=\\&=f\left(\sum_{k=1}^{K_m}\left|W_{m_k}\right|\cdot\left(2\cdot\vec{\sigma}_m\vec{\alpha}_m(t)-1\right)\right)\end{aligned}\tag{5.28}$$

где је $x_m(t+1)\in[-1,1]$ стање чвора x_m у тренутку *t+1*, $x_{m_1}(t),...,x_{m_{K_m}}(t)\in[0,1]$ су узроци тј. стања чворова из претходног тренутка који се уливају у x_m, K_m је број узрока тј. чворова који се уливају у x_m, $w_{m_k}\in[-1,1]$ је тежина гране графа која дефинише природу (позитивну или негативну) и интензитет каузалног утицаја чвора x_{m_k} на x_m, $k=1,...,K_m$, $Agg_m\left(g\left(\frac{x_{m_1}(t)+1}{2}\right),...,g\left(\frac{x_{m_{K_m}}(t)+1}{2}\right)\right)\in[0,1]$ је вредност оператора логичке агрегације чвора x_m у тренутку *t*, $\vec{\sigma}_m$ је структура оператора логичке агрегације, $\vec{\alpha}_m(t)$ је вектор атомских полинома Булове алгебре $BA(\Omega_m)$ у тренутку *t*, $\Omega_m=\left\{g\left(\frac{x_{m_1}(t)+1}{2}\right),...,g\left(\frac{x_{m_{K_m}}(t)+1}{2}\right)\right\}$, $g\left(\frac{x_{m_k}(t)+1}{2}\right)=\begin{cases}\frac{x_{m_k}(t)+1}{2}, & w_{m_k}\geq 0\\ \frac{-x_{m_k}(t)+1}{2}, & w_{m_k}<0\end{cases}$, $m=1,...,M$, M је број чворова генерализоване фази когнитивне мапе.

5.3.3. Спајање генерализованих модела

У овом одељку предложен је поступак за спајање генерализованих модела. Генерализованој фази когнитивној мапи одговара вектор $V(t)$ који се дефинише на следећи начин:

- У случају приступа из одељка 5.3.1. као:

$$V(t)=\begin{bmatrix}K_1\left(2\cdot\vec{\sigma}_1\vec{\alpha}_1(t)-1\right)\\ \vdots\\ K_M\left(2\cdot\vec{\sigma}_M\vec{\alpha}_M(t)-1\right)\end{bmatrix} \tag{5.29}$$

- У случају приступа из одељка 5.3.2 као:

$$V(t)=\begin{bmatrix}\sum_{k=1}^{K_1}\left|W_{1_k}\right|\cdot\left(2\cdot\vec{\sigma}_1\vec{\alpha}_1(t)-1\right)\\ \vdots\\ \sum_{k=1}^{K_M}\left|W_{M_k}\right|\cdot\left(2\cdot\vec{\sigma}_M\vec{\alpha}_M(t)-1\right)\end{bmatrix} \tag{5.30}$$

где је $\vec{\sigma}_m \vec{\alpha}_m \in [0,1]$ вредност оператора логичке агрегације чвора x_m у тренутку t, $w_{m_k} \in [-1,1]$, $k = 1,...,K_m$, K_m је број узрока тј. чворова који се уливају у чвор x_m, $\vec{\sigma}_m$ је структура оператора логичке агрегације, $\vec{\alpha}_m(t)$ је вектор атомских полинома $BA(\Omega_m)$ у тренутку t, $\Omega_m = \left\{ \frac{w_{m_1} x_{m_1}(t)+1}{2}, ..., \frac{w_{m_{K_m}} x_{m_{K_m}}(t)+1}{2} \right\}$ у случају приступа из одељка 5.3.1., $\Omega_m = \left\{ g\left(\frac{x_{m_1}(t)+1}{2}\right), ..., g\left(\frac{x_{m_{K_m}}(t)+1}{2}\right) \right\}$ у случају приступа из одељка 5.3.2., $x_{m_1}(t),...,x_{m_{K_m}}(t) \in [-1,1]$, $g\left(\frac{x_{m_k}(t)+1}{2}\right) = \begin{cases} \frac{x_{m_k}(t)+1}{2}, w_{m_k} \geq 0 \\ \frac{-x_{m_k}(t)+1}{2}, w_{m_k} < 0 \end{cases}$, $m = 1,...,M$, M је број чворова генерализоване фази когнитивне мапе, $f : R \to [-1,1]$ је сигмоида.

Динамика генерализоване фази когнитивне мапе може се дефинисати на следећи начин:

$$x(t+1) = f\left(V(t)\right) \tag{5.31}$$

где је $x(t) = [x_m(t) \,|\, m = 1,...,M]^T$ стање генерализоване фази когнитивне мапе у тренутку t, $f : R \to [-1,1]$ је сигмоида, M је број чворова.

Нека су $M_1,...,M_F$ генерализоване фази когнитивне мапе које је потребно агрегирати и нека су $V_1(t),...,V_F(t)$ релевантни вектори ових модела. Први корак агрегације је проширивање вектора како би сви били исте димензије. Вектор $V_i^P(t), i = 1,...,F$ добија се проширивањем вектора $V_i(t)$ компонентом за сваки чвор која није садржан у моделу M_i, а јесте у осталим моделима. Додате компоненте добијају вредност нула тј. чворови укључени у проширени модел не интерагују каузално са осталим чворовима.

Вектор агрегираног модела представља отежану суму проширених вектора $V_1^P(t),...,V_F^P(t)$ што се дефинише на следећи начин:

$$V_A(t)=\sum_{i=1}^{F}\omega_i V_i^P(t) \tag{5.32}$$

где $\omega_i \in [0,1]$, $\sum_{i=1}^{F}\omega_i = 1$ су тежине које дефинишу значај – релевантност модела $M_1,...,M_F$, $V_i^P(t)$ је проширени вектор модела $M_i, i=1,...,F$ у тренутку *t*, F је број модела који се агрегирају.

Динамика агрегираног модела дефинише се на следећи начин:

$$x(t+1)=f\left(V_A(t)\right) \tag{5.33}$$

где је $x(t)=[x_m(t)\,|\,m=1,...,D]^T$ стање агрегиране фази когнитивне мапе у тренутку *t*, $V_A(t)$ је вектор агрегираног модела, D је димензија вектора агрегираног модела и проширених вектора $V_1^P(t),...,V_F^P(t)$ модела $M_1,...,M_F$, $f:R\to[-1,1]$ је сигмоида.

У конвенционалном случају узроци логички не интерагују и оператор логичке агрегације сваког чвора генерализоване фази когнитивне мапе је отежана сума. Поступак спајања генерализованих модела своди се на конвенционални представљен у одељку 5.1.1. те се динамика агрегираног модела може дефинисати на следећи начин:

$$\begin{aligned} x(t+1) &= f\left(V_A(t)\right)= \\ &= f\left(\sum_{i=1}^{F}\omega_i V_i^P(t)\right)= \\ &= f\left(\left(\sum_{i=1}^{F}\omega_i W_i^P\right)x(t)\right)= \\ &= f\left(W_A x(t)\right) \end{aligned} \tag{5.34}$$

где је $x(t)=[x_m(t)\,|\,m=1,...,D]^T$ стање агрегираног модела у тренутку *t*, $V_A(t)=W_A x(t)$ је вектор агрегираног модела у тренутку *t*, $W_A=\sum_{i=1}^{F}\omega_i W_i^P$ је матрица агрегираног модела дата у (5.5), $V_i^P(t)=W_i^P x(t)$ је проширени вектор модела $M_i, i=1,...F$ у тренутку *t*, W_i^P је проширена матрица модела M_i, D је димензија вектора $V_A(t), V_1^P(t), ..., V_F^P(t)$ односно квадратних матрица $W_A, W_1^P, ..., W_F^P$, $\omega_1, ..., \omega_F \in [0,1]$, $\sum_{i=1}^{F} \omega_i = 1$, $f : R \to [-1,1]$ је сигмоида.

Предложени поступак спајања генерализованих фази когнитивних мапа илустрован је у случају приступа из одељка 5.3.2. и модела са Слике 14 и Слике 15. Модел са Слике 14 за разлику од модела са Слике 15 садржи чворове x_8 и x_9, а не садржи чвор x_3. Вектор $V_{14}(t)$ модела са Слике 14 проширује се двема компонентама које добијају вредност нула за чворове x_8 и x_9. Вектор $V_{15}(t)$ модела са Слике 15 проширује се компонентом која добија вредност нула за чвор x_3. Проширени вектори модела са Слике 14 и Слике 15 дати су у (5.37) и (5.39), респективно.

У конвенционалном случају динамика агрегираног модела дефинише се на следећи начин:

$$\begin{aligned} x(t+1) &= f\left(V_A(t)\right) = \\ &= f\left(\omega_1 V_{14}^P(t) + \omega_2 V_{15}^P(t)\right) = \\ &= f\left(\left(\omega_1 W_{14}^P + \omega_2 W_{15}^P\right) x(t)\right) = \\ &= f\left(W_A x(t)\right) \end{aligned} \tag{5.35}$$

где је $x(t) = [x_m(t) \mid m = 1,...,9]^T$ стање агрегираног модела у тренутку *t*, $V_A(t) = W_A x(t)$ је вектор агрегираног модела у тренутку *t*, $W_A = \omega_1 W_{14}^P + \omega_2 W_{15}^P$ је матрица агрегираног модела дата у (5.10), $V_{14}^P(t) = W_{14}^P x(t)$ и $V_{15}^P(t) = W_{15}^P x(t)$ су проширени вектори модела са Слике 14 и Слике 15 у тренутку *t*, W_{14}^P и W_{15}^P су проширене матрице модела са Слике 14 и Слике 15 дате у (5.8) и (5.9), $\omega_1, \omega_2 \in [0,1]$, $\omega_1 + \omega_2 = 1$, $f : R \to [-1,1]$ је сигмоида.

Граф агрегираног модела у конвенционалном случају за $\omega_1 = \omega_2 = 0.5$ приказан је на Слици 16.

У општем случају претпостављено је да у моделу са Слике 14 чворови x_4 и x_5 интерагују на XOR начин када утичу на чвор x_7, да у моделу са Слике 15 чворови x_6 и x_9 коњуктивно интерагују када утичу на чвор x_1, а да остали узроци у оба модела логички не интерагују.

Динамика чвора x_7 у генерализованом моделу са Слике 14 дефинише се на следећи начин:

$$\begin{aligned} x_7(t+1) &= f\left(1.8\left(2\left(\left(\frac{x_4(t)+1}{2}\right)\underline{\vee}\left(\frac{-x_5(t)+1}{2}\right)\right)^{\min}-1\right)\right)= \\ &= f\left(1.8\left(2\left(\frac{x_4(t)+1}{2}+\frac{-x_5(t)+1}{2}-2\min\left(\frac{x_4(t)+1}{2},\frac{-x_5(t)+1}{2}\right)\right)-1\right)\right) \end{aligned} \tag{5.36}$$

где $x_4(t), x_5(t), x_7(t+1) \in [-1,1]$, $\left(\frac{x_4(t)+1}{2}+\frac{-x_5(t)+1}{2}-2\min\left(\frac{x_4(t)+1}{2},\frac{-x_5(t)+1}{2}\right)\right) \in [0,1]$ је вредност оператора логичке агрегације у случају XOR интеракције узрока $x_4(t)$ и $x_5(t)$ у тренутку *t*, $f: R \to [-1,1]$ је сигмоида.

Проширени вектор генерализованог модела са Слике 14 је:

$$V_{14}^{P}(t)=\begin{bmatrix} 0.1x_2(t)-0.3x_6(t) \\ 0.7x_3(t) \\ 0.6x_1(t) \\ 0.9x_1(t) \\ 0.9x_3(t) \\ 0.8x_7(t)-0.9x_5(t) \\ 1.8\left(2\left(\frac{x_4(t)+1}{2}+\frac{-x_5(t)+1}{2}-2\min\left(\frac{x_4(t)+1}{2},\frac{-x_5(t)+1}{2}\right)\right)-1\right) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{5.37}$$

где $x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t), x_5,(t)x_6(t), x_7(t), x_8(t), x_9(t) \in [-1,1]$.

Динамика чвора x_1 у генерализованом моделу са Слике 15 дефинише се на следећи начин:

$$x_1(t+1)=f\left(0.8\left(2\left(\frac{0.1}{0.8}\left(\frac{x_2(t)+1}{2}\right)+\frac{0.7}{0.8}\left(\left(\frac{-x_6(t)+1}{2}\right)\wedge\left(\frac{x_9(t)+1}{2}\right)\right)^{\otimes}\right)-1\right)\right)=$$
$$=f\left(0.8\left(2\left(\frac{0.1}{0.8}\frac{x_2(t)+1}{2}+\frac{0.7}{0.8}\left(\frac{-x_6(t)+1}{2}\otimes\frac{x_9(t)+1}{2}\right)\right)-1\right)\right) \tag{5.38}$$

где $x_1(t+1),x_2(t),x_6(t),x_9(t)\in[-1,1]$, $\left(\frac{0.1}{0.8}\frac{x_2(t)+1}{2}+\frac{0.7}{0.8}\left(\frac{-x_6(t)+1}{2}\otimes\frac{x_9(t)+1}{2}\right)\right)\in[0,1]$ је вредност оператора логичке агрегације у случају коњукције узрока $x_6(t)$ и $x_9(t)$ у тренутку *t*, $\otimes$ је оператор генерализованог производа, $f:R\to[-1,1]$ је сигмоида.

Проширени вектор генерализованог модела са Слике 15 је:

$$V_{15}^{P}(t)=\begin{bmatrix} 0.8\left(2\left(\frac{0.1}{0.8}\frac{x_2(t)+1}{2}+\frac{0.7}{0.8}\left(\frac{-x_6(t)+1}{2}\otimes\frac{x_9(t)+1}{2}\right)\right)-1\right)\\ 0.5x_8(t)\\ 0\\ 0.9x_1(t)\\ 0.7x_8(t)\\ 0.8x_7(t)-0.9x_5(t)\\ 0.9x_4(t)-0.9x_5(t)\\ 0.5x_1(t)\\ 0.8x_8(t)\end{bmatrix} \tag{5.39}$$

где $x_1(t),x_2(t),x_3(t),x_4(t),x_5,(t)x_6(t),x_7(t),x_8(t),x_9(t)\in[-1,1]$, $\otimes$ је оператор генерализованог производа.

Вектор агрегираног модела дефинише се на следећи начин:

$$V_A(t)=\omega_1V_{14}^{P}(t)+\omega_2V_{15}^{P}(t) \tag{5.40}$$

где $\omega_1,\omega_2\in[0,1]$, $\omega_1+\omega_2=1$.

Динамика агрегираног модела дефинише се на следећи начин:

$$\begin{aligned} x(t+1) &= f\left(V_A(t)\right) = \\ &= f\left(\omega_1 V_{14}^P(t) + \omega_2 V_{15}^P(t)\right) \end{aligned} \tag{5.41}$$

где је $x(t)=[x_m(t) \mid m=1,\ldots,9]^T$ стање агрегиране фази когнитивне мапе у тренутку *t*.

5.4. Закључак

Конвенционална фази когнитивна мапа је експертски формализам за сложене системе који се користи под претпоставком да компоненте система међусобно не интерагују када каузално утичу на друге. Значајно ограничење формализма представља немогућност третирања логичких интеракција између узрока (*Papageorgiou and Salmeron 2013*). Проблем је решаван увођењем оператора OWA у фази когнитивне мапе (*Lv and Zhou 2007, Wang and Wang 2013*) чиме је омогућено моделовање AND/ OR интеракција.

Проблем третирања произвољних логичких интеракција између узрока решен је у дисертацији увођењем оператора логичке агрегације у фази когнитивне мапе. Предложена су два приступа за увођење логике у формализам. Илустровано је третирање AND/ OR/ NOT интеракција у складу са оба приступа. Предложен је и илустрован поступак за спајање генерализованих фази когнитивних мапа.

Генерализоване фази когнитивне мапе своде се на конвенционалне када је оператор логичке агрегације сваког чвора реализован као отежана сума. Генерализоване фази когнитивне мапе у случају AND/ OR интеракција своде се на OWA моделе када се сваки оператор генерализованог производа третира као функција минимума.

У дисертацији предложено унапређење у великој мери повећава дескриптивну моћ фази когнитивних мапа чинећи их употребљивим у знатно ширем спектру ситуација.

6. ЗАКЉУЧАК

Помоћу конзистентне фази логике у докторској дисертацији формализовани су и објашњени концепти у случају градације степена примене. У складу са захтевом когнитивне теорије (*Fodor and Lepore 1996, 2002, Fodor 1975, 1981, 1994, 1998*) математички је објашњено:

- Како концепти функционишу као категорије. Основна карактеристика концепата је да су примењиви на објекте које групишу у категорије што је формализовано у складу са прототип, егземплар, теоријом граница категорија и каузалном теоријом концепата. Прототип теорија формализована је у стандардном и случају логичких интеракција између атрибута прототипа. Теорија егземплара формализована је на два начина. Теорија граница категорија формализована је у биполарном оквиру. Каузална теорија формализована је у стандардном, случају каузалних повратних спрега између атрибута концепта и/ или логичких интеракција између узрока.
- Како се концепти компонују у сложене концепте и мисли. Композиционалност објашњава две кључне карактеристике ума, продуктивност – креативност и систематичност (*Fodor and Lepore 1996, 2002, Fodor 1975, 1981, 1994, 1998, Fodor and Pylyshyn 1988, Chomsky 1980, 2006*). Композиционалост у случају Булових концепата формализована је и објашњена у складу са прототип, егземплар и теоријом граница категорија. Предложена математичка теорија сложених концепата ослања се на резултате (*Radojević 2000, 2005, 2008a, 2008b, 2008c, 2013a, 2013b, 2014, 2015*). Претпостављено је да концепти имају векторску природу која је представљена помоћу два вектора, структуре концепта и вектора атомских полинома Булове алгебре атрибута. Степен примене концепта на неки објекат формализован је као скаларни производ структуре концепта и вектора атомских полинома. Структура Буловог концепта израчунава се применом Булових операција реализованих у конзистентном фази оквиру над структурама компоненти.

Разматрано је кључно питање теорије концепата, да ли је степен примене концепта бинаран или градиран тј. да ли је исправна класична или теорија градације. Питање је разматрано са становишта композиционалности Булових концепата.

У класичном оквиру Булови концепти су композиционални и функционишу у складу са принципом истинитосне функционалности. Степен примене класичног Буловог концепта на неки објекат одређује се на основу степена примене компоненти на тај објекат и Буловог правила композиције. Постоји коначан број класичних Булових концепата који нису композиционални као нпр. „Слепи путник" или „Мачка у џаку" који не функционишу као категорије слепих људи који путују или мачака које се налазе у џаку.

Теоретичари класичног погледа сматрају да теорија градације не може да објасни композиционалност Булових концепата те закључују да је погрешна тј. да степен примене концепта није градиран него бинаран (*Fodor and Lepore 1996, 2002, Fodor 1981, 1998, Osherson and Smith 1981, 1982, 1997, Connolly et al 2007, Gleitman et al 2012*). Критика је демонстрирана у прототип оквиру где су представљена три проблема за теорију градације на које је у дисертацији одговорено и то:

- „Проблем закона мишљења": коришћењем конвенционалне фази логике засноване на принципу истинитосне функционалности показано је да закони искључења трећег и неконтрадикције нису загарантовани у прототип оквиру на основу чега је закључено да прототипови нису композиционални те концепти нису прототипови и степен примене концепта није градиран (*Osherson and Smith 1981, 1982, 1997*).

  Проблем је превазиђен у одељку 3.2.1. Закони мишљења као и сви закони Булове алгебре загарантовани су усвајањем принципа структурне уместо истинитосне функционалности (*Radojević 2000, 2008a, 2008c, Radojević 2014*).

- “The uncat problem”: неодређено много Булових концепата нема прототип иако га све компоненте имају на основу чега је закључено да прототипови нису композиционални те концепти нису прототипови и степен примене концепта није градира, и да су Булови концепти репрезентације класичних логичких форми (*Fodor and Lepore 1996, 2002, Fodor 1981, 1998*).

  Проблем је превазиђен у одељку 3.2.4. у коме су математички објашњени Булови концепти у прототип оквиру под претпоставком векторске природе концепата. Степен примене Буловог прототипа формализован је као скаларни производ структуре Буловог прототипа и вектора атомских полинома Булове алгебре атрибута. Структура Буловог прототипа индиректно информише које атрибуте Булов прототип садржи и колико су они значајни.

- “The Pet fish problem“: неодређено много Булових прототипова нису композиционални тј. формирани само на основу компоненти и правила композиције, на основу чега је закључено да прототипови нису композиционални те концепти нису прототипови и степен примене концепта није градиран (*Fodor and Lepore 1996, 2002, Fodor 1998, Osherson and Smith 1981, 1982, 1997, Connolly et al 2007, Gleitman et al 2012*).

  Проблем захтева разјашњење питања да ли су концепти композиционални. Теоретичари класичног погледа сматрају да је за објашњење продуктивности и систематичности неопходно да концепти буду са коначним бројем изузетака композиционални (*Fodor and Lepore 1996, 2002, Fodor 1981, 1998, Connolly et al 2007, Gleitman et al 2012, Osherson and Smith 1981, 1982, 1997*). Прототип теоретичари сматрају да концепти не морају бити такви те да проблем не постоји. Композиционалност посматрају као резервну стратегију коју мислилац користи када поред информације које чувају компоненте не располаже другим релевантним информацијама (*Hampton 1987, 2011, Hampton and Jönsson 2012, Rosch 2011, Rips 1995, Johnson and Keil 2000, Jönsson and Hampton 2008, Prinz 2004, Robbins 2002, Zadeh 1982, Kamp and Partee 1995*). Да би се објаснила продуктивност и систематичност довољно је објаснити способност ума да концепте компонује што је у дисертацији учињено у одељку 3.2.4.

С обзиром да су у дисертацији оповргнута два стандардна аргумента против прототип теорије и будући да је композиционалност концепата у случају градације математички објашњена под претпоставком да концепти имају векторску природу, на кључно питање теорије концепата добијен је следећи одговор:

- Степен примене концепта може бити градиран ако је композиционалност резервна стратегија.

У наставку дисертације третиран је проблем моделовања система окарактерисаних мноштвом компоненти које каузално интерагују. Према принципу некомпатибилности, како сложеност система тј. број компоненти и/ или интеракција расте могућност да се добије истовремено релевантан и „прецизан“ модел опада те прецизне – конвенционалне математичке технике постају неадекватне (*Zadeh 1978*). У дисертацији су разматрана два експертска формализма који се стандардно користе за моделовање сложених система, Булове мреже и фази когнитивне мапе.

Класичне Булове мреже су бинарне и користе се за квалитативно третирање система у којима се каузалне интеракције између компоненти могу објаснити „стрмим“ сигмоидама. У дисертацији су Булове мреже генерализоване увођењем градације помоћу конзистентне фази логике те је омогућено да се формализам користи за квантитативно третирање сложених система. Увођење градације у Булове мреже реализовано је трансформацијом Булових функција чворова у генерализоване Булове полиноме, што је учињено у униполарном и биполарном оквиру.

У литератури су предложена два приступа генерализацији Булових мрежа, конвенционални фази приступ (*Wittmann and Theis, 2011, Kok and Wang, 2006, Cao et al. 2007, Morris et al. 2011, Poret et al. 2014*) и Boolecube/ Hillcube приступ (*Wittmann et al. 2009*).

У дисертацији предложени приступ упоређен је са приступима из литературе. Помоћу три приступа, генерализоване су две класичне Булове мреже и добијени модели су симулирани. Показано је да конвенционални фази приступ није Буловски конзистентан те логичка валидност динамике генерализованог модела није загарантована, а да је Boolecube/ Hillcube приступ специјални случај предложеног који се добија када се сви оператори генерализованог производа реализују као алгебарски производи. Boolecube/ Hillcube приступ адекватан је за моделовање система чије су све компоненте различите природе. У дисертацији предложени приступ гарантује логичку валидност динамике генерализованог модела и омогућава третирање природе компоненти система употребом различитих оператора генерализованог производа.

Конвенционалне фази когнитивне мапе користе се под претпоставком да компоненте система не интерагују када каузално утичу на друге. Значајно ограничење формализма представља немогућност третирања логичких интеракција између узрока (*Papageorgiou and Salmeron 2013*). Проблем је решаван увођењем оператора OWA у фази когнитивне мапе чиме је добијена могућност третирања AND/ OR интеракција (Lv and Zhou 2007, Wang and Wang 2013).

Проблем третирања произвољних логичких интеракција између узрока решен је у дисертацији увођењем оператора логичке агрегације у фази когнитивне мапе. Предложена су два приступа за увођење логике у формализам. Илустровано је третирање AND/ OR/ NOT интеракција у складу са оба приступа. Генерализоване фази когнитивне мапе своде се на конвенционалне када су оператори логичке агрегације свих чворова реализовани као отежане суме. Предложени модел се у случају AND/ OR интеракција и када се сваки оператор генерализованог производа третира као функција минимума своди на OWA модел. Предложен је и илустрован поступак спајања генерализованих фази когнитивних мапа.

Предложена унапређења драстично повећавају дескриптивну моћ Булових мрежа и фази когнитивних мапа што их чини употребљивим у знатно ширем спектру ситуација.

6.1. Осврт на постављене хипотезе и остварене доприносе

У овом одељку размотрене су хипотезе и научни доприноси докторске дисертације.

Основна хипотеза:

- Помоћу конзистентне фази логике могу се формализовати и објаснити концепти у случају градације.

  У докторској дисертацији помоћу конзистентне фази логике формализовано је како концепти функционишу као категорије у складу са прототип, егземплар, каузалном и теоријом граница категорија. Математички су објашњени сложени концепти у складу са прототип, егземплар и теоријом граница категорија под претпоставком да концепти имају векторску природу. Одговорено је на стандардну критику прототип теорије, да она не може да објасни композиционалност и оповргнута су два аргумента којима се ова критика поткрепљује. Конзистентна фази логика је природан – адекватан оквир за концепте у случају градације степена примене.

Помоћне хипотезе:

- Помоћу конзистентне фази логике може се формализовати прототип теорија у стандардном и случају логичких интеракција између атрибута прототипа.

  Према прототип теорији концепт је ментална репрезентација статистички значајних особина и/ или интеракција између особина инстанци релевантне категорије. Степен примене прототипа на неки објекат зависи од сличности тог објекта и прототипа. У стандардном случају атрибути не интерагују те је степен примене прототипа формализован као отежана сума сличности објекта и прототипа по атрибутима. У сложеном случају атрибути логички интерагују те је степен примене прототипа формализован као отежана сума сличности објекта и прототипа по произвољним елементима Булове алгебре атрибута.

- Помоћу конзистентне фази логике може се формализовати теорија егземплара.

  Према овој теорији концепт је колекција егземплара, менталних репрезентација инстанци релевантне категорије. Концепт функционише на основу сличности објекта и езгемплара. Степен примене концепта на неки објекат формализован је на два начина, као отежана сума степена сличности објекта и свих егземплара концепта или као степен сличности објекта и најсличнијег егземплара. Степен сличности објекта и произвољног егземплара концепта формализован је као отежана сума сличности објекта и егземплара по атрибутима.

- Помоћу биполарне конзистентне фази логике може се формализовати теорија граница категорија.

  Према овој теорији концепт је ментална репрезентација тзв. границе категорије. Степен примене концепта на објекат је биполаран. Позитиван степен примене означава колико је објекат добра тј. репрезентативна инстанца категорије, а негативан колико је објекат лоша инстанца. Неутрални степен примене означава објекте који припадају граници категорије.

- Помоћу функционалних каузалних модела, реализованих конзистентном фази логиком, може се формализовати каузална теорија у стандардном, случају каузалних повратних спрега између атрибута концепта и/ или логичких интеракција између узрока.

  Према казалној теорији концепт је ментална репрезентација особина и каузалних релација између особина инстанци релевантне категорије. Степен примене концепта на неки објекат зависи од тога колико објекат задовољава каузалне законе релевантне категорије. Каузално функционисање формализовано је на основу функције заједничке вероватноће атрибута који индукује пробабилистички каузални модел концепта. Каузални закони категорије представљени су структурним једначинама каузалног модела. Структурне једначине реализоване су конзистентном фази логиком што омогућава експлицитно третирање логичких интеракција између узрока. Каузални модел у општем случају је нерекурзиван што омогућава третирање каузалних повратних спрега између атрибута концепта.

- Помоћу конзистентне фази логике могу се формализовати и објаснити Булови концепти у складу са прототип, егземплар и теоријом граница категорија, под претпоставком да концепти имају векторску природу.

  У дисертацији су формализовани и објашњени Булови концепти у прототип, егземплар и оквиру граница категорија. Векторска природа концепта математички је објашњена помоћу два вектора, структуре концепта и вектора атомских полинома Булове алгебре атрибута. Степен примене концепта формализован је као скаларни производ структуре концепта и вектора атомских полинома. Структура Буловог концепта добија се применом Булових операција реализованих у конзистентном фази оквиру над структурама компоненти. Одговорено је на критику прототип теорије да она не може да објасни композиционалност Булових концепата. Оповргнута су два аргумента којима се ова критика поткрепљује, да закони искључења трећег и неконтрадикције нису загарантовани у прототип оквиру и да неодређено много Булових концепата нема прототип иако га све компоненте имају. Моделовани су конкретни Булови концепти за које теоретичари класичног погледа сматрају да не могу бити објашњени у прототип оквиру.

- Помоћу конзистентне фази логике може се адекватно увести градација у Булове мреже.

  Конвенционалне Булове мреже су бинарне и користе се за квалитативно моделовање система у којима се каузалне интеракције између компоненти могу објаснити „стрмим“ сигмоидама. Увођење градације у Булове мреже подразумева реалновредносну реализацију Булових променљивих и функција чворова чиме се добија могућност да се формализам користи за квантитативно третирање сложених система. У литератури су предложена два приступа за увођење градације у Булове мреже, конвенционални фази приступ и Boolecube/ Hillcube приступ. У дисертацији је предложено да се Булове мреже генерализују конзистентном фази логиком. Показано је да конвенционални фази приступ није Буловски конзистентан те логичка валидност динамике генерализованог модела није загарантована, а да је Boolecube/ Hillcube приступ специјални случај предложеног који се добија када се сваки генерализовани производ третира као алгебарски производ. Boolecube/ Hillcube адекватан је за моделовање система чије су све компоненте различите природе. У дисертацији предложени приступ гарантује логичку валидност динамике модела и омогућава да се употребом различитих оператора генерализованог производа третира природа компоненти система.

- Помоћу конзистентне фази логике могу се генерализовати фази когнитивне мапе за случај произвољних логичких интеракција између узрока.

  Конвенционалне фази когнитивне мапе користе се под претпоставком да компоненте система међусобно не интерагују када каузално утичу на друге. У литератури је као значајно ограничење формализма истакнута немогућност третирања логичких интеракција између узрока. Проблем је решаван увођењем оператора OWA у фази когнитивне мапе чиме је добијена могућност третирања AND/ OR интеракција. Проблем третирања произвољних логичких интеракција између узрока решен је у дисертацији увођењем оператора логичке агрегације у фази когнитивне мапе. Генерализовани модел своди се на конвенционални када је оператор логичке агрегације сваког чвора реализован као отежана сума. Генерализовани модел се у случају AND/ OR интеракција између узрока и када се сваки оператор генерализованог производа третира као функција минимума своди на OWA модел. Предложен је поступак за спајање генерализованих фази когнитивних мапа.

У докторском раду остварени су следећи научни доприноси:

- Идентификовани су проблеми у теорији концепата.
- Формализована је прототип теорија у стандардном и случају логичких интеракција између атрибута прототипа.
- Формализована је теорија егземплара.
- Формализована је теорија граница категорија.
- Формализована је каузална теорија у стандардном, случају каузалних повратних спрега између трибута концепта и/ или логичких интеракција између узрока.
- Математички су објашњени Булови концепти у складу са прототип, егземплар и теоријом граница категорија, под претпоставком да концепти имају векторску природу.
- Оповргнут је аргумент против прототип теорије да неодређено много Булових концепата нема прототип иако га све компоненте имају (“The uncat problem“).
- Оповргнут је аргумент против прототип теорије да закони мишљења - искључење трећег и неконтрадикција нису загарантовани у прототип оквиру.
- Анализирани су постојећи приступи за увођење градације у Булове мреже и идентификовани су проблеми ових приступа.
- Генерализоване сз Булове мреже увођењем градације чиме је омогућено да се формализам користи за квантититавно третирање сложених система.
- Генерализоване су фази когнитивне мапе увођењем оператора логичке агрегације чиме је омогућено третирање произвољних логичких интеракција између узрока.
- Предложен је поступак за спајање генерализованих фази когнитивних мапа.
- Друштвени допринос огледа се у могућности примене предложене теорије у различитим областима.

6.2. Могући правци будућег истраживања

На основу резултата остварених у докторској дисертацији могућа су следећа истраживања:

- Могуће је истраживање композиционалности у складу са каузалном теоријом концепата. Према овој теорији концепти функционишу у складу са каузалним законима релевантних категорија. У дисертацији је предложен формализам где су концепти представљени пробабилистичким каузалним моделима, а каузални закони категорија структурним једначинама реализованим конзистентном фази логиком. Могуће је истраживање Булових концепата у предложеном каузалном оквиру.
- Могуће је истраживање везе предложене теорије која претпоставља да концепти имају векторску природу тј. да је информација коју концепти чувају дистрибуирана и имплементационог конекционизма. Задатак имплементационог конекционизма је да објасни како се „симболички ум“ који је објашњен менталним репрезентацијама и операцијама над истима, може имплементирати неуронским мрежама (*Pinker and Prince 1988*).
- У дисертацији су предложени формализми који се могу користити за одлучивање, сортирање, класификацију, регресију, пробабилистичко и каузално резоновање, временске серије. Могуће је истраживање ваљаности предложених формализама, упоређивањем њима добијених резултата са резултатима оствареним формализмима који се стандардно користе за решавање наведених проблема.
- Генерализоване Булове мреже и фази когнитивне мапе су формализми за сложене системе који су засновани на експертском знању о домену. Могуће је истраживање техника машинског учења помоћу којих би се предложени модели добијали из података.

7. ПРИЛОЗИ

Прилог А: Булова мрежа са Слике 11 – конзистентни фази модел

$$CycA(t+1) = CycA(t) + E2F(t) - CycA(t)*E2F(t) - CycA(t)*Rb(t) - CycA(t)*Cdc20(t)$$
$$- E2F(t)*Rb(t) - E2F(t)*Cdc20(t) + CycA(t)*E2F(t)*Rb(t) + CycA(t)*E2F(t)*Cdc20(t)$$
$$- CycA(t)*Cdh1(t)*UbcH10(t) - E2F(t)*Cdh1(t)*UbcH10(t)(t) + CycA(t)*Rb(t)*Cdc20(t)$$
$$+ E2F(t)*Rb(t)*Cdc20(t) + CycA(t)*E2F(t)*Cdh1(t)*UbcH10(t)$$
$$- CycA(t)*E2F(t)*Rb(t)*Cdc20(t) + CycA(t)*Cdh1(t)*Rb(t)*UbcH10(t)$$
$$+ CycA(t)*Cdh1(t)*Cdc20(t)*UbcH10(t) + E2F(t)*Cdh1(t)*Rb(t)*UbcH10(t)$$
$$+ E2F(t)*Cdh1(t)*Cdc20(t)*UbcH10(t) - CycA(t)*E2F(t)*Cdh1(t)*Rb(t)*UbcH10(t)$$
$$- CycA(t)*E2F(t)*Cdh1(t)*Cdc20(t)*UbcH10(t)$$
$$- CycA(t)*Cdh1(t)*Rb(t)*Cdc20(t)*UbcH10(t)$$
$$- E2F(t)*Cdh1(t)*Rb(t)*Cdc20(t)*UbcH10(t)$$
$$+ CycA(t)*E2F*Cdh1*Rb(t)*Cdc20(t)*UbcH10(t)$$

$$CycB(t+1) = Cdh1(t)*Cdc20(t) - Cdc20(t) - Cdh1(t) + CycA(t)$$

$$Rb(t+1) = CycA(t)*CycB(t) - CycB(t) - CycD(t) - CycE(t) - CycA(t) + CycA(t)*CycD(t)$$
$$+ CycA(t)*CycE(t) + CycB(t)*CycD(t) + CycB(t)*CycE(t) + CycD(t)*CycE(t) + CycA(t)*p27(t)$$
$$+ CycE(t)*p27(t) - CycA(t)*CycB(t)*CycD(t) - CycA(t)*CycB(t)*CycE(t)$$
$$- CycA(t)*CycD(t)*CycE(t) - CycB(t)*CycD(t)*CycE(t) - CycA(t)*CycB(t)*p27(t)$$
$$- CycA(t)*CycD(t)*p27(t) - CycA(t)*CycE(t)*p27(t) - CycB(t)*CycE(t)*p27(t)$$
$$- CycD(t)*CycE(t)*p27(t) + CycA(t)*CycB(t)*CycD(t)*CycE(t)$$
$$+ CycA(t)*CycB(t)*CycD(t)*p27(t) + CycA(t)*CycB(t)*CycE(t)*p27(t)$$
$$+ CycA(t)*CycD(t)*CycE(t)*p27(t) + CycB(t)*CycD(t)*CycE(t)*p27(t)$$
$$- CycA(t)*CycB(t)*CycD(t)*CycE(t)*p27(t) + CycA(t)$$

$$CycD(t+1) = CycD(t)$$

$$CycE(t+1) = E2F(t) - E2F(t)*Rb(t)$$

$$E2F(t+1) = CycA(t)*CycB(t) - CycB(t) - Rb(t) - CycA(t) + CycA(t)*p27(t) + CycA(t)*Rb(t)$$
$$+ CycB(t)*Rb(t) - CycA(t)*CycB(t)*p27(t) - CycA(t)*CycB(t)*Rb(t)$$
$$- CycA(t)*p27(t)*Rb(t) + CycA(t)*CycB(t)*p27(t)*Rb(t) + CycA(t)$$

$$
\begin{aligned}
p27\ (t+1) = {} & CycA(t)*CycB(t) - CycB(t) - CycD(t) - CycE(t) - CycA(t) + CycA(t)*CycD(t) \\
& + CycA(t)*CycE(t) + CycB(t)*CycD(t) + CycB(t)*CycE(t) + CycD(t)*CycE(t) \\
& + CycA(t)*p27(t) + CycE(t)*p27(t) - CycA(t)*CycB(t)*CycD(t) - CycA(t)*CycB(t)*CycE(t) \\
& - CycA(t)*CycD(t)*CycE(t) - CycB(t)*CycD(t)*CycE(t) - CycA(t)*CycB(t)*p27(t) \\
& - CycA(t)*CycD(t)*p27(t) - 2*CycA(t)*CycE(t)*p27(t) - CycB(t)*CycE(t)*p27(t) \\
& - CycD(t)*CycE(t)*p27(t) + CycA(t)*CycB(t)*CycD(t)*CycE(t) \\
& + CycA(t)*CycB(t)*CycD(t)*p27(t) + 2*CycA(t)*CycB(t)*CycE(t)*p27(t) \\
& + 2*CycA(t)*CycD(t)*CycE(t)*p27(t) + CycB(t)*CycD(t)*CycE(t)*p27(t) \\
& - 2*CycA(t)*CycB(t)*CycD(t)*CycE(t)*p27(t) + CycA(t)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Cdh1(t+1) = {} & CycA(t)*CycB(t) - CycB(t) - CycA(t) + CycA(t)*p27(t) + CycA(t)*Cdc20(t) \\
& + CycB(t)*Cdc20(t) - CycA(t)*CycB(t)*p27(t) - CycA(t)*CycB(t)*Cdc20(t) \\
& - CycA(t)*p27(t)*Cdc20(t) + CycA(t)*CycB(t)*p27(t)*Cdc20(t) + CycA(t)
\end{aligned}
$$

$$
Cdc20(t+1) = CycB(t)
$$

$$
\begin{aligned}
UbcH10(t+1) = {} & CycA(t)*Cdh1(t)*UbcH10(t) - Cdh1(t) + CycB(t)*Cdh1(t)*UbcH10(t) \\
& + Cdh1(t)*Cdc20(t)*UbcH10(t) - CycA(t)*Cdh1(t)*Cdc20(t)*UbcH10(t) \\
& - CycB(t)*Cdh1(t)*Cdc20(t)*UbcH10(t) - CycA(t)*CycB(t)*Cdh1(t)*UbcH10(t) \\
& + CycA(t)*CycB(t)*Cdh1(t)*Cdc20(t)*UbcH10(t) + CycA(t)
\end{aligned}
$$

$CycA(t), CycB(t), Rb(t), CycD(t), CycE(t), E2F(t), p27(t), Cdh1(t), Cdc20(t), UbcH10(t) \in [0,1]$

су стања чворова генерализоване Булове мреже.

Прилог Б: Булова мреже са Слике 12 – генерички модел

$$
\begin{aligned}
&SLP_i(t+1)=SLP_i(t)\\
&wg_i(t+1)=\left(CIA_i(t)\wedge SLP_i(t)\wedge\neg CIR_i(t)\right)\vee\left(wg_i(t)\wedge\left(CIA_i(t)\vee SLP_i(t)\right)\wedge\neg CIR_i(t)\right)=\\
&\qquad =CIA_i(t)\otimes SLP_i(t)-CIA_i(t)\otimes SLP_i(t)\otimes CIR_i(t)+CIA_i(t)\otimes wg_i(t)+SLP_i(t)\otimes wg_i(t)\\
&\qquad -2*CIA_i(t)\otimes SLP_i(t)\otimes wg_i(t)-CIA_i(t)\otimes CIR_i(t)\otimes wg_i(t)\\
&\qquad -CIA_i(t)\otimes CIR_i(t)\otimes wg_i(t)+2*CIA_i(t)\otimes SLP_i(t)\otimes CIR_i(t)\otimes wg_i(t)\\
&WG_i(t+1)=wg_i(t)\\
&en_i(t+1)=\left(WG_{i-1}(t)\vee WG_{i+1}(t)\right)\wedge\neg SLP_i(t)=\\
&\qquad =WG_{i-1}(t)+WG_{i+1}(t)-WG_{i-1}(t)\otimes WG_{i+1}(t)-WG_{i-1}(t)\otimes SLP_i(t)\\
&\qquad -WG_{i+1}(t)\otimes SLP_i(t)+WG_{i-1}(t)\otimes WG_{i+1}(t)\otimes SLP_i(t)\\
&EN_i(t+1)=en_i(t)\\
&hh_i(t+1)=EN_i(t)\wedge\neg CIR_i(t)=EN_i(t)-EN_i(t)\otimes CIR_i(t)\\
&HH_i(t+1)=hh_i(t)\\
&ptc_i(t+1)=CIA_i(t)\wedge\neg EN_i(t)\wedge\neg CIR_i(t)=CIA_i(t)-CIA_i(t)\otimes EN_i(t)\\
&\qquad -CIA_i(t)\otimes CIR_i(t)+CIA_i(t)\otimes EN_i(t)\otimes CIR_i(t)\\
&PTC_i(t+1)=ptc_i(t)\vee\left(PTC_i(t)\wedge\neg HH_{i-1}(t)\wedge\neg HH_{i+1}(t)\right)=\\
&\qquad =ptc_i(t)+PTC_i(t)-PTC_i(t)\otimes HH_{i-1}(t)-PTC_i(t)\otimes HH_{i+1}(t)+PTC_i(t)\otimes HH_{i-1}(t)\otimes HH_{i+1}(t)\\
&\qquad -ptc_i(t)\otimes PTC_i(t)+ptc_i(t)\otimes PTC_i(t)\otimes HH_{i-1}(t)+ptc_i(t)\otimes PTC_i(t)\otimes HH_{i+1}(t)\\
&\qquad -ptc_i(t)\otimes PTC_i(t)\otimes HH_{i-1}(t)\otimes HH_{i+1}(t)\\
&ci_i(t+1)=\neg EN_i(t)=1-EN_i(t)\\
&CI_i(t+1)=ci_i(t)\\
&CIA_i(t+1)=CI_i(t)\wedge\left(\neg PTC_i(t)\vee HH_{i-1}(t)\vee HH_{i+1}(t)\vee hh_{i-1}(t)\vee hh_{i+1}(t)\right)=\\
&\qquad =CI_i(t)-CI_i(t)\otimes PTC_i(t)+CI_i(t)\otimes PTC_i(t)\otimes HH_{i-1}(t)+CI_i(t)\otimes PTC_i(t)\otimes HH_{i+1}(t)\\
&\qquad +CI_i(t)\otimes PTC_i(t)\otimes hh_{i-1}(t)+CI_i(t)\otimes PTC_i(t)\otimes hh_{i+1}(t)-CI_i(t)\otimes PTC_i(t)\otimes HH_{i-1}(t)\otimes HH_{i+1}(t)\\
&\qquad -CI_i(t)\otimes PTC_i(t)\otimes HH_{i-1}(t)\otimes hh_{i-1}(t)-CI_i(t)\otimes PTC_i(t)\otimes HH_{i-1}(t)\otimes hh_{i+1}(t)\\
&\qquad -CI_i(t)\otimes PTC_i(t)\otimes HH_{i+1}(t)\otimes hh_{i-1}(t)-CI_i(t)\otimes PTC_i(t)\otimes HH_{i+1}(t)\otimes hh_{i+1}(t)\\
&\qquad -CI_i(t)\otimes PTC_i(t)\otimes hh_{i-1}(t)\otimes hh_{i+1}(t)+CI_i(t)\otimes PTC_i(t)\otimes HH_{i-1}(t)\otimes HH_{i+1}(t)\otimes hh_{i-1}(t)\\
&\qquad +CI_i(t)\otimes PTC_i(t)\otimes HH_{i-1}(t)\otimes HH_{i+1}(t)\otimes hh_{i+1}(t)+CI_i(t)\otimes PTC_i(t)\otimes HH_{i-1}(t)\otimes hh_{i-1}(t)\otimes hh_{i+1}(t)\\
&\qquad +CI_i(t)\otimes PTC_i(t)\otimes HH_{i+1}(t)\otimes hh_{i-1}(t)\otimes hh_{i+1}(t)-CI_i(t)\otimes PTC_i(t)\otimes HH_{i-1}(t)\otimes HH_{i+1}(t)\otimes hh_{i-1}(t)\otimes hh_{i+1}(t)\\
&CIR_i(t+1)=CI_i(t)\wedge PTC_i(t)\wedge\neg HH_{i-1}(t)\wedge\neg HH_{i+1}(t)\wedge\neg hh_{i-1}(t)\wedge\neg hh_{i+1}(t)\\
&\qquad =CI_i(t)\otimes PTC_i(t)-CI_i(t)\otimes PTC_i(t)\otimes HH_{i-1}(t)-CI_i(t)\otimes PTC_i(t)\otimes HH_{i+1}(t)-CI_i(t)\otimes PTC_i(t)\otimes hh_{i-1}(t)\\
&\qquad -CI_i(t)\otimes PTC_i(t)\otimes hh_{i+1}(t)+CI_i(t)\otimes PTC_i(t)\otimes HH_{i-1}(t)\otimes HH_{i+1}(t)+CI_i(t)\otimes PTC_i(t)\otimes HH_{i-1}(t)\otimes hh_{i-1}(t)\\
&\qquad +CI_i(t)\otimes PTC_i(t)\otimes HH_{i-1}(t)\otimes hh_{i-1}(t)+CI_i(t)\otimes PTC_i(t)\otimes HH_{i+1}(t)\otimes hh_{i-1}(t)\\
&\qquad +CI_i(t)\otimes PTC_i(t)\otimes HH_{i+1}(t)\otimes hh_{i+1}(t)+CI_i(t)\otimes PTC_i(t)\otimes hh_{i-1}(t)\otimes hh_{i+1}(t)\\
&\qquad -CI_i(t)\otimes PTC_i(t)\otimes HH_{i-1}(t)\otimes HH_{i+1}(t)\otimes hh_{i-1}(t)-CI_i(t)\otimes PTC_i(t)\otimes HH_{i-1}(t)\otimes HH_{i+1}(t)\otimes hh_{i+1}(t)\\
&\qquad -CI_i(t)\otimes PTC_i(t)\otimes HH_{i-1}(t)\otimes hh_{i-1}(t)\otimes hh_{i+1}(t)-CI_i(t)\otimes PTC_i(t)\otimes HH_{i+1}(t)\otimes hh_{i-1}(t)\otimes hh_{i+1}(t)\\
&\qquad +CI_i(t)\otimes PTC_i(t)\otimes HH_{i-1}(t)\otimes HH_{i+1}(t)\otimes hh_{i-1}(t)\otimes hh_{i+1}(t)
\end{aligned}
$$

$$SLP_i(t),wg_i(t),WG_i(t),en_i(t),EN_i(t),hh_i(t),HH_i(t),ptc_i(t),PTC_i(t),ci_i(t),CI_i(t),CIA_i(t),CIR_i(t)\in[0,1]$$

су стања чворова генерализоване Булове мреже.

Прилог Ц: Булова мреже са Слике 12 – конзистентни фази модел

$$
\begin{aligned}
& SLP_i(t+1) = SLP_i(t) \\
& wg_i(t+1) = \left(CIA_i(t) \wedge SLP_i(t) \wedge \neg CIR_i(t)\right) \vee \left(wg_i(t) \wedge \left(CIA_i(t) \vee SLP_i(t)\right) \wedge \neg CIR_i(t)\right) = \\
& \qquad = CIA_i(t)*SLP_i(t) - CIA_i(t)*SLP_i(t)*CIR_i(t) + CIA_i(t)*wg_i(t) + SLP_i(t)*wg_i(t) - 2*CIA_i(t)*SLP_i(t)*wg_i(t) \\
& \qquad - CIA_i(t)*CIR_i(t)*wg_i(t) - CIA_i(t)*CIR_i(t)*wg_i(t) + 2*CIA_i(t)*SLP_i(t)*CIR_i(t)*wg_i(t) \\
& WG_i(t+1) = wg_i(t) \\
& en_i(t+1) = \left(WG_{i-1}(t) \vee WG_{i+1}(t)\right) \wedge \neg SLP_i(t) = \\
& \qquad = WG_{i-1}(t) + WG_{i+1}(t) - \min\left(WG_{i-1}(t), WG_{i+1}(t)\right) - WG_{i-1}(t)*SLP_i(t) \\
& \qquad - WG_{i+1}(t)*SLP_i(t) + \min\left(WG_{i-1}(t), WG_{i+1}(t)\right)*SLP_i(t) \\
& EN_i(t+1) = en_i(t) \\
& hh_i(t+1) = EN_i(t) \wedge \neg CIR_i(t) = EN_i(t) - EN_i(t)*CIR_i(t) \\
& HH_i(t+1) = hh_i(t) \\
& ptc_i(t+1) = CIA_i(t) \wedge \neg EN_i(t) \wedge \neg CIR_i(t) = CIA_i(t) - CIA_i(t)*EN_i(t) - CIA_i(t)*CIR_i(t) + CIA_i(t)*EN_i(t)*CIR_i(t) \\
& PTC_i(t+1) = ptc_i(t) \vee \left(PTC_i(t) \wedge \neg HH_{i-1}(t) \wedge \neg HH_{i+1}(t)\right) = \\
& \qquad = ptc_i(t) + PTC_i(t) - PTC_i(t)*HH_{i-1}(t) - PTC_i(t)*HH_{i+1}(t) + PTC_i(t)*\min\left(HH_{i-1}(t), HH_{i+1}(t)\right) \\
& \qquad - ptc_i(t)*PTC_i(t) + ptc_i(t)*PTC_i(t)*HH_{i-1}(t) + ptc_i(t)*PTC_i(t)*HH_{i+1}(t) \\
& \qquad - ptc_i(t)*PTC_i(t)*\min\left(HH_{i-1}(t), HH_{i+1}(t)\right) \\
& ci_i(t+1) = \neg EN_i(t) = 1 - EN_i(t) \\
& CI_i(t+1) = ci_i(t) \\
& CIA_i(t+1) = CI_i(t) \wedge \left(\neg PTC_i(t) \vee HH_{i-1}(t) \vee HH_{i+1}(t) \vee hh_{i-1}(t) \vee hh_{i+1}(t)\right) \\
& \qquad = CI_i(t) - CI_i(t)*PTC_i(t) + CI_i(t)*PTC_i(t)*HH_{i-1}(t) + CI_i(t)*PTC_i(t)*HH_{i+1}(t) + CI_i(t)*PTC_i(t)*hh_{i-1}(t) \\
& \qquad + CI_i(t)*PTC_i(t)*hh_{i+1}(t) - CI_i(t)*PTC_i(t)*\min\left(HH_{i-1}(t), HH_{i+1}(t)\right) - CI_i(t)*PTC_i(t)*HH_{i-1}(t)*hh_{i-1}(t) \\
& \qquad - CI_i(t)*PTC_i(t)*HH_{i-1}(t)*hh_{i+1}(t) - CI_i(t)*PTC_i(t)*HH_{i+1}(t)*hh_{i-1}(t) - CI_i(t)*PTC_i(t)*HH_{i+1}(t)*hh_{i+1}(t) \\
& \qquad - CI_i(t)*PTC_i(t)*\min\left(hh_{i-1}(t), hh_{i+1}(t)\right) + CI_i(t)*PTC_i(t)*\min\left(HH_{i-1}(t), HH_{i+1}(t)\right)*hh_{i-1}(t) \\
& \qquad + CI_i(t)*PTC_i(t)*\min\left(HH_{i-1}(t), HH_{i+1}(t)\right)*hh_{i+1}(t) + CI_i(t)*PTC_i(t)*HH_{i-1}(t)*\min\left(hh_{i-1}(t), hh_{i+1}(t)\right) \\
& \qquad + CI_i(t)*PTC_i(t)*HH_{i+1}(t)*\min\left(hh_{i-1}(t), hh_{i+1}(t)\right) \\
& \qquad - CI_i(t)*PTC_i(t)*\min\left(HH_{i-1}(t), HH_{i+1}(t)\right)*\min\left(hh_{i-1}(t), hh_{i+1}(t)\right) \\
& CIR_i(t+1) = CI_i(t) \wedge PTC_i(t) \wedge \neg HH_{i-1}(t) \wedge \neg HH_{i+1}(t) \wedge \neg hh_{i-1}(t) \wedge \neg hh_{i+1}(t) \\
& \qquad = CI_i(t)*PTC_i(t) - CI_i(t)*PTC_i(t)*HH_{i-1}(t) - CI_i(t)*PTC_i(t)*HH_{i+1}(t) - CI_i(t)*PTC_i(t)*hh_{i-1}(t) \\
& \qquad - CI_i(t)*PTC_i(t)*hh_{i+1}(t) + CI_i(t)*PTC_i(t)*\min\left(HH_{i-1}(t), HH_{i+1}(t)\right) + CI_i(t)*PTC_i(t)*HH_{i-1}(t)*hh_{i-1}(t) \\
& \qquad + CI_i(t)*PTC_i(t)*HH_{i-1}(t)*hh_{i-1}(t) + CI_i(t)*PTC_i(t)*HH_{i+1}(t)*hh_{i-1}(t) \\
& \qquad + CI_i(t)*PTC_i(t)*HH_{i+1}(t)*hh_{i+1}(t) + CI_i(t)*PTC_i(t)*\min\left(hh_{i-1}(t), hh_{i+1}(t)\right) \\
& \qquad - CI_i(t)*PTC_i(t)*\min\left(HH_{i-1}(t), HH_{i+1}(t)\right)*hh_{i-1}(t) - CI_i(t)*PTC_i(t)*\min\left(HH_{i-1}(t), HH_{i+1}(t)\right)*hh_{i+1}(t) \\
& \qquad - CI_i(t)*PTC_i(t)*HH_{i-1}(t)*\min\left(hh_{i-1}(t), hh_{i+1}(t)\right) - CI_i(t)*PTC_i(t)*HH_{i+1}(t)*\min\left(hh_{i-1}(t), hh_{i+1}(t)\right) \\
& \qquad + CI_i(t)*PTC_i(t)*\min\left(HH_{i-1}(t), HH_{i+1}(t)\right)*\min\left(hh_{i-1}(t), hh_{i+1}(t)\right)
\end{aligned}
$$

$$SLP_i(t), wg_i(t), WG_i(t), en_i(t), EN_i(t), hh_i(t), HH_i(t), ptc_i(t), PTC_i(t), ci_i(t), CI_i(t), CIA_i(t), CIR_i(t) \in [0,1]$$

су стања чворова генерализоване Булове мреже.

Прилог Д: Булова мреже са Слике 12 – Boolecube/ Hillcube модел

$$
\begin{aligned}
&SLP_i(t+1)=SLP_i(t)\\
&wg_i(t+1)=\left(CIA_i(t)\wedge SLP_i(t)\wedge\neg CIR_i(t)\right)\vee\left(wg_i(t)\wedge\left(CIA_i(t)\vee SLP_i(t)\right)\wedge\neg CIR_i(t)\right)=\\
&\qquad=CIA_i(t)*SLP_i(t)-CIA_i(t)*SLP_i(t)*CIR_i(t)+CIA_i(t)*wg_i(t)+SLP_i(t)*wg_i(t)\\
&\qquad-2*CIA_i(t)*SLP_i(t)*wg_i(t)-CIA_i(t)*CIR_i(t)*wg_i(t)-CIA_i(t)*CIR_i(t)*wg_i(t)\\
&\qquad+2*CIA_i(t)*SLP_i(t)*CIR_i(t)*wg_i(t)\\
&WG_i(t+1)=wg_i(t)\\
&en_i(t+1)=\left(WG_{i-1}(t)\vee WG_{i+1}(t)\right)\wedge\neg SLP_i(t)=\\
&\qquad=WG_{i-1}(t)+WG_{i+1}(t)-WG_{i-1}(t)*WG_{i+1}(t)-WG_{i-1}(t)*SLP_i(t)\\
&\qquad-WG_{i+1}(t)*SLP_i(t)+WG_{i-1}(t)*WG_{i+1}(t)*SLP_i(t)\\
&EN_i(t+1)=en_i(t)\\
&hh_i(t+1)=EN_i(t)\wedge\neg CIR_i(t)=EN_i(t)-EN_i(t)*CIR_i(t)\\
&HH_i(t+1)=hh_i(t)\\
&ptc_i(t+1)=CIA_i(t)\wedge\neg EN_i(t)\wedge\neg CIR_i(t)=CIA_i(t)-CIA_i(t)*EN_i(t)-CIA_i(t)*CIR_i(t)+CIA_i(t)*EN_i(t)*CIR_i(t)\\
&PTC_i(t+1)=ptc_i(t)\vee\left(PTC_i(t)\wedge\neg HH_{i-1}(t)\wedge\neg HH_{i+1}(t)\right)\\
&\qquad=ptc_i(t)+PTC_i(t)-PTC_i(t)*HH_{i-1}(t)-PTC_i(t)*HH_{i+1}(t)+PTC_i(t)*HH_{i-1}(t)*HH_{i+1}(t)\\
&\qquad-ptc_i(t)*PTC_i(t)+ptc_i(t)*PTC_i(t)*HH_{i-1}(t)+ptc_i(t)*PTC_i(t)*HH_{i+1}(t)\\
&\qquad-ptc_i(t)*PTC_i(t)*HH_{i-1}(t)*HH_{i+1}(t)\\
&ci_i(t+1)=\neg EN_i(t)=1-EN_i(t)\\
&CI_i(t+1)=ci_i(t)\\
&CIA_i(t+1)=CI_i(t)\wedge\left(\neg PTC_i(t)\vee HH_{i-1}(t)\vee HH_{i+1}(t)\vee hh_{i-1}(t)\vee hh_{i+1}(t)\right)\\
&\qquad=CI_i(t)-CI_i(t)*PTC_i(t)+CI_i(t)*PTC_i(t)*HH_{i-1}(t)+CI_i(t)*PTC_i(t)*HH_{i+1}(t)\\
&\qquad+CI_i(t)*PTC_i(t)*hh_{i-1}(t)+CI_i(t)*PTC_i(t)*hh_{i+1}(t)-CI_i(t)*PTC_i(t)*HH_{i-1}(t)*HH_{i+1}(t)\\
&\qquad-CI_i(t)*PTC_i(t)*HH_{i-1}(t)*hh_{i-1}(t)-CI_i(t)*PTC_i(t)*HH_{i-1}(t)*hh_{i+1}(t)\\
&\qquad-CI_i(t)*PTC_i(t)*HH_{i+1}(t)*hh_{i-1}(t)-CI_i(t)*PTC_i(t)*HH_{i+1}(t)*hh_{i+1}(t)\\
&\qquad-CI_i(t)*PTC_i(t)*hh_{i-1}(t)*hh_{i+1}(t)+CI_i(t)*PTC_i(t)*HH_{i-1}(t)*HH_{i+1}(t)*hh_{i-1}(t)\\
&\qquad+CI_i(t)*PTC_i(t)*HH_{i-1}(t)*HH_{i+1}(t)*hh_{i+1}(t)+CI_i(t)*PTC_i(t)*HH_{i-1}(t)*hh_{i-1}(t)*hh_{i+1}(t)\\
&\qquad+CI_i(t)*PTC_i(t)*HH_{i+1}(t)*hh_{i-1}(t)*hh_{i+1}(t)-CI_i(t)*PTC_i(t)*HH_{i-1}(t)*HH_{i+1}(t)*hh_{i-1}(t)*hh_{i+1}(t)\\
&CIR_i(t+1)=CI_i(t)\wedge PTC_i(t)\wedge\neg HH_{i-1}(t)\wedge\neg HH_{i+1}(t)\wedge\neg hh_{i-1}(t)\wedge\neg hh_{i+1}(t)\\
&\qquad=CI_i(t)*PTC_i(t)-CI_i(t)*PTC_i(t)*HH_{i-1}(t)-CI_i(t)*PTC_i(t)*HH_{i+1}(t)-CI_i(t)*PTC_i(t)*hh_{i-1}(t)\\
&\qquad-CI_i(t)*PTC_i(t)*hh_{i+1}(t)+CI_i(t)*PTC_i(t)*HH_{i-1}(t)*HH_{i+1}(t)+CI_i(t)*PTC_i(t)*HH_{i-1}(t)*hh_{i-1}(t)\\
&\qquad+CI_i(t)*PTC_i(t)*HH_{i-1}(t)*hh_{i-1}(t)+CI_i(t)*PTC_i(t)*HH_{i+1}(t)*hh_{i-1}(t)\\
&\qquad+CI_i(t)*PTC_i(t)*HH_{i+1}(t)*hh_{i+1}(t)+CI_i(t)*PTC_i(t)*hh_{i-1}(t)*hh_{i+1}(t)\\
&\qquad-CI_i(t)*PTC_i(t)*HH_{i-1}(t)*HH_{i+1}(t)*hh_{i-1}(t)-CI_i(t)*PTC_i(t)*HH_{i-1}(t)*HH_{i+1}(t)*hh_{i+1}(t)\\
&\qquad-CI_i(t)*PTC_i(t)*HH_{i-1}(t)*hh_{i-1}(t)*hh_{i+1}(t)-CI_i(t)*PTC_i(t)*HH_{i+1}(t)*hh_{i-1}(t)*hh_{i+1}(t)\\
&\qquad+CI_i(t)*PTC_i(t)*HH_{i-1}(t)*HH_{i+1}(t)*hh_{i-1}(t)*hh_{i+1}(t)
\end{aligned}
$$

$SLP_i(t),wg_i(t),WG_i(t),en_i(t),EN_i(t),hh_i(t),HH_i(t),ptc_i(t),PTC_i(t),ci_i(t),CI_i(t),CIA_i(t),CIR_i(t)\in[0,1]$

су стања чворова генерализоване Булове мреже.

8. ЛИТЕРАТУРА

Aguilar, J. (2005). A survey about fuzzy cognitive maps papers. *International journal of computational cognition*, 3(2), 27-33.

Ashby, F. G., and Gott, R. E. (1988). Decision rules in the perception and categorization of multidimensional stimuli. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition*, 14(1), 33.

Ashby, F. G., and Townsend, J. T. (1986). *Varieties of perceptual independence. Psychological review*, 93(2), 154.

Ashby, F. G., and Maddox, W. T. (1992). Complex decision rules in categorization: Contrasting novice and experienced performance. *Journal of Experimental Psychology: Human Perception and Performance*, 18(1), 50.

Barsalou, L. (1999). Perceptual Symbol Systems. *Behavioral and Brain Sciences*, 22, 577–660.

Bĕlohlávek, R., and Klir, G. J. (2011). Fallacious Perceptions of Fuzzy Logic in the Psychology of Concepts, *Concepts and fuzzy logic*, 121-148.

Bĕlohlávek, R., Klir, G. J., Lewis, H. W., Way, E. (2002). On the capability of fuzzy set theory to represent concepts. *International Journal of General Systems*, 31(6), 569-585.

Bĕlohlávek, R., Klir, G. J., Lewis, H. W., and Way, E. C. (2009). Concepts and fuzzy sets: Misunderstandings, misconceptions, and oversights. *International journal of approximate reasoning*, 51(1), 23-34.

Boole, G. (1854). *An investigation of the laws of thought: on which are founded the mathematical theories of logic and probabilities*. Dover Publications.

Brooks, L. R. (1978). Nonanalytic concept formation and memory for instances. In *Cognition and Concepts*, ed. E. Rosch and B. B. Lloyd, 169 – 211. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Chaves, M., Albert, R., Sontag, E. D., (2005). Robustness and fragility of Boolean models for genetic regulatory networks. *Journal of Theoretical Biology*, 235(3), 431–449.

Chomsky, N. (1980). Rules and representations. *Behavioral and brain sciences*, 3(01), 1-15.

Chomsky, N. (2006). *Language and mind*. Cambridge University Press.

Coluzzi, B., Ghil, M., Hallegatte, S., Weisbuch, G., (2012). Boolean delay equations on networks in economics and the geosciences. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 21(12), 3511-3548.

Connolly, A. C., Fodor, J. A., Gleitman, L. R., Gleitman, H. (2007). Why stereotypes don't even make good defaults. *Cognition*, 103(1), 1-22.

Danks, D. (2007). Theory unification and graphical models in human categorization. *Causal learning: Psychology, philosophy, and computation*, 173-189.

Darby, M. S., and Mysak, L. A. (1993). A Boolean delay equation model of an interdecadal Arctic climate cycle. *Climate dynamics*, 8(5), 241-246.

Dickerson, J. A., and Kosko, B. (1994). Virtual worlds as fuzzy cognitive maps. *Presence: Teleoperators and Virtual Environments*, 3(2), 173-189.

Dobrić, V. (2014). Fuzzification of Boolean networks. In *Decision Making and Soft Computing: Proceedings of the 11th International FLINS Conference* (Vol. 10, p. 276). World Scientific.

Dobrić, V., Kovačević, D., Petrović, B., Radojević, D., Milošević, P. (2015). Formalization of human categorization process using Interpolative Boolean algebra. *Mathematical Problems in Engineering*, Article ID 620797. doi:10.1155/2015/620797.

Dobrić, V., Milošević, P., Rakićević, A., Petrović, B., Radojević, D., (2016). Interpolative Boolean networks, послат у *Fuzzy sets and systems*.

Easton, G., (2008). Understanding the dynamics of industrial networks using Kauffman Boolean networks. *Advances in Complex Systems*, 11(1), 139–164.

Fauré, A., Naldi, A., Chaouiya, C., Thieffry, D. (2006). Dynamical analysis of a generic Boolean model for the control of the mammalian cell cycle. *Bioinformatics*, 22(14), e124-e131.

Fodor, Jerry (1975). *The Language of Thought*. Harvard University Press.

Fodor, J. A. (1981). *Representations: Philosophical essays on the foundations of cognitive science*, MIT press.

Fodor, J. A., and Pylyshyn, Z. W. (1988). Connectionism and cognitive architecture: A critical analysis. *Cognition*, 28(1-2), 3-71.

Fodor, Jerry (1994). Concepts: A potboiler. *Cognition*, 50, 95–113.

Fodor, J. and Lepore, E. (2002). *The compositionality papers*. Oxford University Press.

Fodor, J. and Lepore, E. (1996). The pet fish and the red herring: why concepts aren't prototypes. *Cognition*, 58(2), 243-276.

Fodor, J. A. (1998). *Concepts: Where cognitive science went wrong*. Oxford University Press.

Fuhrmann, G. Y. (1988a). Fuzziness of concepts and concepts of fuzziness. *Synthese*, 75, 349-372.

Fuhrmann, G. Y. (1988b). Prototypes and fuzziness in the logic of concepts. *Synthese*, 75, 317-347.

Gleitman, L., Connolly, A., Armstrong, S. L. (2012). Can prototype representations support composition and decomposition. *Oxford Handbook of Compositionality*, 418-436.

Glykas, M. (2010). *Fuzzy Cognitive Maps: Advances in Tehories, Methodologies, Applications and Tools*. ISBN: 3642032192.

Gu, J., Ching, W., Siu, T., Zheng, H., (2013). On Modeling Credit Defaults: A Probabilistic Boolean Network Approach. *Risk and decision analysis,* 4(2), 119-129.

Hagiwara, M. (1992). Extended fuzzy cognitive maps. In *Fuzzy Systems IEEE International Conference* (pp. 795-801). IEEE.

Hampton, J. A. (1987). Inheritance of attributes in natural concept conjunctions. *Memory and Cognition*, 15, 55 – 71.

Hampton, J. A. (1993). Prototype models of concept representation. In *Categories and Concepts: Theoretical Views and Inductive Data Analysis*, ed. I. Van Mechelen, J. A. Hampton, R. S. Michalski and P. Theuns, 67 – 95. London: Academic Press.

Hampton, J. A. (1995). Similarity-based categorization: The development of prototype theory. *Psychologica Belgica*, 35, 103-125.

Jönsson, M. L., and Hampton, J. A. (2008). On prototypes as defaults (comment on Connolly, Fodor, Gleitman and Gleitman, 2007). *Cognition*, 106(2), 913-923.

Hampton, J. A. and Jönsson, M. (2012). Typicality and compositionality: The logic of combining vague concepts. In *The Handbook of Compositionality*, ed. by Wolfram Hinzen, Edouard Machery, and Markus Werning.

Hampton, J. A. (2011). Conceptual combinations and fuzzy logic. Concepts and fuzzy logic. MIT Press, 209-231.

Hausman, D. M., and Woodward, J. (1999). Independence, invariance and the causal Markov condition. *The British journal for the philosophy of science*, 50(4), 521-583.

Heit, E. and Bersalou, L. (1996). The instantiation principle in natural language categories. *Memory*, 4,413–451.

Jackendoff, Ray (1983). *Semantics and Cognition*, Cambridge, MA: MIT Press.

Johnson, C., and Keil, F. C. (2000). Explanatory understanding and conceptual combination. In *Explanation and Cognition*, ed. F. C. Keil and R. A. Wilson, 328 – 359. Cambridge, MIT Press.

Kamp, H., and Partee, B. (1995) . Prototype theory and compositionality. *Cognition*, 57(2), 129-191.

Kauffman, S. A., (1969). Metabolic stability and epigenesis in randomly constructed genetic nets. *Journal of Theoretical Biology*, 22(3), 437–467.

Khan, M. S., and Quaddus, M. (2004). Group decision support using fuzzy cognitive maps for causal reasoning. *Group Decision and Negotiation*, 13(5), 463-480.

Kosko, B. (1986). Fuzzy cognitive maps. *International Journal of man-machine studies*, 24(1), 65-75.

Kosko, B. (1988). Hidden patterns in combined and adaptive knowledge networks. *International Journal of Approximate Reasoning*, 2(4), 377-393.

Kobayashi, K., Hiraishi, K., (2014). A Probabilistic Approach to Control of Complex Systems and Its Application to Real-Time Pricing. *Mathematical Problems in Engineering*, Article ID 906717.

Kok, T., Wang, P., (2006). A study of 3-gene regulation networks using NK-Boolean network model and fuzzy logic networking. *Studies in Fuzziness and Soft Computing*, Springer Berlin Heidelberg 201, 119-151.

Ladyman, J., Lambert, J., and Wiesner, K. (2013). What is a complex system?. *European Journal for Philosophy of Science*, 3(1), 33-67.

Lakoff, G. (1987). *Women, Fire, and Dangerous Things*. University of Chicago Press, Chicago.

Laurence, S. and Margolis, E. (1999). Concepts and Cognitive Science. In Eric Margolis and Stephen Laurence (eds.) *Concepts: Core Readings*, MIT Press, 3-81.

Lv, Z., and Zhou, L. (2007). Advanced fuzzy cognitive maps based on OWA aggregation. *International Journal of Computational Cognition*, 5(2), 31.

Medin, D. L. and Schaffer, M. M. (1978). Context theory of classification learning. *Psychological Review*, 85, 207 – 238.

Malt, B. C., and Smith, E. E. (1984). Correlated properties in natural categories. *Journal of verbal learning and verbal behavior*, 23(2), 250-269.

Margolis, E., and Laurence, S. (2007). The ontology of concepts—abstract objects or mental representations? *Noûs*, 41(4), 561-593.

McRae, K., de Sa, V. R., Seidenberg, M. S. (1997). On the nature and scope of featural representations of word meaning. *Journal of Experimental Psychology: General*, 126(2), 99.

McRae, K., Cree, G. S., Westmacott, R., De Sa, V. R. (1999). Further evidence for feature correlations in semantic memory. *Canadian Journal of Experimental Psychology/ Revue canadienne de psychologie expérimentale*, 53(4), 360.

Medin, D. L. and Schaffer, M. M. (1978). Context theory of classification learning, *Psychological Review*, 85, 207 – 238.

Miller, G. A., and Johnson-Laird, P. N. (1976). *Language and perception*. Cambridge, Mass: Belknap Press of Harvard University Press.

Millikan, R. (2000). *On Clear and Confused Ideas*. Cambridge: Cambridge University Press.

Milošević, P., Poledica, A., Dragović I., Petrović, B. and Radojević, D., (2013) Logic-based Similarity Measures for Consensus, in: Mladenović, N., Savić, G., Kuzmanović, M., Makajić Nikolić, M., Stanojević, M., (Eds.) *Proceedings of the 11th Balkan Conference on Operational Research* (BALCOR-13), 473-481. ISBN:978-86-7680-285-

Milošević P., Poledica, A., Rakićević, A., Dobrić, V. and Petrović B., (2016a) A logic-based framework for modeling similarity, *Book of Abstracts of the International Student Conference on Applied Mathematics and Informatics (ISCAMI 2016), University of Ostrava* - Institute for Research and Application of Fuzzy Modeling, Ostrava, 44.

Milošević P., Poledica, A., Rakićević, A., Dobrić, V. and Petrović B., (2016b) IBA-based framework for modeling similarity, послат у *Acta Polytechnica Hungarica*.

Minda, J. P., and Smith, J. D. (2001). Prototypes in category learning: the effects of category size, category structure, and stimulus complexity. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition*, 27(3), 775.

Morris, M. K., Saez-Rodriguez, J., Clarke, D. C., Sorger, P. K., Lauffenburger, D.A., (2011). Training Signaling Pathway Maps to Biochemical Data with Constrained Fuzzy Logic: Quantitative Analysis of Liver Cell Responses to Inflammatory Stimuli, *PLOS Computational Biology*. 7(3), e1001099.

Murphy, Gregory (2002a). *The big book of concepts*, MIT Press.

Murphy, K. P. (2002b). *Dynamic bayesian networks: representation, inference and learning* (Doctoral dissertation, University of California, Berkeley).

Nosofsky, R. M. (1986). Attention, similarity, and the identification–categorization relationship. *Journal of experimental psychology: General*, 115(1), 39.

Nosofsky, R. M. (1992). Exemplar-based approach to relating categorization, identification, and recognition. In *Multidimensional Models of Perception and Cognition*, (ed.) F. G. Ashby, Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum, 363 – 393.

Nosofsky, R.M., (2011). The Generalized Context Model: An Exemplar Model of Classification. In *Formal Approaches to Categorization*, (ed.) Pothos, E.M., Wills, A.J., Cambridge University Press, 18-39.

Osherson, D. N. and Smith, E. E. (1981). On the adequacy of prototype theory as a theory of concepts, *Cognition*, 9(1), 35–58.

Osherson, D. N. and Smith, E. E. (1982). Gradedness and conceptual combination. *Cognition*, 12(3), 299–318.

Osherson, D., and Smith, E. E. (1997). On typicality and vagueness., *Cognition*, *64*(2), 189-206.

Papageorgiou, E. I., and Stylios, C. D. (2008). Fuzzy cognitive maps. Handbook of Granular Computing, 755-774.

Papageorgiou, E. I. (2013a). Review study on fuzzy cognitive maps and their applications during the last decade. In *Business Process Management* (pp. 281-298). Springer Berlin Heidelberg.

Papageorgiou, E. I. (2013b). *Fuzzy Cognitive Maps for Applied Sciences and Engineering: From Fundamentals to Extensions and Learning Algorithms* (Vol. 54). Springer Science and Business Media.

Papageorgiou, E. I., and Salmeron, J. L. (2013). A review of fuzzy cognitive maps research during the last decade. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 21(1), 66-79.

Pearl, J. (2000). *Causality: models, reasoning and inference*. Cambridge: MIT press.

Pearl, J., and Verma, T. S. (1995). A theory of inferred causation. *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*, 134, 789-811.

Pearl, J., and Dechter, R. (1996). Identifying independencies in causal graphs with feedback. In *Proceedings of the Twelfth international conference on Uncertainty in artificial intelligence* (pp. 420-426). Morgan Kaufmann Publishers Inc..

Peacocke, Christopher (1992). *A Study of Concepts*. Cambridge: M.I.T. Press.

Petrović, B. J. (1998). *Teorija sistema*. Fakultet organizacionih nauka.

Pitt, David. (1999). In Defense of Definitions. *Philosophical Psychology* 12 (2), 139-156.

Pinker, S., and Prince, A. (1988). On language and connectionism: Analysis of a parallel distributed processing model of language acquisition. *Cognition,* 28(1-2), 73-193.

Pinker, S. (1995). *The language instinct: The new science of language and mind* (Vol. 7529). Penguin UK.

Poledica, A., Milošević, P., Dragović, I., Petrović, B., Radojević, D. (2015). Modeling consensus using logic-based similarity measures. *Soft Computing*, 19(11), 3209-3219.

Poledica, A., Milosevic, P., Dragovic, I., Radojevic, D., Petrovic, B. (2013, August). A consensus model in group decision making based on interpolative boolean algebra. In *8th conference of the European Society for Fuzzy Logic and Technology* (EUSFLAT-13). Atlantis Press.

Poret, A., Sousa, C. M., Boissel, J., (2014). A logic-based modeling derived from Boolean networks: adding fuzzy logic and edge tuning, arXiv:1407.1135.

Prinz, J. (2004). *Furnishing the mind: Concepts and their perceptual basis*. Cambridge, MA:MIT Press.

Radojević, D. (1999). Logical interpretation of discrete Choquet integral defined by general measure. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 7(06), 577-588.

Radojević, D., (2000). New [0,1]-valued logic: A natural generalization of Boolean logic. *Yugoslav Journal of Operational Research – YUJOR*, 10(2), 185-216.

Radojević, D. (2005). Interpolative relations and interpolative preference structures. *Yugoslav Journal of Operational Research – YUJOR*, 15(2), 171-189.

Radojević, D., (2008a). Fuzzy Set Theory in Boolean Frame. *International Journal of Computers, Communications and Control* 3, 121-131.

Radojević, D., (2008b). Logical Aggregation Based on Interpolative Boolean Algebra. *Mathware and Soft Computing* 15, 125-141.

Radojević, D., (2008c). Real Sets as Consistent Boolean Generalization of Classical Sets. *From Natural Language to Soft Computing: New Paradigms in Artificial Intelligence*, Editing House of Romanian Academy, Bucharest, 150-171.

Radojević, D., (2010). Generalized (Real-Valued) order and Equivalence Relations. In *Proceedings of the 37th symposium on operational research SYM-OP-IS 2010* (pp 451-454). Media centar “Odbrana”, Beograd.

Radojević, D., (2013a). Real-valued realizations of Boolean algebra are a natural frame for consistent Fuzzy logic. *Studies in Fuzziness and Soft Computing* 299, 559-565.

Radojević, D. G. (2013b). Excluded Middle and Graduation. In *Soft Computing Applications*. Springer Berlin Heidelberg, 83-91.

Radojević, D. G. (2014). Structural Functionality as a Fundamental Property of Boolean Algebra and Base for Its Real-Valued Realizations. In *Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-Based Systems* (pp. 28-36). Springer International Publishing.

Radojević, D. (2015). Bulovski konzistenta NPN logika. In *Proceedings of the 42nd International Symposium on Operations Research SYM-OP-IS 2015* (pp. 354-357). Matematički Institut SANU, Beograd.

Rehder, B. (2003a). A causal-model theory of conceptual representation and categorization. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition*, 29(6), 1141.

Rehder, B. (2003b). Categorization as causal reasoning. *Cognitive Science, 27*(5), 709-748.

Rehder, B., and Kim, S. (2006). How causal knowledge affects classification: A generative theory of categorization. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition*, 32(4), 659.

Rehder, B., and Kim, S. (2009). Classification as diagnostic reasoning. *Memory and Cognition*, 37(6), 715-729.

Rehder, B. (2010). Causal-based categorization: A review. *Psychology of Learning and Motivation*, 52, 39-116.

Rehder, B., and Kim, S. (2010). Causal status and coherence in causal-based categorization. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition,* 36(5), 1171.

Rehder, B., and Martin, J. B. (2011). Towards A Generative Model of Causal Cycles. In *33rd Annual Meeting of the Cognitive Science Society* (pp. 2944-2949).

Roelofs, A. (1997). A case for nondecomposition in conceptually driven word retrieval. *Journal of Psycholinguistic Research*, 26(1), 33-67.

Rips, L. J. (1995). The current status of research on concept combination. *Mind and Language*, 10(1-2), 72-104.

Robbins, P. (2002). How to blunt the sword of compositionality. *Nous*, 36(2), 313-334.

Rosch, E. and Mervis, C. (1975). Family resemblances: Studies in the internal structure of categories. *Cognitive Psychology*, 7, 573 – 604.

Rosch, E. (1975). Cognitive representation of semantic categories. *Journal of Experimental Psychology: General*, 104(3), 192–233.

Rosch, E. (1978). Principles of Categorization. In *Cognition and Categorization*, (ed.) E. Rosch and B, B. Lloyd,. Hillsdale, NJ, Erlbaum., 27–48.

Rosch, E. (2011). Slow Lettuce: Categories, Concepts, Fuzzy Sets, and Logical Deduction. *Concepts and fuzzy logic*, MIT Press, 89-120.

Ruz, G. A., Goles, E., Montalva, M., Fogel, G. B. (2014). Dynamical and topological robustness of the mammalian cell cycle network: A reverse engineering approach. *Biosystems*, 115, 23-32.

Saadatpour A., Albert, R., (2013), Boolean modeling of biological regulatory networks: A methodology tutorial. *Methods* 62(1), 3-12.

Saunders, A., Ghil, M., (2001). A Boolean delay equation model of ENSO variability. *Physica D: Nonlinear phenomena*, 160(1-2), 54-78.

Schurz, G. (2012). Prototypes and their composition from an evolutionary point of view. In *The Oxford Handbook of Compositionality,* (ed.) Hinzen W., Machery E., and Werning M. Oxford: Oxford University Press.

Smith, E. E., and Medin, D. L. (1981). *Categories and concepts*. Cambridge, Harvard University Press.

Smith, J. D., and Minda, J. P. (1998). Prototypes in the mist: The early epochs of category learning. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition*, 24(6), 1411.

Smith, J. D., and Minda, J. P. (2000). Thirty categorization results in search of a model. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition*, 26(3), 3–27.

Thagard, P. (1996). *Mind: Introduction to cognitive science* (Vol. 4). Cambridge, MA: MIT press.

Thomas, R., (1973). Boolean Formalization of Genetic Control Circuits. *Journal of Theoretical Biology*, 42(3), 563–585.

Thomas, R. (1979). Kinetic logic: a Boolean approach to the analysis of complex regulatory systems. *Lecture Notes in Biomathematics*, 29, 507.

Thomas, R., (1991). Regulatory Networks Seen as Asynchronous Automata: A Logical Description. *Journal of Theoretical Biology* 153(1), 1–23.

Wang, H., and Wang, L. (2013). Application of Improved Fuzzy Cognitive Map Based on Fuzzy Neural Network in Intrusion Detection. *Journal of information and computational science,* 10(1), 271-278.

Wang R., Saadatpour A., Albert, R., (2012). Boolean modeling in systems biology: an overview of methodology and applications, *Physical Biology* 9(5), 055001.

Wittmann,D.M., Krumsiek, J., Saez-Rodriguez, J., Lauffenburger, D.A., Klamt, S., Theis , F.J., (2009). Transforming Boolean models to continuous models: methodology and application to T-cell receptor signaling. *BMC Systems Biology* 3(98), 1-21.

Wittmann, D. M., Theis, F. J., (2011). Dynamic regimes of random fuzzy logic networks, *New Journal of physics* 13, 013041.

Wright, D., Stocker, T., Mysak, L., (1990). A note on quaternary climate modelling using Boolean delay equations, *Climate dynamics* 4(4), 263-267.

Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy Sets. *Information and Control*, 8(3), 338–352.

Zadeh, L. A. (1982). A note on prototype theory and fuzzy sets. *Cognition*, 12(3), 291-297.

Zadeh, L. A. (1999). From computing with numbers to computing with words – from manipulation of measurements to manipulation of perceptions', *IEEE Transactions on Circuits and Systems* 45, 105–119.

Zadeh, L. A. (2001). A new direction in AI – toward a computational theory of perceptions. *AI Magazine* 22(1), 73–84.

Zadeh, L. A. (1973). Outline of a new approach to the analysis of complex systems and decision processes. *IEEE Transactions on systems, man and cybernetics*, SMC-3(1), 28-44.

Zadeh, L. A. (2008). Is there a need for fuzzy logic?. *Information Sciences*, 178(13), 2751–2779.

Zaliapin, I., Keilis-Borok, V., Ghil, M., (2003a). A Boolean Delay Equation Model of Colliding Cascades. Part I: Multiple seismic regimes, *Journal of Statistical Physics* 111(3-4), 815-837.

Zaliapin, I., Keilis-Borok, V., Ghil, M., (2003b). A Boolean Delay Equation Model of Colliding Cascades. Part II: Prediction of critical transitions, *Journal of Statistical Physics*, 111(3-4), 839-861.

Zaki, S. R., Nosofsky, R. M., Stanton, R. D., Cohen, A. L. (2003). Prototype and Exemplar Accounts of Category Learning and Attentional Allocation: A Reassessment. *Journal of experimental psychology: Learning, memory, and cognition*, 29(6), 1160-1173.

9. СПИСАК СЛИКА

10. СПИСАК ТАБЕЛА

БИОГРАФИЈА

Владимир Добрић је рођен 14. октобра 1981. године у Параћину, Република Србија. Дипломирао је 2007. године на смеру за информационе системе Факултета организационих наука Универзитета у Београду. Аутор је више научних радова, објављених у часописима и саопштених на скуповима међународног значаја. Области научно-истраживачог рада и интересовања Владимира Добрића су теорија система и вештачка интелигенција.

Изјава о ауторству

Име и презиме аутора Владимир Добрић

Број индекса 2/2007

Изјављујем

да је докторска дисертација под насловом

Моделовање концепата конзистентном фази логиком

- резултат сопственог истраживачког рада;
- да дисертација у целини ни у деловима није била предложена за стицање друге дипломе према студијским програмима других високошколских установа;
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио ауторска права и користио интелектуалну својину других лица.

Потпис аутора

У Београду, 1.9.2016.

Изјава о истоветности штампане и електронске верзије докторског рада

Име и презиме аутора Владимир Добрић

Број индекса 2/2007

Студијски програм Информациони системи и квантитативни менаџмент

Наслов рада Моделовање концепата конзистентном фази логиком

Ментор проф. др Братислав Петровић

Изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предао ради похрањена у **Дигиталном репозиторијуму Универзитета у Београду.**

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског назива доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Београду.

Потпис аутора

У Београду, 1.9.2016.

____

Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом:

Моделовање концепата конзистентном фази логиком

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у Дигиталном репозиторијуму Универзитета у Београду и доступну у отвореном приступу могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за који сам се одлучио.

1. Ауторство (CC BY)

2. Ауторство – некомерцијално (CC BY-NC)

3. Ауторство – некомерцијално – без прерада (CC BY-NC-ND)

4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима (CC BY-NC-SA)

5. Ауторство – без прерада (CC BY-ND)

6. Ауторство – делити под истим условима (CC BY-SA)

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци.

Кратак опис лиценци је саставни део ове изјаве).

Потпис аутора

У Београду, 1.9.2016.

1. **Ауторство**. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце, чак и у комерцијалне сврхе. Ово је најслободнија од свих лиценци.

2. **Ауторство – некомерцијално**. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела.

3. **Ауторство – некомерцијално – без прерада**. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела. У односу на све остале лиценце, овом лиценцом се ограничава највећи обим права коришћења дела.

4. **Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима**. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада.

5. **Ауторство – без прерада**. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела.

6. **Ауторство – делити под истим условима**. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада. Слична је софтверским лиценцама, односно лиценцама отвореног кода.