УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ

МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

мр Марина М. Миловановић - Аранђеловић

ПРЕСЛИКАВАЊА КОНТРАКТИВНОГ ТИПА И ЊИХОВЕ ПРИМЕНЕ У НЕЛИНЕАРНОЈ АНАЛИЗИ

докторска дисертација

Београд, 2016

UNIVERSITY OF BELGRADE

FACULTY OF MATHEMATICS

mr Marina M. Milovanović - Aranđelović

MAPPINGS OF CONTRACTIVE TYPE AND ITS APPLICATIONS IN NONLINEAR ANALYSIS

Doctoral Dissertation

Belgrade, 2016

Ментор:

др Драгољуб Кечкић, ванредни професор

Универзитет у Београду - Математички факултет

Чланови комисије

др Зоран Каделбург, редовни професор

Универзитет у Београду - Математички факултет

др Ненад Цакић, редовни професор

Универзитет у Београду - Електротехнички факултет

Датум одбране:

ПРЕСЛИКАВАЊА КОНТРАКТИВНОГ ТИПА И ЊИХОВЕ ПРИМЕНЕ У НЕЛИНЕАРНОЈ АНАЛИЗИ

РЕЗИМЕ

У овој дисертацији су приказане неке нове особине извесних пресликавања контрактивног типа, и дате су примене тих резултата у нелинеарној анализи. Дисертација садржи шест поглавља.

Прво поглавље садржи основне особине полу - метричких простора. У њој је дато и једно проширење Борел - Лебегове теореме за ту класу простора. У другом погламљу је доказано једно уопштење теореме о непокретној тачки Ниемитцког. У трећем поглављу је појам мере некомпактности проширен на класу полу - метричких простора. Такође је доказана теорема о фиксним тачкема за кондензујућа пресликавања дефинисана на тој класи простора. Следећа три поглавља садрже нове ставове о заједничким фиксним тачкама Мајр - Келеровог типа, нове резултате о акретивним пресликавањима и нове теореме о заједничким фиксним тачкама за пресликавања дефинисана на вероватносним метричким просторима.

Кључне речи: непокретна тачка, полу - метрички простор, мера некомпактности, кондензујуће пресликавање, акретивно пресликавање, вероватносни метрички простор

Научна област: Математичка анализа

Ужа научна област: Нелинеарна функционална анализа

УДК број: 515.126.4:517.988 (043.3)

MAPPINGS OF CONTRACTIVE TYPE AND ITS APPLICATIONS IN NONLINEAR ANALYSIS

ABSTRACT

The aim of this dissertation is to present new properties of some classes of contractive mappings, and applications of this results to nonlinear analysis. It contain six chapters.

The first chapter gives basic properties of semi-metric spaces. New result is extension of Borel - Lebesque theorem to semi metric spaces. The second chapter contain generalization of Niemytzki's fixed point theorem. In third chapter the notion of measure of non-compactness are extended to class of semi-metric spaces. New fixed point theorem for condensing mappings defined on semi-metric spaces is presented. Further three chapters contains new common fixed points theorems of Mair - Keeler type, new results for accretive mappings and new common fixed point results for mappings defined on probabilistic metric spaces.

Key words: fixed point, semi-metric space, measure of non-compactness, condensing map, accretive map, probabilistic metric space

Scientific field: Mathematical analysis

Scientific subfield: Nonlinear functional analysis

UDK number: 515.126.4:517.988 (043.3)

САДРЖАЈ

УВОД

Ако је X непразан скуп и $f : X \to X$, за елемент $x \in X$ кажемо да је фиксна (непокретна) тачка пресликавања f ако је $f(x) = x$. За фиксирани природни број n функција $f^n : X \to X$ дефинисана релацијама: $f^1(x) = f(x), ..., f^n(x) = f(f^{n-1}(x))$ за свако $x \in X$, назива се n-та итерација функције f. Низ $x_0 = x, ..., x_n = f^n(x), ...$ зове се Пикаров[1] итеративни низ дефинисан тачком x и пресликавањем f. Резултати теорије фиксне тачке широко су коришћени у различитим математичким дисциплинама и њиховим применама.

Проблем одређивања непокретне тачке неког пресликавања је математички најопштији начин записивања једначина. Нека је $(X, +)$ група, $0 \in X$ неутрални елемент за операцију $+$ и $f : X \to X$. Класичан запис једначине у облику

$$f(x) = 0$$

може се увек трансформисати у проблем одређивања фиксних тачака, док обрнута трансформација није могућа ако скуп на коме се решава једначина нема алгебарску структуру. Та чињеница доводи теорију непокретне тачке на истакнуто место у савременој математици. Постоје четири главна правца истраживања у теорији непокретне тачке, и то су проучавања непокретних тачака:

1) непрекидних пресликавања дефинисаних на компактним и конвексним скуповима;

[1] Émile Picard

2) контрактивних пресликавања;

3) нееекспанзивних пресликавања;

4) пресликавања дефинисаних на парцијално уређеним скуповима.

Прво тврђење које је еквивалентно Брауеровој[2] теореми о фиксним тачкама, исказао је и доказао Анри Поенкаре[3] 1883. године, а следеће Пирс Бол[4] 1904. године (први једнодимензионални еквивалент је позната Болцанова[5] теорема о нулама непрекидне функције доказана 1817. године). Брауер 1909. доказује став о фиксним тачкама за случај тродимензионалног Еуклидског простора. 1910. Адамар[6]доказује одговарајуће тврђење за произвољан коначно димензионални простор, користећи Кронекеров[7] индекс, а исто тврђење доказује Брауер 1912. користећи симплицијалну апроксимацију и појам степена пресликавања.

Иако су Поенкаре и Бол дали директне примене својих резултата у теорији диференцијалних једначина, као и у небеској (Поенкаре), односно аналитичкој (Бол) механици, дуго није било озбиљнијих примена Брауверог става у Математичкој анализи, изузимајући један резултат Шаудера[8] из 1927. године који се односи на егзистенцију решења елиптичких парцијалних једначина. До наглог преокрета долази када је Џон фон Нојман[9] [01] применио Брауерову теорему, која је већ нашла широке примене у Топологији и Диференцијалној

[2]L. J. E. Brower
[3]Henri Poincaré
[4]Piers Bohl
[5]B. Bolzano
[6]J. Hadamard
[7]L. Kronecker
[8]J. Schauder
[9]John von Neumann

геометрији (теорија поља), у доказу егзистенције решења матричних игара суме нула у скупу комбинованих стратегија. Овај резултат, који представља основу класичне теорије игара, нагло је повећао интерес математичара различитих специјалности за проучавање примена ове теореме у различитим областима анализе.

Модерна истраживања услова контрактивног типа почела су Банаховим[10] ставом о фиксној тачки, који је један од класичних ставова функционалне анализе. Њега је први исказао и доказао познати пољски математичар Стефан Банах (1892. - 1945.) у својој докторској дисертацији одбрањеној у Љвову 1920. године. Резултати те дисертације су објављени у раду [02]. Банаховим резултатима су претходила истраживања француског математичара Пикара [03]. Пикар је развио метод сукцесивних апроксимација за решавање диференцијалних једначина, и тим методом је доказао теорему о егзистенцији и јединствености решења за широку класу ових једначина. Банах је применио Пикаров метод на решавање једначина на комплетним нормираним просторима, који су у његову част добили назив Банахови простори, из чега је проистекла његова Теорема. Касније је запажено да код овог става није битна векторска, већ само метричка структура простора, па се зато он обично исказује за комплетне метричке просторе. Широку примену овог става омогућиле су две чињенице:

1. Решавање многих врста нумеричких и функционалних једначина може да се сведе на проблем одређивања фиксних тачака неких пресликавања.

2. Банахов став омогућује ефективно израчунавање (конструк-

[10]Stefan Banach

цију) фиксне тачке и даје могућност за процену грешке, т. ј. максималног растојања приближног од тачног решења.

Широке примене овог става мотивисале су многе математичаре да проучавају могућности за његово уопштавање. Прво уопштење Банаховог става доказао је 1930. године италијански математичар Качиополи[10].

Растојање између две тачке је један од најстаријих математичких појмова. Крајем *XIX* века настала је потреба за дефинисањем конвергенције низа функција и непрекидне трансформације која дејствује на датом скупу функција. То је довело до потребе да се појмови конвергенције и непрекидности пренесу са Еуклидских простора на апстрактније структуре. Француски математичар М. Фреше[11] 1906. године дао је аксиоматску дефиницију растојања на произвољном скупу и тако увео појам метричког простора. Фрешеова дефиниција нашла је одмах широке примене у Диференцијалној геометрији (проблем геодезијских растојања), теорији једначина Математичке физике и омогућила убрзан развој Функционалне анализе која је тек настајала у то време.

Постоје значајни математички појмови у теорији метричких простора који се не могу дефинисати на произвољном тополошком простору, зато што нису тополошке инваријанте. То су, на пример, комплетност простора, равномерна непекидност функције, појам Кошијевог[12] низа, итд.

Класу равномерних тополошких простора (или прецизније, простора са равномерном топологијом) - најопштију на коју се сви наве-

[10]R. Caccioppoli
[11]Maurice Fr*é*chet
[12]Augustin Louis Cauchy

дени појмови могу пренети, први је описао А. Тихонов 1930. године преко њених сепарационих својстава као *комплетно регуларне просторе*. 1934. године Ђ. Курепа разматра метричке просторе са *апстрактним растојањем*, тј. просторе у којима растојање између тачака не мора бити реалан број. Затим су уследиле дефиниције А. Вејла[13] 1938. године, Ефремовича, Антоновског, Болтјанског и Саримсакова 1960. године. Детаљни историјски коментари могу се наћи у раду Ђ. Курепе [05]. Ми ћемо усвојити назив *равномеран простор* који потиче од А. Вејла. Он је показао да је тополошки простор равномеран ако и само ако се његова топологија може дефинисати преко фамилије псеудометрика и доказао да тополошке групе и компактни простори припадају овој класи простора. Докази наведених чињеница могу се наћи у монографији Кејлија[14][06].

Појам метричког простора је добио бројна уопштења. У оквиру овог рада разматраћемо псеудо-контрактивне операторе дефинисане на полу-метричким просторима и вероватносним метричким просторима.

Поред тога што су метрички простори пронашли широке примене у готово свим областима савремене Математичке анализе, појавили су се проблеми у примењеним математичким дисциплинама (на пример, у теорији информација) и физици (објашњење неких појава које настају у магнетном пољу) у којима је неприкладно растојање посматрати детерминистички (као фиксиран број) већ је далеко практичније одредити вероватноћу да је растојање између објеката који се посматрају ограничено неким бројем. Ти проблеми навели су поз-

[13] Andre Wail
[14] John Kelley

натог аустријског математичара Карла Менгера[15], који се десетак година раније прославио увођењем појма конвексних метричких простора и дефиниције димензије скупа у произвољном тополошком простору, да 1942. године дефинише вероватносне метричке просторе (он их је називао Статистички метрички простори). Првобитна Менгерова дефиниција је доживела многобројне критике, тако да он 1951. године даје нову дефиницију, отклањајући неке недостатке које је уочио А. Валд[16] 1943. године. За даљи развој ове теорије изузетно је значајан рад Швајцера[16] и Склара[17] [07] у коме је дат преглед свих дотадашњих резултата и указано на нове могућности за развој ове теорије. Комплетни прикази ове теорије и њених примена могу се наћи у монографији Швајцера и Склара [08].

Рад се састоји из увода, шест глава и списка литературе. У првој глави је дат преглед најважнијих појмова из теорије полу-метричких простора. Од оригиналних резултата дато је уопштење познате Борел[18]-Лебегове[19] теореме. У другој глави су дата уопштења познатих резултата Ниемитцког[20] [09] о уопштењима Банаховог става на компактним просторима.

У трећој глави је појам мера некомпактности пренет на полуметричке просторе, и доказан је општи став о фиксним тачкама уопштених кондензујућих пресликавања. При томе се пошло од дефиниције мере некомпактности на равномерним просторима дате у раду

[15]Karl Menger
[16]A. Wald
[16]B. Schweizer
[17]A. Sklar
[18]Emile Borel
[19]Henri Lebesgue
[20]V. Niemytzki

М. Миловановић - Аранђеловић [10]. Тај рад је привукао и пажњу страних математичара и цитиран је у радовима [11,12,13,15] и монографији [14].

У четвртој глави се доказују две теореме о постојању заједничких фиксних тачака фамилије пресликавања која испуњава контрактивни услов Мајр[21] - Келеровог[22] типа. Основни резултати те главе су публиковани у раду А. Кумар[23], С. Л. Синг[24], С. Н. Мишра[25], М. Миловановић - Аранђеловић [16]. Пета глава је посвећена резултатима из теорије акретивних оператора. Основни резултати те главе су публиковани у раду Ћирић, Уме[26], Јешић, Миловановић - Аранђеловић [17]. Шеста глава доноси нове резултате на класи вероватносних метричких простора. Основни резултати те главе су публиковани у раду М. Миловановић - Аранђеловић [18]. Тај рад је привукао и пажњу страних математичара и цитиран је у радовима [19,20,21,22].

Аутор дугује велику захвалност ментору дисертације др Драгочубу Кечкићу и члановима комисије: др Зорану Каделбургу и др Ненаду Цакићу, као и др Стојану Раденовићу пензионисаном професору Универзитета у Бгеограду, на великом броју корисних савета и примедби којима је значајно побољшан квалитет овог рада.

Београд, 22. јул 2016.

Марина Миловановић - Аранђеловић

[21] A. Meir
[22] E. Keeler
[23] Ashish Kumar
[24] Shyam Lal Singh
[25] S. N. Mishra
[26] J. S. Ume

1. ПОЛУ-МЕТРИЧКИ ПРОСТОРИ

Постоје различита уопштења појма метричког простора. Једно од њих су полу-метрички простори, које су у својим радовима дефинисали М. Фреше, К. Менгер [23], Е. В. Читенден[27] [24] и В. А. Вилсон[28] [25]. М. Ћикезе[29] [26] је први разматрао пресликавања контрактивног типа и доказао прве резултате о фиксним тачкама за ову класу простора. Даље резултате у овој области дали су: Ј. Јачимски[30], Ј. Матковски[31], Т. Свјатковски[32][27], Т. Л. Хикс[33], Б. Е. Роудс[34] [28], М. Аамри[35], Д. Ел Мутавакил[36][29], Ј. Цу[37], Ј. Ј. Чо[38], С. М. Канг[39] [30], Д. Михет[40] [31], М. Имдад[41], Ј. Али[42], Л. Кан[43][32], И. Д. Аранђеловић, Д. Ј. Кечкић [33], С. Алшехри[44], И. Аранђеловић, Н. Шах-

[27]E. W. Chittenden
[28]W. A. Wilson
[29]M. Cicchese
[30]J. Jachymski
[31]J. Matkowski
[32]T. Światkowski
[33]T. L. Hicks
[34]B. E. Rhoades
[35]M. Aamri
[36]D. El Moutawakil
[37]J. Zhu
[38]Y. J. Cho
[39]S. M. Kang
[40]D. Mihet̆
[41]M. Imdad
[42]J. Ali
[43]L. Khan
[44]S. Alshehri

зад[45][34],....

Нека X је непразан скуп и $d : X^2 \to [0, \infty)$. (X, d) је симетричан простор (користи се и термин E-простор, у терминологији М. Фрешеа) ако и само ако је:

$(W1)$ $d(x, y) = 0$ ако и само ако $x = y$;

$(W2)$ $d(x, y) = d(y, x)$ за све $x, y \in X$.

Као што видимо, у симетричним просторима, за разлику од метричких, не мора да важи неједнакост троугла. Међутим, многи појмови се у теорији симетричних простора дефинишу исто као у теорији метричких простора. На пример, у симетричном простору (X, d) гранична вредност низа (x_n) се дефинише са

$$\lim d(x_n, x) = 0 \Leftrightarrow \lim x_n = x.$$

Такође, за низ $\{x_n\} \subseteq X$ се каже да је Кошијев низ, ако за свако $\varepsilon > 0$, постоји природан број n_0 такав да је $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ за све $m, n \geq n_0$. Симетричан простор (X, d) је комплетан ако и само ако сваки Кошијев низ из X конвергира ка неком $x \in X$. Диаметар скупа $A \subseteq X$ је:

$$\operatorname{diam}(A) = \sup_{x,y \in A} d(x, y),$$

а отворена кугла са центром у тачки $x \in X$ полупречника $r > 0$ је:

$$B(x, r) = \{y \in X : \ d(x, y) < r\}.$$

Услови које наводимо у следећој дефиницији се користе као делимична замена за неједнакост троугла.

[45] N. Shahzad

Дефиниција 1.1. *За симетричан простор* (X, d) *кажемо да има особину:*

(W3) $\lim d(x_n, x) = 0 \wedge \lim d(x_n, y) = 0 \Rightarrow x = y$;

(CC) $\lim d(x_n, x) = 0 \Rightarrow \lim d(x_n, y) = d(x, y)$;

(JMS) $\lim d(x_n, y_n) = 0 \wedge \lim d(y_n, z_n) = 0 \Rightarrow \overline{\lim} d(x_n, z_n) \neq \infty$.

Особину $(W3)$ је увео В. А. Вилсон [25], (CC) Б. Т. Симс[46] [35], (JMS) Ј. Јачимски, Ј. Матковски и Т. Свјатковски [27]. Познато је да $(CC) \Rightarrow (W3)$ и $(W3) \not\Rightarrow (CC)$ (видети С. Х. Чо[47], Г. Ј. Ли[48] и Ј. С. Бае[49][36]).

Нека је X непразан скуп. Топологија на X се може дефинисати *оператором затварања* то јест произвољним пресликавањем $\overline{} : 2^X \to 2^X$ партитивног скупа од X у самог себе које испуњава услове:

1) $\overline{\emptyset} = \emptyset$;

2) $A \subseteq \overline{A}$;

3) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;

4) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$,

за свако $A, B \subseteq X$.

Нека је (X, d) произвољан симетричан простор и $c : 2^X \to 2^X$ пресликавање партитивног скупа од X у самог себе дефинисано са

$$c(A) = \{x \in X : d(x, A) = 0\},$$

[46] B. T. Sims
[47] S. H. Cho
[48] G. Y. Lee
[49] J. S. Bae

где је

$$d(x,A) = \inf\{d(x,a) : a \in A\}.$$

c не мора да буде оператор затварања на X. c има особине 1), 2) и 3), али не и особину идемпотенције 4).

У сваком симетричном простору (X,d) може се увести топологија τ_d дефинисањем фамилије затворених скупова на следећи начин: скуп $A \subseteq X$ је затворен ако и само ако $A = c(A)$.

Дефиниција 1.2. *Тополошки простор (X,τ) је полуметризабилан ако постоји симетрична функција $d : X \times X \to \mathcal{R}$ таква да је $\tau_d = \tau$ и да је пресликавање*

$$X \supseteq A \mapsto c(A) = \{x \in X : d(x,A) = 0\}$$

оператор затварања у τ_d, то јест да је оператор c идемпотентан. Тада је (X,d) полу-метрички простор.

Докази наредна два става могу се наћи у раду Аранђеловић, Кечкић [34].

Став 1.1. *Нека је (X,d) симетричан простор. Тада је (X,d) полуметрички простор ако и само ако су испуњени следећи услови:*

(1) *(X,τ_d) задовољава прву аксиому пребројивости;*

(2) *За сваки низ $(x_n) \subseteq X$, $d(x_n,x) \to 0$ је еквивалентно са $x_n \to x$ у топологији τ_d.*

Нека је (X,τ) тополошки простор и $x \in X$. Фамилија отворених скупова $\mathcal{B}_x$ је локална база топологије τ у тачки x ако и само ако

1) $x \in B$ за сваки $B \in \mathcal{B}_x$;

2) за сваки $U \in \tau$ такав да $x \in U$ постоји $B \in \mathcal{B}_x$ такав да је $B \subseteq U$.

Став 1.2. *Ако је (X, d) симетричан простор, тада фамилија отворених кугли $\{B(x, r) : r > 0\}$ образује локалну базу у тачки x. Такође, из $d(x_n, x) \to 0$ следи да $x_n \to x$ у топологији τ_d.*

Напомињемо да се та база не мора састојати од отворених скупова. Постоји полуметризабилан простор (X, τ) такав да за свако d које генерише τ, постоји $x \in X$ и $r > 0$, такво да скуп $B(x, r)$ није отворен (видети такође рад Аранђеловић, Кечкић [34]). Такође, из конвергенције низа (x_n) ка тачки $x \in X$ у топологији τ_d не следи $d(x_n, x) \to 0$, међутим обрнуто тврђење је тачно, о чему нам говори претходни став.

У тексту који следи до краја ове, и у наредне две главе, сви тополошки појмови ће се односити на топологију τ_d.

У докторској дисертацији Б. Т. Симса [35] су доказани следећи резултати.

За тополошки простор (X, τ) кажемо да је пребројиво компактан, ако сваки његов пребројив отворен покривач садржи коначан подпокривач.

Став 1.3. **Б. Т. Симс [35].** *Нека је (X, d) полу-метрички простор. Тада је X компактан ако и само ако је пребројиво компактан.*

Став 1.4. **Б. Т. Симс [36].** *Нека је (X, d) полу-метрички простор који има особину CC, и $Y \subseteq X$ његов непразан подскуп. Тада је (X, d) полу-метрички простор.*

Став 1.5. **Б. Т. Симс [35].** *Нека је (X,d) симетричан простор који има особину CC. Тада је (X,d) полу-метрички простор у коме су отворене кугле отворени скупови.*

Наредни резултат уопштава познату Борел - Лебегову теорему.

Теорема 1.1. *Нека је (X,d) компактан полу-метрички простор који има особину CC, и $K \subseteq X$ његов непразан подскуп. Тада је K компактан ако и само ако је низовно компактан.*

Доказ: Према Ставу 1.4 (K,d) је полу-метрички простор. Он има особину CC, јер $K \subseteq X$. Ако је (K,τ_d) компактан, он према Ставу 1.1 задовољава прву аксиому пребројивости. K је пребројиво компактан зато што је компактан (С. Липшуц[50] [37] - Теорема 11.9). Он је такође низовно компактан, зато што је пребројиво компактан и задовољава прву аксиому пребројивости (С. Липшуц [38] - Проблем 10.7).

Ако је (K,τ_d) низовно компактан, он је пребројиво компактан (С. Липшуц [37] - Теорема 11.9). Његова компактност следи из Става 1.3.

Нека је $\mathcal{F}$ фамилија растућих реалних функција $F : [0,\infty) \to [0,\infty)$, таквих да је:

1) $F(x) = 0$ ако и само ако је $x = 0$;

2) $\lim\limits_{t\to 0+} F(t) = 0$.

Докази наредна два става могу се наћи у раду Аранђеловић, Кечкић [34].

[50] S. Lipschutz

Став 1.6. *Нека је* $F \in \mathcal{F}$ *и* $\{\varepsilon_n\} \subseteq [0,\infty)$. *Тада из* $F(\varepsilon_n) \to 0$ *следи* $\varepsilon_n \to 0$.

Став 1.7. *Нека је* (X,d) *симетричан простор,* $x \in X$, $\{x_n\} \subseteq X$ *и* $F \in \mathcal{F}$. *Дефинишимо пресликавање* $d^* : X^2 \to [0,\infty)$ *релацијом*

$$d^*(x,y) = F(d(x,y)), \text{за све } x,y \in X.$$

Тада:

1) (X,d^*) *је симетричан простор;*

2) $\lim d(x_n,x) = 0$ *ако и само ако* $\lim d^*(x_n,x) = 0$.

Поглавље завршавамо наредним тврђењима.

Лема 1.1. *Нека је* (X,d) *симетричан простор и* $F \in \mathcal{F}$ *непрекидно пресликавање. Дефинишимо пресликавање* $d^* : X^2 \to [0,\infty)$ *релацијом*

$$d^*(x,y) = F(d(x,y)), \text{за све } x,y \in X.$$

Тада:

1. ако (X,d) *има особину* CC*, онда и* (X,d^*) *има особину* CC*;*

2. за сваки $A \subseteq X$ *и* $x \in X$ *услови* $d(x,A) = 0$ *и* $d^*(x,A) = 0$ *су еквивалентни;*

3. (X,d) *је полу - метрички простор, ако и само ако је* (X,d^*) *полу - метрички простор.*

Доказ:

1. Нека (X,d) има особину CC и нека је $\{x_n\} \subseteq X$. Из $\lim d(x_n,x) = 0$, према Ставу 1.7 добијамо да је $\lim d^*(x_n,x) = 0$. Одатле следи:

$$\lim d^*(x_n,y) = \lim F(d(x_n,y))) = F(\lim d(x_n,y)) = d(x,y),$$

па је (X,d^*) симетричан простор који има особину CC.

2. За сваки $A \subseteq X$ и $x \in X$, из услова $d(x,A) = 0$, добијамо да постоји $\{a_n\} \subseteq A$ такав да је $\lim d(a_n,x) = 0$, одакле добијамо да је $\lim d^*(a_n,x) = 0$, то јест $d^*(x,A) = 0$. Слично, из услова $d^*(x,A) = 0$, добијамо да постоји $\{a_n\} \subseteq A$ такав да је $\lim d^*(a_n,x) = 0$, одакле добијамо да је $\lim d(a_n,x) = 0$, то јест $d(x,A) = 0$.

3. Према доказаном у тачки 2. пресликавања $c_d, c_{d^*} : 2^X \to 2^X$ дефинисана са

$$c_d(A) = \{x \in X : d(x,A) = 0\} \quad \text{и} \quad c_{d^*}(A) = \{x \in X : d^*(x,A) = 0\},$$

имају исте вредности за свако $A \subseteq X$. Одатле следи да је идемпотентност једног од њих еквивалентна са идемпотентности другог.

Теорема 1.2. *Нека је (X,d) компактан полу - метрички простор, који има особину CC и $F \in \mathcal{F}$ непрекидно пресликавање. Дефинишимо пресликавање $d^* : X^2 \to [0,\infty)$ релацијом*

$$d^*(x,y) = F(d(x,y)), \text{за све } x,y \in X.$$

Тада је (X,d^*) компактан полу - метрички простор који има особину CC.

Доказ: Из Леме 1.1 следи да је (X,d^*) полу - метрички простор који има особину CC. Нека је $\{x_n\} \subseteq X$, произвољан низ. Према Теореми 1.1 (X,d) је низовно компактан, па постоје $y \in X$ и $\{x_{n_j}\} \subseteq \{x_n\}$ такви да је $\lim d(x_{n_j},y) = 0$, одакле следи да је $\lim d^*(x_{n_j},y) = 0$. Тако добијамо да је (X, d^*) низовно компактан. Компакност простора (X, d^*) следи из Теореме 1.1.

2. КОМПАКТНА ПСЕУДО-КОНТРАКТИВНА ПРЕСЛИКАВАЊА

Ниемитцки [09] је доказао наредна два тврђења на класи метричких простора.

Став *2.1.* *Нека је X компактан метрички простор и $f : X \to X$ пресликавање које испуњава услов:*

$$d(f(x), f(y)) < d(x, y),$$

за све $x \neq y$, $x, y \in X$. Тада f има јединствену фиксну тачку.

Став 2.2. *Нека је X комплетан метрички простор, $f : X \to X$ пресликавање са особинама:*

1. *$f(X)$ је релативно компактан у X,*
2. *$d(f(x), f(y)) < d(x, y)$, за све $x \neq y$, $x, y \in X$.*

Тада f има јединствену фиксну тачку.

Из услова Става *2.1* не следи да је f контракција на X, као што можемо видети из следећег примера.

Пример 2.1. *Нека је*

$$X = \{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\},$$

а d еуклидска метрика индукована са скупа реалних бројева. Пресликавање $f : X \to X$ дефинисано са

$$f(x) = \begin{cases} 0, \ x = 0; \\ \frac{1}{n+1}, \ x = \frac{1}{n}, \end{cases}$$

испуњава услове става 2.1, а није контракција.

Сада ћемо уопштити наведене резултате Ниемитцког [09], проширењем контрактивног услова и преласком на класу полу-метричких простора.

Теорема 2.1. *Нека је (X, d) компактан полу-метрички простор који има особину CC, и $f : X \to X$ пресликавање које испуњава псеудо-контрактивни услов:*

$$d(f(x), f(y)) < \max\{d(x, y), d(x, f(x)), d(y, f(y))\},$$

за све $x \neq y$, $x, y \in X$. Ако је функција $g : X \to [0, \infty)$ дефинисана са $g(x) = d(x, f(x))$ одоздо полунепрекидна, онда f има јединствену фиксну тачку.

Доказ: Нека је $x \neq f(x)$ за свако $x \in X$. Пошто је g одоздо полунепрекидна функција на компактном скупу X она достиже свој минимум на X (видети В. Шатерленд[51] [38 - Проблем 5.10.29]), па према томе постоји $\varepsilon > 0$, такво да је

$$\varepsilon = \min_{x \in X} g(x).$$

Нека је $\varepsilon = g(x_0)$, $x_0 \in X$. Применом псеудо-контрактивног услова на x_0 и $f(x_0)$ добија се

$$0 < d(f(x_0), f(f(x_0))) < d(x_0, f(x_0)) = \varepsilon,$$

[51] W. A. Shuterland

што је контрадикција.

Претпоставимо да је $x_1 \neq x_2$, $f(x_1) = x_1$ и $f(x_2) = x_2$. Добијамо да је:

$$d(x_1, x_2) = d(f(x_1), f(x_2)) < d(x_1, x_2),$$

што је контрадикција.

Последица 2.1. *Нека је* (X, d) *полу-метрички простор који има особину* CC *и* $f : X \to X$ *пресликавање које испуњава услове:*

1. $f(X)$ *је релативно компактан у* X*;*

2. $d(f(x), f(y)) < \max\{d(x, y), d(x, f(x)), d(y, f(y))\}$, *за све* $x \neq y$*;*

3. функција $g : X \to [0, \infty)$ *дефинисана са* $g(x) = d(x, f(x))$ *је одоздо полунепрекидна. Тада* f *има јединствену фиксну тачку.*

Доказ: Доказ овог става се добија применом Теореме **2.1**, на затворење скупа $f(X)$, које је компактан полу-метрички простор који има особину CC према Ставу 1.4.

Последица 2.2. *Нека је* (X, d) *симетричан простор такав да је* $d : X^2 \to [0, \infty)$ *непрекидна и* $f : X \to X$ *непрекидно пресликавање које испуњава услове:*

1. $f(X)$ *је релативно компактан у* X*;*

2. $d(f(x), f(y)) < \max\{d(x, y), d(x, f(x)), d(y, f(y))\}$, *за све* $x \neq y$. *Тада* f *има јединствену фиксну тачку.*

Доказ: Под дефинисаним условима, функција $g : X \to [0, \infty)$ дефинисана са $g(x) = d(x, f(x))$ је одоздо полунепрекидна, а (X, d) је симетрични простор који има особину CC. Према Ставу 1.5, (X, d) је полу-метрички простор који има особину CC, па тврђење следи из претходне последице.

Напомињемо да Теорема 2.1 делимично (у случају компактних простора) уопштава резултат Сехгала[52] [39], добијен за метричке просторе. То нас доводи до следећег проблема, који за сада остаје нерешен:

Проблем 2.1. *Да ли се услов ,, X је компактан" из Теореме* 2.1 *може заменити Сехгаловим условом: ,,постоји $x_0 \in X$ такво да итеративни низ $\{f^n(x_0)\}$ има тачку нагомилавања"?*

У докторској дисертацији В. Килбарде [40], доказан је следећи резултат за класу метричких простора.

Став 2.3. *Нека је X компактан метрички простор и $f : X \to X$ непрекидно пресликавање које испуњава услов:*

$$d(f(x), f(y)) < \max\{d(x, y), d(x, f(x)), d(y, f(y)), d(x, f(y)), d(y, f(x))\},$$

за све $x \neq y$, $x, y \in X$. Тада f има јединствену фиксну тачку.

Следеће питање остаје за сада без одговора:

Проблем 2.2. *Да ли се псеудо-контрактивни услов из Теореме* 2.1 *може заменити контрактивним условом из Става* 2.3, *на класи полу-метричких простора који имају особину CC?*

---

[52] V. M. Sehgal

Последица 2.3. *Нека је (X,d) компактан полу-метрички простор који има особину CC, $F:[0,\infty)\to[0,\infty)$ непрекидно, растуће пресликавање, такво да је $F(0)=0$ и $f:X\to X$ пресликавање које испуњава псеудо-контрактивни услов:*

$$F(d(f(x),f(y)))<F(\max\{d(x,y),d(x,f(x)),d(y,f(y))\}),$$

за све $x\neq y$, $x,y\in X$. Ако је функција $g:X\to[0,\infty)$ дефинисана са $g(x)=d(x,f(x))$ непрекидна, онда f има јединствену фиксну тачку.

Доказ: Нека је $d^*:X^2\to[0,\infty)$ пресликавање дефинисано релацијом

$$d^*(x,y)=F(d(x,y)), \text{за све } x,y\in X.$$

Тада је, према Теореми 1.2, (X,d^*) компактан полу - метрички простор који има особину CC. Даље имамо, да је:

$$\begin{aligned}&F(\max\{d(x,y),d(x,f(x)),d(y,f(y))\})=\\&=\max\{F(d(x,y)),F(d(x,f(x))),F(d(y,f(y)))\})=\\&=\max\{d^*(x,y),d^*(x,f(x)),d^*(y,f(y))\},\end{aligned}$$

јер је F растуће пресликавање. Тада, применом Теореме 2.1 на простор (X,d^*), добијамо да f има јединствену фиксну тачку.

Последица 2.4. *Нека је (X,d) компактан полу-метрички простор који има особину CC и $f:X\to X$ пресликавање које испуњава псеудо-контрактивни услов:*

$$\int_0^{d(f(x),f(y))}dx<\int_0^{\max\{d(x,y),d(x,f(x)),d(y,f(y))\}}dx$$

за све $x \neq y$, $x, y \in X$. *Ако је функција* $g : X \to [0, \infty)$ *дефинисана са* $g(x) = d(x, f(x))$ *непрекидна, онда* f *има јединствену фиксну тачку.*

3. ПРЕСЛИКАВАЊА КОНДЕНЗУЈУЋЕГ ТИПА

У класичној и модерној математичкој анализи, важну улогу има појам *компактности*, који је често рестриктиван за примене. Уместо податка о томе да ли је неки скуп компактан, често је довољно имати процену колико се посматрани скуп разликује од компактног скупа. Функције које нам дају такву процену називају се *мере некомпактности.* Прва дефиниција мере некомпактности на метричким просторима дата је у класичном раду Куратовског[53] [41]. Због тешкоћа које се јављају приликом конкретног израчунавања, касније је уведено још неколико нееквивалентних дефиниција, при чему новоуведене функције задржавају особине мере Куратовског.

Постоје различите опште дефиниције појма мере некомпактности на тополошким просторима. Ми овде усвајамо концепт уведен у раду М. Миловановић - Аранђеловић [10], на класи равномерних тополошких простора.

Дефиниција 3.1**.** *Нека је X равномеран тополошки простор. Пресликавање $\phi : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ које испуњава следеће услове:*

1) $\phi(A) = \infty$ ако и само ако скуп A није ограничен;

2) $\phi(A) = \phi(\overline{A})$;

3) из $\phi(A) = 0$ следи да је A релативно компактан скуп;

[53] K. Kuratowski

4) ако је $\{B_n\}_{n\in N}$ *низ непразних затворених подскупова од* X *таквих да је* $B_{n+1} \subseteq B_n$ *за свако* $n \in N$ *и* $\lim_{n\to\infty} \phi(B_n) = 0$*, тада је* $K = \bigcap_{n\in N} B_n$ *непразан компактан скуп;*

5) из $A \subseteq B$ *следи* $\phi(A) \leq \phi(B)$*,*

назива се **мера некомпактности** *на* X*.*

Сада ћемо на примерима показати да су искази 1)−5), Дефиниције 3.1 логички независни.

Пример 3.1. *Нека је* $X = [0, \infty)$*,* $d(x, y) = |x - y|$ *и* $f(x) = [x]$*. Функција* $\psi : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ *дефинисана са:*

$$\psi(A) = \sup_{x\in A} f(x)$$

испуњава услове 1), 3), 4) *и* 5) *али услов* 2) *није испуњен. Јер ако је* $A = [0, 1)$ *онда је* $\psi(A) = 0$ *а* $\psi(\overline{A}) = 1$.

Пример 3.2. *Нека је* $X = R$ *и* $d(x, y) = |x-y|$*, Функција* $\psi : \mathcal{P}(R) \to [0, \infty]$ *дефинисана са:*

$$\psi(A) = \begin{cases} \inf_{x\in A} |x| & \text{ако је } A \text{ ограничен} \\ \infty & \text{ако } A \text{ није ограничен} \end{cases}$$

испуњава услове 1), 2), 3) *и* 4) *али услов* 5) *није испуњен.*

Пример 3.3. *Нека је* $X = R$ *и*

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y. \end{cases}$$

Функција $\psi : \mathcal{P}(R) \to [0, \infty]$ *дефинисана са:*

$$\psi(A) = \begin{cases} \sup_{x\in A} e^{-x} & \text{ако је } A \text{ бесконачан} \\ 0 & \text{ако је } A \text{ коначан} \end{cases}$$

испуњава услове 2), 3) *и* 5) *али услови* 1) *и* 4) *нису испуњени. Јер ако је* $B_n = [n, \infty)$ *онда је*

$$\bigcap_{n \in N} B_n = \emptyset.$$

Следећа дефиниција преноси дефиницију Пасицког[54] [42] дату на класи метричких простора на полу-метричке просторе.

Дефиниција *3.2.* *Нека је* X *полу-метрички простор који има особину* CC *и* $\phi : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ *пресликавање које испуњава услове:* 1)-3) *и* 5) *Дефиниције* $I.3.1$. *Ако за свако* $A \subseteq X$ *и* $x \in X$ *важи* $\phi(A \cup \{x\}) = \phi(A)$, *онда је* ϕ **-мера некомпактности на* X.

Следећа Теорема проширује резултат добијен у раду Л. Пасицког [42] са класе метричких простора на полу-метричке просторе.

Теорема *3.1.* *Ако је* X *комплетан полу-метрички простор који има особину* CC *и* $\phi : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ **-мера некомпактности на* X, *онда је* ϕ *мера некомпактности на* X.

Доказ: Нека је X комплетан полу-метрички простор који има особину CC, и нека је $\{B_n\}_{n \in N}$ низ непразних затворених подскупова од X таквих да је $B_{n+1} \subseteq B_n$ за све $n \in N$ и $\lim_{n \to \infty} \Phi(B_n) = 0$. Посматрајмо произвољан низ (x_n) чији чланови испуњавају услов $x_n \in B_n$. Нека је

$$D = \cup_{n=1}^{\infty} \{x_n\}.$$

[54] L. Pasicki

Тада је

$$\phi(D) = \phi(\cup_{n=1}^{\infty}\{x_n\}) = \phi(\cup_{n=k}^{\infty}\{x_n\}) \leq \phi(B_k),$$

одакле следи $\phi(D) = 0$. Из Теореме 1.1 следи да је $\overline{D}$ низовно компактан. Ако је x_* гранична вредност било ког од конвергентних поднизова низа $\{x_n\}$, онда је $x_* \in \bigcap_{n\in N} B_n = K$. Према томе, K је непразан скуп. Његова компактност следи из затворености и $\phi(K) = 0$.

Дефиниција 3.3. *Нека је (X, d) полу-метрички простор и $f : X \to X$ непрекидно пресликавање. f је кондензујуће ако постоји пресликавање $\phi : X \to [0, \infty)$ које је *-мера некомпактности на X и које испуњава услове:*

а) $\phi(A) = \phi(f(A))$ ако и само ако је $\phi(A) = 0$;

б) из $\phi(A) > 0$ следи $\phi(f(A)) < \phi(A)$,

за сваки ограничен скуп $A \subseteq X$.

У доказу резултата о фиксним тачкама неопходна нам је следећа лема:

Лема 3.1. *Нека је X непразан, комплетан полу-метрички простор који има особину CC и $f : X \to X$ кондензујуће пресликавање. Тада постоји непразан скуп $K \subseteq X$, такав да је $K \subseteq f(K)$.*

Доказ: Нека је $x \in X$ произвољан елемент.

Нека је $M = \{x, f(x), f^2(x), \ldots\}$. Из $M = \{x\} \bigcup f(M)$ следи да је $\phi(M) = \phi(f(M))$ па је, према томе, M релативно компактан. Нека је K скуп свих тачака нагомилавања скупа M. Ако је $z \in K$, онда постоји растући низ природних бројева $\{k_n\}$, такав да је

$$z = \lim_{n\to\infty} f^{k_n}(x).$$

Низ $\{f^{k_n-1}(x)\}$ је садржан у компактном скупу па постоје $\{r_n\} \subseteq \{k_n - 1\}$ и $y \in X$, такви да је

$$y = \lim_{n\to\infty} f^{r_n}(x).$$

Из непрекидности функције f следи $f(y) = z$. Из претходних релација следи да је $z \in f(K)$. Тиме смо показали да је $K \subseteq f(K)$.

Основни резултат ове главе дат је у наредној теореми. Она уопштава познати резултат Ђ. Дарбоа[56][43].

Теорема *3.2.* *Нека је X непразан, комплетан полу-метрички простор који има особину CC и $f : X \to X$ кондензујуће пресликавање које испуњава услов:*

$$d(f(x), f(y)) < \max\{d(x, y), d(x, f(x)), d(y, f(y))\},$$

за све $x \neq y$, $x, y \in X$. Тада f има јединствену фиксну тачку.

Доказ: Нека је $K \subseteq X$ скуп који испуњава услов $K \subseteq f(K)$. Егзистенција таквог скупа доказана је у Леми 3.1. Дефинишимо фамилију подскупова σ скупа X на следећи начин:

$$\sigma = \{Y \subseteq X : K, f(Y) \subseteq Y;\ Y = \overline{Y}\}.$$

σ је непразна јер $X \in \sigma$. На скупу σ може се увести релација поретка на следећи начин:

[56] G. Darbo

$Y_1 \leq Y_2$ ако и само ако је $Y_2 \subseteq Y_1$. Дефинисани поредак на σ је индуктиван (сваки ланац има своју мајоранту), јер за произвољан потпуно уређени подскуп од σ, пресек свих његових елемената је мајоранта у поретку дефинисаном на σ. Дефинисаћемо пресликавање $g : \sigma \to \sigma$ на следећи начин:

$$g(Y) = \overline{f(Y)},$$

за свако $Y \in \sigma$. Из $K \subseteq Y$ следи $f(K) \subseteq f(Y)$, па према томе, имамо:

$$K \subseteq f(K) \subseteq f(Y) \subseteq Y.$$

Сада, из затворености скупа Y, следи:

$$g(Y) = \overline{f(Y)} \subseteq Y.$$

Одатле добијамо

$$f(g(Y)) \subseteq f(Y) \subseteq \overline{f(Y)} = g(Y) \subseteq Y.$$

Тако смо показали да из $Y \in \sigma$ следи $g(Y) \in \sigma$ и $Y \leq g(Y)$. Из Цорнове[55] леме следи да постоји максимални елемент $Y_0 \in \sigma$. Он испуњава услов: $g(Y_0) = Y_0$. Из релације

$$\phi(\overline{f(Y_0)}) = \phi(Y_0),$$

следи компактност скупа Y_0. Према томе $f : Y_0 \to Y_0$, f је непрекидно пресликавање и Y_0 је компактан полу-метрички простор (Став 1.4), па према Теореми 2.1, f има фиксну тачку.

[55]Max Zorn

Последица 3.1**. - Фури**[57]**-Вињоли**[58] **[44].** *Нека је* X *метрички простор и* $f : X \to X$ *кондензујуће пресликавање које испуњава услов:*

$$d(f(x), f(y)) < d(x, y),$$

за све $x \neq y$, $x, y \in X$. *Тада* f *има јединствену фиксну тачку.*

Доказ: Следи директно из претходне Теореме.

[57] M. Furi
[58] A. Vignoli

4. КОНТРАКТИВНИ УСЛОВИ МАЈР-КЕЛЕРОВОГ ТИПА

Једно од најзначајнијих уопштења Банаховог принципа дали су Мајр и Келер [1969].

Став 4.1. **Мајр и Келер [45].** *Нека је* (X, d) *комплетан метрички простор и* $f : X \to X$. *Ако за свако* $\varepsilon > 0$ *постоји* $\delta > 0$ *такво да за свако* $x, y \in X$ *из* $\varepsilon \le d(x, y) < \varepsilon + \delta$ *следи* $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$, f *има јединствену фиксну тачку која је гранична вредност свих низова Пикаровиx итерација.*

Мајр - Келерова теорема уопштава познате резултате Браудера[59] [46] и Бојда[60]и Вонга[61][47]. Љ. Ћирић [48] је показао да се услов ,,из $\varepsilon \le d(x, y) < \varepsilon + \delta$ следи $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$" може заменити суштински слабијим условом ,,из $\varepsilon < d(x, y) < \varepsilon + \delta$ следи $d(f(x), f(y)) \le \varepsilon$".

Нека је (X, d) метрички простор и $S, T, A, B : X \to X$ и $x, y \in X$. Користићемо следеће ознаке:

$$M(x, y) = \max\{d(Sx, Ty), d(Ax, Sx), d(By, Ty), \frac{d(Ax, Ty) + d(By, Sx)}{2}\}$$

и $C(S, T) = \{u \in X : Su = Tu\}$.

У овом поглављу наш најважнији резултат је дат у следећој Теореми, која је доказана у раду А. Кумар, С. Л. Синг, С. Н. Мишра, М. Миловановић - Аранђеловић [16].

[59]F. E. Browder
[60]D. W. Boyd
[61]J. S. Wong

Теорема 4.1. *Нека је* (X,d) *метрички простор,* $\mathcal{B}$ *фамилија пресликавања скупа* X *у самог себе и* $S,T,A: X \to X$ *пресликавања за која важи:*

1) $A(X) \subseteq T(X)$ *и* $B(X) \subseteq S(X)$ *за свако* $B \in \mathcal{B}$*;*

2) постоји $B_* \in \mathcal{B}$ *такво да за свако* $\varepsilon > 0$ *постоји* $\delta > 0$*, такво да за све* $x,y \in X$ *из* $\varepsilon \le M(x,y) < \varepsilon + \delta$ *следи* $d(Ax, B_* y) < \varepsilon$*;*

3) за свако $B \in \mathcal{B}$ *постоје константе* $k \ge 0$ *и* $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ *такве да је*

$$d(Ax,By) < kd(Sx,Ty) + \alpha[d(Ax,Sx) + d(By,Ty) + d(Ax,Ty) + d(By,Sx)]$$

за све $x,y \in X$*, уколико је десна страна претходне неједнакости различита од* 0.

Ако је један од скупова $S(X)$ *или* $T(X)$ *комплетан подпростор од* (X,d) *онда:*

(I) *За свако* $B \in \mathcal{B}$ *скупови* $C(S,A)$ *и* $C(B,T)$ *су непразни. Поред тога из* $u \in C(S,A)$ *и* $v \in C(B,T)$ *следи*

$$Su = Au = Bv = Tv;$$

(II) *Ако постоји* $u \in C(S,A)$*, такво да је* $SAu = ASu$*, онда* A *и* S *имају заједничку фиксну тачку;*

(III) *За свако* $B \in \mathcal{B}$ *за које постоји* $v \in C(T,B)$*, такво да је* $TBv = BTv$*, ако је испуњен бар један од услова:*

$$d(Bx, B^2x) < d(Tx, T^2x)$$

за свако $x \in C(T,B)$*, за које је десна страна претходне неједнакости различита од нуле, или*

$$d(Tx, T^2x) < \max\{d(Bx, B^2x), d(T^2x, B^2x)\}$$

за свако $x \in C(T, B)$ за које је десна страна претходне неједнакости различита од нуле, пресликавања B и T имају заједничку фиксну тачку;

(IV) Ако је испуњен услов (II) онда пресликавања S, T, A и сва $B \in \mathcal{B}$ која испуњавају (III), имају заједничку фиксну тачку.

Доказ: Изаберимо произвољно $x_0 \in X$. Конструишимо низове (x_n) и (y_n) на следећи начин: $y_{2n} = Ax_{2n} = Tx_{2n+1}$, $y_{2n+1} = B_*x_{2n+1} = Sx_{2n+2}$, $n \geq 0$.

Доказаћемо да је (y_n) Кошијев низ. Нека је $d_n = d(y_n, y_{n-1})$.

а) Прво доказујемо да из $d_{n+1} > 0$ следи $d_{n+1} < d_n$.

а1) Нека, за неко k, важи: $d_{2k} > 0$. Тада је $M(x_{2k}, x_{2k-1}) > 0$, јер бисмо у супротном добили $Ax_{2k} = B_*x_{2k-1}$, то јест $y_{2k-1} = y_{2k}$, односно $d_{2k} = 0$. Из услова 2), ако је $\varepsilon = M(x_{2k}, x_{2k-1})$, добијамо да је: $d(Ax_{2k}, B_*x_{2k-1}) < M(x_{2k}, x_{2k-1})$. Према томе је:

$$d_{2k} = d(Ax_{2k}, B_*x_{2k-1}) < M(x_{2k}, x_{2k-1}).$$

Одатле следи:

$$\begin{aligned}
M(x_{2k},x_{2k-1}) = \max\{&d(Sx_{2k}, Tx_{2k-1}), d(Ax_{2k}, Sx_{2k}), \\
&d(B_*x_{2k-1}, Tx_{2k-1}), \frac{d(Ax_{2k}, Tx_{2k-1}) + d(B_*x_{2k-1}, Sx_{2k})}{2}\} \\
&= \max\{d(y_{2k-1}, y_{2k-2}), d(y_{2k}, y_{2k-1}), \frac{d(y_{2k}, y_{2k-2})}{2}\} \\
&= \max\{d(y_{2k-1}, y_{2k-2}), d(y_{2k}, y_{2k-1}), \frac{d(y_{2k}, y_{2k-1)}) + d(y_{2k-1}, y_{2k-2})}{2}\} \\
&= \max\{d_{2k-1}, d_{2k}, \frac{d_{2k} + d_{2k-1}}{2}\} = \max\{d_{2k-1}, d_{2k}\}.
\end{aligned}$$

Тако смо добили да је $d_{2k} < \max\{d_{2k-1}, d_{2k}\}$, одакле следи $d_{2k-1} > d_{2k}$.

а2) Нека, за неко k, важи: $d_{2k+1} > 0$. Тада је $M(x_{2k}, x_{2k+1}) > 0$, јер бисмо у супротном добили $Ax_{2k} = B_*x_{2k+1}$, то јест $y_{2k+1} = y_{2k}$, односно $d_{2k+1} = 0$. Из услова 2), ако је $\varepsilon = M(x_{2k}, x_{2k+1})$, добијамо да је: $d(Ax_{2k}, B_*x_{2k+1}) < M(x_{2k}, x_{2k+1})$.Према томе је:

$$d_{2k+1} = d(Ax_{2k}, B_*x_{2k+1}) < M(x_{2k}, x_{2k+1}).$$

Одатле следи:

$$\begin{aligned}M(x_{2k}, &x_{2k+1}) = \max\{d(Sx_{2k}, Tx_{2k+1}), d(Ax_{2k}, Sx_{2k}),\\ &d(B_*x_{2k+1}, Tx_{2k+1}), \frac{d(Ax_{2k}, Tx_{2k+1}) + d(B_*x_{2k+1}, Sx_{2k})}{2}\}\\ &= \max\{d(y_{2k-1}, y_{2k}), d(y_{2k}, y_{2k+1}), \frac{d(y_{2k+1}, y_{2k-1})}{2}\}\\ &= \max\{d(y_{2k-1}, y_{2k}), d(y_{2k}, y_{2k+1}), \frac{d(y_{2k+1}, y_{2k)}) + d(y_{2k}, y_{2k+1})}{2}\}\\ &= \max\{d_{2k+1}, d_{2k}, \frac{d_{2k} + d_{2k+1}}{2}\} = \max\{d_{2k-1}, d_{2k}\}.\end{aligned}$$

Тако смо добили да је $d_{2k+1} < \max\{d_{2k+1}, d_{2k}\}$, одакле следи $d_{2k+1} > d_{2k}$.

а3) Ако је $d_n > 0$ за свако n, онда из а1) и а2) следи да је (d_n), опадајући низ. Ако је, за неко n, $d_n = 0$, онда је $d_k = 0$ за свако $k \geq n$, па је (y_n) конвергентан низ.

б) Затим доказујемо да је $\lim d_n = 0$. (d_n) је опадајући низ позитивних бројева, па је, према томе, конвергентан. Нека је $\lim d_n = d$. Претпоставимо да је $d > 0$. Тада постоји реалан број $\delta > 0$ и природан број k такав да из $n \geq k$ следи $d < d_n < d + \delta$, односно $d < M(x_{2k}, x_{2k+1}) < d + \delta$ јер је $M(x_{2k}, x_{2k+1}) = \max\{d_{2k}, d_{2k+1}\}$. Тако добијамо да је $d_{2k} = d(Ax_{2k}, B_*x_{2k+1}) < d$, што је контрадикција.

в) На крају доказујемо да је, у општем случају, (y_n) Кошијев низ. Изаберимо $\varepsilon > 0$. Тада постоји $\delta > 0$, такво да је испуњен услов 2) исказа Теореме. Без ограничења општости, можемо узети да је $\delta < \varepsilon$. Пошто је $\lim d_n = 0$, постоји непаран број k, такав да из $n \geq k$ следи $d_n < \frac{\delta}{4}$. Применом математичке индукције, показаћемо да је за сваки природан број i испуњено $d(y_k, y_{k+i}) < \varepsilon + \frac{\delta}{2}$. Тврђење је очигледно тачно за $i = 1$. Претпоставимо да је тачно и за $i = 2, \ldots, n$. Сада проверамо тачност за $i = n + 1$. Разматраћемо следећа два случаја:

в1) n је паран. Из неједнакости троугла добијамо:

$$d(y_k, y_{k+n+1}) \leq d_{k+1} + d(y_{k+1}, y_{k+n+1}).$$

Пошто је $k + 1$ паран, $k + n + 1$ је паран па је

$$d(y_{k+1}, y_{k+n+1}) = d(Ax_{k+1}, B_* x_{k+n+1}).$$

Уведимо ознаке $x = x_{k+1}$ и $y = x_{k+n+1}$. Сада је:

$$d(Sx, Ty) = d(y_k, y_{k+n}) < \varepsilon + \frac{\delta}{2};$$

$$d(Ax, Sx) = d(y_k, y_{k+1}) < \frac{\delta}{4};$$

$$d(B_* y, Ty) = d(y_{k+n+1}, y_{k+n}) < \frac{\delta}{4};$$

$$\frac{d(Ax, Ty) + d(B_* y, Sx)}{2} \leq d(Sx, Ty) + \frac{d(Ax, Sx) + d(B_* y, Ty)}{2} < \varepsilon + \delta.$$

Тако смо доказали да је $M(x, y) < \varepsilon + \delta$. Из $M(x, y) \geq \varepsilon$ следи $d(Ax, B_* y) < \varepsilon$; ако је $0 < M(x, y) < \varepsilon$ онда је $d(Ax, B_* y) \leq M(x, y) < \varepsilon$; из $M(x, y) = 0$ добијамо $d(Ax, B_* y) = 0$. Тако смо у свим случајевима добили да је $d(Ax, B_*y) < \varepsilon$, односно $d(y_{k+1}, y_{k+n+1}) < \varepsilon$, одакле следи да је:

$$d(y_k, y_{k+n+1}) < \varepsilon + \frac{\delta}{2}.$$

в2) n је непаран. Из неједнакости троугла, добијамо:

$$d(y_k, y_{k+n+1}) \leq d(y_k, y_{k+1}) + d(y_{k+1}, y_{k+n}) + d(y_{k+n}, y_{k+n+1}).$$

Пошто је $k+1$ паран, $k+n+1$ је непаран, па је

$$d(y_{k+1}, y_{k+n+1}) = d(Ax_{k+1}, B_*x_{k+n+1}).$$

На аналоган начин као у 1), доказујемо да је $M(x_k, x_{k+n-1}) < \varepsilon + \delta$, одакле следи да је $d(y_{k+1}, y_{k+n}) < \varepsilon$, односно

$$d(y_k, y_{k+n+1}) < \varepsilon + \frac{\delta}{2}.$$

Из **в1)** и **в2)** следи да је тврђење тачно за $i = n+1$, чиме је доказ индукцијом завршен. Тако смо доказали да за сваки природан број i важи: $d(y_k, y_{k+i}) \leq \frac{3\varepsilon}{2}$. Нека су природни бројеви $m, n \geq k$ произвољни. Према доказаном, имамо:

$$d(y_m, y_n) \leq d(y_m, y_k) + d(y_k, y_n) \leq 3\varepsilon,$$

чиме је показано да је (y_n) Кошијев низ.

Нека је $B \in \mathcal{B}$ произвољно. Претпоставимо да је $T(X)$ комплетан. Пошто је $(y_{2n}) \subseteq T(X)$, из комплетности следи да постоји $w \in T(X)$ такво да је $w = \lim y_{2n}$. Пошто је (y_n) Кошијев низ, такође важи $w = \lim y_{2n+1}$.

Нека $v \in T^{-1}w$, то јест нека је $w = Tv$. Сада ћемо показати да је $Bv = Tv = w$.

$$d(y_{2n}, Bv) = d(Ax_{2n}, Bv) < kd(Sx_{2n}, Tv) +$$
$$+ \alpha[d(Ax_{2n}, Sx_{2n}) + d(Bv, Tv) + d(Ax_{2n}, Tv) + d(Bv, Sx_{2n})].$$

Кад $n \to \infty$, добијамо:

$$d(Tv, Bv) \leq kd(Tv, Tv) + \alpha[d(Tv, Tv) + d(Bv, Tv) + d(Tv, Tv) +$$
$$+ d(Bv, Tv)] = 2\alpha d(Bv, Tv) < d(Bv, Tv),$$

што је контрадикција. Према томе, $Bv = Tv = w$, одакле следи да је $C(B, T)$ непразан. Пошто је $B(X) \subseteq S(X)$, постоји $u \in X$ такво да је $w = Bv = Su$. Сада ћемо показати да је $Au = Su$.

$$d(Bx_{2n+1}, Au) < kd(Tx_{2n+1}, Su) + \alpha[d(Au, Su) +$$
$$+ d(Bx_{2n+1}, Tx_{2n+1}) + d(Au, Tx_{2n+1}) + d(Bx_{2n+1}, Su)].$$

Кад $n \to \infty$, добијамо:

$$d(Au, Su) \leq kd(Su, Su) + \alpha[d(Au, Su) + d(Su, Su) + d(Au, Su) +$$
$$+ d(Su, Su)] = 2\alpha d(Au, Su) < d(Au, Su),$$

што је контрадикција. Према томе, $Au = Su = w$, одакле следи да је $Bv = Tv = w = Au = Su$ и да је $C(A, S)$ непразан.

Ако је $S(X)$ комплетан, аналогним поступком добијамо да је скуп $C(A, S)$ непразан. Ако су $u \in C(A, S)$ и $v \in C(B, T)$ произвољни, онда је:

$$M(u,v) = \max\{d(Su,Tv), d(Au,Su), d(Bv,Tv), \frac{d(Au,Tv)+d(Bv,Su)}{2}\} =$$
$$= \max\{d(Au,Bv), \frac{d(Au,Bv)+d(Bv,Au)}{2}\} = d(Au,Bv).$$

Пошто из $M(u,v) \neq 0$ следи $d(Au,Bv) < M(u,v)$, добијамо да је: $d(Au,Bv) = 0$. Тиме смо завршили доказ за (I).

Из комутативности пресликавања A и S у тачки u, следи:

$$Az = ASu = SSu = A^2u = Sz.$$

Ако је $z \neq Az$, добијамо:

$$d(z,Az) = d(A^2u,Bv) < \max\{d(SAu,Tv), d(A^2u,SAu), d(Bv,Tv), \frac{d(A^2u,Tv)+d(Bv,SAu)}{2}\} = d(z,Az),$$

што је контрадикција. Према томе је $z = Az$ одакле следи $Au = A^2u = SAu$, па је Au заједничка фиксна тачка за A и S. Тиме смо завршили доказ за (II).

Из комутативности пресликавања B и T у тачки v следи:

$$Bz = BTv = TBv = B^2v = T^2v = Tz.$$

Заменом x са v у условима наведеним у (III), добијамо да је Bv заједничка фиксна тачка за B и T, чиме смо завршили доказ за (III) и (IV).

Претходна Теорема уопштава резултате добијене у радовима [49], [50,51,52].

Ако је $\mathcal{B}$ једночлана фамилија, то јест ако је $\mathcal{B} = \{B\}$, онда се услови Теореме 4.1 могу значајно поједноставити, то јест може се значајно ослабити група услова наведена под (III), о чему нам говори следећа Теорема, која је доказана у раду А. Кумар, С. Л. Синг, С. Н. Мишра, М. Миловановић - Аранђеловић [16].

Теорема 4.2**.** *Нека је (X, d) метрички простор и $S, T, A, B : X \to X$ пресликавања за која важи:*

1) $A(X) \subseteq T(X)$ и $B(X) \subseteq S(X)$;

2) за свако $\varepsilon > 0$, постоји $\delta > 0$, такво да за све $x, y \in X$,

из $\varepsilon \leq M(x, y) < \varepsilon + \delta$, следи $d(Ax, By) < \varepsilon$;

3) постоје константе $k \geq 0$ и $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, такве да је

$$d(Ax, By) < kd(Sx, Ty) + \alpha[d(Ax, Sx) + d(By, Ty) + d(Ax, Ty) + d(By, Sx)]$$

за све $x, y \in X$, уколико је десна страна претходне неједнакости различита од 0.

Ако је бар један од скупова $S(X)$ или $T(X)$ комплетан подпростор од (X, d) онда важи:

(I) Скупови $C(S, A)$ и $C(B, T)$ су непразни. Поред тога, из $u \in C(S, A)$ и $v \in C(B, T)$, следи

$$Su = Au = Bv = Tv;$$

(II) Ако постоји $u \in C(S, A)$, такво да је $SAu = ASu$, онда A и S имају заједничку фиксну тачку;

(III) Ако постоји $v \in C(T, B)$ такво да је $TBv = BTv$, онда B и T имају заједничку фиксну тачку;

(IV) Ако су испуњени (II) и (III), онда S, T, A и B имају заједничку фиксну тачку.

Доказ: (I) и (II) се доказују идентично као у претходној Теореми.

Из комутативности пресликавања B и T у тачки коинциденције v следи:

$$BTv = TBv = B^2v = T^2v.$$

Сада добијамо:

$$d(Bv, B^2v) = d(A^2u, Bv) < \max\{d(Su, TBv), d(Au, Su), d(BBv, TBv),$$
$$\frac{d(Au, TBv) + d(BBv, Su)}{2}\} = d(Au, BBv),$$

што је контрадикција, чиме смо завршили доказ за (III) и (IV).

Претходна Теорема уопштава резултате добијене у радовима [53,54,55,56,57,58,59].

5. АКРЕТИВНИ ОПЕРАТОРИ

Акретивни оператори су уведени у радовима америчког математичара Браудера [60] и јапанског математичара Катоа[62] [61]. Они су независно дошли до сличних резултата. Като је користио термин монотони оператори. Ако је X нормиран простор, пресликавање $T : X \to X$ је акретивно ако за свако $x, y \in X$ и свако $t \geq 0$ важи:

$$\|x - y\| \leq \|x - y + t(Tx - Ty)\|.$$

Ако је X Хилбертов[63] простор, услов акретивности се своди на:

$$\Re e\langle Tx - Ty, x - y\rangle \geq 0.$$

Нека је X реалан Банахов простор и X^* његов дуални простор. Користићемо ознаку:

$$\langle x, f\rangle = f(x),$$

за свако $x \in X$ и $f \in X^*$. Пресликавње $J : X \to 2^{X^*}$ дефинисано са

$$J(x) = \{f \in X^* : \langle x, f\rangle = \|x\|^2, \|f\| = \|x\|\},$$

за свако $x \in X$ назива се нормализовано дуално пресликавање.

[62] T. Kato
[63] David Hilbert

Нека је $A \subseteq X$ и $T : A \to X$. За T се каже да је *строго акретивно* ако постоји константа $k \in (0,1)$ таква да за свако $x, y \in A$ постоји $j(x-y) \in J(x-y)$ такво да је

$$\langle Tx - Ty, j(x-y) \rangle \geq k\|x-y\|^2.$$

T је *строго псеудо-контрактивно* пресликавање ако је $I-T$ строго акретивно. Практично, T је строго псеудо-контрактивно, ако постоји константа $k \in (0,1)$ таква да за свако $x, y \in A$ постоји $j(x-y) \in J(x-y)$ такво да је

$$\langle Tx - Ty, j(x-y) \rangle \leq (1-k)\|x-y\|^2.$$

Нека је $1 < p < \infty$. Пресликавање $J : X \to 2^{X^*}$ дефинисано са

$$J_p(x) = \{f \in X^* : \langle x, f \rangle = \|x\|^p, \|f\| = \|x\|^{p-1}\},$$

за свако $x \in X$ назива се уопштено дуално пресликавање.

Нека је $A \subseteq X$, $T : A \to X$ и $\varphi : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ монотоно неопадајуће пресликавање такво да је $\phi(x) = 0$ ако и само ако је $x = 0$. За T се каже да је *уопштено строго акретивно* ако за свако $x, y \in A$ постоји $j_p(x-y) \in J_p(x-y)$ такво да је

$$\langle Tx - Ty, j_p(x-y) \rangle \geq \varphi(\|x-y\|).$$

T је *уопштено строго псеудо-контрактивно* пресликавање ако је $I-T$ уопштено строго акретивно. Практично, T је уопштено строго псеудо-контрактивно ако постоји $\varphi : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ монотоно неопадајуће пресликавање такво да је $\phi(x) = 0$ ако и само ако је $x = 0$, и ако за свако $x, y \in A$ постоји $j_p(x-y) \in J_p(x-y)$ такво да је

$$\langle Tx - Ty, j_p(x-y)\rangle \le \|x-y\|^p - \varphi(\|x-y\|).$$

У доказу наших резултата биће нам неопходне следеће две леме. Прву од њих су доказали Ћирић и Уме [62].

Означићемо са Ψ скуп свих монотоно неопадајућих функција које пресликавају $[0,\infty)$ у $[0,\infty)$ и које испуњавају услов $\psi(x) = 0$ ако и само ако је $x = 0$.

Лема 5.1 **(Ћирић, Уме [62]).** *Нека је* $\psi \in \Psi$, $\{\theta_n\}$ *низ ненегативних реалних бројева,* σ_n *нула-низ реалних бројева,* $\{\lambda_n\}$ *низ реалних бројева који испуњавају услове* $0 \le \lambda_n \le 1$ *и* $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n = \infty$. *Ако постоје реалан број* $p > 0$ *и природан број* n_0 *такви да је за све* $n \ge n_0$

$$\theta_{n+1}^p \le \theta_n^p - \lambda_n \psi(\theta_n) + \lambda_n \sigma_n,$$

онда је $\{\theta_n\}$ *нула-низ.*

Наредну Лему су доказали Џунг[64], Чо, Ли[65], Јанг[66] и Канг [63].

Лема 5.2 **Џунг, Чо, Ли, Јанг, Канг [63].** *Нека је* X *Банахов простор,* $1 < p < \infty$ *и* $J : X \to 2^{X^*}$ *уопштено дуално пресликавање. Тада, за свако* $x, y \in X$ *имамо*

$$(1) \qquad \|x+y\|^p \le \|x\|^p + p\langle y, j_p(x+y)\rangle,$$

[64]S. S. Chang
[65]B. S. Lee
[66]J. S. Jung

за све $j_p(x+y) \in J_p(x+y)$.

У модерној нелинеарној анализи и њеним применама теорија Ишикавиних[67] итерација (видети Ишикава [64] и Кирк[68] [65].) има значајну улогу зато што се оне могу применити у многим ситуацијама у којима класичне методе (конвергенција Пикарових или Манових[69] итерација) нису употребљиве. У многим радовима Ишикавини итерациони низови су коришћени за добијање апроксимативних тачака не-експанзивних и псеудо-контрактивних пресликавања дефинисаних на Хилбертовим и Банаховим просторима.

Нека су $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ два низа реалних бројева. Ако је X нормиран простор и C непразан, конвексан поскуп од X. Тада се за произвољно $x_0 \in C$ низ Ишикавиних итерација $(T, \{\alpha_n\}, \{\beta_n\})$ у тачки x_0 дефинише са:

$$y_n = \beta_n T x_n + (1-\beta_n)x_n, \qquad x_{n+1} = \alpha_n T y_n + (1-\alpha_n)x_n.$$

Ако су $\{u_n\}$, $\{v_n\}$ два низа садржана у произвољном, непразном скупу $D \subseteq X$ и ако су низови $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ дефинисани са:

$$\begin{aligned} x_0 &\in D; \\ y_n &= \beta_n T u_n + (1-\beta_n)x_n; \\ x_{n+1} &= \alpha_n T v_n + (1-\alpha_n)x_n, \end{aligned}$$

где је $\lim \|x_n - u_n\| = \|y_n - v_n\| = 0$, онда је $\{x_n\}$ низ модификованих

[67] S. Ishikawa
[68] W. A. Kirk
[69] W. R. Mann

Ишикавиних итерација $(T, \{\alpha_n\}, \{\beta_n\}, \{u_n\}, \{v_n\})$ у тачки x_0.

Наше основне резултате у овом поглављу дајемо у следећим теоремама, које су публиковане у раду Ћирић, Уме, Јешић, Миловановић - Аранђеловић [2007].

Теорема 5.1. *Нека је X произвољан реалан Банахов простор, $D \subseteq X$ произвољан, непразан конвексан подскуп и нека су $S, T : D \to D$ два Липшицова пресликавања, таква да је Липшицова*[69] *константа $L \geq 1$. Нека је T строго-псеудо контрактивно и k $(0 < k < 1)$ реалан број такав да за свако $x, y \in A$ постоји $j(x-y) \in J_p(x-y)$ такво да је*

$$\langle Tx - Ty, j(x-y) \rangle \leq (1-k)\|x-y\|^p.$$

Нека је λ $(0 < \lambda < 1)$ произвољно и нека су $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ два низа реалних бројева која испуњавају услове:

(а) $0 \leq \alpha_n \leq 1$ *за све n и α_n је нула-низ;*

(б) $0 \leq \beta_n \leq k\lambda(L+L^2)^{-1}$ *за све n;*

(ц) $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty$.

Нека су низови $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ дефинисани са:

$$x_0 \in D;$$

$$y_n = \beta_n S u_n + (1-\beta_n)x_n; \tag{2}$$

$$x_{n+1} = \alpha_n T v_n + (1-\alpha_n)x_n, \tag{3}$$

где су $\{u_n\} \subseteq D$, $\{v_n\} \subseteq D$ два низа таква да је $\lim \|x_n - u_n\| = 0$ и $\lim \|y_n - v_n\| = 0$.

[69] Rudolf Lipschitz

Ако постоји $y \in D$, такво да је

$$y = Ty = Sy,$$

онда је y јединствено и за свако $x_0 \in D$, низ модификованих Ишикавиних итерација $\{x_n\}$ конвергира ка y.

Доказ: Нека $q \in D$ испуњава услов $q = Tq = Sq$. Пошто је S Липшицово, из (2) добијамо:

$$\|y_n - q\| = \|(1-\beta_n)(x_n - q) + \beta_n(Su_n - Sq)\| \leq$$

$$\leq (1-\beta_n)\|(x_n - q)\| + \beta_n L\|u_n - q\| \leq$$

$$\leq (1-\beta_n)\|(x_n - q)\| + \beta_n L\|u_n - x_n\| + \beta_n L\|x_n - q\|. \tag{4}$$

Из $\beta_n \leq 1$ и $L > 1$ следи:

$$\|y_n - q\| \leq L\|u_n - x_n\| + L\|x_n - q\|. \tag{5}$$

Пошто је T Липшицово, из (3) и (5) добијамо:

$$\|x_{n+1} - q\| = \|\alpha_n(Tv_n - Tq) + (1-\alpha_n)(x_n - q))\| \leq$$

$$\leq \alpha_n L\|v_n - q\| + (1-\alpha_n)\|x_n - q\| \leq$$

$$\leq \alpha_n L\|y_n - q\| + \alpha_n L\|v_n - y_n\| + (1-\alpha_n)\|x_n - q\| \leq$$

$$\leq \alpha_n L^2\|x_n - q\| + \alpha_n L^2\|x_n - u_n\| + \alpha_n L\|v_n - y_n\| + (1-\alpha_n)\|x_n - q\| \leq$$

$$\leq (1 - \alpha_n + \alpha_n L^2)\|x_n - q\| + 2\alpha_n L^2 \max\{\|u_n - x_n\|, \|v_n - y_n\|\}.$$

Одатле следи

$$\|x_{n+1} - q\| \leq (1 - \alpha_n + \alpha_n 3L^2)\max\{\|x_n - q\|, \mu_n\} \tag{6}$$

где је

$$\mu_n = \max\{\|u_n - x_n\|, \|v_n - y_n\}\|\}. \tag{7}$$

Пошто је реална функција $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$, дефинисана са $f(t) = t^p$, за све $p > 1$ растућа и конвексна, за свако $\alpha \in [0, 1]$ и све $t_1, t_2 \in [0, +\infty)$ важи:

$$[(1-\alpha)t_1 + \alpha t_2]^p \leq (1-\alpha)t_1^p + \alpha t_2^p,$$

одакле следи

$$((1-\alpha_n) + \alpha_n 3L^2)^p \leq 1 - \alpha_n + \alpha_n (3L^2))^p \leq 1 + \alpha_n 3^p L^{2p}.$$

Пошто је $1 - \alpha_n + \alpha_n 3L^2 \geq 1$ и a^x за $a \geq 1$ растућа функција, важи:

$$((1-\alpha_n) + \alpha_n 3L^2)^{p-1} \leq 1 + \alpha_n 3^p L^{2p}.$$

Из (6) и (7) следи

$$\|x_{n+1} - q\|^{p-1} \leq (1 + \alpha_n 3^p L^{2p}) \max\{\|x_n - q\|^{p-1}, \mu_n^{p-1}\} \tag{8}$$

и

$$\|x_{n+1} - q\|^p \leq (1 + \alpha_n 3^p L^{2p}) \max\{\|x_n - q\|^p, \mu_n^p\}. \tag{9}$$

Из Леме 5.2 и (3) добијамо:

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - q\|^p = \|(1-\alpha_n)(x_n - q) + \alpha_n(Tv_n - q)\|^p \leq \\
&\leq (1-\alpha_n)^p \|x_n - q\|^p + p\alpha_n \langle Tv_n - q, j_p(x_{n+1} - q)\rangle \leq \\
&\leq (1-\alpha_n)^p \|x_n - q\|^p + p\alpha_n \langle Tx_{n+1} - q, j_p(x_{n+1} - q)\rangle + \\
&+ p\alpha_n \langle Tv_n - Tx_{n+1}, j_p(x_{n+1} - q)\rangle.
\end{aligned}$$

Према томе важи:

$$\|x_{n+1} - q\|^p \leq (1-\alpha_n)^p \|x_n - q\|^p + p\alpha_n \langle Tx_{n+1} - q, j_p(x_{n+1} - q)\rangle +$$

$$+ p\alpha_n \|Tv_n - Tx_{n+1}\| \cdot \|x_{n+1} - q\|^{p-1}. \tag{10}$$

Сада ћемо проценити сабираке на десној страни претходне неједнакости.

Прво ћемо показати да је

$$(1-\alpha_n)^p \leq 1 - p\alpha_n + \frac{p^2\alpha_n^2}{2}. \tag{11}$$

Посматрајмо експоненцијалну функцију $f(x) = e^{-x}$ за свако $x \geq 0$. За свако $x > 0$, постоји $c = c(x) \in (0, x)$ такво да је

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2!} f''(c)x^2.$$

Из $f''(c) = e^{-c}$ и $0 < e^{-c} < 1$, следи

$$f(0) + f'(0)x < f(x) < f(0) + f'(0)x + \frac{x^2}{2},$$

то јест:

$$1 - x \leq e^{-x} \leq 1 - x + \frac{x^2}{2} \text{ за све } x \geq 0. \tag{12}$$

Из $0 \leq 1 - \alpha_n \leq e^{-\alpha_n}$ следи да је $(1-\alpha_n)^p \leq e^{-p\alpha_n}$ за све $p > 0$, па према (12) добијамо:

$$(1-\alpha_n)^p \leq e^{-p\alpha_n} \leq 1 - p\alpha_n + \frac{p^2\alpha_n^2}{2},$$

јер је $\alpha_n \geq 0$. Тиме смо показали неједнакост (11). Из (11) следи:

$$(1-\alpha_n)^p\|x_n-q\|^p \leq (1-p\alpha_n+p^2\alpha_n^2)\|x_n-q\|^p. \tag{13}$$

Из строге псеудо-контрактивности пресликавања T, следи да постоји $j(x-y) \in J_p(x-y)$ такво да је

$$\langle Tx_{n+1}-Tq, j(x-q)\rangle \leq (1-k)\|x-q\|^p.$$

Тако добијамо:

$$p\alpha_n\langle Tx_{n+1}-q, j_p(x_{n+1}-q)\rangle \leq p\alpha_n\|x_{n+1}-q\|^p - pk\alpha_n\|x_{n+1}-q\|^p.$$

Пошто је $p = p\lambda+(p-1)(1-\lambda)+(1-\lambda)$, добијамо:

$$\begin{aligned} -pk\alpha_n\|x_{n+1}-q\|^p =& -[\alpha_n kp\lambda + \alpha_n k(p-1)(1-\lambda)\|x_{n+1}-q\|^p - \\ & - \alpha_n k(1-\lambda)\|x_{n+1}-q\|^p. \end{aligned} \tag{14}$$

Из (9) следи:

$$\begin{aligned} &\alpha_n[p-kp\lambda-k(p-1)(1-\lambda)]\|x_{n+1}-q\|^p \leq \\ &\leq \alpha_n[p-kp\lambda-k(p-1)(1-\lambda)](1+\alpha_n 3^p L^{2p})\max\{\|x_n-q\|^p, \mu_n^p\} \leq \\ &\leq \alpha_n[p-kp\lambda-k(p-1)(1-\lambda)]\max\{\|x_n-q\|^p, \mu_n^p\} + \\ &+\alpha_n^2 p3^p L^{2p}\max\{\|x_n-q\|^p, \mu_n^p\}. \end{aligned}$$

Тако смо добили да је:

$$\begin{aligned} &p\alpha_n\langle Tx_{n+1}-q, j_p(x_{n+1}-q)\rangle \leq \\ &\leq \alpha_n[p-kp\lambda-k(p-1)(1-\lambda)]\max\{\|x_n-q\|^p, \mu_n^p\} + \\ &+\alpha_n^2 p3^p L^{2p}\max\{\|x_n-q\|^p, \mu_n^p\} - \alpha_n k(1-\lambda)\|x_{n+1}-q\|^p. \end{aligned} \tag{15}$$

Сада процењујемо $p\alpha_n\|Tx_{n+1} - Tv_n\|\|x_{n+1} - q\|^{p-1}$. Пошто су S и T Липшицова пресликавања, из неједнакости троугла, (2) и (3) добијамо:

$$\begin{aligned}
\|Tv_n - Tx_{n+1}\| &\leq L\|v_n - x_{n+1}\| \leq \\
&\leq L(\|v_n - y_n\| + \|y_n - x_n\| + \|x_{n+1} - x_n\|) \leq \\
&\leq L(\beta_n\|Su_n - x_n\| + \alpha_n\|Tv_n - x_n\| + \|v_n - y_n\|) \leq \\
&\leq L\beta_n(\|Su_n - Sq\| + \|x_n - q\|) + \\
&+ L\alpha_n(\|Tv_n - Tq\| + \|x_n - q\|) + L\|v_n - y_n\| \leq \\
&\leq L\beta_n(L\|u_n - x_n\| + L\|x_n - q\|) + L\beta_n\|x_n - q\| + \\
&+ L\alpha_n(L\|v_n - y_n\| + L\|y_n - q\|) + L\alpha_n\|x_n - q\| + L\|v_n - y_n\|.
\end{aligned}$$

Из (5) следи:

$$\begin{aligned}
&\|Tv_n - Tx_{n+1}\| \leq \\
&\quad \leq \beta_n(L + L^2)\|x_n - q\| + \beta_n L^2\|u_n - x_n\| + \alpha_n L^2\|v_n - y_n\| + \\
&\quad + \alpha_n L^2(L\|x_n - q\| + L\|u_n - x_n\|) + L\alpha_n\|x_n - q\| + L\|v_n - y_n\| \leq \\
&\quad \leq [\beta_n(L + L^2) + \alpha_n(L + L^3)]\|x_n - q\| + (\beta_n L^2 + \alpha_n L^3)\|u_n - x_n\| + \\
&\quad + (\alpha_n L^2 + L)\|v_n - y_n\|
\end{aligned}$$

Одатле применом услова *б)* добијамо:

$$\|Tv_n - Tx_{n+1}\| \leq [k\lambda + \alpha_n 2L^3]\|x_n - q\| + 4L^3\mu_n. \tag{16}$$

Из (8) и (16) добијамо:

$$\begin{aligned}
\|Tv_n - Tx_{n+1}\|\|x_{n+1} - q\|^{p-1} &\leq [(k\lambda + \alpha_n 2L^3)\|xn - q\| + 4L^3\mu_n]\cdot \\
&\cdot (1 + \alpha_n 3^p L^{2p}) \max\{\|x_n - q\|^{p-1}, \mu_n^{p-1}\}
\end{aligned} \tag{17}$$

Претпоставимо да је

$$\max\{\|x_n - q\|^{p-1}, \mu_n^{p-1}\} = \|x_n - q\|^{p-1}. \tag{18}$$

Из (17) добијамо:

$$\begin{aligned} \|Tv_n - Tx_{n+1}\|\|x_{n+1} - q\|^{p-1} \leq [(k\lambda + \alpha_n 2L^3)(1 + \alpha_n 3^p L^{2p})\|x_n - q\|^p + \\ + \mu_n 4L^3(1 + \alpha_n 3^p L^{2p})\|x_n - q\|^{p-1}. \end{aligned} \tag{19}$$

Из

$$4L^3(1 + \alpha_n 3^p L^{2p}) < 8 \cdot 3^p L^{2p+3},$$

$$(k\lambda + \alpha_n 2L^3)(1 + \alpha_n 3^p L^{2p}) \leq k\lambda + \alpha_n 8 \cdot 3^p L^{2p+3}$$

и (19) добијамо:

$$\|Tv_n - Tx_{n+1}\|\|x_{n+1} - q\|^{p-1} \leq (k\lambda + \alpha_n R)\|x_n - q\|^p + \mu_n R\|x_n - q\|^{p-1}, \tag{20}$$

где је $R = 8 \cdot 3^p L^{2p+3}$. Сада имамо две могућности: или је $\|x_n - q\| > 1$, или $\|x_n - q\| \leq 1$.

Ако је $\|x_n - q\| > 1$, онда је $\|x_n - q\|^{p-1} < \|x_n - q\|^p$, па је према (20):

$$\|Tv_n - Tx_{n+1}\|\|x_{n+1} - q\|^{p-1} \leq [k\lambda + (\alpha_n + \mu_n)R]\|x_n - q\|^p. \tag{21}$$

Ако је $\|x_n - q\| \leq 1$, онда је $\|x_n - q\|^{p-1} \leq 1$, па је према (20):

$$\|Tv_n - Tx_{n+1}\|\|x_{n+1} - q\|^{p-1} \leq (k\lambda + \alpha_n R)\|x_n - q\|^p + \mu_n R. \tag{22}$$

Према (21) (22) у оба случаја добија се:

$$\|Tv_n - Tx_{n+1}\| \cdot \|x_{n+1} - q\|^{p-1} \leq (k\lambda + (\alpha_n + \mu_n)R)\|x_n - q\|^p + \mu_n R. \tag{23}$$

Заменом (13), (15) и (23) у (10) добијамо:

$$\|x_{n+1}-q\|^p \leq (1-p\alpha_n+p^2\alpha_n^2)\|x_n-q\|^p - \alpha_n k(1-\lambda)\|x_{n+1}-q\|^p +$$
$$+ [p\alpha_n - \alpha_n pk\lambda - \alpha_n k(p-1)(1-\lambda)]\|x_n-q\|^p +$$
$$+ \alpha_n^2 pR\|x_n-q\|^p p\alpha_n[k+(\alpha_n+\mu_n)R]\|x_n-q\|^p + p\alpha_n\mu_n R.$$

Одатле следи:

$$\|x_{n+1}-q\|^p \leq \|x_n-q\|^p - \alpha_n k(1-\lambda)\|x_{n+1}-q\|^p -$$
$$- \alpha_n\{k(p-1)(1-\lambda) - [\alpha_n p^2 + (2\alpha_n+\mu_n)pR]\}\|x_n-q\|^p +$$
$$+ p\alpha_n\mu_n R. \tag{24}$$

Пошто је $\lim \alpha_n = 0$ и $\lim \mu_n = \lim \max\{\|u_n - x_n\|\}, \|v_n - y_n\|\} = 0$, постоји природан број n_0 такав да је

$$\alpha_n p^2 + (2\alpha_n+\mu_n)pR < k(p-1)(1-\lambda)$$

за све $n > n_0$. Према (24), важи:

$$\|x_{n+1}-q\|^p \leq \|x_n-q\|^p - \alpha_n k(1-\lambda)\|x_{n+1}-q\|^p + \alpha_n\mu_n pR \tag{25}$$

за све $n > n_0$.

Преостао је још случај:

$$\max\{\|x_n-q\|^{p-1}, \mu_n^{p-1}\} = \mu_n^{p-1}.$$

После замене $\max\{\|x_n-q\|^{p-1}, \mu_n^{p-1}\}$ са μ_n^{p-1} у (15) и $\|x_n - q\|$ са μ_n у (23), добија се да релација (25) остаје тачна.

Ако у њој извршимо смене $\theta_n = \|x_n - q\|^p$, $\lambda_n = \alpha_n$, $\psi(\theta_{n+1}) = k(1-\lambda)\theta_{n+1}^p$ и $\sigma_n = pR\mu_n$ у (25), из Леме 5.1 следи:

$$\lim \|x_n - q\| = 0.$$

Према томе, низ (x_n) конвергира ка јединственој фиксној тачки q.

Теорема 5.2. *Нека је X произвољан реалан Банахов простор, $D \subseteq X$ произвољан, непразан конвексан подскуп, нека је $T : D \to D$ Липшицово уопштено строго-псеудо контрактивно пресликавање и нека су $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ два нула низа релних бројева таква да је: $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty$.*

Нека је низ $\{x_n\}$ и дефинисан са:

$$x_0 \in D;$$

$$x_{n+1} = \alpha_n T v_n + (1-\alpha_n)x_n,$$

где су $\{u_n\} \subseteq D$, $\{v_n\} \subseteq D$ два низа таква да су низови $\{Tu_n\}$ и $\{Tv_n\}$ ограничени.

Ако постоји $y \in D$ такво да је

$$y = Ty,$$

онда је y јединствено и за свако $x_0 \in D$, низ модификованих Ишикавиних итерација $\{x_n\}$ конвергира ка y.

Доказ: Нека је q фиксна тачка пресликавања T и нека је $L \geq 1$ његова Липшицова константа. Увешћемо ознаку

$$M = \|x_0 - q\| + \sup\{\max\{\|Tu_n - q\|, \|Tv_n - q\|\} : n \geq 0\}.$$

Индукцијом се показује да је

$$\|x_n - q\| \leq M.$$

Из (11) добијамо

$$(1-\alpha_n)^p \|x_n - q\|^p \leq \|x_n - q\|^p - p\alpha_n \|x_n - q\|^p + \frac{p^2 \alpha_n^2 M^p}{2}. \tag{26}$$

Такође имамо:

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - q\|^p &\leq (1 + \alpha_n 3^p L^{2p})(\|x_n - q\|^p + \mu_n^p) \leq \\ &\leq \|x_n - q\|^p + \mu_n^p + 2\alpha_n 3^p L^{2p} M^p = \\ &= \|x_n - q\|^p + \mu_n^p + \alpha_n Q M^p, \end{aligned} \tag{27}$$

где је $Q = 2{\cdot}3^p L^{2p}$. Из уопштене псеудо контрактивности пресликавања T и (27) следи:

$$\begin{aligned} &p\alpha_n \langle Tx_{n+1} - q, j_p(x_{n+1} - q)\rangle \leq \\ &\leq p\alpha_n \|x_{n+1} - q\|^p - p\alpha_n \varphi(\|x_{n+1} - q\|) \leq \\ &\leq p\alpha_n \|x_n - q\|^p + p\alpha_n(\mu_n^p + \alpha_n Q M^p) - p\alpha_n \varphi(\|x_{n+1} - q\|). \end{aligned} \tag{28}$$

На исти начин као у доказу претходне Теореме добијамо:

$$\begin{aligned} \|Tv_n - Tx_{n+1}\| &\leq [\beta_n(L + L^2) + \alpha_n 2L^3]\|x_n - q\| + 4L^3\mu_n \leq \\ &\leq [\beta_n(L + L^2) + \alpha_n 2L^3]M + 4L^3\mu_n. \end{aligned}$$

Одатле добијамо:

$$\begin{aligned} &p\alpha_n \|Tv_n - Tx_{n+1}\| \cdot \|x_{n+1} - q\|^{p-1} \leq \\ &\leq p\alpha_n \{[\beta_n(L + L^2) + \alpha_n 2L^3]M + 4L^3\mu_n\} M^{p-1} \leq \\ &\leq p\alpha_n [\beta_n(L + L^2) + \alpha_n 2L^3] M^p + \alpha_n \mu_n 4pL^3 M^{p-1}. \end{aligned} \tag{29}$$

После замене (26), (28) и (29) у (10) добија се:

$$\|x_{n+1}-q\|^p \leq \|x_n-q\|^p - \alpha_n p\varphi(\|x_{n+1}-q\|) + \alpha_n p(\alpha_n p + \mu_n^p + \alpha_n Q M^p p) +$$

$$+ \alpha_n p[\beta_n (L+L^2)M^p + \alpha_n 2L^3 M^p + \mu_n 4L^3 M^{p-1}]. \tag{30}$$

Пошто су (α_n), (β_n) и (μ_n) нула низови, добијамо да је

$$\lim p[\alpha_n p + \mu_n^p + \alpha_n Q M^p + \beta_n (L+L^2)M^p + \alpha_n 2L^3 M^p + \mu_n 4L^3 M^{p-1}] = 0. \tag{31}$$

Ако заменимо $\theta_n = \|x_n - q\|^p$, $\lambda_n = \alpha_n$, $\psi(t) = p\varphi(\|x_{n+1}-q\|)$ и

$$\sigma_n = p[\alpha_n p + \mu_n^p + \alpha_n Q M^p + \beta_n (L+L^2)M^p + \alpha_n 2L^3 M^p + \mu_n 4L^3 M^{p-1}$$

у (30), видимо да из релација (30), (31) и Леме 5.1 следи да је

$$\lim \|x_n - q\| = 0,$$

што повлачи да низ (x_n) конвергира строго ка q, која мора бити јединствена фиксна тачка, јер је низ (x_n) произвољно изабран.

Пошто из претпоставки Теореме 5.1 за $S = T$ следи да су низови $\{Tu_n\}$ и $\{Tv_n\}$ ограничени, Теорема 5.2 је уопштење Теореме 4.1 када је $S = T$.

Теореме 5.1 и 5.2 су уопштења актуелних резултата (чак и у случају $u_n = x_n$ и $v_n = y_n$) датих у радовима Џунг, Чо, Ли, Јанг, Канг [63, Теорема 3.2]; Чидуме[70] [66], Чидуме [67, Теорема 4], Чидуме

[70] C. E. Chidume

[68, Теорема 2], Денг[71] [69, Теорема 4], Денг [70, Теорема 2], Денг, Динг[72][71, Теорема 1], и Тан[73], Ху[74] [72, Теорема 4.2].

[71]L. Deng
[72]X. P. Ding
[73]K. K. Tan
[74]H. K. Hu

6. ВЕРОВАТНОСНИ МЕТРИЧКИ ПРОСТОРИ

Први резултати у теорији вероватносних метричких простора који описују постојање и јединственост фиксних тачака пресликавања која испуњавају контрактивне услове, као и конвергенцију одговарајућих итеративних низова, дати су у докторској дисертацији В. М. Сехгала [73]. Следећи је овај проблем разматрао Шервуд[75] [74], који је први дао и примере комплетних вероватносних метричких простора на којима ставови о фиксним тачкама не важе. Ти примери указују да су за проучавање ставова о непокретним тачкама погодни вероватносни метрички простори са $t-$нормом, која испуњава Менгерову неједнакост и који се стога називају Менгерови простори. 1972. године В. М. Сехгал и А. Т. Баруча - Реид[76] објављују рад [75] који садржи основне резултате из Сехгалове тезе. Тај рад је привукао велику пажњу и мотивисао велики број математичара из целог света да почну са истраживањима у овој области. Уследио је читав низ резултата од којих су најважнији дати у радовима Истратескуа[77] и Сакују[78] [76], Бокшана[79] [77], [78], Љ. Ћирића [79] у коме је пренесен услов генералисане контрактивности на Менгерове просторе, А. Т. Баруча - Реида

[75] H. Shervood
[76] A. T. Bharucha-Reid
[77] V. Istratescu
[78] I. Sakuiu
[79] G. Bocsan

[80], Т. Хикса[80] [79] и Тардифа[81] [80]. У радовима О. Хаџић [81] и Т. Хикса [79] изложени су методи за добијање теорема на вероватносним просторима из одговарајућих ставова на метричким просторима.

За функцију $F : \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ кажемо да је *функција расподеле* ако испуњава следеће услове:

1) из $x \leq y$ следи $F(x) \leq F(y)$ за све $x, y \in \mathcal{R}$;

2) $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$;

3) $\lim\limits_{x \to \infty} F(x) = 1$;

4) $\lim\limits_{t \to x-} F(t) = F(x)$ за свако $x \in \mathcal{R}$.

Назив "функција расподеле" потиче из теорије вероватноће и додељен је овој класи функција зато што особине 1) – 4) карактеришу функције расподела случајних променљивих. Скуп свих функција расподеле обележаваћемо са $\mathcal{L}$. Функција расподеле H дефинисана са

$$H(x) = \begin{cases} 0, & \text{за } x \leq 0 \\ 1, & \text{за } x > 0 \end{cases}$$

назива се Хевисајдова[82] функција.

Дефиниција 6.1. *Вероватносни метрички простор је уређен пар $(X, \mathcal{F})$ где је X непразан скуп а $\mathcal{F} : X \times X \to \mathcal{L}$ (слику тачке $(u, v) \in X \times X$ при пресликавању $\mathcal{F}$ означаваћемо са $F_{u,v}$) пресликавање које има следеће особине:*

(a) $F_{u,v}(x) = 1$ за све $x > 0$ ако и само ако је $u = v$,

[80] Troy Hicks
[81] R. Tardiff
[82] O. Heaviside

(б) $F_{u,v}(0) = 0$*,*

(ц) $F_{u,v}(x) = F_{v,u}(x)$*,*

(д) из $F_{u,v}(x) = 1$ *и* $F_{v,w}(y) = 1$ *следи* $F_{u,w}(x + y) = 1$*,*

за све $u, v, w \in X$ *и све* $x, y \in \mathcal{R}$*.*

Вредност $F_{u,v}(x)$ функције $F_{u,v}$ за $x \in \mathcal{R}$ може се интерпретирати као вероватноћа да је растојање између u и v мање од x. Из (б) следи да је $F_{p,q}(x) = 0$ за све $x \leq 0$. Према томе, имамо да је услов (а) еквивалентан тврђењу: $p = q$ ако и само ако је $F_{p,q} = H$. Услов (д) је уопштење неједнакости троугла и можемо га интерпретирати на следећи начин: ако је извесно да је растојање од p до q мање од x, и такође, да је растојање од q до r мање од y, тада је извесно и да је растојање од p до r мање од $x + y$.

Сваки метрички простор може бити разматран као вероватносни метрички простор ако се дефинише $F_{p,q}(x) = H(x - d(p, q))$ за сваки пар тачака (p, q) из метричког простора. Обрнут проблем, тј. проблем увођења метрике на вероватносним метричким просторима, решавало је више аутора (Швајцер, Склар и Торп[83] [82], Хикс [79], итд.) и он је успешно решен за извесне класе ових простора о чему ће бити више речи касније.

Услов (д) је увек задовољен у метричким просторима, где се редукује на обичну неједнакост троугла. Међутим, у оним вероватносним метричким просторима у којима једнакост $F_{p,q}(x) = 1$ не важи

[83] E. Thorp

(за $p \neq q$) за произвољно коначно x, услов (д) ће бити задовољен само формално. Због тога је неопходно увести строжију верзију уопштене неједнакости троугла, што ће нас довести до појма Менгерових простора.

Дефиниција 6.2. *Функција* $t : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ *која испуњава услове:*

1. $t(a,1) = a,\ t(0,0) = 0,$
2. $t(a,b) = t(b,a),$
3. $t(c,d) \geq t(a,b)$ *за све* $c \geq a,\ d \geq b,$
4. $t(t(a,b),c) = t(a,t(b,c)),$

назива се $t-$*норма.*

Дефиниција 6.3. *Уређена тројка* $(X, \mathcal{F}, t)$, *где је* $(X, \mathcal{F})$ *вероватносни метрички простор а* t t-*норма која испуњава Менгерову неједнакост:*

$$F_{u,w}(x\ +\ y) \geq t[F_{u,v}(x), F_{v,w}(y)]$$

за све $u, v, w \in X$ *и све* $x \geq 0, y \geq 0$, *назива се Менгеров простор.*

На простору $(X, \mathcal{F}, t)$ се уобичајено разматра топологија чију базу чине скупови, $\{U_v(\varepsilon, \lambda) \mid v \in X, \varepsilon > 0, \lambda > 0\}$, где је

$$U_v(\varepsilon, \lambda) \ =\ \{u \in X \mid F_{u,v}(\varepsilon) > 1 - \lambda,\ \varepsilon > 0,\ \lambda > 0\}.$$

Такви скупови се називају (ε, λ) - околине тачке $v \in X$. Швајцер, Склар и Торп [82] доказали су да фамилија $\{U(\varepsilon, \lambda) \mid \varepsilon > 0, \lambda > 0\}$, где је

$$U(\varepsilon, \lambda) \ =\ \{(u,v) \in X^2 \mid F_{u,v}(\varepsilon) > 1 - \lambda,\ \varepsilon > 0,\ \lambda > 0\},$$

представља базу за униформну структуру на X^2. Та структура такође испуњава Хаусдорфову аксиому сепарације и има пребројиву локалну базу. Из тога закључујемо да Менгерови простори припадају класи метризабилних тополошких простора. Одатле следи да је на тим просторима могуће увести различите метрике које су сагласне са топологијом простора, али се таквим приступом губе могућности описа недетерминистичких модела.

За низ тачака $\{p_n\}$ у вероватносном метричком простору $(S, \mathcal{F})$ рећи ћемо да конвергира ка тачки $p \in S$ (што записујемо са $p_n \to p$) ако и само ако за свако $\varepsilon > 0$ и свако $\lambda > 0$, постоји цео број $M_{\varepsilon,\lambda}$, такав да $p_n \in U_p(\varepsilon, \lambda)$, тј. $F_{p,p_n}(\varepsilon) > 1 - \lambda$ за све $n \geq M_{\varepsilon,\lambda}$.

Ако $p_n \to p$, тада $F_{p,p_n} \to F_{p,p} = H$, тј. за свако $x \in S$ $F_{p,p_n}(x) \to F_{p,p}(x) = H(x)$, и обрнуто. Конвергенција је униформна на произвољном затвореном интервалу $[a, b]$ таквом да је $a > 0$, т.ј. $M_{\varepsilon,\lambda}$ не зависи од x за $a \leq x \leq b$. За произвољно x, $a \leq x \leq b$ је $F_{p,p_n}(x) \geq F_{p,p_n}(a)$.

Менгерову неједнакост можемо интерпретирати на следећи начин: наше сазнање о трећој страници троугла на симетричан начин зависи од онога што знамо о другим двема странама и не смањује се, ако се повећа знање о другим двема странама. Ова интерпретација се може изказати и прецизније, избором одређене функције за t. Овде ћемо навести најједноставније примере:

$t_1(a, b) := \max\{a + b - 1, 0\}$ тј. $t = \max\{sum - 1, 0\}$;

$t_2(a, b) := ab$ тј. $t = product$;

$t_3(a,b) := \min\{a,b\}$ тј. $t = \min$.

Ових три функције су наведене у поретку растуће 'снаге', при чему ћемо рећи да је t" јача од t' (или да је t' слабија од t") ако је t"$(a,b) \geq t'(a,b)$ за све (a,b) из скупа $[0,1]\times[0,1]$, при чему строга неједнакост важи бар за један пар (a,b). Очигледно је да ако Менгерова неједнакост важи за произвољну дату функцију t, тада тим пре важи и за све слабије функције од t.

За $t = $ *product* Менгерову неједнакост можемо интерпретирати на следећи наин: вероватноћа да је растојање од p до r мање од $x+y$ није мања од производа вероватноћа да је, независно, растојање p до q мање од x и да је растојање од q до r мање од y.

За $t = \min$ интерпретација гласи: вероватноћа да је растојање од p до r мање од $x+y$ није мања од мање од вероватноћа да је растојање од p до q мање од x и да је растојање од q до r мање од y.

Значај $t-$норме $t = \min$ проистиче и из следеће леме.

Лема 6.1. *Ако $t-$норма t испуњава услов $t(a,a) \geq a$ за све $a \in [0,1]$, онда је $t = \min$.*

Доказ:

$$\min\{a,b\} \leq t(\min\{a,b\},\min\{a,b\}) \leq t(a,b) \leq$$

$$\leq t(\min\{a,b\},1) = \min\{a,b\}.$$

У раду Швајцера и Склара [08 - Теорема 8.1] доказан је следећи резултат:

Став 6.1. Ако је $(S,\mathcal{F},t)$ Менгеров простор при чему је функција t

непрекидна, тада је вероватносна функција растојања $\mathcal{F}$ полунепрекидна одоздо функција, тј. за свако фиксирано $x \in R$, и све конвергентне низове $\{p_n\}, \{q_n\} \subseteq S$ такве да $q_n \to q$ и $p_n \to p$ важи:

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} F_{p_n,q_n}(x) \ = \ F_{p,q}(x).$$

Следећа Лема уопштава резултат Швајцера и Склара [08 - Теорема 8.2] који садржи додатни услов који захтева да t није слабија од $t_1 = max(a+b-1,0)$.

Лема 6.2. *Нека је $(S, \mathcal{F}, t)$ Менгеров простор. Претпоставимо да је $t-$норма t непрекидна. Претпоставимо, сем тога, да: $p_n \to p$, $q_n \to q$ и да је $F_{p,q}$ непрекидна у тачки x. Тада је:*

$$\lim_{n\to\infty} F_{p_n,q_n}(x) = F_{p,q}(x).$$

Доказ: Пошто вредност је вредност израза $t(t(a,b),c)$ иста за све пермутације бројева a, b и c, увешћемо ознаку

$$t_*(a,b,c) = t(t(a,b),c).$$

Запазићемо да је новоуведена функција t_* растућа по свим координатама, и да је непрекидна, јер је t по претпоставци непрекидна.

Посматрајмо произвољне низове $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\} \subseteq [0,1]$, такве да је $\overline{\lim} b_n = \beta$ и $\lim a_n = \lim c_n = 1$. Тада за свако $\varepsilon > 0$ постоји n_0 такво да из $n \geq n_0$ следи $b_n < \beta + \varepsilon$, а услови $a_n, b_n \leq 1$ су испуњени за свако n. Из монотоности функције t_* добијамо:

$$t_*(a_n, b_n, c_n) \leq t_*(1, \beta+\varepsilon, 1) = \beta + \varepsilon,$$

одакле следи да је:

$$\overline{\lim} t_*(a_n, b_n, c_n) \leq \beta.$$

Пошто постоји $\{b_{n_k}\} \subseteq \{b_n\}$ такав да је $\lim\limits_{k\to\infty} b_{n_k} = \beta$, имамо:

$$\lim_{k\to\infty} t_*(a_{n_k}, b_{n_k}, c_{n_k}) = t_*(1, \beta, 1) = \beta,$$

јер је t_* непрекидна. Према томе је:

$$\overline{\lim} t_*(a_n, b_n, c_n) = \beta = \overline{\lim} b_n.$$

Из услова $p_n \to p$ и $q_n \to q$ следи да је $lim_{n\to\infty} F_{p_n,p}(\varepsilon) = 1$, односно $lim_{n\to\infty} F_{q_n,q}(\varepsilon) = 1$, за свако $\varepsilon > 0$.

Нека су $u, v, w, h \in S$ и $a, b, c \in [0,1]$ произвољни. Тада применом Менгерове неједнакости добијамо:

$$F_{u,h}(a+b+c) \geq t(F_{u,w}(a+b), F_{w,h}(c)) \geq t(t(F_{u,v}(a), F_{v,w}(b)), F_{w,h}(c)) =$$
$$= t_*(F_{u,v}(a), F_{v,w}(b), F_{w,h}(c)).$$

Одатле добијамо, да је за произвољно $\varepsilon > 0$:

$$F_{p,q}(x + 2\varepsilon) \geq t_*(F_{p,p_n}(\varepsilon), F_{p_n,q_n}(x), F_{q_n,q}(\varepsilon)).$$

Одатле следи:

$$F_{p,q}(x+2\varepsilon) \geq \overline{\lim}_{n\to\infty} t_*(F_{p,p_n}(\varepsilon), F_{p_n,q_n}(x), F_{q_n,q}(\varepsilon)) = \overline{\lim}_{n\to\infty} F_{p_n,q_n}(x),$$

односно

$$F_{p,q}(x) \geq \overline{\lim}_{n\to\infty} F_{p_n,q_n}(x).$$

Применом Става 6.1 добијамо:

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} F_{p_n,q_n}(x) = F_{p,q}(x) \geq \overline{\lim}_{n\to\infty} F_{p_n,q_n}(x),$$

одакле следи да је:

$$\lim_{n\to\infty} F_{p_n,q_n}(x) = F_{p,q}(x).$$

Сада ћемо дати основне информације везане за комплетне Менгерове просторе.

За низ тачака $\{p_n\}$ у Менгеровом простору $(S,\mathcal{F},t)$ рећи ћемо да је Кошијев ако и само ако за свако $\varepsilon > 0$ и свако $\lambda > 0$ постоји природан број $M_{\varepsilon,\lambda}$, такав да је $F_{p_m,p_n}(\varepsilon) > 1-\lambda$ за све $m,n \geq M_{\varepsilon,\lambda}$. Нека је $(X,\mathcal{F},t)$ Менгеров простор, где је t непрекидно и $\{x_n\}_{n\in\mathcal{N}}$ конвергентан низ. Тада је низ $\{x_n\}_{n\in\mathcal{N}}$ Кошијев.

Вероватносни метрички простор је комплетан ако и само ако је сваки Кошијев низ садржан у њему, конвергентан.

Ако је (X,d) метрички простор, тада метрика d индукује пресликавање $\mathcal{F} : X \times X \to \mathcal{L}$, где је $\mathcal{F}(p,q)$ $(p,q \in X)$ дефинисано са:

$$\mathcal{F}(p,q)(x) \;=\; H(x - d(p,q)),$$

$x \in \mathcal{R}$. Ако је функција $t : [0,1]\times[0,1] \to [0,1]$ дефинисана са $t(a,b) = \min\{a,b\}$, тада је $(X,\mathcal{F},t)$ Менгеров простор који је комплетан ако и само ако је метрика d комплетна. Овако добијени простор $(X,\mathcal{F},t)$ зове се индуковани Менгеров простор.

Заједничким фиксним тачкама комутирајућих пресликавања у вероватносним метричким просторима бавили су се С. Л. Синг и Б. Д. Пант[84][83], Б. М. Л. Тивари[85] и Б. Д. Пант [84], Дедејић и Сарапа [85] и [86], Чамола[86], Димри[87] и Пант [87], Б. С. Тутеја[88][88], Мишра [89] и Васуки[89] [90].

Наредну лему су доказали Синг и Пант [83]. Њен доказ се може издвојити и из доказа Теореме 3 дате у раду [73].

Лема 6.3. *Нека је* $\{u_n\}$ *низ у Менгеровом простору* $(X, \mathcal{F}, t)$, *где је норма* t *непрекидна и задовољава услов:* $t(x, x) \geq x$ *за* $x \in [0, 1]$. *Ако постоји константа* $k,\ k \in [0, 1)$, *таква да је*

$$F_{u_n, u_{n+1}}(kx) \geq F_{u_n, u_{n-1}}(x),\ n = 1, 2, ...$$

за све $x > 0$, *тада је* $\{u_n\}$ *Кошијев низ у* X.

Доказ: Нека су ε и λ позитивни реални бројеви. Тада, за $m > n$, из Менгерове неједнакости, следи:

$$F_{u_n, u_m}(\varepsilon) \geq t(F_{u_n, u_{n+1}}(\varepsilon - k\varepsilon), F_{u_{n+1}, u_m}(k\varepsilon)) \geq$$

$$\geq t(F_{u_0, u_1}(\varepsilon - k\varepsilon)k^{-n}, F_{u_{n+1}, u_m}(k\varepsilon))$$

где последња неједнакост следи из услова Леме. Ако означимо: $a = (\varepsilon - k\varepsilon)k^{-n}$, и поновимо претходни поступак, на сличан начин, доби-

[84] B. D. Pant
[85] B. M. L. Tivari
[86] K. P. Chamola
[87] R. C. Dimri
[88] B. S. Tuteja
[89] R. Vasuki

јамо:

$$F_{u_n,u_m}(\varepsilon) \geq t(F_{u_0,u_1}(a), t(F_{u_{n+1},u_{n+2}}(k\varepsilon - k^2\varepsilon), F_{u_{n+2},u_m}(k^2\varepsilon))) \geq$$

$$\geq t(F_{u_0,u_1}(a)), t(F_{u_0,u_1}(k(\varepsilon - k\varepsilon)k^{-n-1}), F_{u_{n+2},u_m}(k^2\varepsilon))) \; =$$

$$= \; t(F_{u_0,u_1}(a), t(F_{u_0,u_1}(a), F_{u_{n+2},u_m}(k^2\varepsilon)))$$

Због асоцијативности функције t и претпоставке $t(x,x) \geq x$ имамо да је:

$$F_{u_n,u_m}(\varepsilon) \geq t(F_{u_0,u_1}(a), F_{u_{n+2},u_m}(k^2\varepsilon))$$

Ако овај поступак поновимо одређен број пута, добићемо:

$$F_{u_n,u_m}(\varepsilon) \geq t(F_{u_0,u_1}(a), F_{u_{m-1},u_m}(k^{m-n-1}\varepsilon)) \geq t(F_{u_0,u_1}(a), F_{u_0,u_1}(k^{-n}\varepsilon)) \geq$$

$$\geq t(F_{u_0,u_1}(a), F_{u_0,u_1}(a)) \geq F_{u_0,u_1}((\varepsilon - k\varepsilon)k^{-n})$$

За довољно велико N биће:

$$F_{u_0,u_1}((\varepsilon - k\varepsilon)k^{-N}) > 1 - \lambda,$$

одакле следи да је:

$$F_{u_n,u_m}(\varepsilon) > 1 - \lambda$$

за све $n \geq N$ тј. $\{u_n)$ је Кошијев низ.

Наредно тврђење је доказано у раду М. Миловановић - Аранђеловић [18]. Оно уопштава одговарајући резултат индијског математичара Р. Васукија [90].

Теорема 6.1. *Нека је* (T_n), $n = 1,2,...$ *низ пресликавања комплетног Менгеровог простора* $(X,\mathcal{F},t)$ *у себе и* $S : X \to X$ *непрекидна функција, таква да је* $T_n(X) \subseteq S(X)$ *и* S *комутира са сваким од* T_n. *Нека је* $t(r,s) = \min(r,s)$ *за свако* $r,s \in [0,1]$. *Ако постоји константа* $\alpha \in [0,1)$, *таква да је за све* T_i, T_j *и све* $x,y \in X$:

$$(1)\qquad F^2_{T_ix,T_jy}(\alpha p) \geq \min\{F^2_{Sx,T_ix}(p),\ F^2_{Sy,T_jy}(p),\ F^2_{Sx,Sy}(p),$$
$$F_{Sx,T_jy}(2p)F_{Sy,T_ix}(p),\ F_{Sx,T_jy}(2p)F_{Sx,T_ix}(p)\}$$

за свако $p > 0$, *тада постоји јединствена заједничка фиксна тачка за све* T_n *и* S.

Доказ: Нека је x_0 произвољна тачка у X и $\{x_n\}$ низ дефинисан са $Sx_n = T_nx_{n-1}$ $(n = 1,2,...)$. Из (1), за свако $p > 0$, следи:

$$F^2_{Sx_1,Sx_2}(\alpha p) = F^2_{T_1x_0,T_2x_1}(\alpha p)$$
$$\geq \min\{F^2_{Sx_0,T_1x_0}(p),\ F^2_{Sx_1,T_2x_1}(p),\ F^2_{Sx_0,Sx_1}(p),$$
$$F_{Sx_0,T_2x_1}(2p)F_{Sx_1,T_1x_0}(p),\ F_{Sx_0,T_2x_1}(2p)F_{Sx_0,T_1x_0}(p)\}.$$

Одатле,

$$F^2_{Sx_1,Sx_2}(\alpha p) \geq \min\{F^2_{Sx_0,Sx_1}(p),\ F^2_{Sx_1,Sx_2}(p),\ F^2_{Sx_0,Sx_1}(p),$$
$$F_{Sx_0,Sx_2}(2p)F_{Sx_1,Sx_1}(p),\ F_{Sx_0,Sx_2}(2p)F_{Sx_0,Sx_1}(p)\}.$$

Из Менгерове неједнакости за $t = \min$, добијамо:

$$F_{Sx_0,Sx_2}(2p)F_{Sx_1,Sx_1}(p) = F_{Sx_0,Sx_2}(2p) \geq \min\{F_{Sx_0,Sx_1}(p), F_{Sx_1,Sx_2}(p)\}$$
$$\geq \min\{F^2_{Sx_0,Sx_1}(p), F^2_{Sx_1,Sx_2}(p)\};$$
$$F_{Sx_0,Sx_2}(2p)F_{Sx_0,Sx_1}(p) \geq \min\{F_{Sx_0,Sx_1}(p), F_{Sx_1,Sx_2}(p)\} \cdot F_{Sx_0,Sx_1}(p)$$
$$= \min\{F^2_{Sx_0,Sx_1}(p), F_{Sx_0,Sx_1}(p)F_{Sx_1,Sx_2}(p)\}.$$

Према томе,

$$F^2_{Sx_1,Sx_2}(\alpha p) \geq \ \min\{F^2_{Sx_0,Sx_1}(p), F^2_{Sx_1,Sx_2}(p),\ F_{Sx_0,Sx_1}(p)F_{Sx_1,Sx_2}(p)\},$$

што повлачи

$$(2) \qquad F_{Sx_1,Sx_2}(\alpha p) \geq \ \min\{F_{Sx_0,Sx_1}(p), F_{Sx_1,Sx_2}(p)\}.$$

Нека је за неко $p > 0$ испуњено $F_{Sx_0,Sx_1}(p) > F_{Sx_1,Sx_2}(p) = r$. Нека је $q = \sup\{t > 0 : F_{Sx_1,Sx_2}(t) = r\}$. Тада постоји $p_1 > q$ такво да је $\alpha p_1 < q$. Добили смо $F_{Sx_1,Sx_2}(\alpha p_1) \leq r < F_{Sx_1,Sx_2}(p_1)$. Из (2) следи:

$$F_{Sx_1,Sx_2}(\alpha p_1) \geq \ \min\{F_{Sx_0,Sx_1}(p_1), F_{Sx_1,Sx_2}(p_1)\}.$$

Према томе, $F_{Sx_1,Sx_2}(\alpha p_1) \geq F_{Sx_0,Sx_1}(p_1)$. Одавде је:

$$r = F_{Sx_1,Sx_2}(p) \geq F_{Sx_1,Sx_2}(\alpha p_1) \geq F_{Sx_0,Sx_1}(p_1) \geq F_{Sx_0,Sx_1}(p),$$

што је контрадикција са $F_{Sx_0,Sx_1}(p) > F_{Sx_1,Sx_2}(p)$.

Тако, из (2) следи $F_{Sx_1,Sx_2}(\alpha p) \geq F_{Sx_0,Sx_1}(p)$ за све $p > 0$. Понављањем поступка, добијамо

$$(3) \qquad F_{Sx_n,Sx_{n+1}}(\alpha p) \geq F_{Sx_{n-1},Sx_n}(p),\ n = 1, 2, ...$$

Из (3) следи да низ $Sx_n = y_n$ испуњава услове Леме 6.3. Према томе, $\{Sx_n\}$ је Кошијев низ у X. Пошто је X комплетан, постоји $u \in X$ такво да $Sx_n \to u$. Из $Sx_n = T_n x_{n-1}$, следи да $\{T_n x_{n-1}\}$ такође конвергира ка u. Пошто S комутира са сваким T_n, из (1), следи:

$$\begin{aligned} F^2_{SSx_n,T_k u}(\alpha p) = F^2_{ST_n x_{n-1},T_k u}(\alpha p) &= F^2_{T_n Sx_{n-1},T_k u}(\alpha p) \\ &\geq \min\{F^2_{SSx_{n-1},SSx_n}(p), F^2_{Su,T_k u}(p),\ F^2_{SSx_{n-1},Su}(p), \\ &\qquad F_{SSx_{n-1},T_k u}(2p)F_{Su,SSx_n}(p), \\ &\qquad F_{SSx_{n-1},T_k u}(2p)F_{SSx_{n-1},SSx_n}(p)\}. \end{aligned}$$

Означимо са P, скуп свих $p>0$, за које је функција $F_{Su,T_k u}$ непрекидна у тачкама p, αp и $2p$. За све $p\in P$, преласком на граничне вредности кад $n\to\infty$, из непрекидности пресликавања S и Става 6.2 добијамо:

$$F^2_{Su,T_k u}(\alpha p) \geq \min\{F^2_{Su,Su}(p),\ F^2_{Su,T_k u}(p),\ F^2_{Su,Su}(p)$$

$$F_{Su,T_k u}(2p)F_{Su,Su}(p),\ F_{Su,T_k u}(2p)F_{Su,Su}(p)\} = F^2_{Su,T_k u}(p).$$

За такве p смо добили да је $F_{Su,T_k u}(\alpha p)\geq F_{Su,T_k u}(p)$, одакле следи да је $F_{Su,T_k u}(\alpha p)=F_{Su,T_k u}(p)$. Претпоставимо да постоји $q>0$ такво да је $F_{Su,T_k u}(\alpha q)<F_{Su,T_k u}(q)$. Пошто је функција $F_{Su,T_k u}$ растућа таквих бројева има највише пребројиво много, па постоје $a,b\in P$ такви да је $a<q<b$. Из $\alpha a<\alpha q<\alpha b$ и константности функције $F_{Su,T_k u}$ на интервалима $[\alpha a,a]$ и $[\alpha b,b]$, добијамо да је $F_{Su,T_k u}(\alpha p)=F_{Su,T_k u}(q)$, што је контрадикција. Према томе је $F_{Su,T_k u}(p)=1$, за свако $p>0$.

Одатле закључујемо да је $Su = T_k u$ за сваки фиксирани природни број k. Даље,

$$\begin{aligned}F^2_{Sx_n,T_k u}(\alpha p) &\geq F^2_{T_n x_{n-1},T_k u}(\alpha p)\\ &\geq \min\{F^2_{Sx_{n-1},Sx_n}(p),\ F^2_{Su,T_k u}(p), F^2_{Sx_n,Su}(p),\\ &\qquad F_{Sx_{n-1},T_k u}(2p)F_{Su,Sx_n}(p),\\ &\qquad F_{Sx_{n-1},T_k u}(2p)F_{Sx_{n-1},Sx_n}(p)\}.\end{aligned}$$

За све $p>0$, за које је функција $F_{u,T_k u}$ непрекидна у тачкама p, αp и $2p$, кад $n\to\infty$ добијамо:

$$F^2_{u,T_k u}(\alpha p) \geq \min\{F^2_{u,u}(p),\ F^2_{T_k u,T_k u}(p),\ F^2_{u,T_k u}(p)$$

$$F_{u,T_k u}(2p)F_{T_k u,u}(p),\ F_{u,T_k u}(2p)F_{u,u}(p)\} = F^2_{u,T_k u}(p).$$

Идентичним разматрањем као у претходном случају добијамо да је: $F_{u,T_k u}(\alpha p) = F_{u,T_k u}(p)$ за све $p > 0$. Одатле следи $u = T_k u = Su$ за све природне бројеве k. Према томе, u је заједничка фиксна тачка за S и T_n, $n = 1, 2, ...$

Сада ћемо показати да је u јединствена заједничка фиксна тачка. Претпоставимо да је u' такође заједничка фиксна тачка за S и све T_n. Тада, из (1), за све $p > 0$, следи:

$$\begin{aligned}
F^2_{u,u'}(\alpha p) &= F^2_{T_i u, T_j u'}(\alpha p) \\
&\geq \min\{F^2_{Su,u}(p),\ F^2_{Su',u'}(p),\ F^2_{Su,Su'}(p) \\
&\qquad F_{Su,u'}(2p)F_{Su',u}(p),\ F_{Su,u'}(2p)F_{Su,u}(p)\} \\
&= \min\{F^2_{u,u'}(p),\ F^2_{u',u'}(p),\ F^2_{u,u'}(p), \\
&\qquad F_{u,u'}(2p)F_{u',u}(p),\ F_{u,u'}(2p)F_{u,u}(p)\} \\
&= F^2_{u,u'}(p).
\end{aligned}$$

Одавде следи да је$F_{u,u'}(\alpha p) \geq F_{u,u'}(p)$ за све $p > 0$. Према томе, $u' = u$, па је u јединствена заједничка фиксна тачка за све T_n и S. Тиме је доказ теореме завршен.

Ако је S идентичко пресликавање на X, добијамо следећи резултат:

Последица 6.1. Нека је (T_n), $n = 1, 2, ...$ *низ пресликавања комплетног Менгеровог простора* $(X, \mathcal{F}, t)$ *у себе, где је* $t(x, y) = \min(x, y)$ *за све* $x, y \in [0, 1]$. *Ако постоји константа* α $(0 \leq \alpha < 1)$, *таква да је за свака* *два пресликавања T_i и T_j испуњена следећа неједнакост:*

$$(4) \qquad F^2_{T_ix,T_jy}(\alpha p) \geq \min\{F^2_{x,T_ix}(p),\ F^2_{y,T_jy}(p),\ F^2_{x,y}(p), \\ F_{x,T_jy}(2p)F_{y,T_ix}(p),\ F_{x,T_jy}(2p)F_{x,T_ix}(p)\}$$

за све $x, y \in X$ и $p > 0$, тада за све $x_0 \in X$, низ $x_n = T_n x_{n-1}$ $(n = 1, 2, ...)$ конвергира и његова гранична вредност је јединствена заједничка фиксна тачка за све T_n.

Доказ: Постојање и јединственост заједничке фиксне тачке, као и конвергенција низа $\{x_n\}$ следи непосредно из *Теореме 6.1.*

Последица 6.2. *(Р. Васуки [90]) Нека је (T_n), $n = 1, 2, ...$ низ пресликавања комплетног Менгеровог простора $(X, \mathcal{F}, t)$ у себе, где је $t(x, y) = \min(x, y)$ за све $x, y \in [0, 1]$. Ако постоји реалан број α $(0 \leq \alpha < 1)$, такав да за свако T_i и T_j важи неједнакост:*

$$(5) \qquad F^2_{T_ix,T_jy}(\alpha p) \geq \min\{F_{x,y}(p)F_{x,T_ix}(p),\ F_{x,y}(p)F_{y,T_jy}(p), \\ F_{x,T_ix}(p)F_{y,T_jy}(p),\ F_{x,T_jy}(2p)F_{y,T_ix}(p)\}$$

за све $x, y \in X$ и све $p > 0$, онда је за свако $x_0 \in X$, низ $x_n = T_n x_{n-1}$ $((n = 1, 2, ...))$ конвергентан и његова гранична вредност је јединствена заједничка фиксна тачка за све T_n.

Доказ: Пошто је $\min\{a^2, b^2, c^2\} \leq \min\{ab, bc, ca\}$ $a, b, c \geq 0$ имамо

$$\min\{F_{x,y}(p)F_{x,T_ix}(p),\ F_{x,y}(p)F_{y,T_jy}(p),\ F_{x,T_ix}(p)F_{y,T_jy}(p)\},$$

$$\geq \min\{F^2_{x,T_ix}(p),\ F^2_{y,T_jy}(p),\ F^2_{x,y}(p)\}.$$

Из (5), добијамо

$$F^2_{T_ix,T_jy}(\alpha p)$$

$$\geq \min\{F_{x,y}(p)F_{x,T_ix}(p),\ F_{x,y}(p)F_{y,T_jy}(p),$$

$$F_{x,T_ix}(p)F_{y,T_jy}(p),\ F_{x,T_jy}(2p)F_{y,T_ix}(p)\}$$

$$\geq \min\{F^2_{x,T_ix}(p),\ F^2_{y,T_jy}(p),\ F^2_{x,y}(p),$$

$$F_{x,T_jy}(2p)F_{y,T_ix}(p),\ F_{x,T_jy}(2p)F_{x,T_ix}(p)\}.$$

Према томе, ако низ (T_n) задовољава услов (5), он такође задовољава и услов (4) *Последице 6.1*, на основу које следи тврђење.

LITERATURA

[01] John von Neumann, Zur Theoric der Gesellschaftsspiele, Math. Annalen, 100 (1928), 295–320.

[02] Stefan Banach, Sur les operations dans les ensembles abstraits et leur applications aux equations integrales, Fund. Math. 3 (1922), 133-181.

[03] E. Pikard, Memoire sur la theorie des equations successives, J. Math. Pures Appl. 6 (1890), 145-210.

[04] R. Caccioppoli, Un teorema generale sull'esistenza di elementi uniti in una transformazione funzionalle, Rend. Acc. Naz. Lincei, 11 (1930) 794-799.

[05] Đuro Kurepa, General ecart, Zbornik radova Filozofskog fakulteta u Nišu, 6 (2) (1992), 373 - 379.

[06] John Kelley, General Topology, Springer - Verlag New York, Haidelberg, Berlin 1975.

[07] B. Schweizer and A. Sklar, Statistical metric spaces, Pacific J. Math. 10 (1960), 313-334.

[08] B. Schweizer and A. Sklar, Statistical metric spaces, North-Holand Series in Probability and Applied Mathematics vol 5, Amsterdam - New York, 1982.

[09] V. Niemytzki, The method of fixed points in analysis, Uspehi Mat. Nauk 1 (1936), 141-174.

[10] Marina Milovanović - Arandjelović, Measure of noncompactness on Uniform spaces - the axiomatic approach, Filomat 15 (2001), 221-225.

[11] B. Abdelmoumen, A. Dehici, A. Jeribi, M. Mnif, Some new properties in Fredholm theory, Schlecter essential spectrum and application to transport theory, Journal of Inequalities and Applications Volume 2008 (2008), Article ID 852676, 14 pages, doi:10.1155/2008/852676

[12] B. Abdelmoumen, A. Jeribi, M. Mnif, Invariance of the Schechter Essential Spectrum under Polynomially Compact Operators Perturbation, Extracta mathematicae Vol. 26:1(2011), 6173.

[13] B. Abdelmoumen, A. Jeribi, M. Mnif, On graph measures in Banach spaces and description of essential spectra of multidimensional transport equation, Acta Mathematica Scientia 2012,32B(5):20502064

[14] L.Q. Anh, T.Q.Duy, A.Y. Kruger and N.H. Thao, Well-posedness for lexicographic vector equilibrium problems. In Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics (pp. 159-174). Springer New York, 2014.

[15] A. Jeribi, Spectral Theory and Applications of Linear Operators and Block Operator Matrices, Springer International Publishing, 2015.

[16] A. Kumar, S. .L. Sing, S. N. Mišra, M. Milovanović - Aranđelović, Coincidences and Fixed Points of new Meir-Keeler type contractions and applications, Fixed Point Theory, 15:1 (2014), 117-134

[17] Lj. Ćirić, J. S. Ume, S. Jesić, M. Milovanović-Aranđelović, Modified Ishikawa iteration process for nonlinear Lipschitz generalized strongly pseudo-contractive operators in arbitrary Banach spaces, Numer. Funct. Anal. Optimization 28, No. 11- 12, 1231-1243 (2007).

[18] Marina Milovanović-Aranđelović, A common fixed points theorem for contraction type mappings on Menger spaces, Filomat 11 (1997), 103-108.

[19] S. Kutukcu, A fixed point theorem for contraction type mappings in Menger spaces, American journal of applied sciences 4 (6): (2007) 371 - 373.

[20] S. Kutukcu, C. Yildiz, A. Tuna, On common fixed points in Menger probabilistic metric spaces, Int. J. Contemp. Math. Sciences 2 (2007) 383 - 391.

[21] Shobha Jain, Shishi Jain, and Lal Bahdhur, A common fixed point theorem for a sequence of maps in a generalized Menger space, East Asian Math. J. 24 (2008), No. 4, pp. 359368

[22] M.S. Chauhana, Dheeraj Aheereb, Bharat Singhc, Some Fixed Point Theorems Using n-property in Menger Space, Int. J. of Emerging Research in Management and Technology, 2:7 (2013).

[23] K. Menger, Untersuchungen über allgemeine, Math. Annalen 100 (1928) 75–163.

[24] E. W. Chittenden, On the equivalence of ecart and voisinage, Trans. Amer. Math. Soc. 18 (1917) 161–166.

[25] W. A. Wilson, On semi-metric spaces, Amer. J. Math. 53 (1931) 361–373.

[26] M. Cicchese, Questioni di completezza e contrazioni in spazi metrici generalizzati, Boll. Un. Mat. Ital. 13-A (5) (1976) 175–179.

[27] J. Jachymski, J. Matkowski and T. Światkowski, Nonlinear contractios on semimetric spaces, J. Appl. Anal. 1 (1995), 125–134.

[28] T. L. Hicks and B. E. Rhoades, Fixed point theory in symmetric spaces with applications to probabilistic spaces, Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications, 36 (1999) 331–334.

[29] M. Aamri and D. El Moutawakil, Common fixed points under contractive conditions in symmetric spaces, Appl. Math. E-Notes 3 (2003), 156–162.

[30] J. Zhu, Y. J. Cho, S. M. Kang, Equivalent contractive conditions in symetric spaces, Comp. Math. Appl. 50 (2005) 1621–1628.

[31] D. Miheţ, A note on a paper of Hicks and Rhoades, Nonlinear Analysis TMA, 65 (2006) 1411–1413.

[32] M. Imdad, J. Ali and L. Khan, Coincidence and fixed points in symmetric spaces under strict contractions, J. Math. Anal. Appl. 320 (2006) 352-360; corr.: J. Math. Anal. Appl. 329 (2007) 752.

[33] I. D. Aranđ elović, D. J. Kečkić, Symmetric spaces approach to some fixed point results, Nonlinear Analysis 75 (2012), 5157-5168.

[34] S. Alshehri, I. Aranđelović, N. Shahzad, Symmetric Spaces and Fixed Points of Generalized Contractions, Abstract and Applied Analysis, vol. 2014, Art. ID 763547, 8 pages, 2014. doi:10.1155/2014/763547

[35] B. T. Sims, Some properties and generalizations of semi-metric spaces, doktorska disertacija, Iowa State University (1962).

[36] S. H. Cho, G. Y. Lee and J. S. Bae, On coincidence and fixed-point theorems in symmetric spaces, Fixed Point Theory and Applications, Volume 2008 (2008) Article ID 562130, 9 pages.

[37] S. Lipschutz, General Topology, Mc Grow-Hill, New York 1965.

[38] W. A. Sutherland, Introduction to Metric and Topological spaces, Oxford University Press, Oxford 2005.

[39] V. M. Sehgal, On fixed and periodic points for a class of Mappings, J. London Math. Soc. 5 (1972), 571-576.

[40] V. Kilibarda, Fiksne tačke i iterativni nizovi, doktorska disertacija, Kosovska Mitrovica 2007.

[41] K. Kuratowski, Sur les espaces completes, Fund. Math. 15 (1930), 301-309.

[42] L. Pasicki, On the measure of non-compactness, Comment. Math. Prace Mat. **21** (1979), 203–205.

[43] G. Darbo, Punti uniti in transformazioni a condominio non compatto, Rend. Sem. Math. Univ. Padova 24 (1955) 84-92.

[44] M. Furi, A. Vignoli, A fixed point theorem in complete metric spaces, Boll. U. M. I. 4 (1969), 505–509.

[45] A. Meir, E. Keeler, A theorem on contraction mappings, J. Math. Anal. Appl., 28(1969), 326-329.

[46] F. E. Browder, On the convergence of successive approximations for nonlinear functional equa- tions, Indag. Math. (N.S.), 30(1968), 27-38.

[47] D. W. Boyd, J. S. Wong, On nonlinear contractions, Proc. Amer. Math. Soc., 20(1969), 458-464.

[48] Lj. B. Ćirić, A new fixed point theorem for contractive mapping, Publ. de l'Institut Math. Nouvelle Ser., 30(44)(1981), 25-27.

[49] K. Jha, Common fixed point theorem for weakly compatible non-continuous mappings, Thai J. Math., 5(2007), 191-197.

[50] G. Jungck, K.B. Moon, S. Park, B.E. Rhoades, On generalizations of Meir-Keeler type contraction maps, Corrections, J. Math. Anal. Appl., 180(1993), 221-222.

[51] R. P. Pant, P. C. Joshi, V. Gupta, A Meir-Keeler type fixed point theorem, Indian J. Pure Appl. Math., 32(2001), 779-787.

[52] B. E. Rhoades, S. Park, K. B. Moon, On generalizations of Meir-Keeler type contraction maps, J. Math. Anal. Appl., 146(1990), 482-494.

[53] K. Jha, R. P. Pant, S. L. Singh, Common fixed points for compatible mappings in metric spaces, Radovi Math., 12(2003), 107-114.

[54] G. Jungck, H. K. Pathak, Fixed Points via Biased maps, Proc. Amer. Math. Soc., 123(1995), 2049-2060.

[55] G. Jungck, Compatible mappings and common fixed points, Internat. J. Math. Math. Sci., 16(1986), 771-779.

[57] R. P. Pant, A new common fixed point principle, Soochow J. Math., 27(2001), 287-297.

[58] R. P. Pant, Meir-Keeler type fixed point theorems and dynamics of functions, Demonstratio Math., 35(2003), 199-206.

[59] I. H. N. Rao, K. P. R. Rao, Generalizations of fixed point theorems of Meir and Keeler type, Indian J. Pure Appl. Math., 16(1985), 1249-1262.

[60] F. E. Browder, Nonlinear mappings of non-expansive and accretive type in Banach spaces, Bull. Amer. Math. Soc. 73 (1967) 875882.

[61] T. Kato, Nonlinear semi-groups and evolution equations, J. Math. Soc. Japan 1819 (1967) 508-520.

[62] Lj. B. Ćirić and J. S. Ume, Iterative processes with errors for nonlinear equations. Bull. Austral. Math. Soc. 69 (2004) 177-189.

[63] S. S. Chang, Y. J. Cho, B. S. Lee, J. S. Jung, and S. M. Kang, Iterative approximations of fixed points and solutions for strongly accretive and strongly pseudo-contractive mappings in Banach spaces. J. Mat. Anal. Appl. 224 (1998)149165.

[64] S. Ishikawa, Fixed points and iteration a nonexpansive mapping in a Banach space, Proc. Amer. Math. Soc. **59** (1976) 465–71.

[65] W. A. Kirk, Krasnoselskii's iteration process in hyperbolic spaces, Numer. Func. Anal. Optim. **4** (1982), 371–381.

[66] C. E. Chidume, An iterative process for nonlinear Lipschitzian strongly accretive mappings in Lp -spaces. J. Math. Anal. Appl. 151 (1990) 453461.

[67] C. E. Chidume, Approximation of fixed points of strongly pseudo-contractive mappings. Proc. Amer. Math. Soc. 120 (1994) 545551.

[68] C. E. Chidume (1995). Iterative solution of nonlinear equations with strongly accretive operators. J. Math. Anal. Appl. 192:502518.

[69] L. Deng (1993). An iterative process for nonlinear Lipschitzian and strongly accretive mappings in uniformly convex and uniformly smooth Banach spaces. Acta Appl. Math. 32:183196.

[70] L. Deng (1993). On Chidumes open questions. J. Math. Anal. Appl. 174:441449.

[71] L. Deng and X. P. Ding (1995). Iterative approximation of Lipschitz strictly pseudo-contractive mappings in uniformly smooth Banach spaces. Nonlinear Anal. 24:981987.

[72] K. K. Tan and H. K. Hu (1993). Iterative solutions to nonlinear equations of strongly accretive operators in Banach spaces. J. Math. Anal. Appl. 178:921.

[73] V. M. Sehgal, Some fixed point theorems in functional analysis and probability, doktorska disertacija, Wayne State University 1966.

[74] H. Shervood, Complete Probabilistic Metric Spaces, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie. Geb. 20 (1971), 117-128.

[75] V. M. Sehgal, A. T. Bharucha-Reid, Fixed points of contractions mappings on probabilstic metric spaces, Math. systems theory, 6 (1972), 97-102.

[76] V. Istratescu, I. Sakuiu, Fixed points theorems for contraction mappings on probabilistic metric spaces, Rev. Roum. Math. Pures Appl. 18 (1973) 1375 -1390.

[77] G. Bocsan, On some fixed point theorem in PM spaces, Math. Balc. 4 (1974), 67-70.

[78] G. Bocsan, On some fixed point theorems in random normed spaces, Sem. Teor. Funct. Univ. Timisoara 13 (1974).

[79] Lj. Ćirić, On fixed points of generalized contractions on probabilistic metric spaces, Publ. Inst. Math. 18 (32), 1975, 71-78.

[80] A. T. Bharucha-Reid, Fixed point theorems in probabilistic analysis, Bull. Amer. Math. Soc. 82 (1976), 641-657.

[81] Troy Hicks, Fixed point theory in in probabilitic metric spaces, Univ. N. Sad. Zb. Rad. Prirod. Mat. Fak. Ser. Mat. 13 (1983) 63-72.

[82] R. Tardiff, Contraction maps on probabilistic metric spaces, J.Math.Anal.Appl. 165:2 (1992),517-523.

[83] O. Hadžić A fixed point theorem in Menger spaces, Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.) 26(40) (1979), 107–112.

[84] B. Schweizer, A. Sklar and E. Thorp, The metrization of statistical metric spaces, Pacific J. Math. 10 (1960), 673-675.

[85] S. L. Singh i B. D. Pant, Fixed point theorems for commuting mappings in probabilistic metric spaces, Honam J. Math. 5 (1983) 139-150.

[86] B. M. L. Tivari i B. D. Pant Fixed points of a pair of mappings in probabilistic metric spaces, Jnanabha 13 (1983), 13-25.

[87] Rajko Dedejić, Nikola Sarapa, On common fixed point theorems for commuting mappings on Menger spaces, Radovi matematički 4 (1988), 269-278.

[88] Rajko Dedejić, Nikola Sarapa, On common fixed point theorem for three mappings on Menger spaces, Math. Japonica 34, No. 6 (1989) 919-923.

[89] K. P. Chamola, R. C. Dimri, B. D. Pant, On nonlinear cotractions on Menger spaces, Ganita 39 (1988) 49-54.

[90] B. S. Tuteja, Common fixed point theorems of commuting mappings in probabilistic metric and uniform spaces, J. Indian Acad. Math. 11 (1989), no. 2, 99-105.

[91] S. N. Mishra, Common fixed points of compatible mappings in PM-spaces. Math. Japon. 36:2 (1991), 283–289.

[92] R. Vasuki, A fixed point theorem for a sequence of maps satisfying a new contraction type condition in Menger spaces, Math. Japonica 35, No.6 (1990) 1099-1102.

БИОГРАФИЈА

Мр Марина Миловановић - Аранђеловић, дипломирани математичар, је рођена у Београду, 15. фебруара 1969. године. Основну и средњу школу је завршила у Великој Плани. У току школовања је учествовала на више републичких и савезних такмичења из математике и физике. На Математички факултет у Београду се уписала 1987. године а дипломирала је 30. октобра 1991. године. Магистрирала је 20. октобра 1998. године на Математичком факултету у Београду, са темом „Ставови о непокретним тачкама у вероватносним метричким просторима''. За асистента приправника, за предмет Математика, на Машинском факултету у Београду изабрана је 15. фебруара 1992. године. У звање аситента на истом Факултету, изабрана је 1998. Школске 1993/94, и 1996/97. године била је на породиљским одсуствима. Поред магистарског рада, објавила је 10 научних радова (од тога 8 као коаутор) и учествовала је са саопштењима на 4 међународна научна скупа. Радила је на два научна пројекта из области математичких наука. У току рада на Машинском факултету (1992-2012) држала је вежбе из Математике 1, Математике 2 и Математике 3. Од 2014. запослена је на Високој инжењерској школи струковних студија Техникум Тауруним у Земуну, у звању предавача за предмет Математика.

Прилог 1.

Изјава о ауторству

Потписани-а Марина Миловановић - Аранђеловић

број уписа ______________________

Изјављујем

да је докторска дисертација под насловом

Пресликавања контрактивног типа и њихове примене у нелинеарној анализи

- резултат сопственог истраживачког рада,
- да предложена дисертација у целини ни у деловима није била предложена за добијање било које дипломе према студијским програмима других високошколских установа,
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио/ла ауторска права и користио интелектуалну својину других лица.

Потпис докторанда

У Београду, 23. 7. 2016.

Марина Миловановић-Аранђеловић

Прилог 2.

Изјава о истоветности штампане и електронске верзије докторског рада

Име и презиме аутора Марина Миловановић- Аранђеловић

Број уписа ______________________

Студијски програм ______________________

Наслов рада

Пресликавања контрактивног типа и њихове примене у нелинеарној анализи

Ментор др Драгољуб Кечкић, ванредни професор Математичког факултета

Потписани Марина Миловановић- Аранђеловић

изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предао/ла за објављивање на порталу **Дигиталног репозиторијума Универзитета у Београду.**

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Београду.

Потпис докторанда

У Београду, 23. 7. 2016.

Марина Миловановић-Аранђеловић

Прилог 3.

Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом:

Пресликавања контрактивног типа и њихове примене у нелинеарној анализи

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство
2. Ауторство - некомерцијално
3. Ауторство – некомерцијално – без прераде
4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима
5. Ауторство – без прераде
6. Ауторство – делити под истим условима

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци, кратак опис лиценци дат је на полеђини листа).

Потпис докторанда

У Београду, 23. 7. 2016.

Марина Милованoвић-Арандјеловић