

Универзитет у Београду
Машински факултет

Владимир М. Јазаревић

Оптимизација аероакустичних феномена
код узгонских површина

докторска дисертација

Београд, 2016

Комисија за преглед и одбрану:

Ментор:

Проф. др Бошко Рашуо,

Универзитет у Београду, Машински факултет

Проф. др Александар Бенгин,

Универзитет у Београду, Машински факултет

Проф. др Александар Вег,

Универзитет у Београду, Машински факултет

Проф. др Марко Милош,

Универзитет у Београду, Машински факултет

др Жарко Стевановић,

Универзитет у Београду, Институт за нуклеарне н

Датум одбране:

2016.

“Захваљујем се превасходно породици која је истрпела највећи терет израде докторске дисертације, где превасходно мислим на моју вољену жену Наталију и моју ћеркицу Милицу, а њима уз раме су мој Отац Милош и брат Горан. Захвалио бих се онда професорима са политехничког универзитета у Каталунји Сантиаго Бадији и Рамон Кодини који су ме увели у свет нумерике, као и свим колегама са којима сам тамо сарађивао, где бих посебно поменуо Рамона Планаса. Посебну захвалност бих издвојио мом ментору професору Бошку Рашио који је увек био ту за мене. Поред тога захвалио бих се и компанији "ЕДеПро" на челу са директором професором Браниславом Јојићем која су ме својски подржали у изради дисертације. На крају највише бих се захвалио својој мајци која више није међу нама, којој и посвећујем овај докторат.”

Владимир Јазаревић

Предговор

Овај рад је настао као део великог међународног пројекта VALIANT (Validation and Improvement of Airframe Noise prediction Tools) који је под својим окривљем сакупио водеће истраживачке центре у области нумеричких метода и прорачунске механике на тлу Европе и Русије. Европска агенција за ваздухопловство је препознала буку као један од већих проблема нормалног живота за људе који живе у областима око аеродрома. Водећи се жељом да се до 2020 године редукује бука коју генерише авион за 50 %. Десет чланица Европске Уније и једанеста Русија су у пројекту VALIANT за циљ имале да се направи најбоља нумеричка метода за предикцију звука генерисаног са узгонских површина и делова авиона у циљу редуковања буке приликом слетања и полетања посебно у деловима око аеродрома. Нумеричке методе су препознате као добар алат у дизајну и предикцији и као неопходан алат за постизање задатог циља. Као део екипе која је представљала CIMNE (International Center for Numerical Methods in Engineering) чији је био задатак да се као финални продукт понуди најбоља нумеричка шема и као таква имплементира у функционални софтвер. Истраживања које је спроведено на тему аероакустике и напредне методе стабилизације нумеричких метода за потребе симулације аероакустике настао је рад који је пред вама.

Београд, мај 2016.

Владимир М. Јазаревић

Садржај

Апстракт	ix
Abstract	xi
Листа слика	xii
Листа табела	xxv
Акроними	xxvi
1 Увод	1
1.1 Преглед и критичка анализа претходних истраживања	4
1.2 Увод у аероакустику и прорачунску аероакустику и опис проблема истраживања	8
1.2.1 Опис проблема истраживања	10
1.3 Истраживачки циљеви дисертације и примењена методологија	12
1.4 Преглед садржаја дисертације	14
2 Аероакустика и прорачунска аероакустика	19
2.1 Увод	19
2.2 Гринова функција, Кирхоф-Хелмхолцова формулација и Фраунхоферова апроксимација	24
2.3 Монополони, диполови и квадриполони	28
2.4 Лајтхилова (Lighthill) акустична аналогија	32
2.5 Присуство граница-једначина Ffowcs-Williams-Hawkings-a	37
2.6 Методологија за решавање аероакустичних проблема	40
2.6.1 Симулација прорачунске механике флуида	41
2.6.2 Акустични извори	43
2.6.3 Прорачун акустичног поља	44
3 Нумеричко моделирање турбулентног струјања и развој Ортогоналне Сабгрид скејл стабилизационе методе са динамичким праћењем малих вртлога (Orthogonal Subgrid scale stabilization method with dynamical subscales)	46
3.1 Увод	47
3.2 Навије-Стоксова једначина	53
3.2.1 Јака или диференцијална формулација	53

3.2.2	Слаба или варијациона формулација	54
3.2.3	Теорема постојања и јединствености решења	55
3.3	Турбуленција, турбулентна транзиција и зависност од Рејнолдсовог броја-Re	57
3.3.1	Бездимензиона Навије-Стоксова једначина	57
3.3.2	Турбулентна струјања и теорија Комогорова	59
3.3.3	Релација између $K41$ и Навије-Стоксове једначине	62
3.4	LES-Симулација великих вртлога	65
3.4.1	Филтрирана Навије-Стоксова једначина	65
3.4.2	Недостаји LES-a	67
3.4.3	Одговарајућа апроксимација Навије-Стоксове једначине	68
3.5	Дефиниција варијационог проблема	71
3.5.1	Варијациона или слаба формулација Навије-Стоксове једначине	73
3.6	Галеркинова апроксимација методом коначних елемената	74
3.6.1	Временска дискретизација Навије-Стоксове једначине	74
3.6.2	Дискретна Галеркинова апроксимација варијационе формулације	76
3.7	SGS стабилизациона метода	77
3.7.1	SGS стабилизациона метода за Навије-Стоксову једначину	78
3.7.2	Физиклане карактеристике формулације	82
3.8	Једначина енергетског баланса	85
3.8.1	Једначина енергетског баланса за Навије-Стоксову једначину	85
3.8.2	Једначина енергетског баланса за LES модел	87
3.8.3	Једначина енергетског баланса за Ортогонални сабгрид скејл стабилизациони модел	88
3.9	Енергетски трансфер малих величина у Ортогоналној сабгрид скејл стабилизационој методи коначних елемената	93
3.9.1	Стабилизациони параметри за велике Рејнолдсове бројеве	93
3.9.2	Решење добијено методом коначних елемената за поље притиска и брзине и L^2 пројекција	95
3.10	Ортогонална сабгрид скејл метода са динамичким праћењем малих величина	100
3.10.1	Дисипативна структура и могућност моделирања повратне енергије малих величина	103
3.10.2	Моделирање узајамне енергетске интеракције између малих и великих величина - Backscatter	104
4	Прорачун акустичних извора и Директна Фуријеова Трансформација	107
4.1	Увод	107
4.2	Прорачун акустичних извора	108
4.3	Реални DFT користећи комплексни DFT	111
4.4	Како FFT функционише	113
4.5	Брзина и прецизност поређења	118
4.6	Имплементација Директне Фуријеове трансформације у други корак методологије	121
5	Прорачун и симулација акустичног поља притиска	124
5.1	Увод	124
5.2	Стационарна и конвектна Хелмхолцова једначина	127

5.2.1	Таласна једначина и конвектна таласна једначина	127
5.2.2	Хелмхолцова једначина и конвектна Хелмхолцова једначина . .	128
5.2.3	Гранични услови за конвектну Хелмхолцову једначину и јака диференцијална формулација	131
5.3	Нумеричка апроксимација коршћењем Галеркинове методе	134
5.3.1	Континуална варијациона формулација	134
5.3.2	Дискретна варијациона формулација	135
5.3.3	Добро постављање математичког проблема и теорема конвергенције	136
5.3.4	Добро постављање позитивно дефинисаног математичког проблема	137
5.3.5	Добра формулација подређених форми	138
5.3.6	Конвергенција позитивно дефинисане форме	141
5.3.7	Конвергенција недефинисаних форми	141
5.3.8	Добро постављање и конвергенција Хелмхолцове и конвектне Хелмхолцове једначине	143
5.3.9	Варијациона или слаба формулација нехомогене Хелмхолцове једначине	145
5.4	Једнодимензиона хомогена Хелмхолцова једначина	145
5.4.1	Дефиниција "pollution" грешке	149
5.4.2	Једнодимензиона дисперзиона анализа	149
5.5	Дводимензиона хомогена Хелмхолц једначина	151
5.6	Дводимензиона нехомогена Хелмхолцова једначина	154
5.7	SGS стабилизациона метода за нехомогену Хелмхолцову једначину . .	157
5.7.1	Дефинисање стабилизационог параметра	157
6	Симулација Аероакустике на узгонским површинама и компарација нумеричких модела	167
6.1	Увод	168
6.2	Аероакустична симулација пројектила ALAS	169
6.2.1	Симулација поља брзине, турбуленције као и притиска добијени LES-Смагоринским моделом за пројекцију пројектила у XZ равни за различите инстанце времена	174
6.2.2	Временско праћење брзине у одређеним тачкама прорачунксе мреже добијени LES-Смагоринским моделом за пројекцију пројектила у XZ равни	176
6.2.3	Поље акустичних извора добијени LES-Смагоринским моделом за пројекцију пројектила у XZ равни	177
6.2.4	Симулација поља брзине, турбуленције као и притиска добијени LES-Смагоринским моделом за пројекцију пројектила на XY раван	179
6.2.5	Временско праћење брзине у одређеним тачкама прорачунксе мреже добијени LES-Смагоринским моделом за пројекцију пројектила у XY равни	181
6.2.6	Поље акустичних извора добијени LES-Смагоринским моделом за пројекцију пројектила у XY равни	182
6.2.7	Симулација поља брзине, турбуленције и притиска добијени методом Ортогоналне SGS са динамичким праћењем малих величина за пројекцију пројектила у XZ равни	184

6.2.8	Временско праћење брзине у одређеним тачкама прорачунксе мреже добијени методом Ортогонална SGS са динамичким праћењем малих величина за пројекцију пројектила у XZ равни	186
6.2.9	Поље акустичних извора добијени методом Ортогонална SGS са динамичким праћењем малих величина за пројекцију пројектила у XZ раван	187
6.2.10	Симулација поља брзине, турбуленције и притиска добијени методом Ортогонална SGS са динамичким праћењем малих величина за пројекцију пројектила на XY раван	189
6.2.11	Временско праћење брзине у одређеним тачкама прорачунксе мреже добијени методом Ортогонална SGS са динамичким праћењем малих величина за пројекцију пројектила на XY раван	191
6.2.12	Поље акустичних извора добијени методом Ортогонална SGS са динамичким праћењем малих величина за пројекцију пројектила на XY раван	192
6.2.13	Акустична симулација са акустичним изворима добијени LES-Смагорински методом и изворима добијеним Ортогоналном SGS методом са динамичким праћењем малих величина	194
6.3	Аероакустична симулација стајног трапа приликом слетања и полетања	195
6.3.1	Симулација поља брзине, турбуленције и притиска добијени LES - Смагоринским моделом	199
6.3.2	Временско праћење брзине у одређеним тачкама прорачунксе мреже добијени LES-Смагорински моделом	201
6.3.3	Поље акустичних извора добијени методом LES - Smagorinsky	202
6.3.4	Симулација поља брзине, турбуленције и притиска добијени Ортогоналном SGS методом са динамичким праћењем малих величина	204
6.3.5	Временско праћење брзине у одређеним тачкама прорачунксе мреже добијени Ортогонална SGS методом са динамичким праћењем малих величина	207
6.3.6	Поље акустичних извора добијени методом Ортогонална SGS са динамичким праћењем малих величина	208
6.4	Аероакустична симулација аеропрофила са отклонаом закрилца	210
6.4.1	Симулација поља брзине, турбуленције и притиска добијени методом LES-Смагорински	214
6.4.2	Временско праћење брзине у одређеним тачкама прорачунксе мреже добијени методом LES - Smagorinsky	216
6.4.3	Поље акустичних извора добијени методом LES-Смагорински	218
6.4.4	Акустична симулација са акустичним изворима добијени LES-Смагорински методом	220
6.4.5	Симулација поља брзине, турбуленције и притиска добијени Ортогоналном SGS методом са динамичким праћењем малих величина	221
6.4.6	Временско праћење брзине у одређеним тачкама прорачунксе мреже добијени Ортогоналном SGS методом са динамичким праћењем малих величина	223
6.4.7	Поље акустичних извора добијени методом Ортогонална SGS са динамичким праћењем малих величина	225

6.4.8	Акустична симулација за акустичне изворе добијене са акустичним изворима добијеним Ортогоналном SGS методом са динамичким праћењем малих величина	227
7	Закључак	228
7.1	Будући рад и даљи правци истраживања	232
A	Matlab код имплементације Ортогоналне сабгрид скејл метода са динамичким праћењем малих величина	234
B	Фортран код имплементације прорачуна акустичних извора	277
C	Matlab код имплементације акустичних симулација	282
	Литература	301

Оптимизација аероакустичних феномена код узгонских површина

Апстракт

Бука чији је узрочник авион приликом полетања и слетања је један од главних проблема за људе који живе у околини аеродрома. Један део буке генерише мотор авиона док други део генеришу аеродинамичке површине и остале компоненте авиона. Прављење веродостојне симулације аероакустичног феномена методом коначних елемената може да помогне да се сагледа комплексност проблема као и да се ради на томе да се у будућности пројектују аеродинамичке узгонске површине које ће стварати мању буку. Акустичне изворе ствара турбулентно струјање које генеришу аеродинамичке површине, ти извори стварају варијацију притиска које наше уво препознаје као звук. Да би тачно одредили локацију и интензитет звука прво је веома битно веродостојно презентовати турбулентно струјање а затим пропација акустичних таласа кроз ваздушни домен.

Циљ тезе је да математичким и нумеричким моделирањем што веродостојније представи векторско поље брзина турбулентног струјања. Са друге стране исти математички модели ће бити употребљени и за пропацију притиска у средини. Пошто дато струјање захтева велики број елемената и чворова који се користе за потребе методе коначних елемената циљ ће бити да се минимизује време и меморија компјутера потребна за реализацију симулације.

У првој фази испитивања прво ће бити разматрани модели турбулентног струјања који се користе углавном за овај тип проблема (DNS–Direct Numerical Solution, RANS–Reynolds Averaged Navier-Stokes, LES–Large Eddy Simulation). У следећој фази ће бити извршено математичко и нумеричко моделирање Ортогоналне Сабгри скејл стабилизационе методе са динамичким праћењем малих величина. Даље следи имплементација у софтвер претходно наведене стабилизационе методе и њено тестирање као и компарација са постојећим методама. Прорачун акустичних извора или Лајтхиловог тензора је предмет следеће фазе где је трансформација из временског домена у фреквентни домен извршена директном Фуријеовом трансформацијом. Овим приступом је убрзана трансформација као и смањење компјутерске меморије потребне за прорачун. Математичко и нумеричко моделирање пропације таласа притиска у прорачунском домену биће извршено истим стабилизационим методама као и турбулентно струјање. У финалној фази истраживања су урађена испитивања на стварним проблемима ради верификације и компарације метода које су презентоване у докторској тези. На крају је изведен закључак са предлозима за даљи рад.

Резултати добијени истраживањем ће показати да показана методологија даје бољу алокацију и јачи интезитет акустичних извора. Различит приступ у моделирању турбулентног струјања која посебну пажњу даје малим величинама које се не могу решити прорачунском мрежом обезбеђују добру дистрибуцију енергије у подручју малих вртлога, као и повратни смер дистрибуције енергије са малих вртлога на оне велике.

Кључне речи: Аероакустика, Бука, Директна Фуријеова Трансформација, Нехомогена Хеллмхолц једначина, Лајтхилова аналогија, Ортогонална Сабгрид скејл стабилизациона метода са динамичким праћењем малих величина.

Научна област: Машинство

Ужа научна област: Ваздухопловство

UDK 629.7.534.83.519.6(043.3)523.517.4.519.6(043.3)

Optimization of Aeroacoustic phenomena around aerodynamic surfaces

Abstract

Noise which is generated by the aircraft during the take off and landing is one of the main problems for the people who live in area around airport. One part of the noise is generated by the turbojet engine and another part is generated by the aerodynamic surfaces and other components of airframe. Development and production of good simulation tool with finite element method can help to understand complexity of the problem and to develop in the future aerodynamic parts of the aircraft which could produce lower level of noise. Acoustic sources are generated by the turbulent flow passing aerodynamic parts of the aircraft and these sources generate fluctuation of the pressure in the domain what our ear recognize as sound. If it is wanted to accurately predict location and intensity of the sound it has first to predict very accurately turbulent flow what is one challenge and than simulate propagation of pressure waves in domain.

The goal of the thesis is to numerically and mathematically model vector field of velocity for the turbulent flow. From another side also the same approach will be used for pressure wave propagation. Aeroacoustic simulation using finite element method overall need so many elements and time for simulation it would be also suggested the approach how to reduce the time and memory usage for simulation.

In first phase it would be investigated numerical approaches to simulate turbulent flows. It is mainly used DNS-Direct Numerical Simulation, RANS-Reynolds Averaged Navier-Stokes, LES-Large Eddy Simulation. In next phase it would be developed mathematical and numerical modeling of stabilized Orthogonal Subgrid scale method with dynamical subscales. Next it would be presented short implementation in software proposed methodology and then their testing and also comparison with existed methods.

Calculation of acoustic sources or Lighthill's tensor will be subject of next phase where transformation from time domain to frequency domain is done through Direct Fourier transformation. Mathematical and numerical modeling of pressure waves will be done with same methods as for turbulent flow. In final stage of investigation it would be done some real simulation in 2D to verify and compare of proposed methodology with existing ones. In the end it would be given the conclusion and suggestion for future work.

Result obtained from the investigation will show that proposed methodology will give better and stronger representation of the acoustic sources. Different approach of turbulent modeling affecting small scales and their filtration in the solution of resolvable scale

captured by the finite element mesh recovering good energy distribution in the area of small eddies and also give opportunity to model backscatter.

Key words: Aeroacoustics, Direct Fourier transformation, Inhomogeneous Helmholtz equation, Lighthill's analogy, Noise, Orthogonal Subgrid Scale Stabilization method with dynamical subscales

Scientific discipline: Mechanical engineering

Scientific subdiscipline: Aerospace

Листа слика

1.1	Симулација аероакустичне буке око авиона [CD-adapco]	4
1.2	Дистрибуција вртлога иза авиона	8
1.3	Авион пробија звучни зид	9
1.4	Нумеричка симулација аероакустике око крила авиона	10
1.5	Процентуална расподела извора буке на авиону [VALIANT извештај]	12
2.1	Апроксимација акустичног поља далеко од извора	28
2.2	Изглед монопола са позитивним максимумом	29
2.3	Изглед монопола са негативним максимумом	29
2.4	Изглед дипола као расподела два монопола који стоје један поред другог на малом растојању и супротних знакова	30
2.5	Изглед дипола као расподела два монопола који стоје један више другог на малом растојању и супротних знакова	30
2.6	Лонгитудални квадрипол	30
2.7	Латерални квадрипол	30
2.8	Методологија прорачуна аероакустичне симулације	41
3.1	Промена карактера турбулентног струјања са повећањем Рејнолдсовог броја	59
3.2	Енергетска каскада у фунцији таласних бројева	61
3.3	Разлагање променљивих на мале и велике величине	65
3.4	Ортогонална пројекција на простор решења добијен методом коначних елемената	81
4.1	Шематски приказ расподеле акустичних извора и њихова пропација са акустичним таласима	110
4.2	Поређење реалног и комплексног ДФТ-а.	111
4.3	Слагање ФФТ-а	114
4.4	ФФТ алгоритам "bit reversal sorting"	114
4.5	Сједињење ФФТ-а	116
4.6	Дијаграм комбиновања FFT-а; оператор S значи да се сигнал множи синусоидом за одговарајућу фреквенцију	117
4.7	ФФТ лептир	117
4.8	ФФТ дијаграм [Numerical schemes for Fortran-књига]	118
4.9	Време егзекуције за рачунање ДФТ-а. Време је приказано за Пентиум процесор на 100MHz.[Numerical schemes for Fortran-књига]	120
4.10	Прецизност ДФТ-а. Поред ФФТ-овог бржег рачунања ДФТ-а од корелационог метода, рачуна га и са мањом грешком [Numerical schemes for Fortran-књига]	120

4.11	Дистрибуција акустичних извора апсолутно решење	123
4.12	Дистрибуција акустичних извора имагинарни део решења	123
4.13	Дистрибуција акустичних извора реални део решења	123
5.1	Реално део егзактног, интерполационог и Галеркиновог решења Хелмхолцове једначине за $\omega = 10$	146
5.2	Имагинарни део егзактног, интерполационог и Галеркиновог решења Хелмхолцове једначине за $\omega = 10$	146
5.3	Реално део егзактног, интерполационог и Галеркиновог решења Хелмхолцове једначине за $\omega = 20$	147
5.4	Имагинарни део егзактног, интерполационог и Галеркиновог решења Хелмхолцове једначине за $\omega = 20$	147
5.5	Log-Log график тоталне и оптималне реалтивне грешке у H^1 норми са $k_0 = 50$	148
5.6	Реални део егзактног и решења добијеног методом коначних елемената за $k_0 = 10$ и $\theta = 45^\circ$ у изометријском погледу	152
5.7	Реални део егзактног и решења добијеног методом коначних елемената за $k_0 = 10$ и $\theta = 45^\circ$ у погледу одозгоре	152
5.8	Реални део егзактног и решења добијеног методом коначних елемената за $k_0 = 50$ и $\theta = 45^\circ$ у изометријском погледу	153
5.9	Реални део егзактног и решења добијеног методом коначних елемената за $k_0 = 50$ и $\theta = 45^\circ$ у погледу одозгоре	153
5.10	Реални део егзактног и решења добијеног методом коначних елемената за $k_0 = 100$ и $\theta = 45^\circ$ у изометријском погледу	153
5.11	Реални део егзактног и решења добијеног методом коначних елемената за $k_0 = 50$ и $\theta = 45^\circ$ у погледу одозгоре	154
5.12	Акустични извори у прорачунском домену	155
5.13	Аналитичко решење за нехомогону Хелмхолцову једначину	155
5.14	Акустични извор типа монопол у прорачунском домену	156
5.15	Имагинарни део аналитичког решења нехомогене Хелмхолцове једначине	156
5.16	Имагинарни део решења методом коначних елемената нехомогене Хелмхолцове једначине	156
5.17	Реални део аналитичког решења нехомогене Хелмхолцове једначине	156
5.18	Реални део решења методом коначних елемената нехомогене Хелмхолцове једначине	156
5.19	Део прорачунске мреже са дефинисаном нотацијом за прорачун стабилизационог параметра	158
5.20	Реални део решења хомогене Хелмхолцове једначине са Ортогоналном SGS методом и таласним бројем $k_0 = 10$ и линарним елементима	163
5.21	Имагинарни део решења хомогене Хелмхолцове једначине са Ортогоналном SGS методом и таласним бројем $k_0 = 10$ и линарним елементима	164
5.22	Реални део решења хомогене Хелмхолцове једначине са Ортогоналном SGS методом и таласним бројем $k_0 = 20$ и линарним елементима	164
5.23	Имагинарни део решења хомогене Хелмхолцове једначине са Ортогоналном SGS методом и таласним бројем $k_0 = 20$ и линарним елементима	165
5.24	Реални део решења хомогене Хелмхолцове једначине са Ортогоналном SGS методом и таласним бројем $k_0 = 20$ и параболичним елементима	165

5.25	Имагинарни део решења хомогене Хелмхолцове једначине са Ортогоналном SGS методом и таласним бројем $k_0 = 20$ и параболичним елементима .	166
6.1	Локација буке на авиону	168
6.2	3D модел ALAS-a	170
6.3	3D модел Аласа са пресеком XY равни	170
6.4	3D модел Аласа са пресеком XZ равни	170
6.5	Дводимензиони прорачунски домен око Аласа са пројекцијом у XY равни	171
6.6	Дводимензиони прорачунски домен око Аласа са пројекцијом у XZ равни	171
6.7	Прорачунска мрежа домена око ракете у XZ равни	172
6.8	Чворови за временско праћење брзине у времену за случај ракете у XZ равни	172
6.9	Прорачунска мрежа домена око ракете у XY равни	172
6.10	Чворови за временско праћење брзине у времену за случај ракете у XY равни	172
6.11	Гранични услови да је брзина једнака нули на ободу ракете за симулацију Аласа са пројекцијом у XY равни	172
6.12	Гранични услови да је брзина једнака нули на ободу ракете за симулацију Аласа са пројекцијом у XZ равни	172
6.13	Гранични услови на ободу прорачунског домена за симулацију Аласа са пројекцијом у XY равни	173
6.14	Гранични услови на ободу прорачунског домена за симулацију Аласа са пројекцијом у XZ равни	173
6.15	Поље брзина око пројектила у XZ равни после 0.02 секунде добијени LES - Смагоринским моделом	174
6.16	Поље брзина око пројектила у XZ равни после 0.09 секунде добијени LES - Смагоринским моделом	174
6.17	Поље брзина око пројектила у XZ равни после 0.2 секунде добијени LES - Смагоринским моделом	174
6.18	Поље брзина око пројектила у XZ равни после 0.35 секунде добијени LES - Смагоринским моделом	174
6.19	Поље брзина око пројектила у XZ равни после 0,5 секунде добијени LES - Смагоринским моделом	174
6.20	Поље брзина око пројектила у XZ равни после 0.7 секунде добијени LES - Смагоринским моделом	174
6.21	Поље притиска око пројектила у XZ равни после 0.02 секунде добијени LES - Смагоринским моделом	175
6.22	Поље притиска око пројектила у XZ равни после 0.09 секунде добијени LES - Смагоринским моделом	175
6.23	Поље притиска око пројектила у XZ равни после 0.2 секунде добијени LES - Смагоринским моделом	175
6.24	Поље притиска око пројектила у XZ равни после 0.35 секунде добијени LES - Смагоринским моделом	175
6.25	Поље притиска око пројектила у XZ равни после 0.5 секунде добијени LES - Смагоринским моделом	175

6.26	Поље притиска око пројектила у ХZ равни после 0.7 секунде добијени LES - Смагоринским моделом	175
6.27	Временско праћење пројекције брзине на Х осу у чвору 21100) прорачунске мреже	176
6.28	Спектар фреквенци за пројекцију брзине на Х осу у чвору 21100 добијени ФФТ-ом	176
6.29	Временско праћење пројекције брзине на Х осу у чвору 14309 прорачунске мреже	176
6.30	Спектар фреквенци за пројекцију брзине на Х осу у чвору 14309 добијени ФФТ-ом	176
6.31	Временско праћење пројекције брзине на Y осу у чвору 21100 прорачунске мреже	177
6.32	Спектар фреквенци за пројекцију брзине на Y осу у чвору 14309 добијени ФФТ-ом	177
6.33	Временско праћење пројекције брзине на Y осу у чвору 14309 прорачунске мреже	177
6.34	Спектар фреквенци за пројекцију брзине на Y осу у чвору 14309 добијени ФФТ-ом	177
6.35	Поље акустичних извора дбијени LES-Смагоринским методом	178
6.36	Поље акустичних извора дбијени LES-Смагоринским методом	178
6.37	Поље акустичних извора дбијени LES-Смагоринским методом	178
6.38	Поље акустичних извора дбијени LES-Смагоринским методом	178
6.39	Поље акустичних извора дбијени LES-Смагоринским методом	178
6.40	Поље акустичних извора дбијени LES-Смагоринским методом	178
6.41	Поље брзина око пројектила у XY равни после 0.02 секунде добијени LES - Смагоринским моделом	179
6.42	Поље брзина око пројектила у XY равни после 0.09 секунде добијени LES - Смагоринским моделом	179
6.43	Поље брзина око пројектила у XY равни после 0.2 секунде добијени LES - Смагоринским моделом	179
6.44	Поље брзина око пројектила у XY равни после 0.35 секунде добијени LES - Смагоринским моделом	179
6.45	Поље брзина око пројектила у XY равни после 0.5 секунде добијени LES - Смагоринским моделом	179
6.46	Поље брзина око пројектила у XY равни после 0.7 секунде добијени LES - Смагоринским моделом	179
6.47	Поље притиска око пројектила у XY равни после 0.02 секунде добијени LES - Смагоринским моделом	180
6.48	Поље притиска око пројектила у XY равни после 0.09 секунде добијени LES - Смагоринским моделом	180
6.49	Поље притиска око пројектила у XY равни после 0.2 секунде добијени LES - Смагоринским моделом	180
6.50	Поље притиска око пројектила у XY равни после 0.35 секунде добијени LES - Смагоринским моделом	180
6.51	Поље притиска око пројектила у XY равни после 0.5 секунде добијени LES - Смагоринским моделом	180
6.52	Поље притиска око пројектила у XY равни после 0.7 секунде добијени LES - Смагоринским моделом	180

6.53	Временско праћење пројекције брзине на X осу у чвору 41567 прорачунске мреже	181
6.54	Спектар фреквенци за пројекцију брзине на X осу добијени ФФТ-ом за чвор 41567	181
6.55	Временско праћење пројекције брзине на X осу у чвору 21246 прорачунске мреже	181
6.56	Спектар фреквенци за пројекцију брзине на X осу добијени ФФТ-ом у чвору 21246	181
6.57	Временско праћење пројекције брзине на Y осу у чвору 41567 прорачунске мреже	182
6.58	Спектар фреквенци за пројекцију брзине на Y осу добијени ФФТ-ом у чвору 41567	182
6.59	Временско праћење пројекције брзине на Y осу у чвору 21246 прорачунске мреже	182
6.60	Спектар фреквенци за пројекцију брзине на Y осу добијени ФФТ-ом у чвору 21246	182
6.61	Поље акустичних извора добијени LES-Смагоринским методом-абсолютно решење	183
6.62	Поље акустичних извора добијени LES-Смагоринским методом-абсолютно решење	183
6.63	Поље акустичних извора добијени LES-Смагоринским методом-имагинарно решење	183
6.64	Поље акустичних извора добијени LES-Смагоринским методом-имагинарно решење	183
6.65	Поље акустичних извора добијени LES-Смагоринским методом-реално решење	183
6.66	Поље акустичних извора добијени LES-Смагоринским методом-реално решење	183
6.67	Поље брзина око пројектила у XZ равни после 0.02 секунде добијени Ортогоналном SGS методом са динамичким праћењем малих величина	184
6.68	Поље брзина око пројектила у XZ равни после 0.09 секунде добијени Ортогоналном SGS методом са динамичким праћењем малих величина	184
6.69	Поље брзина око пројектила у XZ равни после 0.2 секунде добијени Ортогоналном SGS методом са динамичким праћењем малих величина	184
6.70	Поље брзина око пројектила у XZ равни после 0.35 секунде добијени Ортогоналном SGS методом са динамичким праћењем малих величина	184
6.71	Поље брзина око пројектила у XZ равни после 0.5 секунде добијени Ортогоналном SGS методом са динамичким праћењем малих величина	184
6.72	Поље брзина око пројектила у XZ равни после 0.7 секунде добијени Ортогоналном SGS методом са динамичким праћењем малих величина	184
6.73	Поље притиска око пројектила у XZ равни после 0.02 секунде добијени Ортогоналним SGS моделом са динамичким праћењем малих величина	185
6.74	Поље притиска око пројектила у XZ равни после 0.09 секунде добијени Ортогоналним SGS моделом са динамичким праћењем малих величина	185
6.75	Поље притиска око пројектила у XZ равни после 0.2 секунде добијени Ортогоналним SGS моделом са динамичким праћењем малих величина	185
6.76	Поље притиска око пројектила у XZ равни после 0.35 секунде добијени Ортогоналним SGS моделом са динамичким праћењем малих величина	185

6.77	Поље притиска око пројектила у XZ равни после 0.5 секунде добијени Ортогоналним SGS моделом са динамичким праћењем малих величина	185
6.78	Поље притиска око пројектила у XZ равни после 0.7 секунде добијени Ортогоналним SGS моделом са динамичким праћењем малих величина	185
6.79	Временско праћење пројекције брзине на X осу у чвору 21100 прорачунске мреже	186
6.80	Спектар фреквенци за пројекцију брзине на X осу добијени ФФТ-ом у чвору 21100	186
6.81	Временско праћење пројекције брзине на X осу у чвору 14309 прорачунске мреже	186
6.82	Спектар фреквенци за пројекцију брзине на X осу добијени ФФТ-ом у чвору 14309	186
6.83	Временско праћење пројекције брзине на Y осу у чвору 21100 прорачунске мреже	186
6.84	Спектар фреквенци за пројекцију брзине на Y осу добијени ФФТ-ом у чвору 21100	186
6.85	Временско праћење пројекције брзине на Y осу у чвору 14309 прорачунске мреже	187
6.86	Спектар фреквенци за пројекцију брзине на Y осу добијени ФФТ-ом у чвору 14309	187
6.87	Поље акустичних извора добијени Ортогоналном SGS моделом са динамичким праћењем малих величина-абсолютно решење	188
6.88	Поље акустичних извора добијени Ортогоналном SGS моделом са динамичким праћењем малих величина-абсолютно решење	188
6.89	Поље акустичних извора добијени Ортогоналном SGS моделом са динамичким праћењем малих величина-имагинарно решење	188
6.90	Поље акустичних извора добијени Ортогоналном SGS моделом са динамичким праћењем малих величина-имагинарно решење	188
6.91	Поље акустичних извора добијени Ортогоналном SGS моделом са динамичким праћењем малих величина-реално решење	188
6.92	Поље акустичних извора добијени Ортогоналном SGS моделом са динамичким праћењем малих величина-реално решење	188
6.93	Поље брзина око пројектила у XY равни после 0.02 секунде добијени Ортогоналним SGS моделом са динамичким праћењем малих величина	189
6.94	Поље брзина око пројектила у XY равни после 0.09 секунде добијени Ортогоналним SGS моделом са динамичким праћењем малих величина	189
6.95	Поље брзина око пројектила у XY равни после 0.2 секунде добијени Ортогоналним SGS моделом са динамичким праћењем малих величина	189
6.96	Поље брзина око пројектила у XY равни после 0.35 секунде добијени Ортогоналним SGS моделом са динамичким праћењем малих величина	189
6.97	Поље брзина око пројектила у XY равни после 0.5 секунде добијени Ортогоналним SGS моделом са динамичким праћењем малих величина	189
6.98	Поље брзина око пројектила у XY равни после 0.7 секунде добијени Ортогоналним SGS моделом са динамичким праћењем малих величина	189
6.99	Поље притиска око пројектила у XY равни после 0.02 секунде добијени Ортогоналним SGS моделом са динамичким праћењем малих величина	190
6.100	Поље притиска око пројектила у XY равни после 0.09 секунде добијени Ортогоналним SGS моделом са динамичким праћењем малих величина	190

6.101	Поље притиска око пројектила у XY равни после 0.2 секунде добијени Ортогоналним SGS моделом са динамичким праћењем малих величина	190
6.102	Поље притиска око пројектила у XY равни после 0.35 секунде добијени Ортогоналним SGS моделом са динамичким праћењем малих величина	190
6.103	Поље притиска око пројектила у XY равни после 0.5 секунде добијени Ортогоналним SGS моделом са динамичким праћењем малих величина	190
6.104	Поље притиска око пројектила у XY равни после 0.7 секунде добијени Ортогоналним SGS моделом са динамичким праћењем малих величина	190
6.105	Временско праћење пројекције брзине на X осу у чвору 41567 прорачунске мреже	191
6.106	Спектар фреквенци за пројекцију брзине на X осу добијени ФФТ-ом у чвору 41567	191
6.107	Временско праћење пројекције брзине на X осу у чвору 21246 прорачунске мреже	191
6.108	Спектар фреквенци за пројекцију брзине на X осу добијени ФФТ-ом у чвору 21246	191
6.109	Временско праћење пројекције брзине на Y осу у чвору 41567 прорачунске мреже	191
6.110	Спектар фреквенци за пројекцију брзине на Y осу добијени ФФТ-ом у чвору 41567	191
6.111	Временско праћење пројекције брзине на Y осу у чвору 21246 прорачунске мреже	192
6.112	Спектар фреквенци за пројекцију брзине на Y осу добијени ФФТ-ом у чвору 21246	192
6.113	Поље акустичних извора добијени Ортогоналном SGS моделом са динамичким праћењем малих величина	193
6.114	Поље акустичних извора добијени Ортогоналном SGS моделом са динамичким праћењем малих величина	193
6.115	Поље акустичних извора добијени Ортогоналном SGS моделом са динамичким праћењем малих величина	193
6.116	Поље акустичних извора добијени Ортогоналном SGS моделом са динамичким праћењем малих величина	193
6.117	Поље акустичних извора добијени Ортогоналном SGS моделом са динамичким праћењем малих величина	193
6.118	Поље акустичних извора добијени Ортогоналном SGS моделом са динамичким праћењем малих величина	193
6.119	Реално решење нехомогене Хелмхолцове јендачине за $k_0 = 0.5$ за акустичне изворе добијени LES-Смагорисни методом	194
6.120	Реално решење нехомогене Хелмхолцове јендачине за $k_0 = 0.5$ за акустичне изворе добијени Ортогоналном SGS методом са динамичким праћењем малих величина	194
6.121	Реално решење нехомогене Хелмхолцове јендачине за $k_0 = 0.5$ за акустичне изворе добијени LES-Смагорисни методом	194
6.122	Реално решење нехомогене Хелмхолцове јендачине за $k_0 = 0.5$ за акустичне изворе добијени Ортогоналном SGS методом са динамичким праћењем малих величина	194
6.123	Изглед стајног трапа	195
6.124	Шематски приказ стајног трапа са компонентама [Valiant извештај]	195

6.125	Редукција буке у пројекту SILENCER [VALIANT-извјештај]	196
6.126	Шематски приказ проблема	196
6.127	3Д модел два квадратна профила	196
6.128	Прорачунска мрежа са означеним чворовима прорачунске мреже за временско праћење вектора брзине	197
6.129	Гранични услов да је брзина једнака нули на границама профила	197
6.130	Гранични услов за брзину на ободима прорачунског домена	197
6.131	Домен дискретизован са линарним троугластим елементима	198
6.132	Прорачунски домен	198
6.133	Поље брзина око квадратних профила стајног трапа после 0.02 секунде добијени LES-Смагорински моделом	199
6.134	Поље брзина око квадратних профила стајног трапа после 0.05 секунде добијени LES-Смагорински моделом	199
6.135	Поље брзина око квадратних профила стајног трапа после 0.1 секунде добијени LES-Смагорински моделом	199
6.136	Поље брзина око квадратних профила стајног трапа после 0.13 секунде добијени LES-Смагорински моделом	199
6.137	Поље брзина око квадратних профила стајног трапа после 0.17 секунде добијени LES-Смагорински моделом	199
6.138	Поље брзина око квадратних профила стајног трапа после 0.2 секунде добијени LES-Смагорински моделом	199
6.139	Поље притиска око квадратних профила стајног трапа после 0.02 секунде добијени LES-Смагорински моделом	200
6.140	Поље притиска око квадратних профила стајног трапа после 0.05 секунде добијени LES-Смагорински моделом	200
6.141	Поље притиска око квадратних профила стајног трапа после 0.1 секунде добијени LES-Смагорински моделом	200
6.142	Поље притиска око квадратних профила стајног трапа после 0.13 секунде добијени LES-Смагорински моделом	200
6.143	Поље притиска око квадратних профила стајног трапа после 0.17 секунде добијени LES-Смагорински моделом	200
6.144	Поље притиска око квадратних профила стајног трапа после 0.2 секунде добијени LES-Смагорински моделом	200
6.145	Временско праћење пројекције брзине на X осу у чвору 27419 прорачунске мреже	201
6.146	Спектар фреквенци за пројекцију брзине на X осу добијени ФФТ-ом у чвору 27419	201
6.147	Временско праћење пројекције брзине на X осу у чвору 22609 прорачунске мреже	201
6.148	Спектар фреквенци за пројекцију брзине на X осу добијени ФФТ-ом у чвору 22609	201
6.149	Временско праћење пројекције брзине на Y осу у чвору 27419 прорачунске мреже	201
6.150	Спектар фреквенци за пројекцију брзине на Y осу добијени ФФТ-ом у чвору 27419	201
6.151	Временско праћење пројекције брзине на Y осу у чвору 22609 прорачунске мреже	202

6.152Спектар фреквенци за пројекцију брзине на Y осу добијени ФФТ-ом у чвору 22609	202
6.153Поље акустичних извора добијени LES-Смагоринским методом-абсолютно решење	203
6.154Поље акустичних извора добијени LES-Смагоринским методом-абсолютно решење	203
6.155Поље акустичних извора добијени LES-Смагоринским методом-имагинарни део решења	203
6.156Поље акустичних извора добијени LES-Смагоринским методом-имагинарни део решења	203
6.157Поље акустичних извора добијени LES-Смагоринским методом-реални део решења	203
6.158Поље акустичних извора добијени LES-Смагоринским методом-реални део решења	203
6.159Поље брзина око квадратног профила стајног трапа после 0.02 секунде добијени Ортогоналним SGS моделом са динамичким праћењем малих величина	204
6.160Поље брзина око квадратног профила стајног трапа после 0.05 секунде добијени Ортогоналним SGS моделом са динамичким праћењем малих величина	204
6.161Поље брзина око квадратног профила стајног трапа после 0.1 секунде добијени Ортогоналним SGS моделом са динамичким праћењем малих величина	204
6.162Поље брзина око квадратног профила стајног трапа после 0.13 секунде добијени Ортогоналним SGS моделом са динамичким праћењем малих величина	204
6.163Поље брзина око квадратног профила стајног трапа после 0.17 секунде добијени Ортогоналним SGS моделом са динамичким праћењем малих величина	205
6.164Поље брзина око квадратног профила стајног трапа после 0.2 секунде добијени Ортогоналним SGS моделом са динамичким праћењем малих величина	205
6.165Поље притиска око квадратног профила стајног трапа после 0.02 секунде добијени Ортогоналним SGS моделом са динамичким праћењем малих величина	205
6.166Поље притиска око квадратног профила стајног трапа после 0.05 секунде добијени Ортогоналним SGS моделом са динамичким праћењем малих величина	205
6.167Поље притиска око квадратног профила стајног трапа после 0.1 секунде добијени Ортогоналним SGS моделом са динамичким праћењем малих величина	205
6.168Поље притиска око квадратног профила стајног трапа после 0.13 секунде добијени Ортогоналним SGS моделом са динамичким праћењем малих величина	205
6.169Поље притиска око квадратног профила стајног трапа после 0.17 секунде добијени Ортогоналним SGS моделом са динамичким праћењем малих величина	206

6.170Поље притиска око квадратног профила стајног трапа после 0.2 секунде добијени Ортогоналним SGS моделом са динамичким праћењем малих величина	206
6.171Временско праћење пројекције брзине на X осу у чвору 27419 прорачунске мреже	207
6.172Спектар фреквенци за пројекцију брзине на X осу добијени ФФТ-ом у чвору 27419	207
6.173Временско праћење пројекције брзине на X осу у чвору 22609 прорачунске мреже	207
6.174Спектар фреквенци за пројекцију брзине на X осу добијени ФФТ-ом у чвору 22609	207
6.175Временско праћење пројекције брзине на Y осу у чвору 27419 прорачунске мреже	207
6.176Спектар фреквенци за пројекцију брзине на Y осу добијени ФФТ-ом у чвору 27419	207
6.177Временско праћење пројекције брзине на Y осу у чвору 22609 прорачунске мреже	208
6.178Спектар фреквенци за пројекцију брзине на Y осу добијени ФФТ-ом у чвору 22609	208
6.179Поље акустичних извора добијени Ортогоналном SGS моделом са динамичким праћењем малих величина	208
6.180Поље акустичних извора добијени Ортогоналном SGS моделом са динамичким праћењем малих величина	208
6.181Поље акустичних извора добијени Ортогоналном SGS моделом са динамичким праћењем малих величина	209
6.182Поље акустичних извора добијени Ортогоналном SGS моделом са динамичким праћењем малих величина	209
6.183Поље акустичних извора добијени Ортогоналном SGS моделом са динамичким праћењем малих величина	209
6.184Поље акустичних извора добијени Ортогоналном SGS моделом са динамичким праћењем малих величина	209
6.185Генерисање буке на крилу авиона [VALIANT извештај]	210
6.186Генерисање буке на крилу авиона [VALIANT извештај]	211
6.187Мрежа око аеропрофила 23012 са чворовима за праћење временске еволуације брзине око аеропрофила	212
6.188Прорачунски домен	212
6.189Прорачунска мрежа целог домена	212
6.190Дирихлеови гранични услови на граници аеропрофила	213
6.191Дирихлеови и Нојманови гранични услови на ободима прорачунског домена	213
6.192Векторско поље брзина око аеропрофила после 0.01 секунде LES-Смагориснки	214
6.193Векторско поље брзина око аеропрофила после 0.09 секунде LES-Смагориснки	214
6.194Векторско поље брзина око аеропрофила после 0.15 секунде LES-Смагориснки	214
6.195Векторско поље брзина око аеропрофила после 0.2 секунде LES-Смагориснки	214
6.196Векторско поље брзина око аеропрофила после 0.25 секунде LES-Смагориснки	214
6.197Векторско поље брзина око аеропрофила после 0.35 секунде LES-Смагориснки	214
6.198Поље притиска око аеропрофила после 0.01 секунде LES-Смагориснки	215
6.199Поље притиска око аеропрофила после 0.09 секунде LES-Смагориснки	215

6.200	Поље притиска око аеропрофила после 0.15 секунде LES-Смагорински	215
6.201	Поље притиска око аеропрофила после 0.2 секунде LES-Смагорински	215
6.202	Поље притиска око аеропрофила после 0.25 секунде LES -Смагорински	215
6.203	Поље притиска око аеропрофила после 0.35 секунде LES -Смагорински	215
6.204	Временско праћење пројекције брзине на X осу у чвору 17641 прорачунске мреже за LES-Смагорински модел	216
6.205	Спектар фреквенци за пројекцију брзине на X осу добијени ФФТ-ом у чвору 17641	216
6.206	Временско праћење пројекције брзине на X осу у чвору 22540 прорачунске мреже за LES-Смагорински модел	216
6.207	Спектар фреквенци за пројекцију брзине на X осу добијени ФФТ-ом у чвору 22540	216
6.208	Временско праћење пројекције брзине на X осу у чвору 26989 прорачунске мреже за LES-Смагорински модел	217
6.209	Спектар фреквенци за пројекцију брзине на X осу добијени ФФТ-ом у чвору 26989	217
6.210	Временско праћење пројекције брзине на Y осу у чвору 17641 прорачунске мреже за LES-Смагорински модел	217
6.211	Спектар фреквенци за пројекцију брзине на Y осу добијени ФФТ-ом у чвору 17641	217
6.212	Временско праћење пројекције брзине на Y осу у чвору 22540 прорачунске мреже за LES-Смагорински модел	217
6.213	Спектар фреквенци за пројекцију брзине на Y осу добијени ФФТ-ом у чвору 22540	217
6.214	Временско праћење пројекције брзине на Y осу у чвору 26989 прорачунске мреже за LES-Смагорински модел	218
6.215	Спектар фреквенци за пројекцију брзине на Y осу добијени ФФТ-ом у чвору 26989	218
6.216	Абсолютно поље акустичних извора око аеропрофила LES-Смагорински	218
6.217	Абсолютно поље акустичних извора око аеропрофила LES-Смагорински	218
6.218	Имагинарно поље акустичних извора око аеропрофила LES-Смагорински	219
6.219	Имагинарно поље акустичних извора око аеропрофила LES-Смагорински	219
6.220	Реално поље акустичних извора око аеропрофила LES-Смагорински	219
6.221	Реално поље акустичних извора око аеропрофила LES-Смагорински	219
6.222	Имагинарно решење нехомогене Хелмхолцове јендачине за $k_0 = 0.5$	220
6.223	Realno решење нехомогене Хелмхолцове јендачине за $k_0 = 0.5$	220
6.224	Подужни пресек реалног решења нехомогене Хелмхолцове јендачине за $k_0 = 0.5$	220
6.225	Подужни пресек имагинарног решења нехомогене Хелмхолцове јендачине за $k_0 = 0.5$	220
6.226	Векторско поље брзина око аеропрофила после 0.01 секунде добијени ортогоналном SGS методом са динамичким праћењем малих величина	221
6.227	Векторско поље брзина око аеропрофила после 0.09 секунде добијени ортогоналном SGS методом са динамичким праћењем малих величина	221
6.228	Векторско поље брзина око аеропрофила после 0.15 секунде добијени ортогоналном SGS методом са динамичким праћењем малих величина	221
6.229	Векторско поље брзина око аеропрофила после 0.2 секунде добијени ортогоналном SGS методом са динамичким праћењем малих величина	221

6.230	Векторско поље брзина око аеропрофила после 0.25 секунде добијени ортогоналном SGS методом са динамичким праћењем малих величина	221
6.231	Векторско поље брзина око аеропрофила после 0.35 секунде добијени ортогоналном SGS методом са динамичким праћењем малих величина	221
6.232	Поље притиска око аеропрофила после 0.01 секунде добијени ортогоналном SGS методом са динамичким праћењем малих величина	222
6.233	Поље притиска око аеропрофила после 0.09 секунде добијени ортогоналном SGS методом са динамичким праћењем малих величина	222
6.234	Поље притиска око аеропрофила после 0.15 секунде добијени ортогоналном SGS методом са динамичким праћењем малих величина	222
6.235	Поље притиска око аеропрофила после 0.2 секунде добијени ортогоналном SGS методом са динамичким праћењем малих величина	222
6.236	Поље притиска око аеропрофила после 0.25 секунде добијени ортогоналном SGS методом са динамичким праћењем малих величина	222
6.237	Поље притиска око аеропрофила после 0.35 секунде добијени ортогоналном SGS методом са динамичким праћењем малих величина	222
6.238	Временско праћење пројекције брзине на X осу у чвору 17641-OSGS	223
6.239	Спектар фреквенци за пројекцију брзине на X осу добијени ФФТ-ом у чвору 17641	223
6.240	Временско праћење пројекције брзине на X осу у чвору 22540-OSGS	223
6.241	Спектар фреквенци за пројекцију брзине на X осу добијени ФФТ-ом у чвору 22540	223
6.242	Временско праћење пројекције брзине на X осу у чвору 26989-OSGS	223
6.243	Спектар фреквенци за пројекцију брзине на X осу добијени ФФТ-ом у чвору 26989	223
6.244	Временско праћење пројекције брзине на Y осу у чвору 17641-OSGS	224
6.245	Спектар фреквенци за пројекцију брзине на Y осу добијени ФФТ-ом у чвору 17641	224
6.246	Временско праћење пројекције брзине на Y осу у чвору 22540-OSGS	224
6.247	Спектар фреквенци за пројекцију брзине на Y осу добијени ФФТ-ом у чвору 22540	224
6.248	Временско праћење пројекције брзине на Y осу у чвору 26989-OSGS	224
6.249	Спектар фреквенци за пројекцију брзине на Y осу добијени ФФТ-ом у чвору 26989	224
6.250	Абсолютно поље акустичних извора око аеропрофила добијени OSGS	225
6.251	Абсолютно поље акустичних извора око аеропрофила добијени OSGS	225
6.252	Имагинарно поље акустичних извора око аеропрофила добијени OSGS	226
6.253	Имагинарно поље акустичних извора око аеропрофила добијени OSGS	226
6.254	Реално поље акустичних извора око аеропрофила добијени OSGS	226
6.255	Реално поље акустичних извора око аеропрофила добијени OSGS	226
6.256	Имагинарно решење нехомогене Хелмхолцове јендачине за $k_0 = 0.5$	227
6.257	Реално решење нехомогене Хелмхолцове јендачине за $k_0 = 0.5$	227
6.258	Подужни пресек реалног решења нехомогене Хелмхолцове јендачине за $k_0 = 0.5$	227
6.259	Подужни пресек имагинарног решења нехомогене Хелмхолцове јендачине за $k_0 = 0.5$	227

Листа табела

6.1	Сетовање Нумеричких модела за симулацију турбуленције ALAS-a	171
6.2	Сетовање Нумеричких модела за симулацију турбуленције стајног трапа	198
6.3	Сетовање Нумеричких модела за симулацију турбуленције аеропрофила са отклоном закрилца	213

АКРОНИМИ

CFD	C omputational F luid D ynamics
CAA	C omputational A ero A coustics
VMM	V ariational M ultiscale M ethod
SGS	S ub G rid S cale
RANS	R eynolds A veraged N avier S tokes
DNS	D irect N umerical S olution
LES	L arge E ddy S imulation
CDR	C onvection R eaction D iffusion
SUPG	S treamwise U pwind P etrov G alerkin
GLS	G alerkin L east S quares
DFT	D irect F ourier T ransformation
FFT	F ast F ourier T ransformation
ALAS	A dvanced L ight A tack S ystem
VALIANT	V alidation and I mprovement of A irframe N oise prediction T ools
AFN	A ir F rame N oise

Поглавље 1

Увод

Ваздухопловство је од свог зачетка и првог лета браће Рајт до данашњих дана прешао дугачак пут еволуције. Од саме спознаје да човек може да лети па до лета хиперсоничним брзинама прошло је "само" 100 година, што сврстава ваздухопловство у грану индустрије са највећим прогресом али тај исти прогрес је гурао и многе друге гране индустрије које су пратили тренд ваздухопловства. Са сталним човековим хтењем да се иде брже и више инжењери су наилазили на разне препреке и проблеме које су на овај или онај начин морали да решавају. Један од оваквих проблема је и бука коју генерише авион који је највише приметан у зонама око аеродрома или кад авион лети на малим висинама.

До педесетих година прошлог века, постојало је веровање да целокупна бука коју генерише авион долази од мотора, док познати Енглески научник sir Michael James Lighthill није утврдио да одређени део буке долази и са узгонских површина и да тај део уопште није занемарљив, чак шта више што ће се касније утврдити дели исти удео у буци као и она која долази са малзног мотора. Лајтхил тада дефинише своју аналогију где су једначине кретања флуида предефинисане у форму која подсећа на таласну једначину "класичне" акустике са леве стране Хелмхолцове једначине док је изворни члан са десне стране остао не промењен. Његов "eight power" закон дефинише да акустична снага генерисана са млазног авиона је пропорционална 8-ом степену брзине кретања авиона. Џејмс Лајтхил се сматра оснивачем аероакустике.

Аероакустика се може дефинисати као део акустике која проучава буку генерисану турбулентним струјањем или интеракцијом аеродинамичких сила са узгонским

површинама. Исто тако бука може да се повеже и са периодично варијабилним струјањем где је "Aeolian tone" који се ствара кад ветар дува око фиксног предмета класичан пример аероакустичног звука. Овај звук је још познат као и аеродинамички звук. За разлику од класичне акустике у аероакустици силе и кретања унутар струјања су извори звука а не екстерни извори.

Са развојем компјутера долази до развоја и прорачунке аероакустике која има за циљ да симулира и предвиди аеродинамички генерисану буку. Прорачунска аероакустика се састоји из Прорачунске механике флуида (CFD-Computational Fluid Dynamics) турбулентног струјања, алокације и предикције акустичних извора и пропагације акустичних таласа у прорачунском домену тј. решавања класичног акустичног проблема. Данас прорачунска аероакустика је активна истраживачка област пошто има широку примену у аутомобилској, железничкој, авио и подводној индустрији.

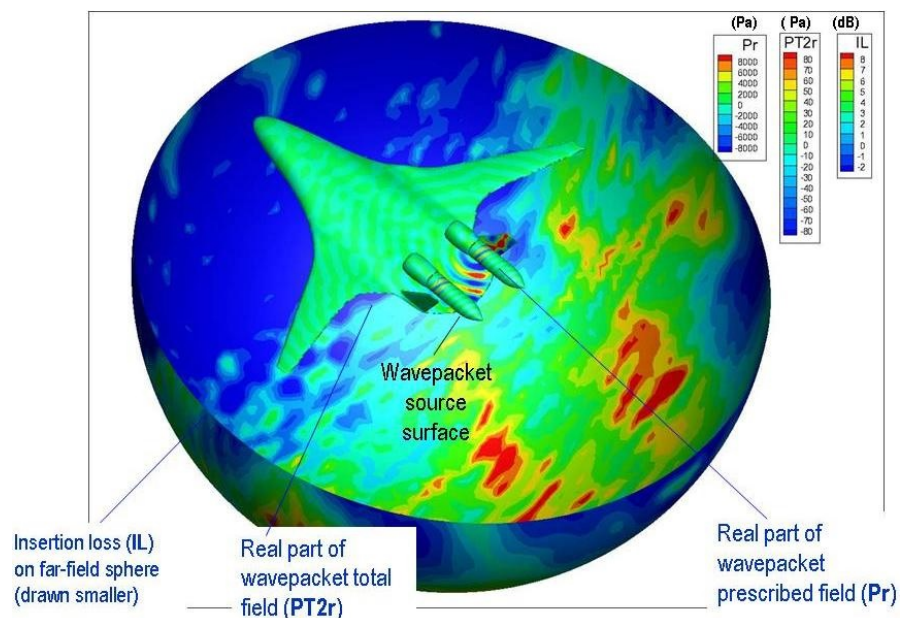
Сврха докторске тезе је да прикаже развој стратегије за предикцију аероакустичних феномена која је имплементирана у програмерски код који користи метод коначних елемената за решавање системе парцијалних диферцијалних једначина. Таква стратегија треба да буде корисна за предикцију струјања малим брзинама коју могу да се класификују нестишљива струјања. Због тога је коришћена Лајтхилова аналогија која показује како је нестишљива Навије-Стоксова једначина приказана у форми нехомогене акустичне једначине са изворним чланом који је направљен од дуплог дивергента Рејнолдсовог тензора. Циљ истраживања је био да се развијањем нових стабилизационих метода изврши предикције турбулентног струјања и покуша да се моделирају мали вртлози који не могу да се ухвате прорачунском мрежом. Ти исти мали вртлози имају битну улогу у расподели енергије између великих и малих вртлога у турбулентном струјању. Исто тако метода која ће бити приказана у тези има за циљ да симулацијом малих вртлога направи бољу предикцију акустичних извора као и њихову дипол и квадрипол карактеристику. Самим тим бољом предикцијом акустичних извора и десни члан акустичне једначине добија свој другачији облик што повећава интензитет таласа притиска што наше ухо препознаје као буку. Уобичајан приступ за моделирање турбулентног струјања које има нестационарно понашање је Симулација великих вртлога (LES-Large Eddy Simulation). Метода подразумева филтрирање Навије-Стоксове једначине са ниско пролазним филтером на нивоу континуума. Ово се традиционално ради са

конволуционим оператером који доводи до сепарације на решиве велике вртлоге и на не решиве мале вртлоге. Утицај малих вртлога на велике се онда моделира и добија се резултујућа LES једначина за велике вртлоге која се дискретизује и решава. Иако веома коришћена у индустрији и научној заједници метод има пар математичких проблема, као што је утицај и интеракција грешке која се добија приликом физичког моделирања LES-а са грешкама које настају нумеричком дискретизационим шемама.

Са друге стране у последње време постоје разни правци у приступи моделирања турбулентног струјања који се актуелно истражују. Један од битних фактора који је заједнички за сваки приступ су стабилизационе методе које се користе да спрече нумеричке нестабилности које се добијају од моделирања и решавања парцијалних диферцијалних једначина методом коначних елемената. Један од метода стабилизације је Сабгрид Скејл стабилизациона метода (SGS-Subgrid Scale Stabilization). Она се базира на сепарацији величина које могу да се ухвате прорачунском мрежом и на оне које то не могу. Утицај малих величина које не могу да се ухвате прорачунском мрежом на величине које то могу, се може моделирати на више начина што дефинише разне врсте ове методе. Веома битан аспект код SGS-а је да сепарација величина урађена као пројекција на одговарајући простор методе коначних елемената а не на ниво континуума као код LES методе. Када се аплицира на Навије-Стоксовој једначини SGS метода поставља стратегију решавања проблема симулације турбулентног струјања као чисто нумерички проблем а не као LES где предходи физичко моделирање а затим и нумеричка дискретизација.

Други корак при симулацији аероакустике је добијање акустичних извора као десног члана познате нехомогене Хелмхолцове једначине који се добија дуплом дивергенцијом Рејнолдсовог стрес тензора. Изворни члан у временском домену ће се добити из анализе прорачунске механике фулида, који ће се трансформисати у фреквентни домен директном Фуријеовом трансформацијом где се израчунавање имплементира у временски петљу CFD анализе и самим тим се уштеди велики меморијски простор. Могуће је на крају изабрати само фреквенце које желимо да прикажемо. Ова процедура има главну предност у томе што омогућава директну визуализацију аероакустичног извора, што може бити велика помоћ у процесу инжењерског дизајна и развоја.

Трећи корак се састоји у прорачуну акустичног поља решавањем нехомогене Хелмхолцове једначине. Опште је познато да за велике таласне бројеве Галеркиново решење методом коначних елемената тј. варијациона формулација није позитивно дефинитивна што доводи до грешке познате као "pollution" грешка. Због тога се овде нећемо бавити стабилизацијом таласне једначине него ћемо се ограничити на мање таласне бројеве који су нам сасвим довољни за практичне проблеме док ћемо на једнодимензионом проблему приказати стабилизацију и хомогене Хелмхолцове једначине. Наравно треба напоменути да се за апликацију аеродинамички генерисане буке са авиона користи конвектна Хелмхолцова једначина која се са одеђеним трансформацијама може свести на обичну Хелмхолцову једначину. На слици 1.1 је приказан пример прорачунске аероакустике иза авиона.



Слика 1.1: Симулација аероакустичне буке око авиона [CD-adapco]

1.1 Преглед и критичка анализа претходних истраживања

Турбулентно струјање је дуго представљало сметњу за прецизност, примену као и употребљивост прорачунске механике флуида у индустријским апликацијама, а и даље је уско грло за Прорачунску Аероакустику САА. Данас Прорачунска Аероакустика примењује све могуће приступе у моделирању турбулентног струјања,

почевши од конвенционалног статистичког моделирања која се базира на Рејнолдсовом осредњавању Навије-Стоксове једначине, наравно за стационарно (RANS-Reynolds Averaged Navier Stokes) и нестационарно (URANS-Unsteady Reynolds Averaged Navier Stokes), преко директне нумеричке симулације (DNS-Direct Numerical Simulation) са завршетком на симулацији великих вртлога (Large Eddy Simulation-LES) и хибридним LES-ом.

Међутим примењена на прорачунској аероакустици стационарни RANS иако веома редукује прорачунско време није нашао значајнију примену осим када је везиван за реконструкцију стахастичког модела турбуленције, као што су Стохастичко генерисање и радијација буке (Stochastic Noise Generation and Radiation-SNGR) и (Random Particle Mesh-RPM) [1]. Скоро је откривен потенцијал предвиђања ове методологије за турбулентна струјања која се везују за површину и она која се не везују. Потенцијал је велики и представља вредну методу чак и за Рејнолдсове бројеве при брзинама лета авиона. Генерално се прати иста методологија као и за RANS у CFD-у. Главни разлог за успех ове методе у индустријским апликацијама је приступачност турбулентних метода. Даљи развој се може очекивати за струјања са малим Маховим бројевима. Очигледан недостатак постојеће RPM методе је занемаривање великог дијапазона флукуација које могу да допринесу стварању буке. Даљи развој RPM стахастичког модела захтева више физикалности у реконструкцији турбулентног струјања.

Са друге стране директна нумеричка симулација (Direct Numerical Simulation-DNS), се сматра као метод који је веома способан да се ухвати у коштац са овим захтевним проблемом. Метод омогућава симулацију свих турбулентних величина од великих до малих вртлога, као и репродукција целокупног спектра акустичних извора, али са друге стране још није доступна за практичне високе Рејнолдсове бројеве. Симулација великих вртлога (Large Eddy Simulation-LES) стоји концептуално између претходна два екстрема са једне стране чисто турбулентне симулације са DNS-ом и чистог моделирања турбуленције са RANS-ом, при чему само највећи енергетски део кретања турбулентног струјања одговран за изазивање звука на великим величинама или вртлозима који се могу решити док се мале величине или вртлози турбулентног струјања моделирају. Иако пружа значајно смањење прорачунских ресурса упоредивши са DNS-ом, LES је и даље превише

захтеван за већину апликација. Вероватно ове две методе ће остати главни правац примене развоја за прорачунску аероакустику и у овом веку.

Иако је постигнут запажен успех у развијању LES методе у последњих пар година, као на пример једначина нелинарних поремећаја (Non Linear Disturbance Equation-NLDE) који решава LES једначине за флукуације око описаног осредњеног струјања [2], [3]. Овај приступ никад није оспораван и може се користити као веома оправдан. Ипак у последњих пар година правац истраживања научника који се баве турбулентним моделирањем је прешао на URANS и такозване хибридне RANS-LES приступе чије појављивање се може окарактеристати као заокрет у погледу стратегије моделирања симулације турбуленције.

URANS приступ, који се обично назива и Симулација веома великих вртлога (Very Large Eddy Simulation-VLES)[4], узима основне постулате из LES-а, тј. сепарацију доминатних углавном невискозних вртлога. У принципу приступ је веома прост, само се треба пребацити у временски прецизан мод у RANS солверу резултујући са URANS-ом. Нека струјања, нарочита она са масивним оцепљењем доводе до нестационарног решења, у основи другачијег од оног стационарног. Што се тиче компјутерских ресурса URANS чак и за 3D симулацију је веома приступачан [2]. Зато је имао запажено интересовање у деведесетим годинама прошлог века [5], [6], [7], [8], [9]. Међутим, у односу на теорију и физику ствар је много више запетљана [10], [11]. Треба обратити пажњу на истраживања од стране Ментера и Егорова [12]. Премда, говорећи о употребљивости за генерисање буке са авиона, конвенционални URANS могу да се користе само за водеће тонове тј. за ниже фреквенце на спектру. Требало би напоменути да скоро истраживања од стране Ментера и Егорова бацају ново светло на потенцијал URANS модела ако се изводе са Фон Кармановим величинама (први извод брзине је подељен са другим изводом брзине) као сензором у једначинама. Овај приступ ствара модел више осетљивим на турбулентне структуре што оправдава дато име приступу симулације адаптивних величина (Scale Adaptive Simulation-SAS). Приступ даје обећавајуће резултате за аеродинамичка струјања укључујући примере из аероакустике и без сумње заслужује даље истраживање као прорачунски алат за прорачунску аероакустику.

Са друге стране хибридни RANS-LES приступ чији је први представник симулација одвајања вртлога (Detached-Eddy Simulation-DES) објављен од стране [13] где је

RANS-ова и LES-ова функционалност моделирања са истим сетом једначина. Генерална идеја DES-а је да комбинује fino подешавање RANS-а у зони прилепљеног граничног слоја, а да са "raw power" методом LES-а у оцепљеним зонама који су испуњени са релативно великим вртлозима чија презентација је иза могућности традиционалног RANS-а. Имплементација ове идеје у оригиналну формулацију доноси просту модификацију дужинске величине нормалне на зид и захваљујући импресивним резултатима [14], [15], [16] у првим апликацијама DES-а у комплексним аеродинамичким апликацијама DES постаје веома популаран и у CFD као и у САА заједници [17], [18], [19], [20], [21], [22], [23], [24], [25]. Један проблем приступа који је запажен [13] је сива зона-"gray area" који још није решен. Проблем се односи на област недефинисану моделерирање RANS мода и тотално образоване LES зоне. Још један важан извод DES-а је приступ дефинисан који комбинује способности DES-а у оцепљеним деоловима струјања, са моделирањем неоцепљеног и делимично оцепљеног струјања са LES-ом и моделирање зида са WMLES-ом. WMLWS је од круционалне важности за САА, јел оно омогућава макар принципијално, поуздано решавање турбуленције у струјањима које су ограничене зидом. Метод омогућава велику уштеду у елементима у зонама близу зида поредивши са LES методом за таква струјања. Међутим, доступне WMLES су једино успешне у простим струјањима и искуство које постоји за ову методологију је недовољно да би се донео неки закључак за његову примену у прорачунској аероакустици.

Последњи хибридни RANS-LES метод је можда и најбитнији за прорачунску аероакустику се зове уграђена симулација Великих вртлога(Embedded LES) који омогућава пребацивање са RANS-а на LES и обрнуто али не у области близу зида него у слободној струји или глобално говорећи у свакој обаласти коју корисник изабере. Овај принцип омогућава да се LES аплицира у оним зонама авиона које су одговорне за стварање буке тако обезбедивши редукцију компјутерских ресурса. Главни проблем имплементације ове методе је када струјање у RANS зони пређе RANS-LES интеракцију, тада је потребно додати турбулентну флукуацију да би се изазвао LES модел. Слично као што је урађено са многим методама симулације великих вртлога треба да се поставе нестационарни гранични услови, док неки уграђени LES модели убацују вештачку турбуленцију у интерференцију између RANS-LES [26], [27], [28], [29]. Иако има обећавајуће резултате у области

аероакустике, његова способност да се аплицира на релативно комплексне геометрије, још није довољно истражена и даља валидација овог приступа са експерименталним методама је потребна.

1.2 Увод у аероакустику и прорачунску аероакустику и опис проблема истраживања

Аероакустика је део акустике који се бави простирањем звука кроз домен који је генерисан од стране турбулентног струјања или аеродинамичке силе у интеракцији са аеродинамичким површинама. Генерисање звука исто тако може бити повезано са периодично варијабилним струјањем који се ствара када ветар дува око фиксног објекта. Модерна аероакустика своје корене вуче од прве публикације Sir James Lighthill-а у раним педестим годинама прошлог века, где је прво разматрано стварање звука од стране турбомлазног мотора на авиону, а касније се истраживањем дошло до закључка да чак и до 50% звука који генерише турбомлазни мотор долази са аеродинамичких површина и турбулентног струјања које оне генеришу. Турбулентно струјање иза формације авиона је представљено на слици 1.2.



Слика 1.2: Дистрибуција вртлога иза авиона

Лајтхил је предефинисао Навије-Стоксову једначину која решава проблеме струјања стишљивог и нестишљивог вискозног струјања у нехомогену таласну једначину и тако створио конекцију између механике флуида и акустике. Овај поступак се зове Лајтхилова аналогија која представља модел за акустично поље. Она није базирана на физикалности генерисања и простирања звука него на аналогији како је могуће

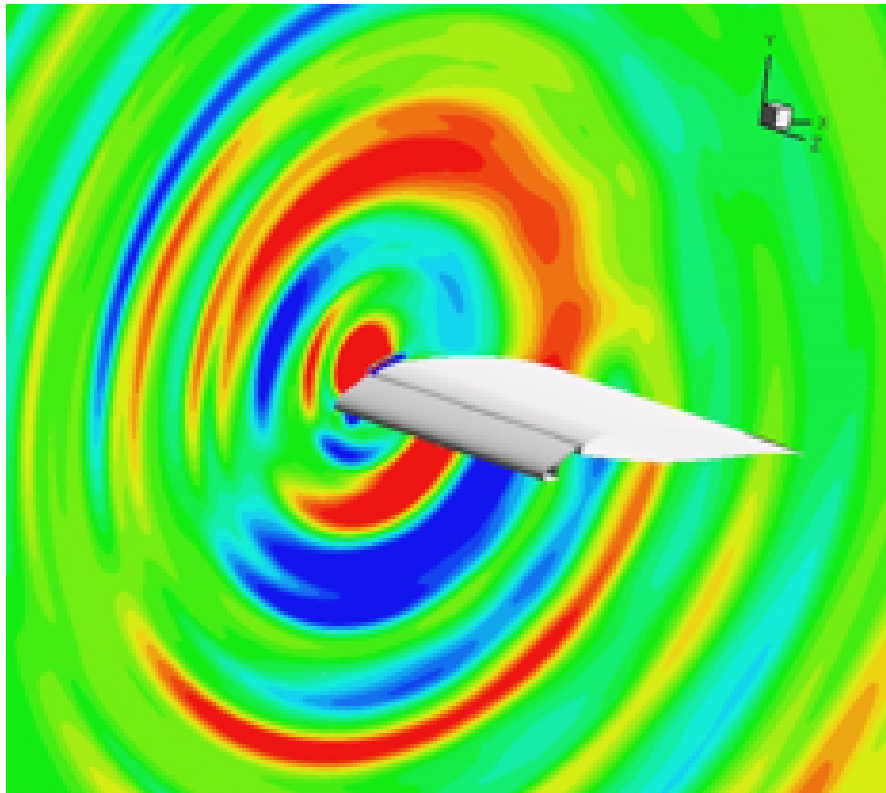
представити акустично поље кроз једначине стишљивог и нестишљивог флуида. У проучавању аероакустике и теоретски и прорачунски напори су направљени да се реше акустични извори у Лајтхиловој аналогiji да би се добила веродостојна презентација генерисања и простирања аеродинамичког звука. Веома је битно нагласити да је Лајтхилова презентација егзактна у смислу да није коришћена никаква апроксимација у њеном развијању. На слици 1.3 је приказан ударни талас на авиону приликом пробијања звучног зида који је можда најупечатљивији и засигурно највећи звук који може да генерише авион.



Слика 1.3: Авион пробија звучни зид

Са друге стране прорачунска аероакустика почиње са развијањем средином осамдесетих година прошлог века са публикацијам Хардина и Ламкима [30], када су прорачунски ресурси тј. компјутери и брзина симулације дошли на одређени ниво. Термин прорачунска аероакустика је у почетку узиман само за струјања при малим маховим бројевима. Касније почетком деведесетих заједница која се окупила око ове проблематике је термин прорачунска аероакустика користио за нумеричке методе које су описивале радијацију буке са аероакустичних извора тј. пропацију звучних таласа у нехомогеном прорачунском пољу. Те нумеричке методе могу бити методе интеграције широког поља или директне нумеричке методе које су оптимизоване за решавање математичких модела који описују аеродинамичко генерисање звука. Током развитка прорачунске аероакустике развили су се разни нумерички модели за решавање проблема. Међу њима су директна нумеричка симулација, хибридни модели, интеграциони модели, Лајтхилова аналогija, Кирхофова интегрална метода, као и Фловкс-Вилијамсова

метода. У дисертацији је коришћена Лајтхилова аналогија. Са веома брзим развојем компјутера област прорачунске аероакустике је у последњих 30 година извршио изврстан напредак и тај тренд и даље траје. Пример ширења акустичних таласа који се генеришу на крилу авиона приказано је на слици 1.4.



Слика 1.4: Нумеричка симулација аероакустике око крила авиона

1.2.1 Опис проблема истраживања

Повећани број летова авионом од 1950-те године као и повећана популација људи који живе око аеродрома је наметнула буку коју генеришу авиони као свакодневни проблем тих људи. Ова врста буке се данас сматра као највећи проблем који треба да се реши од стране авио-транспортне индустрије.

У извештају Европског ваздухопловстава под називом визија за 2020 (European aeronautics - vision for 2020) група под називом ACARE (Advisory Council for Aviation Research and Innovations) је дала своје виђење блиске и даље будућности ваздухопловног транспорта. Да би се одржао стални раст, потребно је превазићи пет главних изазова, као и спровођење квалитативних и квантитативних циљева. Визија 2020 даје смернице да би се одговорило захтевима заједнице. Што се тиче спољне буке,

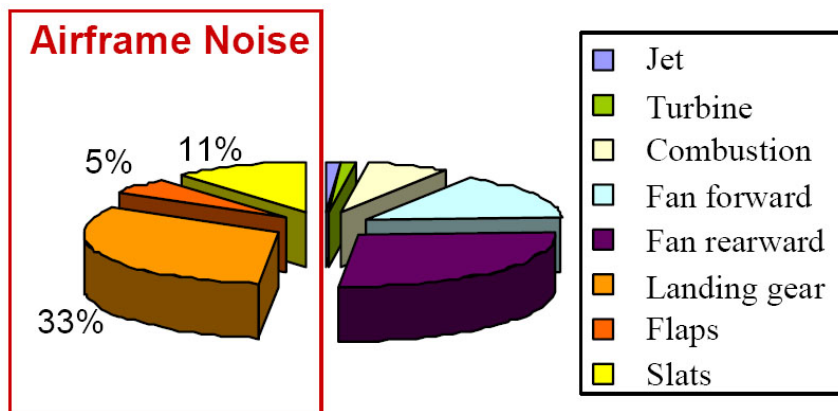
циљ је да се смањи за 50 % или 10 децибела по операцији авиона до 2020. Европска авио индустрија је прихватила да испуни овај веома захтеван изазов.

Екстерна бука која се шири са комерцијалног авиона близу аеродрома има два главна извора, турбофенски мотор и конструкција летелице. Бука која се ствара на модерним турбофенским моторима долази делом са фена, а делом од млаза мотора. Бука која долази са конструкције летелице (Airframe - AFM) је углавном од интеракције струјања флуида преко компоненти које стварају узгон и стајног трапа. Један део исто долзи од улубљења на конструкцији, спојера и делова трупа авиона.

Све до 1960-их бука од стране мотора је била доминантна у односу на буку целокупног авиона, где су контрибуција од стране конструкције биле занемарљиве. Премда у раним седамдесетим годинама прошлог века мотори су добили хладни бајпас на турбофенском мотору што је довело до значајне редукције буке чак до 10 децибела. За ово снижење је заслужна додатна контрола буке фена и турбине.

Данас, за модерне авионе, прираштај буке од стране конструкције летелице према целокупној буци веома избалансирани што се може видети на слици 1.5, док у неким случајевима прираштај буке од стране конструкције приликом полетања се не може занемарити чак шта више је веома присутан. При полетању, мотори раде са највећим потиском и у том случају доминантна је бука која се генерише са носа летелице и то траје све док се потисак не смањи. Пошто се авион веома брзо пење и могу да се прате разне путање полетања, подручје узнемирено буком око аеродрома је површински лимитирано. Приликом слетања, док мотори раде на режиму редуковане снаге, стајни трап је избачен неколико километара пре додиривања писте а и компоненте за повећање узгона су тотално отворене тако да бука од стране конструкције летелице доминира целокупној буци коју генерише авион. Пошто је приступна крива према писти аеродорума веома блага, велика површина око аеродорума је изложена буци и што је горе то се понавља са сваким спуштањем авиона на аеродром.

Са сталним смањивањем буке на млазном мотору, важност смањивања буке на конструкцији авиона ће бити све важнија и важнија, посебно за велике авионе. Да би направили искорак ка тишем авиону, веома је битно да се направи алат за дизајн тиших конструкција авиона. Највећи извори буке на конструкцији авиона су стајни



Слика 1.5: Процентуална расподела извора буке на авиону [VALIANT извештај]

трап и компоненте за повећање узгона, предкрилца и закрилца. Како год, прецизан механизам стварања звука, нарочито она широкопојасна бука су још увек недовољно разумљиви или тешки за идентификацију. Проблем је што и нумеричке методе још нису довољно сазреле да направе предикцију генерисања звука на авиону са доста великом тачношћу.

Стога ће главни проблем истраживања у овој тези да се направи нумеричка метода која би била у могућности да што веродостојније и што тачније ухвати физикланост генерисања и пропагације звука око авиона и летећих објеката као што су ракете.

1.3 Истраживачки циљеви дисертације и примењена методологија

Истраживачки циљ ове дисертације је:

- Унапређење Стабилизационе методе SGS (Subgrid scale stabilization) у виду дефинисања нове методе која има ортогоналну пројекцију моделирања малих величина, тј. вртлога на простор који је дефинисан методом коначних елемената и која узима у обзир евалуацију тих малих величина у времену тј. узима се у обзир динамика малих вртлога.
- Дефинисању другачијег приступа моделирања турбулентног струјања који је чисто нумерички и који у себи носи моделирање како великих тако и малих вртлога, као и дефинисање малих величина које се не могу ухватити порачунском

мрежом у зависности од величина које се могу ухватити прорачунском мрежом. Самим тим је унапређено глобално нумеричко моделирање количине кретања које се принципијално губи у другим методама.

- Дефинисана стабилизациона метода омогућава коришћење истих апроксимативних функција за поље притиска и брзине струјања што омогућава лакшу и бржу имплементацију у софтвер који решава парцијалне диференцијалне једначине методом коначних елемената.
- Моделирање Рејнолдсовог стрес тензора који је задужен за ефекте турбулентног струјања малих вртлога и њен утицај на велике вртлоге.
- Динамичким праћењем малих величина тј. вртлога и њиховим моделирањем успешно је моделирана размена енергије између малих и великих вртлога где треба напоменути да је са овим новим приступом успешно моделирана енергија коју мали вртлози предају великим што није случај у великом броју класичних нумеричких приступа.
- Посебно треба напоменути да је са овом унапређеном методологијом успешно ухваћен спектрум у фреквентном домену развијеног турбулентног струјања који је приказан на конкретним примерима из аероакустичне апликације, где се показује да формулација није превише дисипативна као методологије које се обично користе у аероакустичној примени.
- Посебно је дат акценат на моделирање акустичних извора Лајтхиловом методом где наведена метода за моделирање турбулентног струјања даје диполе који се јављају не само од величина које се могу ухватити прорачунском мрежом, него и диполе који долазе од малих вртлога.
- Применом директне Фуријеове трансформације унутар временске петље за решавање Навије-Стоксове једначине чиме се даје могућност да се уштеди велика количина меморије која је потребна за складиштење временских корака поља брзине које користи брза Фуријеова трансформација.
- Имплементација нове Стабилизационе методе за решавање Хелмхолцове једначине ефикасно решава проблеме које изазива "pollution" грешка која се јавља при великим таласним бројевима.

Научне методе које су примењене у поступку реализације научних резултата могу се поделити на три групе: математичко моделирање, нумеричке методе и симулација аероакустичних феномена. Математичко моделирање подразумева преглед математичке теорије као и дефинисање теорема и дефиниција које задати модели треба да испуне да би задовољавали одређене услове који би осигурали постојање и јединственост решења. Нумеричко моделирање и презентовање нове методологије даје могућност да се карактеристике турбулентног струјања моделирају чисто нумерички. Самим тим се омогућује да симулације нису зависне од проблема који се симулира и да се са одређеним нумеричким аргумензима покрије велики дијапазон практичних проблема. Битно је напоменути да стабилизациона метода осим што омогућава да се користе исте апроксимативне функције што даје стабилизацију конвектног члана за струјања где је брзина струјања доминантна а да се са додатним моделирањем и апроксимирањем малих вртлога природно описују сложене карактеристике турбулентног струјања.

1.4 Преглед садржаја дисертације

Овај рад подељен је у седам поглавља,

- У Поглављу 1 дисертације истакнут је значај аероакустике авиона и како бука коју генеришу аеродинамичке површине авиона приликом полетања и слетања утичу на људе који живе у околини аеродрома. Изнесени су будући правци како да се редукује бука и како је снижавати са годинама које су пред нама. Изнесен је преглед релевантне научне литературе у којем су анализирани карактеристике појединачних фаза моделирања прорачунске аероакустике, са посебним освртом на моделирање турбулентног струјања при малим Маховим бројевима. У наставку су приказане карактеристике аероакустике и прорачунске аероакустике са освртом на физикалност процеса као и методологије прорачуна аероакустичних феномена. Дат је кратак осврт на основна полазишта ове области од којих је најзначајнији допринос дао Лајтхил, који је први формулисао аероакустику која долази са аеродинамичких површина и конструкције летелица. Са друге стране, дат је кратак преглед приступа прорачуна аероакустике као и главни проблеми са којима

се при томе сусрећу истраживачи и инжењери у пракси. У следећем делу првог поглавља је дат преглед коришћених методологија у дисертацији као и истраживачки циљеви дисертације где је назначен другачији приступ моделирања турбулентног струјања од класичног који се обично користи у пракси. На крају је дат кратак преглед дисертације.

- У Поглављу 2 дисертације су изнесене основне теоријске поставке физикалне аероакустике и дефинисани су аналитички модели за њено решавање. Приказане је пар најпознатијих методологија од којих је најбитнија Лајтхилова аналоигија која је централна за тезу. У овој методологији Лајтхил је презентовао трансформацију Навије-Стоксове једначине у таласну једначину као и њено прилагођавање за моделирање аероакустичних феномена чији је извор аеродинамичка бука. Поред тога дефинисани су потребни монополи, диполи као и квадриполи као и њихов значај који имају за генерисање акустичних извора као и њиховог интезитета. На крају је презентована методологија симулације аероакустичних феномена изнетих у тези, где је за први корак дефинисана симулација комплетног турбулентног струјања помоћу прорачунске динамике флуида (CFD). Добијено нестационарно поље брзина се затим користи да се израчуна двострука дивергенција Рејнолдсовог стрес тензора који представљају акустичне изворе. Прелазак срачунатих акустичних извора из временског домена у фреквеннти домен је урађен са Директном Фуријеовом трансформацијом. Израчунати акустични извори су десни члан нехомогене Хелмхолцове једначине чијим решавањем Галеркиновим приступом методом коначних елемената се добија расподела акустичног притиска у прорачунском домену
- У поглављу 3 дисертације је дефинисана ортогонална сабгрид скејл стабилизациона метода са динамичким праћењем малих вртлога (Orthogonal Subgrid Scale stabilization method with dynamical subscale). Превасходно је дефинисана нестишљива Навије-Стоксова једначина као и њена варијациона формулација и укратко је презентована математичка позадина дефинисања постојање јединственог решења задате једначине. После тога је дефинисана симулација великих вртлога LES (Large Eddy Simulation) методологија за моделирање турбулентног струјања где је приказано пар модела за моделирање

малих вртлога који се добијају после филтрације Навије-Стоксове једначине. Презентован је између осталог модел Смагоринског који ће се користити у даљим поглављима тезе и као упоредни модел. Укратко су приказане добре и лоше стране модела као и могућност симулације турбуленције. У наредном кораку је дефинисана Галеркинова метода коначних елемената за просторну дискретизацију Навије-Стоксове једначине као и модели за временску дискретизацију. Наредни корак је резервисан за дефинисање ортогоналне сабгрид скејл стабилизационе методе где је представљена њена формулација као и позитивне стране дате формулације као што је глобално одржање количине кретања и моделирање Рејнолдсовог стрес тензора остатка који моделира турбуленцију малих вртлога. Дефинисано је и динамичко праћење малих вртлога са којима ћемо успети да моделирамо узајамну расподелу енергије између малих и великих вртлога. Веома битан аспект формулације је моделирање кинетичке енергије као и њене дисипације са развијањем вртлога што је поткрепљено са математичком теоријом за обе формулације превасходно дефинисане.

- У поглављу 4 је презентован превасходно прорачун акустичних извора као дупла дивергенција Рејнолдсовог стрес тензора где се добија алокација и интезитет акустичних извора у временском домену. Пошто је Хелмхолцова једначина у фреквентном домену а акустични извори су изворни члан нехомогоне Хелмхолцове једначине потребно је дате изворе у временском домену трансформисати у акустичне изворе у фреквентном домену што је урађено са директном Фуријеовом трансформацијом. Превасходно је презентована Директна Фуријеова трансформација као и прорачунски брза Фуријеова трансформација и дата је кратка анализа карактеристика обе методе. Из задатих карактеристика обе методе због могућности не складиштења велике количине података код Директне фуријеове трансформације се имплементира директно у временску петљу приликом решавања Навије-Стоксове једначине где се добија на времену прорачуна али се и редукује меморијски простор потребан за алокацију велике количине временских инстанци поља брзине струјања.
- У поглављу 5 ове дисертације је презетновано конвектна и стационарна Хелмхолцова једначина. Приказани су проблеми који се јављају приликом

симулације акустичног поља са великим таласним бројевима као и граничним условима који се јављају на ободима прорачунског домена а који замењују безгранични домен. Дефинисано је зашто се јавља "pollution" грешка са математичке стране гледишта и шта је потребно да би се овај проблем превазишао. Дефинисан је затворени математички модел који је добро дефинисан и као такав погодан за решавање. Направљен је тест проблем у једној и две димензије за хомогену Хелмхолцову једначину као и тест проблем за нехомогену Хелмхолцову једначину где је нумеричко решење нађено са Галеркиновим приступом методе коначних елемената. Чак шта више за једнодимензиону Хелмхолцову једначину имплементниран је стабилизациони модел дефинисан у трећем поглављу где је приказано да са задатом методологијом је могуће веома успешно превазићи проблеме "pollution" грешке, тј. да нумеричка пропагација таласа се простире у домену са истим таласним бројем као и егзактно решење.

- У поглављу 6 дисертације приказана је симулација аеропрофила са закрилцем, упрошћени попречни пресек стајног трапа, као и дводимензионе секције пројектила "ALAS" (Advanced Light Attack System). Сви наведени примери симулирани су са уобичајним индустријским приступом тј. са познатом симулацијом великих вртлога LES (Large Eddy Simulation) методом Смагоринског као и са презентованом методологијом Ортоганалне сабгрид скејл стабилизационе методе са динамичким праћењем малих вртлога. Презентоване су главне разлике методологије као и профили брзина и притиска у различитим веременским инстанцама. Исто тако приказане је и временска еволуција у времену поља брзине и притиска за разне карактеристичне чворове прорачунске мреже. Упоредо са тим резултатима је приказан и спектар фреквенци добијеног поља брзине струјања где се лако може видети главна разлика у приступу моделирања турбулентног струјања. Затим је приказано поље акустичних извора, за обе већ наведене методологије где се лако може уочити већа присутност дипола и квадрипла за стабилизациону методу што доводи до закључка да бољим моделирањем малих вртлога се добија веродостојнија алокација и интезитет акустичних извора. На крају је урађена симулација акустичног поља за мале таласне бројеве где је коришћен Галеркинов приступ методе коначних елемената Ови класични

примери су показали реалну апликацију презентоване стабилизационе методе и њену могућност да моделира турбулентно струјање као и да презентовани модел је много мање дисипативан као и да динамичко моделирање малих величина или вртлога даје добру дистрибуцију енергије између малих и великих вртлога тј, у могућности смо да се моделира повратна дистрибуција енергије са малих вртлога на велике вртлоге.

- У поглављу 7 дисертације изнет је детаљан закључак са критичком анализом остварених резултата спроведених нумеричких симулација. Такође су дате могуће смернице за даља истраживања из ове значајне области коју обрађује ова дисертација. Истакнут је научни допринос дисертације као и могућност примене добијених резултата у реалним условима.

Рад садржи и три додатка:

- Додатак А.
- Додатак Б.
- Додатак В.

Поглавље 2

Аероакустика и прорачунска аероакустика

У оквиру овог поглавља направићемо преглед неких аероакустичних теорија. Пошто можемо рећи да се аероакустика налази негде између механике флуида и акустике. Прво ћемо се осврнути на основе принципе акустике и њене основне једначине као и приступ преко Грине (Green) функције, формулисаћемо Кирхоф-Хелмхолцову (Kirchoff-Helmholtz) једначину, затим ће и мултиполарни карактер акустичног поља бити презентован. После тога ћемо прећи на аероакустику и формулисати Лајтхилову (Lighthill) аналогију која је централна за ово истраживање. Поред Лајтхилове аналогије извршиће се кратак осврт на друге формулације.

2.1 Увод

У оквиру овог поглавља прво ћемо се осврнути укратко на историјски развој аероакустике. Као што је већ напоменуто аеродинамичка бука је бука генерисана од стране нестационарног турбулентног струјања и њене интеракције са границама (углавном аеродинамичким површинама). За разлику од аероакустике, акустика се концентрише на механизам генерисања буке и пропагирање таласа притиска у флуиду када екстерна сила дејствује на њега (вибрација плоче, микрофон, спикерфон и тд.). Аероакустика се фокусира на буку генерисану струјањем,

унутрашње силе и кретање флуида (ротирајући вртлог, авион, фенска лопатица и тд.)

Иако су прва истраживања аероакустичних феномена забележена крајем XIX и почетком XX века, посебно звук генерисан од стране струјања око цилиндра [31], [32], [33]. Зачетком аероакустике као истраживачке дисциплине се сматра издавање познатог Лајтхиловог рада који се бавио генерисањем аеродинамичког звука [34], [35]. Лајтхилово истраживање је иницијално мотивисано потребом за коришћење млазних авиона у комерцијалне сврхе. Бука са војних авиона у то време је била превисока и постојала је потреба за "тихим" авионима у насељеним крајевима. Лајтхилово откриће концепта акустичне аналогije је једно од његових првих резултата. Закон "eight-power" са генерисану акустичну снагу је дозволио комбинацију великог повећања пропулзивне снаге авиона са великом редукцијом генерисане буке. Лајтхилов рад је сместио акустику поново у област механике флуида [36] и означио почетак златног доба за аероакустику [37].

Оригинална Лајтхилова аналогija је поставила аналогiju између стишљиве Навие Стоксове једначине и звука који се простире од стране квадриполних извора у стационарном флуиду за случај струјања у неограниченим доменима. Границе су убрзо узете у обзир у раду аутора Курле-а (Curle) [38] за случај не покретних граница које су генерализоване у познату једначину Фовкс-Вилијамс-Хавкингса (Fowcs-Wiliams-Hawkings) [39], [40]. Права снага акустичне аналогije се ослања на томе да такозвани Лајтхилов или Рејнолдсов тензор се може апроксимирати разним апроксимацијама које узимају у обзир више ефеката интеракције између хидродинамичког извора и акустичног извора. Неке познате аналогije су Лежандре (Legnedre) [41], Рибнер (Ribner) [42], Филипс (Philips) [43], Лили (Lilley) [44].

Радови који су везани за ову тезу су апроксимације које узимају у обзир струјања малим Маховим бројевима које наглашавају важност вртлога као извор звука. Кров (Crow) [45] је показао методом упарених асимптотских експанзија (Matched Asymptotic Expansions) да нестишљива апроксимација Рејнолдсовог тензора на Лајтхилов тензор са хидродинамичком брзином која је дата са Био Саваровим законом је уствари прва апроксимација која задовољава мале Махове бројеве. Са друге стране Ристорћели (Ristorcelli) [46], је урадио анализу двоструке пертурбације проблема

и предложио стишљиву корекцију Рејнолдсовог тензора само уводећи солениодну брзину струјања и притиска.

Са друге стране интегрално решење Лајтхилове једанчине са двоструким дивергентом нестишљивог Рејнолдсовог тензора као изворног члана је преуређен од стране Хуа (Howe-a) како би се демонстрирала зависност звука од вртложног поља [47]. Предност овог приступа је да је потребно само интегралити у регијама где постоје вртлози да би се добила пропагација таласа притиска. На овај начин Хоу (Howe) је добио резултате исте као Повел (Powell)[48], [49] за генерисање звука од стране вртлога. Од рада који је извршио Лајтхил до данас аероакустика се углавном развијала у пољу аеронаутике. Аеронаутика је мотивисала први покушај аероакустике и то ради и данас. Велики број струјања које укључују и генерисање аеродинамичког звука се може наћи у аеронаутици.

Аероакустика ротирајућих делова као што су пропелери или фенови и ротирајући склопови у турбомашинерији су од великог значаја не само да би се редуковала већ огромна бука него и због замора материјала који је присутан. Аеродинамичка бука генерисана од стране млаза, струјања које имају доминантну смичућу компоненту као и кохерентна струјања су веома битна у авијацији као и бука генерисана сагоревањем и проблеми са ударним таласима [50], [51]. Проблем који је добио доста пажње и са аналитичке стране [52] као и са прорачунске [53] је бука која се генерише са излазне ивице крила. Због веома прости геометрије која је погодна за аналитички приступ као и генерисање веома fine мреже за прорачунски приступ. Углавном је симулација великих вртлога (Large Eddy simulation-LES) прва опција за симулацију прорачунске механике флуида која се користи као изворни члан или нехомогени за акустичну аналогију [54], [55]

Иако се златно доба аероакустике сматра доба од 1940-1970 године, исто то се не може рећи за прорачунску аероакустику. Током тих година компјутерски ресурси су били итекако мали да би се уопште овако комплексан проблем пробао решити симулацијом на компјутеру. Почетком 1980-их почиње да се развија и прорачунска аероакустика. Пошто се у последњих 35 година компјутери толиком брзином развијају, као и летелице а упоредо са тим су све ригорозније регулативе за дозвољену буку, може се рећи да 1990-их прорачунска аероакустика улази у своје златно доба [56], [57].

Све до данас неколико стратегија је развијено за прорачунску аероакутику са циљем да се суочи са разним проблемима генерисања аеродинамичке буке, који су карактеристични за ваздухопловство, железницу или аутомобилску индустрију. Физикланост која покреће разне феномене генерисања буке могу бити веома различите од случаја до случаја, где углавном је зависност у стишљивости струјања, интеракције између аеродинамичког и акустичног поља, могућност формирања ударних таласа, нелинарности приликом пропагационих ефеката и тд. Теза ће се фокусирати да нумеричкој симулацији аеродинамичке буке генерисане од стране вискозног струјања малим Маховим брјевима. Прорачунска аероакустика вискозног субсоничног струјања се суочава са пар проблема [58]

- Велики звучни опсег које људско уво може да препозна тј од 0 DB(децибела) до 140 DB које карактерише промену притиска од неколико реда вредности интензитета.
- Велики опсег фреквенци које човек може да региструје, тј од 20 Hz до 20000 Hz, где је слух веома осетљив у опсезима од 1000 Hz до 4000 Hz.
- Велика различитост између аеродинамичке енергије и аероакустичне енергије коју генерише аеродинамичко струјање. Однос снага иде приближно до M^5 , где је M Махов број. Пошто је акустична енергија која се генерише из струјања флуида мала, тако да понекад њене мале вредности могу да се маскирају распршавањем и дифузијом нумеричких алгоритама.
- Следећи пример можда најбоље осликава слабост акустичног поља [58]. Јачина звука који генерише млазни авион приликом полетања је исте вредности као и дерњава свих људи истовремено у неком осредњем градићу. Исто тако та акустична енергија није довољна да испржи једно јаје.
- Велика је разлика у величини струјних вртлога и таласном дужином акустичног таласа које они генеришу.
- Веома је битно да нумеричко решење репродукује мултиполарни карактер акустичног поља. Простом заменом квадрипола са диполима може довести до великих грешака у одрђивању смера и интензитета акустичног поља.

Као што је већ речено неколико нумеричких приступа је развијено у последњих 30 година за решавање аероакустичних проблема [59], [60], [61]. Ти приступи укључују директну нумеричку симулацију (Direct Numerical Simulation -DNS) [62],

[63], употребу Кирхоховог Хелмхолцовог интеграла око површине која покрива све акустичне изворе [64],[65] и неке алтернативе као што су стохастички приступи [66] или нумеричке технике за прорачунавање поља око извора и њиховој близини [67]. Међутим, најадекватнији начин да се изведу прорачуни аероакустике за струјања малим Маховим бројевима укључују акустичне аналогije. Акустичне аналогije су аплициране да решавају академске проблеме, као што су проблеми повезани са генерисањем звука које су у интеракцији са вртлозима [68], [69]. У скорије време, проблеми као што су прорачуни звука генерисаног од стране турбуленције која пролази излазну ивицу крила је приказана у [70], [71], [72]. Данас се углавном индустријски проблеми аероакустике решавају супер компјутерима.

Акустичне аналогije у прорачунској аероакустици су углавном решене пратећи интегралну формулацију. Интегрални облик једначине Фовкс-Вилијамса (Ffowcs-Williams) и Хавкингса (Hawkings) је уобичајно коришћена [73] занемаривајући квадруполарне контрибуције и користећи прорачунску механику флуида да се одреде брзине и притисци на површини проблема. Међутим ми нећемо пратити овај стандардни приступ, него ћемо развити приступ из три корака где ће у првом кораку бити извршена симулација прорачунска механика флуид (Computational Fluid Dynamics-CFD) да се добију акустични извори који се срачунавају у другој фази и њихово трансформисање у фреквентни домен, где ће у трећој фази бити срачуната нехомогена Хелмхолцова једначина да би се срачунало акустично поље. Коришћење методе коначних елемената не прави никакву мрежну рестрикцију када се бавимо комплексним геометријама, што значи да могу да се решавају и проблеми за које је индустрија заинтересована. Исто тако процедура избегава неке од проблема на које се наилази када се користи интегрални приступ као што је срачунавање изворног члана у одређеним временским инстанцама. Исто тако избегава занемаривање било ког члана и узима у обзир присуство граница на природан начин и омогућава директну визуализацију акустичног изворног члана. Коначно резултујући метод представља неколико разлика које се односе на акустичне изворе, стабилизационе методе као и пропагацију таласа са Галилеан и Лоренцовим трансформацијама као и неки аспекти имплементације [74].

2.2 Гринава функција, Кирхоф-Хелмхолцова формулација и Фраунхоферова апроксимација

Како би решили акустичне проблеме требало би да смо у могућности да нађемо решење Хелмхолцове једначине у било ком коначном или бесконачном физичком домену $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ са предефинисаним граничним условима на $\partial\Omega$ и са дистрибуцијом извора $s(\mathbf{x}, t)$ или $s(\mathbf{x}, \omega)$.

Гринова (Green) функција се доказала као веома добра опција за решавање Хелмхолцове једначине зато што је сама једначина линеарна. Гринова функција $G_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t \rightarrow \tau)$ је поље звука генерисано од стране импулсивног тачкастог извора лоцираног на $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ у времену $t = \tau$. Стога је обичан проблем наћи решење диференцијалног проблема нађи: p' у \mathbb{R}^3 тако да је,

$$\left(\frac{1}{c_0^2} - \nabla^2\right)G_0 = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})\delta(t - \tau) \quad t \geq \tau \quad (2.1)$$

$$G_0 = 0 \quad t \leq \tau \quad (2.2)$$

Решење је дато у облику [75], [76],

$$G_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t - \tau) = \frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \delta\left(t - \tau - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}{c_0}\right) \quad (2.3)$$

што на крају крајева није ништа него импулсивни и сферично симетрични талас који пропагира даље од извора лоцираног у \mathbf{x} и чија амплитуда се смањује са пређеном дистанцом ка \mathbf{y} . Фуријеова трансформација (2.3) је Гринова функција у фреквентном домену и кореспондира за решавање нехомогене Хелмхолцове једначине са извором у тачци.

$$G_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) = \frac{e^{ik_0|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \quad (2.4)$$

Ако претпоставимо да треба да решимо нехомогену Хелмхолцову једначину у неограниченом домену за генералну дистрибуцију извора $s(\mathbf{x}, t)$,

$$\left(\frac{1}{c_0^2}\partial_{tt}^2 - \nabla^2\right)p = s(\mathbf{x}, t) \quad (2.5)$$

можемо да замислимо $s(\mathbf{x}, t)$ као да је изграђен од мноштва распоређених импулса извора у тачци као оних на десној страни једначине (2.1) тако да може да се представи као,

$$s(\mathbf{x}, t) = \int_{\mathbb{R}^3} \int_{-\infty}^{\infty} s(\mathbf{y}, \tau) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \delta(t - \tau) d\mathbf{y} d\tau \quad (2.6)$$

Узимајући у обзир (2.1)-(2.3) сваки сачинитељ $s(\mathbf{y}, \tau) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \delta(t - \tau) d\mathbf{y} d\tau$ ће генерисати акустично поље (талас који пропагира ка споља) $s(\mathbf{y}, \tau) G_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t - \tau) d\mathbf{y} d\tau$.

Пинцип суперпозиције омогућава сумација свих чланова који учествују у извору да би се добило акустично поље генерисано од стране $s(\mathbf{x}, t)$.

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}, t) &= \int_{\mathbb{R}^3} \int_{-\infty}^{\infty} s(\mathbf{y}, \tau) G_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t - \tau) d\mathbf{y} d\tau = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{s(\mathbf{y}, t - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|/c_0)}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d\mathbf{y} = \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{[s]}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d\mathbf{y} \end{aligned} \quad (2.7)$$

где смо користили једначину (2.3) у једначини (2.7). Вредност $t - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|/c_0$ се обично назива ретардно време. Стога једначина (2.7) репрезентује расподелу акустичног притиска за тачку \mathbf{x} у времену t , као суперпозиција акустичног поља генерисаног од стране акустичног извора лоцираног у одговарајућем ретардном времену. Слично тако у фреквентном домену ћемо имати Фуријеову трансформацију акустичног извора $s(\mathbf{x}, \omega)$.

$$p(\mathbf{x}, \omega) = \int_{\mathbb{R}^3} s(\mathbf{y}, \omega) G_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) d\mathbf{y} = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{ik_0|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} s(\mathbf{y}, \omega) d\mathbf{y} \quad (2.8)$$

Стога можемо закључити ако је позната Гринава функција, тада је лако доћи до расподеле притиска у домену генерисаног од стране акустичног извора у неком неограниченом домену.

Када су присутне површине и/или таласна једначина треба да се реши у ограниченом домену, пређашњи приступ треба да се модификује да би узео у обзир присуство граница. За домен $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ са границама $\partial\Omega = \Gamma = \Sigma \cup S$ тако да је $\Sigma \cap S = \emptyset$ где Σ представља спољашњост домена, док S представља површину било ког тела унутар домена. Прво ћемо адресирати Хелмхолцов проблем:

$$(-\nabla^2 - k_0^2)p = s(\mathbf{x}, \omega) \quad \text{u } \Omega \quad + \quad \text{granicni uslovi} \quad (2.9)$$

Да би нашли решење за једначину (2.9) претпоставићемо реципрочни проблем,

$$(-\nabla_y^2 - k_0^2)G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad \text{u } \Omega \quad + \quad \text{granicni uslovi} \quad (2.10)$$

где индекс y набла оператеру представља извод по компонентама од y . G је Гринова функција и она задовољава реципрочну теорему $G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) = G(\mathbf{y}, \mathbf{x}, \omega)$. Сада можемо да нађемо формално решење $p(\mathbf{x}, \omega)$ једначине (2.9) пратећи следеће кораке [77], прво ћемо заменити \mathbf{x} са \mathbf{y} у једначини (2.9) и помножити са $G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega)$. Онда треба одузети резултујућу једначину од производа једначине (2.10) и $p(\mathbf{x}, \omega)$. На крају треба интегралити резултат по \mathbf{y} у целом домену и аплицирати дивергентну теорему да би добили,

$$p(\mathbf{x}, \omega) = - \int_{\Omega} s(\mathbf{y}, \omega) G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) d\Omega - \int_{\Gamma} [p(\mathbf{y}, \omega) \nabla_y G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) - \nabla_y (\mathbf{y}, \omega) G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega)] \mathbf{n} d\Gamma \quad (2.11)$$

где је јединични вектор нормале \mathbf{n} на Γ која је окренута ка флуиду. Ако је $x \in \Gamma$ онда акустични притисак на левој страни једначине (2.11) треба да се подели са 2. Са друге стране Ω у једначини (2.11) може да буде и безграничног радијуса на пример $\Omega = \mathbb{R}^3$. У овом случају Сомерфилдов гранични услов омогућава да не постоји никаква допринос од стране бесконачне површине на акустични притисак тако да Γ у површинском интегралу једначине (2.11) се може заменити са S . Ако је $S = \emptyset$ добија се једначина (2.7).

Једначина (2.11) је валидна за било коју Гринову функцију која решава (2.10) и што је битно она омогућава да се користи проста Гринова функција. Површински

интеграл се може одредити ако су p и ∇p познати на Γ . Како год треба напоменути да ове вредности не могу да се препишу независно.

Исто тако може се узети у обзир модификована Гринова функција избегавајући потребу да се решава површински интеграл у (2.11) која задовољава одговарајуће услове на површини. Проблем је наћи те Гринове функције пошто оне могу да се дефинишу само за проста тела као што су сфера, цилиндар и тд. Један изузетак који је вредно поменути је случај акустично компактних тела. Дефиниција тих тела је да карактеристична дужина тих тела је мала у односу на таласну дужину звука који је генерисан са акустичног извора. За њих је могуће срачунати апроксимацију Гринове функције са одговарајућим граничним понашањем за велики распон геометријских облика. Такве Гринове функције су назване компактне Гринове функције [77].

На крају ћемо дефинисати Кирхоф-Хелмхолцову (Kirchoff-Helmholtz) једначину.

$$p(\mathbf{x}, \omega) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{e^{ik_0|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} s(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) d\Omega - \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} p(\mathbf{y}, \omega) \partial_{\mathbf{n}} \frac{e^{ik_0|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} + \frac{i\omega\rho_0}{4\pi} \int_{\Gamma} u_n \frac{e^{ik_0|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} d\Gamma \quad (2.12)$$

где $\partial_{\mathbf{n}}$ је извод по нормали на површину и u_n је компонента брзине нормална на површину. Верзија Кирхоф-Хелмхолцове једначине у временском домену се може добити Фуријеовом трансформацијом узимајући у обзир конволутивну теорему, што доводи до,

$$p(\mathbf{x}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\Omega} s(\mathbf{y}, \tau) G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t - \tau) d\Omega d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} + \int_{\Gamma} [p(\mathbf{y}, \tau) \nabla_{\mathbf{y}} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t - \tau)] \mathbf{n} d\Gamma d\tau \quad (2.13)$$

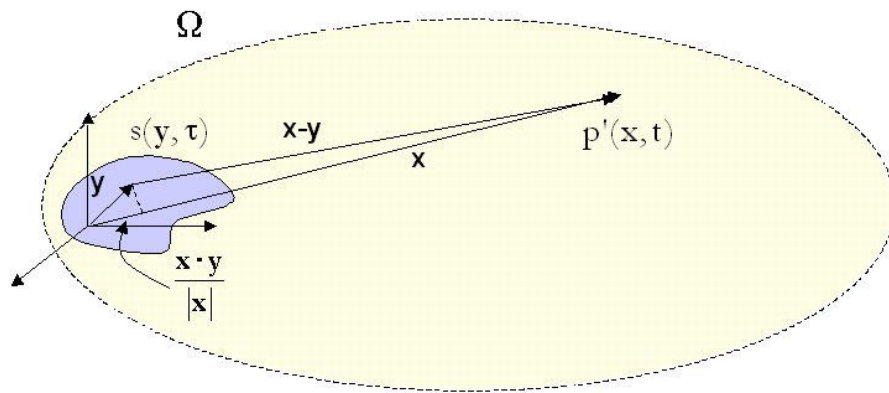
или у облику,

$$p(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{[s]}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} d\Omega + \frac{\rho}{4\pi} \partial_t \int_{\Gamma} \frac{[u_n]}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} d\Gamma - \frac{1}{4\pi} \partial_i \int_{\partial\Omega} \frac{[p]}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} n_i d\Gamma \quad (2.14)$$

Последња два члана једначине (2.14) репрезентују монополе и диполе извора на површини који ће бити дефинисани у неким од следећем поглавља.

У многим акустичним апликацијама ми ћемо углавном бити заинтересовани за познавање акустичног поља далеко од акустичног извора што је приказано на слици 2.1. Због разлога једноставности, нека поставимо координатни почетак унутар акустичног извора. Када $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$ и за \mathbf{y} у зони акустичног извора, следи да апроксимација за удаљени део акустичног поља гласи,

$$p(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{s(\mathbf{y}, t - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|/c_0)}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d\mathbf{y} \approx \frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|} \int_{\mathbb{R}^3} s(\mathbf{y}, t - \frac{\mathbf{x}}{c_0} + \frac{\mathbf{x}\mathbf{y}}{c_0|\mathbf{x}|}) d\mathbf{y} \quad (2.15)$$



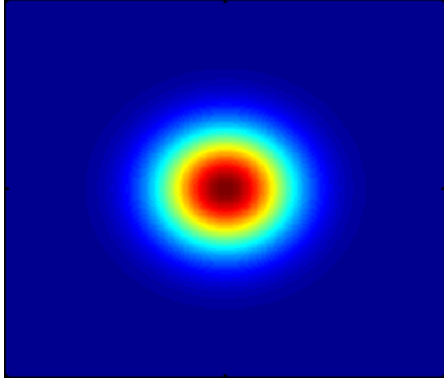
Слика 2.1: Апроксимација акустичног поља далеко од извора

Апроксимација удаљених делова акустичног поља (2.15) се зове Фраухоферова (Frauhofer) апроксимација. Још једна апроксимација која се веома често користи у акустици и аероакустици је правило о замени просторног и временског извода. Није тешко показати да за $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$ можемо заменити [76]

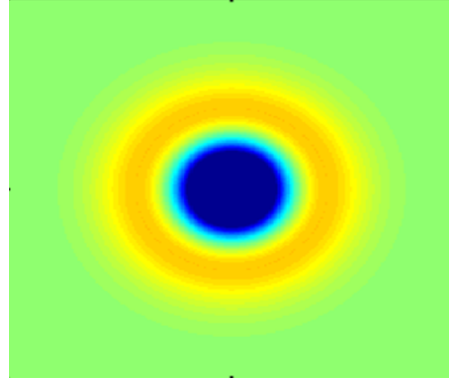
$$\partial_i \rightarrow \frac{1}{c_0} \frac{x_i}{|\mathbf{x}|} \partial_t \quad (2.16)$$

2.3 Монополи, диполови и квадриполи

Неки типови извора су веома важни у акустици и заслужују посебну пажњу. То је случај са моноповима, диполовима и квадриповима типовима акустичних извора.



Слика 2.2: Изглед монопола са позитивним максимумом



Слика 2.3: Изглед монопола са негативним максимумом

Тачкасти монополарни акустични извор је волуметријски извор типа $q(t)\delta(\mathbf{x})$ који резултира акустичним извором $s(\mathbf{x}, t) = \rho_0 \partial_i q(t) \delta \mathbf{x}$. Из једначине (2.15) је очигледно да у слободном простору тачкасти монополарни извор ће генерисати акустично поље

$$p(\mathbf{x}, t) = \frac{\rho_0}{4\pi|\mathbf{x}|} \partial_t q\left(t - \frac{|\mathbf{x}|}{c_0}\right) \quad (2.17)$$

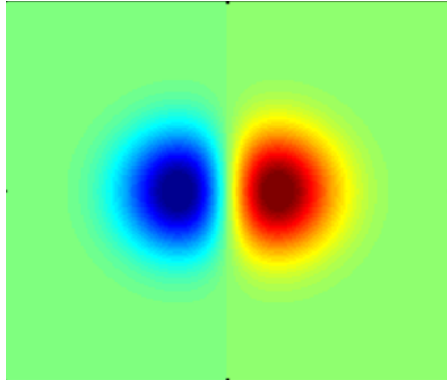
На слици 2.2 и 2.3 је приказан изглед монопола са позитивним и негативним максимумом.

Диполарни извори у тачци одговарају акустичном извору типа $s(\mathbf{x}, t) = \partial[\mathbf{f}(t)\delta\mathbf{x}]$, узимајући у обзир једначине (2.5-2.7) није тешко показати да акустични притисак генерисан од стране диполарног извора изгледа,

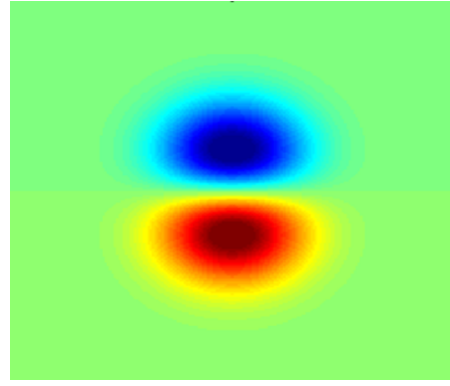
$$p(\mathbf{x}, t) = \partial \left(\frac{\mathbf{f}\left(t - \frac{|\mathbf{x}|}{c_0}\right)}{4\pi|\mathbf{x}|} \right) \quad (2.18)$$

Акустично поље генерисано од стране диполарног извора је једнака пољу који је генерисана од стране два монополарна извора који су исте јачине и супротних знакова и такђе постављени на веома краткој удаљености. На слици 2.4 и 2.5 је приказан изглед дипола као комбинација два монопола.

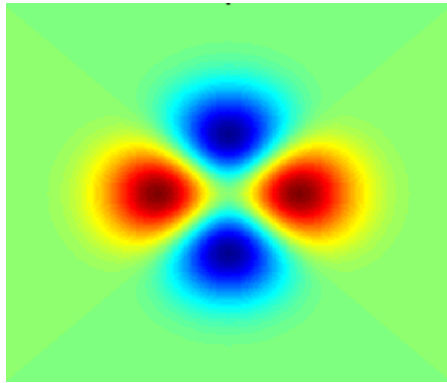
Квадриполарни тачкасти извори укључују двоструку довергенцију уместо једне као што је случај код диполарних извора. Извор је дат у облику $s(\mathbf{x}, t) = (\nabla \otimes \nabla) : (\mathbf{T}(t)\delta(\mathbf{x}))$ и генерисано акустично поље је,



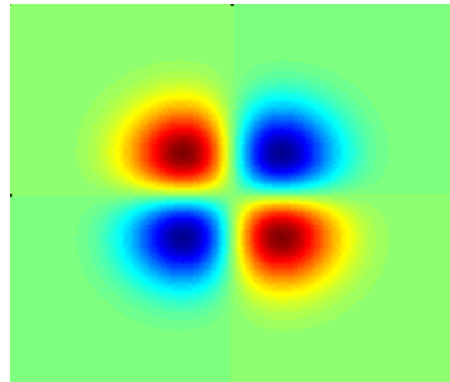
Слика 2.4: Изглед дипола као расподела два монопола који стоје један поред другог на малом растојању и супротних знакова



Слика 2.5: Изглед дипола као расподела два монопола који стоје један више другог на малом растојању и супротних знакова



Слика 2.6: Лонгитудални квадрипол



Слика 2.7: Латерални квадрипол

$$p(\mathbf{x}, t) = (\nabla \otimes \nabla) : \left(\frac{\mathbf{T}(t - \frac{|\mathbf{x}|}{c_0})}{4\pi|\mathbf{x}|} \right) \quad (2.19)$$

\otimes је симбол за производ два тензора и $:$ је двострука контракција. Квадриполарно акустично поље може још да се прикаже коришћењем комбинацијом два дипола на краткој удаљености једног од другог. У случају када два дипола леже на истој осни, тада ћемо говорити о лонгитудалним квадриполима, док ако два дипола су паралелна један према другом и антифазно су постављени, онда ћемо имати латералне квадриполе. На слици 2.6 и 2.7 је приказан шематски приказ квадрипола.

Коначно можемо да приметимо да извор типа $s(\mathbf{x}, t) = \rho_0 \partial_t q(\mathbf{x}, t)$ презентује дистрибуцију монопола. Извор $s(\mathbf{x}, t) = \nabla \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$, представља дистрибуцију дипола и на крају $s(\mathbf{x}, t) = (\nabla \otimes \nabla) : \mathbf{T}(\mathbf{x}, t)$ је дистрибуција квадрипола.

Последњи члан у (2.14) представља дистрибуцију површинског дипола. Узимајући у обзир Фраунхоферову апроксимацију (2.15) и правило промене временског и просторног извода (2.10), можемо да апроксимирамо удаљено поље дистрибуције притиска генерисаног од стране дипола као,

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{4\pi} \partial_i \int_{\mathbb{R}^3} \frac{f_i(\mathbf{y} - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|/c_0)}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \approx \frac{1}{4\pi} \partial_i \left[\frac{1}{|\mathbf{x}|} \int_{\mathbb{R}^3} f_i(\mathbf{y}, t - \frac{|\mathbf{x}|}{c_0} + \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{c_0 |\mathbf{x}|}) d\mathbf{y} \right] \\ &\approx \frac{1}{4\pi |\mathbf{x}|} \partial_i \left[\int_{\mathbb{R}^3} f_i(\mathbf{y}, t - \frac{|\mathbf{x}|}{c_0} + \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{c_0 |\mathbf{x}|}) d\mathbf{y} \right] \approx -\frac{x_i}{4\pi |\mathbf{x}|^2} \partial_t \left[\int_{\mathbb{R}^3} f_i(\mathbf{y}, t - \frac{|\mathbf{x}|}{c_0} + \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{c_0 |\mathbf{x}|}) d\mathbf{y} \right] \end{aligned} \quad (2.20)$$

Завршићемо ово подсећање на физикалну акустику представљањем добро познатог и корисног резултата. Мултиполарна експанзија изворне дистрибуције [76] [78].

Далеко акустично поље од стране изворне дистрибуције $s(\mathbf{x}, t)$ карактеристичне дужине L је иста као да је генерисана од бесконачно много тачкастих монопола

$$\sum_{|\alpha|=0}^{\infty} S^\alpha(t) D^\alpha [\delta(x)] \quad (2.21)$$

где се $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ односи на више индексни у \mathbb{R}^n , где ће се у нашем случају углавном користити $n = 2$ тако да је $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ и $D^\alpha = \partial^{|\alpha|} / \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_n^{\alpha_n}$, где је S^α дато као,

$$S^\alpha(t) = \frac{(-1)^{|\alpha|}}{|\alpha|!} \int_{\mathbb{R}^3} y_1^{\alpha_1} \dots y_n^{\alpha_n} s(\mathbf{y}, t) d\mathbf{y} \quad (2.22)$$

може се показати да поље притиска далеко од извора има следећи облик,

$$p(\mathbf{x}, t) \approx \sum_{|\alpha|}^{\infty} D^\alpha \left[\frac{S^\alpha(t - |\mathbf{x}|/c_0)}{4\pi |\mathbf{x}|} \right] \quad (2.23)$$

За $k_0 L \ll 1$ акустични притисак се може апроксимирати првим чланом низа тј. монополном. Ако члан нестане због симетрије, онда би дипол доминирао и његова амплитуда би била редукована за фактор $\sim (k_0 L)$ у односу на монопол. Ако и дипол

нестане, квадрипол онда доминира са редукцијом амплитуде $\sim (k_0 L)^2$ у односу на монопол.

Последња једначина (2.23) је основа за активну контролу буке [79]. Она омогућава да се апроксимира било који извор буке као сет лакших за дефинисање монопола.

2.4 Лајтхилова (Lighthill) акустична аналогија

Основа аероакустике је концепт акустичне аналогије. Покушај да се дефинише шта је дефинисано под појмом акустичне аналогије дат је у [58].

Акустична аналогија се односи на препакивање екзактне једначине механике флуида у облик нехомогене таласне једначине погодне због чињенице да далеко од извора флукуације притиска пропадају кроз миран флуид и са амбијеталном брзином звука c_0 , тако да,

$$\left(\frac{1}{c_0^2} \partial_{tt}^2 - \nabla^2\right) h(\mathbf{x}, t) = s(\mathbf{x}, t) \quad (2.24)$$

за било које h које је једнако p у пољу далеко од извора. Десни члан једначине се понаша као извор за h и може да садржи сву механику пропадања као што су расејавање турбулентних вртлога и температурне нехомогености, као и преламања средње брзине и температурног поља, флуидна заштита сваког вртлога од стране локално померајућег флуида и нелинарног извртања пропадајућих таласа.

До сада је представљено неколико аналогија у уводу. У тези ћемо се концентрисати на Лајтхилуову аналогију која је добијена у пионирском раду [34], [35]. Биће приказано како се добија ова аналогија као и њена апроксимација у случају струјања малим Маховим бројевима.

Као што је већ речено акустична аналогија се базира на премештању једначине механике флуида да би се добила нехомогена таласна једначина. Лајтхил је био први који је формулисао стишљиву једначину континуитета и количине кретања флуида да би добио претходно наведено. Изворни члан резултујуће нехомогене таласне једначине се очекује да буде једино важан у турбулентном или вртложном делу струјања и у првој апроксимацији за генерисани звук се очекује да има

занемарљиво малу повратну реакцију [35], [80]. Ово је одговарајућа хипотеза ако се може занемарити стишљивост што је случај за струјање малим Маховим бројевима. Касније ћемо видети да снага Лајтхиловог приступа, макар за онај случај који нас интересује прецизно лежи на чињеници да ли стишљивост може да се занемари или не.

Да би извели једначину Лајтхила почећемо од једначине континуитета или одржања масе и једначине количине кретања у Рејнолдсовој форми за стишљиво струјање, где ћемо претпоставити да нема извора масе као ни запремисних сила које делују на њу. Једначине су,

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (2.25)$$

$$\partial_t (\rho \mathbf{u}) + \nabla \cdot \Phi = 0 \quad (2.26)$$

Стога је узет извод по времену једначине (2.25) и онда је одузета од једначине (2.26) што доводи до,

$$\partial_{tt}^2 \rho - \nabla \cdot (\nabla \cdot \Phi) = (\nabla \otimes \nabla) : \Phi \quad (2.27)$$

Дато је да само дивергенција тензора флуksа количине кретања, $\Phi = \rho(\mathbf{u} \otimes \mathbf{u} - \sigma)$ која се јавља у једначини кретања флуида, можемо редефинисати Кошијев напонски тензор σ и уједно преставити константни притисак p_0 .

$$\sigma = -(p - p_0)\mathbf{I} + \mu[\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T - \frac{2}{3}(\nabla \cdot \mathbf{u})\mathbf{I}] \quad (2.28)$$

Са друге стране, у случају идеалног линарног акустичног медијума, тензор флуksа количине кретања се претвара у једноставнији облик где трансфер количине кретања може да се деси само под дејством притиска. У том случају тензор постаје

$$\Phi_0 = (p - p_0)\mathbf{I} = c_0^2(\rho - \rho_0)\mathbf{I} \quad (2.29)$$

Узимајући и обзир да можемо да заменимо $\partial_{tt}^2 \rho$ са $\partial_{tt}^2(\rho - \rho_0)$ у (2.27), стога можемо узети двоструки дивергент од (2.29), $(\nabla \otimes \nabla) : \Phi = c_0^2 \nabla^2(\rho - \rho_0)$ и одузимајући од обе стране једначине (2.29) стижемо до,

$$(\partial_{tt}^2 - c_0^2 \nabla^2)(\rho - \rho_0) = (\nabla \otimes \nabla) : \mathbf{T} \quad (2.30)$$

где је,

$$\mathbf{T} = \Phi - \Phi_0 = \rho(\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + [(p - p_0) - c_0^2(\rho - \rho_0)]\mathbf{I} - \sigma \quad (2.31)$$

Једначина (2.30) је прослављена Лајтхилова једначина и тензор \mathbf{T} је познат као Лајтхиллов стрес тензор. Треба напоменути да није усвојена ниједна апроксимација у једначини (2.31). Стога Лајтхилову аналогију можемо посматрати као алтернативну формулацију једначина које описују стишљиво струјање флуида. Исто тако треба приметити да једначина (2.30) представља нехомогену таласну једначину чији је изворни члан садржи двоструки дивергент који кореспондира дистрибуцији извора квадриполарног типа. Због тога, Лајтхилова преформулација једначине кретања флуида се испоставља да је аналогна са проблемом добијања радијације звука која се генерише из квадриполарног извора који су лоцирани у зони извора и простире се у стационарном домену идеалног флуида. То је разлог зашто се једначина (2.30) односи на акустичну аналогију. Јачина извора квадриполарног типа је дат са \mathbf{T} . Уствари (2.30) је била прва акустична аналогија која је била добијена и којој није била потребна никава апроксимација, стога се понекад назива и егзактна акустична аналогија.

Чињеница да није узета у обзир ниједна апроксимација да би се добила једначина (2.30) уствари чува сву комплексност оригиналне једначине која описује компресибилно струјање флуида. Стога једначина (2.30) се не односи само на генерисање аеродинамичке буке, него она у себи носи и друге ефекте као што су конвекција струјања, преламање као последица промене брзине звука, модулација услед акустичних нелинарности или слабљење због термалних и вискозних ефеката [77]. Први члан тензора у (2.31) је нелинарни Рејнолдсов напоснки тензор $\rho(\mathbf{u} \otimes \mathbf{u})$, који се сматра као највише битан у вртложном региону струјања. Други члан

тензора је вишак количине кретања приликом трансфера од стране притиска у идеалном линеарном флуиду густине ρ_0 и брзине звука c_0 . Варијација средње вредности густине као и нелинеарности амплитуде таласа су одговорне за то. Коначно вискозни напонски тензор σ игра улогу ослабљивача звука. Практична корисност Лајтхилове акустичне аналогije лежи на занемаривању неких ефеката које су мало пре описани и при том симплификовани Лајтхилев тензор. Зато што ти ефекти углавном зависе од стишљивости струјања, ми ћемо претпоставити да је струјање нестишљиво што је валидна претпоставка за струјања малим маховим бројевима $M \ll 1$ где је M - Махов број са дефиницијом $M = \frac{U}{c_0}$ где је U карактеристична брзина струјања. Узмајући у обзир да ћемо углавном бити заинтересовани за струјања великим Рејнолдсовим бројевима типична за ваздухопловне апликације, можемо занемарити вискозни стрес у једначини (2.30). На крају, средња густина као и брзина звука ће бити униформни тако да ће други члан у једначини (2.30) бити нула. Лајтхилова једначина је под овим условима,

$$(\partial_{tt}^2 - c_0^2 \nabla^2)(\rho - \rho_0) = \rho_0(\nabla \otimes \nabla) : (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) \quad (2.32)$$

где треба подсетити да \mathbf{u} је соленоидно поље брзине.

Валидност једначине (2.32) је без икаквог поговора очигледно. Са друге стране Кров (Crow) [45] је истраживао Лајтхилеву једначину (2.30) у смислу пертурбације редова са флукуацијом Маховог броја $M_t = \frac{|\mathbf{u}|}{c_0}$. Узимајући у обзир флукуације притиска уместо густине, следи да,

$$(M_t^2 \partial_{tt}^2 - \nabla^2)(p - p_0) = \rho(\nabla \otimes \nabla) : (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + M_t^2(\nabla \otimes \nabla) : \mathbf{T}^1 + \dots \quad (2.33)$$

где \mathbf{T}^1 представља допринос изворном члану од интеракције између нестишљивих и акустичних мода струјања. Стога изгледа противречно да се користи апроксимација (2.32) што би довело до таланог занемаривања $O(M_t^2)$ члана са десне стране једначине (2.33), док их задржавамо на левој страни једначине. Упркос овом очигледном недостатку, Кров (Crow) [45], је показао користећи метод Упарене Асимптотске Експанзије (Matched Asymptotic Expansions) да је (2.32) валидна за компактна струјања малим маховим бројевима. Ова валидност је услед чињенице

да $\partial_{tt}^2 p$ занемарљива у зонама струјања где се члан $(\nabla \otimes \nabla) : \mathbf{T}^1$ не може занемарити и обрнуто. Као последица, задржавање двоструког извода акустичног притиска на левој страни једначине (2.33) и занемаривајући допринос који доноси члан са десне стране \mathbf{T}^1 резултује прихватљивом грешком зато што акустично поље реда тачности до вредности Маховог броја. Не тако давно Ристорћели (Ristorcelli)[46] је извео затворени модел да би решио горе наведену несагласност за слаба стишљива струјања која се једино користе за соленоидно поље брзине и притиска.

Сада прихватајући (2.32) валидном за нашу сврху и ако Рејнолдсов напоснки тензор (изворни члан) у (2.32) се могу некако одредити, једначина (2.32) даје валидну репрезентацију аеродинамички генерисаног звука. Углавном ћемо бити заинтересовани за Фуријеову трансформацију једначине (2.32). У том случају директно можемо добити флукуацију густине (стога и флукуацију притиска) што је и захтевана информација за већину инжењерских проблема. Фуријеова трансформација даје десни члан нехомогене Хелмхолц једначине. То ће нам омогућити да искористимо бенефит неколико нумеричких техника које су развијене за то као и за генералну конвекционо-дифузиону-реактивну једначину.

Узимајући у обзир да $p = c_0^2 \rho$ једначина (2.32) у фреквентном домену постаје нехомогена Хелмхолцова једначина.

$$(-\nabla^2 - k_0^2)p = \rho(\widehat{\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}}) \quad (2.34)$$

Централно за тезу ће бити да се реши физикални проблем који описује једначина (2.34) у датом прорачунском домену Ω и са преписаним граничним условима на $\partial\Omega$. Прво је задатак наћи изворни члан тј. Рејнолдсов тензор а онда решити нехомогену Хелмхолцову једначину.

Безгранично решење једначине (2.32) се традиционално решава са интегралном формулацијом представљеном у претходном поглављу. Акустични притисак далеко од акустичног извора се може добити узимајући у обзир Лајтхилов тензор дупле дивергенције са безграничном Гриновом функцијом (2.7), што доводи [78], [81] за $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$.

$$\begin{aligned}
 p(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \rho_0 \partial_{y_i} \partial_{y_j} u_i u_j(\mathbf{y}, t - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|/c_0) d\mathbf{y} \\
 &\approx \frac{1}{4\pi} \partial_i \partial_j \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \rho_0 u_i u_j(\mathbf{y}, t - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|/c_0) d\mathbf{y} \\
 &\approx \frac{\rho x_i x_j}{4\pi c_0^2 |\mathbf{x}|} \partial_{tt}^2 \int_{\mathbb{R}^3} u_i u_j(\mathbf{y}, t - \frac{|\mathbf{x}|}{c_0} + \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{c_0 |\mathbf{x}|}) d\mathbf{y}
 \end{aligned} \tag{2.35}$$

Једначина (2.35) даје акустични притисак у тачци \mathbf{x} и времену t онда када је Рејнолдсов тензор познат (да ли експериментално, да ли прорачунском механиком флуида или аналитичким решењем). Као што је већ напоменуто овај тензор се очекује да ће имати вредности различите од нуле само у вртложном региону струјања тако да интеграл у (2.35) има коначну вредност. Димензиона анализа различитих чланова који се појављују у једначини (2.35) доводи до познатог закона "eight power" [35]. Исто тако може да се покаже да однос између генерисане акустичне снаге и енергије која се доводи струјању да би се направила турбуленција је пропорционална константи ⁵. Овај податак верификује чињеницу да аеродинамички генерисани звук је споредни ефекат целокупног кретања флуида.

2.5 Присуство граница-једначина Ffowcs-Williams-Hawkings-a

До сада смо поставили проблем стварања и пропагације аеродинамичког звука у слободном простору или \mathbb{R}^3 . У већини практичних случајева присуство граница игра веома битну улогу. Замислите на пример буку генерисану од стране фена или хеликоптерске лопатице или у крајњем случају од стране турбуленције у смичућем слоју који раздваја млазњак од ваздушног медијума. Да би се решили овакви проблеми може се пратити процедура описана у претходним поглављима где би се узела одговарајућа Гринова функција за задату геометрију. Овај приступ није нарочито лак, посебно у случајевима комплексне геометрије. Алтернативни метод је представио Фовкс-Вилијамс (Ffowcs-Williams) и Хавкинс (Hawkings)[40], који се састоји у преформулацији изворног члана у једначини (2.30) да би се узели у обзир присуство граница. Овај приступ нам омогућава да и даље користимо Гринову функцију када је интегрална формулација избор за решавање проблема.

Фовкс-Вилијамсова и Ховкингсова процедура почиње тако што се представи затворена контролна површина S . Функција $f(\mathbf{x}, t)$ је дефинисана тако да,

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}, t) &= 0 & \forall \mathbf{x} \in S \\ f(\mathbf{x}, t) &> 0 & \forall \mathbf{x} \text{ unutar strujanja} \\ f(\mathbf{x}, t) &< 0 & \forall \mathbf{x} \text{ unutar } S \end{aligned} \quad (2.36)$$

Ако се S креће брзином v , следећи израз важи,

$$\partial_t f + v \cdot \nabla f = 0 \quad (2.37)$$

Хевисајдова (Heaviside) функција $H(f)$ се дефинише тако да је јединична вредност свуда у струјању и нула унутар S . Множењем једначине континуитета и количине кретања са функцијом $H(f)$ и пратећи наложену процедуру која је коришћена за дефинисање Лајтхилове једначине (2.32) долазимо до диференцијалне форме једначине Ffowcs-Williams-a и Hawking-a.

$$\nabla^2 [H(f)c_0^2(\rho - \rho_0)] = (\nabla \otimes \nabla) : [\mathbf{T}H(f)] + \nabla \cdot [s\delta(f)] + \partial_t [q\delta(f)] \quad (2.38)$$

где је \mathbf{T} Лајтхилев тензор (2.31), δ је Диракова делта функција у $f=0$ и

$$s = -\rho \mathbf{u} \otimes (\mathbf{u} - \mathbf{v}) - (p - p_0)\mathbf{I} + \sigma \quad (2.39)$$

$$q = \rho_0 \mathbf{v} + \rho(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \quad (2.40)$$

Треба приметити ако не постоји површина, $H(f) = 1$ и $\delta(f) = 0$ таква да се добије Лајтхилова једначина. Стога разлика између (2.30) и (2.38) је присуство два нова изворна члана који представљају дистрибуцију дипола и монопола.

Комбиновањем једначине (2.38) са Гриновом функцијом (2.3) добијамо интегралну форму Фовкс-Вилијамсове и Ховкингсове једначине која узима у обзир границе у струјању.

$$\begin{aligned}
 H(f)c_0^2(\rho - \rho_0) &\approx \frac{1}{4\pi} \partial_i \partial_j \int_{\Omega(\tau)} \frac{|T_{ij}|}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d\Omega \\
 - \frac{1}{4\pi} \partial_i \int_{S(\tau)} \frac{|\rho u_i(u_j - v_j) + (p - p_0)\delta_{ij} - \sigma_{ij}|}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} n_j dS \\
 - \frac{1}{4\pi} \partial_t \int_{S(\tau)} \frac{|\rho(u_i - v_i) + \rho_0 v_i|}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} n_i dS
 \end{aligned} \tag{2.41}$$

Једначина (2.41) је генерализација Кирхоф-Хелмхолцове једначине и састоји се од дистрибуције дипола и монопола плус квадриполарна контрибуција од стране Рејнолдсовог напонског тензора.

Посебно интересантан случај Фовкс-Вилијамсове и Ховкингсове једначине је ако је контролна површина стационарна. У том случају $v = 0$ и једначина (2.41) се редукује на Курлову (Curle) једначину [38]

$$\begin{aligned}
 H(f)c_0^2(\rho - \rho_0) &\approx \frac{1}{4\pi} \partial_i \partial_j \int_{\Omega} \frac{|T_{ij}|}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d\Omega \\
 - \frac{1}{4\pi} \partial_i \int_S \frac{|\rho u_i(u_j - v_j) + (p - p_0)\delta_{ij} - \sigma_{ij}|}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} n_j dS \\
 - \frac{1}{4\pi} \partial_t \int_S \frac{|\rho(u_i)|}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} n_i dS
 \end{aligned} \tag{2.42}$$

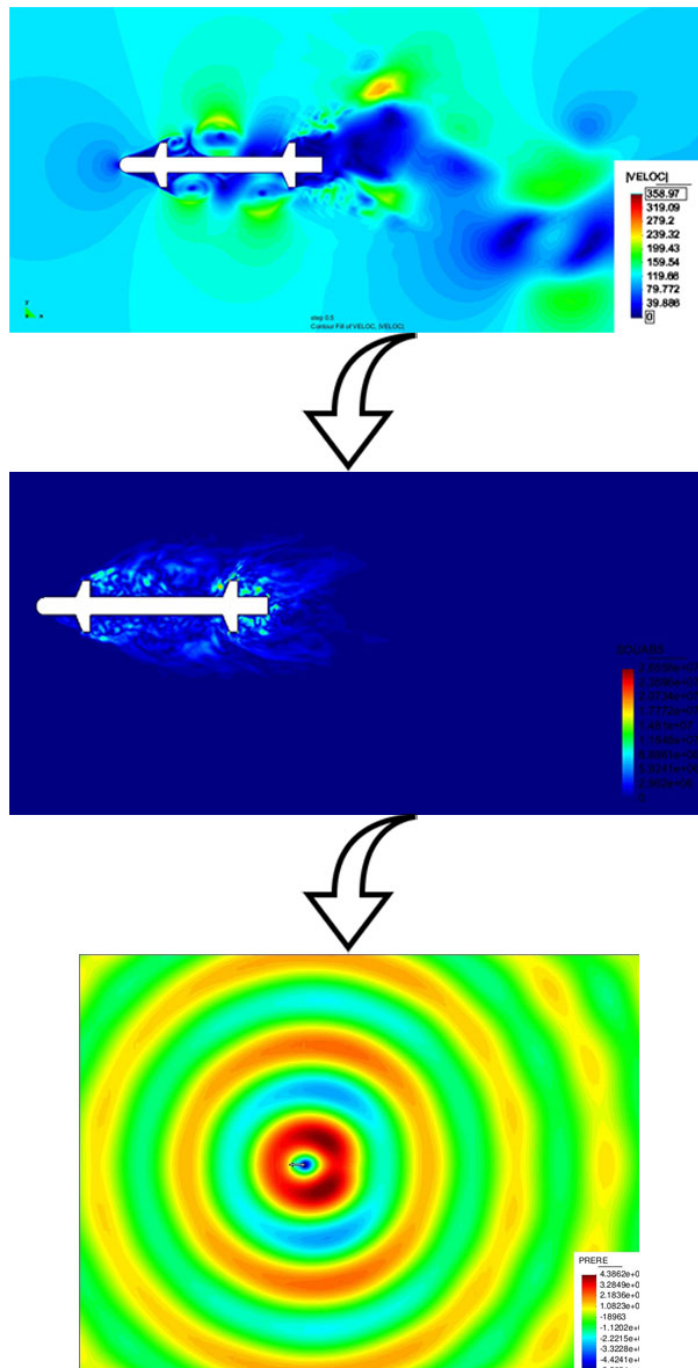
Ако је површина S крута ($u = 0$ на S) (2.42) даље симплификације су,

$$\begin{aligned}
 H(f)c_0^2(\rho - \rho_0) &\approx \frac{1}{4\pi} \partial_i \partial_j \int_{\Omega} \frac{|T_{ij}|}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d\Omega \\
 - \frac{1}{4\pi} \partial_i \int_S \frac{(p - p_0)\delta_{ij} - \sigma_{ij}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} n_j dS
 \end{aligned} \tag{2.43}$$

Користећи горе наведену интегралну једначину да би израчунали генерисани аеродинамички звук уопште није лаган задатак и мора да се приступи проблему веома пажљиво [58], [59]. Треба напоменути да интегрална формулација горе представљена се може исто тако развисти и у фреквентном домену [58], [59]

2.6 Методологија за решавање аероакустичних проблема

Пошто је у претходним поглављима представљен физикални проблем генерисања аеродинамичког звука, као и стандардни начин да се проблем реши. У овом поглављу представимо алтернативне методе за решавање. Наш главни циљ је да нађемо нумеричко решење за временску Фуријеову трансформацију оригиналне акустичне Лајтхилове аналогије користећи Рејнолдсов тензор за апроксимацију Лајтхиловог тензора (2.34). Предложена методологија [82] је део методе коначних елемената и концептуално може да се подели у три корака. У првом кораку прорачунска механика флуида (Computational Fluid Dynamics-CFD) врши симулацију нестишљиве Навије-Стоксове једначине да би се добило поље брзина. У другом кораку, изворни члан на десној страни једначине (2.32) који представља двоструку дивергенцију Рејнолдсовог тензора је срачунат и преведен у фреквентни домен помоћу Фуријеове трансформације. Коначно, трећи корак резултира у убацивању добијеног резултата у другом кораку у нехомогену Хелмхолцову једначину (2.34) и њено решавање да би се добило акустично поље притиска. Графичка шема наведеног приступа за решавање аероакустичних проблема је приказана на слици 2.8.



Слика 2.8: Методологија прорачуна аероаскустичне симулације

2.6.1 Симулација прорачунске механике флуида

Циљ CFD прорачуна је да се добије вектор брзине струјања \mathbf{u} временски промјелјиве нестишљиве Навије-Стоксове једначине. Математички проблем се састоји у решавању једначине у задатом прорачунском домену $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ са границом $\partial\Omega$ и

преписаним почетним и граничним условима. Граница $\partial\Omega$ се може поделити на два раздвојена сета $\partial\Omega = \overline{\Gamma_D} \cup \overline{\Gamma_N}$ узимајући у обзир преписане Дирихлеове (Dirichlet) и (Neuman) Нојманове граничне услове. Проблем који треба да се реши гласи:

$$\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} \quad \text{in } \Omega, \quad t > 0, \quad (2.44)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \text{in } \Omega, \quad t > 0 \quad (2.45)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) \quad \text{in } \Omega, \quad t = 0, \quad (2.46)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}_D(\mathbf{x}, t) \quad \text{on } \Gamma_D, \quad t > 0, \quad (2.47)$$

$$n \cdot \sigma(\mathbf{x}, t) = \mathbf{t}_N(\mathbf{x}, t) \quad \text{on } \Gamma_N, \quad t > 0, \quad (2.48)$$

где ν представља кинематску вискозност, \mathbf{f} спољашњу силу и \mathbf{t}_N тензију на граници. У случају великих Рејнолдсових бројева можемо се суочити са проблем могућности симулације турбулентног струјања. Принципијално постоје четири приступа за решавање проблема симулације турбуленције [83], а то су, RANS (Reynolds Averaged Navier Stokes) приступ, DNS (Direct Numerical Simulation) приступ, LES (Large Eddy Simulation) и хибридне методе које комбинују позитивне стране различитих метода и комбинују их у једну методу. Испоставило се да RANS приступ не може да ухвати временске флукуације. Са друге стране DNS је можда најбољи избор са стране нумеричких метода пошто решава иницијалну једначину са веома густом мрежом и у овом случају прорачунско коштање је реда величине $R_e^{9/4}$ што за веома високе рејнолдсове бројеве који су нормални у ваздухопловним апликацијама овај вид приступа ствара просто немогућим са постојечћим ресурсима. Са друге стране хибридне методе користе више метода које су специјализоване за одређене услове и тако ствара супериорне приступе али са веома великим недостатком прорачунског времена који је неколико пута мањи од DNS методе али и даље веома недостижан за обичне компјутере. На крају у оваквим ситуацијама се углавном користи LES методологија која врши просторно раздвајање $\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{u}'$, $p = \tilde{p} + p'$ брзине и притиска у (2.44)-(2.48) где $(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{p})$ представљају величине које се могу прорачунски решити, док (\mathbf{u}', p') представљају мале величине које се не могу ухватити прорачунском мрежом а самим тим и срачунати.

У стандардном LES приступу, раздвајање величина се одрађује конволуцијом једначина (2.44)-(2.48) са функцијом филтера [83], [84]. Као што је познато то дефинише затворени проблем због једног више члана типа $\mathfrak{R} = \overline{\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}} - \bar{\mathbf{u}} \otimes \bar{\mathbf{u}}$, који се појављује у једначини и који захтева да се моделира. Овај члан је познат као напонски тензор остатка. Када се добије модел за \mathfrak{R} , резултујући LES модел може да се дискретизује и нумерчки реши. Са друге стране, постоји и други приступ решавања проблема а он се састоји у декомпозицији величина, где би се извршила пројекција на простор методе коначних елемената [85]. У овом случају велике величине би биле оне које могу да се ухвате са прорачунском мрежом и мале величине би биле оне које то не могу. Предност оваквог приступа је да се у том случају превазилазе неке потешкоће код класичног LES модела као што је на пример сакупљање грешака које се јављају приликом дефинисања затвореног модела и грешке које се јављају од стране адаптивне нумеричке стратегије.

Ова алтернативна метода је развијена у оквиру познате стабилизационе методе Сабгрид Скејл (Subgrid scale stabilization-SGS) стабилизациона метода [86],[87] и састоји се у одговорној алтернативи LES моделирања турбулентног струјања [88], [89], [90]. У наредним поглављима нови приступ SGS методе [91], [92], [93] која је централна за ову тезу ће бити презентована у целости као и њене могућности за моделирање турбулентног струјања.

2.6.2 Акустични извори

Други корак методологије је добијање акустичних извора или изворног члана нехомогене Хелмхолцове једначине $\rho(\nabla \otimes \nabla) : (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u})$ из вектора брзине струјања прорачунатом у првом кораку методологије. Пошто изворни члан садржи двоструку дивергенцију он не може директно да се прорачуна користећи метод коначних елемената класе C^0 , осим ако се не интегрални у деловима где један извод прелази на тест функцију. Са друге стране постоји могућност да се апроксимира изворни члан са изводом првог реда захваљујући константи нестишљивости. Следи,

$$\begin{aligned}
 (\nabla \otimes \nabla) : \mathbf{T} &\approx \rho_0 (\nabla \otimes \nabla) : (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) = \rho_0 \nabla [(\nabla \otimes \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} + \mathbf{u}(\nabla \cdot \mathbf{u})] \\
 &= \rho \nabla \cdot [(\nabla \otimes \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u}] = \rho \mathbf{u} \cdot \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \rho (\nabla \otimes \mathbf{u}) : (\nabla \otimes \mathbf{u})^\top \\
 &= \rho (\nabla \otimes \mathbf{u}) : (\nabla \otimes \mathbf{u})^\top = s(\mathbf{x}, t)
 \end{aligned} \tag{2.49}$$

где $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ је коришћен два пута и где смо дефинисали $s(\mathbf{x}, t)$ у последњем реду. Ова апроксимација омогућава директну визуелизацију акустичних извора док користи предност коришћења C^0 класе елемената методе коначних елемената.

Други корак методологије се завршава када се изврши Фуријеова трансформација акустичних извора $s(\mathbf{x}, t)$ из временског домена у фреквентни домен $s(\mathbf{x}, \omega)$. Да би се добила довољна тачност за $s(\mathbf{x}, \omega)$ требало би да се складиште велике количине временски променљивог вектора брзине. Тај корак би захтевао велику количину компјутерске меморије. Да би се превазишао тај проблем коришћен је следећи приступ. Фреквенце за које постоји жеља да се одреде акустични извори се одређују на почетку CFD анализе. Током еволуације CFD анализе директно се прорачунава $s(\mathbf{x}, t)$ за сваку временску инстанцу као и контрибуција фреквентном акустичном извору $s(\mathbf{x}, \omega)$. На крају симулације остаје само акустични извор у фреквентном домену, без потребе за складиштење акустичних извора у временском домену. Чак што више, ако постоје већ дефинисане фреквенце које су занимљиве са стране практичне апликације што је углавном случај ако постоје експериментални подаци прорачуни даље могу бити редуковани. Иако смо овде раздвојили корак један и корак два, они се у пракси изводе симултано.

2.6.3 Прорачун акустичног поља

У трећем кораку методологије нехомогени члан Хелмхолцове једначине (2.34) добијених из Фуријеове трансформације (2.32) акустичних извора (2.49) се користи као изворни члан. Математички проблем који решавамо се састоји у томе да нађемо акустични притисак, $p(\mathbf{x}, \omega) : \Omega_{ac} \rightarrow \mathbb{R}$ где је $\Omega_{ac} \subset \mathbb{R}^d$ у ограниченом прорачунском домену са границама $\partial\Omega_{ac} = \Gamma_D \cup \Gamma_B$ ($\Gamma_D \cap \Gamma_B = \emptyset$) тако да је,

$$-(\nabla^2 + k_0^2)p = s \quad \text{unutar } \Omega_{ac} \quad (2.50)$$

$$p = p_D \quad \Gamma_D \quad (2.51)$$

$$\nabla p \cdot \mathbf{n} = M[p] + g \quad \text{na } \Gamma_B \quad (2.52)$$

У (2.50)-(2.52) је $k_0 = \omega/c_0$ таласни број, \mathbf{n} је нормала на спољашњу површину уперена напоље и $M[p]$ је интегрални оператор који дефинише услов нереклексije. Ако је Γ_B довољно далеко од акустичних извора, гранични услов који је означен са $M[p]$ се може заменити са локалним условом ik_0p тако да (2.52) постане Сомерфилдов гранични услов.

$$\nabla p \cdot \mathbf{n} = ik_0p + g \quad \text{na } \Gamma_B \quad (2.53)$$

У свим нашим симулацијама користићемо довољно велике прорачунске домене тако да претходна поставка важи. Трећи корак методологије ће детаљно бити описан у поглављу 5.

Поглавље 3

Нумеричко моделирање турбулентног струјања и развој Ортогоналне Сабгрид скејл стабилизационе методе са динамичким праћењем малих вртлога (Orthogonal Subgrid scale stabilization method with dynamical subscales)

У овом поглављу концентрисаћемо се на први корак већ приказане методологије за симулацију аероакустике при струјањима малим Маховим бројевима или корак прорачунске механике флуида. Главна пажња биће усмерена на моделирање турбуленције као и њена симулација методом коначних елемената. Прво ћемо се подсетити теорије која се бави постојањем јединственог решења за Навије-Стоксову једначину као и аспекти теорије Колмогорова за турбулентно струјање. Онда

ћемо направити кратак осврт на LES методологију за симулирање турбулентног струјања као и њене лоше стране са аспекта симулирања аероакустике. Затим ћемо предсавити нову стабилизациону методу која је у могућности да симулира турбулентно струјање која се назива Ортогонална Сабгрид скејл стабилизациона метода са динамичким праћењем малих величина (Orthogonal subgrid scale with dynamical subscales). На крају ћемо анализирати енергетски биланс за Галеркинову методу решавања Навије-Стоксове једначине као и за две напредне методе, претходно наведене где ћемо показати предности и мане.

3.1 Увод

Као што је објашњено у претходном поглављу прорачунска методологија за решавање Аерокаустичних проблема подразумева као први корак буде CFD симулација нестационарног струјања као и турбулентног струјања да би нашли Лајтхилов тензор. Два паралелна првца су се дефинисала у прошлости за сумулацију турбулентног струјања која имају интерес за инжењерску примену. Ако ставимо са стране лоше аспекте RANS-a (Reynolds Averaged Navier Stokes) као и немогућност да се изврши DNS(Direct Numerical Simulation) за велике Рејнолдсове бројеве доводи до развоја методологије која је између претходно наведене две тј. LES (Large Eddy Simulation) [84]. Са друге стране, нумерички проблеми који настају приликом решавања дискренте диференцијалне једначине или варијационе формулације Конвектно-дифузионо-реактивне једначине мотивисао је развој стабилизационих метода да би се проблеми решили. Репер у развоју стабилизационих метода је била појава SGS стабилизационог приступа који је оригинално назван Variational Multiscale Method (VMM) у оквиру методе коначних елемената [86]. Оба приступа тј. LES и SGS када се примене на динамици флуида деле исте карактеристике тј. обе су засноване на декомпозицији величина континуланог поља брзине и притиска Навије Стоксове једначине. Релација између обе методе за сада није позната као ни када која треба да се користи за симулацију турбулентног струјања. У овом поглављу ћемо покушати објаснити зашто не треба користити LES методологију ако се одговарајућа стабилизациона метода имплементира.

Кључна идеја LES методологије је да изврши експлицитни прорачун великих величина струјања, који зависе од геометрије струјања као и улазних параметара, док би се утицај малих величина (за које се претпоставља да имају универзално понашање [83] на велике величине) додатно моделирао у зависности од великих величина. Оригинална мотивација за LES је била метеоролошка механика флуида [94], проблеми механике флуида као што је астрофизика [95] као и разна инжењерске апликације [96], [97], [98].

Стандардни LES приступ се састоји од четири главна корака [83]:

1. Дефиниција операција филтрације, уобичајно са конволутивним оператором.
2. Филтрација Навије-Стоксове једначине, са појавом дивергенције напонског тензора остатка.
3. Решавање затвореног проблема моделирањем напонског тензора остатка.
4. Проналажење нумеричког решења затворених филтрираних једначина.

Укратко ћемо објаснити сваку ставку.

1. Операција филтрације у првом кораку је обично извршена тако што се изврши конволуција поља брзине и притиска са филтером ниске пропустљивости $(\bar{\cdot}) : v \rightarrow \bar{v}$ тако да после извршене декомпозиције се добије $[\mathbf{u}, p] = [\bar{\mathbf{u}}, \bar{p}] + [\mathbf{u}', p']$ [83], [99]. $[\bar{\mathbf{u}}, \bar{p}]$ су велике филтриране величине, док $[\mathbf{u}', p']$ представљају мале величине тј. остатке. Филтрација се може спровести експлицитно (специјално у динамичким моделима) или имплицитно (стандардни вртложно-вискозни модели као што је познати модел Смагоринског [100]). Неколико могућности је на располагању, као што је диференцијални филтер [101], [102] или најшира примена конволуције са Гаусова функцијом. За филтер се каже да је хомоген ако не зависи од просторне позиције, док нехомогени зависи. Пошто је ширина филтера у зависности од ширине елемента прорачунске мреже, филтрирање у неструктурисаној мрежи се односи на ове друге опције. Под овим условима, диференцирање и операција филтрирања нису комутативне. То треба узети у обзир када се филтрира Навије-Стоксова једначина. Треба напоменути да експлицитна филтрација до сада није добила довољно пажње у заједници која користи метод коначних елемената.

2. Други корак LES приступа се састоји у филтрацији Навије-Стоксове једначине. Пошто ове једначине треба да буду решене у ограниченом домену, што је уобичајан случај и пошто ће се користити неструктурна мрежа нови чланови ће се појавити у филтрираним једначинама. Треба напоменути да филтрацијом се не добија само дивергенција стрес тензора остатка већ и два нова члана. Први се јавља услед некомутативности диференцијалног и филтрираног оператора и други услед коначности прорачунског домена. Ови су чланови до сад били игнорисани. За даљу анализу и за комплетно извођење [103], [104], [105] LES једначине као и проналажење комутативног филтера као и анализа комутативне грешке.

3. Затворени проблем као што је проналажење напонског тензора остатка $\mathfrak{R} = \overline{\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}} - \bar{\mathbf{u}} \otimes \bar{\mathbf{u}}$ је до данашњих дана остао мотив LES истраживања. \mathfrak{R} се може преуредити тако да зависи само од филтрираних променљивих [99] и да успостави неке од инваријантних карактеристика за не филтрирану једначину [106]. Постоји мноштво затворених модела за чланове који чине \mathfrak{R} и само кратак преглед ћемо направити овде. Моделирање затвореног проблема се може поделити у две главне групе, наиме функционално моделирање и структурално моделирање [84]. Функционално моделирање се труди да моделира трансфер енергије између малих и великих величина тј. вртлога. То би значило да се више даје пажња на утицај малих величина на велике него само моделирање \mathfrak{R} . Са друге стране структурално моделирање наглашава моделирање \mathfrak{R} углавном са развијањем редова или се употребљава хипотеза сличности величина. Комбиновани модели се исто тако доста користе.

Најпознатији функционални модел је без икакве сумње модел Смагоринског [100]. Иако је толико популаран овај модел има неке недостатке, а између осталих су његово понашање близу зидова и чињеница да се не допушта енергетски трансфер од малих величина ка великим величинама. Проблем повратне спреге енергетског трансфера је адресиран у развоју динамичких модела [107], [108], [109]. Ови модели захтевају експлицитно филтрирање и задатак је наћи оптималну вредност константе Смагоринског. Што се тиче структуралних модела, ми ћемо поменути само оне који су базирани на развијању редова. Добро познати Кларков модел који се базира на развоју Тејлорових редова за филтриране вредности које се могу убацити у формулацију.

4. Последњи корак LES методологије се састоји у решавању филтриране једначине коришћењем нумеричких метода као што је метод коначних елемената. Симулација и тестирање затвореног проблема наведеног горе се уобичајно извршава за проста струјања са простим геометријама, које дозвољавају компарацију са DNS симулацијом и експерименталним подацима.

Горе описан стандардни приступ за симулацију извршену помоћу LES методе садржи пар потешкоћа које су мотивисале доста истраживача у претходним годинама [110], [111], [112]. Једна од потешкоћа је да се одреди грешка када се претпостави комутативност између филтрираног и диференцијалног оператора. Исто тако је потешкоћа одредити који би био одговарајући избор за LES граничне услове или који би био одговарајући однос између ширине филтера и карактеристичне величине елемента прорачунске мреже. На крају што је и највише битно, требало би знати колика је разлика између грешки добијене од стране физикалног LES модела и од стране процедуре нумеричке дискретизације. Неке од ових тема су обрађене са аналитичке стране [113], [114] и са нумеричке стране [115], [116]. У [117] је извршен преглед неколико LES модела и неки веома интереснатни закључци су изведени као што је да филтрирање није нужно да би се добио LES модел, што доводи до закључка да егзактно решавање напонског тензора остатка је парадоксалан подухват и да неки од LES модела имају супериорно својство регуларизације Навије-Стоксове једначине, што доводи до доброг постављања проблема. У том смислу, може се закључити да LES модел треба задовољити са две карактеристике, наиме, треба регулисати Навије-Стоксову једначину што доводи до добро постављеног проблема, и треба га довести до одговарајућег решења варијационе форумалције. У покушају да се обезбеди први захтев ка математичком дефинисању LES методе, нотација одговарајуће апроксимације Навије-Стоксове једначине је изведена у [118]. У том контексту је вредно споменути да DNS који користи Галеркинов метод са елементима ниског реда чине одговарајућу апроксимацију Навије-Стоксове једначине, што може довести до закључка да се понекад добијају бољи резултати за елементе мањег реда када LES модел није укључен.

Други главни истраживачки приступ који је у последње време резултирао веродостојном опцијом за симулацију турбулентног струјања је у оквиру стабилизационе методологије методе коначних елемената. Стабилизационе методе

су потребне да би се превазишле нумеричке потешкоће које долазе када се дискретизује диференцијална једначина или њихове слаба тј. варијациона формулација. Стабилизационе процедуре је први увео Фон Нојман (Von Neumann) [119] који је схватио да дискретна верзија скаларне конвектно-дифузионо-реактивне (Convection-Diffusion-Reaction CDR) једначине је уствари инфрадифузиона. Дискретна верзија скаларне CDR једначине која користи метод коначних разлика има мањи коефицијент дифузије. Да би решио проблем Фон Нојман је додао додатну вештачку дифузију дискретној једначини. Понекад овај приступ резултује са претераном дифузијом. Процедура је побољшана почетком 1980 тако што је додата дифузија само дуж струјнице. То се дешава зато што конвективни члан је помножен са тест модификованом функцијом, док је остатак једначине помножен са оригиналном тест функцијом. Да би метод био доследан на крају су сви чланови помножени са модификованом тест функцијом што је довело до SUPG (Stream-Upwind Petrov-Galerkin) методе [120].

Са друге стране пронађено је у [121] да градијент притиска у Стоксовом проблему се може видети као конвективни члан. То је омогућило SUPG методи да користи исте интерполационе функције за притисак и брзину струјања које ће задовољити инф-суп услов. Иницијално тест функција брзине је модификована са чланом који је порпроционалан градијенту тест функције притиска, али убрзо је цео Стоксов оператор био аплициран на тест функцији [122], [123]. Овај приступ је довео до Galerkin/Least-Squares-GLS стабилизационе методе.

Концептуално револуционарни приступ за стабилизацију процедуру је појављивање Субгрид скејл стабилизације (Subgrid Scale Stabilization) или ти Варијациони мултискејл методологија (Variational Multiscale Models). SGS приступ [124], [86] је заснован на декомпозицији између величина које се могу решити прорачунском мрежом и величина које су не решиве са прорачунском мрежом. Ова декомпозиција је урађена тако што је извршена пројекција на простор методе коначних елемената. Оригинална варијациона формулација проблема је онда подељена у две једначине. Једна једначина уређује динамику малих величина и њено решење треба да се моделује некако, док друга једначина уређује динамику решивих величина које се могу срачунати нумерички. Апроскимација решења прве једначине је убачена у другу једначину да би узео у обзир ефекте малих величина на оне које су решиве прорачунском мрежом.

Неколико добро познатих стабилизационих су развијене и оне се углавном разликују у томе како је апроксимативно решење за мале величине моделирано и решено. Најлакше решење за мале величине је добијено из алегабарског приступа, који је прво изведен у [87] и који је користио апроксимацију Гринеове функције за једначине малих величина. Неколико опција су могуће као што је коришћење "bubble" функција [125] или ортогоналне декомпозиције [126], [91],[92] .

Сада ћемо се скоцентрирати на SGS тј. VMM приступ. Када се први пут примени на Навије-Стоксову једначину, њена иницијална мотивација је била да се реше неки нумерички проблеми као што је неопходност да се задовољи инф -суп услов (што је имплицирало да се користе различити интерполациони простори за поље притиска и брзине струјања) или нумеричке нестабилности које се јављају код конвектно доминантних струјања. Идеја да стабилизациони чланови у SGS приступу могу бити довољни да се симулира турбулентно струјање је наглашено у оквиру ортогоналног SGS-а [91],[92]. Веома добри резултати су добијени за транзиционо струјање као и за тотално развијено турбулентно струјање у каналу дајући могућност да се тотално нумеричким приступом може симулирати турбулентно струјање. Одлични резултати се могу наћи још и у [127].

У овом поглављу ћемо дати још пар аргумената за моделирање не физикалног приступа симулације турбулентног струјања. Веома битна ставка затвореног проблема LES модела је да он треба да задовољи промену кинетичке енергије између филтрираних великих величина ка малим нерешивим величинама која треба да је једнака физикалној промени тј. дисипацији Колмогоров дужинке величине. Разматрајући Ортогоналну SGS стабилизациону методу биће показано да контрибуција енергетског баланса која долази од стране стабилизационог члана који се добија у дискретној варијационој формулацији Навије-Стоксове једначине под тотално нумеричким околностима, је уствари већ пропорционална физикалној промени дисипације. На крају ћемо закључити да је LES приступ можда сувишан и непотребан.

3.2 Навије-Стоксова једначина

3.2.1 Јака или диференцијална формулација

Математички проблем са којим се ми суочавамо је да се реши нестишљива Навије-Стоксова једначина за струјање у ограниченом домену, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$. Као што је опште познато једначине се добијају из закона о одржању масе и количине кретања где се претпоставља константна густина ρ и користећи хипотезу о Њутновм флуиду. Резултујуће једначине су,

$$\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} \quad \text{u} \quad \Omega \times (0, T) \quad (3.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \text{u} \quad \Omega \times (0, T) \quad (3.2)$$

где \mathbf{u} представља вектор брзине, а p је притисак, ν је кинематска вискозност и \mathbf{f} представља спољашњу силу која делује на флуид. Једначина (3.2) која одговара једначини континуитета је уобичајно позната као нестишљиво ограничење. Једначина (3.1) која представља једначину одржања количине кретања заједно са нестишљивим ограничењем показује велику разноврстност замршених решења због постојања нелинарног члана $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$. То резултира са веома комплексном физиком као што је и турбулентно струјање. Претходно дефинисане једначине се допуњавају са одговарајућим граничним и почетним условима. Овде ћемо само предсавити Дирихлеове граничне услове због једноставности,

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad \Gamma = \partial\Omega \quad \textit{Dirihlet granicni uslovi} \quad (3.3)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) \quad \textit{na} \quad \Omega \quad \textit{Pocetni uslovi} \quad (3.4)$$

Систм једначина (3.1)-(3.4) заједно са граничним условима као и почетним условима дефинише класичну јаку или диференцијалну формулацију Навије-Стоксовог проблема.

3.2.2 Слаба или варијациона формулација

Представићемо слабу или варијациону формулацију Навије-Стоксове једначине која је направљена у оквиру функционала. Исто тако представимо функционалне просторе који су потребни за дефинисање математичког проблема. Нека је $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$ подпростор од $\mathbf{H}^1(\Omega)$ кој задовољава Дирихлеове граничне услове Навије-Стоксове једначине. Дефинисаћемо функционални простор на следећи начин,

$$\mathbf{X}(\Omega) = \mathbf{H}_0^1(\Omega) \quad \text{Dirihlet} \quad (3.5)$$

$$\mathbf{V}(\Omega) = \mathbf{u} \in \mathbf{X}(\Omega) | \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (3.6)$$

$$\mathbf{H}(\Omega) = \bar{V}(\Omega)^{L^2} \quad (3.7)$$

Исто тако ћемо разматрати математички простор у коме живе вишедимензионе функције које су бесконачно диференцијабилне $C_0^\infty(\Omega) = (C_0^\infty(\Omega))^d$. Када смо се опремили са овим математичким просторима, дефинисаћемо простор у којој су тест функције $V = v \in C_0^\infty(\Omega) | \nabla \cdot v = 0$.

Слаба формулација Навије-Стоксове једначине се може добити тако што ћемо као и уобичајно помножити једначине (3.1)-(3.2) са тест функцијом и интегралити у целом домену Ω . После парцијалне интеграције вискозног члана, слаба формулација може да се дефинише као: пронађи $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \in \mathbf{V}(\Omega)$ за свако $t > 0$ тако да је,

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) + \nu(\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v}) = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle, \quad \forall \mathbf{v}(\mathbf{x}) \in V \quad (3.8)$$

у временском домену $(0, \mathbf{T})$ или $(0, \infty)$ и са иницијалним условима $\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x})$

у једначини (3.8) $b(\cdot, \cdot, \cdot)$ представља трилинарну форму,

$$b(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{w}) dx \quad (3.9)$$

Треба напоменути да са овом формулацијом притисак више није експлицитна променљива проблема тако да је потребно само $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ да би се директно задовољила ограничење нестишљивости.

Исто тако је могуће формулисати слабу формулацију задржавајући притисак као експлицитну променљива и задавјући слабу формулацију за нестишљиво ограничење. Онда би слаба формулација гласила: пронађи $[\mathbf{u}(\mathbf{x}, t), p(\mathbf{x}, t)] \in L^2(0, T; \mathbf{X}(\Omega)) \times L^1(0, T; L^2(\Omega)/\mathbb{R})$ тако да је,

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) + \nu(\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v}) - (p, \nabla \mathbf{v}) = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle, \quad (3.10)$$

$$(q, \nabla \mathbf{u}) = 0 \quad (3.11)$$

за $\forall [\mathbf{v}(\mathbf{x}), q(\mathbf{x})] \in \mathbf{X}(\Omega) \times L^2(\Omega)/\mathbb{R}$ и задовољава почетне услове.

3.2.3 Теорема постојања и јединствености решења

Класични резултати о постојању и јединствености за јаку формулацију (3.1)(3.2) и њену варијациону верзију (3.8) у случају три димензије дат је са следеће две теореме.

Теорема постојања решења слабе формулације За било који $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{H}(\Omega)$, $\mathbf{f} \in L^2(0, T; \mathbf{H}^{-1}(\Omega))$ и $T > 0$, проблем (3.8) има макар једно решење слабе формулације тако да $\mathbf{u}, \nabla \mathbf{u} \in L^2(\Omega \times (0, T))$ и \mathbf{u} је слабо континуално на $[0, T]$ у $\mathbf{H}(\Omega)$, онда је следећа неједнакост задовољена (Лерајова неједнакост)

$$\frac{1}{2} \|\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)\|^2 + \nu \int_0^t \|\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, s)\|^2 ds \leq \frac{1}{2} \|\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0)\|^2 + \int_0^t \langle \mathbf{f}(\mathbf{x}, s), \mathbf{u}(\mathbf{x}, s) \rangle ds \quad (3.12)$$

из чега следи да је $\mathbf{u} \in L^2(0, T; \mathbf{V}(\Omega)) \cup L^\infty(0, T, \mathbf{H}(\Omega))$,

Теорема постојања и јединствености класичног или јаког решења За било који $u_0 \in \mathbf{V}(\Omega)$, $\mathbf{f} \in L^2(0, T; \mathbf{H}(\Omega))$ и $T > 0$, постоји $T_*(0 < T_* < T)$ које зависе од података $(\Omega, \nu, \mathbf{f}, \mathbf{u}_0, T)$ такви да постоји јединствено решење проблема (3.1)-(3.2)

у временском интервалу које задовољава $\mathbf{u}, \partial_t \mathbf{u}, \nabla \mathbf{u}, \nabla \cdot (\nabla \mathbf{u}) \in \mathbf{L}^2(\Omega \times (0, T))$ где је \mathbf{u} континуална функција на интервалу $[0, T]$ у \mathbf{V} .

Доказ постојања и јединствености класичног решења у коначном времену је дефинисан у [128]. Лерај је иницирао развој математичке теорије за Навије-Стоксову једначину. Уствари Лерај је био први који је користио слабу формулацију за парцијалну диференцијалну једначину много пре него што је теорија дистрибуције показана. Лерајов доказ је засниван на конструкцији апроксимативног решења модификоване Навије-Стоксове једначине.

Прва теорема дефинише постојање слабог решења који задовољава енергетску неједнакост (3.12). Уствари слабо решење које незадовољава неједнакост може уствари да постоји и због тога решење које је у складу са (3.12) се обично зове Лерај-Хопфово слабо решење. Вреди споменути да конвективни члан нестаје у глобалном енергетском балансу. Његова главна улога је да буде одговоран за енергетски трансфер између вртлога различитих димензија.

За струјања у $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ствари су много повољније него у тродимензионалном струјању. Проблем је добро постављен у смислу постојања и јединствености слабог решења и класично решење се може гарантовати за довољно регуларне податке. Физикално објашњење је корен ове разлике између дводимензионог и тродимензионог струјања. Ако узмемо ротор од једначине (3.1) и мало векторксе алгебре можемо добити једначину за развој втлога у струјању.

$$\partial_t \mathbf{w} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{w} - \nu \Delta \mathbf{w} - \mathbf{w} \cdot \nabla \mathbf{u} = \nabla \times \mathbf{f} \quad \Omega \times (0, T) \quad (3.13)$$

где члан $\mathbf{w} \cdot \nabla \mathbf{u}$ је одговоран за феномен издуживања вртлога. У две димензије овај члан нестаје док у три димензије он се понаша као појачавач вртлога. Може се доказати да постојање члана издужења вртлога искључује могућност проналажења регуларног доказа за тродимензионо струјање.

Поред тога постоје још два проблема који треба да се реше: јединственост слабог решења као и постојање класичног решења за сваки инстанцу времена. Важност ових проблема је препознао и Клеј математички институт нудивши милион долара награду за решавање ових проблема.

3.3 Турбуленција, турбулентна транзиција и зависност од Рејнолдсовог броја- Re

Већ смо коментарисали да Навије-Стоксова једначина има велику разноврсност комплексних решења и као што смо видели да до даншњих дана они имају недостатке да опишу сва чудна понашања флуида, који укључују и феноменологију турбулентног струјања. Процес у коме динамички систем као што је (3.1) пролази из једноставног решења тј. ламинарног струјања око тела до комплексног решења као што је турбулентно струјање је квалитетно објашњено са бифуркационом теоријом. Укратко ћемо објанити како овај процес функционише.

3.3.1 Бездимензиона Навије-Стоксова једначина

Прес свега и због једноставности представићемо Навије-Стоксову једначину у бездимензионој форми. Ако са U и L означимо карактеристичну брзину и дужину проблема, можемо дефинисати бездимензиону позицију $\mathbf{x}' = \mathbf{x}/L$ и време $t' = U_0 t/L$. Чак што више можемо дефинисати зависну бездимензиону брзину као $\mathbf{u}'(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)/U_0$ и притисак $p'(\mathbf{x}, t) = p(\mathbf{x}, t)/(\rho U_0^2)$. Ако заменимо ове чланове у једначину (3.1) добићемо,

$$\partial_t \mathbf{u}' + \mathbf{u}' \cdot \nabla \mathbf{u}' - \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{u}' + \nabla p' = \mathbf{f}' \quad \text{at } \Omega \times (0, T) \quad (3.14)$$

где је $Re = U_0 L/\nu$ је Рејнолдсов број који као што је познато када је струјање брзо тј. конвектни члан је доминантан имамо велике Рејнолдсове бројеве или је доминатна вискозност за мале Рејнолдсове бројеве. Рејнолдсов број даје релативну зависност вискозних и инерцијалних чланова. Треба приметити да са горњом процедуром ми смо само симплификовали параметарску зависност Навије-Стоксове једначине и свели га само на зависност од једног параметра Re . Струјања са различитом комбинацијом U_0, L, ν али са једнаким Re ће се понашати идентично. Ова особина се назива сличност Рејнолдсовог броја.

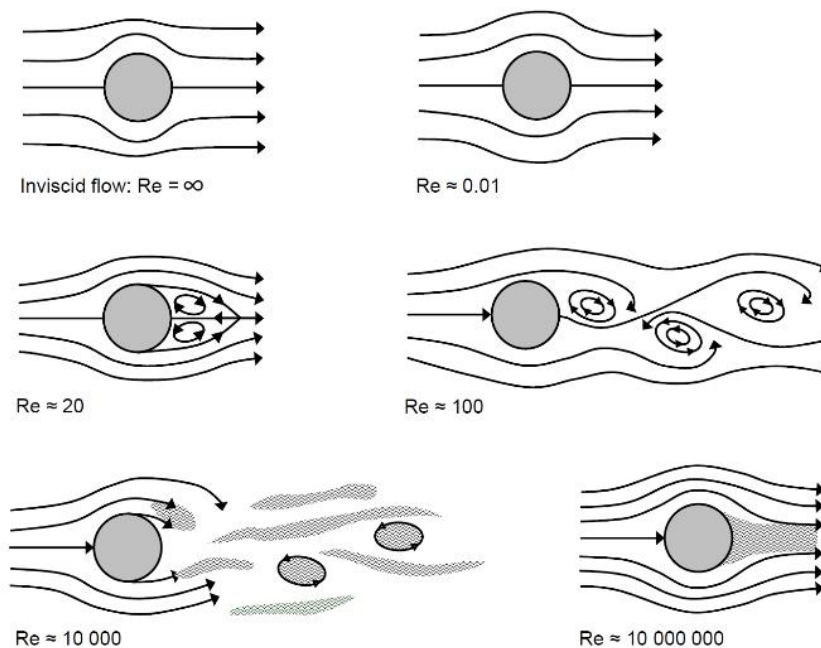
Природа понашања система (3.14) варира у зависности од Re . За вредности Рејнолдсовог броја у неком интервалу, решење се не мења значајно када се Рејнолдсов број промени за малу вредност. У таквом случају за систем се каже

да је структурално стабилан. Са друге стране, за неке вредности Рејнолдсовог броја то више није тачно и велике промене се дешавају са малиом променом Re . У том случају систем постаје структурално нестабилан. Без икакве дубље анализе, показаћемо како струјање прави транзицију од ламинарног ка турбулентном стању кроз процес узастопне бифуркације користећи прост пример.

Користићемо сличај струјања око цилиндра и за $Re \approx 0$ имамо Стоксово струјање чија је конфигурација тотално симетрична. Када је $Re \approx 10$, симетричност полако престаје и два рециркуларна вртлога се појављују на крајвима цилиндра. Са повећањем Рејнолдсовог броја и ови вртлози расту. Када је $Re \approx 45$ струјање постаје нестабилно и Хопфова бифуркација се дешава (две карактеристичне вредности линарног система (3.14) прелазе имагинарну осу). У овом тренутку Фуријеова трансформација приказује једну фреквенцу. Струјање губи своју стационарност као и симетричност и траг од наизменичних вртлога се формира иза цилиндра. Оваква конфигурација вртлога је позната као Фон-Карманови вртлози. Систем остаје структурално стабилан са повећањем Рејнолдсовог броја до вредности $Re \approx 200$ онда се дешава друга Хопфова бифуркација која са собом доноси тродимензиону нестабилност. Сада после Фуријеове трансформације јављају се две фреквенце у фреквентном домену. За $Re \approx 260$ наставља се даља бифуркација после које струјање постаје хаотично и ми га описујемо као турбулентно. Фреквентни домен после Фуријеове трансформације има спектар различитих фреквенци. Горе наведено понашање је приказано на слици 3.1.

Описано понашање за струјање око цилиндра се може генерализовати за многе друге случајеве. Ако разматрамо тачку $\mathbf{x} \in \Omega$ и ако анализирамо вектор брзине $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ када $t \rightarrow \infty$ за повећање Рејнолдсовог броја, следећа стања се могу разлоковати:

- 1) $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ конвергира ка $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ (фиксна тачка).
- 2) $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ конвергира са временом ка периодичном стању, описаном са Фуријеовом трансформацијом која има једну позитивну фреквенцу (периодично струјање).
- 3) Фуријеова трансформација од $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ има дискретну вредност фреквенци (квази периодично струјање).
- 4) Фуријеова трансформација од $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ има континуални спектар (хаотично струјање).



Слика 3.1: Промена карактера турбулентног струјања са повећањем Рејнолдсовог броја

Горе наведени опис се односи на један од могућих сценарија за транзицију ка хаосу у струјању или турбуленцији. Бифуркациона теорија поставља генерални метематички оквир који даје квалитативно објашњење транзиције ка турбуленцији, иако детаљи могу варирати од једног струјања ка другом.

3.3.2 Турбулентна струјања и теорија Комогорова

У овом поглављу ћемо се сконцентрисати на струјање код кога је тотално развијено турбулентно струјање тј. хаотично струјање које је објашњено у претходном поглављу. Без икакве сумње, најпознатија и веома успешна теорија која описује понашање турбулентног струјања је теорија Колмогорова која је формулисана 1941 [129]. Ова теорија је детаљно приказана у многим књигама [130], [131]. У овом поглављу ми ћемо представити само основе теорије и приказати одређене резултате.

Под турбулентним струјањем се сматра струјање које је сачињено од мноштво вртлога различитих величина узимајући у обзир да регија коју заузима један вртлог може да садржи вртлоге мањих димензија. Различити вртлози су окарактерисани

са дужином l и брзином U . За струјања са Рејнолдсовим бројем $Re = U_0L/\nu$ највећи вртлог има карактеристичну дужину $l \sim L$ и карактеристичну брзину $U \sim U_0$.

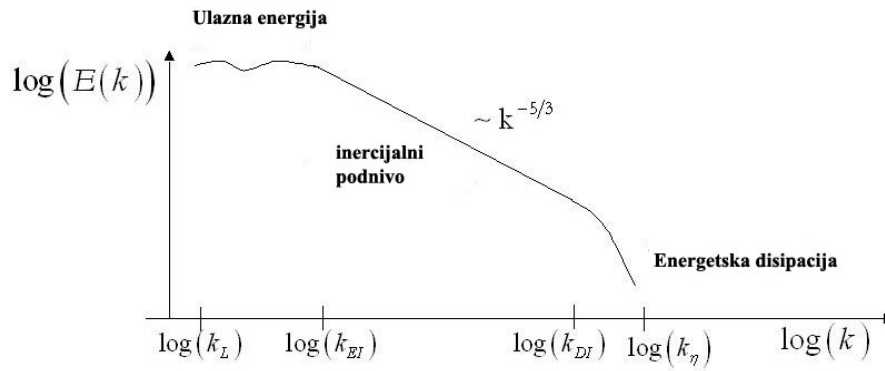
Енергија се транспортује са великих вртлога ка мањим пратећи процес познат као енергетска каскада, представљену од стране Ричардсона [132] и која је приказана на слици 3.2. Према процесу, велики вртлози постају нестабилни и разбијају се и преносећи своју енергију на мање вртлоге. Након тога ови мањи вртлози постају нестабилни са временом и такође се распадају преносећи енергију на још мање. Стога каскадни механизам трансфера енергије на све мање и мање вртлоге се наставља све док вртлози имају величину такву да Рејнолдсов број $Re(l)$ довољно мали да би био стабилан. На том нивоу вискозност је способна да дисипује кинетичку енергију. Овај механизам трансфера и дисипације кинетичке енергије се континуално храни енергијом која се добија од спољашњих сила које делују на струјање. Овде ћемо претпоставити због једносотавности да ове силе делују само на велике вртлоге. Енергетска каскада се одиграва без губитка енергије тако да дисипација прелази у акцију тек на крају процеса. Због тога можемо да претпоставимо да средња временска промена кинетичке енергије која је унета у струјање треба да буде једнака средњој временској промени дисипације ϵ_{mol} на најмањим вртлозима.

Из претходног описа, можемо да закључимо да постоји одређени интервал SI , такав да вртлози са $l \in SI$ нису под утицајем нити анизотропије великих вртлога струјања нити са дисипацијом која се дешава код малих вртлога. Овај интервал је познат као инерцијални подопсег и експерименти показују да више или мање је дато $SI \approx [l_{DI}, l_{EI}] = [60\eta, L/6]$, где је η представља Колмогоров величину, или Колмогоров дисипациона дужина. У интерном подопсегу, спектрум енергетске густине у домену таласних бројева је дат са,

$$E(k, t) = \frac{L}{2\pi} \sum_{|k|_{infty}=k} \frac{1}{2} |\mathbf{u}(\mathbf{k}, t)|^2 \quad (3.15)$$

исто тако може да се дефинише да зависи само од ϵ_{mol} и k тако да је $E(k, t) \approx \epsilon_{mol}^a k^b$. Из димензионе анализе је итекако јасно да може да се дефинише $a = 2/3$ и $b = -5/3$ тако да се Колмогоров спектрум за локалну изентропску турбуленцију дефинише као,

$$E(k, t) \approx C_K \epsilon_{mol}^{2/3} k^{-5/3} \quad (3.16)$$



Слика 3.2: Енергетска каскада у функцији таласних бројева

У једначини (3.16) C_K је дефинисан као универзална бездимензиона константа која је валидна за било које турбулентно струјање. Користећи бездимензиону анализу може се такође доказати да се спектрум притиска понаша као [133], [134],

$$E_{pp}(k, t) \approx C_p \epsilon_{mol}^{4/3} k^{-7/3} \quad (3.17)$$

где C_p дефинише опет бездимензиону константу. Следи да је $C_p \approx 1.33 C_K^2$ [135].

Са друге стране, Колмогорова дужина дисипације η , одговара дужини где је $Re(\eta) = 1$ (конвекција је једнака дисипацији). Из ове релације и ако узмемо (3.16) долазимо до,

$$\eta = c_k \left(\frac{\nu^3}{\epsilon} \right)^{1/4} \quad (3.18)$$

Следи да је $c_K = 2\pi(3C_K/2)^{3/4}$. Узимајући поново у обзир димензиону анализу могуће је довести у везу η са Re , што на крају доводи до,

$$\frac{\eta}{L} \sim Re^{-3/4} \quad (3.19)$$

Ако означимо са k_{EI} и k_{DI} таласни број који је повезан са екстремним дужинама l_{EI} и l_{DI} инерционе подгрупе. Онда, спектрум енергетске гуситне у зависности од таласног броја представља три различите зоне:

- 1) За вредности $k < k_{EI}$, $E(k, t)$ кореспондира за енергију струјања у коме преовлађују макроскопски образац вртлога,
- 2) За $k_{EI} \leq k \leq k_{DI}$ следи да $E(k, t) \approx k^{-5/3}$,
- 3) За $k > k_{DI}$, иако је Рејнолдсов број велики (мала вискозност), вискозни ефекти се манифестују и енергија се дисипује,

После тога Колмогоров је био у могућности да дефинише следеће хипотезе,

- 1) Хипотеза локалне изотропије. За довољно високе Рејнолдсове бројеве, турбулентно струјање за мале величине или вртлоге ($l < l_{EI}$) су статистички изотропски (они су локално хомогени и нису подложни ротацији и рефлексiji координатних оса).
- 2) Хипотеза прве сличности - За било које турбуентно струјање на довољно високим Рејнолдсовим бројем, статистика кретања малих величина тј. вртлога ($l < l_{EI}$) има универзалну форму јединствено одређену од стране ν и ϵ_{mol}
- 3) Хипотеза друге сличности - За било које турбуентно струјање са довољно високим Рејнолдсовим бројевима, статистика кретања малих величина тј. вртлога ($l_{DI} < l < l_{EI}$) има универзалну форму јединствено одређену од стране ϵ_{mol} али је независна од ν .

У 196-ој години, Колмогоров је модификовао горе наведену К41 теорију да би подесио неке разлике које су се јавиле у предикцији поља брзине под утицајем великог момента. Пошто се у дисетацији нећемо бавити тим струјањем, овде га нећемо ни дефинисати

3.3.3 Релација између К41 и Навије-Стоксове једначине

Једна од највећих изнанеђења К41 теорије (иако је имала и превише експерименталног успеха) је да не може да се разматра за све Навије-Стоксове једначине. Колмогоров је изградио теорију из неких основних хипотеза и

истраживачких разлога и исто тако користећи неке резултате из статистичке механике флуида и димензионе анализе као алат. Како год, видели смо у претходним поглављима да је широко прихваћено да Навије-Стоксова једначина може да опише понашање турбулентног струјања. Ако је то случај, требали би да добијемо K41 резултате директно из Навије-Стоксове једначине. Нажалост то није баш тако лак задатак. Као што је претходно споменуто, прва потешкоћа је пошто класично решење постоји за веома кратак период времена. Ми се овде бавимо са тотално развијеним турбулентним струјањем и због тога морамо да разматрамо понашања током дужег временског интервала.

Прва апроскицмација која повезује K41 и Навије Стоксову једначину се може добити из просторне Фуријеове трансформације. Уставри једначина (3.1)-(3.2) у простору таласног броја постаје за периодичне граничне услове,

$$\partial_t \mathbf{u}(\mathbf{k}, t) - \frac{i}{L^3} (\mathbf{I} - \frac{\mathbf{k}\mathbf{k}}{k^2}) \cdot \sum_{\mathbf{k}' + \mathbf{k}'' = \mathbf{k}} \mathbf{u}(\mathbf{k}', t) \cdot \mathbf{k}'' \mathbf{u}(\mathbf{k}'', t) + \nu k^2 \mathbf{u}(\mathbf{k}, t) = \mathbf{f}(\mathbf{k}) \quad (3.20)$$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}(\mathbf{k}, t) = 0 \quad (3.21)$$

са $i = \sqrt{-1}$ и \mathbf{I} који представља јединични тензор и $\mathbf{I} - \mathbf{k}\mathbf{k}/k^2$ је пројекција на поље бездивергентног вектора. Можемо приметити да (3.20) даје даљи увид у чињеницу да је конвектни члан одговоран за повезивање између модова као и трансфера енергије између њих, као у опису енергетске каскаде. Са друге стране, енергетски баланс (Лерајова неједнакост) предлаже да се дефинише средња временска промена енергетске дисипације по јединици масе као,

$$\epsilon_{mol}^{t2} = \frac{\nu}{L^3} \langle \|\nabla \mathbf{u}\|_2^2 \rangle \quad (3.22)$$

Већ је познато да кинетичка енергија струјања ограничена са Лерајовом нејадноскости која гарантује да ϵ_{mol}^{t2} у једначини (3.22) ће исто бити ограничен. Са друге стране можемо приметити да вискозни члан у једначини (3.20) садржи k^2 фактор, што прави $\nu k^2 \mathbf{u}(\mathbf{k}, t)$ веће за велике таласне бројеве (мале дужине). Ово је у корелацији са идејом Колмогорова да се дисипација одиграва на малим вртлозима или величинама струјања.

Навије-Стоксова једначина такође игра значајну улогу за добијање неких веома битних једначина статистичке механике флуида као што је Карман-Ховартхове једначине, која се може посматрати као индиректна валидација за њих. Како год, да би добили K41 резултате, нити последњи резултат нити горе наведена глобална слика из једначине (3.20) пате, тј имају недостатке и генерално речено нови приступи решавања проблема су потребни. У том смислу, вредно је поменути да је главни механизам каскаде енергије развијене од стране Ричардсона-Колмогорова је скоро доказана на ригорозан начин почевши од Навије-Стоксове једначине.

Са друге стране, централни значај у K41 има Колмогорова дисипациона дужина η . Покушано је да се добије вредност ове величине из димензија глобалне Навије-Стоксове једначине или из универзалног атрактора. Главна идеја је: Из тродимензионе струјања са карактеристичном дужином величина L , треба нам према K41,

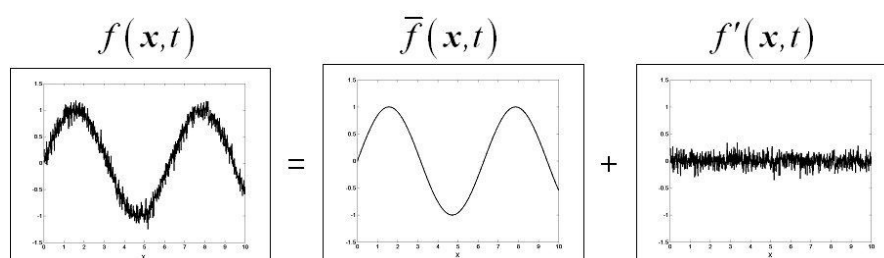
$$N \approx \left(\frac{L}{\eta}\right)^3 \approx Re^{9/4} \quad (3.23)$$

степен слободе да би је решили, али да не постоје активни вртлози за $l < \eta$. Можемо разматрати, на пример да презентујемо струјање користећи просторну компоненту Фуријеове трансформације која се варира од $1/L$ до $1/\eta$. Са друге стране постоји могућност да одредимо број степени слободе система са N , са димензијама глобалног атрактора. Ако једначина (3.23) представља димензију атрактора турбулентног струјања према K41, нама је потребно да нађемо глобални атрактор Навије-Стоксове једначине и да проверимо да ли је карактеристична величина η добијена.

Први проблем ове процедуре опет је локалан карактер класичног решења, која не задовољава постојање глобалног атрактора. До сада (3.23) није достигнута, али неки веома блиски резултати су добијени. Најпрецизнији су они у [136] где се показује да димензија атрактора може бити ограничена са $(L/\eta)^{4.8}$. Жељена вредност 3 за експонент се може добити ако се добије више просторне регуларности тако да $\nabla \mathbf{u} \in L^1(0, T; L^\infty(\Omega))$ [137].

3.4 LES-Симулација великих вртлога

Све до сада смо прегледали неке аспекте математичке теорије Навије-Стоксове једначине и подвукли смо неке конекције са физикалним описом турбуленције. Генерално као што је познат није могуће ове једначине решити аналитички и због тога нумеричке методе су постале веома користан алат за разумевање неколико аспеката турбулентног струјања као што су процес транзиције ка хаосу или комплексна физикалност развијеног турбулентног струјања. Нумеричке методе су постале не заменљив алат за решавање многих инжењерских проблема који укључују турбулентно струјање.



Слика 3.3: Разлагање променљивих на мале и велике величине

Већ смо напоменули у претходним поглављима да постоје три главне могућности да се изврши симулација турбулентног струјања са прорачунском механиком флуида. То су RANS, DNS и LES методе. Као што је претходно објашњено LES даје одговарајући приступ решавања проблема и у овом поглављу ћемо се сконцентрисати на детаљније објаснимо овај метод. Главна идеја LES методе је да се раздвоји поље притиска и брзине на континуалном нивоу, тако да $[\mathbf{u}, p] = [\bar{\mathbf{u}}, \bar{p}] + [\mathbf{u}', p']$ са $[\bar{\mathbf{u}}, \bar{p}]$ презентују велике величине или вртлоге струјања које могу да се срачунају са прорачунском мрежом, док $[\mathbf{u}', p']$ се односи на не решиве мале вртлоге и мале величине што је приказано на слици 3.3. Као што је већ напоменуто главна замисао LES-а се састоји да се прописно моделирају ефекти не решивих величина на оне решиве или оне које се могу ухватити прорачунском мрежом.

3.4.1 Филтрирана Навије-Стоксова једначина

Као што је речено у уводу раздвајање величина између великих и малих је урађено традиционално са процесом филтрирања [83]. Овде нећемо детаљисати са могућим филтерима ниског пропуста [84] и претпостављајући да је филтер дефинисан са

$(\bar{\cdot}) : v \rightarrow \bar{v}$ који се са диференцијалним оператером, можемо филтрирати Навије-Стоксову једначину (3.1)-(3.2) са граничним условом (3.3) и почетним условом (3.4) да би добили систем,

$$\partial_t \bar{\mathbf{u}} + \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}} - \nu \Delta \bar{\mathbf{u}} + \nabla \bar{p} = \mathbf{f} - \nabla \cdot \mathfrak{R} \quad \text{unutar } \Omega \times (0, T) \quad (3.24)$$

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}} = 0 \quad \text{unutar } \Omega \times (0, T) \quad (3.25)$$

$$\bar{\mathbf{u}} = 0 \quad \text{na } \Gamma \quad (3.26)$$

$$\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, 0) = \bar{\mathbf{u}}_0(\mathbf{x}) \quad \text{unutar } \Omega \quad (3.27)$$

У једначини (3.24) тензор $\mathfrak{R} = \overline{\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}} - \bar{\mathbf{u}} \otimes \bar{\mathbf{u}}$ је познат као стрес тензор остатка или тензор величина које се не могу ухватити прорачунском мрежом. Да би (3.24)-(3.27) био затворен систем једначина за $[\bar{\mathbf{u}}, \bar{p}]$ потребно је да се \mathfrak{R} у потпуности изрази у зависности од $\bar{\mathbf{u}}$. Ово питање је познато као затворени проблем. Различито моделирање \mathfrak{R} даје различите LES моделе. Када се модел одабере, последњи корак је дискретизација (3.24)-(3.27) и да се нађе нумеричко решење. Неко би се можда запитао да ли је могуће наћи егзактни затворен проблем једначине (3.24)-(3.27) тако да \mathfrak{R} може да се изрази у зависности од $\bar{\mathbf{u}}$, без икакве апроксимације. То је уствари могуће ако користимо Хелмхолцов филтер којим се добија $\bar{\mathbf{u}}$ од решења Хелмхолцове једначине, $\bar{\mathbf{u}} - \epsilon^2 \Delta \bar{\mathbf{u}} = \mathbf{u}$. Следи да $\bar{\mathbf{u}} = (\mathbf{I} - \epsilon^2 \Delta)^{-1} \mathbf{u}$, са $\epsilon > 0$ које означава скраћену величину [117]. Узимајући у обзир да је $\mathbf{u} \otimes \mathbf{u} = (\bar{\mathbf{u}} - \epsilon^2 \Delta \bar{\mathbf{u}}) \otimes (\bar{\mathbf{u}} - \epsilon^2 \Delta \bar{\mathbf{u}})$ и аплицирати филтер на $\bar{\mathbf{u}} \otimes \bar{\mathbf{u}}$ добијамо $\bar{\mathbf{u}} \otimes \bar{\mathbf{u}} = \overline{\bar{\mathbf{u}} \otimes \bar{\mathbf{u}}} - \epsilon^2 \overline{\Delta \bar{\mathbf{u}} \otimes \bar{\mathbf{u}}}$. Ако ове релације убацимо у тензор величина које се не могу ухватити прорачунском мрежом добићемо,

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_{ij} &= \overline{(\bar{u}_i - \epsilon^2 \Delta \bar{u}_i)(\bar{u}_j - \epsilon^2 \Delta \bar{u}_j)} - \bar{u}_i \bar{u}_j \\ &= \overline{\bar{u}_i \bar{u}_j} - \epsilon^2 \overline{\bar{u}_i \Delta \bar{u}_j} + \epsilon^4 \overline{\Delta \bar{u}_i \Delta \bar{u}_j} - \bar{u}_i \bar{u}_j \\ &= \epsilon^2 \overline{\Delta(\bar{u}_i \bar{u}_j)} - \epsilon^2 \overline{\bar{u}_j \Delta \bar{u}_i} - \epsilon^2 \overline{\bar{u}_i \Delta \bar{u}_j} + \epsilon^4 \overline{\Delta \bar{u}_i \Delta \bar{u}_j} \\ &= 2\epsilon^2 \overline{\nabla \bar{u}_i \cdot \nabla \bar{u}_j} + \epsilon^4 \overline{\Delta \bar{u}_i \Delta \bar{u}_j} \end{aligned} \quad (3.28)$$

Претходни израз ефектно дозвољава да се напише \mathfrak{R} у зависности од $\bar{\mathbf{u}}$ а при том се не прави никаква апроксимација или се усваја нека хипотеза. Како год, треба

напоменути да Хелмхолцов филтер поставља изоморфизам између $L^\infty(0, T; \mathbf{H}(\Omega))$ и $L^\infty(0, T; \mathbf{H}(\Omega) \cup \mathbf{H}^2(\Omega))$ и између $L^2(0, T; \mathbf{V}(\Omega))$ и $L^2(0, T; \mathbf{V}(\Omega) \cup \mathbf{H}^3(\Omega))$.

Због тога егзактно затварање проблема (3.28) служи да се направи изоморфизам између слабе формулације (3.1)-(3.2) и слабог решења (3.24)-(3.28) [117]. Стога број степени слободе потребних да се реше оба проблема остају исти. Овај резултат може да се генерализује на сваки затворен проблем једначина (3.24)-(3.28). На први поглед ово може да буде парадоксална чињеница да налажење егзактног затвореног модела, што се чини као разумљиви циљ. Стога за LES је једино логичан не егзактни затворени проблем тако да се информације струјања загубе у моделовању величина испод мреже.

3.4.2 Недостаци LES-а

LES презентује неколико проблема и нерешивих питања. Главна тема је и даље како наћи добар модел за тензор величина који се не могу ухватити прорачунском мрежом. Као што је напоменуто у претходном поглављу прављење истог затвореног проблема је парадоксално, тако да не може бити правац тражења модела. Са друге стране многи LES модели су базирани на физичким и нумеричким апроскимацијама као и истраживачким аргументима, који се понашају добро или лоше у зависности од проблема на који се примењују. Генерални проблем је тешко наћи иако се препоручује да мале величине испод нивоа мреже треба да задовоље одређене карактеристике као што је одржање инваријантности после трансформација оригиналне Навије-Стоксове једначине. Како год, није баш најјасније шта би требало да буде карактеристика доброг LES модела осим очигледне чињенице да треба да одговарајуће репродукује експерименталне податке.

Друго битно питање се поставља о релацији између грешке која се јавља између физикалног LES модела и нумеричких метода које се користе да би решиле дискретизован проблем [115], [138], [116]. Исто тако није јасно шта би требало да буде релација између филтера ϵ и карактеристичне величине елемента h [138], [115]. Као додатак треба напоменути проблем комутације грешке филтрирања и диференцијалног оператора који исто тако треба да се реши. Сумарно можемо рећи да данас задовољавајући математички модел не постоји иако су кораци ка томе одавно већ направљени [105], [139].

3.4.3 Одговарајућа апроксимација Навије-Стоксове једначине

Не тако давно је спроведена детаљна анализа неколико LES модела са идејом да се рашчисте недостатци и лоше стране модела [117]. Из ове анализе неколико занимљивих закључака је изведено.

Лерајов конволуциони модел Без узимања у обзир граничних и почетних услова због скраћивања простора и времена за објашњење.

$$\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = (\psi_{\epsilon} * \mathbf{f}) - \nabla \cdot \mathfrak{R}_{Le} \quad (3.29)$$

$$\mathfrak{R}_{Le} = \mathbf{u} \otimes (\psi_{\epsilon} * \mathbf{u}) - \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} \quad (3.30)$$

Овај модел није инваријантан услед трансформација координатних оса иако може да се преуреди да би се добила ова карактеристика [140]. Овај модел је познат као Навије-Стоксов алфа модел (НС - α) [140].

Лионов хипервискозни модел у овом случају имамо,

$$\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} - \nabla \cdot \mathfrak{R}_{Li} \quad (3.31)$$

$$\mathfrak{R}_{Li} = \epsilon^{2\alpha} (-\nabla)^{2\alpha-1} \mathbf{u} \quad (3.32)$$

Ладигенскајев и Каниелов нелинарни вискозни модел За овај модел имамо,

$$\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} - \nabla \cdot \mathfrak{R}_L \quad (3.33)$$

$$\mathfrak{R}_{La} = -\epsilon^{2\nu+1} \beta |\nabla \mathbf{u}|^2 \nabla \mathbf{u} \quad (3.34)$$

Потребно је напоменути да најпознатији LES модел тј, модел Смагоринског [100] има исту структуру као и (3.33) узимајући $\mu = 1/2, \beta(\tau) = \tau^\mu, \psi = \mathbf{S}$, са $\mathbf{S} = 1/2(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)$. Следи $\mathfrak{R}_{Sm} = -\epsilon^2 |\mathbf{S}| \mathbf{S}$. Стога, можемо закључити да је могуће добити LES моделе са изварендним атрибутима што доводи до добро постављеног математичког проблема. Чак шта више, можемо приметити да филтрирање није једини начин да се добије LES модел као што је приказано у трећем моделу. Чак и познати модел Смагоринског се може добити без филтрирања у контраст ономе што се може наћи у литератури. Још неки модели су разматрани у [117] као што је спектрални вискозни модел, вискозни модел за величине које се не могу ухватити са прорачусном мрежом, варијациони модели, модели сличности. Иако се чини да се не може наћи генерални математички оквир за све моделе, закључено је да LES модел треба да задовољи два главна захтева: прво треба да се обезбеди добро постављање система или једначина. Друго, треба да изабере релевантно физикално решење.

Под утиском ових захтева нотација одговарајуће апроксимације Навије-Стоксове једначине је приказано у [118] као први корак ка математичком дефинисању LES модела.

Дефиниција Секвенца $[\mathbf{u}_\gamma, p_\gamma]$, са $\gamma > 0$ и $\mathbf{u}_\gamma \in L^2(0, T; \mathbf{X}(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega))$ и $p_\gamma \in D'([0, T[, L^2(\Omega)/\mathbb{R})$, се каже да је одговарајућа апроксимација Навије-Стоксове једначине ако је:

- 1) Постоје два коначно димензиона вектора простора $\mathbf{X}_\gamma(\Omega) \subset \mathbf{X}(\Omega)$ и $M_\gamma(\Omega) \subset L^2(\Omega)/\mathbb{R}$ такви да је $\mathbf{u}_\gamma \in C^0([0, T]; \mathbf{X}_\gamma(\Omega))$ и $p_\gamma \in L^2([0, T[, M_\gamma(\Omega))$.
- 2) Секвенца $\mathbf{u}_\gamma, p_\gamma$ или подсеквенца конвергира да слабом решењу (3.1)-(3.5) нпр. $\mathbf{u}_\gamma \rightarrow \mathbf{u}$ слаба конвергенција у $L^2(0, T; \mathbf{X}(\Omega))$ и $p_\gamma \rightarrow p$ in $D'([0, T[, L^2(\Omega)/\mathbb{R})$.
- 3) Слабо решење $[\mathbf{u}, p]$ је одговарајуће.

Треба приметити да два параметра су умешана у дефиницији, параметра h који је повезан са најмањим величинама у $\mathbf{X}_\gamma(\Omega)$. Ове величине су повезане са величином најмањег активног вртлога у струјању. Параметар γ у дефиницији је комбинација h и ϵ који треба да се одреде у сваком случају. Треба разумети да $\gamma \rightarrow 0$ за $\epsilon \rightarrow 0$ и $h \rightarrow 0$.

Следећа три корака стратегије су презентовани у [118] за проактивну конструкцију одговарајуће апроксимације:

1) Елаборација пре-LES модела. Овај корак се састоји у регуризацији Навије-Стоксове једначине да би се добио добро постављени проблем и презентовао параметар ϵ . За $\epsilon \rightarrow 0$ пре-LES модел треба да конвергира ка одговарајућем решењу Навије-Стоксове једначине. Стога пре-LES модел одговара процесу добијања филтриране једначине (3.24) у стандардном LES моделу, али са додатним потребама да би био затворен проблем и да би једначине биле добро постављене. Проблем треба да има јединствено решење које конвергира ка одговарајућем слабом решењу Навије-Стоксове једначине.

2) Дискретизација пре-LES модела. У овом кораку ћемо увести апроксимативне функције за поље брзине и притиска, као и просторе методе коначних елемената $\mathbf{X}_\gamma(\Omega)$ и $M_\gamma(\Omega)$ и параметар h .

3) Одредити релацију између ϵ и h . Релација између ϵ и h не може бити произвољно одређена тако да кад, $\epsilon \rightarrow 0$ и $h \rightarrow 0$, решење треба да конвергира ка одговарајућем решењу Навије-Стоксове јдначине.

Иако одговарајућа апроксимација прави први значајан корак ка математичком дефинисању LES модела неки проблеми и даље постоје. Постоји непозната релација између грешака које настају у пре-LES моделу и грешака настале дискретизацијом. Другим речима или ако хоћемо да будемо прецизни, за задато $\mathbf{X}_\gamma(\Omega) \subset \mathbf{X}(\Omega)$ и $M_\gamma(\Omega) \subset \mathbf{L}^2(\Omega)/\mathbb{R}$, за $\forall t \in [0, T]$ Галеркиновом апроксимацијом,

$$(\partial_t \mathbf{u}_h, v) + b(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h, \tilde{v}) + \nu(\nabla \mathbf{u}_h, \nabla v) - (p_h, \nabla v) = \langle \mathbf{f}, \tilde{v} \rangle \quad \forall v \in \mathbf{X}_\gamma(\Omega) \quad (3.35)$$

$$(q, \nabla \mathbf{u}_h) = 0 \quad \forall q \in M_\gamma(\Omega) \quad (3.36)$$

$$(\mathbf{u}_h(\mathbf{x}, 0), \mathbf{v}) = (\mathbf{u}_0, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{X}_\gamma(\Omega) \quad (3.37)$$

где је $\mathbf{u}_h(\cdot, t) \in \mathbf{X}_\gamma(\Omega)$ и $p_h(\cdot, t) \in M_\gamma(\Omega)$ је одговарајући. Доказано је да да је то случај за решење (3.35) са периодичним граничним условима и када су коришћени простори мањег реда методе коначних елемената и који имају дискретну комутативну карактеристику и задовољавају инф-суп услове [141]. Ови

резултати могу да оправдају чињеницу да за простори мањег реда методе коначних елемената, понекад се добујају бољи резултати када физикално LES моделирање није коришћено.

3.5 Дефиниција варијационог проблема

Да би дефинисали варијациону или слабу формулацију проблема (3.1)-(3.5), представимо генералну теорију функционала који ће бити коришћен у овој тези. Означимо са $L^p(\Omega)$ простор функција чији је p експонент ($1 \leq p < \infty$) интеграбилан у домену Ω (према Лабезге мери). Простор $L^p(\Omega)$ је Банах простор са нормом

$$\|u\|_p = \left(\int_{\Omega} |u(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{p}} \quad p < \infty \quad (3.38)$$

Случај када је $p = \infty$ се односи на простор ограничених функција у домену Ω . Приказани норм је дат са основним максимумом свих функција ограничених у Ω тако да је $\|\mathbf{u}\|_{\infty} = \text{esssup}|\mathbf{u}(x)|$. За $1 < p < \infty$, $L^p(\Omega)$ су рефлексивни простори са дуалним простором $L^q(\Omega)$, где је $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ Случај од посебног интересовања је $L^2(\Omega)$ који је Хилберт простор са скаларним производом

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{u}(\mathbf{x})\mathbf{v}(\mathbf{x})d\Omega \quad (3.39)$$

са нормом $\|\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)} = \|\mathbf{x}\| = (\mathbf{u}, \mathbf{u})^{1/2}$. Са физикалне тачке гледишта $L^2(\Omega)$ се може идентификовати са простором поља брзина са ограниченом кинетичком енергијом тако да је $\|\mathbf{u}\|^2 = 2E(\mathbf{u})$, где $E(\mathbf{u})$ означава кинетичку енергију по јединици масе.

Соболев простор $W^{m,p}(\Omega)$ је простор функција у $L^p(\Omega)$ такви да се њихови изводи све од реда $m \in \mathbb{N}$ исто припадају $L^p(\Omega)$. $W^{m,p}(\Omega)$ је Банах простор са нормом који се означава са $\|\cdot\|_{m,p}$. За $p=2$, $W^{m,2}(\Omega)$ је Хилберт простор и нотација $H^m = W^{m,2}(\Omega)$ ће се користити. Чак што више $H_0^m(\Omega)$ ће се односити на под простор функција у $H^m(\Omega)$ који нестаје на граници домена заједно са његовим изводом по нормали све до реда $m-1$. Треба приметити да када је $m=1$ је од специјалног интереса $H^1(\Omega)$ повезан скаларни производ

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{H^1} = \frac{1}{L^2}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + (\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v}) \quad (3.40)$$

норм $\|\mathbf{u}\|_{H^1} = (\mathbf{u}, \mathbf{u})_{H^1}^{1/2}$. У једначини (3.40) L презентује карактеристичну дужину. Са друге стране $H^{-1}(\Omega)$ је топологијски дуал H_0^1 . У случају f и g су дистрибуције тако да је њихов продукт интеграбилан у домену Ω

$$\langle f, g \rangle = \int_{\Omega} f g d\Omega \quad (3.41)$$

За $f, g \in L^2(\Omega)$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ корелира унутрашњем производу.

За \mathbf{u} је поље брзина, видимо да кад је $\mathbf{u} = \mathbf{v}$ први члан у (3.40) одговара двострукој кинетичкој енергији. Други члан кореспондира за енстропију. Енстропија $\epsilon(\mathbf{u})$ је битна величина која одређује промену дисипације кинетичке енергије у струјању. У \mathbb{R}^d , $\epsilon(\mathbf{u})$ се може представити у зависности вртложног поља $\omega = \nabla \mathbf{u}$, као $\epsilon(\mathbf{u}) = \|\omega\|_2^2$. Стога, са физикалне стране гледишта простор $\mathbf{H}^1(\Omega)$ се може идентификовати са простором поља брзина и вртлога које имају ограничену кинетичку енергију и енстропију [130].

Коначно да би се бавили временском еволуцијом поља притиска и брзине треба да уведемо просторе $L^p(0, T; Z(\Omega))$ који за $1 \leq p < \infty$ је дефинисан као

$$L^p(0, T; Z(\Omega)) = \{f : (0, T) \rightarrow Z(\Omega) \mid \int_0^T \|f(\mathbf{x})\|_Z^p dt < \infty\} \quad (3.42)$$

У случају да је $p = \infty$ имали би

$$L^\infty(0, T; Z(\Omega)) = \{f : (0, T) \rightarrow Z(\Omega) \mid \text{esssup}_{t \in (0, T)} \|f(\mathbf{x})\|_Z^p dt < \infty\} \quad (3.43)$$

Функционални простори представљени горе су генерални функционални оквир у ком се највећи део проблема који се појављују у тези.

3.5.1 Варијациона или слаба формулација Навије-Стоксове једначине

Када смо се упознали са одговарјућим функционалом, сада смо у позицији да презентујемо варијациону или слабу формулацију Навије-Стоксове једначине (3.1)-(3.2). Разматраћемо случај са Дирихлеовим граничним условима и ако узмемо V_0^d и Q_0 за функционалне просторе

$$V_0^d = \mathbf{H}_0^1(\Omega) = \mathbf{u}(\mathbf{x}) \in H^1(\Omega)^d | \mathbf{u} = 0 \quad \text{na} \quad \Gamma_D \quad (3.44)$$

$$Q_0 = q(\mathbf{x}) \in L^2(\Omega) | \int_{\Omega} q d\Omega = 0 \quad \text{ako} \quad \Gamma_N = 0 \quad (3.45)$$

Варијациона или слаба формулација једначина (3.1)(3.2) се онда уобичајно налази тако што наведене једначине помножимо са тест функцијом $v \in V_0^d$, $q \in Q_0$ и интегралимо преко целог домена. Стога варијациони проблем се састоји од тага да се нађе $[\mathbf{u}, p] \in L^2(0, T; V_0^d) \times L^1(0, T; Q_0)$ тако да је,

$$\int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot [\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u})] d\Omega + \nu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} d\Omega - \int_{\Omega} p \nabla \cdot \mathbf{v} d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \mathbf{f} d\Omega \quad (3.46)$$

$$\int_{\Omega} q \nabla \cdot \mathbf{u} d\Omega = 0 \quad (3.47)$$

за све $[\mathbf{v}, q] \in V_0^d \times Q_0$. Да би скратили нотацију у (3.46),(3.47) и следећим једначинама,

$$l(\mathbf{v}) = \langle \mathbf{v}, \mathbf{f} \rangle \quad (3.48)$$

где заграде у једначини представљају дуални пар између $H^{1/2}(\Gamma_N)$ и $H^{-1/2}(\Gamma_N)$. Слаба формулација се може написати у облику,

$$(\partial_t \mathbf{u}, \mathbf{v}) + \langle \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \nu (\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v}) - (p, \nabla \cdot \mathbf{v}) = l(\mathbf{v}) \quad (3.49)$$

$$(q, \nabla \cdot \mathbf{u}) = 0 \quad (3.50)$$

3.6 Галеркинова апроксимација методом коначних елемената

3.6.1 Временска дискретизација Навије-Стоксове једначине

Да би решили Навије-Стоксову једначину (3.1)-(3.2) морамо прво да је дискретизујемо у простору и времену. Временска дискретизација која ће се користити у овој тези је генерално трапезиодно правило. Ако узмемо део интервала прорачунског времена $0 < t^0 < \dots < t^N = T$ са константним временским кораком $\delta t = t^{n+1} - t^n$ и ако уведемо нотацију за генерално зависну временску функцију $\phi(t)$

$$\delta\phi^n = \phi^{n+1} - \phi^n \quad (3.51)$$

$$\phi^{n+\alpha} = \alpha\phi^{n+1} + (1 - \alpha)\phi^n \quad (3.52)$$

$$\delta_t\phi^n = \delta\phi^n / \delta t \quad (3.53)$$

где је $\alpha \in [0, 1]$ и ϕ^n је вредност функције ϕ у времену t^n . Према (3.51)-(3.53), временски дискретизована верзија Навије-Стоксове једначине са Дирихлеовим граничним условима се може записати у следећој форми,

$$\partial_t \mathbf{u}^n - \nu \Delta \mathbf{u}^{n+\alpha} + N^n(\mathbf{u}) + \nabla p^{n+1} = \mathbf{f}^{n+\alpha} \quad u \quad \Omega \quad (3.54)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}^{n+\alpha} = 0 \quad u \quad \Omega \quad (3.55)$$

$$\mathbf{u}^0 = \mathbf{u}_0 \quad u \quad \Omega \quad (3.56)$$

$$\mathbf{u}^{n+\alpha} = 0 \quad na \quad \Gamma_D \quad (3.57)$$

$$\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{n+\alpha} = \mathbf{t}_N^{n+\alpha} \quad na \quad \Gamma_N \quad (3.58)$$

где $N^n(\mathbf{u})$ представља апроксимацију конвектног члана. У зависности од вредности параметра α у (3.54)-(3.58) имаћемо апроксимације тачне до првог или другог реда. Највише коришћене шеме су:

Шеме првог реда

1) $\alpha = 0$ - Forward Euler шема. Зависно стабилна, што би значило да δt треба да буде довољно мало. У овом случају конвектни члан је дат експлицитно са $N^n(\mathbf{u}) = (\mathbf{u}^n \cdot \nabla) \mathbf{u}^n$.

2) $\alpha = 1$ - Backward Euler шема. Независно стабилна. У овом случају конвектни члан је дат имплицитно $N^n(\mathbf{u}) = (\mathbf{u}^{n+1} \cdot \nabla) \mathbf{u}^{n+1}$. Линеаризација је потребна у сваком временском кораку.

Шеме другог реда

1) $\alpha = 1/2$ - Crank Nicolson шема. Независно стабилна. Конвектни члан је дат имплицитно $N(\mathbf{u}) = (\mathbf{u}^{n+1/2} \cdot \nabla) \mathbf{u}^{n+1/2}$. Линеаризација је потребна у сваком временском кораку. Углавном ћемо користити овај метод кроз целу тезу.

2) $\alpha = 1/2$ - Adams - Bashforth/ Crank-Nicolson шема. Зависно стабилна, што би значило да δt треба да буде довољно мало. Уместо да се користи $\alpha = 1/2$ за конвектни члан, овај члан је експлицитно добијен из $N^n(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}[3(\mathbf{u}^n \cdot \nabla) \mathbf{u}^n - (\mathbf{u}^{n-1} \cdot \nabla) \mathbf{u}^{n-1}]$.

Пошто нам је задатак да са методом коначних елемената решимо Навије-Стоксову једначину, ми ћемо бити заинтересовани за временску дискретизацију слабе формулације (3.49)-(3.50). Временски дискретизована слаба формулација Навије-Стоксовог проблема може онда да гласи. Од познатог \mathbf{u}^n нађи $\mathbf{u}^{n+\alpha} \in V_0^d$, $p^{n+1} \in Q_0$ тако да,

$$(\delta_t \mathbf{u}^n, \mathbf{v}) + \langle \mathbf{u}^{n+\alpha} \cdot \nabla \mathbf{u}^{n+\alpha}, \mathbf{v} \rangle + \nu (\nabla \mathbf{u}^{n+\alpha}, \nabla \mathbf{v}) - (p^{n+1}, \nabla \cdot \mathbf{v}) = l(\mathbf{v}) \quad (3.59)$$

$$(q, \nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1}) = 0 \quad (3.60)$$

3.6.2 Дискретна Галеркинова апроксимација варијационе формулације

Сада ћемо прситупити просторној дискретизацији једначина (3.59)-(3.60). Ако домен Ω изделимо са прорачунском мрежом где је n_e број елемената, n_u чворови за поље вектора брзине, n_p чворови за поље притиска и ако су дати подпростори коначних димензија $V_{h,0}^d \subset V_0^d$ и $Q_{h,0} \subset Q_0$ које ће апроксимирати притисак и брзину. Галеркинова метода коначних елемената онда може да гласи. Од познатог \mathbf{u}_h^n нађи $\mathbf{u}_h^{n+\alpha} \in V_{h,0}^d$, $p_h^{n+1} \in Q_{h,0}$ тако да је,

$$\begin{aligned} (\delta_t \mathbf{u}_h^n, \mathbf{v}_h) + \nu (\nabla \mathbf{u}_h^{n+\alpha}, \nabla \mathbf{v}_h) + \langle \mathbf{u}_h^{n+\alpha} \cdot \nabla \mathbf{u}_h^{n+\alpha}, \mathbf{v}_h \rangle \\ - (p_h^{n+1}, \nabla \cdot \mathbf{v}_h) + (q_h, \nabla \cdot \mathbf{u}_h^{n+1}) = l(\mathbf{v}_h) \end{aligned} \quad (3.61)$$

за све $\mathbf{v}_h \in V_{h,0}^d$, $q_h \in Q_{h,0}$.

Са друге стране \mathbf{u}_h и p_h су типа,

$$\mathbf{u}_h = \left(\sum_{a=1}^{n_u} N_u^a U_x^a, \sum_{a=1}^{n_u} N_u^a U_y^a, \sum_{a=1}^{n_u} N_u^a U_z^a \right) \quad (3.62)$$

$$p_h = \sum_{b=1}^{n_p} N_p^b P^b \quad (3.63)$$

где смо са N_u^a дефинисали апроксимативну функцију облика за вектор брзине. (U_x^a, U_y^a, U_z^a) је вредност брзине у чвору за сваку координату. Док смо са N_p^b дефинисали апроксимативну функцију облика за притисак и са P^b вредности притиска у чвору. Заменом једначина (3.62)(3.63) у једначину (3.61) добијамо алгебарски ситем једначина за притисак и брзину који треба да се линеаризују и онда реше за сваки временски корак. Притисак и брзина се онда на крају могу добити за било коју тачку у домену простом интерполацијом вредности добијених у чворовима.

Добро је познато да Галеркинова апроксимација пати од неколико нумеричких проблема. На пример, јавља се нестабилност за проблеме који решавају струјања са

великим Рејнолдсовим бројевима тј. када нелинарни конвектни члан је доминантан над вискозним чланом. Исто тако треба да се задовољи и компатибилни услов да би се контролисао члан који садржи притисак. Овај услов не дозвољава да се користе апроксимативне функције истог реда које би апроксимирале поље брзине и притиска. Ово је наравно проблем пошто ако користимо полиноме истог реда симплификује се имплементација нумеричке методе а исто тако се штеди и прорачунско време. Исто тако могу да се јаве нумеричке нестабилности ако се користе мали временски кораци, посебно на почетку еволутивног процеса. Због ових недостатака Галеркинова метода је неупотребљива у пракси и због тога стабилизационе методе су потребне. Једна од веома моћних стабилизационих метода је метода Сабгрид скејл стабилизација који ћемо презентовати у следећим поглављима.

3.7 SGS стабилизациона метода

У претходне две деценије, неколико стабилизационих метода су развијене у циљу превазилажења нумеричких нестабилности које се јављају код парцијалних диференцијалних једначина које су решаване Галеркиновим методом коначних елемената. У тези ћемо се сконцентрисати на сабгрид скејл стабилизационе (Subgrid Scale Stabilization-SGS) методе које се исто називају и Variational Multiscale модели или методе засниване на остатку које су оригинално развијене од стране Хјуза [86] за конвектно- дифузионо-реактивну једначину а касније проширене на друге једначине од стране многих аутора.

Ако разматрамо абстрактни варијационо континуални проблем где треба пронаћи $y \in Y$ тако да,

$$m(y, z) = n(z) \tag{3.64}$$

за све $z \in Z$, m и n представљају билинарну и линарну континуалну слабу формулацију, док су Y и Z су безгранично димензиони простори. Сабгрид скејл приступ за добијање нумеричког решења (3.64) се састоји у томе да прво треба раздвојити Y и Z на $Y = Y_h \oplus \tilde{Y}$ и $Z = Z_h \oplus \tilde{Z}$, где су Y_h и Z_h коначно

димензиони простори где и нумеричко решење припада, док \tilde{Y} и \tilde{Z} представљају безгранично димензионе просторе (континуалне просторе) који попуњавају Y_h, Z_h до Y, Z . Променљиве y и z се могу раздвојити као $y = y_h + \tilde{y}$, $z = z_h + \tilde{z}$ и заменити у (3.64) да би добили,

$$m(y_h, z_h) + m(\tilde{y}, z_h) = n(z_h) \quad \forall z_h \in Z_h \quad (3.65)$$

$$m(y_h, \tilde{z}) + m(\tilde{y}, \tilde{z}) = n(\tilde{z}) \quad \tilde{z} \in \tilde{Z} \quad (3.66)$$

Једначина (3.64) је трансформисана у две једначине, где прва једначина решава динамику великих или решивих величина док друга једначина решава динамику малих или величина испод најмање величине прорачунске мреже. Главна замисао се састоји у томе да се пронађе апроксимативно решење модела за једначину која моделира мале величине или оне испод величине мреже, а онда да се замени у једначину великих величина и онда као такве реше. Другим речима Сабгрид скејл приступ покушава са симулира утицај ових малих величина континуалног проблема које се не могу ухватити нумеричком дискретизацијом на нумеричко решење. Утицај ових малих величина је оно што није узето у обзир код Галеркиновог нумеричког приступа проблема. Треба напоменути да раздвајање величина које је извршено у Сабгрид скејл приступу се базира на пројекцијама на просторе Z_h и \tilde{Z} и моделирање малих величина се обавља када се проблем дискретизује.

3.7.1 SGS стабилизациона метода за Навије-Стоксову једначину

Имплементација SGS стабилизационе методе на једначинама (3.59)(3.60) се врши тако што се раздвоје функција брзине и тест функција на $\mathbf{u}^n = \mathbf{u}_h^n + \tilde{\mathbf{u}}^n$, $\mathbf{u}^{n+\alpha} = \mathbf{u}_h^{n+\alpha} + \tilde{\mathbf{u}}^{n+\alpha}$ и $\mathbf{v} = \mathbf{v}_h + \tilde{\mathbf{v}}$ које се повезује са раздвајањем простора $V_0^d = V_{h,0}^d \oplus \tilde{V}_0^d$ и $V^{d,n+\alpha} = V_h^{d,n+\alpha} \oplus \tilde{V}^{d,n+\alpha}$. Због једноставности претпоставићемо да су мале величине вектора брзине на граници елемента једнаке нули као и на граници домена. Овај приступ омогућава да схватимо мале величине вектора брзине као функције облика мехура које нестају на границама између елемената. Такође ћемо раздвојити притисак као и тест функцију притиска као $p^{n+1} = p_h^{n+1} + \tilde{p}^{n+1}$, $q = q_h + \tilde{q}$ које се односи на раздвајање математичког простора $Q_0 = Q_{h,0} + \tilde{Q}_0$.

Ако убацимо ову декомпозицију у (3.59)(3.60) доћићемо до система једначина који је аналоган са (3.65)(3.66). Једначине које се односе на велике величине или величине које се могу ухватити прорачунском мрежом постају (ако се изоставе чланови који се односе на интеграле на граници између елемената),

$$(\delta_t \mathbf{u}_h^n, \mathbf{v}_h) + \nu(\nabla \mathbf{u}_h^{n+\alpha}, \nabla \mathbf{v}_h) + (\mathbf{u}_h^{n+\alpha} \cdot \nabla \mathbf{u}_h^{n+\alpha}, \mathbf{v}_h) \quad (3.67)$$

$$-(p_h^{n+1}, \nabla \cdot \mathbf{v}_h) + (q_h, \nabla \cdot \mathbf{u}_h^{n+\alpha}) - \sum_{\Omega_e} \langle \tilde{\mathbf{u}}^{n+\alpha}, \nu \Delta \mathbf{v}_h + \mathbf{u}_h^{n+\alpha} \cdot \nabla \mathbf{v}_h + \nabla q_h \rangle_{\Omega_e} \quad (3.68)$$

$$+(\delta_t \tilde{\mathbf{u}}^n, \mathbf{v}_h) + \langle \tilde{\mathbf{u}}^{n+\alpha} \cdot \nabla \mathbf{u}_h^{n+\alpha}, \mathbf{v}_h \rangle \quad (3.69)$$

$$-\langle \tilde{\mathbf{u}}^{n+\alpha}, \tilde{\mathbf{u}}^{n+\alpha} \cdot \nabla \mathbf{v}_h \rangle \quad (3.70)$$

$$-(\tilde{p}^{n+1}, \nabla \cdot \mathbf{v}_h) = l(\mathbf{v}_h) \quad (3.71)$$

Једначине (3.67)(3.68) су добијене једначине већ у Галеркиновој методи док једначина (3.68) представља чланове који су добијени у стабилизацији линеаризоване стационарне Навије-Стоксове једначине. Опште је познато да употребом ових чланова у формулацији се обезбеђује стабилност конвектног члана, као и коришћење интерполационих функција истог реда за поље притиска и брзине. У једначинама (3.69)(3.70) се појављују чланови који су ту због ефекта малих величина вектора брзине на материјални извод једначине. Први члан у једначини (3.69) се односи на извод по времену малих величина, док други члан одржава глобалну количину кретања [93] што није задовољено у Галеркиновој методи. Једначина (3.70) представља Рејнолдсов стрес тензор малих величина $(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla \mathbf{v}_h) = -(\tilde{\mathbf{u}} \otimes \tilde{\mathbf{u}}, \nabla \mathbf{v}_h)$. Ова једначина (3.70) се може идентификовати као директан ефекат турбуленције малих величина на струјање великих величина. На крају последња једначина (3.71) представља ефекат малих величина на притисак.

Кључни аспект формулације који раздваја од стандардног SGS приступа су једначине (3.69)(3.70) тј. у аспекту да су сачувани сви чланови малих величина вектора брзине у материјалном изводу егзактног поља брзине.

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \mathbf{u} &= \frac{D}{Dt} (\mathbf{u}_h + \tilde{\mathbf{u}}) \\ &= \partial_t \mathbf{u}_h + \partial_t \tilde{\mathbf{u}} + \tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla \mathbf{u}_h + \mathbf{u}_h \cdot \nabla \mathbf{u}_h + \tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla \tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{u}_h \cdot \nabla \tilde{\mathbf{u}} \end{aligned} \quad (3.72)$$

Треба приметити да чланови $\partial_t \mathbf{u}_h$ и $\mathbf{u}_h \cdot \nabla \mathbf{u}_h$ кад се дискретизују у времену појављују у Галеркиновој формулацији и да последњи члан једначине (3.73) представља стандардну SGS стабилизацију. Остали чланови $\partial_t \tilde{\mathbf{u}}$, $\tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla \mathbf{u}_h$ и $\tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla \tilde{\mathbf{u}}$ су нови чланови који редом означавају временску зависност малих величина, одржање количине кретања као и Рејнолдсов стрес тензор.

Наш циљ је да нађемо решење $\mathbf{u}_h^{n+\alpha}$, $\tilde{\mathbf{u}}^{n+\alpha}$ и p_h^{n+1} , \tilde{p}^{n+1} за задато \mathbf{u}_h^n , $\tilde{\mathbf{u}}^n$ за све $\mathbf{v}_h \in V_{h,0}^d$, $q_h \in Q_{h,0}$. Очигледно је да би то урадили требају нам вредности за мале величине $\tilde{\mathbf{u}}^{n+\alpha}$, \tilde{p}^{n+1} које ће бити добијене из једначине за мале величине. Једначина може да се напише у диференцијалном облику,

$$\delta_t \tilde{\mathbf{u}}^n + (\mathbf{u}_h^{n+\alpha} + \tilde{\mathbf{u}}^{n+\alpha}) \cdot \nabla \tilde{\mathbf{u}}^{n+\alpha} - \nu \Delta \tilde{\mathbf{u}}^{n+\alpha} + \nabla \tilde{p}^{n+1} = \mathbf{r}_{u,h}^{n+\alpha} \quad (3.73)$$

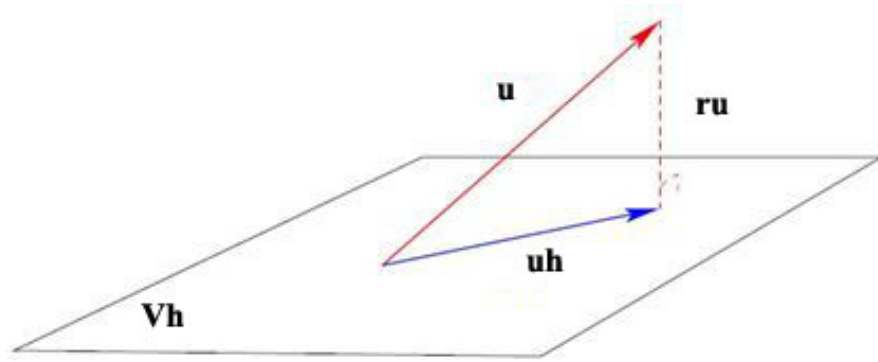
$$\nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}}^{n+\alpha} = \mathbf{r}_{p,h}^{n+\alpha} \quad (3.74)$$

где $\mathbf{r}_{u,h}^{n+\alpha}$ и $\mathbf{r}_{p,h}^{n+\alpha}$ представљају остатке компоненти добијених методом коначних елемената \mathbf{u}_h и p_h дати као,

$$\mathbf{r}_{u,h}^{n+\alpha} = -P[\delta_t \mathbf{u}^n + (\mathbf{u}_h^{n+\alpha} + \mathbf{u}^{n+\alpha}) \cdot \nabla \mathbf{u}^{n+\alpha} - \nu \Delta \mathbf{u}^{n+\alpha} + \nabla \tilde{p}^{n+1} - \mathbf{f}] \quad (3.75)$$

$$\mathbf{r}_{p,h}^{n+\alpha} = -P[\nabla \cdot \mathbf{u}^{n+\alpha}] \quad (3.76)$$

где је $P = I - \Pi_h$, а са Π_h је означена L^2 пројекција на одговарајући простор апроксимације брзине и притиска методом коначних елемената, што доводи до приступа познатијег као Ортогонална субскејл стабилизација. Проста визуализација пројекције на простор решења методом коначних елемената и дефинисање остатка је приказан на слици 3.3.



Слика 3.4: Ортогонална пројекција на простор решења добијен методом коначних елемената

Ако узмемо у обзир аргументе базиране на Фуријеовој анализи за мале величине [92], систем једначина (3.73)(3.74), се може апроксимирати са,

$$\delta_t \tilde{\mathbf{u}}^n + \frac{1}{\tau_1^{n+\alpha}} \tilde{\mathbf{u}}^{n+\alpha} = \mathbf{r}_{u,h}^{n+\alpha} \quad (3.77)$$

$$\frac{1}{\tau_2^{n+1}} \tilde{p}^{n+1} = r_{p,h}^{n+\alpha} + \tau_1 \delta_t r_{p,h}^n \quad (3.78)$$

где стабилизациони параметри τ_1 и τ_2 имају вредносот,

$$\tau_1^{n+\alpha} = \left(c_1 \frac{\nu}{h^2} + c_2 \frac{|\mathbf{u}_h^{n+\alpha} + \tilde{\mathbf{u}}^{n+\alpha}|}{h} \right)^{-1} \quad (3.79)$$

$$\tau_2^{n+1} = \frac{h^2}{c_1 \tau_1^{n+1}} \quad (3.80)$$

где су c_1 и c_2 алгоритамски параметри са препорученим вредностима $c_1 = 4$ и $c_2 = 2$ за линеарне елементе [126], док h је карактеристична величине елемента мреже. Са физикалне тачке гледишта, апроксимација (3.77)(3.78) проблема (3.73)(3.74) осигурава да ће кинетичка енергија моделираних малих величина или вртлога бити приближна кинетичкој енергији егзактних малих вртлога [91].

Са друге стране, приметили смо да вредносот параметра α за временску дискретизацију који се појављује у једначини (3.78)-(3.79) не треба неопходно да буде исти као и апроксимацији за велике величине. Чак, напротив, препоручује се

да се узимају методе првог реда за мале величине док је потребно узимати методе другог и вишег реда за велике величине. То је зато што ће мале величине бити веома дисконтинуитетне функције и дисипативне функције су онда препоручљиве за то. Ипак на крају целокупна апроксимација ће имати исти ред тачности.

3.7.2 Физиклане карактеристике формулације

У овом одељку ћемо се сконцентрисати на физикално значење додатних чланова у једначини (3.67)-(3.71). Већ је напоменуто да ови чланови играју битну улогу у одржању количине кретања као и турбуленције малих величина. Да би видели ове карактеристике и да би поједноставили нотацију сматраћемо да су функције брзине и притиска континуалне функције и да вереме није дискретизовано. У овој формулацији просторна и временска дискретизацију су комутативне па због тога нећемо имати никаквих проблема.

Одржање количине кретања

Почећемо са анализом ефекта члана $\langle \tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h \rangle$. Сврха оног што следи је да презентује резултате из [139], који ће бити симплификовани и адаптирани за ову формулацију. Ако посматрамо следећи проблем уместо проблема у једначини (3.67)-(3.71),

$$\begin{aligned}
 & (\partial_t \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + \nu (\nabla \mathbf{u}_h, \nabla \mathbf{v}_h) + \langle \mathbf{u}_h \cdot \nabla \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h \rangle \\
 & - (p_h, \nabla \cdot \mathbf{v}_h) + (q_h, \nabla \cdot \mathbf{u}_h) - \langle \mathbf{v}_h, \mathbf{f} \rangle - \langle \mathbf{v}_h, \mathbf{t} \rangle_\Gamma \\
 & + (\partial_t \tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{v}_h) + \langle \tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h \rangle - \langle \tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla \mathbf{v}_h \rangle \\
 & - \sum_K \langle \tilde{\mathbf{u}}, \nu \Delta \mathbf{v}_h + \mathbf{u}_h \cdot \nabla \mathbf{v}_h + \nabla q_h \rangle_K = 0
 \end{aligned} \tag{3.81}$$

Ако разматрамо случај $d=3$ и ако узмемо на пример $\mathbf{v}_h = (1, 0, 0)$ и $q_h = 0$ претходна једначина се своди на,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} [\partial_t(u_{h,1} + \tilde{u}_1) - u_{h,1} \nabla \cdot \mathbf{u}_h] d\Omega + \int_{\Omega} \tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla u_{h,1} d\Omega + \int_{\Gamma} u_{h,1} \mathbf{u}_n \cdot \mathbf{n} d\Gamma \\ = \int_{\Omega} f_1 d\Omega + \int_{\Gamma} t_1 d\Gamma \end{aligned} \quad (3.82)$$

Горе наведено осигурава глобално одржање количине кретања ако,

$$- \int_{\Omega} u_{h,1} \nabla \cdot \mathbf{u}_h d\Omega + \int_{\Omega} \tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla u_{h,1} d\Omega = 0 \quad (3.83)$$

Ово је имплицирано једначином континуитета која је добијена са $\mathbf{v}_h = 0$,

$$(q_h, \nabla \cdot \mathbf{u}_h) - \sum_K \langle \tilde{\mathbf{u}}, \nabla q_h \rangle_K = 0 \quad (3.84)$$

где је $V_h/\mathbb{R} \subset Q_{h,0}$ или другим речима $u_{h,1}$ припада простору притиска. Ово је одрживо, нарочито за једнаке интерполационе функције за притисак и брзину. За стандарну Галеркинову методу овај захтев је немогуће испунити, пошто једнаке интерполационе функције не испуњују инф-суп услов. Као закључак, члан $\langle \tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h \rangle$ задовољава глобално одржање количине кретања, пошто без тог члана у дискретној једначини количине кретања добили би да је $\int_{\Omega} u_{h,1} \nabla \cdot \mathbf{u}_h d\Omega = 0$ уместо (3.83), што не имплицира (3.84).

Моделирање турбуленције

У наредних неколико реченица ћемо покушати да објаснимо могућност моделирања турбуленције са описаном формулацијом (3.67)-(3.71) и каква је улога члана $\langle \tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla \mathbf{v}_h \rangle$ у свему томе. У стандардном LES приступу да би се симулирало турбулентно струјање добије се једна једначина за велике величине која је обично означена са цртом изнад променљиве. Овој једначини се додаје један екстра члан на стандардну Навије-Стоксову једначину. Тај члан се зове напонски тензор остатка или тензор величина испод величине мреже $\mathfrak{R} = \overline{\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}} - \bar{\mathbf{u}} \otimes \bar{\mathbf{u}}$. Тензор \mathfrak{R} треба да се моделује у зависности од $\bar{\mathbf{u}}$ да би се добила независна једначина, проблем познат као затворени проблем и кад је то урађено, резултујућа LES једначина може да се реши нумерички.

Стрес тензор остатка \mathfrak{R} је обично растављен у такозване Рејнолдсов, Кросов и Леонардов напонске тензоре да би сачувао Галилеан непроменљивост оригиналне Навије-Стоксове једначине у LES формулацији. Непроменљивост је аутоматски сачувана у презентованој формулацији и приметимо да су аналогни чланови овим напонским тензорима сачувани на природан начин са нашим тотално нумеричким приступом. Прво ћемо разматрати последња четири члана у материјалном изводу (3.72) пошто се они јављају у варијационој једначини (3.67)-(3.71). Члан $-\langle \tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla \mathbf{v}_h \rangle = -\langle \tilde{\mathbf{u}} \otimes \tilde{\mathbf{u}}, \nabla \mathbf{v}_h \rangle$ означава Рејнолдсов напонски тензор.

Док додавањем три остала члана постаје,

$$\langle \mathbf{u}_h \cdot \nabla \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h \rangle - \langle \tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{u}_h \cdot \nabla \mathbf{v}_h \rangle + \langle \tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h \rangle = \quad (3.85)$$

$$-\langle \mathbf{u}_h \otimes \mathbf{u}_h, \nabla \mathbf{v}_h \rangle \quad (3.86)$$

$$-\langle \mathbf{u}_h \otimes \tilde{\mathbf{u}} + \tilde{\mathbf{u}} \otimes \mathbf{u}_h, \nabla \mathbf{v}_h \rangle \quad (3.87)$$

Ако сада обратимо пажњу на конвектни члан остатка у једначини величина испод могућности апроксимације прорачунске мреже (3.77) и ако се узме да је $P = I$ због једноставности, приметимо да

$$\langle (\mathbf{u}_h + \tilde{\mathbf{u}}) \cdot \nabla \mathbf{u}_h, \tilde{\mathbf{v}} \rangle = \quad (3.88)$$

$$-\langle \mathbf{u}_h \otimes \mathbf{u}_h, \nabla \tilde{\mathbf{v}} \rangle \quad (3.89)$$

$$-\langle \mathbf{u}_h \otimes \tilde{\mathbf{u}}, \nabla \tilde{\mathbf{v}} \rangle \quad (3.90)$$

Стога, можемо закључити да модификације укључене у садашњи \mathfrak{R} у LES једначини су некако аутоматски укључен у нашу стабилизациону формулацију. До сада смо дали интерпретацију за (3.85)-(3.90) као контрибуција од стране Галеркинове формулације, стабилизација и одржање количине кретања и такође једначине које управљају динамичку еволуцију малих величина. У садашњој формулацији, преостали Рејнолдсов напонски члан (3.77) се побринуо за утицај турбулентне ефекте малих величина на оне велике.

Колико ће добро наша формулација радити као турбулентни модел зависиће од валидности апроксимације која је направљена за еволутивну једначину за мале величине. Требало би узети неки проблем који има аналитичко решење и који је карактеристичан за валидацију резултата. Модел би требао да репродукује расподелу енергије на Колмогоровој каскади у функцији таласног броја у Фуријеовом простору где $E(k, t) \approx C_K \epsilon_{mol}^{2/3} k^{-5/3}$. Модел би исто тако треба да ухвати одговарјући пад кинетичке енергије у времену, енстропију као и друге статистичке величине. Други стандарни тестови за турбуленцију је турбулентно струјање у каналу. У том случају модел би требао да апроксимира понашање у граничном слоју, који према Прандтлу има лог понашање после ламинарног подслоја. Оваква верификација је већ урађена па се са њом нећемо бавити у тези.

Закључићемо да члан $-\langle \tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla \mathbf{v}_h \rangle$ је идентификован као директни допринос ефеката турбулентног струјања малих величина на оне велике. Како год, сви чланови који у себи имају мале величине су индиректно под дејством турбулентних ефеката зато што су мале величине добијене из нелинеарне једначине (3.77) која садржи (3.89)-(3.90).

3.8 Једначина енергетског баланса

3.8.1 Једначина енергетског баланса за Навије-Стоксову једначину

Диференцијална формулација Навије-Стоксове једначине за домен $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ је дефинисана у једначини (3.1)-(3.2) са граничним условом (3.3) и почетним условима дефинисаним у (3.4). Овај проблем се може написати у конзервативном облику за случај Дирихлеових граничних услова

$$\partial_t \mathbf{u} - 2\nabla \cdot [\nu S(\mathbf{u})] + \nabla \cdot (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla p = \mathbf{f} \quad \text{unutar } \Omega \times (0, T) \quad (3.91)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{unutar } \Omega \times (0, T) \quad (3.92)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) \quad \text{unutar } \Omega \quad t = 0 \quad (3.93)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad \text{na } \Gamma_D \times (0, T) \quad (3.94)$$

где \mathbf{u} представља као и обично брзину струјања, p је притисак, ν је кинематска вискозност флуида, $S(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^\top)$ представља промену тензора издужења, \mathbf{f} представља спољашњу силу и $(0, T)$ је временски интервал анализе.

Ако искористимо функционалне просторе које смо дефинисали у претходним поглављима можемо формулисати варијациону формулацију проблема као: наћи $[\mathbf{u}, p] \in \mathbf{L}^2(0, T; \mathbf{H}_0^1\Omega) \times L^1(0, T; L^2(\Omega)/\mathbb{R})$ тако да,

$$(\partial_t \mathbf{u}, \mathbf{v}) + 2\nu(S(\mathbf{u}), S(\mathbf{v})) + (\nabla \cdot (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}), \mathbf{v}) - (p, \nabla \cdot \mathbf{v}) = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle \quad (3.95)$$

$$(q, \nabla \cdot \mathbf{u}) = 0 \quad (3.96)$$

за све $[\mathbf{v}, q] \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)/\mathbb{R}$ и које задовољавају почетне услове. У даљем току текста претпоставићемо да је решење класично, што дозвољава да напишемо $\mathbf{v} = \mathbf{u}$, $q = ct$ где је c константа у (3.91)-(3.94) за свако $t \in (0, T)$. На крају добијамо једначину енергетског баланса која гласи,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \|\mathbf{u}\|^2 \right) = -2\nu \|S(\mathbf{u})\|^2 + \langle \mathbf{f}, \mathbf{u} \rangle \quad (3.97)$$

Једначина (3.97) саопштава да временска варијација кинетичке енергије зависи од два фактора, наиме од мелекуларне дисипације због вискозности флуида која је очигледно негативна и снаге коју врши спољна сила која може да буде и позитивна и негативна. Ако препознамо кинетичку енергију у тачци као $k = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}/2$, као и дисипацију као $\epsilon_{mol} = 2\nu[S(\mathbf{u}) : S(\mathbf{u})]$ и снагу у тачци коју генерише спољашња сила као $P_f = \mathbf{f} \cdot \mathbf{u}$ можемо написати једначину (3.97) као,

$$\int_{\Omega} \frac{dk}{dt} d\Omega = - \int_{\Omega} \epsilon_{mol} d\Omega + \int_{\Omega} P_f d\Omega \quad (3.98)$$

Према опису енергетске каскаде коју је презентовао Колмогоров за турбулентно струјање, струјање се може посматрати као да је вођено спољашњом силом која делује на велике вртлоге (мале таласне бројеве) и самим тим ствара кинетичку енергију која се преноси на мале вртлоге (велике таласне бројеве) нелинарним процесима. Када се постигне Колмогорова дужина, вискозна дисипација енергије

ϵ_{mol} који се налази са десне стране у једначини (3.98) преузима део преноса кинетичке енергије у унутрашњу тј. топлоту.

3.8.2 Једначина енергетског баланса за LES модел

У претходним поглављима показали смо да у стандардним LES моделима, сепарација величина на мале и велике за притисак и брзину у Навије-Стоксовој једначини се изводи тако што $[\mathbf{u}, p] = [\bar{\mathbf{u}}, \bar{p}] + [\mathbf{u}', p']$, где $[\bar{\mathbf{u}}, \bar{p}]$ представљају велике филтриране величине и $[\mathbf{u}', p']$ представља мале величине. Ако претпоставимо исто као у једначинама (3.24)-(3.27) добићемо филтрирану нестишљиву Навије-Стоксову једначину у конзервативној форми:

$$\partial_t \bar{\mathbf{u}} - 2\nabla \cdot [\nu S(\bar{\mathbf{u}})] + \nabla \cdot (\bar{\mathbf{u}} \otimes \bar{\mathbf{u}}) + \nabla \bar{p} = \mathbf{f} - \nabla \cdot \mathfrak{R} \quad \text{unutar } \Omega \times (0, T) \quad (3.99)$$

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}} = 0 \quad \text{unutar } \Omega \times (0, T) \quad (3.100)$$

$$\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, 0) = \bar{\mathbf{u}}_0(\mathbf{x}) \quad \text{unutar } \Omega, \quad t = 0 \quad (3.101)$$

$$\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad \text{na } \Gamma_D \times (0, T) \quad (3.102)$$

што је аналогно једначинама (3.91)-(3.94) осим дивергенције напонског тензора остатка $\mathfrak{R} = \overline{\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}} - \bar{\mathbf{u}} \otimes \bar{\mathbf{u}}$ који се налази са десне стране једначине (3.99). Варијациона формулација проблема (3.99)-(3.102) гласи: нађи $[\bar{\mathbf{u}}, \bar{p}] \in \mathbf{L}^2(0, T; \mathbf{H}_0^1(\Omega)) \times L^1(0, T; L^2/\mathbb{R})$ тако да,

$$(\partial_t \bar{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) + 2\nu(S(\bar{\mathbf{u}}), S(\mathbf{v})) + \langle \nabla \cdot (\bar{\mathbf{u}} \otimes \bar{\mathbf{u}}), \mathbf{v} \rangle - (\bar{p}, \nabla \cdot \mathbf{v}) = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathfrak{R}, \nabla \mathbf{v} \rangle \quad (3.103)$$

$$(q, \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}) = 0 \quad (3.104)$$

за све $[\mathbf{v}, q] \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)/\mathbb{R}$ и које задовољавају почетне услове. Пошто је \mathfrak{R} симетричан, можемо написати други члан са десне стране у једначини (3.103) као $\langle \mathfrak{R}, \nabla \mathbf{v} \rangle = \langle \mathfrak{R}, S(\mathbf{v}) \rangle$. Додатно и без икаквог губитка уопштености сматраћемо да је волуметријски део \mathfrak{R} апсорбован у члану са притиском. Ако поставимо $\mathbf{v} = \bar{\mathbf{u}}, q =$

ct , за свако $t \in (0, T)$ у једначини (3.103)-(3.104), добићемо једначину енергетског баланса за филтрирану Навије-Стоксову једначину.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \|\bar{\mathbf{u}}\|^2 \right) = -2\nu \|S(\bar{\mathbf{u}})\|^2 + \langle \mathfrak{R}, S(\bar{\mathbf{u}}) \rangle + \langle \bar{\mathbf{f}}, \bar{\mathbf{u}} \rangle \quad (3.105)$$

Сада можемо да дефинишемо филтрирану кинетичку енергију као $\bar{k} = \bar{\mathbf{u}} \cdot \bar{\mathbf{u}}/2$ филтрирану молекуларну дисипацију као $\bar{\epsilon}_{mol} = 2\nu [S(\bar{\mathbf{u}}) : S(\bar{\mathbf{u}})]$, промену стварања кинетичке енергије остатка као $\bar{P}_r = -\mathfrak{R} : S(\bar{\mathbf{u}})$ и снагу од спољашње силе као $\bar{P}_f = \bar{\mathbf{f}} \cdot \bar{\mathbf{u}}$ тако да преформулишемо једначину (3.105) као,

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \bar{k} d\Omega = - \int_{\Omega} \bar{\epsilon}_{mol} d\Omega - \int_{\Omega} \bar{P}_r d\Omega + \int_{\Omega} \bar{P}_f d\Omega \quad (3.106)$$

За тотално развијено турбулентно струјање са дебљином филтера у инерцијалном подопсегу, филтрирано поље се рачуна за скоро целокупну кинетичку енергију струјања. Стога $\int_{\Omega} \bar{k} d\Omega \approx \int_{\Omega} k d\Omega$ и први члан у једначини (3.98) и (3.106) постају скоро једнаки. Ако спољашња сила углавном делује на велике величине или вртлоге струјања, исто ће се десити да $\int_{\Omega} \bar{P}_f d\Omega \approx \int_{\Omega} P_f d\Omega$. Са друге стране, дисипација енергије у филтрираном пољу $\bar{\epsilon}_{mol}$ је релативно мала и може се занемарити. Ако упоредимо једначину (3.98) са једначином (3.106) примећујемо да би LES модел понашао коректно треба да се успостави да је $\int_{\Omega} \bar{P}_r d\Omega \approx \int_{\Omega} \epsilon_{mol} d\Omega$. Што би значило да промена стварања кинетичке енергије малих величина или остатака треба да буде једнака усредњеној енергији вискозне дисипације за мале величине што је показано у публикацији од стране Лилија [94]. У случају многих познатих LES модела као што је и модел Смагоринског [100], \bar{P}_r је увек позитивно и самим тим не може се остварити повратни трансфер енергије са малих вртлога на велике вртлоге, што значи да се трансфер енергије увек одвија од великих вртлога ка оним малим вртлозима, али не и обрнуто.

3.8.3 Једначина енергетског баланса за Ортогонални сабгрид скејл стабилизациони модел

Стабилизациону методу смо представили у претходним поглављима а овде ћемо подсетити да се она састоји у раздвајању континуалног простора где се решење

Навије-Стоксове једначине може пронаћи као $\mathbf{H}_0^1(\Omega) = V_{h,0}^d \oplus \tilde{V}_0^d$ и $L^2(\Omega)/\mathbb{R} = Q_{h,0} \oplus \tilde{Q}_0$ где су \tilde{V}_0^d и \tilde{Q}_0 безгранично димензиони простори који попуњавају коначно димензионе просторе $V_{h,0}^d$ и $Q_{h,0}$ у $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$ и $L^2(\Omega)/\mathbb{R}$. Поља притиска и брзине се могу раздвојити као $\mathbf{u} = \mathbf{u}_h + \tilde{\mathbf{u}}$ и $p = p_h + \tilde{p}$ (исто важи и за тест функције).

Варијациона формулација Навије-Стоксове јдначине је сада раздвојена у два система једначина. Када заменимо раздвојене функције и после интегралења по деловима и ако занемаримо неке чланове који носе интеграцију по граници између елемената, једначина за велике вртлоге или величине када је пројектујемо на простор методе коначних елемената постаје [92] [93].

$$\begin{aligned}
 & (\partial_t \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + 2\nu(S(\mathbf{u}_h), S(\mathbf{v}_h)) + \langle \nabla \cdot (\mathbf{u}_h \otimes \mathbf{u}_h), \mathbf{v}_h \rangle \\
 & \quad - (p_h, \nabla \cdot \mathbf{v}_h) + (q_h, \nabla \cdot \mathbf{u}_h) \\
 & \quad \sum_e \langle \tilde{\mathbf{u}}, 2\nu \nabla \cdot S(\mathbf{v}_h) + \nabla \cdot (\mathbf{u}_h \otimes \mathbf{v}_h) + \nabla q_h \rangle_{\Omega_e} \\
 & \quad + (\partial_t \tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{v}_h) + \langle \nabla \cdot (\tilde{\mathbf{u}} \otimes \mathbf{u}_h), \mathbf{v}_h \rangle \\
 & \quad \quad + \langle \tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla \tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{v}_h \rangle \\
 & \quad - (\tilde{p}, \nabla \cdot \mathbf{v}_h) = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v}_h \rangle
 \end{aligned} \tag{3.107}$$

Да би решили једначину (3.107) потребни су нам изрази за функције малих величина притиска и брзине $[\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{p}]$. Ови изрази се могу пронаћи из решења једначине за мале величине. Иако је дато да се дате једначине не могу решити егзактно, треба прибећи апроксимацији да би се добило решење. Ми овде користимо ортогонални сабгрид скејл приступ, који је базиран на избору простора који је ортогоналан на простор методе коначних елемената. У овом случају ћемо користити квази статичке мале величине што значи да нећемо користити извод по времену у једначини (3.77)-(3.78), што на крају доводи до апроксимације [91],

$$\tilde{\mathbf{u}} \approx \tau_1 \mathbf{r}_{u,h} \tag{3.108}$$

$$\tilde{p} \approx \tau_2 r_{p,h} \tag{3.109}$$

где $\mathbf{r}_{u,h}$ и $r_{p,h}$ представљају ортогоналну пројекцију остатка компоненти \mathbf{u}_h и p_h на простор методе коначних елемената,

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_{u,h} &= \Pi_h^\top [\partial_t \mathbf{u}_h - 2\nu \nabla \cdot S(\mathbf{u}_h) + \nabla \cdot (\mathbf{u}_h \otimes \mathbf{u}_h) + \nabla p_h - \mathbf{f}] \\ &= -\Pi_h^\top [-2\nu \nabla \cdot S(\mathbf{u}_h) + \nabla \cdot (\mathbf{u}_h \otimes \mathbf{u}_h) + \nabla p_h]\end{aligned}\quad (3.110)$$

$$r_{p,h} = -\Pi_h^\top [\nabla \cdot \mathbf{u}_h] \quad (3.111)$$

где је Π_h^\top ортогонална пројекција, са $\Pi_h^\top = I - \Pi_h$, где је I јединични вектор и Π_h је L^2 пројекција на одговарајући простор методе коначних елемената. Уствари, нумеричка анализа стационарног линеаризованог проблема је увелико симплификована ако је ова пројекција помножена са коефицијентом стабилизације, што је показано у [142].

У другом реду једначине (3.110) претпостављамо да спољашња сила припада $V_{h,0}^d$ и она делује на велике вртлоге. Исто тако смо претпоставили још једну симплификацију за остатак брзине у конвективном члану, тј да ћемо само искористити брзину добијену методом коначних елемената.

Стабилизациони параметри који се појављују у једначини (3.108)(3.109) се могу добити из Фуријеове анализе базиране на аргументима за мале величине [92]

$$\tau_1 = [(c_1 \frac{\nu}{h^2})^2 + (c_2 \frac{|\mathbf{u}_h|}{h})^2]^{-\frac{1}{2}} \quad (3.112)$$

$$\tau_2 = \frac{h^2}{c_1 \tau_1} \quad (3.113)$$

c_1 и c_2 у једначини (3.112)(3.113) су алгоритамски параметри са препорученим вредностима $c_1 = 4$ и $c_2 = 2$ за линеарне елементе [126], док h представља карактеристичну величину елемента мреже. Избор стабилизационих параметара у једначини (3.112)(3.113) гарантује да кинетичка енергија моделираних малих величина апроксимира кинетичку енергију егзактних малих величина или вртлога. Претпоставићемо да су параметри из једначине (3.112)(3.113) константе у сваком

елементу. Једначина (3.107) заједно са апроксимацијом (3.108)(3.109) за мале величине чине нумерички приступ проблему решавања Навије-Стоксове једначине.

Да би нашли једначину енергетског баланса за ортогонални сабгрид скејл приступ решавања Навије-Стоксове једначине можемо написати да је $\mathbf{v}_h = \mathbf{u}_h$ и $q_h = ct$ у једначини (3.107). Ово доводи до једначине,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{u}_h\|^2 = & -2\nu \|S(\mathbf{u}_h)\|^2 - \sum_e \langle \tilde{\mathbf{u}}, 2\nu S(\mathbf{u}_h) + \nabla \cdot (\mathbf{u}_h \otimes \mathbf{u}_h) \rangle_{\Omega_e} + \\ & + \sum_e \langle \tilde{p}, \nabla \cdot \mathbf{u}_h \rangle_{\Omega_e} + \langle \mathbf{f}, \mathbf{u}_h \rangle \end{aligned} \quad (3.114)$$

где Ω_e представља прорачунски домен сачињен од е-тог елемента мреже. Сумација са индексом е претпоставља да се врши сумација по свим елементима. Ако узмемо у обзир апроксимацију за мале величине (3.108)(3.111) у једначини (3.114) добићемо,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{u}_h\|^2 = & -2\nu \|S(\mathbf{u}_h)\|^2 + \langle \mathbf{f}_h, \mathbf{u}_h \rangle \\ & - \sum_e \tau_1 (\Pi_h^\top [-2\nu \nabla \cdot S(\mathbf{u}_h) + \nabla \cdot (\mathbf{u}_h \otimes \mathbf{u}_h) + \nabla p_h], \\ & 2\nu \nabla \cdot S(\mathbf{u}_h) + \nabla \cdot (\mathbf{u}_h \otimes \mathbf{u}_h))_{\Omega_e} - \sum_e \tau_2 (\Pi_h^\top (\nabla \cdot \mathbf{u}_h), \nabla \cdot \mathbf{u}_h)_{\Omega_e} \end{aligned} \quad (3.115)$$

Пошто смо ми овде заинтересовани за велике Рејнолдсове бројеве, сви стабилизациони чланови који се множе са вискозношћу треба да се занемаре, после чега добијамо следећу једначину енергетског баланса,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{u}_h\|^2 = & -2\nu \|S(\mathbf{u}_h)\|^2 + \langle \mathbf{f}_h, \mathbf{u}_h \rangle \\ & - \sum_e \tau_1 (\Pi_h^\top [\nabla \cdot (\mathbf{u}_h \otimes \mathbf{u}_h) + \nabla p_h], \nabla \cdot (\mathbf{u}_h \otimes \mathbf{u}_h))_{\Omega_e} \\ & - \sum_e \tau_2 (\Pi_h^\top (\nabla \cdot \mathbf{u}_h), \nabla \cdot \mathbf{u}_h)_{\Omega_e} \end{aligned} \quad (3.116)$$

Ако дефинишемо нумеричку кинетичку енергију струјања са $k^h = \frac{1}{2}|\mathbf{u}_h|^2$, нумеричку дисипацију за велике величине као $\epsilon_{mol}^h = 2\nu S(\mathbf{u}_h) : S(\mathbf{u}_h)$ и нумеричку снагу спољашње силе као $P_f^h = \mathbf{f}_h \cdot \mathbf{u}_h$. Препознаћемо на сваком елементу $P_r^{h\tau}$ као,

$$P_r^{h\tau} = \tau_1 P_r^{h\tau_1} + \tau_2 P_r^{h\tau_2} \quad (3.117)$$

где је,

$$P_r^{h\tau_1} = \Pi_h^\top [\nabla \cdot (\mathbf{u}_h \otimes \mathbf{u}_h) + \nabla p_h] \cdot [\nabla \cdot (\mathbf{u}_h \otimes \mathbf{u}_h)] \quad (3.118)$$

$$P_r^{h\tau_2} = \Pi_h^\top (\nabla \cdot \mathbf{u}_h) (\nabla \cdot \mathbf{u}_h) \quad (3.119)$$

Када смо све дефинисали једначину (3.116) можемо написати као,

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} k^h d\Omega = - \int_{\Omega} \epsilon_{mol}^h d\Omega - \sum_e \int_{\Omega_e} P_r^{h\tau} d\Omega_e + \int_{\Omega} P_f^h d\Omega \quad (3.120)$$

Јасно је да k^h се односи на целокупну кинетичку енергију струјања тако да је $\int_{\Omega} k^h d\Omega \approx \int_{\Omega} k d\Omega$. Са друге стране, исто ће се десити да је $\int_{\Omega} P_f^h d\Omega \approx \int_{\Omega} P_f d\Omega$ тако да спољашња сила делује само на велике вртлоге. Додатна молекуларна дисипација великих вртлога биће занемарљиво мала тако да је $\int_{\Omega} \epsilon_{mol}^h d\Omega \approx 0$.

Следеће круцијално питање је да ли ће се задовољити следећа релација $\sum_e \int_{\Omega_e} P_r^{h\tau} d\Omega \approx \int_{\Omega} \epsilon_{mol} d\Omega$ за ортогоналну сабгрид скејл формулацију да би био добар нумерички приступ за решење Навије-Стоксове једначине за тотално формирано турбулентно струјање. Уставари, то неће бити случај за све чланове у $P_r^{h\tau}$ сходно томе да су сви чланови настали као потреба за нумеричком стабилизацијом. Јасно је да неки од тих чланова треба да апроксимирају средњу молекуларну дисипацију у једначини (3.98). Касније ћемо показати због истрживачких разлога да сви чланови у $P_r^{h\tau}$ задовољавају ову претпоставку.

3.9 Енергетски трансфер малих величина у Ортогоналној сабгрид скејл стабилизационој методи коначних елемената

3.9.1 Стабилизациони параметри за велике Рејнолдсове бројеве

У једначини (3.112) дат је израз за стабилизациони параметар τ_1 . За случај великих Рејнолдсових бројева, вискозни члан се може изоставити зато што је конвектни члан доминантан, што доводи до

$$\tau_1 \approx \frac{h}{c_2 |\mathbf{u}_h|} \quad (3.121)$$

Са друге стране, користећи једначину (3.121) у изразу за параметар τ_2 у једначини (3.113) добићемо

$$\tau_2 \approx \frac{c_2}{c_1} h |\mathbf{u}_h| \quad (3.122)$$

Када се користе горе наведени стабилизациони параметри у имплементацији методе коначних елемената, h репрезентује карактеристичну дужину елемента у Ω_{ac} , док \mathbf{u}_h представља карактеристични брзину дефинисану на сваком елементу прорачунске мреже. На пример, може се узети да је средња вредност брзине на елементу. Шта год да се узме за брзину битно је да τ_1 треба да зависи инверзно у односу на ту карактеристичну брзину док τ_2 треба да буде пропорционалан са τ_2 . Овакво понашање ће нам омогућити да направимо релацију између $P_r^{h\tau}$ и молекуларне промене дисипације ϵ_{mol} . Као што је напоменуто у уводу, за задату прорачунску мрежу ми ћемо размотрити случај када је карактеристична величина елемента h довољно фина тако да лежи у инерцијалном подопсегу. Инерцијални подопсег може да има лимитирајућу вредност $[l_{DI}, l_{EI}]$ где је $l_{DI} \approx 60\eta$ и $l_{EI} \approx L/6$, где η представља Колмогорову дужину у зони где се дешава дисипација и L представља величину струјања карактеристичну за велике вртлоге. Ако са U означимо средњу вредност изабране карактеристичне брзине за задати елемент прорачунске мреже који ће бити коришћен у изразима за стабилизацију. Друга хипотеза Колмогорова

сличности онда гарантује да за вртлог величине l , тако да је $l \in [l_{DI}, l_{EI}]$ и U може само да зависи од ϵ_{mol} и l , уствари $U \sim (\epsilon_{mol}l)^{1/3}$. Тада следи да елементарни стабилизациони параметри постају,

$$\tau_{1,ac} \sim \frac{h}{U} \sim \frac{h}{(\epsilon_{mol}l)^{1/3}} \quad (3.123)$$

$$\tau_{2,ac} \sim hU \sim h(\epsilon_{mol}l)^{1/3} \quad (3.124)$$

Као што је претходно напоменуто симбол \sim се користи да би означио понаша се као, тј. чланови који су повезани овим симболом су апроксимативно једнаки све до константе. Како год, ми ћемо у даљем тексту користити једнакост за чланове који су апроксимативни као у једначини (3.123)(3.124).

Елементарна средња вредност члана $P_r^{h\tau_1}$

Ако са $\Pi_i^h[\nabla \cdot (\mathbf{u}_h \otimes \mathbf{u}_h) + \nabla p_h]$ и-ту компоненту пројекције у дефиницији нумеричког трансфера кинетичке енергије малих величина $P_r^{h\tau_1}$ у једначини (3.117) и ако са u_{hi} означимо и-ту компоненту брзине.

Разматраћемо дискретизовани домен који има n_p чворова за притисак, n_u чворова за брзину и n_e елемената прорачунске мреже. Дефинисаћемо средњу вредност $P_r^{h\tau_1}$ у елементу мреже Ω_e као,

$$P_{r,e}^{h\tau_1} = \frac{1}{V_e} \int_{\Omega_e} (P_r^{h\tau_1}) d\Omega_e = \frac{1}{V_e} \int_{\Omega_e} \Pi_i^{h,\top} [\nabla \cdot (\mathbf{u}_h \otimes \mathbf{u}_h) + \nabla p_h] \cdot [\nabla \cdot (\mathbf{u}_h \otimes \mathbf{u}_h)] d\Omega_e \quad (3.125)$$

Следеће ћемо да дефинишемо чланове $\langle P_{r,e}^{h\tau_1} \rangle_U$ и $\langle P_{r,e}^{h\tau_1} \rangle_P$ у једначини (3.125) који ће се независно третирати у анализи. Где смо дефинисали,

$$\begin{aligned} \langle P_{r,e}^{h\tau_1} \rangle_U &= \frac{1}{V_e} \left\langle \int_{\Omega_e} \Pi_i^{h,\top} [\nabla \cdot (\mathbf{u}_h \otimes \mathbf{u}_h)] \cdot [\nabla \cdot (\mathbf{u}_h \otimes \mathbf{u}_h)] d\Omega_e \right\rangle \\ &= \frac{1}{V_e} \left\langle \int_{\Omega_e} \partial_i (u_i^h u_j^h) \partial_k (u_k^h u_j^h) d\Omega_e \right\rangle \\ &\quad - \frac{1}{V_e} \left\langle \int_{\Omega_e} \Pi_i^h [\nabla \cdot (\mathbf{u}_h \otimes \mathbf{u}_h)] \partial_j (u_j^h u_i^h) d\Omega_e \right\rangle \end{aligned} \quad (3.126)$$

и такође,

$$\begin{aligned}
 \langle P_{r,e}^{h\tau_1} \rangle_P &= \frac{1}{V_e} \left\langle \int_{\Omega_e} \Pi_i^{h,\top} (\nabla p_h) \cdot [\nabla \cdot [\nabla \cdot (\mathbf{u}_h \otimes \mathbf{u}_h)] d\Omega_e \right\rangle \\
 &= \frac{1}{V_e} \left\langle \int_{\Omega_e} \partial_i p_h \partial_j (u_j^h u_i^h) d\Omega_e \right\rangle \\
 &\quad - \frac{1}{V_e} \left\langle \int_{\Omega_e} \Pi_i^h (\nabla p_h) \partial_j (u_j^h u_i^h) d\Omega_e \right\rangle
 \end{aligned} \tag{3.127}$$

Очигледно је да на крају имамо,

$$\langle P_{r,e}^{h\tau_1} \rangle = \langle P_{r,e}^{h\tau_1} \rangle_U + \langle P_{r,e}^{h\tau_1} \rangle_P \tag{3.128}$$

Ако наставимо аналогно са претходном анализом можемо да дефинишемо и $P_r^{h\tau_2}$ који је дефинисан у једначини (3.119).

$$\begin{aligned}
 \langle P_{r,e}^{h\tau_2} \rangle &= \frac{1}{V_e} \left\langle \int_{\Omega_e} \Pi_{h,\top} (\nabla \cdot \mathbf{u}_h) (\nabla \cdot \mathbf{u}_h) d\Omega_e \right\rangle \\
 &= \frac{1}{V_e} \left\langle \int_{\Omega_e} (\partial_i u_i^h)^2 d\Omega_e \right\rangle - \frac{1}{V_e} \left\langle \int_{\Omega_e} \Pi^h (\nabla \cdot \mathbf{u}_h) (\partial_i u_i^h) d\Omega_e \right\rangle
 \end{aligned} \tag{3.129}$$

Из једначине (3.117) и ако узмемо стабилизационе параметре (3.123)(3.124) као и (3.125) (3.129), можемо да дефинишемо средњу вредност стварања кинетичке енергије $P_r^{h\tau}$ за велике Рејнолдсове бројеве као

$$\langle P_{r,e}^{h\tau} \rangle = \tau_1 \langle P_{r,e}^{h\tau_1} \rangle + \tau_2 \langle P_{r,e}^{h\tau_2} \rangle \tag{3.130}$$

3.9.2 Решење добијено методом коначних елемената за поље притиска и брзине и L^2 пројекција

Компоненте дискретног поља брзине \mathbf{u}_h се могу написати као уобичајно за прорачунску мрежу која има n_u чворова као,

$$u_i^h(\mathbf{x}) = \sum_{a=1}^{n_u} N_u^a(\mathbf{x}) U_i^a \quad (3.131)$$

где је апроксимативна функција $N_u^a(\mathbf{x})$, $a = 1, \dots, n_u$ је база за $V_{0,h}^d$ и U_i^a је вредност брзине у чвору прорачунске мреже \mathbf{x}^b , $b = 1, \dots, n_u$ тако да је,

$$u_i^h(\mathbf{x}^b) = U_i^b \quad (3.132)$$

У случају да је u_h да је интерполација методом коначних елемената, вредности у чворовима су егзактне и онда се може написати,

$$u_i^h(\mathbf{x}^b) = U_i^b = u_i(\mathbf{x}^b) = u_i^b \quad (3.133)$$

Ако сада претпоставимо следећу интерполацију за Рејнолдсове напоне,

$$u_i^h u_j^h(\mathbf{x}) = \sum_{b=1}^{n_u} N_u^b(\mathbf{x}) U_i^b U_j^b \quad (3.134)$$

Ако дефинишемо дискретно поље притиска p_h можемо га написати као,

$$p_h(\mathbf{x}) = \sum_{a=1}^{n_p} N_p^a(\mathbf{x}) P^a \quad (3.135)$$

где је интерполациона функција за притисак $N_p^a(\mathbf{x})$, $a = 1, \dots, n_p$ је база за $Q_{h,0}$ и P^a је вредност притиска у чвору \mathbf{x}^a прорачунске мреже. Већ смо напоменули да је једна од предности коришћења стабилизационе методе као што је Ортогонална сабгрид скејл да можемо да користимо исте интерполационе функције за брзину и притисак.

Са друге стране, биће потребно да дамо експлицтни израз за пројектоване чланове $\Pi_i^h[\nabla \cdot (\mathbf{u}_h \otimes \mathbf{u}_h)]$ и $\Pi_i^h(\nabla p_h)$ који се јављају у једначинама (3.126)(3.127)(3.129). Ако узмемо у обзир функцију ψ срачунате из апроксимације методом коначних елемената, тј. није потребно да буде континуална. Њена пројекција на $V_{h,0}^d$ се може написати као,

$$\Pi(\psi_h) = \sum_{a=1}^{n_u} N^a(\mathbf{x})\Pi^a \quad (3.136)$$

са коефицијентом Π^a који је добијен из решења линарног система,

$$\sum_{a=1}^{n_u} M^{ba}\Pi^a = \int_{\Omega} N^b\psi_h d\Omega \quad b = 1, \dots, n_u \quad (3.137)$$

$$M^{ba} = \int_{\Omega} N^b N^a d\Omega \quad (3.138)$$

Матрица масе у једначини (3.138) се може апроксимирати са дијагоналном матрицом $diag(M_{11}, \dots, M_{n_u n_u})$ користећи стандардно правило Гаусове квадратуре. У том случају можемо писати,

$$\Pi^b = M_{bb}^{-1} \int_{\Omega} N^b\psi_h d\Omega \quad (3.139)$$

тако да једначина (3.138) постаје,

$$\Pi(\psi_h) = \sum_{a=1}^{n_u} M_{aa}^{-1} N^a \int_{\Omega} N^a\psi_h d\Omega \quad (3.140)$$

Следће што треба да урадимо је да заменимо горе наведене изразе за дискретну брзину и притисак у изразе за $\langle P_{r,e}^{h\tau_1} \rangle_U$, $\langle P_{r,e}^{h\tau_1} \rangle_P$ и $\langle P_{r,e}^{h\tau_2} \rangle$ које су дате са једначинама (3.126)(3.127)(3.129).

Конвективни члан $\langle P_{r,e}^{h\tau_1} \rangle$ који је задужен за мале величине брзине (3.126). Прво ћемо адресирати члан у другом реду једначине (3.126), који ћемо означити са $\langle P_{r,e}^{h\tau_1} \rangle_{U,1}$. Ако заменимо једначину (3.134) у овај члан добићемо,

$$\langle P_{r,e}^{h\tau_1} \rangle_{U,1} = \frac{1}{V_e} \left\langle \int_{\Omega_e} \left[\sum_a \partial_i N^a U_i^a U_j^a \sum_b \partial_k N^b U_k^b U_j^b \right] d\Omega_e \right\rangle \quad (3.141)$$

$$= \frac{1}{V_e} \left[\sum_{a,b} \langle U_i^a U_j^a U_k^b U_j^b \rangle \int_{\Omega_e} \partial_i N^a \partial_k N^b d\Omega_e \right] \quad (3.142)$$

Члан у трећем реду једначине (3.126) ћемо означити са $\langle P_{r,e}^{h\tau_1} \rangle_{U,2}$. Ако заменимо једначине (3.134)(3.140) добићемо,

$$\begin{aligned} \langle P_{r,e}^{h\tau_1} \rangle_{U,2} &= -\frac{1}{V_e} \left\langle \int_{\Omega_e} \left[\sum_{a,c} M_{cc}^{-1} N^c \int_{\Omega_e} N^c \partial_i N^a U_i^a U_j^a d\Omega \sum_b \partial_k N^b U_k^b U_j^b \right] d\Omega_e \right\rangle \\ &= -\frac{1}{V_e} \left\{ \sum_{a,b} \langle U_i^a U_j^a U_k^b U_j^b \rangle \int_{\Omega_e} [\partial_k N^b \sum_c M_{cc}^{-1} N^c \int_{\Omega} N^c \partial_i N^a d\Omega] d\Omega_e \right\} \end{aligned} \quad (3.143)$$

У наредној једначини ћемо дефинисати геометријске факторе,

$$I_{ij}^{ab} = \int_{\Omega_e} \partial_j N^b \partial_i N^a d\Omega_e \quad (3.144)$$

$$G_{ij}^{ab} = \int_{\Omega_e} [\partial_j N^b \sum_c M_{cc}^{-1} N^c \int_{\Omega} N^c \partial_i N^a d\Omega] d\Omega_e \quad (3.145)$$

Оба фактора зависе од елемената прорачунске мреже. Док I_{ij}^{ab} имају локални карактер у смислу да зависи само од интерполационе функције и типом елемента који се користи, са друге стране G_{ij}^{ab} има глобални карактер зато што садржи интеграцију целог прорачунског домена Ω . Овај глобални карактер је услед последице да је пројекција унутар $\langle P_{r,e}^{h\tau_1} \rangle_{U,2}$

Користећи нотацију статистичке механике за корелациону функцију брзине,

$$B_{ij}^{ab} = \langle U_i^a U_j^b \rangle \quad (3.146)$$

док можемо да напишемо и

$$B_{ij,kl}^{ab} = \langle U_i^a U_j^a U_k^b U_l^b \rangle \quad (3.147)$$

Можемо да убацимо једначине (3.144)-(3.147) у једначину (3.142)(3.143), да би добили следећи израз за конвектни члан $\langle P_{r,e}^{h\tau_1} \rangle_U$.

$$\langle P_{r,e}^{h\tau_1} \rangle_U = \langle P_{r,e}^{h\tau_1} \rangle_{U,1} + \langle P_{r,e}^{h\tau_1} \rangle_{U,2} = \frac{1}{V_e} \sum_{a,b} B_{ij,kj}^{ab} (I_{ik}^{ab} - G_{ik}^{ab}) \quad (3.148)$$

Сумирање просторних димензија индекса i, j, k се претпоставља у једначини (3.148). Следеће ћемо дефинисати израз за члан притиска $\langle P_{r,e}^{h\tau_1} \rangle_P$. Ако узмемо у обзир једначину (3.134)(3.135) у (3.127), добијамо за члан у дугом реду једначине (3.127), који смо означили са $\langle P_{r,e}^{h\tau_1} \rangle_{P,1}$.

$$\langle P_{r,e}^{h\tau_1} \rangle_{P,1} = \frac{1}{V_e} \left\langle \int_{\Omega_e} \left[\sum_a \partial_i N^a P^a \sum_b \partial_j N^b U_j^b U_i^b \right] d\Omega_e \right\rangle \quad (3.149)$$

$$= \frac{1}{V_e} \left[\sum_{a,b} \langle P^a U_j^b U_i^b \rangle \int_{\Omega_e} \partial_i N^a \partial_j N^b d\Omega_e \right] \quad (3.150)$$

Ако сада узмемо (3.134)(3.135)(3.140) у трећем реду једначине (3.127) добићемо,

$$\begin{aligned} \langle P_{r,e}^{h\tau_1} \rangle_{P,2} &= -\frac{1}{V_e} \left\langle \int_{\Omega_e} \left[\sum_{a,c} M_{cc}^{-1} N^c \int_{\Omega} N^c \partial_i N^a P^a d\Omega \sum_b \partial_j N^b U_j^b U_i^b \right] d\Omega_e \right\rangle \\ &= -\frac{1}{V_e} \left\{ \sum_{a,b} \langle P^a U_j^b U_i^b \rangle \int_{\Omega_e} \left[\partial_j N^b \sum_c M_{cc}^{-1} N^c \int_{\Omega} N^c \partial_i N^a d\Omega \right] d\Omega_e \right\} \end{aligned} \quad (3.151)$$

За задане геометријске факторе (3.144)(3.145) и ако узмемо нотацију статистичке механике за корелацију између притиска и брзине,

$$B_{p,ij}^{ab} = \langle P^a U_i^b U_j^b \rangle \quad (3.152)$$

можемо написати $\langle P_{r,e}^{h\tau_1} \rangle_P$ као,

$$\langle P_{r,e}^{h\tau_1} \rangle_P = \langle P_{r,e}^{h\tau} \rangle_{P,1} + \langle P_{r,e}^{h\tau} \rangle_{P,2} = \frac{1}{V_e} \sum_{a,b} B_{p,ij}^{ab} (I_{ij}^{ab} - G_{ij}^{ab}) \quad (3.153)$$

где се сумација врши са индексима i, j .

Дивергентни члан $\langle P_{r,e}^{h\tau_2} \rangle$ који је задужен за мале величине притиска (3.129), тако да га можемо дефинисати као,

$$\langle P_{r,e}^{h\tau_2} \rangle_P = \frac{1}{V_e} \sum_{a,b} B_{ij}^{ab} (I_{ij}^{ab} - G_{ij}^{ab}) \quad (3.154)$$

где је B_{ij}^{ab} корелација брзине другог реда.

Ако узмемо једначине (3.148)(3.153) и (3.154) у једначини (3.128) (3.130) добићемо израз за средњу вредност промене кинетичке енергије малих величина.

$$\begin{aligned} \langle P_{r,e}^{h\tau} \rangle &= \tau_{1,ac} \langle P_{r,e}^{h\tau_1} \rangle + \tau_{2,ac} \langle P_{r,e}^{h\tau_2} \rangle \\ &= \frac{1}{V_e} \sum_{a,b} [\tau_{1,ac} (B_{ij,kj}^{ab} + B_{p,ik}^{ab}) + \tau_{2,ac} B_{ik}^{ab}] (I_{ik}^{ab} - G_{ik}^{ab}) \end{aligned} \quad (3.155)$$

3.10 Ортогонална сабгрид скејл метода са динамичким праћењем малих величина

До сада смо дефинисали шта значи ортогоналност у методологији и како се понашају мале величине када их посматрамо као квази статичке, а сада ћемо се сконцентрисати на то шта нам доноси динамичко праћење малих величина тј. временски извод апроксимације малих величина. Тако да се временски извод брзине може написати као,

$$\partial_t \mathbf{u} = \partial_t \mathbf{u}_h + \partial_t \tilde{\mathbf{u}} \quad (3.156)$$

Први члан са десне стране треба оставити ако је временска промена малих величина занемарена што је био случај до сада. А ако узмемо у обзир овај извод малих величина добићемо такозвано динамичко праћење малих величина. Као што је показано у [93] други члан у једначини (3.156) доводи до коректног понашања шема за временску дискретизацију и већу тачност саме формулације. Ако узмемо домен који је дискретизован са прорачунском мрежом. Као што је и претходно објашњено стартна тачка формулације ће бити раздвајање променљивих. Овде нећемо узети у обзир мале величине притиска. Тако да ако је $\tilde{\mathbf{u}}$ је одређена апроксимација егзактне брзине малих величина, раздвајањем добићемо $\mathbf{u} \approx \mathbf{u}_h + \tilde{\mathbf{u}}$, $p = p_h$. Када убацимо у једначине (3.49)(3.50) добићемо,

$$\begin{aligned}
 (\partial_t \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + \langle \mathbf{u}_* \cdot \nabla \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h \rangle + \nu (\nabla \mathbf{u}_h, \nabla \mathbf{v}_h) - (p_h, \nabla \cdot \mathbf{v}_h) + (q_h, \nabla \cdot \mathbf{u}_h) \\
 (\partial_t \tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{v}_h) - \sum_K \langle \tilde{\mathbf{u}}, \nu \mathbf{n} \cdot \nabla \mathbf{v}_h + \nu \Delta \mathbf{v}_h + \nabla q_h \rangle_K \\
 + \sum_K \langle \tilde{\mathbf{u}}, \nu \mathbf{n} \cdot \nabla \mathbf{v}_h + q_h \mathbf{n} \rangle_{\partial K} = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v}_h \rangle
 \end{aligned} \tag{3.157}$$

$$\begin{aligned}
 (\partial \tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{v}}) + \sum_K \langle \mathbf{u}_* \cdot \nabla \tilde{\mathbf{u}} - \nu \Delta \tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{v}} \rangle_K + \sum_K \langle \nu \mathbf{n} \cdot \nabla \tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{v}} \rangle_{\partial K} \\
 + \sum_K \langle \partial_t \mathbf{u}_h + \mathbf{u}_* \cdot \nabla \mathbf{u}_h - \nu \Delta \mathbf{u}_h + \nabla p_h, \tilde{\mathbf{v}} \rangle_K \\
 + \sum_K \langle \nu \mathbf{n} \cdot \nabla \mathbf{u}_h - p_h \mathbf{n}, \tilde{\mathbf{v}} \rangle_{\partial K} = \langle \mathbf{f}, \tilde{\mathbf{v}} \rangle
 \end{aligned} \tag{3.158}$$

Ове дискретне варијационе једначине морају да буду задовољене за сваку тест функцију $[\mathbf{v}_h, q_h] \in V_h \times Q_h$ и $\tilde{\mathbf{v}} \in \tilde{V}$ где је \tilde{V} је простор у ком се налазе мале величине.

Осим што смо узели да су мале величине притиска једнаке нули нисмо начинили никакву другу апроксимацију. Пре него што начинимо било какву апроксимацију прво ћемо дефинисати простор за мале величине, тј простор где припада $\tilde{\mathbf{u}}$ за фиксно t . Као што смо већ објаснили наш простор у ком ће се налазити мале величине је ортогоналан на простор дефинисан методом коначних елемената тј. \tilde{V} је подпростор од V_h^Γ .

Прва апроксимација коју ћемо начинити је да је $\tilde{\mathbf{u}} \approx 0$ на ∂K за сваки елемент у прорачунском домену који је дискретизован прорачунском мрежом. Овакву апроксимацију можемо замислити као да су функције малих величина као функције мехура које су нула на границама елемента. Са друге стране битна апроксимација је

$$\sum_K \langle \mathbf{u}_* \cdot \nabla \tilde{\mathbf{u}} - \nu \Delta \tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{v}} \rangle_K \approx \sum_K \tau_K^{-1} \langle \tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{v}} \rangle_K \tag{3.159}$$

где је τ_K је сет алгоритамских параметара који су срачунати на сваком елементу,

$$\tau_K^{-1} = \frac{c_1 \nu}{h_k^2} + \frac{c_2 \|\mathbf{u}_*\|_{L^\infty(K)}}{h_K} \quad (3.160)$$

где је h_k карактеристична дужина елемента и c_1 и c_2 су алгоритамске константе које зависе од апроксимације методом коначних елемента. Хтели би да напоменемо да параметар τ_K долази од апроксимације просторног оператера, што је показано у једначини (3.159). Стога, никад нећемо укључити зависност τ_K од временске дискретизације. Ова апроксимација ће нам дозволити да формулишемо метод који се може имплементирати у код. Он се састоји у томе да треба пронаћи $\mathbf{u}_h \in L^2(0, T; V_h)$ и $p_h \in D'(0, T; Q_h)$ тако да,

$$\begin{aligned} (\partial_t \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + \langle \mathbf{u}_* \cdot \nabla \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h \rangle + \nu (\nabla \mathbf{u}_h, \nabla \mathbf{v}_h) - (p_h, \nabla \cdot \mathbf{v}_h) + (q_h, \nabla \cdot \mathbf{u}_h) \\ - \sum_K \langle \tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{u}_* \cdot \nabla \mathbf{v}_h + \nu \Delta \mathbf{v}_h + \nabla q_h \rangle_K = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v}_h \rangle \end{aligned} \quad (3.161)$$

$$\begin{aligned} (\partial_t \tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{v}}) + \sum_K \tau_K^{-1} \langle \tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{v}} \rangle_K \\ + \sum_K \langle \mathbf{u}_* \cdot \nabla \mathbf{u}_h - \nu \Delta \mathbf{u}_h + \nabla p_h, \tilde{\mathbf{v}} \rangle_K = \langle \mathbf{f}, \tilde{\mathbf{v}} \rangle \end{aligned} \quad (3.162)$$

Претходне једначине морају да су задовољене за све $[\mathbf{v}_h, q_h] \in V_h \times Q_h$ и $\tilde{\mathbf{v}} \in \tilde{\mathbf{V}}$. У контексту стабилизационе методе коначних елемената анализа стабилности би требало да се спроведе да би се доказало да методе неће дивергирати када $\nu \rightarrow 0$ и да се омогући за било коју комбинацију интерполационих функција за притисак и брзину. Други захтев можда није много битан ако се узме у обзир инф-суп услов за стабилне интерполационе функције, док је први услов нешто што мора да се испуни. Са нумеричке тачке гледишта, методе које дивергирају када $\nu \rightarrow 0$ су тотално бескорисне за велике Рејнолдсове бројеве, тако и за моделирање турбуленције.

3.10.1 Дисипативна структура и могућност моделирања повратне енергије малих величина

Прво ћемо дефинисати локални баланс енергије што ће нам омогућити да видимо какав је проток енергије између великих вртлога и малих вртлога. Исто тако дефинисаћемо повратни проток енергије са малих величина на велике и видети како се енергија са малих величина преноси на велике величине.

Једначина баланса локалне кинетичке енергије

Ако узмемо прорачунски регион R формиран од суседних елемената прорачунске мреже и ако дефинишемо флукс t_R на ∂R који садржи и флукс који долази од напона на површини тако и конвективни флукс. Због једносоставности, претпоставићемо да τ је константа срачуната са карактеристичном брзином и дужином елемента. Ако је $L_u \mathbf{v} = \mathbf{u}_* \cdot \nabla \mathbf{v} - \nu \Delta \mathbf{v}$ и ако усвојимо да је $\mathbf{v}_h = \mathbf{u}_h$, $q_h = p_h$ и $\tilde{\mathbf{v}} = \tilde{\mathbf{u}}$ у једначини (3.157)(3.158), користећи (3.159) и ако занемаримо мале величине на границама елемената, добићемо,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{u}_h\|_R^2 + \nu \|\nabla \mathbf{u}_h\|_R^2 + (\partial_t \tilde{\mathbf{u}}, \tilde{P}(\mathbf{u}_h))_R \\ & + \sum_{K \subset R} \langle \tilde{\mathbf{u}}, \tilde{P}(L_u^* \mathbf{u}_h - \nabla p_h) \rangle_K = \langle \mathbf{f}, \mathbf{u}_h \rangle_R + \langle \mathbf{t}_R, \mathbf{u}_h \rangle_{\partial R} \end{aligned} \quad (3.163)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\tilde{\mathbf{u}}\|_R^2 + \tau^{-1} \|\tilde{\mathbf{u}}\|_R^2 + (\tilde{P}(\partial_t \mathbf{u}_h), \tilde{\mathbf{u}})_R \\ & + \sum_{K \subset R} \langle \tilde{\mathbf{u}}, \tilde{P}(L_u \mathbf{u}_h + \nabla p_h) \rangle_K = \langle \mathbf{f}, \tilde{\mathbf{u}} \rangle_R \end{aligned} \quad (3.164)$$

где је $L_u^* \mathbf{v} = -\mathbf{u}_* \cdot \nabla \mathbf{v} - \nu \Delta \mathbf{v}$. У једначини (3.163) занемарили смо члан $\langle \mathbf{u}_* \cdot \nabla \mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h \rangle$. Последњи члан у изразу је сачуван да би показао да се флукс t_R мења ако је интеграл срачунат у домену R који је део Ω . Из једначине (3.163)(3.164) можемо донети битан закључак. Ако претпоставимо да је $\nu \Delta \mathbf{u}_h$ занемарљиво (могућност да је \mathbf{u}_h линеарно на елементима прорачунске мреже или ν је веома мало или ако је $\tilde{P}(\Delta \mathbf{u}_h) \approx 0$), можемо дефинисати

$$K_h = \frac{1}{2} \|\mathbf{u}_h\|_R^2, \quad \tilde{K} = \frac{1}{2} \|\tilde{\mathbf{u}}\|_R^2 \quad (3.165)$$

$$M_h = \nu \|\nabla \mathbf{u}_h\|_R^2, \quad \tilde{M} = \tau^{-1} \|\tilde{\mathbf{u}}\|_R^2 \quad (3.166)$$

$$P_h = \langle \mathbf{f}, \mathbf{u}_h \rangle_R + \langle \mathbf{t}_R, \mathbf{u}_h \rangle_{\partial R}, \quad \tilde{P} = \langle \mathbf{f}, \tilde{\mathbf{u}} \rangle_R \quad (3.167)$$

$$\mathcal{T} = \sum_{K \subset R} \langle \tilde{\mathbf{u}}, \tilde{P}(L_u^* \mathbf{u}_h - \nabla p_h) \rangle_K \quad (3.168)$$

где је са K_h, \tilde{K} дефинисана кинетичка енергија великих и малих величина, док је са M_h, \tilde{M} дефинисана дисипација великих и малих величина, а са P_h, \tilde{P} екстерна снага која делује на велике и мале величине, на крају са \mathcal{T} је дефинисан транспорт енергије. Из једначине (3.163)(3.164) видимо ако је \tilde{V} потпростор од V_h^\top баланс енергије у домену R се може написати као,

$$\frac{d}{dt} K_h + M_h + \mathcal{T} = P_h \quad (3.169)$$

$$\frac{d}{dt} \tilde{K} + \tilde{M} - \mathcal{T} = \tilde{P} \quad (3.170)$$

Стога може се закључити да долази до раздвајања величина у једначини баланса енергије само ако су мале величине ортогоналне на простор у коме се налази решење методом коначних елемената.

3.10.2 Моделирање узајамне енергетске интеракције између малих и великих величина - Backscatter

У овом поглављу ћемо се позабавити могућности моделирања повратне енергије са малих величина на велике познатије као backscatter. Ако узмемо нотацију која је претходно дефинисана, backscatter се може дефинисати са условом да је $\mathcal{T} < 0$, где је са \mathcal{T} дефинисан члан који дефинише енергетски трансфер. То би значило да се енергија са малих величина прноси на велике величине. Физички, познато је да то може да се деси у изолованим просторним тачкама и временским инстанцама. Што се тиче нумерике, модел треба да је такав да је \mathcal{T} негативан само у области R која је довољно мала (по могућству један елемент) у пар временских корака временске

дискретизације. Као и до сада претпоставићемо да мале величине ортогоналне на простор решења проблема методом коначних елемената и да је $\mathbf{f} \in \mathbf{V}_h$. Из једначине (3.162) имамо да

$$\tilde{\mathbf{u}} = -\tau[\partial_t \tilde{\mathbf{u}} + \tilde{P}(L_u \mathbf{u}_h + \nabla p_h)] \quad (3.171)$$

која када се замени у израз за \mathcal{T} води до,

$$\mathcal{T} = \sum_{K \subset R} \tau \langle \tilde{P}(L_u \mathbf{u}_h + \nabla p_h), \tilde{P}(-L_u^* \mathbf{u}_h + \nabla p_h) \rangle_K \quad (3.172)$$

$$+ \sum_{K \subset R} \tau \langle \partial_t \tilde{\mathbf{u}}, \tilde{P}(-L_u^* \mathbf{u}_h + \nabla p_h) \rangle_K \quad (3.173)$$

Ако је вискозни члан занемарљив што је наш случај и ако је $r = -P_h^\top(\mathbf{u}_* \cdot \nabla \mathbf{u}_h + \nabla p_h)$ имаћемо,

$$\mathcal{T} = \int_R \epsilon_{num} + \int_R \beta_{num} = \sum_K \tau (\langle \mathbf{r}, \mathbf{r} \rangle_K - \langle \partial_t \tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{r} \rangle_K) \quad (3.174)$$

Из претходне једначине се одмах може закључити ако се узимају ортогоналне мале величине, backscatter је могућ само ако су мале величине динамичке, јел у супротном други члан у једначини (3.174) нестаје и први је онда очигледно позитиван. Ако је временски извод укључен у једначини (3.174) ништа се не може рећи у вези знака \mathcal{T} , стога могућност да се моделује backscatter је и даље отворена.

Са друге стране, нумерички модел ће бити физички коректан и ако је \mathcal{T} у смислу осредњене вредности позитиван. Ако претпоставимо да је \mathbf{r} периодичан у времену, за период T_0 , тако да је и $\tilde{\mathbf{u}}$. Ако је,

$$\mathbf{r}(\mathbf{x}, t) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n \cos(\omega_n t) + B_n(\mathbf{x}) \sin(\omega_n t)), \quad \omega_n = \frac{2\pi n}{T_0} \quad (3.175)$$

$$\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = \sum_{n=0}^{\infty} (\tilde{A}_n \cos(\omega_n t) + \tilde{B}_n(\mathbf{x}) \sin(\omega_n t)) \quad (3.176)$$

ако ставимо да је,

$$\partial_t \tilde{\mathbf{u}} + \tau^{-1} \tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{r}(t) \quad (3.177)$$

Добићемо да је,

$$\tilde{A}_n(\mathbf{x}) = \frac{A_n \tau^{-1} - B_n \omega_n}{\tau^{-2} + \omega_n^2}, \quad \tilde{B}_n(\mathbf{x}) = \frac{A_n \omega_n + B_n \tau^{-1}}{\tau^{-2} + \omega_n^2} \quad (3.178)$$

Ако интегралимо око целог периода и ако претпоставимо да је τ константан у домену \mathbb{R} добићемо,

$$\begin{aligned} \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \mathcal{T} dt &= \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \int_{\mathbb{R}} (\epsilon_{num} + \beta_{num}) dt \\ &= \frac{\tau}{T} \int_0^T \sum_K (\langle \mathbf{r}, \mathbf{r} \rangle_K - \langle \partial_t \tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{r} \rangle_K) dt \\ &= \tau \int_{\mathbb{R}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1 + (\omega_n \tau)^{-2}} (A_n^2 + B_n^2) \end{aligned} \quad (3.179)$$

Ако је $\beta_{num} = 0$ што је случај за квази статичке мале величине резултат би био исти само без члана $(\omega_n \tau)^{-2}$, из чега можемо да закључимо да $\int_{\mathbb{R}} \beta_{num}$ може бити негативно. Иако је средњи енергетски трансфер мањи са динамичким малим величинама он је на средњем нивоу позитиван.

Поглавље 4

Прорачун акустичних извора и Директна Фуријеова Трансформација

У овом поглављу ћемо се укратко осврнути на процес прорачуна акустичних извора и извршити кратак преглед Лајтхилове аналогије која је централна за добијање локације и дистрибуције акустичних извора тј, монопола, дипола и квадрипола. Затим ћемо се осврнути каје су могућности за трансформацију добијених акустичних извора из временског домена. Превасходно ћемо извршити упоредну анализу директне и брзе Фуријеове трансформације и дати разлоге зашто је изабрана директна Фуријеова трансформација као коначни избор имплементације у прорачунски код. У додатку Б ће бити презентована имплементација процедуре у Фортран код.

4.1 Увод

Као што смо већ рекли у претходним поглављима централна за ову тезу је Лајтхилова аналогија. Лајтхил је са преформулацијом стишљиве Навије-Стоксове једначине добио таласну једначину где са десне стране једначине су акустични извори. Лајтхилова аналогија је егзактна тј. не користи никакву апроксимацију сходно томе неки је зову и егзактна аналогија. Пошто је Хелмхолцова једначина за пропагацију акустичних таласа у домену дефинисана

у фреквентном домену потребно је да акустичне изворе трансформишемо из временског домена у фреквентни домен. Иако сваки вид литературе предлаже брзу Фуријеову трансформацију као прорачунски супериорну методологију али са једним недостатком да је потребно складиштити велике количине података пре него што се изврши трансформација. Ми ћемо у тези представити имплементацију директне Фуријеове трансформације у временску петљу за решавање Навије-Стоксове једначине и тим поступком редуковати потребан меморијски простор за алокацију велике количине временских вектора брзине струјања. Постоји неколико начина да се израчуна Дискретна Фуријеова Трансформација (Direct Fourier Transformation - DFT), као што су истовремено решавање линеарних једначина или корелациони метод. Брзе Фуријерове Трансформације (Fast Fourier Transformation - FFT) су други метод за израчунавање DFT-а. Ова метода даје исти резултат као и остале, али је знатно ефикаснија у смислу уштеде времена рачунања и до више стотина пута. Овај напредак је исти као када би поредили лет млазним авионом и ходање. Иако FFT захтева само неколико десетина линија кода, то је један од најкомпликованијих алгоритама. Са друге стране иако је веома брз метод захтева преуређење података који треба да се трансформишу у целокупној својој величини што га за веома велике прорачунске домене, ставља у позицију методологије која захтева велике меморијске просторе, што је понекад од битнијег значаја.

4.2 Прорачун акустичних извора

Као што је већ речено акустична аналогија се базира на преформулацији једначине механике флуида да би се добила нехомогена таласна једначина. Изворни члан резултујуће нехомогене таласне једначине се очекује да буде једино важан у турбулентном или вртложном делу струјања и у првој апроксимацији за генерисани звук се очекује да има занемарљиво малу повратну реакцију [35], [80]. Ово је одговарајућа хипотеза ако се може занемарити стишљивост што је случај за струјање малим Маховим бројевима.

Да би извели једначину Лајтхила почећемо од једначине континуитета и једначине количине кретања у Рејнолдсовој форми за стишљиво струјање, где ћемо претпоставити да нема извора масе као ни запреминских сила које делују на њу.

Када смо дефинисали познате једначине извршићемо извод по времену једначине континуитета и одузети од једначине количине кретања и на крају ћемо добити,

$$\partial_{tt}^2 \rho - \nabla \cdot (\nabla \cdot \Phi) = (\nabla \otimes \nabla) : \Phi \quad (4.1)$$

Дато је да само дивергенција тензора флукса количине кретања, $\Phi = \rho(\mathbf{u} \otimes \mathbf{u} - \sigma)$ која се јавља у једначини кретања флуида, можемо редефинисати Кошијев напонски тензор σ и уједно представљајући константни притисак p_0 .

$$\sigma = -(p - p_0)\mathbf{I} + \mu[\nabla u + \nabla u^T - \frac{2}{3}(\nabla \cdot \mathbf{u})\mathbf{I}] \quad (4.2)$$

Са друге стране, у случају идеалног линеарног акустичног медијума, тензор флукса количине кретања се претвара у једноставнији облик где трансфер количине кретања може да се деси само под дејством притиска. У том случају тензор постаје,

$$\Phi_0 = (p - p_0)\mathbf{I} = c_0^2(\rho - \rho_0)\mathbf{I} \quad (4.3)$$

на крају стижемо до,

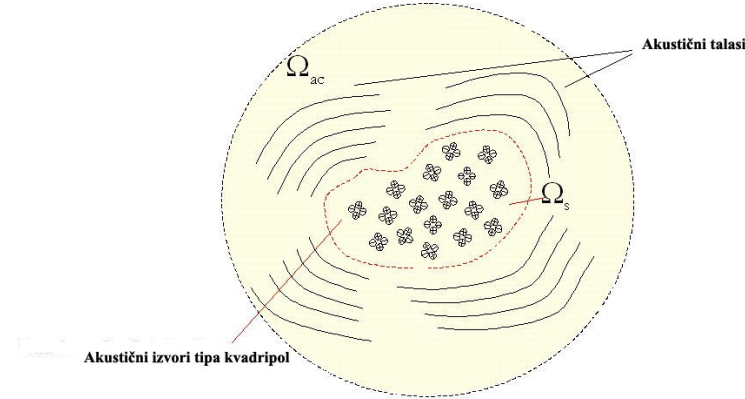
$$(\partial_{tt}^2 - c_0^2 \nabla^2)(\rho - \rho_0) = (\nabla \otimes \nabla) : \mathbf{T} \quad (4.4)$$

где је,

$$\mathbf{T} = \Phi - \Phi_0 = \rho(\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + [(p - p_0) - c_0^2(\rho - \rho_0)]\mathbf{I} - \sigma \quad (4.5)$$

Једначина (4.4) је прослављена Лајтхилова једначина и тензор \mathbf{T} је познат као Лајтхиллов стрес тензор. Треба напоменути да није усвојена ниједна апроксимација у једначини (4.4). Стога Лајтхилову аналогију можемо посматрати као алтернативну формулацију једначина које описују стишљиво струјање флуида. Исто тако треба приметити да једначина (4.4) представља нехомогену таласну једначину чији изворни члан садржи двоструки дивергент који кореспондира дистрибуцији извора

квадриполарног типа који прелазе у таласе и пропагирају кроз прорачунски домен што је приказано на слици 4.1.



Слика 4.1: Шематски приказ расподеле акустичних извора и њихова пропација са акустичним таласима

Пошто члан који репрезентује акустичне изворе садржи двоструку дивергенцију он се не може директно прорачунати методом коначних елемената класе C^0 , осим ако се не интегрални у деловима где један извод прелази на тест функцију. Са друге стране постоји могућност да се апроксимира изворни члан са изводом првог реда захваљујући константи нестишљивости. Следи,

$$\begin{aligned}
 (\nabla \otimes \nabla) : \mathbf{T} &\approx \rho_0 (\nabla \otimes \nabla) : (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) = \rho_0 \nabla [(\nabla \otimes \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} + \mathbf{u}(\nabla \cdot \mathbf{u})] \\
 &= \rho \nabla \cdot [(\nabla \otimes \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u}] = \rho \mathbf{u} \cdot \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \rho (\nabla \otimes \mathbf{u}) : (\nabla \otimes \mathbf{u})^\top \\
 &= \rho (\nabla \otimes \mathbf{u}) : (\nabla \otimes \mathbf{u})^\top = s(\mathbf{x}, t)
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

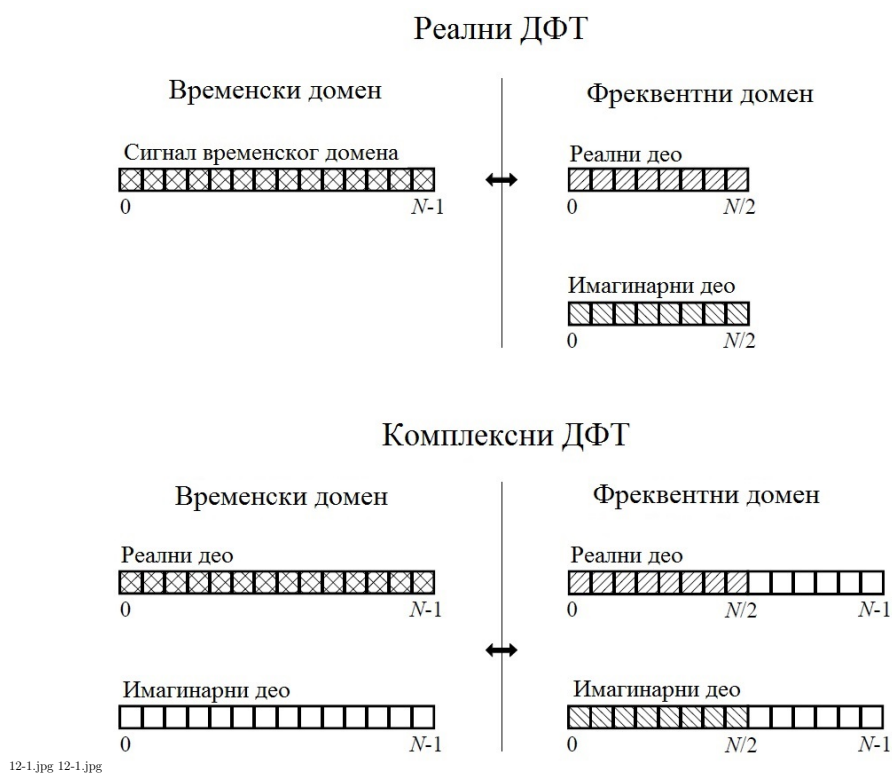
где $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ је коришћен два пута и где смо дефинисали $s(\mathbf{x}, t)$ у последњем реду. Ова апроксимација омогућава директну визуелизацију акустичних извора док користи предност коришћења C^0 класе елемената методе коначних елемената.

Сада када смо дефинисали двоструки дивергент Лајтхиловог тензора потребно је добијени тензор пребацити у фреквентни домен. Трансформацију ћемо извршити директном Фуријеовом трансформацијом али пре тога ћемо у наредних пар поглавља предочити предности и мане брзе и директне Фуријеове трансформације на задату апликацију.

4.3 Реални DFT користећи комплексни DFT

J.W. Cooley и J.W. Tukey су дали велики допринос развоју FFT-а у њиховом раду [143], [144]. Ако се вратимо у прошлост, други су открили ову технику много година раније. На пример, велики Немачки математичар Карл Фридрих Гаус (Karl Friedrich Gauss) је користио ову методу више од једног века пре. Ови почеци развоја су у великој мери заборављени јер није постојао алат да се метода практично примени тј. компјутери. Cooley и Tukey су преузели сву славу зато што су открили FFT у право време, на почетку компјутерске револуције.

FFT се базира на комплексном DFT-у, много напреднијој верзији реалног DFT-а. Ове трансформације су овако назване због начина на који свака репрезентује податке, тј. да ли користи комплексне бројеве или реалне бројеве.



Слика 4.2: Поређење реалног и комплексног ДФТ-а.

Имајући у виду да је FFT алгоритам за рачунање комплексног DFT-а, јако је важно разумети како пребацити податке реалног DFT-а у и из формата комплексног DFT-а. Слика 4.1 пореди како реални DFT и комплексни DFT чувају податке. Реални DFT трансформише функцију у временском домену са N-тачака у две функције у

фреквентном домену са по $N/2 + 1$ -тачака. Две функције фреквентног домена се зову реални део и имагинарни део, држећи се косинусоиде и синусоиде, респективно.

За разлику од реалног DFT-а, комплексни DFT трансформише две функције у временском домену са по N -тачака у две функције у фреквентном домену са по N -тачака. Две функције у временском домену се зову реални део и имагинарни део, а исто важи и за функцију у фреквентном домену. Упркос њиховим именима, све вредности ових низова су обични бројеви. Ишрафиране коцкице показују вредности заједничке за обе трансформације.

Претпоставимо да имамо две функције са по N -тачака и потребно је да израчунамо реални DFT уз помоћ комплексног DFT-а (као што користи FFT алгоритам). Прво померимо сигнал са N -тачака у реални део временског домена комплексног DFT-а, а затим подесимо све узорке имагинарног дела у нулу. Рачунање комплексног DFT-а даје једну реалну и једну имагинарну функцију фреквентног домена, сваки са по N -тачака. Тачке од 0 до $N/2$ ових функција одговарају реалном спектру DFT-а.

Фреквентни домен DFT-а је периодичан ако су укључене и негативне фреквенције. Избор периода функције је произвољан, може бити између -1.0 и 0 , -0.5 и 0.5 , 0 и 1.0 , или било који други јединични интервал повезан са брзином семпловања. Опсег фреквенција комплексног DFT-а укључује негативне фреквенције поређане од 0 до 1.0 . Другим речима, један цео период се протеже од тачке 0 до тачке $N - 1$, што одговара времену од 0 до 1.0 брзине семпловања. Позитивне фреквенције постоје између тачака 0 и $N/2$, што одговара времену од 0 до 0.5 . Остале тачке између $N/2 + 1$ и $N - 1$ садрже негативне вредности фреквенција (које се обично игноришу).

Рачунање реалног инверзног DFT-а користећи комплексни Инверзни DFT је нешто теже. Разлог томе је што морате бити сигурни да су негативне фреквенције записане у одговарајућем формату. Не заборавимо, тачке од 0 до $N/2$ комплексног DFT-а су исте као и у реалном DFT-у, и за реални и за имагинарни део. За реални део, тачка $N/2 + 1$ је иста као тачка $N/2 - 1$, тачка $N/2 + 2$ је иста као тачка $N/2 - 2$, итд. све до тачке $N - 1$ која је иста као тачка 1 . Исти основни образац је коришћен за имагинарни део, осим што се променио знак. То значи да је тачка $N/2 + 1$ иста као тачка $N/2 - 1$ само са предзнаком минус. Приметимо да тачке 0 и $N/2$ немају парне тачке у овој дуплираној шеми.

4.4 Како FFT функционише

FFT је компликовани алгоритам и његови детаљи су обично остављени стручњацима из ове области. Ово поглавље описује генералне операције FFT-а, али сакрива кључну ствар: употребу комплексних бројева.

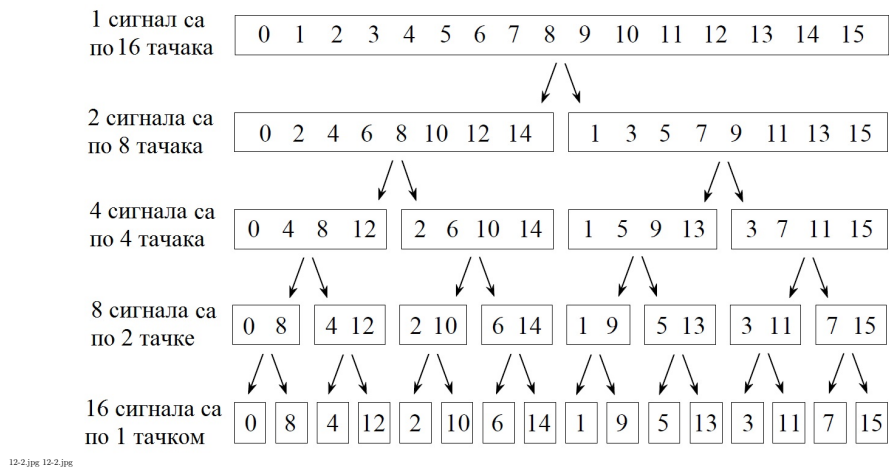
У сложеном означавању, и временски и фреквентни домен садрже једну функцију направљену од N комплексних тачака. Свака од ових комплексних тачака је састављена од два броја, реалног и имагинарног дела. На пример, ако говоримо о комплексној тачки $X[42]$, мислимо на комбинацију $ReX[42]$ и $ImX[42]$. Другим речима, свака комплексна променљива се састоји од два броја. Када се множе две комплексне променљиве, четири индивидуалне компоненте се морају комбиновати како би формирали две компоненте производа. У наставку ћемо користити изразе за комплексно означавање.

FFT ради на принципу разлагања функције временског домена који се састоји од N тачака у N функција временског домена за сваку појединачну тачку. Други корак је рачунање N опсега фреквенција које одговарају N функцијама временског домена. Последње, N опсега се спајају у један опсег фреквенција.

На слици 4.2 је приказан пример разлагања временског домена који се користи у FFT-у. У овом примеру, функција од 16 тачака се разлаже кроз 4 одвојене етапе. У првој етапи се сигнал од 16 тачака пребацује у две функције са по 8 тачака. У другој етапи се подаци пребацују у 4 функције са по 4 тачке. Овај поступак се примењује све док се не формира N сигнала са по једном тачком. Испреплетано разлагање се користи сваки пут када се сигнал раздвоји на два, односно када се сигнал подели на његове парне и непарне позиције узорака. Најбољи начин да се овај образац разуме јесте студирање слике 4.2. За овакво разлагање потребно је $\log_2 N$ фаза, што би значило да је за сигнал од 16 тачака (2^4) потребно 4 фазе, за сигнал од 512 тачака (2^7) 7 фаза итд.

Сада, када разумемо структуру разлагања, она може бити значајно упрошћена. Разлагање није ништа друго него преслагање тачака у функцији. Слика 4.3 показује потврбни образац преуређивања.

На левој страни, бројеви узорака оригиналне функције су поређани заједно са њиховим бинарним парњацима. На десној страни су преуређени бројеви узорака,



СЛИКА 4.3: Слагање ФФТ-а

Бројеви узорака у нормалном редоследу		Бројеви узорака после малог преуређивања	
децимални	бинарни	децимални	бинарни
0	0000	0	0000
1	0001	8	1000
2	0010	4	0100
3	0011	12	1100
4	0100	2	0010
5	0101	10	1010
6	0110	6	0100
7	0111	14	1110
8	1000	1	0001
9	1001	9	1001
10	1010	5	0101
11	1011	13	1101
12	1100	3	0011
13	1101	11	1011
14	1110	7	0111
15	1111	15	1111

СЛИКА 4.4: ФФТ алгоритам "bit reversal sorting"

такође са њиховим бинарним парњацима. Важно је приметити да су бинарни бројеви преокренути за сваки узорак. На пример, узорак 3 (0011) је замењен са узорком број 12 (1100). Исто тако, узорак број 14 (1110) је замењен са узорком број 7 (0111), итд. Разлагање временског домена FFT-а се обично спроводи по "bit reversal sorting" алгоритму. Ово подразумева преуређивање редоследа N узорака временског домена пребаченим у бинарни запис са битовима чији су бројеви замењени на предходно описан начин.

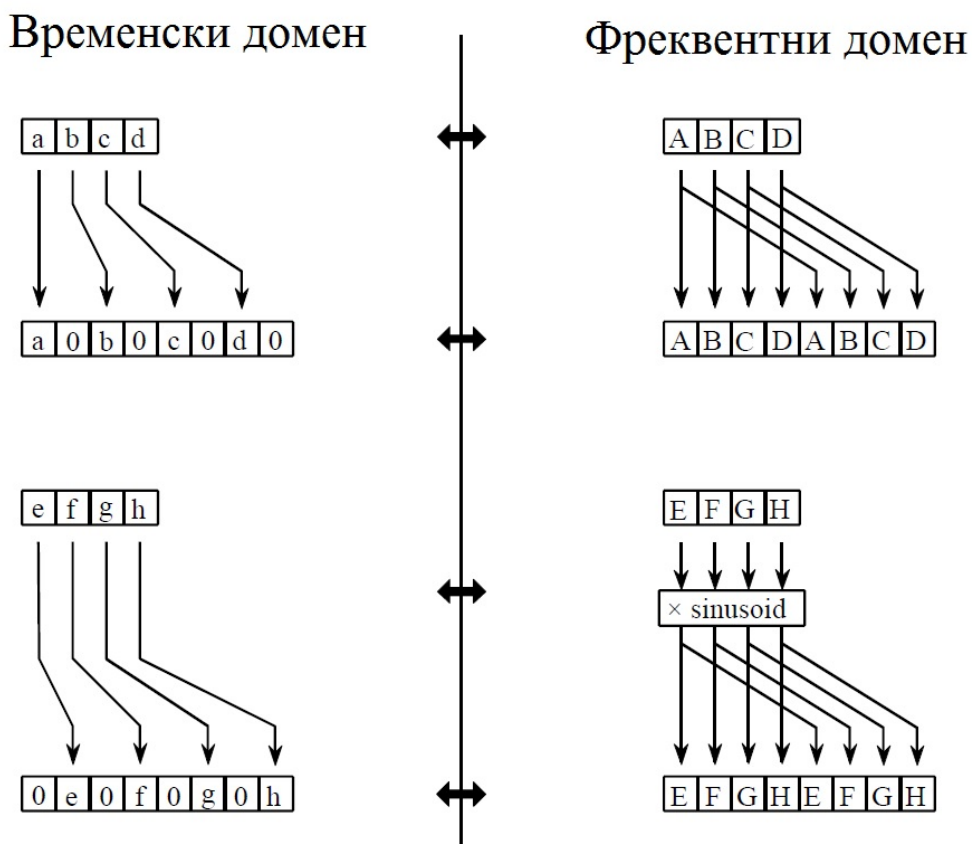
Следећи корак у FFT алгоритму је налажење опсега фреквенција за једну тачку функције у временском домену. Ништа лакше, фреквентни опсег функције за 1 тачку једнак је самом себи. То значи да ништа није потребно да би се урадио овај корак. Иако никакав рад није укључен, не заборавимо да је свака од функција са по јеном тачком сада фреквентни опсег, а не функција у временском домену.

Последњи корак у FFT-у је комбиновање N опсега фреквенција у тачно обрнути редослед у односу на позиције које су имале у временском домену. У овом кораку алгоритам постаје збуњујући. Нажалост, пречица "bit reversal" није применљива, и морамо се вратити један корак уназад. У првом кораку, 16 фреквентних опсега (једна тачка за сваки) је сједињено у 8 фреквентних опсега (две тачке за сваки). У другом кораку, 8 фреквентних опсега је сједињено у 4 фреквентна опсега (4 тачке за сваки) итд. Последњи корак резултује FFT излазом, 16 тачака фреквентног опсега.

Слика 4.4 показује како се два фреквентна опсега, сваки састављен од 4 тачке, комбинују у један фреквентни опсег са 8 тачака. Ово сједињење мора поништити испреплетано разлагање урађено у временском домену. Другим речима, операција у фреквентном домену мора одговарати процедури у временском домену комбинујући два сигнала са по 4 тачке. Посматрајмо два сигнала у временском домену, $abcd$ и $efgh$. Сигнал у временском домену од 8 тачака може бити формиран у два корака: "разредимо" сваки сигнал са 4 тачке нулама да би формирали сигнал са 8 тачака, и онда спојимо сигнале. Тако, $abcd$ постаје $a0b0c0d0$, а $efgh$ постаје $0e0f0g0h$. Као што је приказано на слици 4.4, разређивање временског домена нулама резултује дуплирању фреквентног опсега. Стога, фреквентни опсег је формиран у FFT-у његовим дуплирањем, а затим спајањем тако дуплираних опсега.

У циљу усклађивања приликом додавања, две функције у временском домену су разређене нулама на два различита начина. У једној функцији, непарне тачке су

нуле, док су у другој функцији парне тачке нуле. Другим речима, Један од сигнала у временском домену ($0e0f0g0h$ приказан на слици 4.4) је померен у десно за једно место. Ово померање временског домена одговара множењу опсега синусоидом.



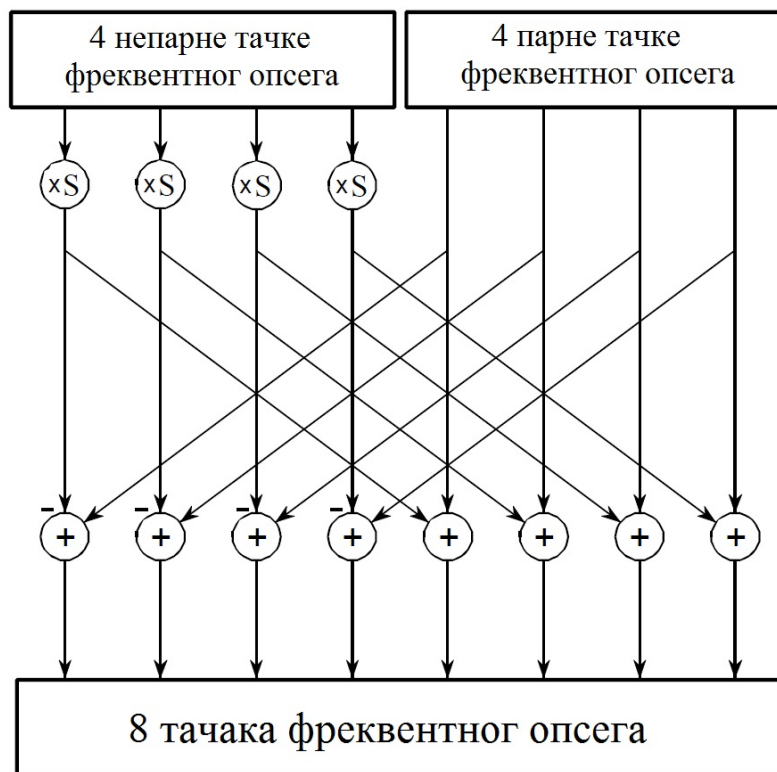
12-4.jpg 12-4.jpg

Слика 4.5: Сједињење ФФТ-а

Слика 4.5 показује дијаграм комбиновања два опсега са 4 тачке у један са 8 тачака. Да би још више упростили, слика 4.5 је формирана по основном обрасцу са слике 4.6 који се изнова и изнова понавља. Овај упрошћени дијаграм се назива "лептир" јер обликом подсећа на крила лептира и представља основни елемент рачунања ФФТ-а, трансформишући две комплексне тачке у две друге комплексне тачке.

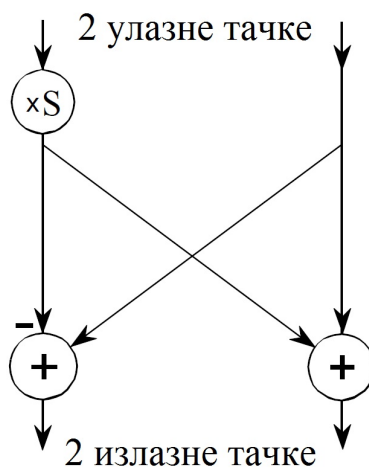
Слика 4.7 показује структуру целог ФФТ. Разлагање временског домена се постиже "bit reversal sorting" алгоритмом. Трансформација разложених података у фреквентни домен не укључује ништа и због тога на слици није приказан.

Сједињавање фреквентног домена захтева три петље. Спољна петља ради кроз $\log_2 N$ фазу (односно сваки ниво са слике 4.2, почевши од дна и померајући се ка врху). Средња петља се креће кроз сваки индивидуални фреквентни опсег у активној фази (односно свака од коцкица на било ком нивоу са слике 4.2).



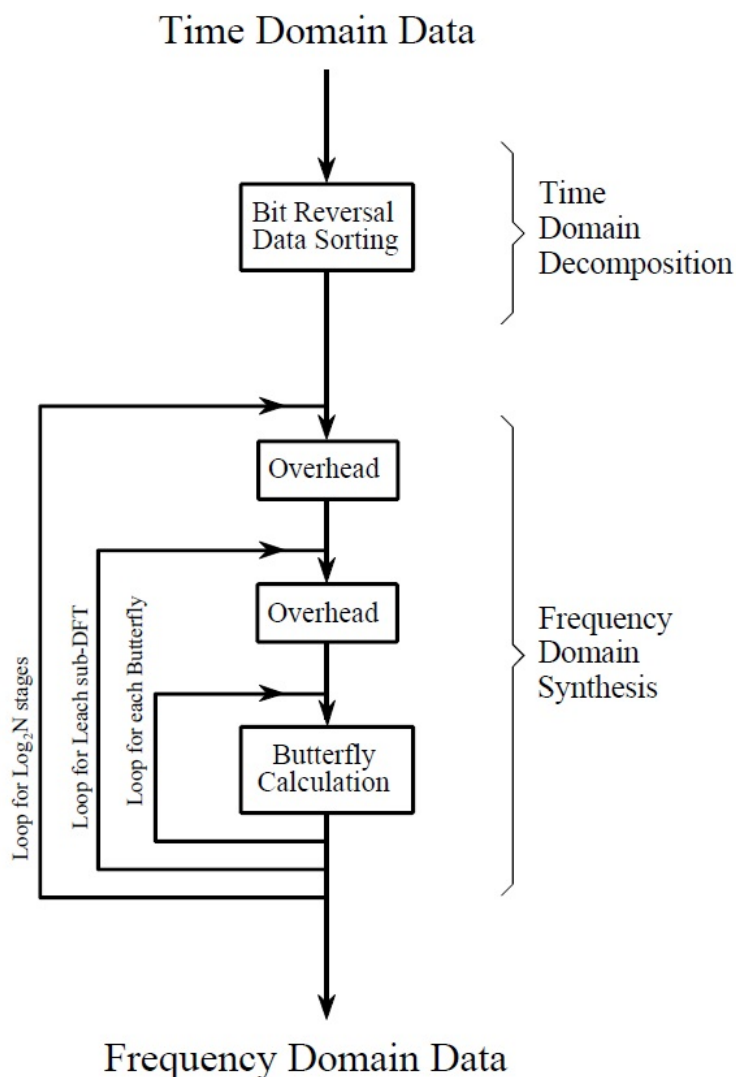
12-5.jpg 12-5.jpg

Слика 4.6: Дијаграм комбиновања FFT-а; оператор S значи да се сигнал множи синусоидом за одговарајућу фреквенцију



12-6.jpg 12-6.jpg

Слика 4.7: ФФТ лептир



12-7.jpg 12-7.jpg

СЛИКА 4.8: ФФТ дијаграм [Numerical schemes for Fortran-књига]

Унутрашња петља користи "лептир" за рачунање тачака за сваки фреквентни опсег (односно кружећи кроз узорке унутар било које коцкице са слике 4.2). "Overhead" поља са слике 4.7 дефинишу почетне и крајње индексе петље, као и рачунање неопходне синусоиде у лептирима.

4.5 Брзина и прецизност поређења

Када је DFT израчунат корелацијом (као што је приказано на слици 4.2), програм користи две сакривене петље, свака пролази кроз N тачака. Ово значи да је укупан број операција пропорционалан $N \times N$. Време да се комплетира програм дато је релацијом:

$$= k_{DFT} * N^2$$

где N представља број тачака DFT-а а k_{DFT} представља константу пропорционалности. Ако су вредности синуса и косинуса израчунате сакривеном петљом, k_{DFT} је једнак приближно 25 микросекунди на Пентиум рачунару на $100MHz$. Ако предходно израчунамо вредности синуса и косинуса и ставимо га у "look-up" табелу, k_{DFT} пада на приближно 7 микросекунди. На пример, 1024 тачке DFT-а захтевају око 25 секунди, или приближно 25 милисекунди по тачки.

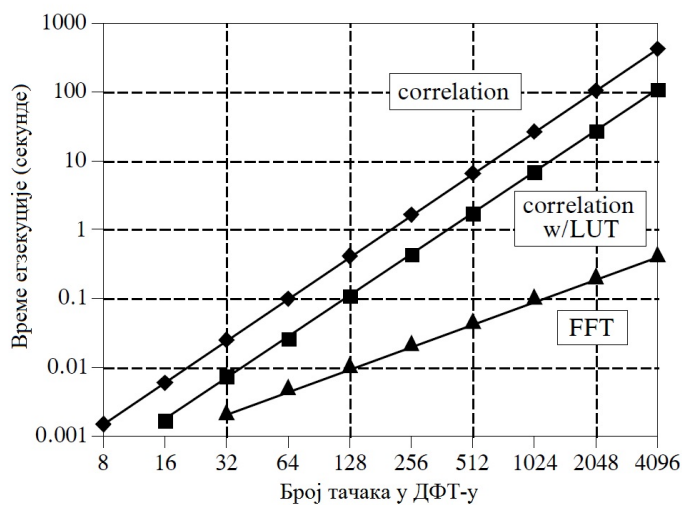
Користећи ову исту стратегију можемо извући време егзекуције FFT-а. Неопходно време за "bit reversal" је занемарљиво. У свакој од Log_2N фази постоје $N/2$ лептир израчунавања. Ово значи да је време егзекуције програма приближно:

$$ExecutionTime = k_{DFT} N Log_2 N$$

Вредност k_{DFT} је око 10 микросекунди Пентиум рачунару са $100MHz$. 1024 тачке FFT-а захтевају око 70 милисекунди за извршење или 70 микросекунди по тачки. Ово је више од 300 пута брже од DFT-а рачунат корелацијама.

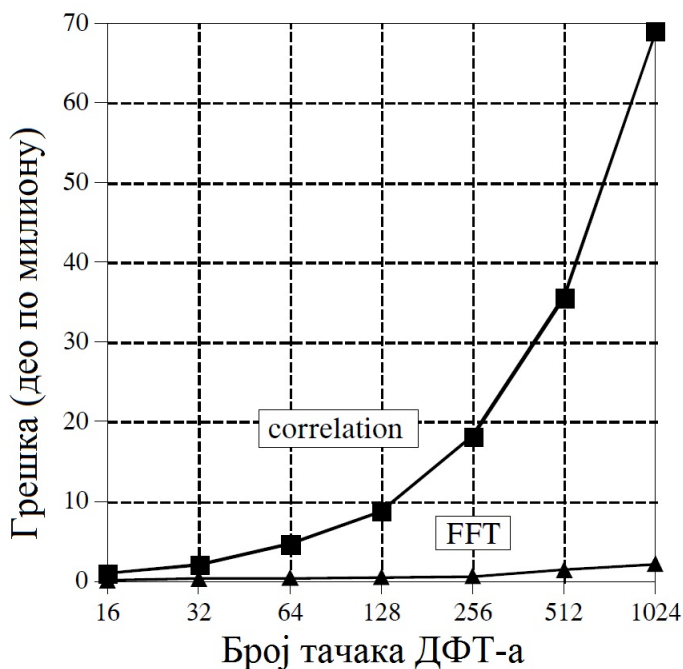
Не само да је $N Log_2 N$ мање од N^2 , повећава се много спорије како N расте. На пример, FFT са 32 тачке је око 10 пута бржи од корелационог метода. Међутим, ФФТ са 4096 тачака је 1000 пута бржи. За мале вредности N (од 32 до 128), FFT је важан. За веће вредности N (1024 и преко), FFT је апсолутно круцијалан. Слика 4.9 пореди време егзекуције два алгорита у форми дијаграма.

FFT има још једну предност осим саме брзине. FFT је рачунат прецизније зато што мањи број рачунања резултира мањом грешком приликом заокруживања. Ово може бити показано узимањем произвољног FFT сигнала и покретањем фреквентног опсега кроз инверзни FFT. Овим реконструирамо оригиналну функцију у временском домену, осим додатно заокруженог шума из рачунања. Један број који карактерише овај шум можемо добити рачунањем стандардног одступања између два сигнала. За поређење, иста ова процедура може бити поновљена користећи рачунање DFT-а корелацијама, и одговарајући инверзни DFT. На слици 4.10 приказано је поређење заокруженог шума FFT-а и DFT-а корелацијама.



12-8.jpg 12-8.jpg

Слика 4.9: Време егзекуције за рачунање ДФТ-а. Време је приказано за Пентиум процесор на 100MHz.[Numerical schemes for Fortran-књига]



12-9.jpg 12-9.jpg

Слика 4.10: Прецизност ДФТ-а. Поред ФФТ-овог бржег рачунања ДФТ-а од корелационог метода, рачуна га и са мањом грешком [Numerical schemes for Fortran-књига]

4.6 Имплементација Директне Фуријеове трансформације у други корак методологије

Када смо извршили кратак преглед брзе Фуријеове трансформације и директне Фуријеове трансформације, лако је закључити да је брза трансформација супериорна по свим прорачунским аспектима али као што је већ објашњено у претходним поглављима. Да би извршили брзу трансформацију потребно је имати све податке на једном месту и извршити преуређење података по дефинисаном алгоритму. Пошто се ми овде бавимо веома великим прорачунским доменима који чак и у дводимензионалној симулацији нису занемарљиви а у тродимензионалној симулацији су веома велики, потреба за редуковањем меморијског простора за складиштење вектора брзине је за персоналне рачунаре од битног значаја. Сходно томе да не би складиштили велике количине података презентоваћемо укратко алгоритам имплементације Директне фуријеове трансформације за прелазак акустичних извора из временског домена у фреквентни домен као и срачунавање акустичних извора који су директно инкорпорирани у временку петљу за решавање Навије- Стоксове једначине за нестишљиво стужање.

Пошто смо у једначини (4.6) дефинисали како се рачунају акустични извори, тј у свакој временској петљи добићемо решење једначине Навије-Стокса у форми \mathbf{u}^n и ако убацимо у једначину (4.6) добићемо,

$$s(\mathbf{x}, t(n)) = \rho(\nabla \otimes \mathbf{u}^n) : (\nabla \otimes \mathbf{u}^n)^\top \quad (4.7)$$

Сходно претходном изразу после сваког временског корака биће израчунат и акустични извор који је скаларна величина у сваком чвору прорачунског домена.

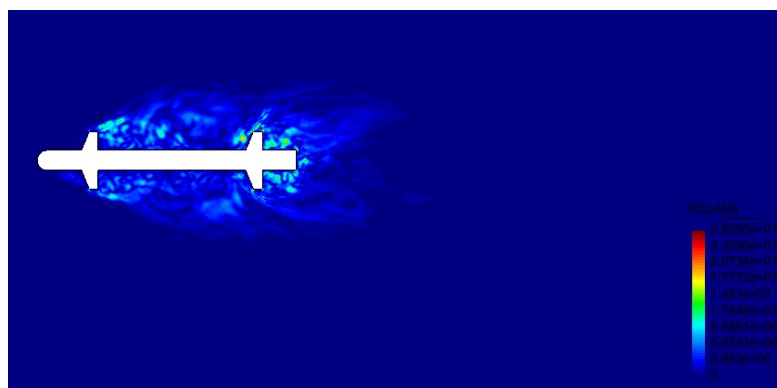
Да би трансформисали акустични извор у фреквентни домен користићемо следећу једначину,

$$H(f_n) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-2\pi i f_n t} dt \approx \sum_{k=0}^{k=N-1} h_k e^{-2\pi i f_n t_k} \Delta \approx \Delta \sum_{k=0}^{k=N-1} h_k e^{-2\pi i k n / N} \quad (4.8)$$

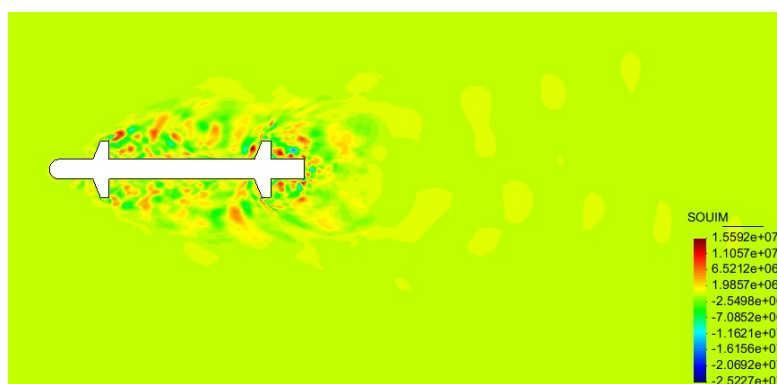
где је $H(f_n)$ - добијена функција у фреквентном домену, $h(t)$ - функција која се трансформише из временског домена у фреквентни, f_n - вектор фреквенци за које

се ради трансформација, t_k временске инстанце у временском домену, Δ - време протекло између две инстанце, N - број тачака у домену, h_k - вредност функције у временским инстанцама.

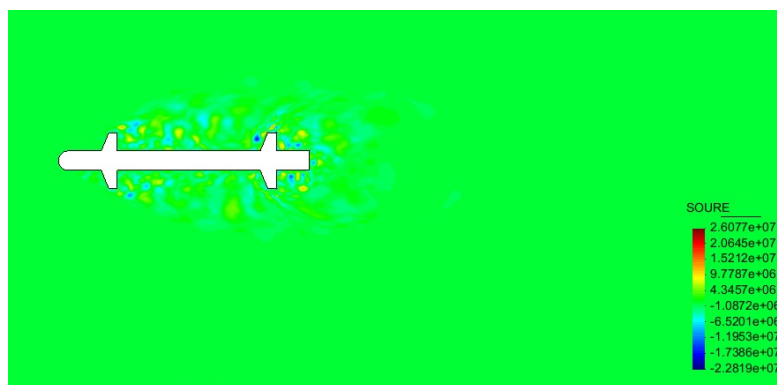
Пошто у сваком временском кораку решавања нестационарне Навије-Стоксове једначине добијамо поље брзине струјања флуида први корак је израчунати градијент добијеног поља а затим срачунати двоструку дивергенцију дата два тензора из једначине (4.6). Добијена функција се онда за сваки временски корак срачунава прираст суме трансформације у фреквентни домен приказаном у једначини (4.8), што је приказано у додатку Б. Самим тим се у сваком временском кораку добија прираштај за одабране фреквенце и самим тим не долази се до потребе за складиштењем велике количине временских инстанци који се добијају решавањем Навије-Стоксове једначине. На крају приказан је резултат трансформације на сликама 4.11-4.13



Слика 4.11: Дистрибуција акустичних извора апсолутно решење



Слика 4.12: Дистрибуција акустичних извора имагинарни део решења



Слика 4.13: Дистрибуција акустичних извора реални део решења

Поглавље 5

Прорачун и симулација акустичног поља притиска

У овом поглављу ћемо се позабавити са прорачунском акустиком које се генерише од стране већ познатог кретања флуида. То би значило да треба да решимо нехомогену Хелмхолцову једначину као и модфиковану верзију која укључује конвектну Хелмхолцову једначину. Ова једначина ће бити решена стандардном Галеркиновом методом, што може да доведе до потешкоћа за валике талансе бројеве где би се јављала такозвана "pollution" грешка. Иста грешка се јавља и у случају конвектне Хелмхолцове једначине. Пошто ова проблематика није централна тема ове дисертације, јел стандардна Галеркинова метода може да реши таласне бројеве који су за нас интересантни. Биће презентована прорачунска акустика и њена апликација како нехомогене тако и хомогене Хелмхолцове једначине. На крају ћемо имплементорати стабилизациону методу презентовану у поглављу 3. да би решили проблеме које изазива "pollution" грешка.

5.1 Увод

Пропагација акустичних таласа у стационарном медију је решење веома познате таласне једначине. Акустични таласи се генеришу из акустичних извора, који се могу сматрати као регије простора које су у контакту са флуидом (или делови регије самог флуида у кретању) где се енергија било ког извора преноси у

акустичну енергију која даље пропагира као звучни талас. Таласна једначина се може лако добити из једначине континуитета и Ојлерове једначине за изентропско струјање, наравно занемаривајући нелинеарне чланове. За случај пропагације таласа у струјању константном средњом брзином конвектна таласна једначина се може написати која би била валидна за било које вредности Маховог броја до трансоничних брзина [75], [77]. Значај конвектне таласне једначине постаје битан у многим практичним проблемима у аероакустици као што су аеродинамички звук генерисан од стране мотора авиона, фенови и компресори [75], [77].

Хелмхолцова једначина даје просторну расподелу акустичног поља за задати таласни број. Аналогно, временска Фуријеова трансформација конвектне таласне једначине представља просторну расподелу акустичних таласа који пропагирају у позадини униформног струјања, коју ћемо у даљем току излагања називати конвектна Хелмхолцова једначина.

Када се суочавамо са проблемом који у себи садрже комплексне геометрије, аналитичко решење горе наведене једначине је веома тешко наћи и због тога преостаје нам да се окренемо нумеричким методама као што су између осталог методе коначних елемената. Налажење решења Хелмхолцове и конвектне Хелмхолцове једначине са методом коначних елемената уопште није тривијалан задатак и две главне потешкоће је потребно превазићи [145],[146]. Први проблем који се појављује је када се решава неограничени акустични проблем у прорачунском домену коначних димензија. Неки тип апсорбирајућих граничних услова теба да се постави на границама прорачунског домена да би се узели у обзир радијација одлазећег таласа. Други проблем се јавља када се бавимо проблемима код којих се јављају велики таласни бројеви. Тада се јавља такозвана "pollution" грешка која је присутна чак и када таласна дискретизација има довољно тачака да се ухвати фреквенца појаве.

Када се разматра први проблем постоје три стратегије за његово решење, наиме прва је DtN (Dirichlet to Neumann) оператор, имплементација безграничног елемента на граници као и имплементација PML (Perfectly Matched Layer) методе на граници домена. DtN приступ [147], [148] се састоји у повезивању непознатог решења и његовог извода на граници прорачунског домена са DtN оператором направљеним од аналитичког егзактног решења Дирихлеовог проблема пропагације

таласа. Егзактно решење коришћено у DtN оператору може се представити као интегрални или развијено у редове које се може скратити кад се имплементира нумерички. Број чланова низа одређује тачност решења. Други приступ се састоји у коришћењу безграничних елемената [149],[150]. У овом случају прорачунски домен Ω_{ac} се дискретизује стандардним елементима методе коначних елемената док се спољашњи безгранични домен дискретизује безграничним елементима. Ови елементи су полу аналитички који су добијени тензорским множењем интерполационе функције и радијалне аналитичке функције типа $\phi_n(r) = e^{ikr}/r^n$ у случају да је Γ_R сфера. Још увек постоји пар питања које треба одговорити имајући у виду перформансе методе, нарочито ако говоримо о конвергенцији различитих формулација и лошим условљавањем проблема [145]. Трећи приступ у решавању проблема [151], [152] је оригинално развијен за прорачуне временски зависних електромагнетних таласа и састоји се у томе да се дода спољни апсорбциони лејер на прорачунску границу тако да се сваки талас може апсорбовати. То се постиже реформулацијом оригиналне Хелмхолцове једначине што уводи апсорбтни члан који је различит од нуле само изван граница Γ_R . PML приступ је веома популаран и нашироко примењиван иако његова имплементација захтева подешавање неколико нумеричких параметара и иако неки проблеми стабилности још нису решени [153], [154]. У дисертацији се нећемо бавити претходно дефинисаном проблематиком. Сви прорачунски домени ће бити довољно велики да омогућавају преписивање глобалног граничног оператора са Сомерфилдовим граничним условом.

Велика количина посла је урађена да се нађе не "pollution" нумеричко решење Хелмхолцове једначине користећи метод коначних елемената. "Pollution" грешка долази због чињенице да варијационо решење Хелмхолцове једначине није позитивно дефинисано за велике таласне бројеве, иако задовољава Гардингову неједначину што дозвољава да се примени Галеркинова метода [146]. Како год, инф суп константа има инверзну зависност са таласним бројем k који доводи до поремећаја стабилности и до настанка "pollution" грешке за велике таласне бројеве. Дисперзиона анализа слабог решења Галеркинове методе доводи до закључка да се прорачуна таласа изводи са дискретним таласним бројем k_h а не са континуалним [155], [156]. Разлика између ова два броја се повећава са повећавањем таласног броја. Пошто централна тематика ове тезе није повезана са акустиком и решавањем нумеричких проблема приликом симулације, ми се нећемо бавити овим проблемима

него ћемо имплементирати нехомогену и хомогену Хелмхолцову једначину и решити је путем Галеркинове методе. На крају ћемо само укратко презентовати решење овог проблема кроз методологију презентовану у поглављу 3.

5.2 Стационарна и конвектна Хелмхолцова једначина

5.2.1 Таласна једначина и конвектна таласна једначина

Нехомогена таласна једначина за пропагацију притисних таласа у стационарном идеалном медијуму дата је таласно акустичном једначином.

$$(c_0^{-2}\partial_{tt}^2 - \nabla^2)p(\mathbf{x}, t) = s(\mathbf{x}, t) \quad (5.1)$$

где $p(\mathbf{x}, t)$ представља акустични притисак, а где је $s(\mathbf{x}, t)$ акустични извор, c_0 је брзина звука у медијуму кретања таласа и ∇^2 Лапласов оператор (кроз цело поглавље користимо овај оператор уместо Δ за Лапласиан оператор, што је уобичајна пракса у акустици).

За акустичне пропагационе таласе у хометропичном невртложном струјању претходно дефинисана једначина (5.1) више није валидна и треба да се замени са линеарном једначином за временски извод потенцијала брзине тј. за потенцијал брзине поремећаја [77]. Како год, у специјалном случају струјања када је средња брзина $\mathbf{U}_0(\mathbf{x})$ при малим Маховим бројевима ($M^2 \ll 1$, $M = \|\mathbf{M}\|$, $\mathbf{M}(\mathbf{x}) = \mathbf{U}(\mathbf{x})/c_0$) варијације средње густине као и брзине звука се могу занемарити и пропагација акустичних таласа се може описати са релативно једноставном једначином, наиме конвектна таласна једначина има облик

$$[c_0^{-2}(\partial_t + \mathbf{U}_0(\mathbf{x}) \cdot \nabla)^2 - \nabla^2]p(\mathbf{x}, t) = s(\mathbf{x}, t) \quad (5.2)$$

Следи да ако је \mathbf{U}_0 константно (униформно струјање) претходна једначина постаје валидна за Махове бројеве све до броја 0.8 (трансонично струјање). Тако да једначине (5.1)-(5.2) постају еквивалентне зато што су повезане простом Галилеановом трансформацијом координатног система.

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{U}_0 t \quad (5.3)$$

За наше потребе претпоставићемо да је струјање униформно кроз цело поглавље.

Уобичајно је да се користи материјални извод $D_t = \partial_t + \mathbf{U}_0 \cdot \nabla$ да би преформулисали једначину (5.2) као,

$$(c_0^{-2} D_{tt}^2 - \nabla^2) p(\mathbf{x}, t) = s(\mathbf{x}, t) \quad (5.4)$$

показујући велику сличност са једначином (5.1).

5.2.2 Хелмхолцова једначина и конвектна Хелмхолцова једначина

Временски редукована верзија једначина (5.1)-(5.2) се добија тако што се уради њихова Фуријеова трансформација. Претпостављајући временски периодично кретање и заменивши ∂_t са $-i\omega$ у једначини (5.1) доводи до Хелмхолцове једначине,

$$(-\nabla^2 - k_0^2) p(\mathbf{x}, \omega) = s(\mathbf{x}, \omega) \quad (5.5)$$

где је $k_0 = \omega/c_0$ таласни број и ω је фреквенца. Аналогно, заменивши ∂_t са $-i\omega$ у једначини (5.2) доводи до конвектне таласне једначине.

$$-[\nabla^2 + (k_0 + i\mathbf{M} \cdot \nabla)^2] p(\mathbf{x}, \omega) = s(\mathbf{x}, \omega) \quad (5.6)$$

где је $i = \sqrt{-1}$, а за даља излагања дефинисаћемо Хелмхолцов и конвектни Хелмхолцов оператор,

$$L_H = (-\nabla^2 - k_0^2) \quad (5.7)$$

$$L_{CH} = -[\nabla^2 + (k_0 + i\mathbf{M} \cdot \nabla)^2] \quad (5.8)$$

Треба напоменути да ако се изузму гранични услови што је уобичајна пракса у овом нумеричком контексту, оба оператора су само транспонована.

$$L_H^\top = L_H \quad L_{CH}^\top = L_{CH} \quad (5.9)$$

Као и за једначине (5.1)(5.2) тако и једначине (5.5)(5.6) се могу повезати али сада са пуном Лоренцовом трансформацијом која је у ваздухопловним круговима позната као Прандтл-Глауретова трансформација. Она омогућава да се реши конвектна Хелмхолцова једначина тако што се прво реши простија Хелмхолцова једначина па се онда на крају врати у првобитне променљиве. Пуна Лоренцова трансформација садржи ротацију плус издужење у x смеру. Идеја је да прво ротира координате тако да Махов вектор \mathbf{M} има само x компоненту у новом координатном сиситему \mathbf{x}' и онда изврши дилатацију заједно са одговарајућом променом променљивих да би се добила Хелмхолцова једначина у другом кординатном систему \mathbf{x}'' . Ове две трансформације ће бити укратко престављене у следећим редовима.

Ако са \mathbf{R} означимо ротациону матрицу која трансформише Махов број вектор \mathbf{M} тако да има само x компоненту у новом координатном систему \mathbf{x}' где је $\mathbf{M}' = \mathbf{R}\mathbf{M}$ са $\mathbf{M}' = (M, 0, 0)^\top$ или са компонентама,

$$\begin{bmatrix} M \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{xx} & R_{xy} & R_{xz} \\ R_{yx} & R_{yy} & R_{yz} \\ R_{zx} & R_{zy} & R_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix}$$

ако спроведемо промену координатног система,

$$\mathbf{x}' = \mathbf{R}\mathbf{x} \leftrightarrow x'_i = R_{ij}x_j \quad \forall i, j = 1 \div d \quad (5.10)$$

за конвектну Хелмхолцову једначину (5.6) и узимајући у обзир да је \mathbf{R} ортогонална матрица таква да је,

$$\mathbf{R}\mathbf{R}^\top = \mathbf{I} \leftrightarrow R_{ij}R_{ik} = \delta_{jk} \quad (5.11)$$

Следи да се просторни изводи трансформишу као,

$$\partial_i = \partial_i x'_k \partial'_k = R_{ki} \partial'_k \quad (5.12)$$

Узимајући у обзир добијене резултате, веома је једноставно да се добије (5.6) у новим координатама.

$$\begin{aligned} & -[\nabla'^2 + (k_0 + iM\partial'_x)^2]p(\mathbf{x}, \omega) \\ & = -(\nabla'^2 + k_0^2 + 2iMk_0\partial'_x - M^2\partial_{xx}^2)p(\mathbf{x}, \omega) = s(\mathbf{R}^\top \mathbf{x}', \omega) \end{aligned} \quad (5.13)$$

Сада ћемо извршити издужење у x правцу једначине тако што ћемо узети $\mathbf{x}'' = \mathbf{D}\mathbf{x}'$ тако што је \mathbf{D} дијагонална матрица $D = \text{diag}(\beta^{-1}, 1, 1)$ где је β дефинисано као $\beta = \sqrt{1 - M^2}$. Такође ћемо дефинисати $k_0'' = \beta^{-1}k_0$ и $p''(\mathbf{x}'', k_0'') = p(\mathbf{x}', k_0) \exp(ik_0'' M x'')$. Опет после примене једноставне алгебре добићемо израз за (5.13) у новим координатама.

$$(\nabla''^2 + k_0''^2)p''(\mathbf{x}'', \omega) = e^{(ik_0'' M x'')} s(\mathbf{R}^\top \mathbf{D}^{-1} \mathbf{x}'', \beta k_0'') \quad (5.14)$$

Из прошлих резултата треба приметити да једначина (5.14) је Хелмхолцова једначина са акустичним извором који је модификован са експоненцијалним фактором. Пошто је изворни члан позната улазна вредност за проблем, он би требало да се изрази у новим координатама да би се решила једначина (5.14). На крају цела Лоренцова трансформација се може написати у компактној форми.

$$\mathbf{x}'' = \mathbf{D}\mathbf{R}\mathbf{x} \quad k_0'' = \beta^{-1}k_0 \quad (5.15)$$

$$p''(\mathbf{x}'', k_0'' \omega) = p(\mathbf{R}\mathbf{x}, \omega) \exp[i\beta^{-1}k_0(\mathbf{R}\mathbf{M}) \cdot (\mathbf{D}\mathbf{R}\mathbf{x})] \quad (5.16)$$

5.2.3 Гранични услови за конвектну Хелмхолцову једначину и јака диференцијална формулација

Да би се решила Хелмхолцова и конвектна Хелмхолцова једначина у задатом домену треба да се препишу одговарајући гранични услови. Ајде прво да дефинишемо проблем где треба наћи притисак $p : \Omega_{ac} \rightarrow \mathbb{C}$ за Хелмхолцову једначину (5.5) у домену $\Omega_{ac} \subset \mathbb{R}^d$ са дефинисаним граничним условима $\partial\Omega_{ac} = \Gamma_D \cup \Gamma_N \cup \Gamma_\infty$ тако да је,

$$-(\nabla^2 + k_0^2)p(\mathbf{x}, \omega) = s(\mathbf{x}, \omega) \quad \text{unutar } \Omega_{ac} \quad (5.17)$$

$$p(\mathbf{x}, \omega) = p_D(\mathbf{x}, \omega) \quad \text{na } \Gamma_D \quad (5.18)$$

$$\nabla p(\mathbf{x}, \omega) \cdot \mathbf{n} = g(\mathbf{x}, \omega) \quad \text{na } \Gamma_N \quad (5.19)$$

$$\nabla p(\mathbf{x}, \omega) \cdot \mathbf{n} = ik_0 p \quad \text{na } \Gamma_\infty \quad (5.20)$$

У једначини (5.19)(5.20) \mathbf{n} представља нормалу која иде ка споља на границама Γ_N и Γ_∞ , уједно $g : \Gamma_N \rightarrow \mathbb{C}$ представља податке преписани на граници Γ_N док (5.20) представља Сомерфилдов гранични услов.

Сада ћемо наћи одговарајуће граничне услове за конвектну Хелмхолцову једначину. Пратећи једначине (5.17)(5.20) сматрамо да се конвектни проблем представља у \mathbf{x}'' координатном сиситему што би значило да покушавамо решити једначину (5.14) у прорачунском домену Ω_{ac} . Узимајући у обзир Дирихлеова, Нојманове и Сомерфилдове граничне услове можемо да дефинишемо јаку формулацију или диференцијални облик Хелмхолцовог проблема који би гласио: Наћи аксутични притисак $p'' : \Omega_{ac}'' \rightarrow \mathbb{C}$, где је $\Omega_{ac}'' \subset \mathbb{R}^d$ ограничен домен са глатким граничним условима $\partial\Omega_{ac}'' = \Gamma_D'' \cup \Gamma_N'' \cup \Gamma_\infty''$ тако да је,

$$-(\nabla''^2 + k_0''^2)p''(\mathbf{x}'', \omega) = e^{ik_0'' M \mathbf{x}''} s(\mathbf{R}^\top \mathbf{D}^{-1} \mathbf{x}'', \beta k_0'') \quad \text{unutar } \Omega_{ac} \quad (5.21)$$

$$p''(\mathbf{x}'', \omega) = p_D''(\mathbf{R}^\top \mathbf{D}^{-1} \mathbf{x}'', \beta k_0'') \quad \text{na } \Gamma_D \quad (5.22)$$

$$\nabla'' p''(\mathbf{x}, \omega) \cdot \mathbf{n} = g(\mathbf{R}^\top \mathbf{D}^{-1} \mathbf{x}'', \beta k_0'') \quad \text{na } \Gamma_N \quad (5.23)$$

$$\nabla'' p''(\mathbf{x}, \omega) \cdot \mathbf{n} = ik_0 p''(\mathbf{x}, \omega) \quad \text{na } \Gamma_\infty \quad (5.24)$$

Као што је већ речено, решавањем једначине (5.21) и враћањем у оригинални координатни систем је одговарајући метод за решавање конвектне Хелмхолцове једначине. Ако смо заинтересовани за директно решавање били би нам потребни одговарајући гранични услови за то. Ови услови се могу пронаћи враћањем Хелмхолцових граничних услова у (5.22)(5.23)(5.24) оригиналне променљиве и координатни систем са Лоренцовом трансформацијом у једначини (5.16).

У следећих пар редова ћемо дефинисати граничне услове и почећемо са Сомерфилдовим граничним условима у \mathbf{x}'' координатном систему (5.24) и враћањем х-елонгације замењујући,

$$\mathbf{x}'' = \mathbf{D} \mathbf{x}' \quad (5.25)$$

$$k_0'' = \beta^{-1} k_0 \quad (5.26)$$

$$p''(\mathbf{x}'', k_0'') = p(\mathbf{x}', k_0) \exp(ik_0'' M \mathbf{x}'') \quad (5.27)$$

што доводи до,

$$\begin{aligned} & (\beta^{-1} n'_x \beta \partial'_x + n'_y \partial'_y + n'_z \partial'_z) (p(\mathbf{x}', k_0) e^{ik_0 M \beta^{-2} x'}) \\ & = (\mathbf{n}' \cdot \nabla') (p(\mathbf{x}', k_0) e^{ik_0 M \beta^{-2} x'}) = i \beta^{-1} k_0 p(\mathbf{x}', k_0) e^{ik_0 M \beta^{-2} x'} \end{aligned} \quad (5.28)$$

из чега следи да,

$$\mathbf{n}' \cdot [\nabla' p + (ik_0 M \beta^{-2} p, 0, 0)] = i \beta^{-1} p \quad (5.29)$$

и онда следи да је,

$$\mathbf{n}' \cdot \nabla' p = ik_0 \beta^{-1} [1 - M \beta^{-1} (\mathbf{n}' \cdot \overline{\mathbf{M}}')] \quad (5.30)$$

са $\overline{\mathbf{M}}$ који је нормализован вектор Маховог броја, $\overline{\mathbf{M}} = (1/M)\mathbf{M}$ за случај \mathbf{x}' координатног сиситема.

Можемо да вратимо ротацију да би коначно добили Сомерфилдов гранични услов за конвектну Хелмхолцову једначину у \mathbf{x} координатном систему. Урадивши то у (5.30) и ако се искористи ортогоналност ротационе матрице доводи до,

$$R_{jl} n_l R_{jm} \partial_m p = ik_0 \beta^{-1} [1 - M \beta^{-1} (R_{kl} n_l R_{km} \overline{\mathbf{M}}_m)] \quad (5.31)$$

што доводи до,

$$\nabla p(\mathbf{x}, \omega) \cdot \mathbf{n} = ik_0 \alpha_s p(\mathbf{x}, \omega) \quad (5.32)$$

$$\alpha_s = \beta^{-1} [1 - M \beta^{-1} (\mathbf{n} \cdot \overline{\mathbf{M}})] \quad (5.33)$$

Још ћемо дефинисати Нојманов гранични услов за конвектну Хелмхолцову једначину. Она се добија пратећи исту процедуру као и за Сомерфилдов гранични услов, тако да нећемо поново репродуковати кораке него ћемо само написати крајњи резултат.

$$\nabla p(\mathbf{x}, \omega) \cdot \mathbf{n} = -ik_0 \alpha_N p(\mathbf{x}, \omega) + g(\mathbf{x}, k_0) \quad (5.34)$$

$$\alpha_N = \beta^{-2} (\mathbf{n} \cdot \overline{\mathbf{M}}) = \beta^{-1} - \alpha_s \quad (5.35)$$

Треба напоменути да као што је очекивано $\alpha_S = 1$, $\alpha_N = 0$ за $\mathbf{M} = 0$

Узимајући у обзир (5.32)(5.33) диференцијална формулација за конвектну Хелмхолцову једначину се може написати као, нађи акустични притисак, $p : \Omega_{ac} \rightarrow \mathbb{C}$ где је $\Omega_{ac} \subset \mathbb{R}^d$ ограничен домен са границама $\partial\Omega_{ac} = \Gamma_D \cup \Gamma_N \cup \Gamma_\infty$ тако да је,

$$-(\nabla^2 + (k_0 + i\mathbf{M} \cdot \nabla)^2)p(\mathbf{x}, \omega) = s(\mathbf{x}, \omega) \quad \text{unutar } \Omega_{ac} \quad (5.36)$$

$$p(\mathbf{x}, \omega) = p_D(\mathbf{x}, \omega) \quad \text{na } \Gamma_D \quad (5.37)$$

$$\nabla p(\mathbf{x}, \omega) \cdot \mathbf{n} = g(\mathbf{x}, \omega) - ik_0\alpha_S p \quad \text{na } \Gamma_N \quad (5.38)$$

$$\nabla p(\mathbf{x}, \omega) \cdot \mathbf{n} = ik_0\alpha_S p \quad \text{na } \Gamma_\infty \quad (5.39)$$

5.3 Нумеричка апроксимација коршћењем Галеркинове методе

5.3.1 Континуална варијациона формулација

Да би решили диференцијалну Хелмхолцову и конвектну Хелмхолцову једначину са методом коначних елемената прво треба да добијемо њену континуалну слабу или варијациону формулацију. То је уобичајно урађено тако што се помножи једначина (5.17) са тест функцијом и интегрални преко целог прорачунског домена Ω_{ac} . Варијациона формулација нехомогене Хелмхолцове једначине у (5.17) са граничним условима који су дати са (5.18)-(5.20) гласе: нађи $p \in W$ тако да,

$$(\nabla p, \nabla w) - k_0^2(p, w) - ik_0(p, w)_{\Gamma_\infty} = \langle s, w \rangle + (g, w)_{\Gamma_N} \quad (5.40)$$

за све $w \in W_0$, можда би требали да се подсетимо да заграде без доњег натписа у (5.40) значе скаларни производ у $L^2(\Omega_{ac})$ и овај скаларни произво у једначини обухватају коњуговано комплексне тест функције, пошто је притисак комплексна функција. Угласе заграде означавају дуални пар између $H_0^1(\Omega_{ac})$ и $H^{-1}(\Omega_{ac})$.

Слично, слабу или варијациону формулацију конвектне Хелмхолцове једначине (5.36) са граничним условима датим са (5.37)-(5.39) се може формулисати као: нађи $p \in W$ тако да,

$$\begin{aligned} -2ik_0(\mathbf{M} \cdot \nabla p, \nabla w) + ([\mathbf{I} - \mathbf{M} \otimes \mathbf{M}]\nabla p, \nabla w) - k_0^2(p, w) - ik_0\alpha_s(p, w)_{\Gamma_\infty} \\ + ik_0\alpha_N(p, w)_{\Gamma_N} = \langle s, w \rangle + (g, w)_{\Gamma_N} \end{aligned} \quad (5.41)$$

за све $w \in W_h$.

5.3.2 Дискретна варијациона формулација

Дискретна варијациона формулација која одговара Галеркиновој методологији апроксимације методом коначних елемената (5.40) може да гласи: ако дамо просторну дискретизацију прорачунског домена Ω_{ac} са прорачунским елементима и чворовима и са математичким просторима коначних диманзија $W_h, W_{h,0} \subset W$, треба пронаћи $p_h \in W_h$ тако да,

$$(\nabla p_h, \nabla w_h) - k_0^2(p_h, w_h) - ik_0(p_h, w_h)_{\Gamma_\infty} = \langle s_h, w_h \rangle + (g, w_h)_{\Gamma_N} \quad (5.42)$$

за све $w_h \in W_{h,0}$. У једначини (5.41) p_h је типа:

$$p_h(\mathbf{x}) = \sum_{a=1}^{n_p} N_P^a(\mathbf{x}) P^a \quad (5.43)$$

где је $N_P^a(\mathbf{x})$ је апроксимативна функција притиска и P^a је вредност у чвору.

Ако са $\|\cdot\|$ означимо норм у $L^2(\Omega_{ac})$. Ако са p_h заменимо w_h у једначини (5.41) и ако занемаримо граничне услове у секвilinearној форми, остаје нам неједнакост.

$$\|\nabla p_h\|^2 - k_0^2\|p_h\|^2 \leq \|p_h\| \|s_h\| \quad (5.44)$$

Претходна једначина исказује да дискретна варијациона формулација може постати позитивно недефинисана за велике таласне бројеве. Ова каратекристика може довести до проблема са стабилношћу, што даље имплицира да би било потребно користити стабилизационе методе да би решили проблем.

Са друге стране Галеркин апроксимација методом коначних елемената конвектне Хелмхолцове једначине се може изразити као, пронађи $p_h \in W_h$ тако да,

$$\begin{aligned}
 & -2ik_0(\mathbf{M} \cdot \nabla p_h, \nabla w_h) + ([\mathbf{I} - \mathbf{M} \otimes \mathbf{M}] \nabla p_h, \nabla w_h) - k_0^2(p_h, w_h) - \\
 & - ik_0 \alpha_s(p_h, w_h)_{\Gamma_\infty} + ik_0 \alpha_N(p_h, w_h)_{\Gamma_N} = \langle s_h, w_h \rangle + (g, w_h)_{\Gamma_N}
 \end{aligned} \tag{5.45}$$

за све $w_h \in W_{h,0}$. Ако изједначимо $w_h = p_h$ и ако занемаримо граничне услове добићемо неједначину,

$$\|\nabla p_h\|^2 - \|\mathbf{M} \cdot \nabla p_h\|^2 - k_0^2 \|p_h\|^2 \leq \|p_h\| \|s_h\| \tag{5.46}$$

што изражава да не постоји контрола над конвектним чланом тако да се и ова једначина понаша као (5.44) тј. варијациона формулација је позитивно недефинисана за велике таласне бројеве.

5.3.3 Добро постављање математичког проблема и теорема конвергенције

У претходним поглављима презентовали смо генерални математички оквир за Хелмхолцову и конвектну Хелмхолцову једначину, као што знамо оне су само посебан случај Конвектно-дифузионо-реакционог система. Показали смо како се ове једначине могу повезати са трансформацијом променљивих и нашли смо одговарјуће граничне услове за њих. Да би решили једначине методом коначних елемената, представили смо његову варијациону или слабу континуарну формулацију у последњем поглављу.

У овом и следећим поглављима ћемо покушати да објаснимо природу нумеричког проблема који се јављају у Галеркиновој методи коначних елемената за Хелмхолцову и конвектну Хелмхолцову једначину. Да би то урадили прво ћемо бацити осврт на поједине генералне теореме које дефинишу под којим условима је слаба формулација добро постављена математички или не. Исто тако ћемо прегледати и пар теорема за конвергенцију која успостављају проверу грешке за апроксимацију методом коначних елемената слабе формулације. Детаљно објашњење ће бити дато зашто се појављују нестабилности за Хелмхолцову и конвектну Хелмхолцову једначину.

5.3.4 Добро постављање позитивно дефинисаног математичког проблема

Форма где је $a : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ где је V Хилбертов математички простор се каже да је V -елиптична или позитивно дефинисана ако постоји $K > 0$ тако да је,

$$K \| \mathbf{u} \|_V^2 \leq a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \quad (5.47)$$

за све $\mathbf{u} \in V$.

Добро постављање математичког проблема или да је дефинисано постојање, јединственост и стабилност решења за позитивно дефинисану слабу формулацију је дефинисана са Лакс-Милиграмовом теоремом.

Лакс - Милиграм теорема Ајмо да претпоставимо апстрактни варијациони проблем како наћи $\mathbf{u} \in V$ тако да је,

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = l(\mathbf{w}) \quad \mathbf{w} \in V \quad (5.48)$$

где је V Хилбертов математички простор, док је $a : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ је секвилитарна форма и $l : V \rightarrow \mathbb{C}$ је антилинеаран функционал. Решење проблема (5.48) постоји и јединствено је ако су следећи услови испуњени:

1) $a(\mathbf{u}, \mathbf{w})$ је континуално.

$$\exists N_a | a(\mathbf{u}, \mathbf{w}) | \leq N_a \| \mathbf{u} \|_V \| \mathbf{w} \|_V \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{w} \in V \quad (5.49)$$

2) $l(\mathbf{w})$ је континуално.

$$\exists N_l > 0 | l(\mathbf{w}) | \leq N_l \| \mathbf{w} \|_V \quad \forall \mathbf{w} \in V \quad (5.50)$$

3) $a(\mathbf{u}, \mathbf{w})$ је V -елиптично.

$$\exists K > 0 | K \| \mathbf{u} \|^2 \leq a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \quad \forall \mathbf{u} \in V \quad (5.51)$$

Стабилност се добија одмах из услова 2) и 3). Можемо видети да је,

$$\|\mathbf{u}\|_V \leq \frac{N_l}{K} \quad (5.52)$$

и алтернативно када је за $l(\mathbf{w}) = \langle \mathbf{s}, \mathbf{w} \rangle$,

$$\|\mathbf{u}\|_V \leq \frac{1}{K} \|\mathbf{s}\|_{V'} \quad (5.53)$$

где је V' дуални простор простора V . Стога Лакс-Милиграмова теорема гарантује добру поставку варијационог проблема (5.48).

Једна веома битна карактеристика позитивно дефинисане форме је V -елиптичност која је нарушена са слабом формулацијом дискретне Галеркинове методе. Ако би континуална слаба формулација Хелмхолцове и конвективне Хелмхолцове једначине била H^1 елиптична, онда би и дискретизација са Галеркиновом методом била H^1 елиптична. Нажалост, H^1 елиптичност слабе формулације (5.40)-(5.41) је једино достижна за мале таласне бројеве. Стога, не постоји могућност да се са Лакс-Милиграмовом теоремом осигура добра формулација за велике таласне бројеве и због тога у оваквим случајевима је потребна нова теорема која се формулише за недефинисане слабе формулације. Са друге стране, треба напоменути да Лакс-Милиграмова теорема је само применљива на форме где оба аргумента припадају истом математичком простору.

5.3.5 Добра формулација подређених форми

Генерална форма Лакс-Милиграмове теореме која успоставља под којим условима варијациони проблем са неодређеном формом је добро математички постављен је дат са теоремом Бабушке.

Теорема Бабушке Ако разматрамо абстрактни варијациони проблем, где треба пронаћи $u \in V$ тако да је,

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = l(\mathbf{w}) \quad \forall \mathbf{w} \in W \quad (5.54)$$

где су V, W Хилбертови простори, $a : V \times W \rightarrow \mathbb{C}$ је секвилинарна форма и $l : W \rightarrow \mathbb{C}$ је антилинарни функционал. Решење проблема (5.51) постоји оно је јединствено ако су следећи услови испуњени:

1) $a(\mathbf{u}, \mathbf{w})$ је континуално.

$$\exists N_a > 0 | a(\mathbf{u}, \mathbf{w}) \leq N_a \|\mathbf{u}\|_V \|\mathbf{w}\|_V \quad \forall \mathbf{u} \in V, \mathbf{w} \in W. \quad (5.55)$$

2) $l(\mathbf{w})$ је континуално.

$$\exists N_l > 0 | l(\mathbf{w}) \leq N_l \|\mathbf{w}\|_W \quad \forall \mathbf{w} \in W \quad (5.56)$$

3) инф - суп услов.

$$\exists \beta > 0 | \beta \leq \inf_{\mathbf{u} \in V} \sup_{\mathbf{w} \in W} \frac{a(\mathbf{u}, \mathbf{w})}{\|\mathbf{u}\|_V \|\mathbf{w}\|_W} \quad \mathbf{u}, \mathbf{w} \neq 0 \quad (5.57)$$

Исто као и пре стабилност директно произилази из горе наведених услова 2) и 3).

$$\|\mathbf{u}\|_V \leq \frac{N_l}{\beta} \quad (5.58)$$

и за $l(\mathbf{w}) = \langle \mathbf{s}, \mathbf{w} \rangle$,

$$\|\mathbf{u}\|_V \leq \frac{1}{\beta} \|\mathbf{s}\|_{W'} \quad (5.59)$$

где W' припада дуалном простору од простора W . Стога теорема Бабушке осигурава добру формулацију варијационог проблема (5.40).

Треба напоменути да за разлику од елиптичности, инф-суп услов се не преноси са континуалног на дискретни простор $V_h \subset V$. То је зато што инфимум у инф-суп услову не може да се смањује ако је узет у подпростору V_h . Последишно, вредност константе β за инф-суп услов можда може да буде одговарајућа за континуалну слабу формулацију (5.40)-(5.41) али да не буде одговарајућа за дискретну слабу

формулацију(5.42)-(5.45). Стога за сваку дискретизацију потребно је наћи одређени β_h .

Сада можемо упоредити V-елиптичну константу K са инф-суп условом β узимајући $V = W$ у Бабушкиновој теореме [146]. Узимајући у обзир да је K дато са,

$$K = \inf_{u \in V} \frac{a(\mathbf{u}, \mathbf{u})}{\|u\|^2} \quad (5.60)$$

из претходне једначине видимо да је инфинум узет такође на другом аргументу, док у инф-суп услови супремум је узет на другом аргументу. Стога, може се показати да је $K \leq \beta$ и може да се деси да $K=0$ али да је и даље $\beta > 0$. То је уствари ситуација са Хелмхолцовом једначином за велике таласне бројеве. Слаба формулација није позитивно дефинисана али задовољава инф-суп услов. Уствари, може се показати за једнодимензионе Хелмхолцове проблеме да инф-суп константа зависи од k тако да $\beta = O(k^{-1})$. То гарантује постојање и јединственост али са стабилносним ограничењима следи да $\|u\|_V \leq N_l O(k)$. За велике вредности k стабилност је очигледно поремећена и то је корен такозване "pollution" грешке. Са друге стране, задатак стабилизационих метода као што је SGS је да модификује дискретну слабу формулацију(5.42)(5.45) тако да резултујућа постане безусловно стабилна.

Сада ћемо се упознати са концептом V-коерсивности. За задати ограничени домен Ω и Хилбертов простор $H^1(\Omega)$ може се рећи да секвilinearна форма $a : H^1 \times H^1 \rightarrow \mathbb{C}$ је H^1 коерсиван ако задовољава Гардингову неједнакост.

$$K_G \|u\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq |a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) + C \|u\|_{L^2(\Omega)}^2| \quad \forall \mathbf{u} \in H^1(\Omega) \quad (5.61)$$

Са K_G, C су позитивне константе. Треба напоменути да претходни услов се може видети и као H^1 -елиптичност модификоване секвilinearне форме $a_m(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + C(\mathbf{u}, \mathbf{v})$. У основи Хелмхолцова једначина задовољава Гардингову неједнакост [146]. Задовољавајући H^1 - коерсивност је веома важна са аспекта теорије конвергенције која ће бити презентована у наредним редовима, која грубо говорећи обезбеђује конвергенцију Галеркиновог решења, макар засигурно за домене који су дискретизовани довољно фином мрежом.

5.3.6 Конвергенција позитивно дефинисане форме

Конвергенција Галеркинове форме методе коначних елемената за позитивно дефинисане проблеме је успостављена са Сеа-ом лемом која гласи

Sea lemma Ако узмемо у обзир апстрактни дискретни варијациони проблем који гласи наћи $u_h \in V_h \subset V$ тако да је,

$$a(\mathbf{u}_h, \mathbf{w}_h) = l(\mathbf{w}_h) \quad \forall \mathbf{w}_h \in V_h \quad (5.62)$$

Ако претпоставимо да слаба формулација задовољава претпоставке Лакс-Милиграмове теореме и ако заменимо \mathbf{u} са \mathbf{u}_h тј. егзактно са апроксимираним решењем. Онда грешка $\mathbf{u} - \mathbf{u}_h$ задовољава,

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_V \leq \frac{N_a}{K} \inf_{\mathbf{w}_h \in V_h} \|\mathbf{u} - \mathbf{w}_h\|_V \quad (5.63)$$

где су N_a и K континуалне и V -елиптичне константе.

5.3.7 Конвергенција недефинисаних форми

Sea-ova лема се може генерализовати за недефинисане форме са следећом теоремом,

Ако узмемо у обзир апстрактни дискретни варијациони проблем у коме треба пронаћи $u_h \in V_h \subset V$ тако да је,

$$a(\mathbf{u}_h, \mathbf{w}_h) = l(\mathbf{w}_h) \quad \forall \mathbf{w}_h \in W_h \quad (5.64)$$

Ако претпоставимо да слаба формулација задовољава претпоставке Бабушкине теореме и ако са \mathbf{u} и \mathbf{u}_h означимо егзактно и апроксимативно решење. Онда грешка $\mathbf{u} - \mathbf{u}_h$ задовољава,

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_V \leq \left(1 + \frac{N_a}{\beta_h}\right) \inf_{\mathbf{w}_h \in V_h} \|\mathbf{u} - \mathbf{w}_h\|_V \quad (5.65)$$

где су N_a и β_h су константе континуитета и дискретног инф-суп-а.

Из одређивања грешке из горе наведених теорема (5.63)(5.65) следи да конвергенција било ког решења добијених методом коначних елемената за проблем (5.62)(5.64) се рачуна за два фактора, наиме:

Апроксимативност: Фактор $\inf_{\mathbf{w}_h \in V_h} \|\mathbf{u} - \mathbf{w}_h\|_V$ карактерише апроксимабилност егзактног решења у дискретном простору V_h премошћена са интерполационом функцијом методе коначних елемената. Можемо да дефинишемо најбољу апроксимацију или оптималну апроксимацију егзактног решења \mathbf{u} у V_h [156].

$$\mathbf{u}_{ba}^h = \mathbf{u}_{opt}^h = \arg \inf_{\mathbf{w}_h \in V_h} \|\mathbf{u} - \mathbf{w}_h\|_V \quad (5.66)$$

и грешку најбоље апроксимације као,

$$e_{ba}^h = e_{opt}^h = \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_{opt}^h\|_V \quad (5.67)$$

Са геометријске тачке гледишта, e_{opt}^h представља минималну дистанцу између егзактног решења и подпростора V_h . Оптимална грешка се може повезати са најеном интерполационом грешком када апроксимирајући егзактно решење са полиномима реда p . За дати p -ти ред интерполације функције \mathbf{u}, \mathbf{u}_I и карактеристичне мере елемента прорачунске мреже величине h , следи да

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_I\|_{H^s(\Omega)} \leq Ch^{m-s} \|\mathbf{u}\|_{H^m(\Omega)} \quad 0 \leq s \leq m \quad (5.68)$$

са $m = p + 1$, по дефиницији, оптимална грешка је мања или једнака интерполационој грешци тако да ће и она задовољити неједнакост (5.68).

Stabilnost : Фактори N_a/K и $1 + N_a/\beta_h$ у (5.63)(5.65) карактерише проблем стабилности. За позитивно дефинисане проблеме N_a/K је обично мала и апроксимативност игра доминантну улогу у конвергенцији решења. Супротнот томе, оно што обухвата Хелмхолцов проблем за велике таласне бројеве (недефинисане проблеме) дискретни инф-суп константа β_h има грешку реда $O(k^{-1})$ која зависи од континуалне инф-суп константе β . Консеквентно, $1 + N_a/\beta_h$ ће имети велику вредност и естимација грешке ће постати веома лоша. У овом случају стабилност ће одредити понашање конвергенције.

На крају ћемо представити теорему конвергенције за слабу формулацију која задовољава Гардингову неједнакост.

Ако разматрамо варијациони проблем (5.54) са секвилинарном формом $\cdot : H^1 x H^1 \rightarrow \mathbb{C}$ која је H^1 коерсивна. Узимајући у обзир додатну секвенцу подпростора која задовољава

$$V_h^1 \subset V_h^2 \dots \subset V_h^N \subset V \quad (5.69)$$

као и следеће,

$$\inf_{w_h \in V_h^N} \|\mathbf{u} w_h\| \rightarrow 0, \quad N \rightarrow \infty \quad \forall \mathbf{u} \in V \quad (5.70)$$

где је $\|\cdot\|$ енергетска норма $\|\mathbf{u}\| = a_M(\mathbf{u}, \mathbf{u})^{1/2}$, $a_M(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + C(\mathbf{u}, \mathbf{v})$. онда постоји број N_0 такав да је дискретни варијациони проблем (5.64) има јединствено решење $u_h^N \in V_h^N$ за све $N \geq N_0$ и $\|u_h^N\|_{H^1} \rightarrow 0$ као $N \rightarrow \infty$.

Следи из теореме да ако се да секвенца мреже величине h и решења $\mathbf{u}_h \in V_h$ постоји гранична величина елемента мреже h_0 , тако да је $h \leq h_0$ следећа процена грешке гласи:

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_V \leq C \inf_{w_h \in V_h} \|\mathbf{u} w_h\|_V, \quad \forall h_0 \quad (5.71)$$

где је C константа независна од h . У оваквим ситуацијама се каже да грешка има квази оптималну конвергенцију. Претходна неједначина може да се напише и у следећем облику $\|e^h\|_V \leq C \|e_{opt}^h\|_V$.

5.3.8 Добро постављање и конвергенција Хелмхолцове и конвектне Хелмхолцове једначине

На крају ћемо сумирати ситуацију за Хелмхолцову једначину са горе наведеним већ дефинисаним добрим постављањем математичког проблема као и његову конвергенцију. За мале Махове бројеве Хелмхолцов варијациони проблем (5.40) је добро постављен и задовољава услове прописане Лакс-Милиграмовом теоремом.

Са друге стране конвергенција Галеркинове методе ће бити оптимална за h -верзију методе коначних елемената, тј. све док се резолуција држи константном тј. број чворова по таласној дужини је довољан да се добије фреквенца и облик таласа. Конвергенција ће бити контролисана са апроксимативним фактором у Сеа-вој леми.

За велике таласне бројеве ситуација је комплетно другачија. Слаба формулација (5.40) није више позитивно дефинисана иако инф-суп константа β се може пронаћи тако да постојање и јединственост је загарантовано са теоремом Бабушке. Како год, ова константа има $O(k_{-1})$ понашање што имплицира да граница стабилности ће зависити од (\cdot) , који је веома слаб за велике таласне бројеве (5.59). Дискретни β_h исто варира као $O(k - 1)$ тако да ће естимација грешке конвергенције (5.65) бити углавном доминантна са некорисним великим фактором стабилности. За велике таласне бројеве, конвергенција ће бити управљана од стране стабилности уместо од стране апроксимативности. У овој ситуацији, грешка добијена методом коначних елемената ће бити већа него оптимална грешка и разлика се назива "pollution" грешка. Ипак, слаба формулација Хелмхолцове једначине задовољава Гардингову неједнакост (5.61). Теорема гарантује да већа финоћа мреже гарантује да ћемо достићи граничну вредност h_0 , преко које ће решење добијено методом коначних елемената бити квази оптимално. Онда се може видети да за h -верзију методе коначних елемената ће се успоставити запетљану конвергенцију која зависи од величине елемента прорачунске мреже. За грубу мрежу решење ће бити предоминантно са "pollution" грешком, док за довољно fine мреже квази оптимално конвергенција ће бити постигнута.

Као што се очекује конвектна Хелмхолцова једначина ће имати слично понашање као и Хелмхолцова једначне. То је због чињенице да можемо трансформисати конвектну Хелмхолцову једначину у Хелмхолцову једначину са потпуном Лоренцовом трансформацијом (5.15). Конвективна Хелмхолцова једначина презентује исти модел понашања као и Хелмхолцова једначина што је нумерички испитано у [157] за једнодиманзиони случај. Дводимензиони случај је мало више замршен због ефекта средњег струјања али исто садржи "pollution" грешку.

5.3.9 Варијациона или слаба формулација нехомогене Хелмхолцове једначине

Процедура да би се нашла варијациона формулација нехомогене Хелмхолцове једначине је иста као и за Навије-Стоксову једначину. Претпоставићемо опет хомогене Дирихлеове граничне услове и укратко представити функционални простор,

$$W_0 = \{q(\mathbf{x}) \in H^1(\Omega_{ac}); q = 0 \text{ на } \Gamma_D\} \quad (5.72)$$

Онда ћемо помножити диференцијалну једначину са тест функцијом w и ако интегралимо преко целог акустичног прорачунског домена Ω_{ac} . Ако користимо нотацију из претходних поглавља варијациона формулација се може формулисати као: пронађи $p \in W_0$ тако да,

$$(\nabla p, \nabla w) - k_0^2(p, w) - ik_0 \langle p, w \rangle_{\Gamma_B} = \langle s, w \rangle + \langle g, w \rangle_{\Gamma_B} \quad (5.73)$$

за све $w \in W_0$. Треба напоменути да је акустични притисак комплексни број тако да интегрални у једначини (5.73) садрже комплексне коњуговане тест функције.

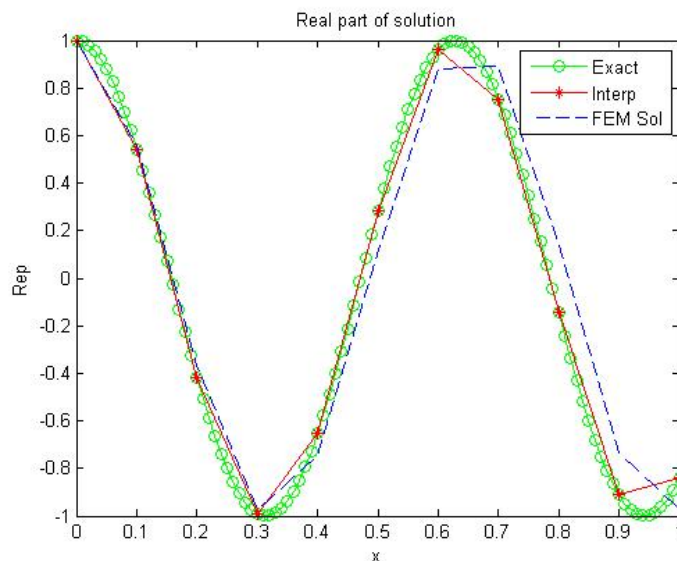
5.4 Једнодимензиона хомогена Хелмхолцова једначина

У овом поглављу ћемо искористити нумеричку симулацију да би анализирали понашање једнодимензионе Хелмхолцове једначине решене методом коначних елемената. Посматраћмо случај слободне пропагације једнодимензионог таласа која може да се изрази као: пронађи акустични притисак $p : \Omega_{ac} \rightarrow \mathbb{C}$, са $\Omega_{ac} = (0, 1)$ тако да,

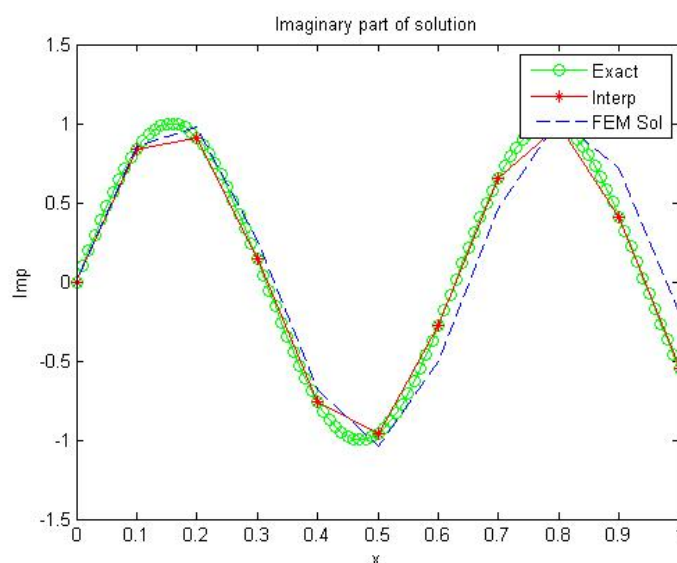
$$-d_{xx}^2 p - k_0^2 p = 0 \quad \text{unutar } \Omega_{ac} \quad (5.74)$$

$$p(0) = p_{ex}(0) = 1 \quad (5.75)$$

$$d_x p(1) - ik_0 p(1) = g = d_x p_{ex}(1) - ik_0 p_{ex}(1) \quad (5.76)$$

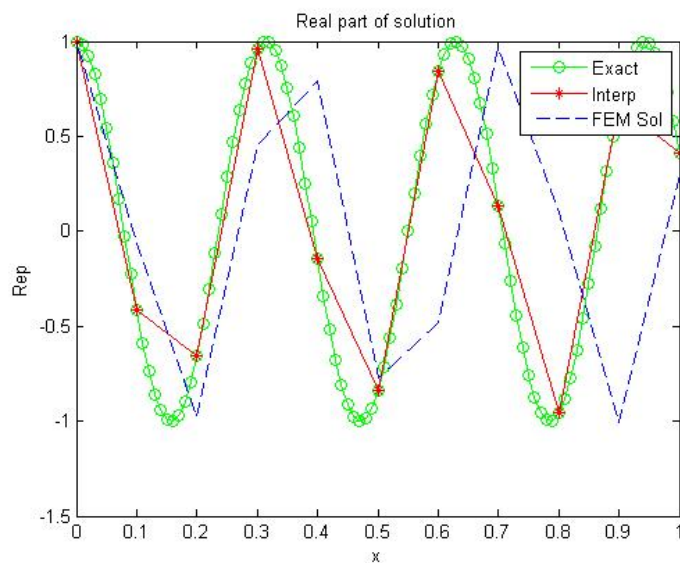


Слика 5.1: Реално део егзактног, интерполационог и Галеркиновог решења Хелмхолцове једначине за $k_0 = 10$

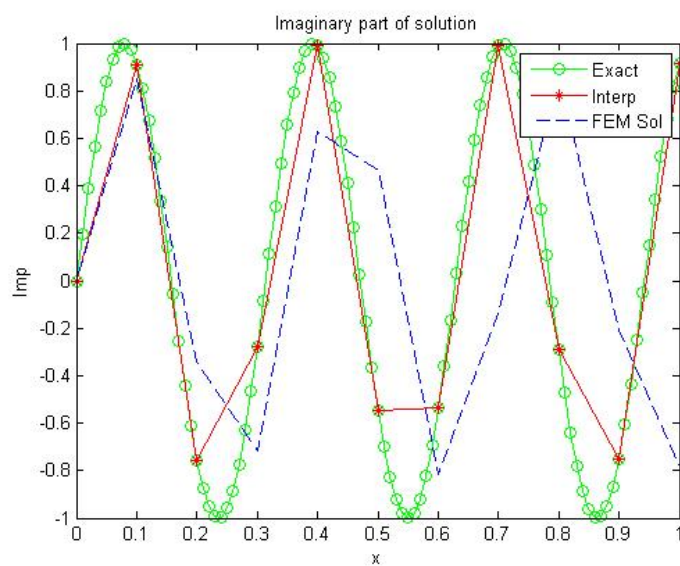


Слика 5.2: Имагинарни део егзактног, интерполационог и Галеркиновог решења Хелмхолцове једначине за $k_0 = 10$

У уводу смо споменули чињеницу да за велике таласне бројеве, дискретни талас добијен методом коначних елемената пропагира са дискретним таласним бројем k_h који је другачији од континуалног k . Ово фазно кашњење је због дисперзионог карактера k_h што је корен "pollution" грешке. Представићемо реално и имагинарно решење егзактног, интерполационог и решења добијеног Галеркиновом методом за случај када је $k_0 = 10$ што је приказано на слици 5.1 и 5.2 где се јасно види фазно кашњење решења добијеног методом коначних елемената. Ако са



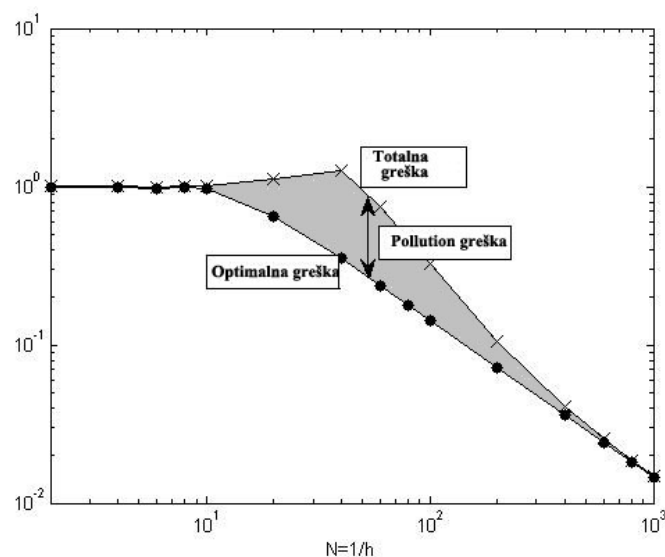
Слика 5.3: Реално део егзактног, интерполационог и Галеркиновог решења Хелмхолцове једначине за $\nu_0 = 20$



Слика 5.4: Имагинарни део егзактног, интерполационог и Галеркиновог решења Хелмхолцове једначине за $\nu_0 = 20$

p_I означимо интерполант од егзактног акустичног притиска p , онда можемо да дефинишемо интерполациону грешку као $e_{int} = \|p - p_I\|_V$, што је горња граница најбоље могуће апроксимације или оптимална грешка. Ова грешка има локални карактер и зато се због тога понекад назива локална грешка. Са друге стране због дисперзије, Галеркиново решење има грешку $e_{tot} = \|p - p_h\|_V$ која је много већа од интерполационе грешке. Разлика између грешке добијене методом коначних елемената и интерполационе грешке се назива "pollution" грешка $e_{pol} = e_{tot} - e_{int}$ која је веома повезана са дисперзијом. Што је већа дисперзија, биће и већа "pollution" грешка. У сагласности са резултатима који су дефинисани у теорему о добром постављању математичког проблема дефинисане у претходним поглављима, можемо приметити да ако таласни број расте тако и "pollution" грешка расте. Ово може да се примети на слици 5.3 и 5.4 где је представљено реално и имагарно решење егзактног, интерполационог и решење добијено методом коначних елемената за таласни број $k_0 = 20$. Очигледно је да фазно кашњење је веће него за случај када је $k_0 = 10$ и стога ће "pollution" грешка бити већа. Са друге стране, битно је напоменути да "pollution" грешка има глобални карактер.

На слици 5.5 смо представили зависност тоталне и оптималне грешке у H^1 норми са повећањем финоће мреже тј бројем елемената. Разлика између ове две вредности се дефинише као "pollution" грешка. Резултат је добијен за случај када је $k_0 = 50$.



Слика 5.5: Log-Log график тоталне и оптималне реалтивне грешке у H^1 норми са $k_0 = 50$

5.4.1 Дефиниција "pollution" грешке

Генерална дефиниција "pollution" грешке се може дефинисати као:

Ако разматрамо Хелмхолцов проблем у нормираном простору V , са таласним бројем k_0 , егзактно решење $p \neq 0 \in V$ и решење које је добијено методом коначних елемената $p_h \in V_h \subset V$. Ако претпоставимо процену типа,

$$\frac{\|p - p_h\|_V}{\|p\|_V} \leq C(k_0) \inf_{w_h \in V_h} \frac{\|p - w_h\|_V}{\|p\|_V} \quad (5.77)$$

стоји и ако можемо да напишемо,

$$e_{r,h} \leq C(k_0) e_{r,opt} \quad (5.78)$$

и ако константа $C(k_0)$ има вредност

$$C(k_0) = C_1 + C_2 k_0^\beta (k_0^\alpha h) \quad (5.79)$$

са $\beta > 0$, $\alpha \geq 0$ и C_1, C_2 су константе независне од k_0 и h , кажемо да решење добијено методом коначних елемената има "pollution" грешку и да члан $C_2 k_0^\beta (k_0^\alpha h)$ се зове "pollution" члан.

5.4.2 Једнодимензиона дисперзиона анализа

Као што смо већ нагласили решење Хелмхолцове једначине које је добијено методом коначних елемената је дисперзионо услед "pollution" грешке. Да би комплетирали анализу, на веома једноставном примеру показаћемо да решење Хелмхолцове једначине методом коначних елемената пропагира са дискретним таласним бројем k_0^h који се разликује од континуалног таласног броја k_0 .

Ако узмемо један ред тридиагоналног ситета после дискретизације методом коначних елемената добили би,

$$-P^{a-1} + 2P^a - P^{a+1} - 2\alpha^h (P^{a-1} + 4P^a + P^{a+1}) = 0, \quad \alpha = \frac{(k_0 h)^2}{12} \quad (5.80)$$

где је $P^a = p_h(x_a)$ је вредност притиска у тачци $x_a = ha$ и претпоставили смо линеарне интерполационе функције. Из једначине (5.80) ћемо добити,

$$(2\alpha^h + 1)P^{a-1} + 2(4\alpha^h - 1)P^a - (2\alpha^h + 1)P^{a+1} = 0 \quad (5.81)$$

Ако претпоставимо да решење има облик $U^a = \rho^a$ у једначини (5.81) и ако поделимо са ρ^a добићемо,

$$(2\alpha^h + 1)\rho^2 + 2(4\alpha^h - 1)\rho - (2\alpha^h + 1) = 0 \quad (5.82)$$

где пропациони талас има решење,

$$\rho = \frac{1 - 4\alpha^h + \sqrt{12\alpha^h(\alpha^h - 1)}}{2\alpha^h + 1} \quad (5.83)$$

за $\alpha^h > 1$ имамо опадајући талас, док за $\alpha^h < 1 \leftrightarrow k_0h < \sqrt{12}$ (две тачке по таласној дужини) имамо осцилаторно решење, што нас овде интересује [155].

Ако захтевамо да дискретно решење p_h постане егзактно у чворовима следи да

$$p_h(x_a) = P^a = p(x_a) \rightarrow \rho^a = \exp(ik_0x_a) = \exp(ik_0ha) = [\exp(ik_0a)]^a \quad (5.84)$$

$$\rightarrow \rho = \exp(ik_0h) = \cos(k_0h) + i\sin(k_0h) \quad (5.85)$$

Претпостављајући дискретни таласни број тако да је $\rho = \cos(k_0^h h) + i\sin(k_0^h h)$, требало би да је $\operatorname{Re}[(1 - 4\alpha^h)/(2\alpha^h + 1)] = \cos(k_0^h h)$, што последично доводи до

$$k_0^h h = \arccos\left(\frac{1 - 4\alpha^h}{2\alpha^h + 1}\right) \approx k_0h - \frac{(k_0h)^3}{24} + 3\frac{(k_0h)^5}{640} + \dots \leq k_0h \quad (5.86)$$

што даље имплицира,

$$k^h - k_0 \approx \frac{k_0^3 h^2}{24} + O(k_0^5 h^4) \quad (5.87)$$

стога је јасно да у супротности од оптималног и егзактног решења, решење добијено методом коначних елемената је дисперзионо. Стога фазно кашњење настаје између егзактног таласног решења и дискретног. Слична дисперзиона анализа која је овде изведена за Хелмхолцову једначину се може извести и за дводимензиону као и за тродимензиону Хелмхолцову једначину [158] [159]. Подсећамо да се веома слични резултати добијају и за конвектну Хелмхолцову једначину [160].

5.5 Дводимензиона хомогена Хелмхолц једначина

У овом поглављу ћемо се осврнути на проблематику дводимензионалне Хелмхолцове једначине. Као што ћемо видети иста правила важе као и за једнодимензиону Хелмхолцову једначину. Ако претпоставимо следећи модел који подразумева пропацију слободног таласа у дводимензионалној равни која може да се објасни као: пронађи акустични притисак $p : \Omega_{ac} \rightarrow \mathbb{C}$ са $\Omega_{ac} = (0, 1) \times (0, 1)$ тако да

$$-\nabla^2 p - k_0^2 p = 0 \quad \text{unutar } \Omega_{ac} \quad (5.88)$$

$$\nabla p \cdot \mathbf{n} = ik_0 p + g \quad \text{na } \partial\Omega_{ac} \quad (5.89)$$

Таласни број је дат као $\mathbf{k}_0 = (k_{0x}, k_{0y}) = k_0(\cos\theta, \sin\theta)$ и граница је $\partial\Omega_{ac} = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$ где је:

$$\Gamma_1 = [x, 0], \quad x \in [0, 1] \quad (5.90)$$

$$\Gamma_2 = [1, y], \quad y \in [0, 1] \quad (5.91)$$

$$\Gamma_3 = [x, 1], \quad x \in [0, 1] \quad (5.92)$$

$$\Gamma_4 = [0, y], \quad y \in [0, 1] \quad (5.93)$$

$$(5.94)$$

подаци за g имају вредности,

$$g(x, y) = i(k_0 - k_{0y})exp(ik_{0x}x) \quad \text{на } \Gamma_1 \quad (5.95)$$

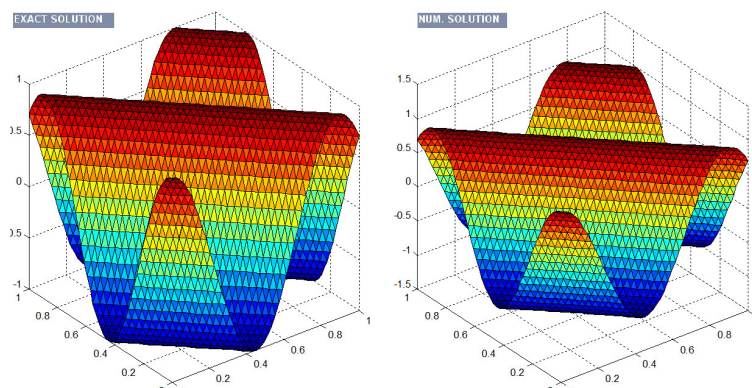
$$g(x, y) = i(k_0 + k_{0x})exp(ik_{0x} + ik_{0y}y) \quad \text{на } \Gamma_2 \quad (5.96)$$

$$g(x, y) = i(k_0 + k_{0y})exp(ik_{0x}x + ik_{0y}) \quad \text{на } \Gamma_3 \quad (5.97)$$

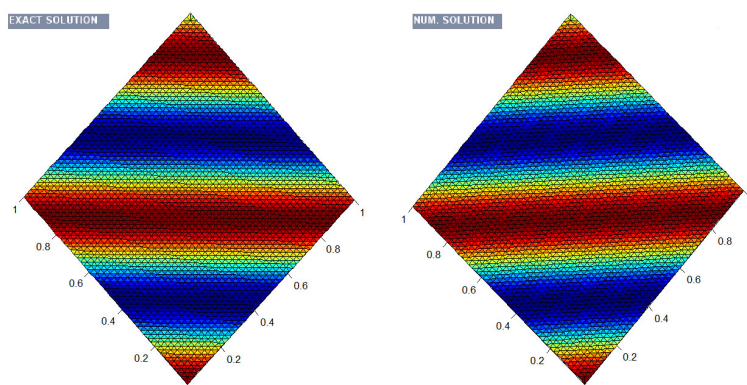
$$g(x, y) = i(k_0 - k_{0x})exp(ik_{0y}y) \quad \text{на } \Gamma_4 \quad (5.98)$$

Егзактно решење проблема (5.86)(5.87) је равански талас који пропагира у смеру вектора талсног броја \mathbf{k}_0

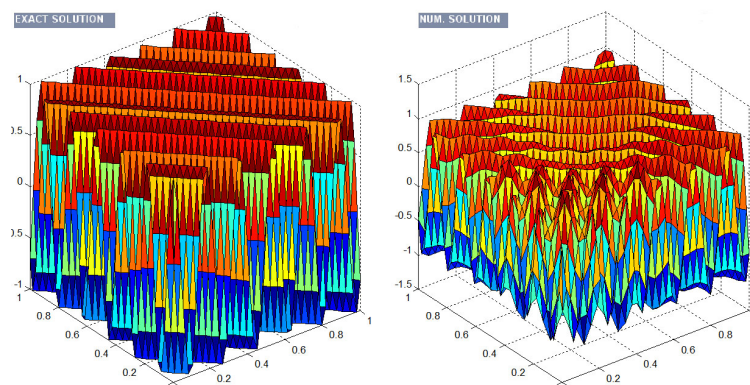
$$p = exp(ik_{0x}x + ik_{0y}y) \quad (5.99)$$



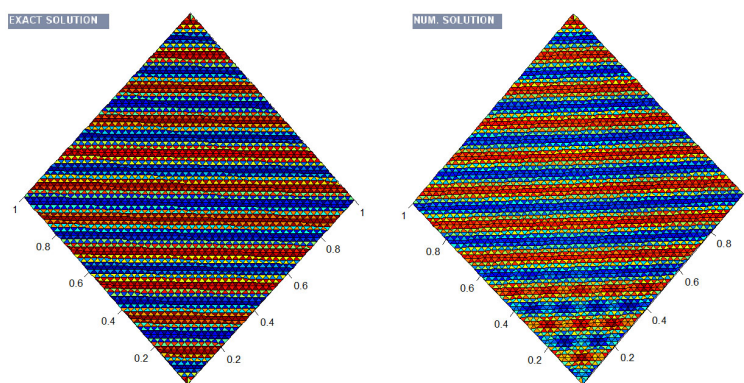
Слика 5.6: Реални део егзактног и решења добијеног методом коначних елемената за $k_0 = 10$ и $\theta = 45^\circ$ у изометријском погледу



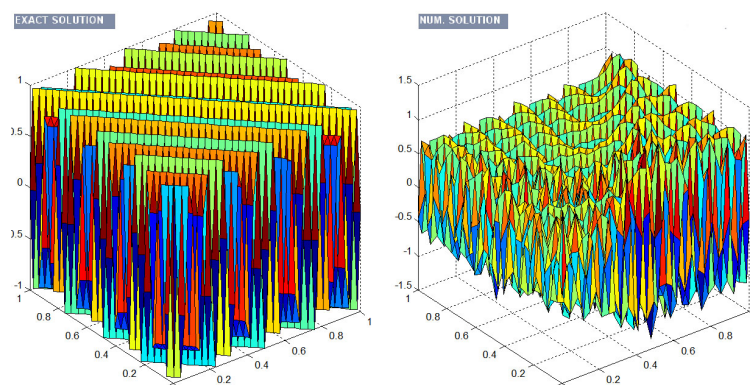
Слика 5.7: Реални део егзактног и решења добијеног методом коначних елемената за $k_0 = 10$ и $\theta = 45^\circ$ у погледу одозгоре



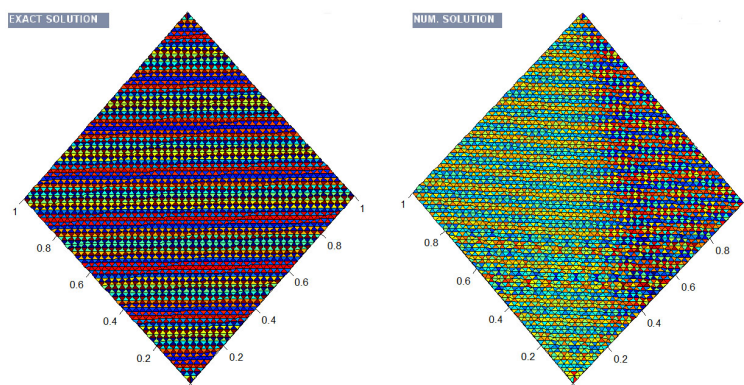
Слика 5.8: Реални део егзактног и решења добијеног методом коначних елемената за $k_0 = 50$ и $\theta = 45^\circ$ у изометријском погледу



Слика 5.9: Реални део егзактног и решења добијеног методом коначних елемената за $k_0 = 50$ и $\theta = 45^\circ$ у погледу одозгоре



Слика 5.10: Реални део егзактног и решења добијеног методом коначних елемената за $k_0 = 100$ и $\theta = 45^\circ$ у изометријском погледу



Слика 5.11: Реални део егзактног и решења добијеног методом коначних елемената за $k_0 = 50$ и $\theta = 45^\circ$ у погледу одозгоре

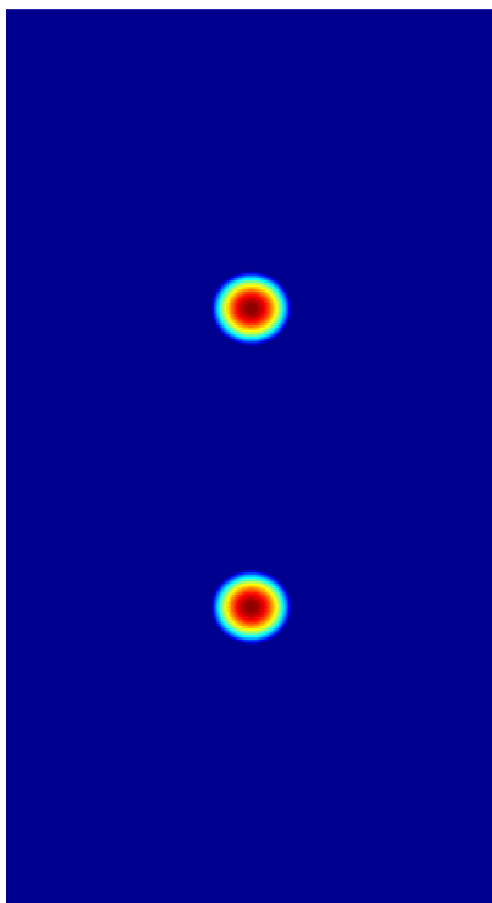
На сликама 5.6-5.11 је представљено аналитичко решење као и решење добијено методом коначних елемената за таласне бројеве $k_0 = 10, 50, 100$ и $\theta = 45^\circ$ и мрежом од 2500 елемената. Упечатљив је развој "pollution" грешке са порастом талсног броја k_0 .

5.6 Двoдимензиона нехомогена Хелмхолцова једначина

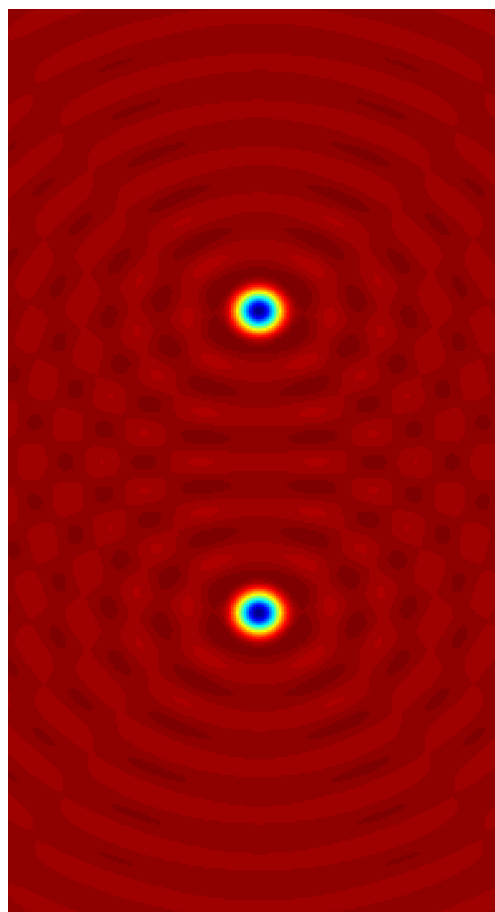
У овом делу се нећемо бавити никаквом анализом "pollution" грешке, него ћемо решити просту нехомогену Хелмхолцову једначину Галеркиновим методом коначних елемената и упоредити резултате са аналитичким решењем. Овај приступ нам је користио као тест проблем за имплементацију решења нехомогене Хелмхолцове једначине. На слици 5.12 је приказан изворни члан са два монопола, а поред тога је приказано и аналитичко решење за нехомогену Хелмхолцову једначину на слици 5.13.

Пошто је искоришћен прорачунски домен дефинисан у претходном поглављу искористили смо домен и граничне улсове и направили акустични извор са једним монополем који је приказан на слици 5.14. Једначина која дефинише акустични извор написана као Матлаб код је:

$$S(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \max(0.5^2 - X^2 - (Y - 2)^2, 0) + \max(0.5^2 - X^2 - (Y + 2)^2, 0) \quad (5.100)$$



Слика 5.12: Акустични извори у прорачунском домену



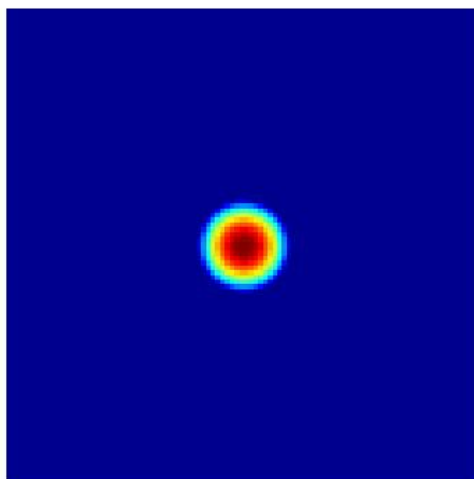
Слика 5.13: Аналитичко решење за нехомогону Хелмхолцову једначину

док је аналитичко решење написано као матлаб код дато са,

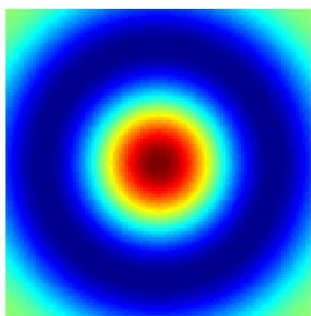
$$p(\mathbf{x}) = (i/4)\text{besselh}(0, 1, k_0 * \text{sqrt}(X - x_0)^2 + (Y - y_0)^2 + \text{eps})S(x, y)h_x h_y \quad (5.101)$$

где је besselh дефинисан као $Y_v(z) = \frac{J_v \cos(v\pi) - J_{-v}(z)}{\sin(v\pi)}$, док је релација између Хенкелове и Беселове функције дат са $H_v^{(1)}(z) = J_v(z) + iY_v(z)$, $H_v^{(2)}(z) = J_v(z) - iY_v(z)$.

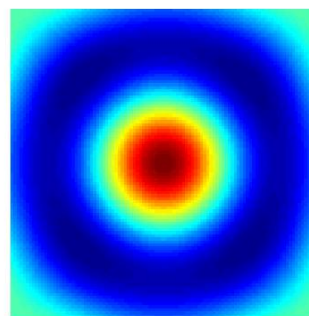
Имагинарно и релано решење нехомогене Хелмхолцове једначине је приказан на сликама 5.16 и 5.18 и оне су упоређене са решењем добијени аналитичким путем приказан на сликама 5.15 и 5.17. Имплементација нехомогене и хомогене једнодимензионе као и дводимензионе Хелмхолц једначине приказан је у додатку В.



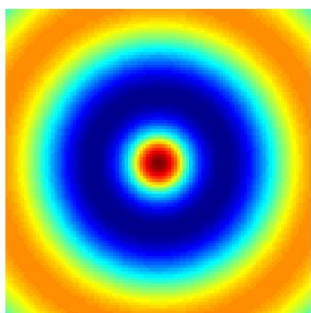
Слика 5.14: Акустични извор типа монопол у прорачунском домену



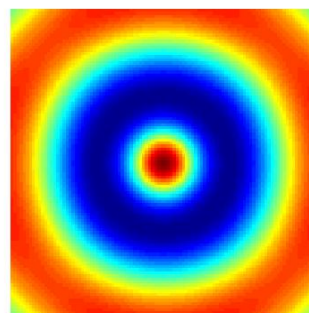
Слика 5.15: Имагинарни део аналитичког решења нехомогене Хелмхолцове једначине



Слика 5.16: Имагинарни део решења методом коначних елемената нехомогене Хелмхолцове једначине



Слика 5.17: Реални део аналитичког решења нехомогене Хелмхолцове једначине



Слика 5.18: Реални део решења методом коначних елемената нехомогене Хелмхолцове једначине

5.7 SGS стабилизациона метода за нехомогену Хелмхолцову једначину

У овом поглављу применићемо исту стабилизациону методу коју смо користили за решавање Навије-Стоксове једначине у трећем поглављу да би решили "pollution" грешку која се јавља приликом решавања Хелмхолцове једначине Галеркиновом методом. Као што смо већ објаснили направићемо раздвајање променљивих на $p = p_h + \tilde{p}$ и тест функције $w = w_h + \tilde{w}$ које долазе из раздвајања математичких простора на $W = W_h \oplus \tilde{W}$, $W_0 = W_{h,0} + \tilde{W}_0$. Ако заменимо ове променљиве у једначину (5.73) добићемо једначину за велике величине и једначину за мале величине, што је дефинисано у следећој једначини:

$$\begin{aligned} (\nabla p_h, \nabla w_h) - k^2(p_h, w_h) - ik(p_h, w_h)_{\Gamma_B} \\ + \sum_{\Omega_e} \langle \tilde{p}, \nabla^2 w_h + k^2 w_h \rangle_{\Omega_e} \\ = \langle s_h, w_h \rangle + (g, w_h)_{\Gamma_B} \end{aligned} \quad (5.102)$$

где први ред претходне једначине дефинише резултат добијен Галеркиновом методом а док други ред дефинише стабилизационе чланове који узимају у обзир утицај малих величина на велике. Мале величине се могу апроксимирати,

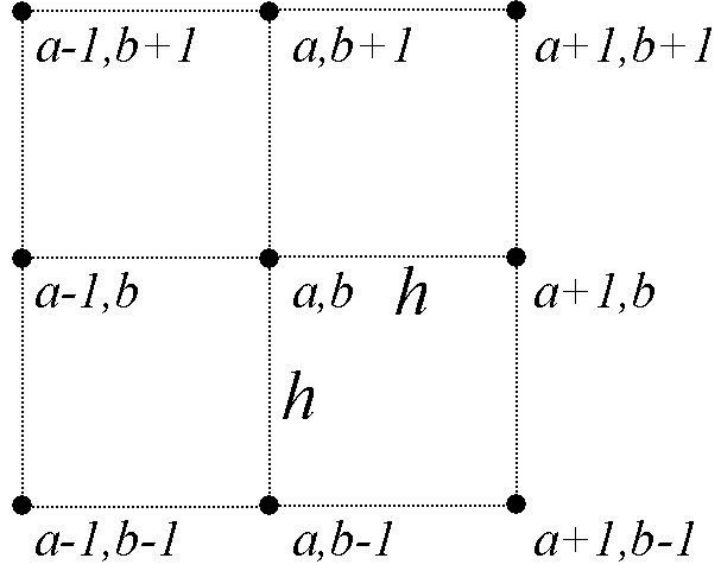
$$\tilde{p} = \tau_{ac} r_{p,h} = \tau_{ac} (-\nabla^2 p_h - k^2 p_h - s_h) \quad (5.103)$$

Стабилизациони параметар τ_{ac} се добија из дисперзионе анализе што ћемо објаснити у следећем поглављу. Једначина (5.102), заједно са дефинисаним малим величинама дефинисаним у једначини (5.103) и са стабилизационим параметром који ћемо накнадно дефинисати отклања "pollution" грешку која се јавља у Галеркиновој методологији.

5.7.1 Дефинисање стабилизационог параметра

У овом поглављу дефинисаћемо стабилизациони параметар за конвектну дводимензиону Хелмхолцову једначину. Дисперзиона анализа ће бити урађена на униформној

мрежи која има елементе $h \times h$ који су билинарног типа [155] [161]. Прво ћемо написати стабилизациону форму без граничних услова пошто ћемо бити заинтересовани за резултат добијен унутар прорачунске мреже. Ова форма је дата са,



Слика 5.19: Део прорачунске мреже са дефинисаном нотацијом за прорачун стабилизационог параметра

$$\begin{aligned}
 a_{sgs}(p_h, w_h) &= -2ik_0 M_x (\partial_x p_h, w_h) - 2ik_0 M_y (\partial_y p_h, w_h) \\
 &+ [1 + M_x^2] (\partial_x p_h, \partial_x w_h) + [1 - M_y^2] (\partial_y p_h, \partial_y w_h) \\
 &\quad - 2M_x M_y (\partial_x p_h, \partial_y w_h) - k_0^2 (p_h, w_h) \\
 &+ \tau_{SGS} 4k_0^2 M_x^2 \sum_{n_{el}} (\partial_x p_h, \partial_x w_h)_{\Omega_{el}} + \tau_{SGS} 4k_0^2 M_y^2 \sum_{n_{el}} (\partial_y p_h, \partial_y w_h)_{\Omega_{el}} \\
 &+ \tau_{SGS} 8k_0^2 M_x M_y \sum_{n_{el}} (\partial_x p_h, \partial_y w_h)_{\Omega_{el}} - \tau_{SGS} k_0^4 \sum_{n_{el}} (p_h, w_h)_{\Omega_{el}}
 \end{aligned} \tag{5.104}$$

Дефинисали смо $C_x = (\partial_x p_h, w_h)$, $C_y = (\partial_y p_h, w_h)$, $D_{xx} = (\partial_x p_h, \partial_x w_h)$, $D_{yy} = (\partial_y p_h, \partial_y w_h)$, $D_{xy} = (\partial_x p_h, \partial_y w_h)$, $S = (p_h, w_h)$ да би поједноставили нотацију. Непознате у тачкама дела прорачунске мреже на слици 5.19 се могу представити као,

$$[P_{ab}^{int}] = \begin{bmatrix} P^{a-1,b+1} & P^{a,b+1} & P^{a+1,b+1} \\ P^{a-1,b} & P^{a,b} & P^{a+1,b} \\ P^{a-1,b-1} & P^{a,b-1} & P^{a+1,b-1} \end{bmatrix}$$

Аналогно када користимо билинарну апроксимативну функцију, коефицијенти који се добијају за претходно дефинисане параметре су:

$$[C_{x,ab}^{int}] = \frac{h}{12} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[D_{xx,ab}^{int}] = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -4 & 8 & -4 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$[D_{xy,ab}^{int}] = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[S_{ab}^{int}] = \frac{h^2}{36} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 4 & 16 & 4 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Алгебарски систем линеарних једначина SGS варијационог проблема се онда може написати као,

$$\begin{aligned} a_{sgs}(p_h, w_h) = & -2ik_0 M_x [C_{x,ab}^{int}] : [P_{ab}^{int}] - 2ik_0 M_y [C_{y,ab}^{int}] : [P_{ab}^{int}] \\ & + [1 + M_x^2] [D_{xx,ab}^{int}] : [P_{ab}^{int}] + (1 - M_y^2) [D_{yy,ab}^{int}] : [P_{ab}^{int}] \\ & - 2M_x M_y [D_{xy,ab}^{int}] : [P_{ab}^{int}] - k_0^2 [S_{ab}^{int}] : [P_{ab}^{int}] \\ & + \tau_{SGS} 4k_0^2 M_x^2 [D_{xx,ab}^{int}] : [P_{ab}^{int}] + \tau_{SGS} 4k_0^2 M_y^2 [D_{yy,ab}^{int}] : [P_{ab}^{int}] \\ & + \tau_{SGS} 8k_0^2 M_x M_y [D_{xy,ab}^{int}] : [P_{ab}^{int}] - \tau_{SGS} k_0^4 [S_{ab}^{int}] : [P_{ab}^{int}] \end{aligned} \quad (5.105)$$

где : представља двоструку контракцију. Ако сада претпоставимо решење за равански талас са таласним бројем $\mathbf{k}_0^{eff} = (k_{0x}^{eff}, k_{0y}^{eff})$ у тачци mn ,

$$p^{mn} = \exp[i(k_{0x}^{eff} hm + k_{0y}^{eff} hn)] \quad (5.106)$$

ако заменимо ову једначину у једначину (5.105), дисперзиона релација је добијена из које стабилизациони параметар τ_{SGS} се може дефинисати ако је задовољена дискретна једначина.

$$\tau_{SGS} = \frac{A_{num} + B_{num}M_x + C_{num}M_y + D_{num}M_x^2 + E_{num}M_y^2 F_{num}M_xM_y}{A_{den} + B_{den}M_x + C_{den}M_y + D_{den}M_x^2 + E_{den}M_y^2 + F_{den}M_xM_y} \quad (5.107)$$

$$A_{num} = -\frac{2}{3}[4 - \cos((k_{0x}^{eff}h) - \cos((k_{0y}^{eff}h) - 2\cos((k_{0x}^{eff}h)\cos(k_{0y}^{eff}h))] + \frac{k_0^2h^2}{9}\{[2 + \cos((k_{0x}^{eff}h)][2 + \cos((k_{0y}^{eff}h))]\} \quad (5.108)$$

$$B_{num} = -\frac{2}{3}k_0h[\sin((k_{0x}^{eff}h)\cos((k_{0y}^{eff}h) + 2\sin((k_{0x}^{eff}h))] \quad (5.109)$$

$$C_{num} = -\frac{2}{3}k_0h[\sin((k_{0y}^{eff}h)\cos((k_{0x}^{eff}h) + 2\sin((k_{0y}^{eff}h))] \quad (5.110)$$

$$D_{num} = \frac{2}{3}\{2 - \cos(k_{0x}^{eff}h)[2 + \cos(k_{0y}^{eff}h)] + \cos(k_{0y}^{eff}h)\} \quad (5.111)$$

$$E_{num} = \frac{2}{3}\{2 - \cos(k_{0y}^{eff}h)[2 + \cos(k_{0x}^{eff}h)] + \cos(k_{0x}^{eff}h)\} \quad (5.112)$$

$$F_{num} = 2\sin(k_{0x}^{eff}h)\sin(k_{0y}^{eff}h) \quad (5.113)$$

$$A_{den} = -\frac{k_0^4h^2}{3}[2 + \cos(k_{0x}^{eff}h)][2 + \cos(k_{0y}^{eff}h)] \quad (5.114)$$

$$B_{den} = 0 \quad (5.115)$$

$$C_{den} = 0 \quad (5.116)$$

$$D_{den} = 4k_0^2D_{num}E_{den} = 4k_0^2E_{num}F_{den} = 4k_0^2F_{num} \quad (5.117)$$

Наш циљ је да нађемо ефектни таласни број за равански талас који пропагира у произвољном правцу. Све што треба да урадимо је да вратимо пуну Лоренцову трансформацију за равански талас.

$$p''(\mathbf{x}'', \mathbf{k}_0'') = \exp(i\mathbf{k}_0'' \cdot \mathbf{x}'') \quad (5.118)$$

Пошто равански талас путује у униформном медијуму,

$$p''(\mathbf{x}, \mathbf{k}_0) = \exp\{i\beta^{-1}[\mathbf{R}\mathbf{k}_0 - k_0\mathbf{R}\mathbf{M}] \cdot (\mathbf{D}\mathbf{R}\mathbf{x})\} = \exp(ik_0^{eff} \cdot \mathbf{x}) \quad (5.119)$$

Ако убацимо ротациону матрицу,

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}$$

Долазимо до следећих вредности за компоненте ефективног вектора таласног броја који је дефинисан у последњој једначини (5.119).

$$k_{0x}^{eff} = k_0\beta^{-2}[\cos(\theta - \phi)\cos\phi - M_x] - k_0\beta^{-1}\sin(\theta - \phi)\sin\phi \quad (5.120)$$

$$k_{0y}^{eff} = k_0\beta^{-2}[\cos(\theta - \phi)\sin\phi - M_y] - k_0\beta^{-1}\sin(\theta - \phi)\cos\phi \quad (5.121)$$

Изрази (5.120)(5.121) се коначно убаце у једначину (5.108)-(5.117) да би се пронашла одговарајућа вредност за параметар τ_{SGS} .

Ако не постоји конвекција $\mathbf{M} = (0, 0)$, следи из једначине (5.120)(5.121) да је,

$$k_{0x}^{eff} = k_{0x}, \quad k_{0y}^{eff} = k_{0y} \quad (5.122)$$

када се убаци у једначину (5.107).

$$\tau_{SGS} = \frac{A_{num}}{A_{den}} = -\frac{1}{k_0^2} + \frac{6}{k_0^4 h^2} \frac{[4 - \cos(k_{0x}^{eff} h) - \cos(k_{0y}^{eff} h) - 2\cos(k_{0x}^{eff} h)\cos(k_{0y}^{eff} h)]}{[2 + \cos(k_{0x}^{eff} h)][2 + \cos(k_{0y}^{eff} h)]} \quad (5.123)$$

Као што се и очекивало, претходно дефинисана једначина (5.123) је ништа него стабилизациони параметар дефинисан у GLS стабилизацији Хелмхолцове једначине [159].

Једнодимензиона верзија се добија ако поставимо да је $M_y = 0$ и $k_{0y} = 0$, тада ће ефективне компоненте таласног броја постати,

$$k_{0x}^{eff} = \frac{k_{0x}}{1+M} = k^{eff} \quad (5.124)$$

док је стабилизациони параметар дефинисан као,

$$\tau_{SGS} = \frac{A_{num} + B_{num}M + D_{num}M^2}{A_{den} + B_{den}M + D_{den}M^2} \quad (5.125)$$

где је,

$$A_{num} = 2[\cos(k_{0x}^{eff}h) - 1] + \frac{k_0^2 h^2}{3}[2 + \cos(k_{0x}^{eff}h)] \quad (5.126)$$

$$B_{num} = -2k_0 h \sin(k_{0x}^{eff}h) \quad (5.127)$$

$$D_{num} = 2[1 - \cos(k_{0x}^{eff}h)] \quad (5.128)$$

$$A_{den} = \frac{k_0^4 h^2}{3}[2 + \cos(k_{0x}^{eff}h)] \quad (5.129)$$

$$B_{den} = 0 \quad (5.130)$$

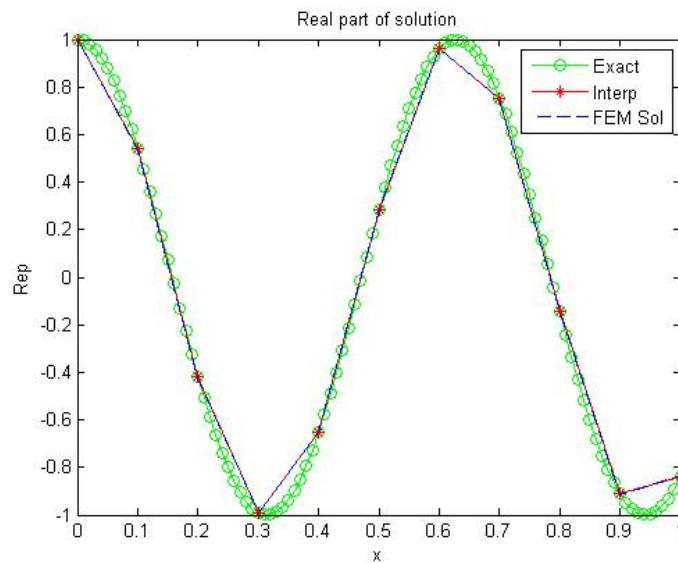
$$D_{den} = 4k_0^2 D_{num} \quad (5.131)$$

Стационарни једнодимензиони случај је дефинисан са $M=0$ у једначини (5.125) и ако уведемо нотацију $k_0^{eff} = k_0$. Онда можемо да дефинишемо стабилизациони параметар као,

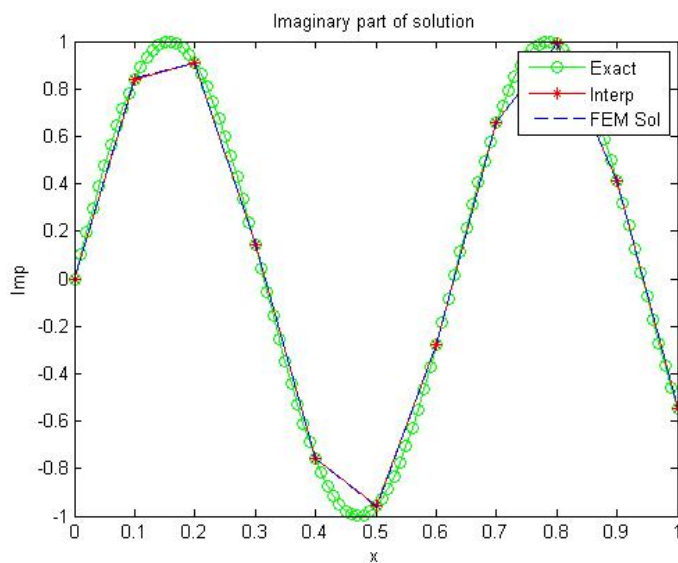
$$\tau_{SGS} = \frac{A_{num}}{A_{den}} = -\frac{1}{k_0^2} + \frac{6[1 - \cos(k_0 h)]}{k_0^4 h^2 [2 + \cos(k_0 h)]} \quad (5.132)$$

На крају смо имплементирали презентовану методологију у једноставан једнодимензиони проблем који је приказан у претходном поглављу. Први случај је био за таласни број $k_0 = 10$ где је домен дискретизован са 10 линеарних елемената. Реални и имагинарни део решења хомогене Хелмхолцове једначине је приказан на слици 5.20 и 5.21 где се јасно види да је проблем са "pollution" грешком нестао и да се дискретни таласни број поклапа са континуалним. Ово је још више изражено на слици 5.22 и 5.23 где је презентовано реално и имагинарно решење хомогене Хелмхолцове једначине за таласни број $k_0 = 20$. Јасно се види да не постоји никакво

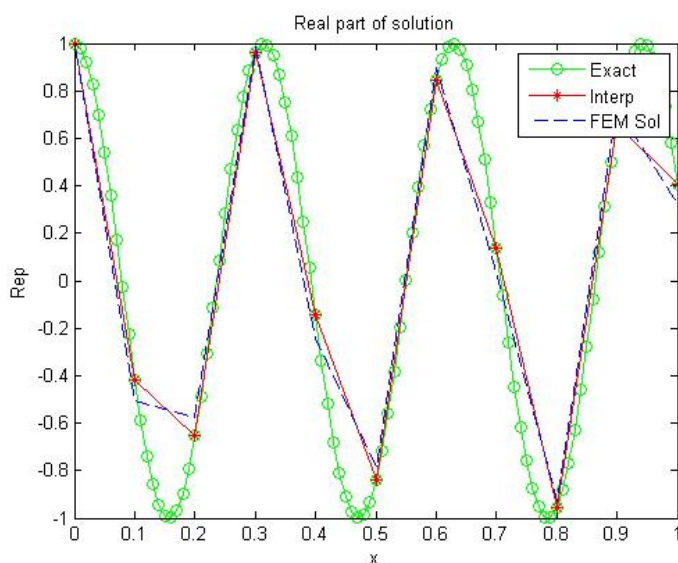
фазно кашњење између егзактног и решења методе коначних елемената код кога је коришћена ортогонална сабгрид скејл стабилизациона метода. Пошто се решења у чворовима не поклапају имали смо недоумицу да ли је то због стабилизационе методе или је недовољан број чворова да се обезбеди таласна репрезентација. Због тога је на слици 5.24 и 5.25 домен дискретизован са параболичним елементима где се јасно види да је недостатак био у броју чворова. Из горе наведеног јасно је да презентована стабилизациона метода итекако може да се користи да се превазиђе "pollution" грешка код Хелмхолцове једначине.



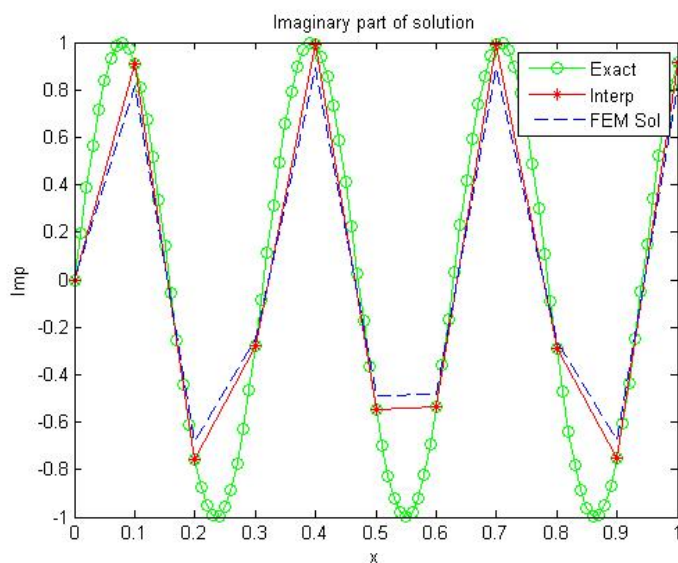
Слика 5.20: Реални део решења хомогене Хелмхолцове једначине са Ортогоналном SGS методом и таласним бројем $k_0 = 10$ и линеарним елементима



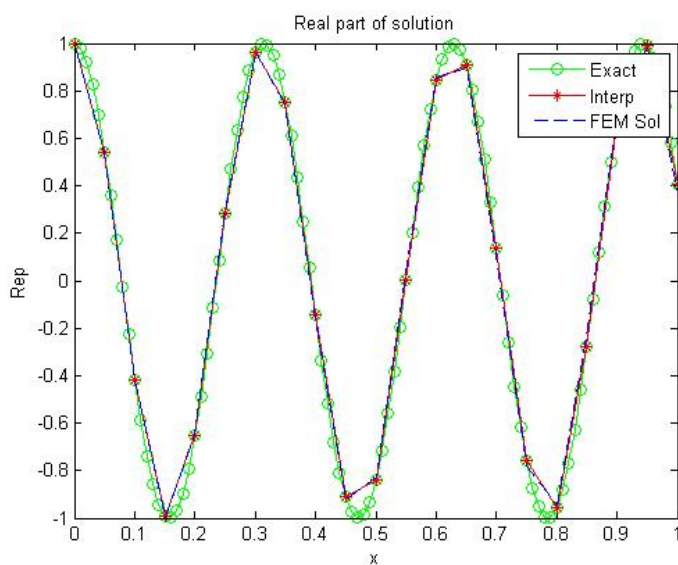
СЛИКА 5.21: Имагинарни део решења хомогене Хелмхолцове једначине са Ортогоналном SGS методом и таласним бројем $k_0 = 10$ и линарним елементима



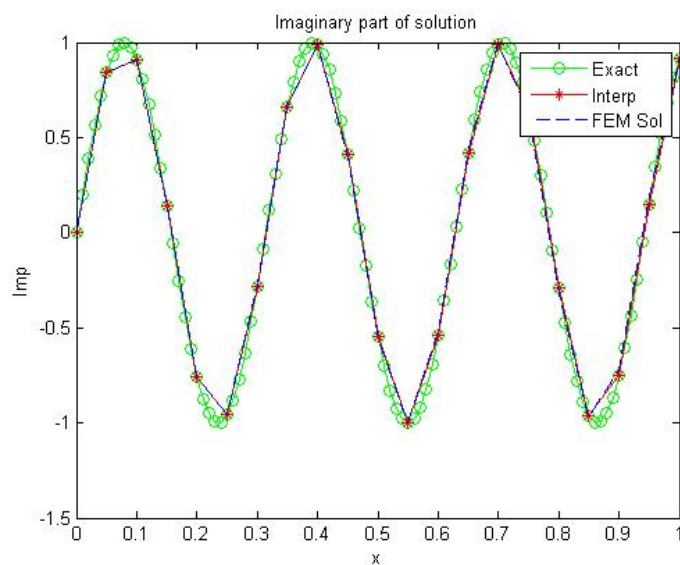
СЛИКА 5.22: Реални део решења хомогене Хелмхолцове једначине са Ортогоналном SGS методом и таласним бројем $k_0 = 20$ и линарним елементима



Слика 5.23: Имагинарни део решења хомогене Хелмхолцове једначине са Ортогоналном SGS методом и таласним бројем $k_0 = 20$ и линеарним елементима



Слика 5.24: Реални део решења хомогене Хелмхолцове једначине са Ортогоналном SGS методом и таласним бројем $k_0 = 20$ и параболним елементима



Слика 5.25: Имагинарни део решења хомогене Хелмхолцове једначине са Ортогоналном SGS методом и таласним бројем $k_0 = 20$ и параболичним елементима

Поглавље 6

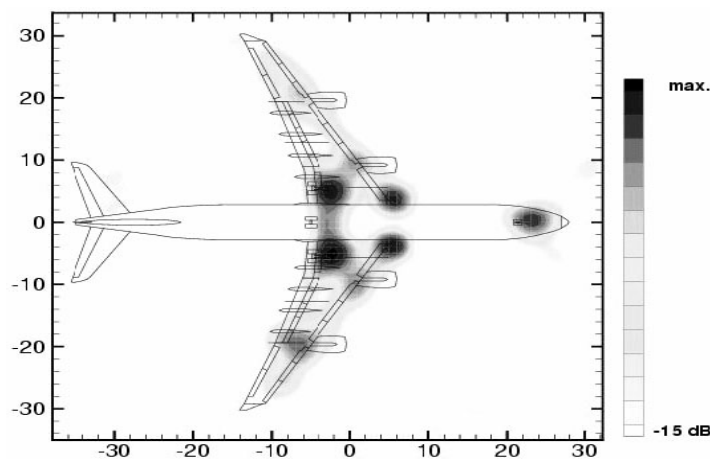
Симулација Аероакустике на узгонским површинама и компарација нумеричких модела

У овом поглављу размотрићемо и испитати могућности за апликацију неких од стратегија презентоване у претходним поглављима на реалним апликацијама. Пошто компјутерски ресурси нису били веома моћни, узети су примери који до неког нивоа тачности могу да се апроксимирају као дводимензиони објекти и самим тим редуковати прорачунско време као и меморијске ресурсе компјутера. Сходно томе у овом поглављу представићемо аероакустичну симулацију пројектила "ALAS" (Advanced Light Attack System) који је апроксимиран са пројекцијама на XY и XZ раван где је оса Z оса обртања пројектила. Исто тако спроведена је аероакустична симулација дела стајног трапа код кога су метални профили доминантни. Узета је равна која сече стајни трап на месту металних профила и добијени су дводимензионална пројекција профила. Истим принципом је симулиран и аеропрофил са отклоном закрилца од 20° . Имплементрирана је презентована методологија за моделирање турбуленције унутар прорачунског кода у програму FORTRAN95 и нова методологија је упоређена са класичним приступом моделирања турбуленције тј. LES-Смагорински моделом. Затим је извршен прорачун акустичних извора као и директна Фуријеова трансформација за прелазак

из временског домена у фреквентни. На крају је извршена акустична симулација за мале таласне бројеве простирања таласа.

6.1 Увод

Бука која долази од стране аеродинамичких површина на летелицама (AFN - Airframe Noise) се ствара на оцепљењима струјања и у тотално развијеном турбулентном струјању и њиховом интеракцијом са аеродинамичким површинама. Фреквенца и интезитет буке су веома под утицајем природе струјања тако и близине чврстих површина као и других извора буке. Ово резултира да се веома тешко препозна и редукује бука које стварају аеродинамичке површине, чак шта више теже је пошто целокупна енергије буке је само мали део енергије струјања и веома често редукација буке се коси са аеродинамичким потребама. Најважнији допринос стварању буке на аеродинамичким површинама имају компоненте за повећавање узгона тј. прекрилца и закрилца као и стајни трап приликом полетња и слетања. Локације генерисања буке на авиону можете видети на слици 6.1.



Слика 6.1: Локација буке на авиону

Прва истраживања буке генерисане од стране компоненти авиона су урађена током седамдесетих и осамдесетих година прошлог века. Летна испитивања као и тестови у аеротунелу су извршени на компонентама за повећавање узгона тако и на стајном трапу, што је донело дубоко сагледавање проблематике механизма стварања извора звука као и релативну важност одређених извора буке. Базирано на резултатима експеримента и аналитичкој анализи успостављени су формуле за полуемпиријске

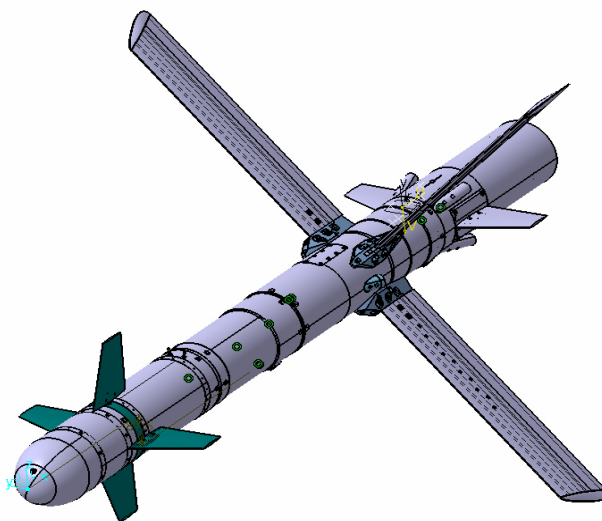
моделе претпоставке стварања извора звука на стајном трапу као и елементима за повећање узгона. Током свих ових година интензивно се истраживало како експериментално тако и аналитички турбулентно струјање које се ствара на излазној ивици аеропрофила. Иако, веома корисни ови полу емпиријски модели нису били у могућности да процене акустичну могућност новог дизајна и развој нових концепата тиших конструкција.

Током деведсетих година прошлог века развојем нових техника мерења даје нови импулс развоју експерименталних истраживања буке генерисане на аеродинамичким површинама. У неколико развојних програма као што је између осталог и RAIN (Reduction of Airframe and Instalation Noise) експериментална истраживања су изведена у аеротунелима као и тест летовима. Карактеристике и рангирање разних врста извора буке на различитим врстама авиона су забележене и извршен је концепт редуковања буке емпиријски. Из ових истраживања јасно су се издвојили стајни трап, као и елементи на крилима за повећање узгона као што су прекрилце и закрилце. Сходно томе у даљем току поглавља позабавићемо се конкретно овим деловима авиона који изазивају највећи степен буке на авиону. Спровешћемо методологију презентовану у тези за симулацију аероакустике на стајном трапу, аеропрофилу са закрилцем као и на пројектилу ALAS. Због смањених компјутерских ресурса, све симулације су изведене у дводимензионалном прорачунском домену са претпоставком да се круцијално не губи физикалност појаве која се жели презентовати.

6.2 Аероакустична симулација пројектила ALAS

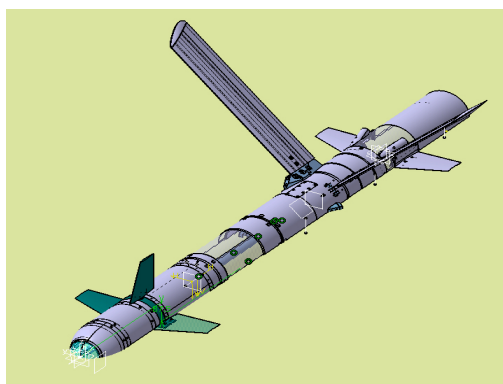
У овом поглављу ћемо се позабавити симулацијом аероакустике користећи методологију презентовану у претходним поглављима примењену на реалним примерима који могу да се апроксимирају као равански проблеми и која је презентована у [162]. Ракетни систем "ALAS" (Advanced Light Attack System) који је приказан на слици 6.2 се развија у фирми Едепро. Због ограничености компјутерских ресурса урађена је дводимензионална апроксимација геометрије ракете АЛАС тј. направљена је пројекција ракете на раван XZ и XY што је приказано на слици 6.3 и 6.4. Опште је познато да је за овакав случај потребно тродимензионално струјање да би репрезентовало право струјање и турбуленцију око пројектила, али овде је узет дводимензионални

приступ да би се добила геометрија која веома лако може да генерише развијено турбулентно струјање. Овакав приступ је оправдан са тачке гледишта компарације две презентоване методологије за симулацију турбулентног струјања.

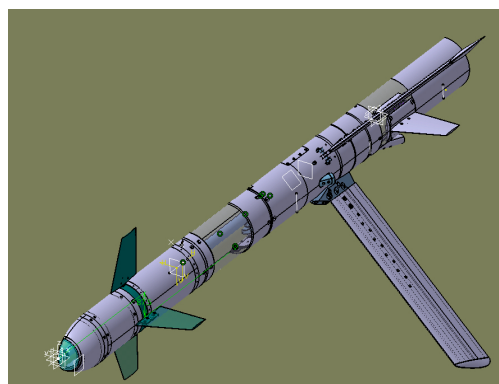


Слика 6.2: 3D модел ALAS-a

Када смо добили геометрију направили смо прорачунски домен који приказан на слици 6.5 и 6.6, чије су димензије $80\text{m} \times 60\text{m}$ за обе симулације. Домен је испарчан из великог броја површина и њега смо дискретизовали са прорачунском мрежом приказаном на слици 6.7-6.10 која има 134494 троугластих линарних елемената и 67681 прорачунских чворова за случај симулације у XZ и XY равни. Мрежа је направљена тако да је најфинија у зони граничног слоја а да се величина елемената повећава како се удаљавамо од ракете. Треба напоменути да је усвојен довољно велики домен који се касније може искористити и за симулацију акустике, тј усвојен је један прорачунски домен за симулацију турбуленције и исти домен је коришћен



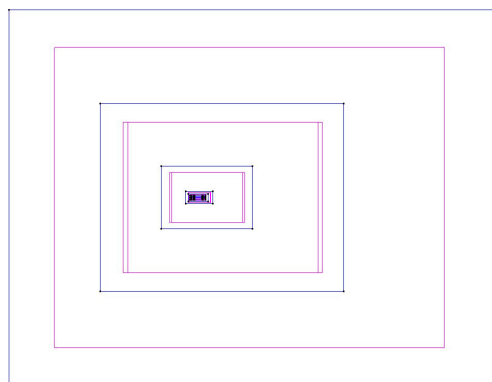
Слика 6.3: 3D модел Аласа са пресеком XY равни



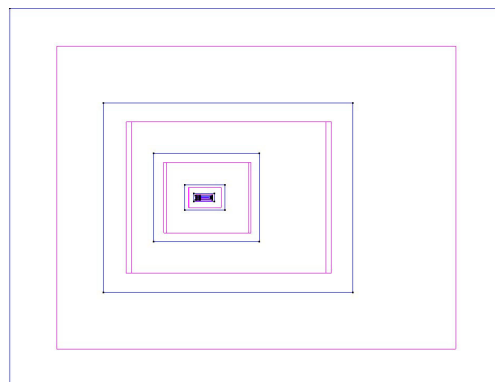
Слика 6.4: 3D модел Аласа са пресеком XZ равни

ТАБЕЛА 6.1: Сетовање Нумеричких модела за симулацију турбуленције ALAS-a

Тип модела	LES-Смагорински	Ортогонална SGS са динамичким праћењем малих величина
Временски интервал [s]	0.35	0.35
Временски корак [s]	0.0005	0.0005
Густина ваздуха [kg/m ³]	1.225	1.225
Кинематска вискозност [m ² /s]	0.0000178	0.0000178
Број чворова мреже	67681	67681
Број елемената мреже	134494	134494
Смагорински параметар ϵ	0.004	
Стабилизационе константе		4.0, 2.0, 1.0, 1.0
Временска дискретизација	Адамс	Адамс
Почетни услови	Стокс	Стокс
Метод линеаризације	Њутн-Рапсон	Њутн-Рапсон
Толеранција конвергенције	1.0^{-5}	1.0^{-5}
Алгебарски солвер	Pardiso	Pardiso
Брзина ракете [m/s]	120	120
Рејнолдсов број	4.4610^5	4.4610^5



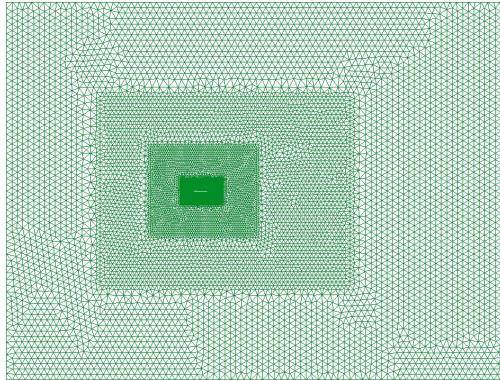
Слика 6.5: Дводимензиони прорачунски домен око Аласа са пројекцијом у XY равни



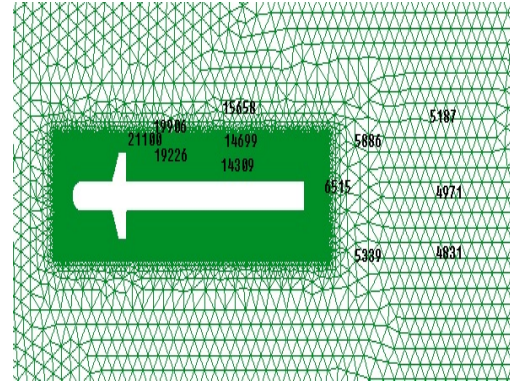
Слика 6.6: Дводимензиони прорачунски домен око Аласа са пројекцијом у XZ равни

за пропацију акустичних таласа. Са таквим приступом је избегнута сепарација домена и мапирање акустичних извора из једног домена у други [163].

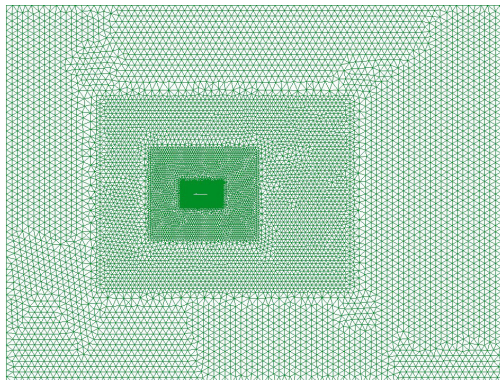
Гранични услови који су приказани на сликама 6.11 и 6.12 су Дирихлеови гранични услови на ободу ракете тј. преписано је да је брзина једнака нули. Са друге стране на слици 6.13 и 6.14 приказани гранични услови далеко од ракете, тј усвојено је Дирихлеов гранични услов за брзину струјања од 120 m/s, што одговара Маховом броју од 0.35 приказани плавом бојом. Са остале три стране је преписан Нојманов гранични услов да не би имали проблема са вртлозима који одлазе изван домена и као такви враћеју енергију у систем који онда пати од нумеричке нестабилности. На крају у табели 6.1 је прзентовани нумерички параметри и за LES модел Смагоринског



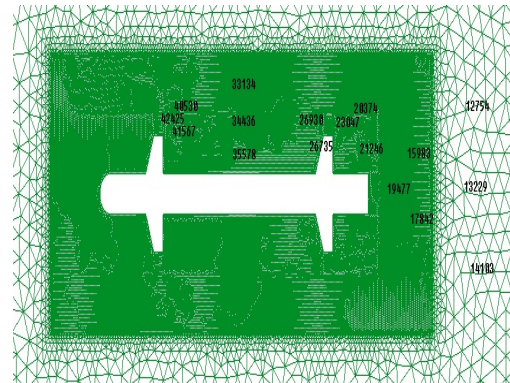
Слика 6.7: Прорачунска мрежа домена око ракете у XZ равни



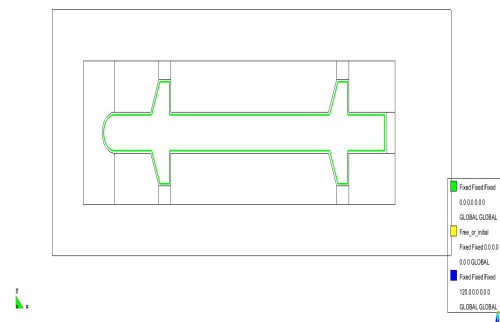
Слика 6.8: Чворови за временско праћење брзине у времену за случај ракете у XZ равни



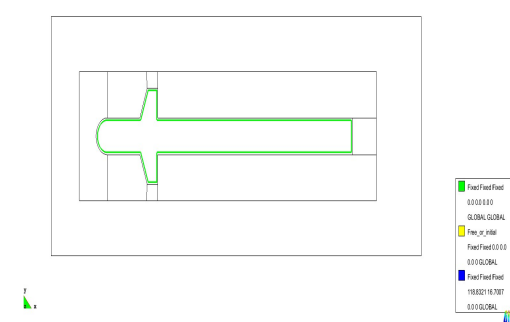
Слика 6.9: Прорачунска мрежа домена око ракете у XY равни



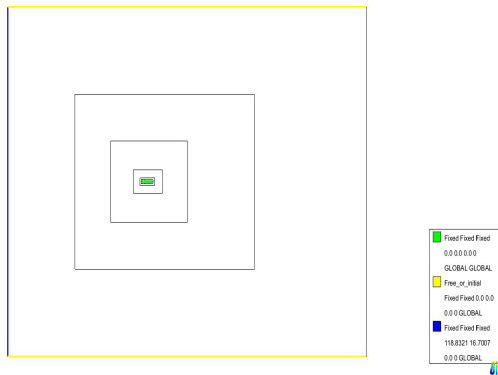
Слика 6.10: Чворови за временско праћење брзине у времену за случај ракете у XY равни



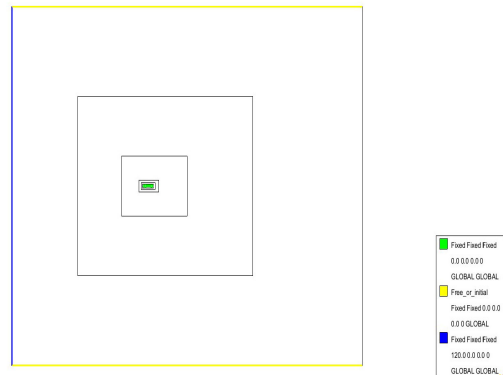
Слика 6.11: Гранични услови да је брзина једнака нули на ободу ракете за симулацију Аласа са пројекцијом у XY равни



Слика 6.12: Гранични услови да је брзина једнака нули на ободу ракете за симулацију Аласа са пројекцијом у XZ равни



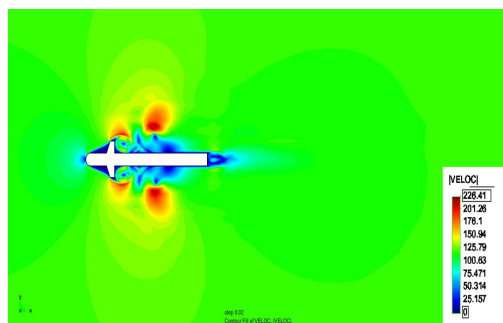
Слика 6.13: Гранични услови на ободу прорачунског домена за симулацију Аласа са пројекцијом у XY равни



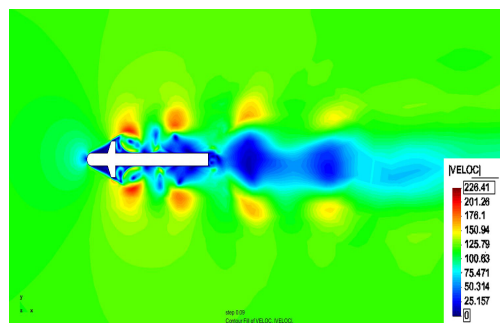
Слика 6.14: Гранични услови на ободу прорачунског домена за симулацију Аласа са пројекцијом у XZ равни

тако и за Ортоганлани SGS модел са динамичким праћењем малих величина. Треба напоменути да је приступ компарације модела такав да је коришћен идентичан домен са идентичном прорачунском мрежом и свим осталим физикалним параметрима. Једино што је другачије је турбулентно моделирање који има за циљ да прикаже како другачије моделирање турбуленције даје тотално другачије резултате док се сви параметри држе идентичним.

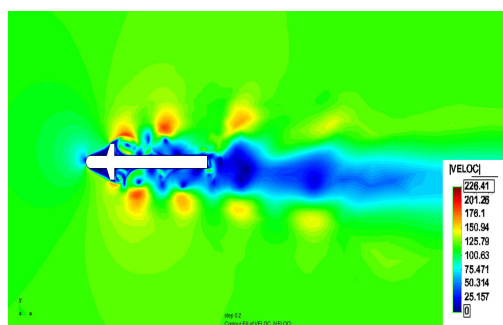
6.2.1 Симулација поља брзине, турбуленције као и притиска добијени LES-Смагоринским моделом за пројекцију пројектила у XZ равни за различите инстанце времена



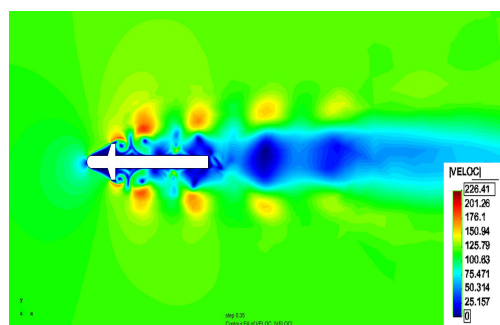
Слика 6.15: Поље брзина око пројектила у XZ равни после 0.02 секунде добијени LES - Смагоринским моделом



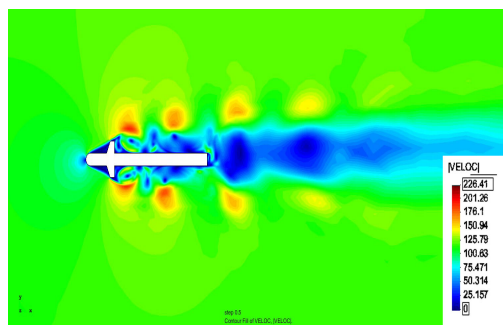
Слика 6.16: Поље брзина око пројектила у XZ равни после 0.09 секунде добијени LES - Смагоринским моделом



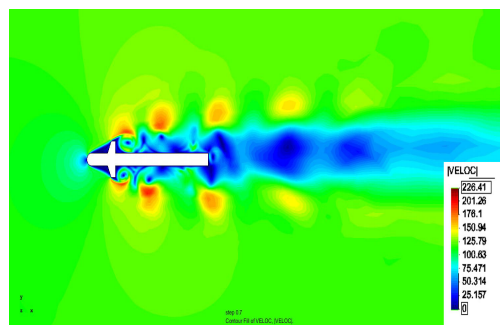
Слика 6.17: Поље брзина око пројектила у XZ равни после 0.2 секунде добијени LES - Смагоринским моделом



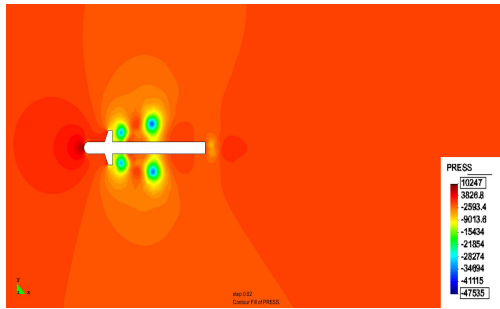
Слика 6.18: Поље брзина око пројектила у XZ равни после 0.35 секунде добијени LES - Смагоринским моделом



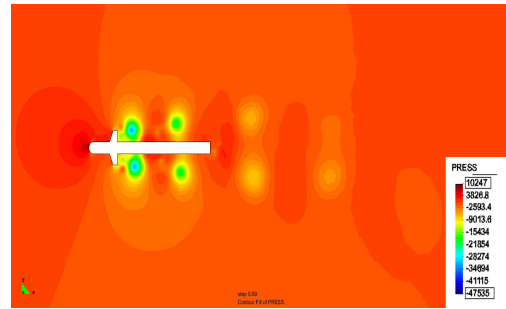
Слика 6.19: Поље брзина око пројектила у XZ равни после 0,5 секунде добијени LES - Смагоринским моделом



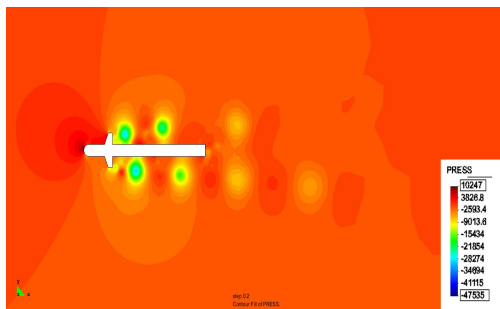
Слика 6.20: Поље брзина око пројектила у XZ равни после 0.7 секунде добијени LES - Смагоринским моделом



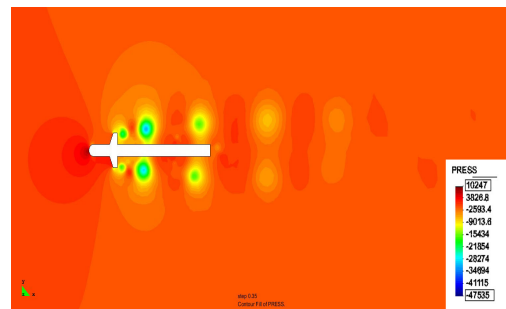
Слика 6.21: Поље притиска око пројектила у XZ равни после 0.02 секунде добијени LES - Смагоринским моделом



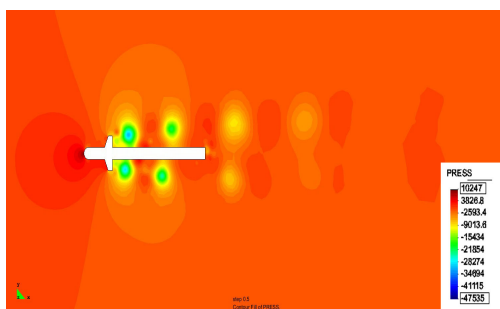
Слика 6.22: Поље притиска око пројектила у XZ равни после 0.09 секунде добијени LES - Смагоринским моделом



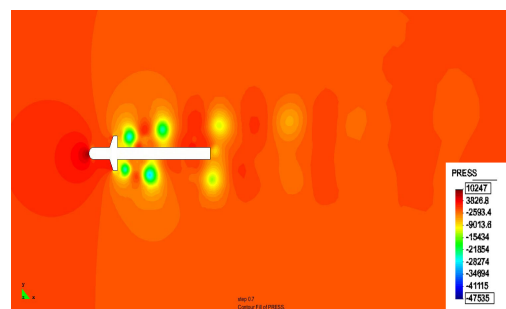
Слика 6.23: Поље притиска око пројектила у XZ равни после 0.2 секунде добијени LES - Смагоринским моделом



Слика 6.24: Поље притиска око пројектила у XZ равни после 0.35 секунде добијени LES - Смагоринским моделом

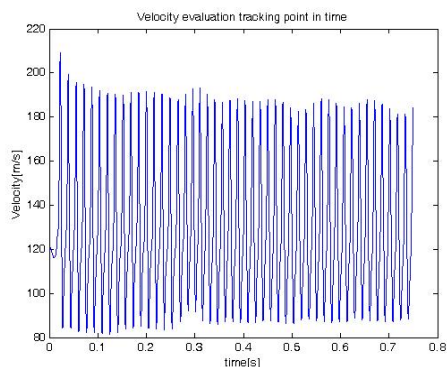


Слика 6.25: Поље притиска око пројектила у XZ равни после 0.5 секунде добијени LES - Смагоринским моделом

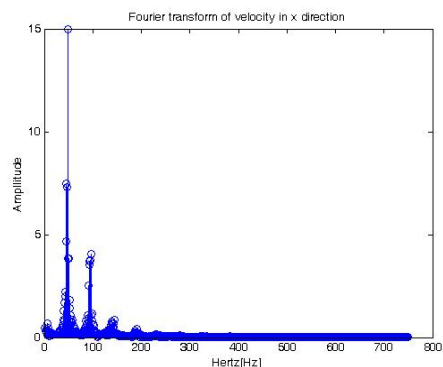


Слика 6.26: Поље притиска око пројектила у XZ равни после 0.7 секунде добијени LES - Смагоринским моделом

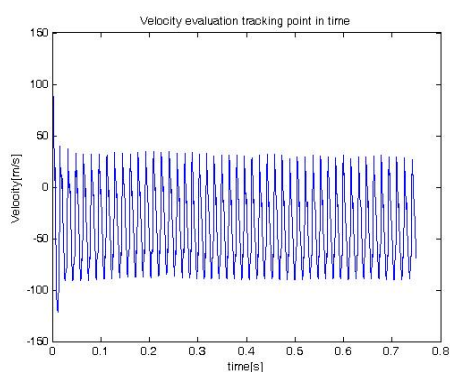
6.2.2 Временско праћење брзине у одређеним тачкама прорачунксе мреже добијени LES-Смагоринским моделом за пројекцију пројектила у XZ равни



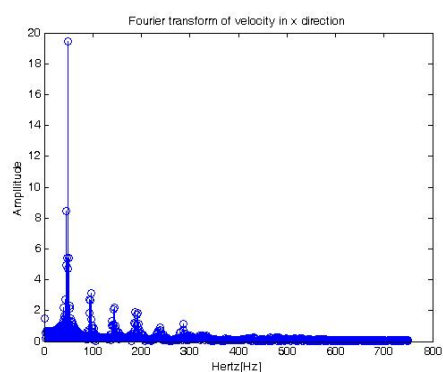
Слика 6.27: Временско праћење пројекције брзине на X осу у чвору 21100) прорачунске мреже



Слика 6.28: Спектар фреквенци за пројекцију брзине на X осу у чвору 21100 добијени ФФТ-ом

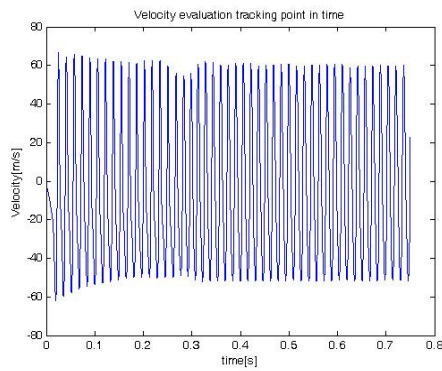


Слика 6.29: Временско праћење пројекције брзине на X осу у чвору 14309 прорачунске мреже

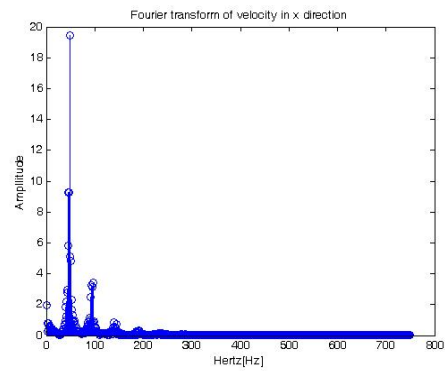


Слика 6.30: Спектар фреквенци за пројекцију брзине на X осу у чвору 14309 добијени ФФТ-ом

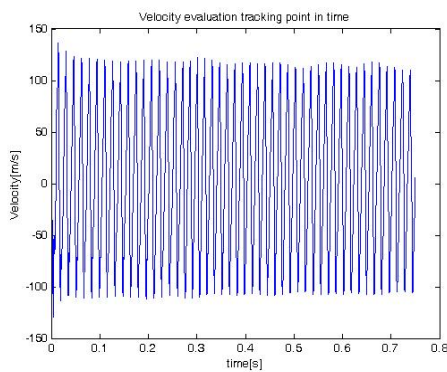
Прво што се може приметити на сликама 6.15-6.20 које репрезентују различите инстанце поља брзине око пројектила пројектованог на XZ раван је да развијено турбулентно струјање после крмила имају одређени патерн који се спроводи до краја симулације. Исти утисак је и на сликама 6.21-6.25 за поље притиска. Упечатљиви су на симулацији велики вртлози као и њихово развијање у простору и интеракција са осталим великим вртлозима. Добија се утисак да је симулација дисипативна и да се моделирањем модела LES моделом Смагоринског изгубио флукувативни карактер брзине а посебно малих вртлога који нису ни значајно репродуковани. Овакав карактер је још очигледнији на сликама 6.26-6.34 где је приказана пројекција брзине на X и Y осу која су праћене у целокупном временском интервалу симулације



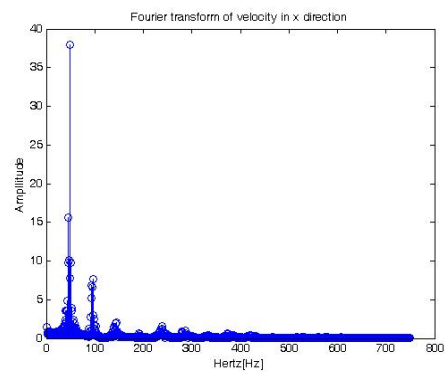
Слика 6.31: Временско праћење пројекције брзине на Y осу у чвору 21100 прорачунске мреже



Слика 6.32: Спектар фреквенци за пројекцију брзине на Y осу у чвору 14309 добијени ФФТ-ом



Слика 6.33: Временско праћење пројекције брзине на Y осу у чвору 14309 прорачунске мреже

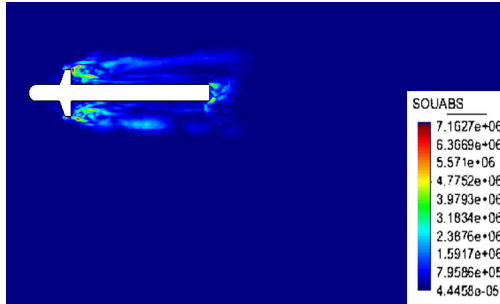


Слика 6.34: Спектар фреквенци за пројекцију брзине на Y осу у чвору 14309 добијени ФФТ-ом

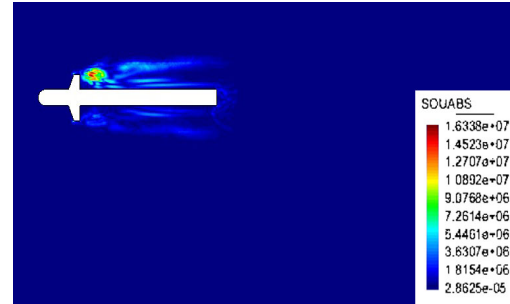
за тачке приказане на слици 6.8. Временско праћење брзине је приказано у тачки 21100 која се налази изнад крмила, док се друга тачка 14309 налази иза крмила при крају тела ракете. Јасно је са спектар фреквенци који се добије из временске функције брзине има само пар фреквенци које су доминантне и које репрезентују велике вредности.

6.2.3 Поље акустичних извора добијени LES-Смагоринским моделом за пројекцију пројектила у XZ равни

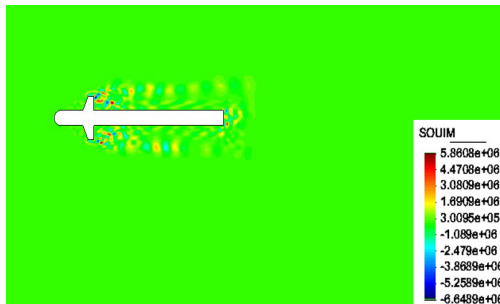
У овом одељку смо приказали акустичне изворе око пројектила где је приказано имагинарно, реално као и апсолутно решење. Као што је и претпостављено највећи интензитет акустичних извора је око крмила, где је и приказна највећа флукуација брзине. Јасно се види дистрибуција квадрипола и дипола. Интензитет се понаша као Диракова делта функција што објашњава велике вредности.



Слика 6.35: Поље акустичних извора дбијени LES-Смагоринским методом



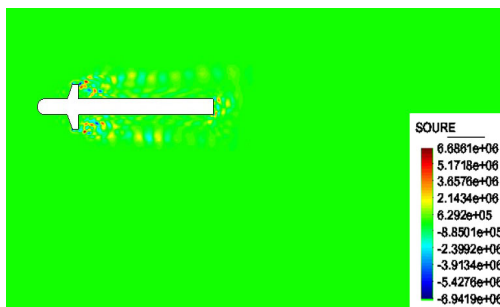
Слика 6.36: Поље акустичних извора дбијени LES-Смагоринским методом



Слика 6.37: Поље акустичних извора дбијени LES-Смагоринским методом



Слика 6.38: Поље акустичних извора дбијени LES-Смагоринским методом

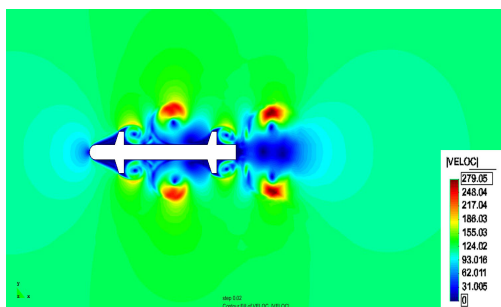


Слика 6.39: Поље акустичних извора дбијени LES-Смагоринским методом

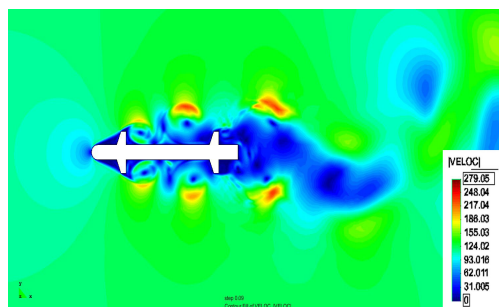


Слика 6.40: Поље акустичних извора дбијени LES-Смагоринским методом

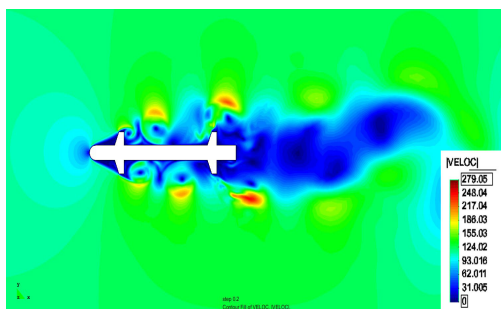
6.2.4 Симулација поља брзине, турбуленције као и притиска добијени LES-Смагоринским моделом за пројекцију пројектила на XY раван



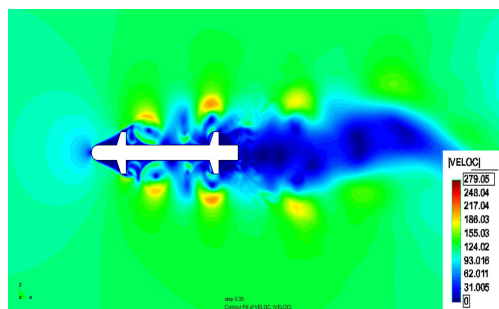
Слика 6.41: Поље брзина око пројектила у XY равни после 0.02 секунде добијени LES - Смагоринским моделом



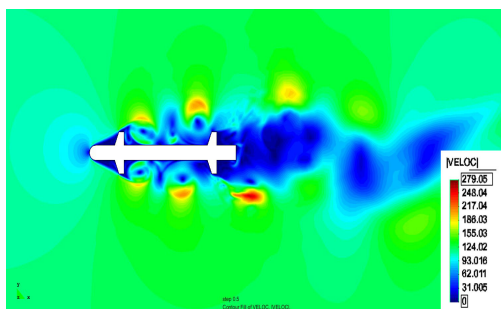
Слика 6.42: Поље брзина око пројектила у XY равни после 0.09 секунде добијени LES - Смагоринским моделом



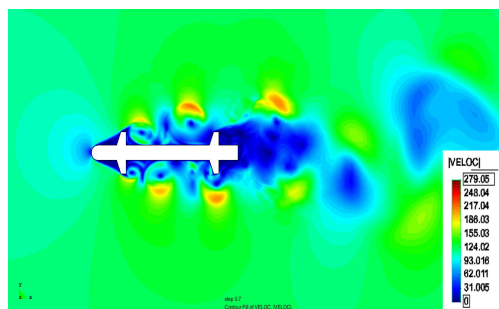
Слика 6.43: Поље брзина око пројектила у XY равни после 0.2 секунде добијени LES - Смагоринским моделом



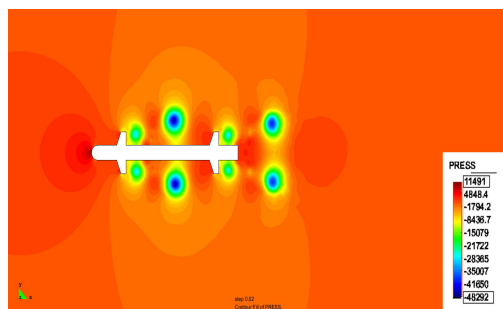
Слика 6.44: Поље брзина око пројектила у XY равни после 0.35 секунде добијени LES - Смагоринским моделом



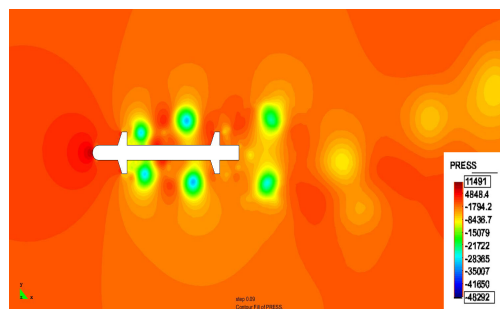
Слика 6.45: Поље брзина око пројектила у XY равни после 0.5 секунде добијени LES - Смагоринским моделом



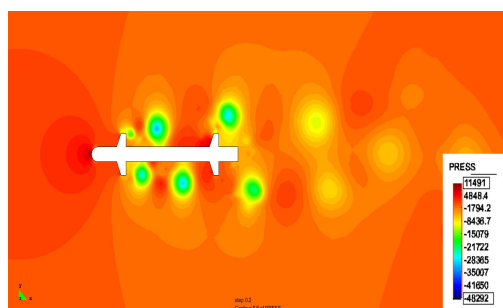
Слика 6.46: Поље брзина око пројектила у XY равни после 0.7 секунде добијени LES - Смагоринским моделом



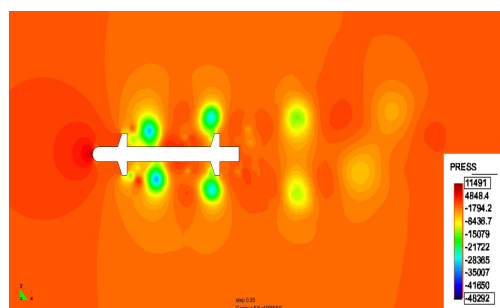
Слика 6.47: Поље притиска око пројектила у XY равни после 0.02 секунде добијени LES - Смагоринским моделом



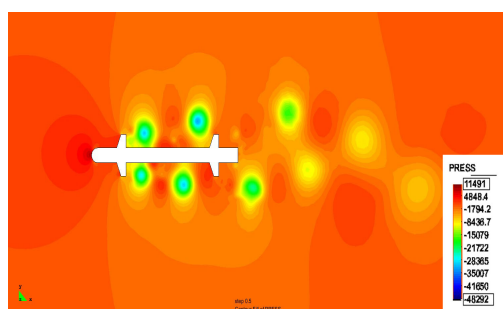
Слика 6.48: Поље притиска око пројектила у XY равни после 0.09 секунде добијени LES - Смагоринским моделом



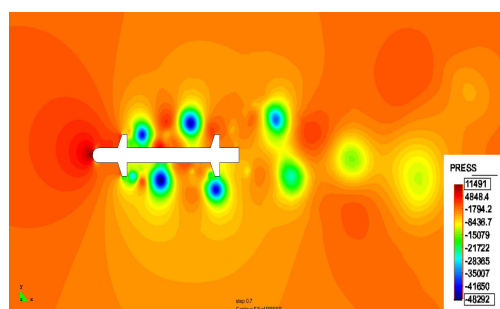
Слика 6.49: Поље притиска око пројектила у XY равни после 0.2 секунде добијени LES - Смагоринским моделом



Слика 6.50: Поље притиска око пројектила у XY равни после 0.35 секунде добијени LES - Смагоринским моделом

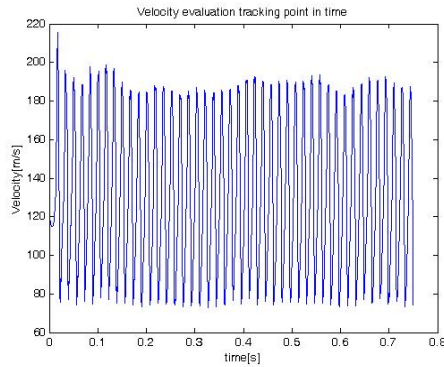


Слика 6.51: Поље притиска око пројектила у XY равни после 0.5 секунде добијени LES - Смагоринским моделом

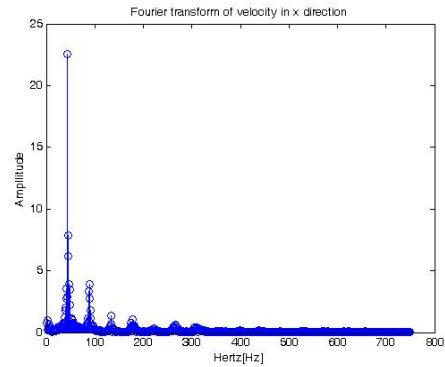


Слика 6.52: Поље притиска око пројектила у XY равни после 0.7 секунде добијени LES - Смагоринским моделом

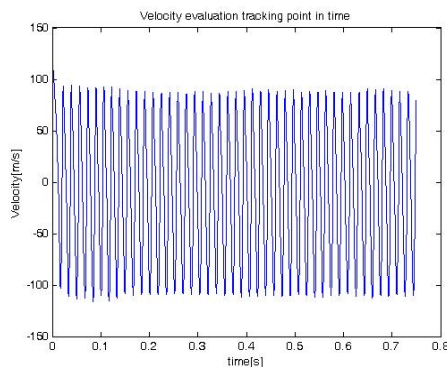
6.2.5 Временско праћење брзине у одређеним тачкама прорачунксе мреже добијени LES-Смагоринским моделом за пројекцију пројектила у ХУ равни



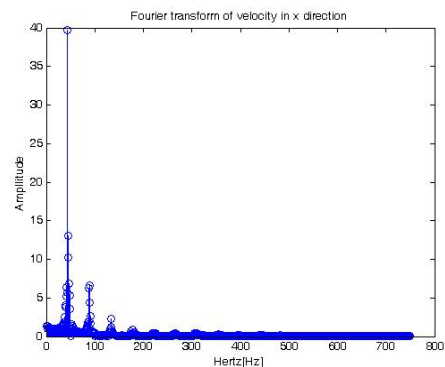
Слика 6.53: Временско праћење пројекције брзине на Х осу у чвору 41567 прорачунске мреже



Слика 6.54: Спектар фреквенци за пројекцију брзине на Х осу добијени ФФТ-ом за чвор 41567

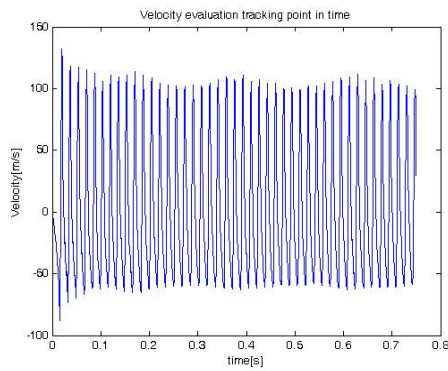


Слика 6.55: Временско праћење пројекције брзине на Х осу у чвору 21246 прорачунске мреже

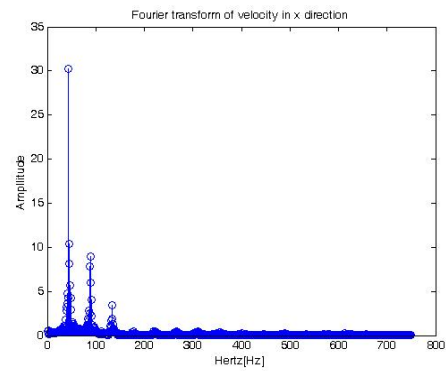


Слика 6.56: Спектар фреквенци за пројекцију брзине на Х осу добијени ФФТ-ом у чвору 21246

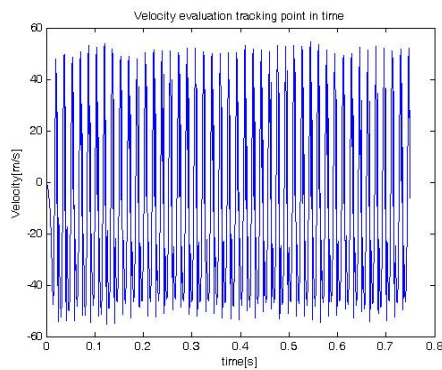
Посматрајући поље притиска и брзине показан на сликама 6.41-6.52 поново се може препознати устаљени патерн понашања турбулентног струјања, где је сад мало хаотичнији због интеракције предњег крмила и задњег стабилизатора. Устаљени патерн је још више препознатљивији на сликама 6.53-6.58. Јасно се види устаљено понашање великих вртлога у целом временском оспегу што резултира малим бојем фреквенци у фреквентном домену добијени брзом Фуријеовом трансформацијом временског сигнала. Чворови који су плотовани се налазе иза крмила и то је тачка 41567, а други чвор је иза стабилизатора и то је чвор 21246. Јасно је да је метода на неки начин дисипативна или превише вискозна филтрирајући само велике вртлоге. Велики вртлози су успешно презентовани као и њихово развијање у домену. Утицај



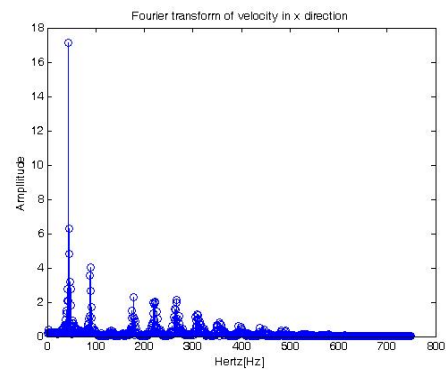
Слика 6.57: Временско праћење пројекције брзине на Y осу у чвору 41567 прорачунске мреже



Слика 6.58: Спектар фреквенци за пројекцију брзине на Y осу добијени ФФТ-ом у чвору 41567



Слика 6.59: Временско праћење пројекције брзине на Y осу у чвору 21246 прорачунске мреже

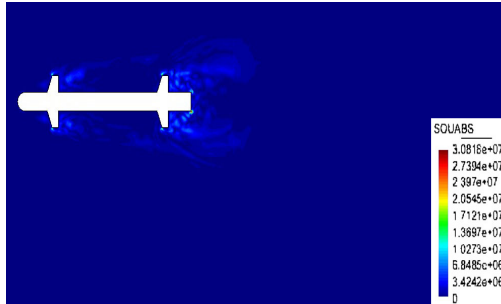


Слика 6.60: Спектар фреквенци за пројекцију брзине на Y осу добијени ФФТ-ом у чвору 21246

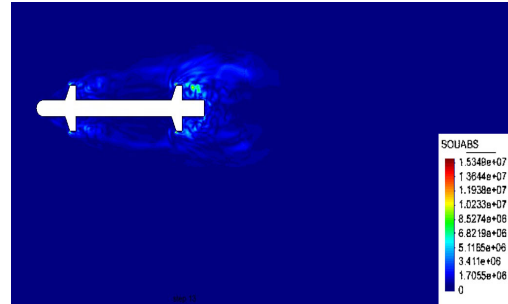
малих вртлога није успешно ухваћен што је и више него очигледно или је ухваћен само мали део.

6.2.6 Поље акустичних извора добијени LES-Смагоринским моделом за пројекцију пројектила у XY равни

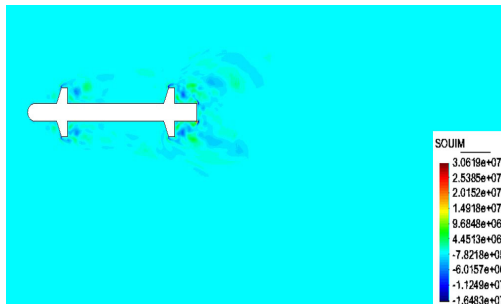
Презентовали смо на сликама 6.61-6.66 апсолутно, имагинарно и реално решење за акустичне изворе. Јасно се види да је највећа концентрација квадрипола и дипола после стабилизатора што је и нормално пошто у тој области долази до највеће интеракције вртлога генерисане од стране крмила и стабилизатора. Веома је приметно да су извори разливени, тј. да немају јасну дефиницију квадрипола и дипола. Исто тако је приметна разлика у интензитету полова. Полови који су једни поред других немају исти интензитет.



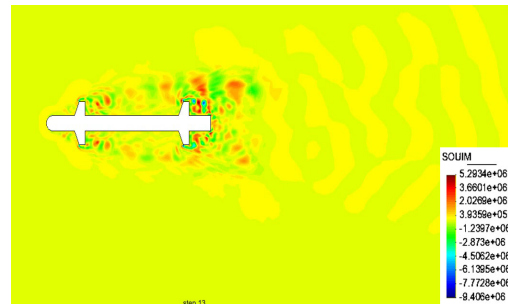
Слика 6.61: Поље акустичних извора добијени LES-Смагоринским методом-абсолютно решење



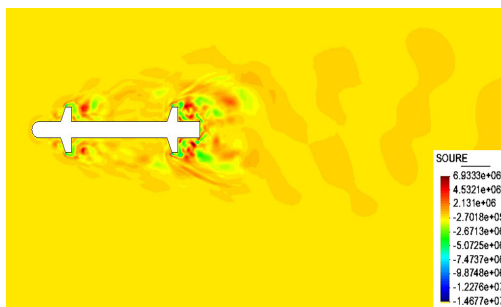
Слика 6.62: Поље акустичних извора добијени LES-Смагоринским методом-абсолютно решење



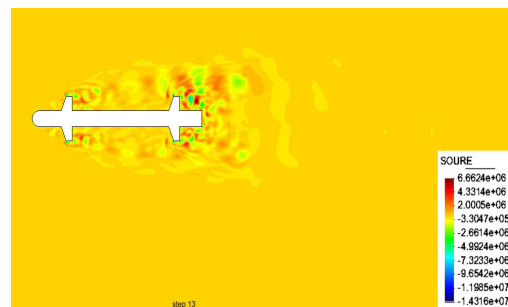
Слика 6.63: Поље акустичних извора добијени LES-Смагоринским методом-имагинарно решење



Слика 6.64: Поље акустичних извора добијени LES-Смагоринским методом-имагинарно решење

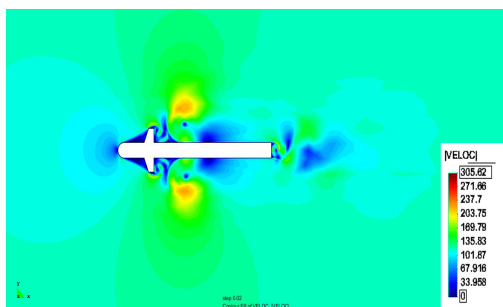


Слика 6.65: Поље акустичних извора добијени LES-Смагоринским методом-реално решење

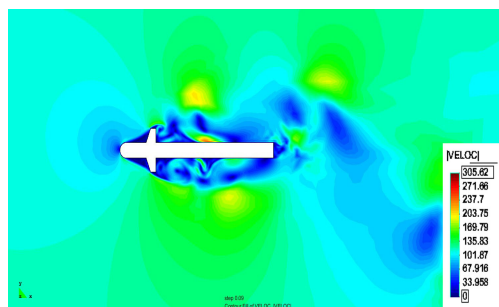


Слика 6.66: Поље акустичних извора добијени LES-Смагоринским методом-реално решење

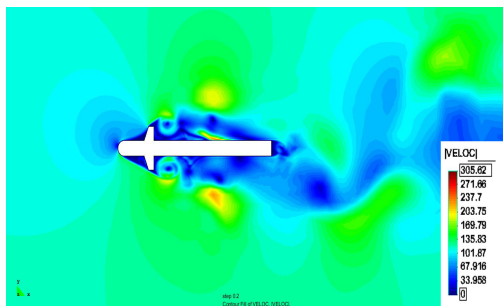
6.2.7 Симулација поља брзине, турбуленције и притиска добијени методом Ортогоналне SGS са динамичким праћењем малих величина за пројекцију пројектила у XZ равни



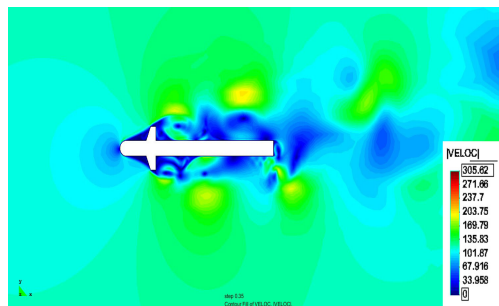
Слика 6.67: Поље брзина око пројектила у XZ равни после 0.02 секунде добијени Ортогоналном SGS методом са динамичким праћењем малих величина



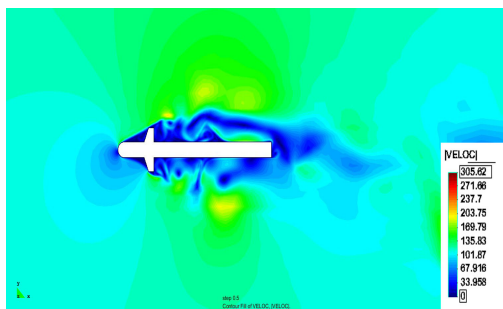
Слика 6.68: Поље брзина око пројектила у XZ равни после 0.09 секунде добијени Ортогоналном SGS методом са динамичким праћењем малих величина



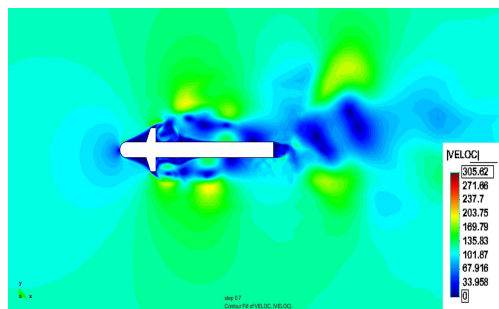
Слика 6.69: Поље брзина око пројектила у XZ равни после 0.2 секунде добијени Ортогоналном SGS методом са динамичким праћењем малих величина



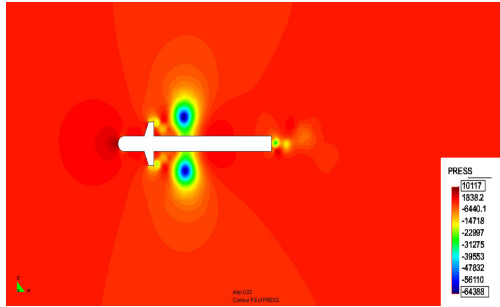
Слика 6.70: Поље брзина око пројектила у XZ равни после 0.35 секунде добијени Ортогоналном SGS методом са динамичким праћењем малих величина



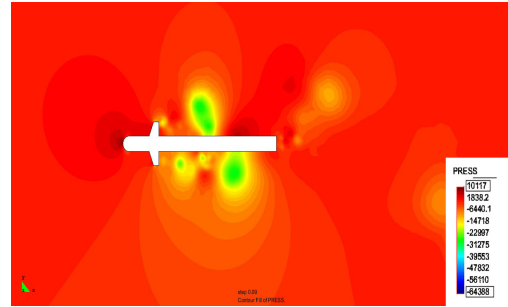
Слика 6.71: Поље брзина око пројектила у XZ равни после 0.5 секунде добијени Ортогоналном SGS методом са динамичким праћењем малих величина



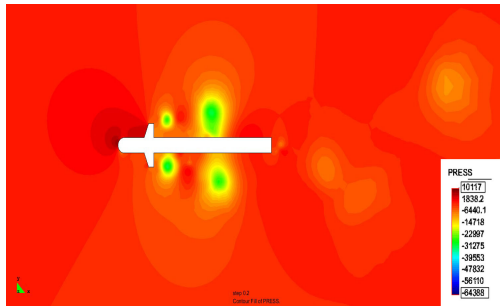
Слика 6.72: Поље брзина око пројектила у XZ равни после 0.7 секунде добијени Ортогоналном SGS методом са динамичким праћењем малих величина



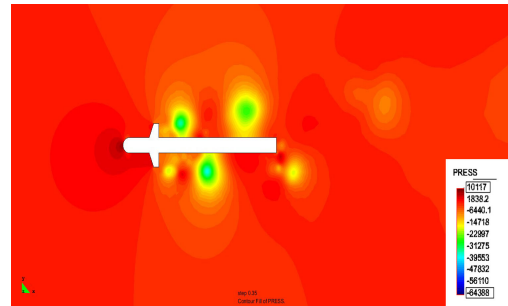
Слика 6.73: Поље притиска око пројектила у XZ равни после 0.02 секунде добијени Ортогоналним SGS моделом са динамичким праћењем малих величина



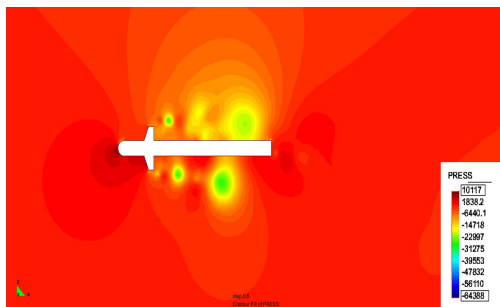
Слика 6.74: Поље притиска око пројектила у XZ равни после 0.09 секунде добијени Ортогоналним SGS моделом са динамичким праћењем малих величина



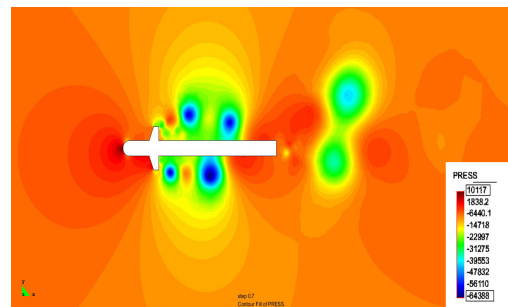
Слика 6.75: Поље притиска око пројектила у XZ равни после 0.2 секунде добијени Ортогоналним SGS моделом са динамичким праћењем малих величина



Слика 6.76: Поље притиска око пројектила у XZ равни после 0.35 секунде добијени Ортогоналним SGS моделом са динамичким праћењем малих величина

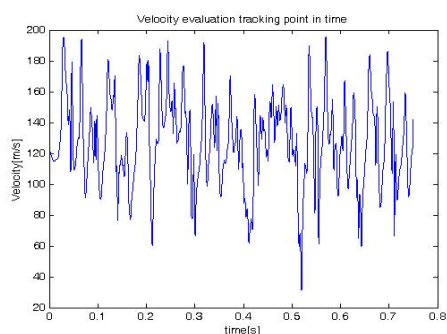


Слика 6.77: Поље притиска око пројектила у XZ равни после 0.5 секунде добијени Ортогоналним SGS моделом са динамичким праћењем малих величина

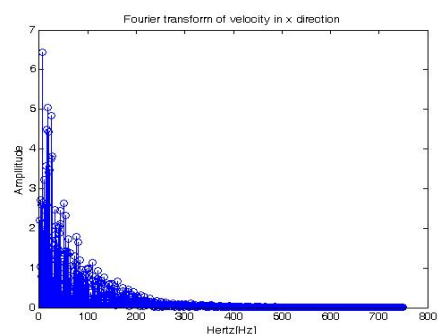


Слика 6.78: Поље притиска око пројектила у XZ равни после 0.7 секунде добијени Ортогоналним SGS моделом са динамичким праћењем малих величина

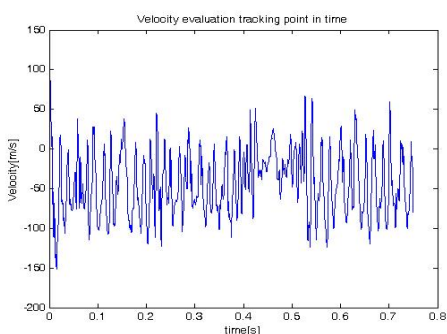
6.2.8 Временско праћење брзине у одређеним тачкама прорачунске мреже добијени методом Ортогонална SGS са динамичким праћењем малих величина за пројекцију пројектила у XZ равни



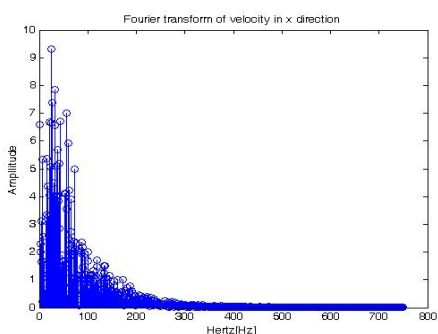
Слика 6.79: Временско праћење пројекције брзине на X осу у чвору 21100 прорачунске мреже



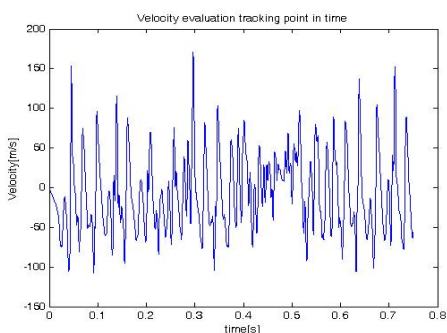
Слика 6.80: Спектар фреквенци за пројекцију брзине на X осу добијени ФФТ-ом у чвору 21100



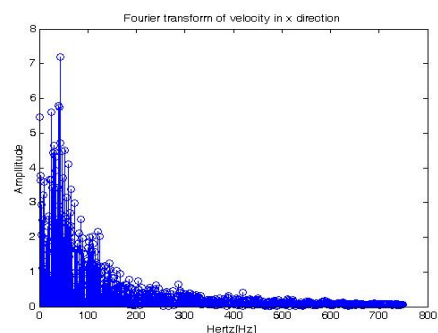
Слика 6.81: Временско праћење пројекције брзине на X осу у чвору 14309 прорачунске мреже



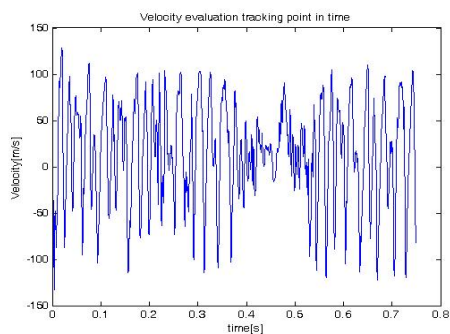
Слика 6.82: Спектар фреквенци за пројекцију брзине на X осу добијени ФФТ-ом у чвору 14309



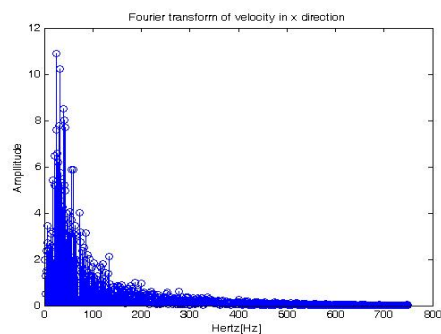
Слика 6.83: Временско праћење пројекције брзине на Y осу у чвору 21100 прорачунске мреже



Слика 6.84: Спектар фреквенци за пројекцију брзине на Y осу добијени ФФТ-ом у чвору 21100



Слика 6.85: Временско праћење пројекције брзине на Y осу у чвору 14309 прорачунске мреже

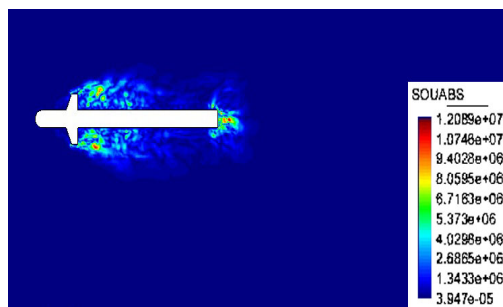


Слика 6.86: Спектар фреквенци за пројекцију брзине на Y осу добијени ФФТ-ом у чвору 14309

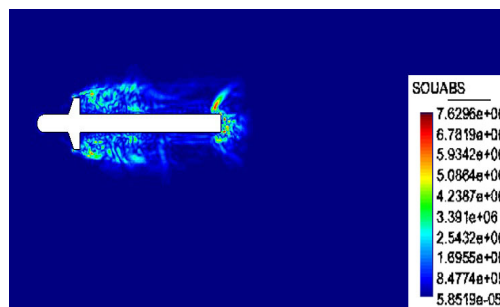
Као што смо рекли у уводу урађене су две симулације код којих је једина разлика моделирање турбуленције и физикалних појава које турбуленција доноси. Сходно томе јасно је на први поглед са слика поља брзине 6.67-6.72 и са слика поља притиска 6.73-6.78 да презентована ортогонална SGS метода са динамичким праћењем малих величина даје тотално развијено турбулентно струјање са образовањем и великих и малих вртлога са акцентом на веома флукутативно кретање у области развијене турбуленције. Овај тренд се наставља и на сликама временског праћења брзине у тачкама прорачунске мреже где су изабране тачке идентичне као и за моделирање LES методом. Са слика се види да је много већи број фреквенци добијен и да је спектар за временску функцију много богатији него што је случај за LES. Треба приметити да је поред хватања великих вртлога ухваћено и велики број малих вртлога који су одговорни за мале локалне флукутације.

6.2.9 Поље акустичних извора добијени методом Ортогонална SGS са динамичким праћењем малих величина за пројекцију пројектила у XZ равн

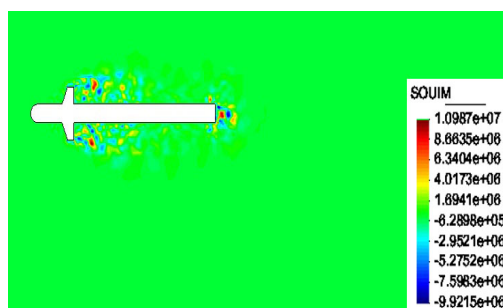
Добијање много више фреквенци на спектралном дијаграму се директно одразило и на акустичне изворе којих сад има много више и њихов интезитет је већи. Јасно се распознају квадриполи и диполи за реално и имагинарно решење као и дуални интезитет ирвора чији је интезитет приближних вредности. Појавили су се извори на местима на којима и не постоје у LES методи. Јасно је да боље презентовање турбуленције ће дати бољи алокацију и јачи интезитет акустичних извора.



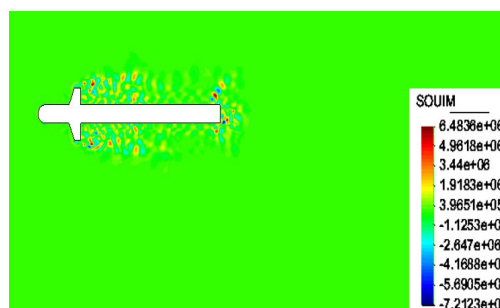
Слика 6.87: Поље акустичних извора добијени Ортогоналном SGS моделом са динамичким праћењем малих величина-абсолютно решење



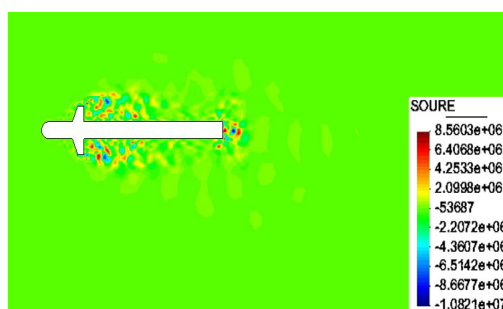
Слика 6.88: Поље акустичних извора добијени Ортогоналном SGS моделом са динамичким праћењем малих величина-абсолютно решење



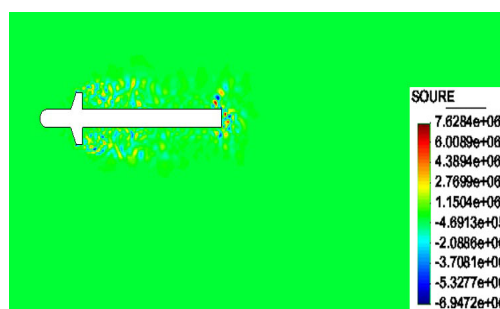
Слика 6.89: Поље акустичних извора добијени Ортогоналном SGS моделом са динамичким праћењем малих величина-имагинарно решење



Слика 6.90: Поље акустичних извора добијени Ортогоналном SGS моделом са динамичким праћењем малих величина-имагинарно решење

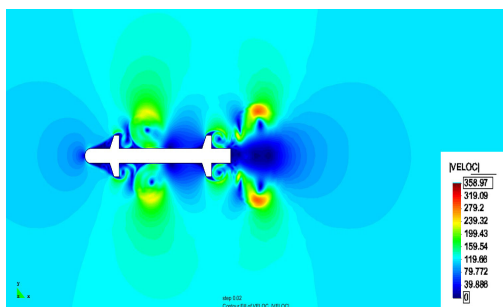


Слика 6.91: Поље акустичних извора добијени Ортогоналном SGS моделом са динамичким праћењем малих величина-реално решење

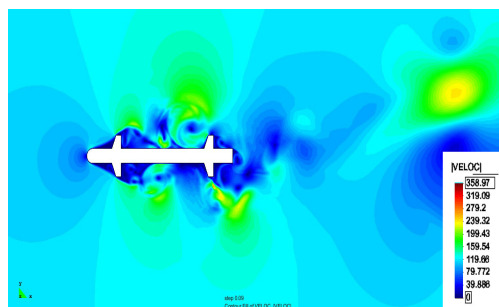


Слика 6.92: Поље акустичних извора добијени Ортогоналном SGS моделом са динамичким праћењем малих величина-реално решење

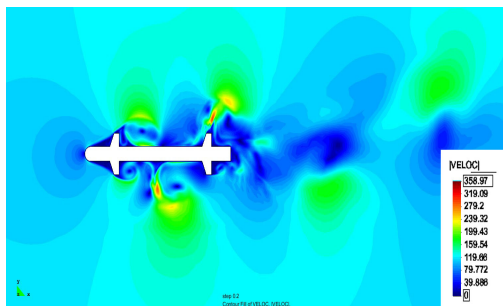
6.2.10 Симулација поља брзине, турбуленције и притиска добијени методом Ортогонална SGS са динамичким праћењем малих величина за пројекцију пројектила на XY раван



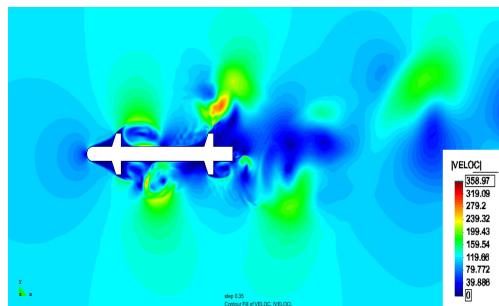
Слика 6.93: Поље брзина око пројектила у XY равни после 0.02 секунде добијени Ортогоналним SGS моделом са динамичким праћењем малих величина



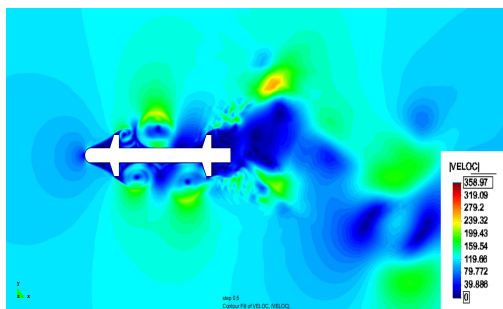
Слика 6.94: Поље брзина око пројектила у XY равни после 0.09 секунде добијени Ортогоналним SGS моделом са динамичким праћењем малих величина



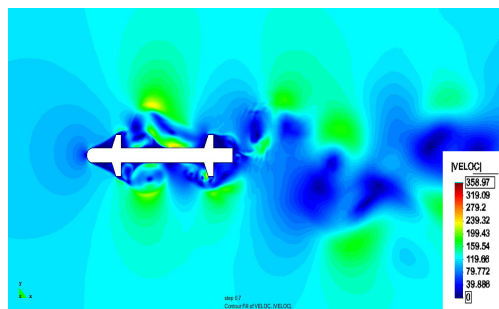
Слика 6.95: Поље брзина око пројектила у XY равни после 0.2 секунде добијени Ортогоналним SGS моделом са динамичким праћењем малих величина



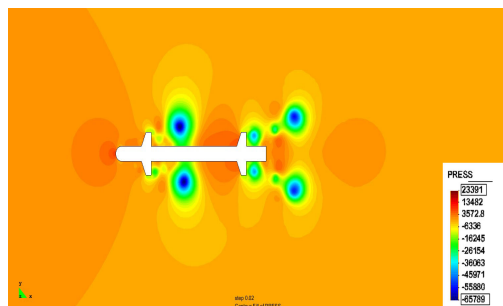
Слика 6.96: Поље брзина око пројектила у XY равни после 0.35 секунде добијени Ортогоналним SGS моделом са динамичким праћењем малих величина



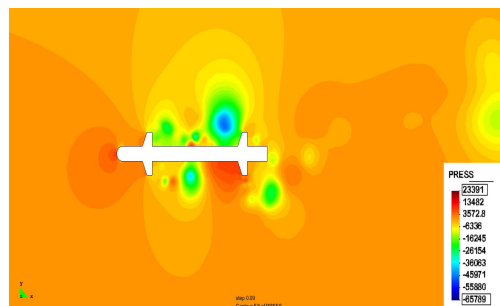
Слика 6.97: Поље брзина око пројектила у XY равни после 0.5 секунде добијени Ортогоналним SGS моделом са динамичким праћењем малих величина



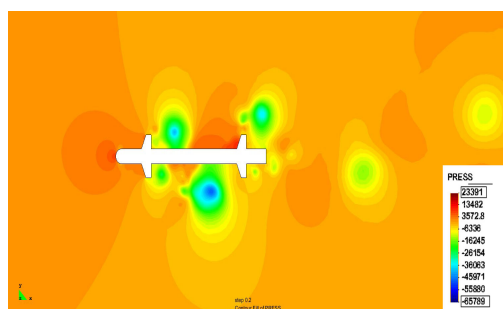
Слика 6.98: Поље брзина око пројектила у XY равни после 0.7 секунде добијени Ортогоналним SGS моделом са динамичким праћењем малих величина



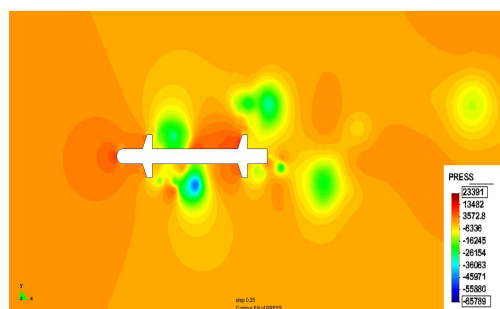
Слика 6.99: Поље притиска око пројектила у XY равни после 0.02 секунде добијени Ортогоналним SGS моделом са динамичким праћењем малих величина



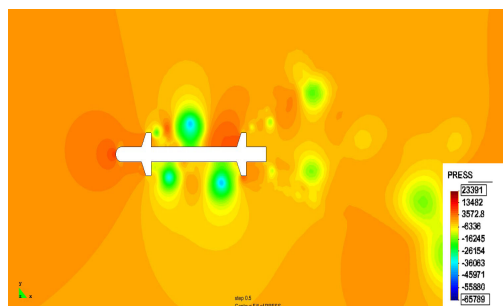
Слика 6.100: Поље притиска око пројектила у XY равни после 0.09 секунде добијени Ортогоналним SGS моделом са динамичким праћењем малих величина



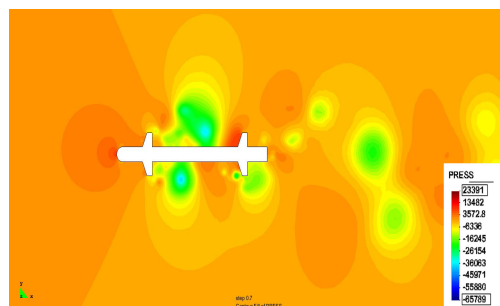
Слика 6.101: Поље притиска око пројектила у XY равни после 0.2 секунде добијени Ортогоналним SGS моделом са динамичким праћењем малих величина



Слика 6.102: Поље притиска око пројектила у XY равни после 0.35 секунде добијени Ортогоналним SGS моделом са динамичким праћењем малих величина

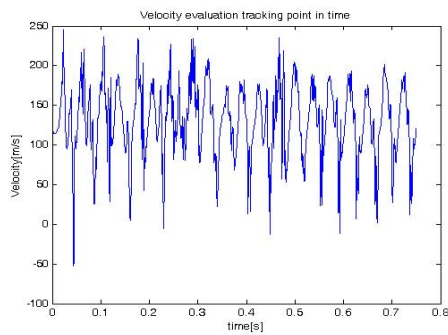


Слика 6.103: Поље притиска око пројектила у XY равни после 0.5 секунде добијени Ортогоналним SGS моделом са динамичким праћењем малих величина

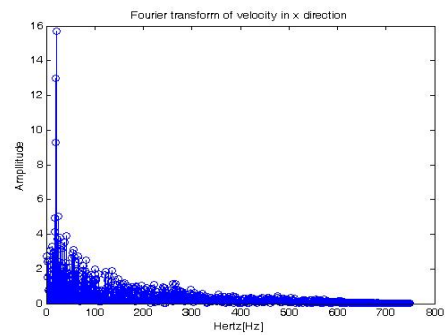


Слика 6.104: Поље притиска око пројектила у XY равни после 0.7 секунде добијени Ортогоналним SGS моделом са динамичким праћењем малих величина

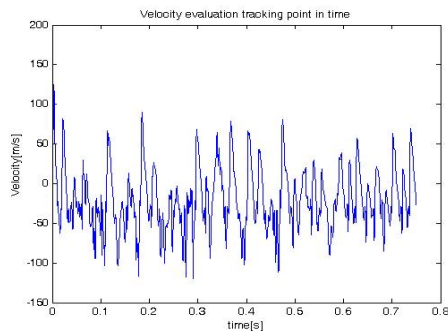
6.2.11 Временско праћење брзине у одређеним тачкама прорачунксе мреже добијени методом Ортогонална SGS са динамичким праћењем малих величина за пројекцију пројектила на ХУ раван



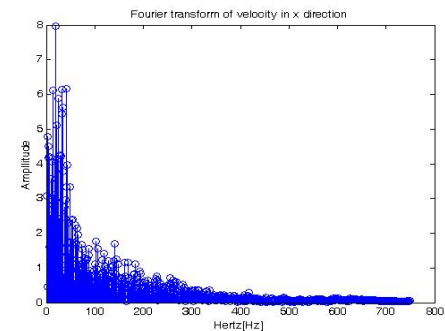
Слика 6.105: Временско праћење пројекције брзине на Х осу у чвору 41567 прорачунске мреже



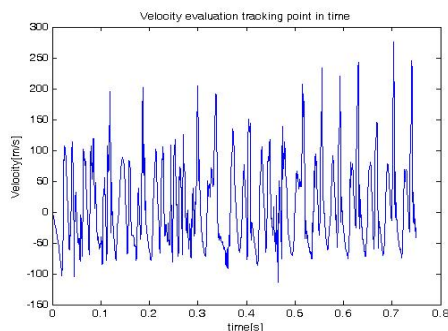
Слика 6.106: Спектар фреквенци за пројекцију брзине на Х осу добијени ФФТ-ом у чвору 41567



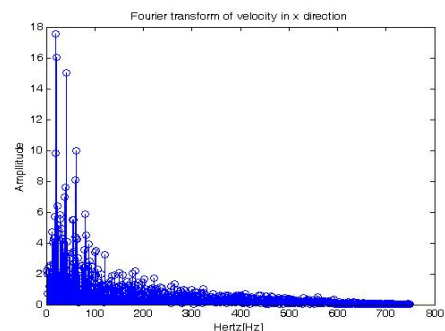
Слика 6.107: Временско праћење пројекције брзине на Х осу у чвору 21246 прорачунске мреже



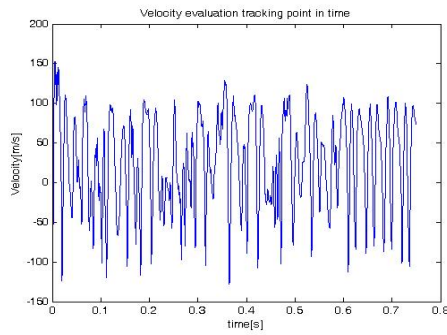
Слика 6.108: Спектар фреквенци за пројекцију брзине на Х осу добијени ФФТ-ом у чвору 21246



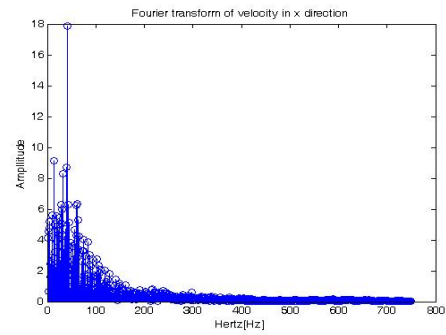
Слика 6.109: Временско праћење пројекције брзине на У осу у чвору 41567 прорачунске мреже



Слика 6.110: Спектар фреквенци за пројекцију брзине на У осу добијени ФФТ-ом у чвору 41567



Слика 6.111: Временско праћење пројекције брзине на Y осу у чвору 21246 прорачунске мреже

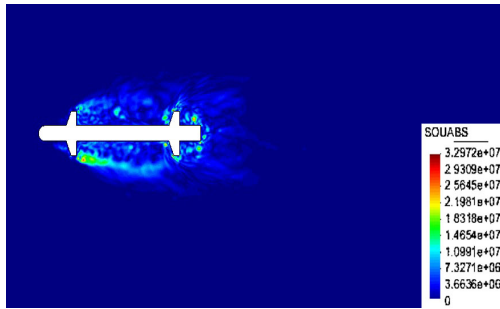


Слика 6.112: Спектар фреквенци за пројекцију брзине на Y осу добијени ФФТ-ом у чвору 21246

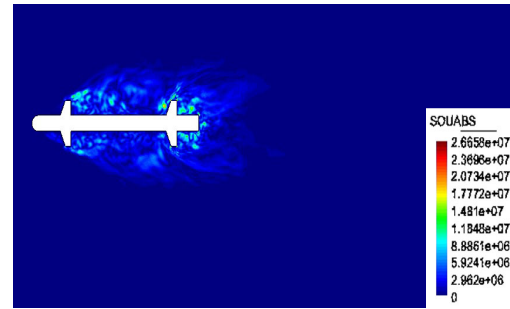
Као и претходном примеру и овде додатна комплексност геометрије је изазвала још веће флукуације поља брзина и притска које се јасно виде на сликама 6.93-6.94. Овај тренд се још боље види на спектралним дијаграмима који су извучени из временског праћења брзине у одређеним чворовима прорачунске мреже. Ортогоналном SGS методом смо успели да репродукујемо велики број фреквенци унутар временске функције што је карактеристика развијеног турбулентног струјања за Рејнолдсове бројеве датог у проблему. Самим тим овим чисто нумеричким приступом смо показали да развијено турбулентно струјање може ефектно да се ухвати за геометрије које уопште нису једноставне.

6.2.12 Поље акустичних извора добијени методом Ортогонална SGS са динамичким праћењем малих величина за пројекцију пројектила на XY раван

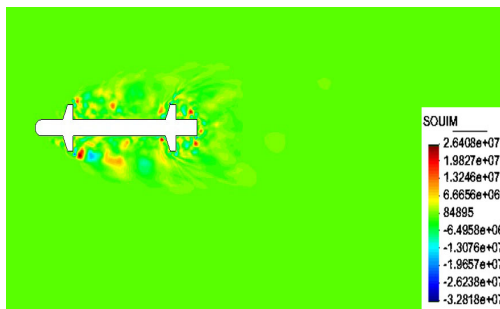
Као и у претходном примеру и овде акустични извори се налазе чак и тамо где их нисмо добили LES методологијом. Много већи број квадрипола и дипола је присутан са већим интензитетом што може довести само да јачих акустичних таласа касније у акустичној симулацији. Мали вртлози и њихова интеракција са великим дала је допринос великом броју акустичних извора. На крају је спроведен а акустична симулација за оба случаја акустичних извора тј. акустичних извора добијени LES и SGS методом где се види да је интензитет таласа који пропагира у прорачунском домену доста мањи за LES модел него за SGS модел турбуленције. Имагинарна и реална решења Хелмхолцове једначине за $k_0 = 0.5$ су презентована на сликама 6.119-6.122.



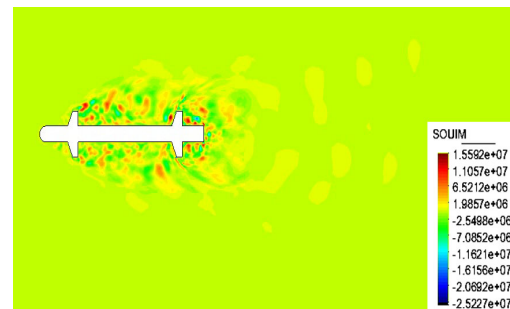
Слика 6.113: Поље акустичних извора дбијени Ортогоналном SGS моделом са динамичким праћењем малих величина



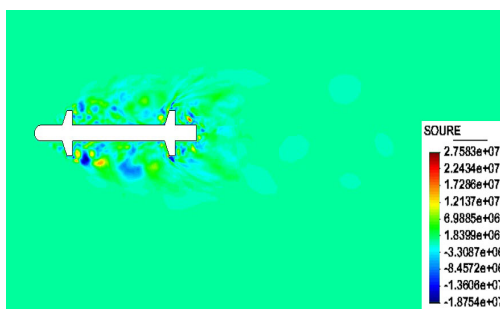
Слика 6.114: Поље акустичних извора дбијени Ортогоналном SGS моделом са динамичким праћењем малих величина



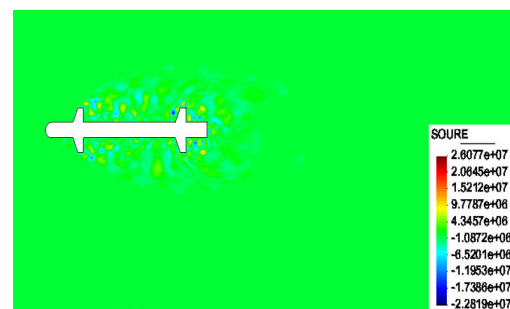
Слика 6.115: Поље акустичних извора дбијени Ортогоналном SGS моделом са динамичким праћењем малих величина



Слика 6.116: Поље акустичних извора дбијени Ортогоналном SGS моделом са динамичким праћењем малих величина

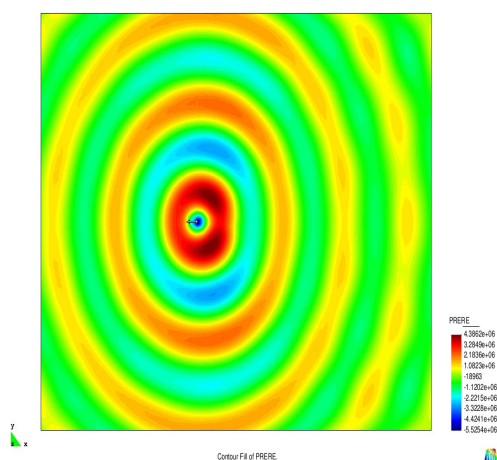


Слика 6.117: Поље акустичних извора дбијени Ортогоналном SGS моделом са динамичким праћењем малих величина

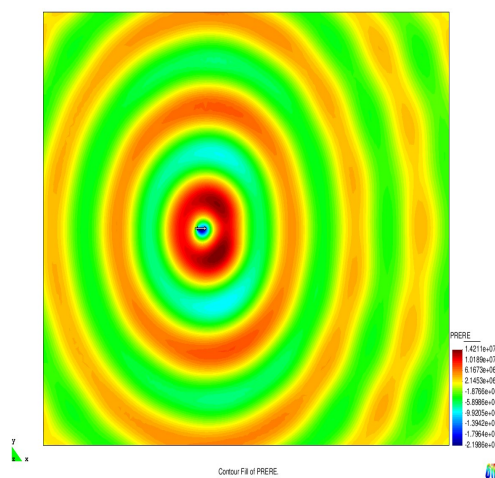


Слика 6.118: Поље акустичних извора дбијени Ортогоналном SGS моделом са динамичким праћењем малих величина

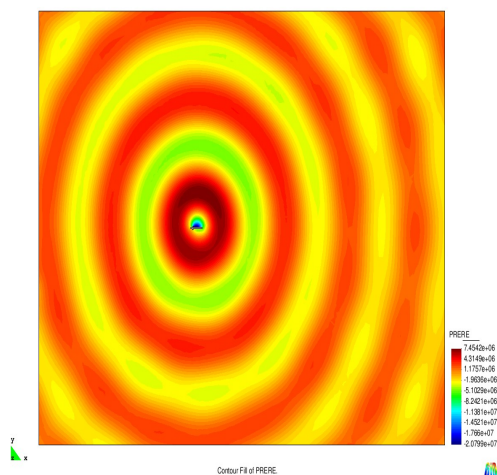
6.2.13 Акустична симулација са акустичним изворима добијени LES-Смагорински методом и изворима добијеним Ортогоналном SGS методом са динамичким праћењем малих величина



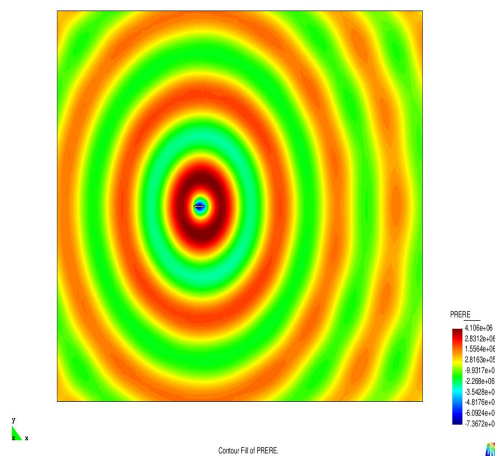
Слика 6.119: Реално решење нехомогене Хелмхолцове јендачине за $k_0 = 0.5$ за акустичне изворе добијени LES-Смагорисни методом



Слика 6.120: Реално решење нехомогене Хелмхолцове јендачине за $k_0 = 0.5$ за акустичне изворе добијени Ортогоналном SGS методом са динамичким праћењем малих величина



Слика 6.121: Реално решење нехомогене Хелмхолцове јендачине за $k_0 = 0.5$ за акустичне изворе добијени LES-Смагорисни методом



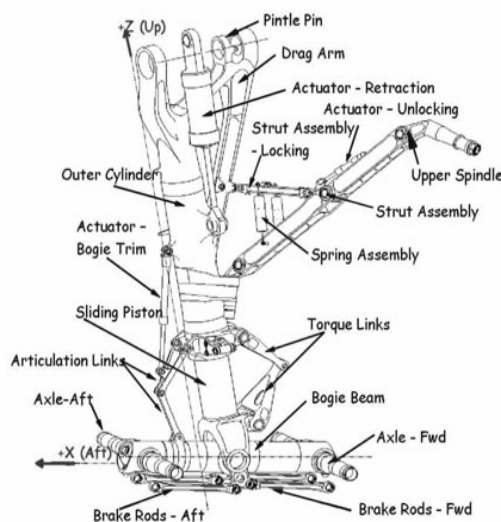
Слика 6.122: Реално решење нехомогене Хелмхолцове јендачине за $k_0 = 0.5$ за акустичне изворе добијени Ортогоналном SGS методом са динамичким праћењем малих величина

6.3 Аероакустична симулација стајног трапа приликом слетања и полетања

За велике комерцијалне авионе стајни трап представља доминантни извор буке која долази од конструкције авиона. Бука се ствара у области локално одвајања струјања и сударања вртлога са многобројним компонентама стајног трапа. Изглед стајног трапа је представљен на слици 6.123 и 6.124.



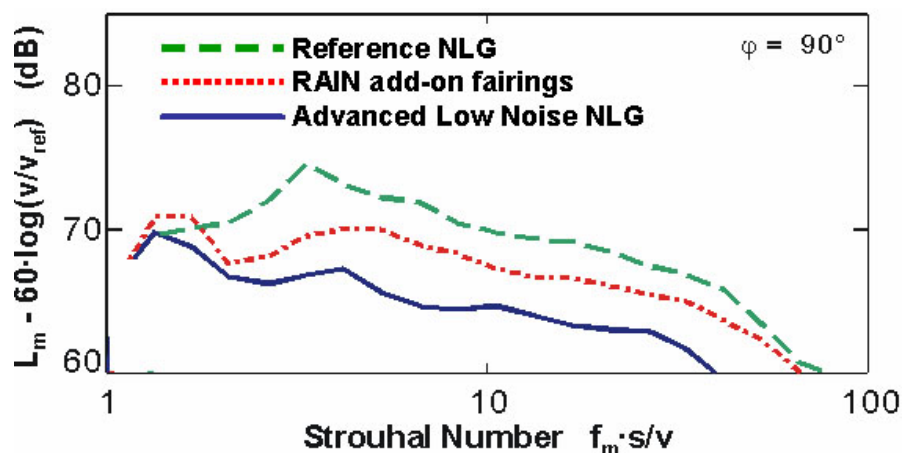
Слика 6.123: Изглед стајног трапа



Слика 6.124: Шематски приказ стајног трапа са компонентама [Valiant извештај]

Тестови у аеротунелу су искришћени да се створи база података карактеристике стварања буке на стајном трапу. Фаринзи за редукуцију буке су направљени и стављени на авион где је истраживан њихов потенцијал редуковања буке. Истраживање је показало да се добије и до 2 децибела редукуције.

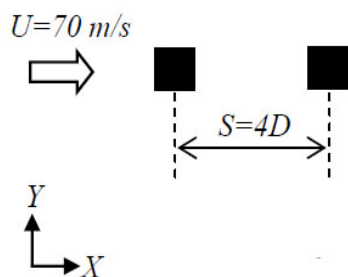
У програму SILENCER, још детаљнији приступ је коришћен. Да би направили оперативни стајни трап направљена је студија развоја "тихог" стајног трапа који је од почетка узимао у обзир аероакустичне рестрикције. RANS прорачун је извршен и евалуација могућности прорачунске механике флуида да изврши предикцију аеродинамичке буке са компарацијом на експерименталне податке из аеротунела као и са полумпиријским моделима. Урађени дизајн је донео редукуцију буке за 4 децибела. На слици 6.125 је представљена компарација резултата за бездимензионо 1/3 октаве простирање звука.



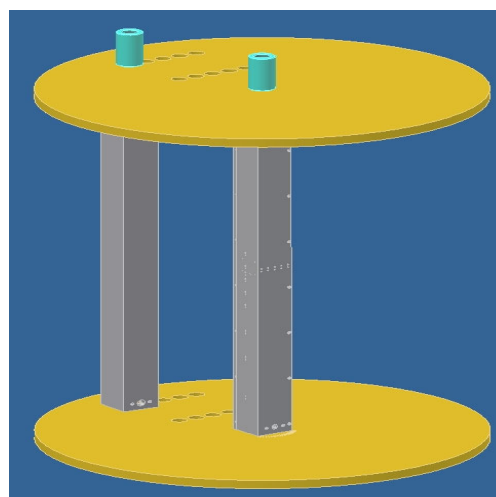
Слика 6.125: Редукција буке у пројекту SILENCER [VALIANT-извештај]

У TIMPMAN програму који је стартовао 2006 године, иновативна контрола струјања је спроведена за редуковање буке на стајном трапу. Једна од метода је PLAZMA метода чији је циљ да се редукује нестационарно одвајање струјања око компоненти стајног трапа. Сви програми овог типа су се ослањали на експерименте спроведене у аеро тунелу који су принципијално веома скупи. Треба напоменути да се ниједан програм до појаве VALIANT-а [164], [165] није бавио побољшањем нумеричких техника за предикцију буке коју генерише стајни трап.

Овде ћемо се позабавити проблемом који је био презентован у оквиру пројекта VALIANT. Сваки од института је имао исти проблем шематски приказан на слици 6.126 и 6.127.

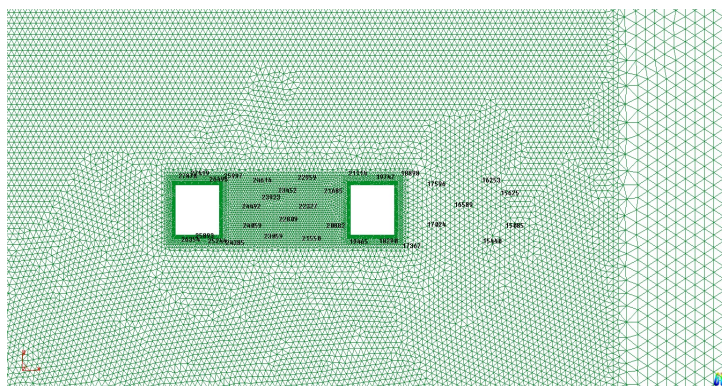


Слика 6.126: Шематски приказ проблема

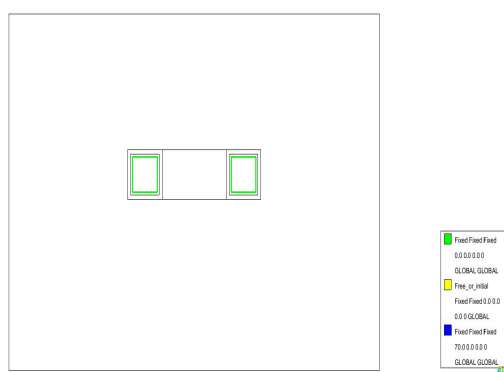


Слика 6.127: 3Д модел два квадратна профила

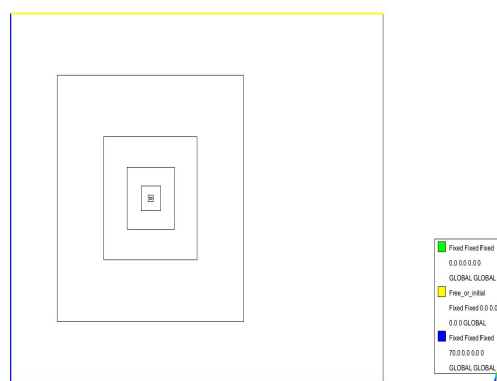
Идеја овог задатка је била да се за једноставну геометрију која може да се апроксимира са две димензије тј. да се проблем замисли као два бесконачно дугачка профила која су убачена у струјање брзином од 70 m/s што је брзина при слетању авиона. Требало је показати на овом простом задатку све предности и мане презентованих методологија. Сходно томе као и у претходном примеру за ракету и овде је направљен прорачунски домен димензија 80m × 60m. Прорачунски домен је приказан на слици 6.132 као прорачунска мрежа на слици 6.131. Приказ чворова означених за временско праћење поља брзине приказна је на слици 6.128. Гранични услови усвојени су као у претходном примеру где је на границама профила преписани Дирихлеови гранични услови да је брзина једнака нули, што је приказано на слици 6.129, док су гранични услови са леве стране домена преписани као да се стајни трап креће брзином од 70 m/s што је репрезентовано са плавом линијом на слици 6.130. На осталим деловима граница су преписани Нојманови гранични услови да не би дошло до проблема са вртлозима на граници.



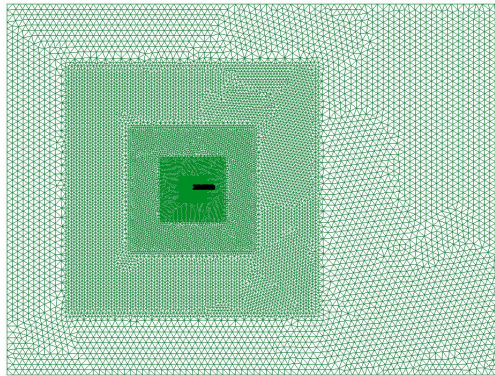
Слика 6.128: Прорачунска мрежа са означеним чворовима прорачунске мреже за временско праћење вектора брзине



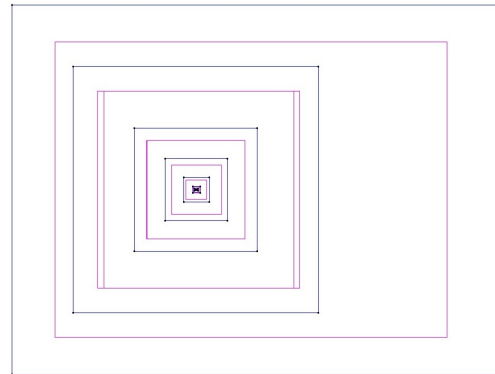
Слика 6.129: Гранични услов да је брзина једнака нули на границама профила



Слика 6.130: Гранични услов за брзину на ободима прорачунског домена



Слика 6.131: Домен дискретизован са линеарним троугластим елементима

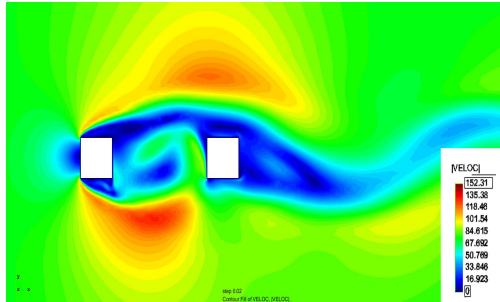


Слика 6.132: Прорачунски домен

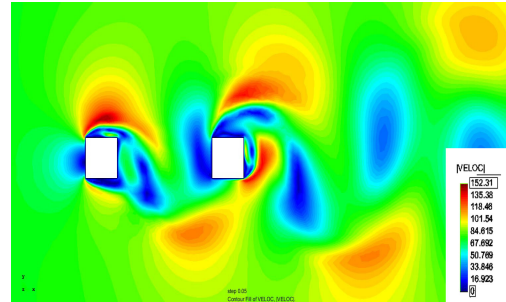
ТАБЕЛА 6.2: Сетовање Нумеричких модела за симулацију турбуленције стајног трапа

Тип модела	LES-Смагорински	Ортогонална SGS са динамичким праћењем малих величина
Временски интервал [s]	0.35	0.35
Временски корак [s]	0.0005	0.0005
Густина ваздуха [kg/m ³]	1.225	1.225
Кинематска вискозност [m ² /s]	0.0000178	0.0000178
Број чворова мреже	45282	45282
Број елемената мреже	90046	90046
Смагорински параметар ϵ	0.004	
Стабилизационе константе		4.0, 2.0, 1.0, 1.0
Временска дискретизација	Адамс	Адамс
Почетни услови	Стокс	Стокс
Метод линеаризације	Њутн-Рапсон	Њутн-Рапсон
Толеранција конвергенције	1.0^{-5}	1.0^{-5}
Алгебарски солвер	Pardiso	Pardiso
Брзина стајног трапа [m/s]	70	70
Рејнолдсов број	$77.9932 \cdot 10^5$	$77.9932 \cdot 10^5$

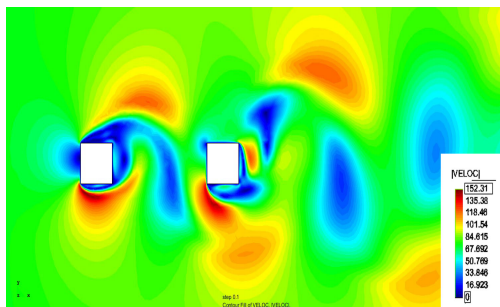
6.3.1 Симулација поља брзине, турбуленције и притиска добијени LES - Смагоринским моделом



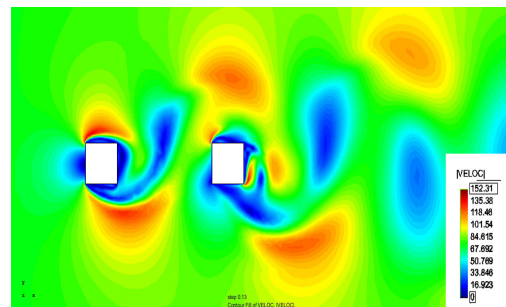
Слика 6.133: Поље брзина око квадратних профила стајног трапа после 0.02 секунде добијени LES-Смагорински моделом



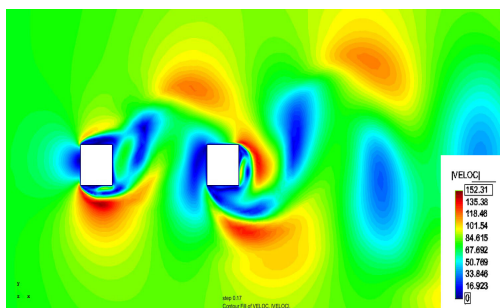
Слика 6.134: Поље брзина око квадратних профила стајног трапа после 0.05 секунде добијени LES-Смагорински моделом



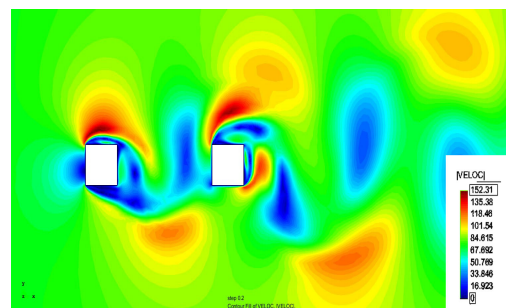
Слика 6.135: Поље брзина око квадратних профила стајног трапа после 0.1 секунде добијени LES-Смагорински моделом



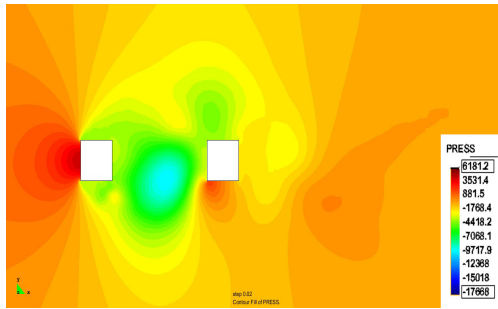
Слика 6.136: Поље брзина око квадратних профила стајног трапа после 0.13 секунде добијени LES-Смагорински моделом



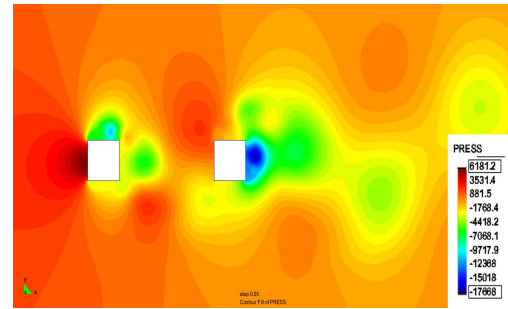
Слика 6.137: Поље брзина око квадратних профила стајног трапа после 0.17 секунде добијени LES-Смагорински моделом



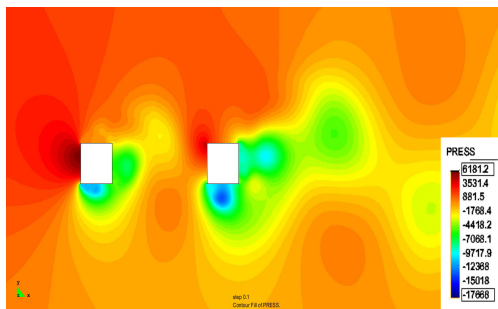
Слика 6.138: Поље брзина око квадратних профила стајног трапа после 0.2 секунде добијени LES-Смагорински моделом



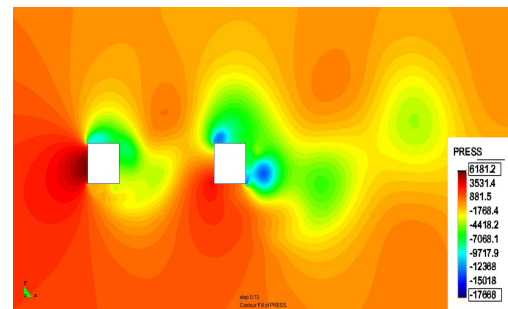
Слика 6.139: Поље притиска око квадратних профила стајног трапа после 0.02 секунде добијени LES-Смагорински моделом



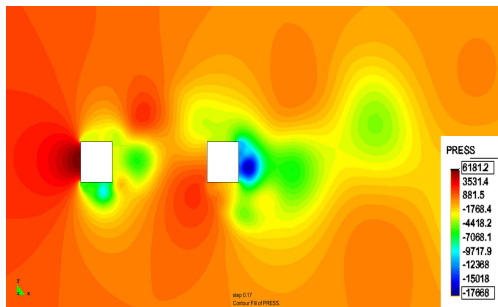
Слика 6.140: Поље притиска око квадратних профила стајног трапа после 0.05 секунде добијени LES-Смагорински моделом



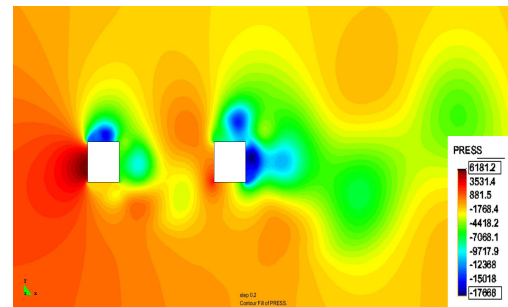
Слика 6.141: Поље притиска око квадратних профила стајног трапа после 0.1 секунде добијени LES-Смагорински моделом



Слика 6.142: Поље притиска око квадратних профила стајног трапа после 0.13 секунде добијени LES-Смагорински моделом

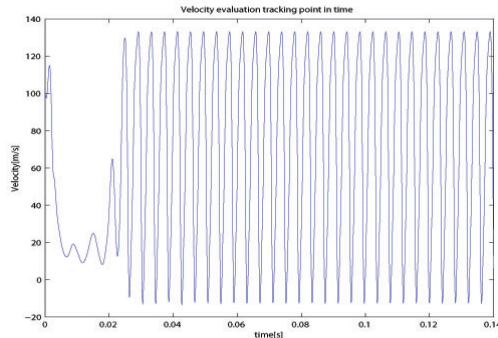


Слика 6.143: Поље притиска око квадратних профила стајног трапа после 0.17 секунде добијени LES-Смагорински моделом

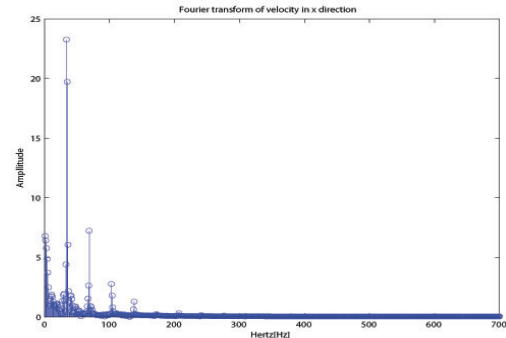


Слика 6.144: Поље притиска око квадратних профила стајног трапа после 0.2 секунде добијени LES-Смагорински моделом

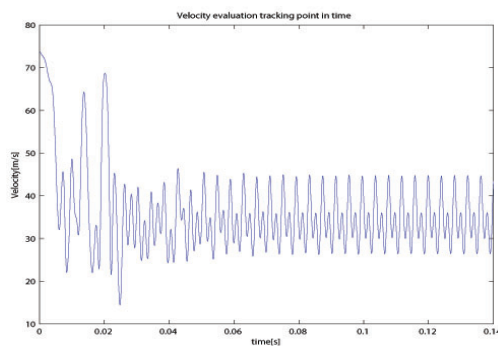
6.3.2 Временско праћење брзине у одређеним тачкама прорачунске мреже добијени LES-Смагорински моделом



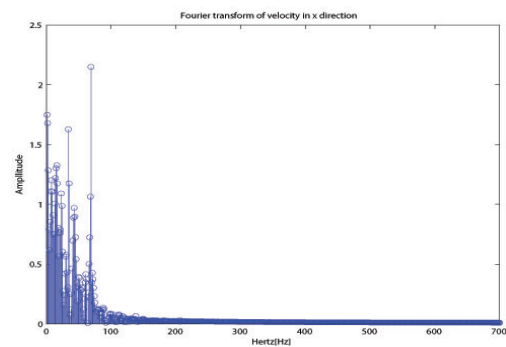
Слика 6.145: Временско праћење пројекције брзине на X осу у чвору 27419 прорачунске мреже



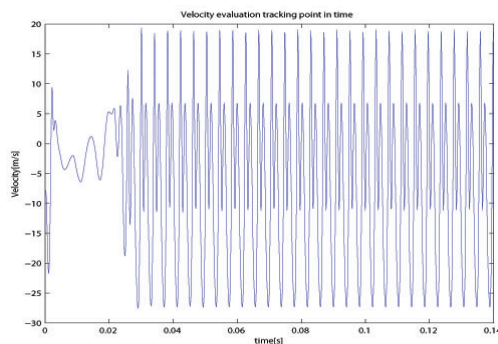
Слика 6.146: Спектар фреквенци за пројекцију брзине на X осу добијени ФФТ-ом у чвору 27419



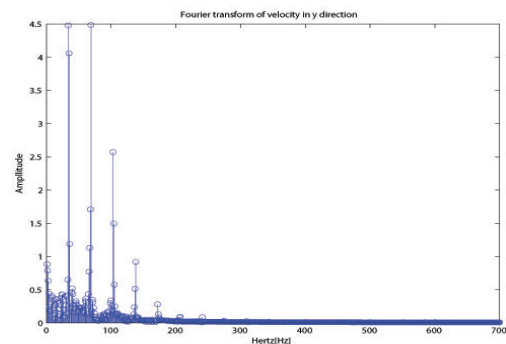
Слика 6.147: Временско праћење пројекције брзине на X осу у чвору 22609 прорачунске мреже



Слика 6.148: Спектар фреквенци за пројекцију брзине на X осу добијени ФФТ-ом у чвору 22609

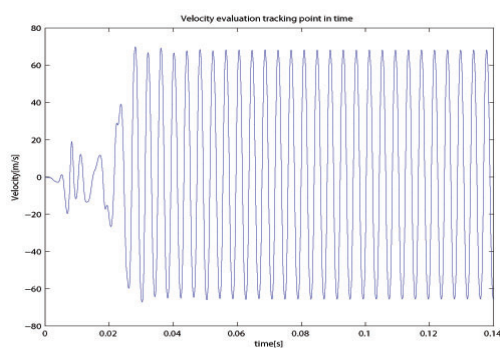


Слика 6.149: Временско праћење пројекције брзине на Y осу у чвору 27419 прорачунске мреже

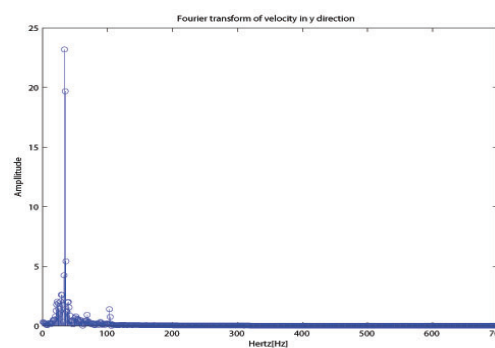


Слика 6.150: Спектар фреквенци за пројекцију брзине на Y осу добијени ФФТ-ом у чвору 27419

За добијени модел презентован на почетку поглавља прво су приказани резултати за LES модел. Праћен је исти принцип где је прво приказана промена брзине и притиска у времену где се поново може уочити устаљени режим који се формира



Слика 6.151: Временско праћење пројекције брзине на Y осу у чвору 22609 прорачунске мреже

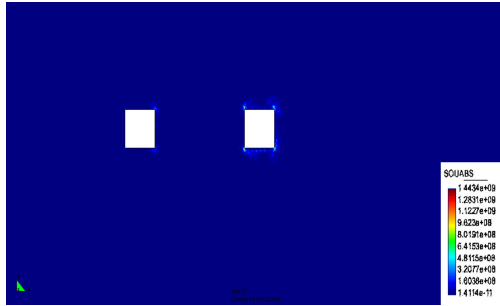


Слика 6.152: Спектар фреквенци за пројекцију брзине на Y осу добијени ФФТ-ом у чвору 22609

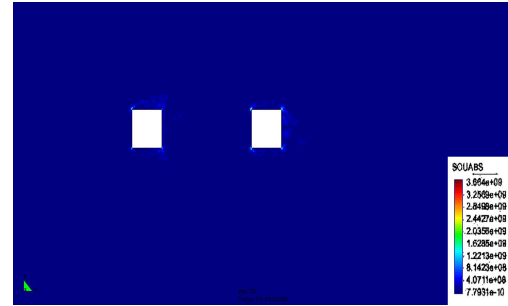
и који генерише вртлоге одређене величине као и њихове фликуације. Иако је у овом случају први квадратни профил испред другог он не утиче претрано на опструјавање другог квадратног профила. Поново су добијене само главне фреквенце на спектру које су одговорне за моделирање великих вртлога док су се поново мали вртлози загубили представљајући модел као предисипативан. Сходно томе треба проверити да ли постоји утицај величине мреже са карактеристичном дужином h утиче на параметар ϵ који служи за дефинисање филтера пропустљивости. У сваком случају презентовани модел даје добар опис и понашање великих вртлога.

6.3.3 Поље акустичних извора добијени методом LES - Smagorinsky

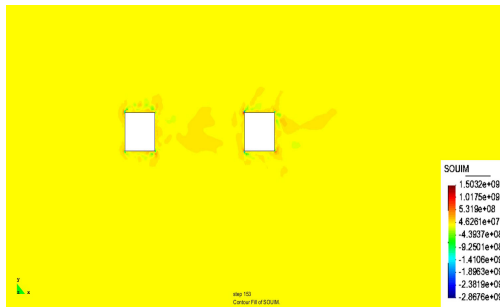
За акустичне изворе изабрали смо веће фреквенце реда величине око 250Hz, јасно је да у овом дијапазону добијамо веома слабу презентацију акустичних извора. Веома је приметно да је концентрација акустичних извора око квадратних профила а да се некако губи унутар међу простора два цилиндра. То је јесан индикатор да тамо где смо очекивали највећу концентрацију акустичних извора, презентовани модел је заказао.



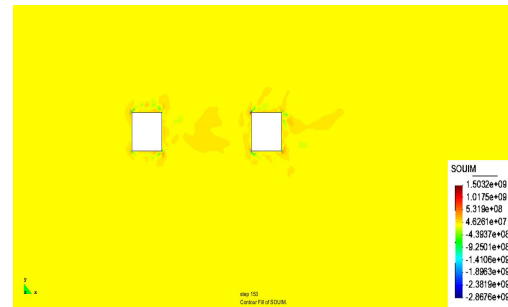
Слика 6.153: Поље акустичних извора добијени LES-Смагоринским методом-абсолютно решење



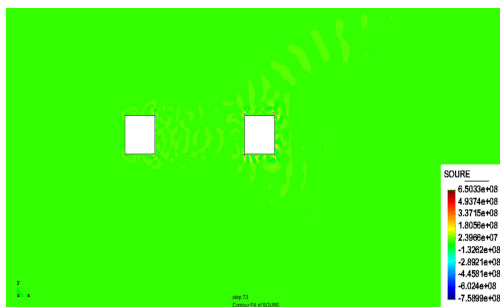
Слика 6.154: Поље акустичних извора добијени LES-Смагоринским методом-абсолютно решење



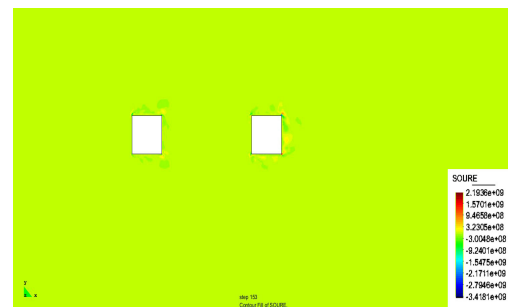
Слика 6.155: Поље акустичних извора добијени LES-Смагоринским методом-имагинарни део решења



Слика 6.156: Поље акустичних извора добијени LES-Смагоринским методом-имагинарни део решења

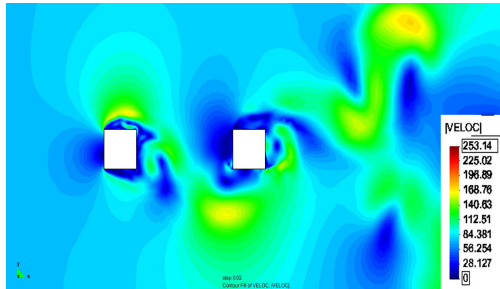


Слика 6.157: Поље акустичних извора добијени LES-Смагоринским методом-реални део решења

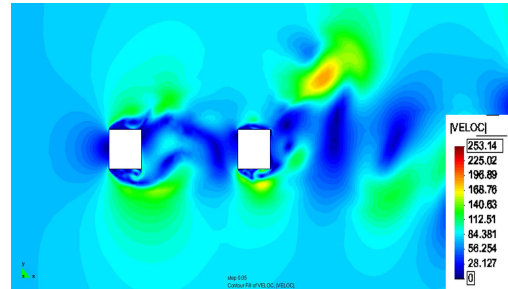


Слика 6.158: Поље акустичних извора добијени LES-Смагоринским методом-реални део решења

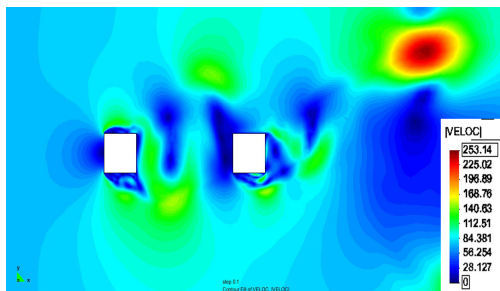
6.3.4 Симулација поља брзине, турбуленције и притиска добијени Ортогоналном SGS методом са динамичким праћењем малих величина



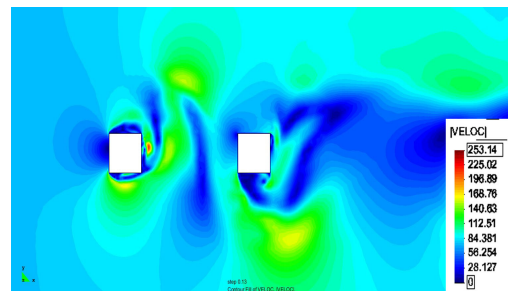
Слика 6.159: Поље брзина око квадратног профила стајног трапа после 0.02 секунде добијени Ортогоналним SGS моделом са динамичким праћењем малих величина



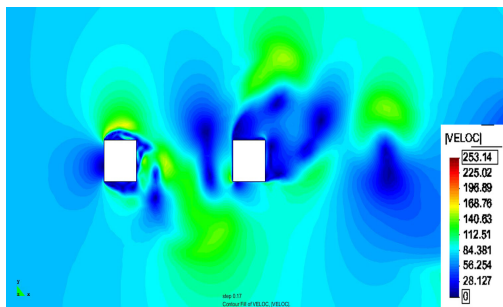
Слика 6.160: Поље брзина око квадратног профила стајног трапа после 0.05 секунде добијени Ортогоналним SGS моделом са динамичким праћењем малих величина



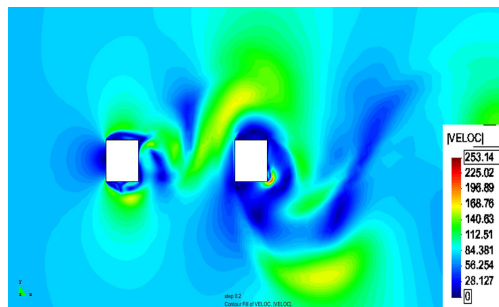
Слика 6.161: Поље брзина око квадратног профила стајног трапа после 0.1 секунде добијени Ортогоналним SGS моделом са динамичким праћењем малих величина



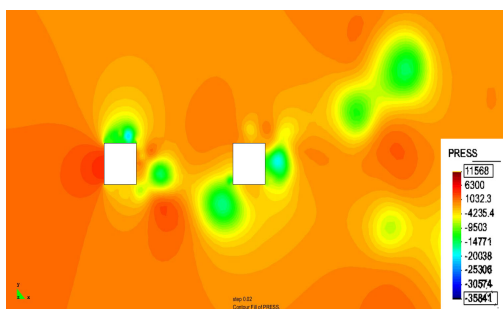
Слика 6.162: Поље брзина око квадратног профила стајног трапа после 0.13 секунде добијени Ортогоналним SGS моделом са динамичким праћењем малих величина



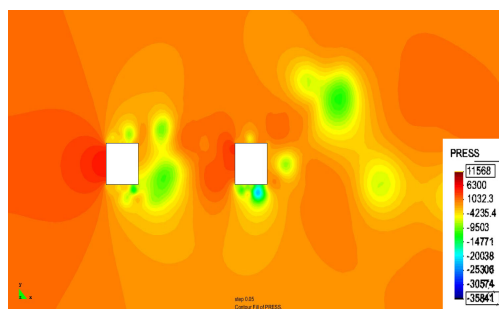
Слика 6.163: Поље брзина око квадратног профила стајног трапа после 0.17 секунде добијени Ортогоналним SGS моделом са динамичким праћењем малих величина



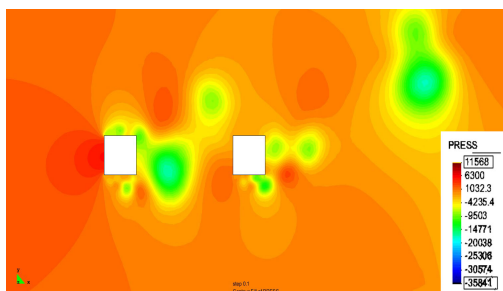
Слика 6.164: Поље брзина око квадратног профила стајног трапа после 0.2 секунде добијени Ортогоналним SGS моделом са динамичким праћењем малих величина



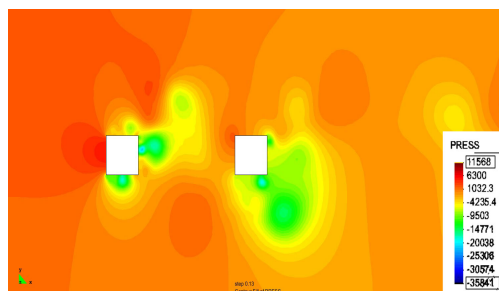
Слика 6.165: Поље притиска око квадратног профила стајног трапа после 0.02 секунде добијени Ортогоналним SGS моделом са динамичким праћењем малих величина



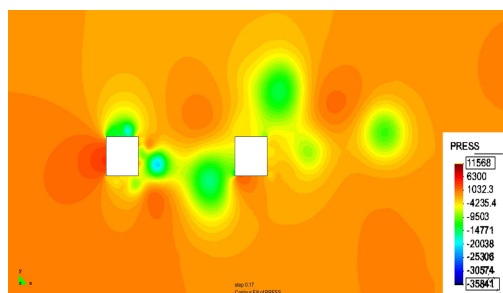
Слика 6.166: Поље притиска око квадратног профила стајног трапа после 0.05 секунде добијени Ортогоналним SGS моделом са динамичким праћењем малих величина



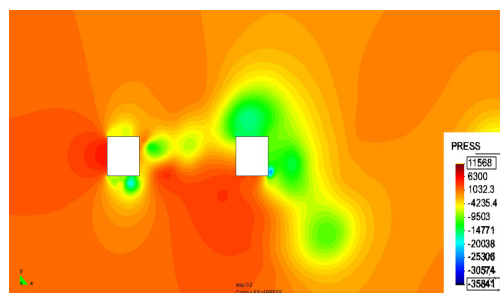
Слика 6.167: Поље притиска око квадратног профила стајног трапа после 0.1 секунде добијени Ортогоналним SGS моделом са динамичким праћењем малих величина



Слика 6.168: Поље притиска око квадратног профила стајног трапа после 0.13 секунде добијени Ортогоналним SGS моделом са динамичким праћењем малих величина

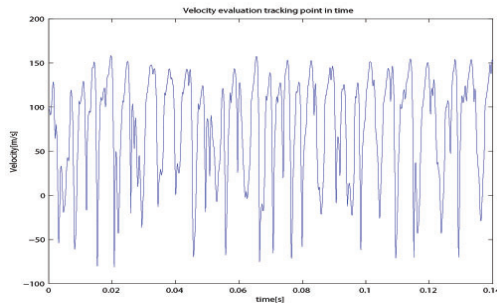


Слика 6.169: Поље притиска око квадратног профила стајног трапа после 0.17 секунде добијени Ортогоналним SGS моделом са динамичким праћењем малих величина

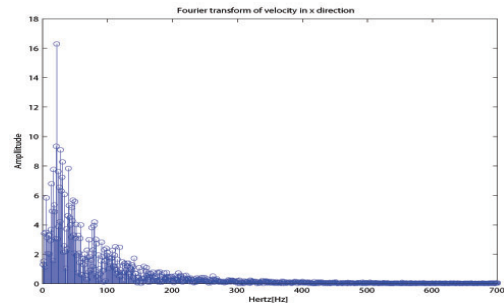


Слика 6.170: Поље притиска око квадратног профила стајног трапа после 0.2 секунде добијени Ортогоналним SGS моделом са динамичким праћењем малих величина

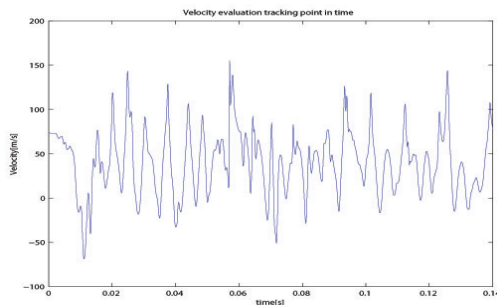
6.3.5 Временско праћење брзине у одређеним тачкама прорачунске мреже добијени Ортогонална SGS методом са динамичким праћењем малих величина



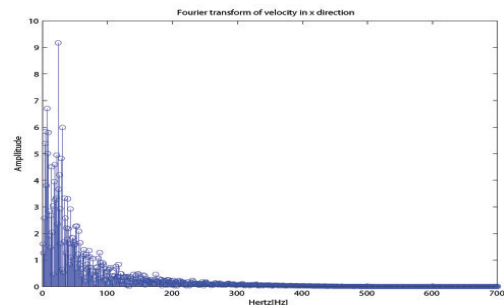
Слика 6.171: Временско праћење пројекције брзине на X осу у чвору 27419 прорачунске мреже



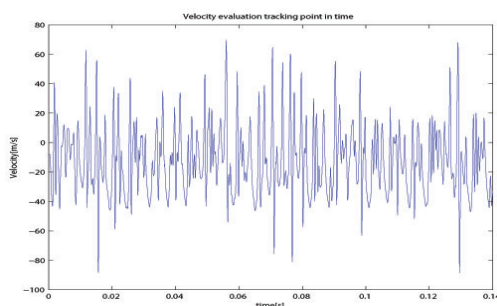
Слика 6.172: Спектар фреквенци за пројекцију брзине на X осу добијени ФФТ-ом у чвору 27419



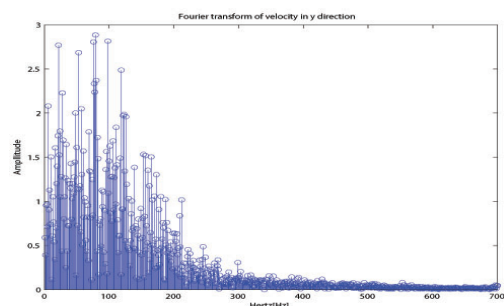
Слика 6.173: Временско праћење пројекције брзине на X осу у чвору 22609 прорачунске мреже



Слика 6.174: Спектар фреквенци за пројекцију брзине на X осу добијени ФФТ-ом у чвору 22609

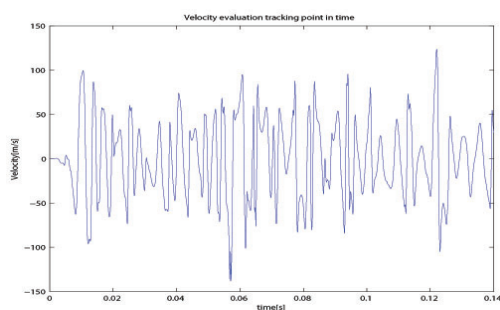


Слика 6.175: Временско праћење пројекције брзине на Y осу у чвору 27419 прорачунске мреже

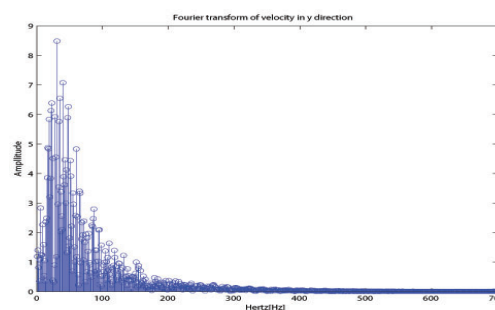


Слика 6.176: Спектар фреквенци за пројекцију брзине на Y осу добијени ФФТ-ом у чвору 27419

После LES модела за исте параметре али само са различитим моделирањем турбуленције приказани су резултати добијени са ортогоналном SGS методом са динамичким праћењем малих величина. Одмах се види да модел узима у обзир све величине вртлога и као такав даје веома флукуативно понашање за развијено турбулентно



Слика 6.177: Временско праћење пројекције брзине на Y осу у чвору 22609 прорачунске мреже

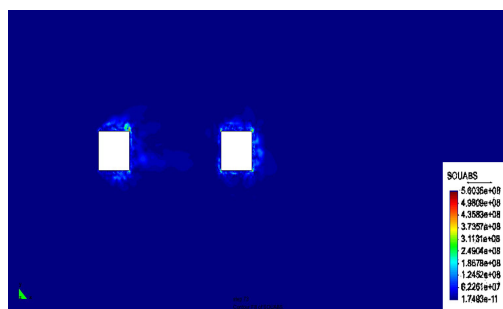


Слика 6.178: Спектар фреквенци за пројекцију брзине на Y осу добијени ФФТ-ом у чвору 22609

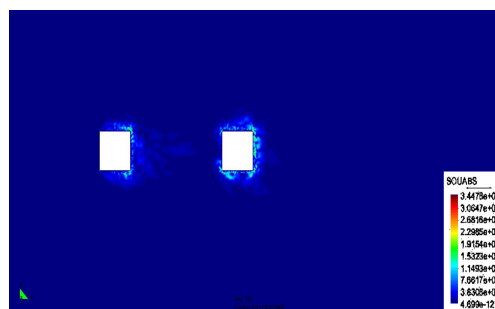
струјање што није био случај за LES модел. Велика разлика у изгледу временске еволуације брзине за исте чворове прорачунске мреже, даје могућност да се закључи да за исте параметре сетовања и прорачунске мреже добијају се тотално другачији резултати. Утицај малих вртлога као и њихово целокупно моделирање даје подстред за презентовану методологију да иде у правом смеру. Спектрални графици добијени брзом Фуријеовом трансформацијом су пуни различитих фреквенци што је карактеристика турбулентног струјања за задате Рејнолдсове бројеве.

6.3.6 Поље акустичних извора добијени методом Ортогонална SGS са динамичким праћењем малих величина

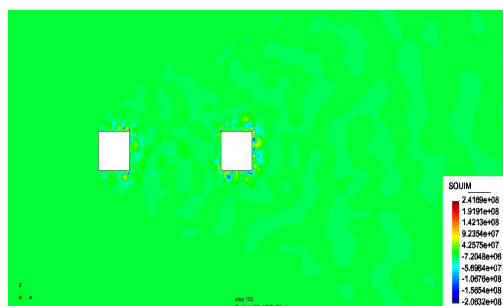
Акустични извори за исте су приказани за исте фреквенце као и у LES моделу. Карактеристичн је да и овде се добија богатија презентација акустичних извора као богатија расподела дипола и квадрипола.



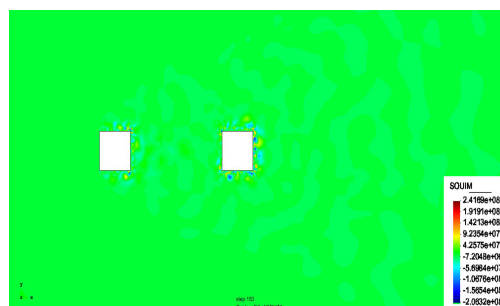
Слика 6.179: Поље акустичних извора добијени Ортогоналном SGS моделом са динамичким праћењем малих величина



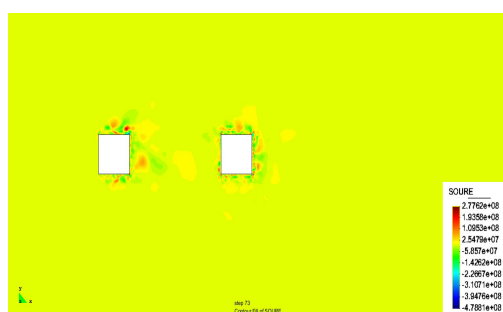
Слика 6.180: Поље акустичних извора добијени Ортогоналном SGS моделом са динамичким праћењем малих величина



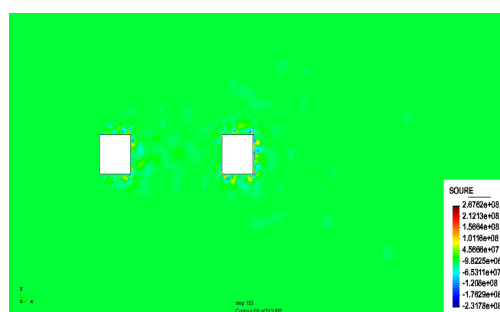
Слика 6.181: Поље акустичних извора дбијени Ортогоналном SGS моделом са динамичким праћењем малих величина



Слика 6.182: Поље акустичних извора дбијени Ортогоналном SGS моделом са динамичким праћењем малих величина



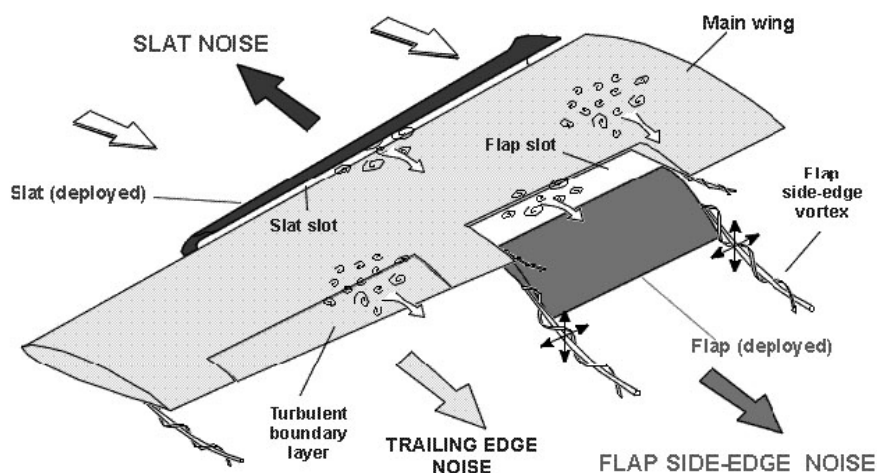
Слика 6.183: Поље акустичних извора дбијени Ортогоналном SGS моделом са динамичким праћењем малих величина



Слика 6.184: Поље акустичних извора дбијени Ортогоналном SGS моделом са динамичким праћењем малих величина

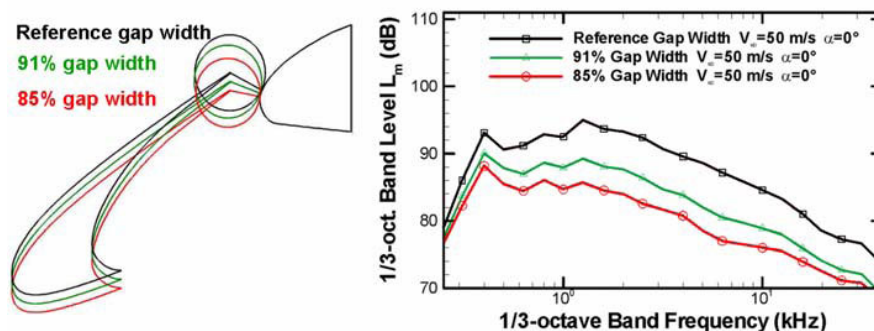
6.4 Аероакустична симулација аеропрофила са отклонаом закрилца

Два главна извора буке на компонентама за повећање узгона су турбулентно струјање које стварју прекрилца и закрилца што је приказано на слици 6.185. Треба напоменути да приликом слетања кад су отклоњени закрилца и предкрилца авион има за 10 децибела већу буку него приликом уобичајног лета или крузинга. Оштра излазна ивица генерише буку, али јаку компоненту тона генерише тупа излазна ивица, која доводи до стварња одлазећег вртлога са доминантном фреквенцијом. Бука коју генерише излазна ивица је присутна и код крила и код закрилца и код прекрилца али нису све од исте важности за генерисање буке зато што интензитет и фреквенца су веома различите.



Слика 6.185: Генерисање буке на крилу авиона [VALIANT извештај]

Када је прекрилце отклоњено ствара се јак вртлог у процепу који је углавном дводимензионалан али који може да добије трећу компоненту ако се крило накриви [166]. Овај вртлог се одваја од брзе струје код предкрилца у граничном слоју. Каснији развој подразумева јаку нестабилност која резултира са мноштвом вртлога који се одвајају код излазне ивице прекрилца. Цео овај механизам заједно са ударима о аеродинамичке површине ствара буку коју генерише предкрилце. Редукција буке од 10 децибела је постигнута тако што је редукован прорез између предкрилца и централног дела крила, али са тим смањењем дошло је и до смањења максималног узгона. Редукција буке на предкрицу је приказана на слици 6.186.



Слика 6.186: Генерисање буке на крилу авиона [VALIANT извештај]

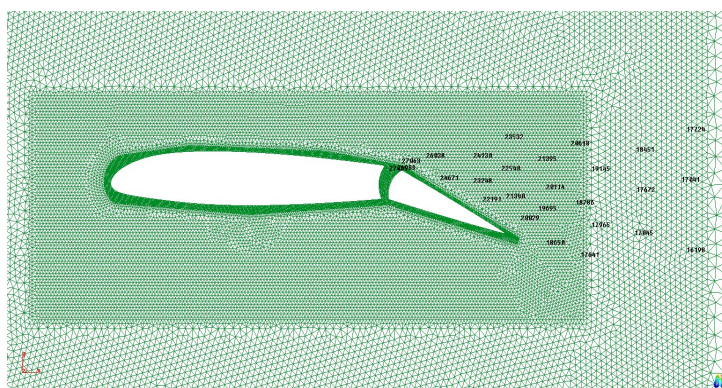
Закрилца су исто тако велики генератори буке на авиону. Бука се генерише и са излазне ивице крила тако и са излазне ивице као резултат удара вртлога који су се створили у процепу између предкрилца и крила. Додатни тродимензионални ефекат долази са стране закрилца где се јавља јак скок притска који ствара осцилаторни механизам погодан за вртлоге који на крају генеришу буку.

У оба случаја и за предкрилца и за закрилца звук се генерише у присуству других површина. Сходно томе добар алат за предикцију генерисања и пропагације звука мора да узме у обзир поред турбулентног струјања и интеракцију са чврстим површинама, као и близину тих чврстих површина.

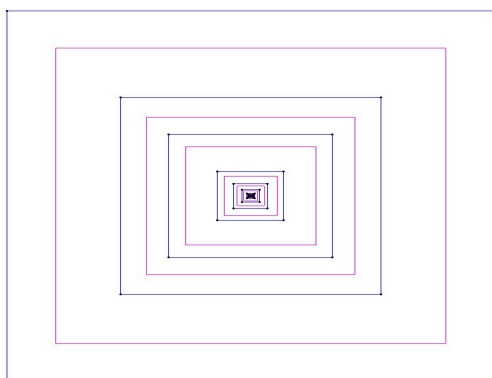
Претходни истраживачки програми као што су RAIN, SILENCER и AWIATOR су се позабавили буком коју генеришу компоненте за повећање узгона и предложили су стратегије за минимизацију звука. Као што је већ речено, већина тих истраживачких подухвата су базирана на експерименталним студијама у аеротунелу или тест летовима. Ниједан од ових програма до појаве VALIANT-а се није бавио нумеричком приступу за тачну предикцију генерисања и пропагације звука на компонентама на авиону које су задужене за повећање узгона.

Направљен је домен око аеропрофила 23012 који је отклоњен за 20° , док су димензије прорачунског домена $300 \times 300m$ који је приказан на слици 6.188. Домен је дискретизован са линарним троугластим елементима, тако што је најфинији део мреже око аеропрофила и процепу између тела аеропрофила и закрилца и финоћа се смањује како се одаљавамо од аеропрофила, што је приказано на слици 6.189. Чворови у коме смо пратили временске инстанце брзине су приказане на слици 6.187, где смо ставили и пар тачака у процеп. Из литературе је познато да највећи удео у генерисању звука чини излазна ивица аеропрофила и процеп између закрилца и тела аеропрофила. На крају смо

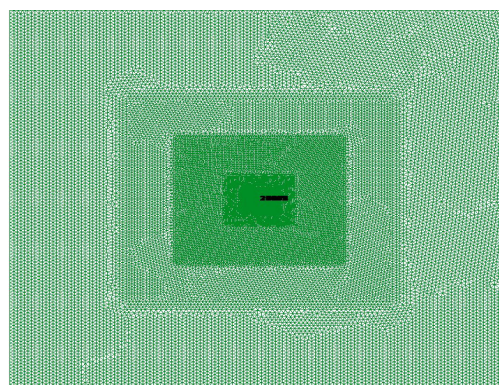
преписали граничне услове где је преписан Дирихлеов гранични услов за $v = 0$ на граници аеропрофила, што је приказано на слици 6.190. Исто тако је преписан Дирихлеов гранични услов означен плавом бојом где је преписана брзина од $v = 100m/s$ која је помножена са косинусом и синусом од 10° пошто је претпостављено да је нападни угао аеропрофила $\alpha_n = 10^\circ$. На осталим границама су преписани Нојманови гранични услови, што је приказано на слици 6.191, да не би имали проблема са вртлозима на граници који могу да изазову нестабилност и дивергенцију нумеричке шеме услед убацивања додатне енергије преко вртлога у прорачунски домен.



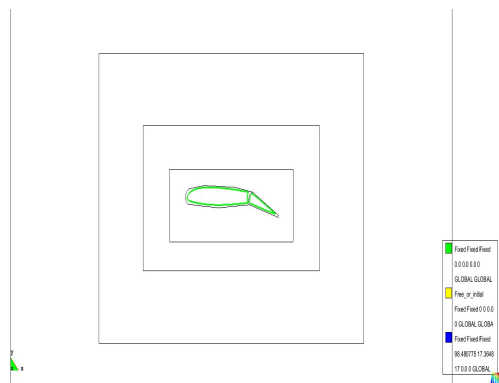
Слика 6.187: Мрежа око аеропрофила 23012 са чворовима за праћење временске еволуације брзине око аеропрофила



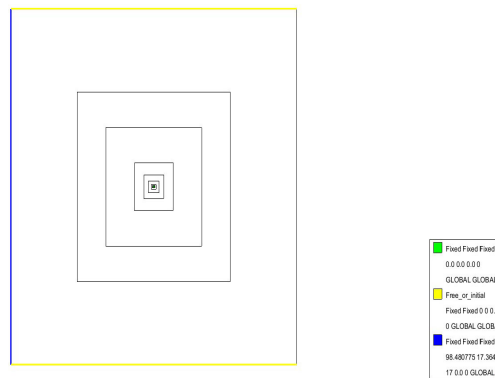
Слика 6.188: Прорачунски домен



Слика 6.189: Прорачунска мрежа целог домена



Слика 6.190: Дирихлеови гранични услови на граници аеропрофила

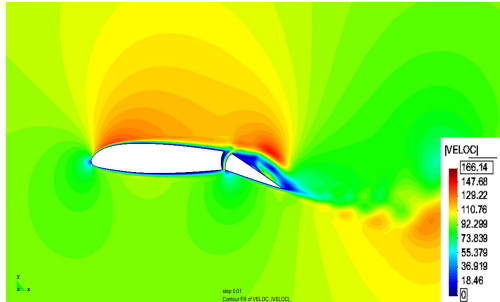


Слика 6.191: Дирихлеови и Нојманови гранични услови на ободима прорачунског домена

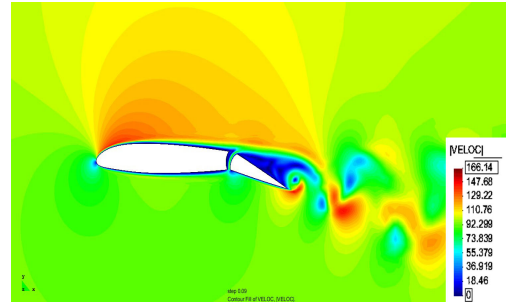
ТАБЕЛА 6.3: Сетовање Нумеричких модела за симулацију турбуленције аеропрофила са отклоном закрилца

Тип модела	LES-Смагорински	Ортогонална SGS са динамичким праћењем малих величина
Временски интервал [s]	0.35	0.35
Временски корак [s]	0.0005	0.0005
Густина ваздуха [kg/m ³]	1.225	1.225
Кинематска вискозност [m ² /s]	0.0000178	0.0000178
Број чворова мреже	64680	64680
Број елемената мреже	128307	128307
Смагорински параметар ϵ	0.004	
Стабилизационе константе		4.0, 2.0, 1.0, 1.0
Временска дискретизација	Адамс	Адамс
Почетни услови	Стокс	Стокс
Метод линеаризације	Њутн-Рапсон	Њутн-Рапсон
Толеранција конвергенције	1.0^{-5}	1.0^{-5}
Алгебарски солвер	Pardiso	Pardiso
Брзина стајног трапа [m/s]	70	70
Рејнолдсов број	$46.6945 \cdot 10^5$	$46.6945 \cdot 10^5$

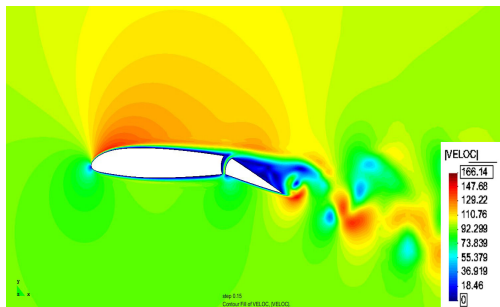
6.4.1 Симулација поља брзине, турбуленције и притиска добијени методом LES-Смагориснки



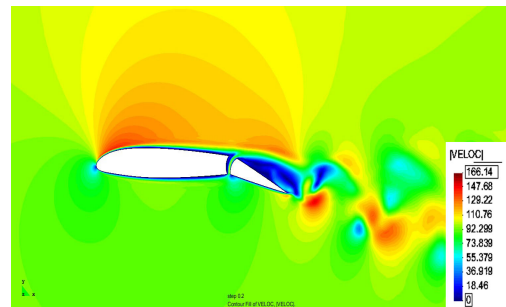
Слика 6.192: Векторско поље брзина око аеропрофила после 0.01 секунде LES-Смагориснки



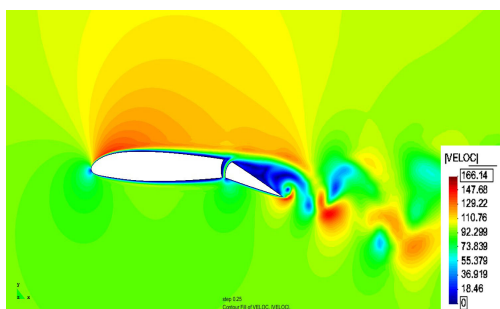
Слика 6.193: Векторско поље брзина око аеропрофила после 0.09 секунде LES-Смагориснки



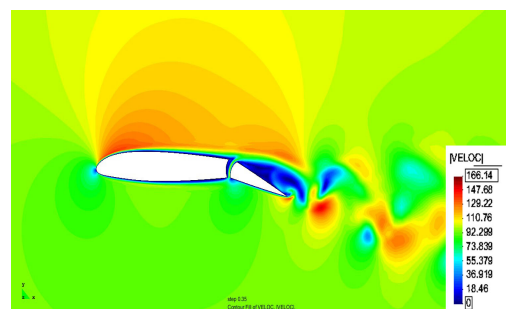
Слика 6.194: Векторско поље брзина око аеропрофила после 0.15 секунде LES-Смагориснки



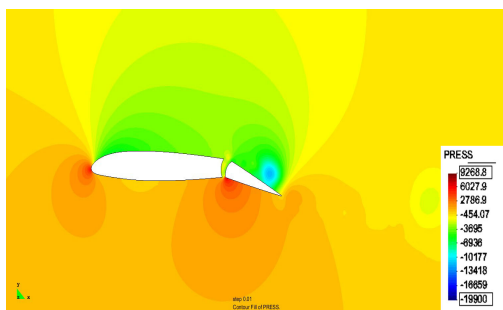
Слика 6.195: Векторско поље брзина око аеропрофила после 0.2 секунде LES-Смагориснки



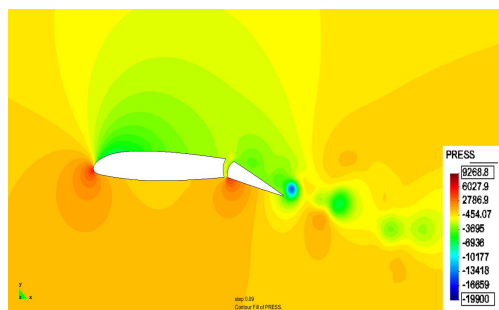
Слика 6.196: Векторско поље брзина око аеропрофила после 0.25 секунде LES-Смагориснки



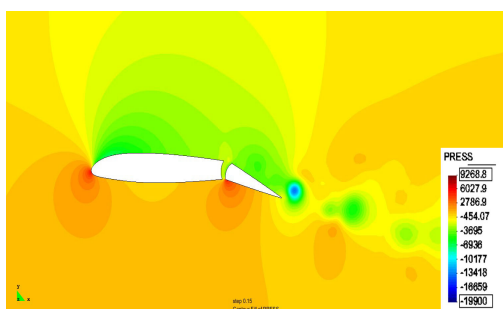
Слика 6.197: Векторско поље брзина око аеропрофила после 0.35 секунде LES-Смагориснки



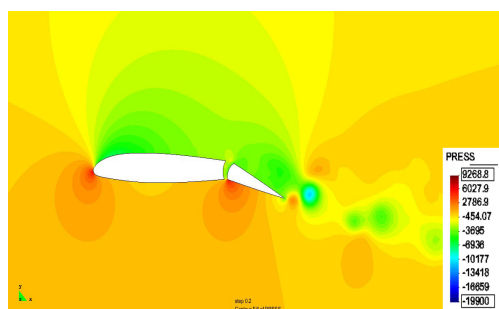
Слика 6.198: Поље притиска око аеропрофила после 0.01 секунде LES-Смагориски



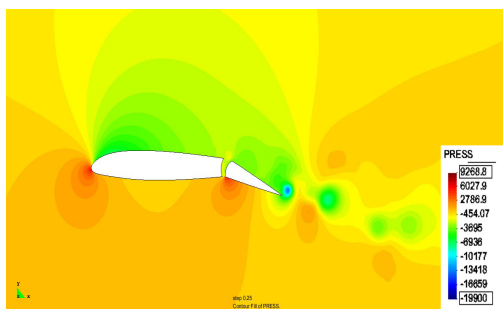
Слика 6.199: Поље притиска око аеропрофила после 0.09 секунде LES-Смагориски



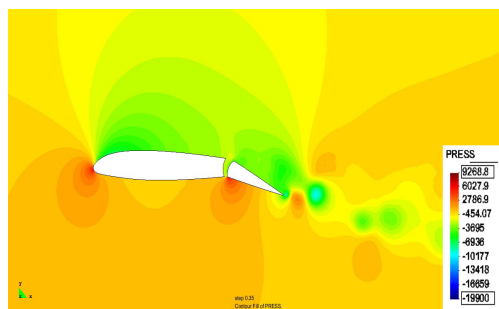
Слика 6.200: Поље притиска око аеропрофила после 0.15 секунде LES-Смагориски



Слика 6.201: Поље притиска око аеропрофила после 0.2 секунде LES-Смагориски

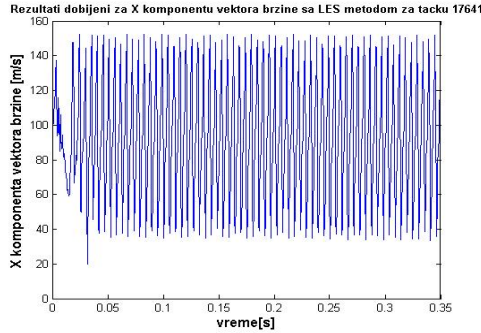


Слика 6.202: Поље притиска око аеропрофила после 0.25 секунде LES-Смагориски

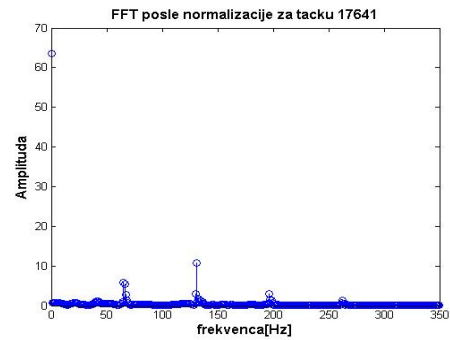


Слика 6.203: Поље притиска око аеропрофила после 0.35 секунде LES-Смагориски

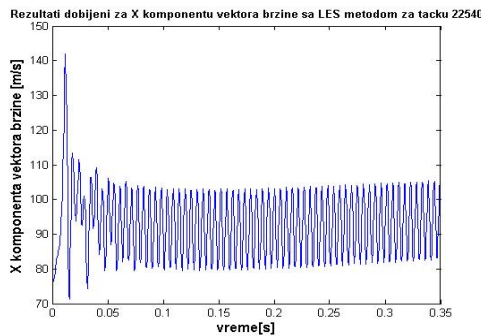
6.4.2 Временско праћење брзине у одређеним тачкама прорачунске мреже добијени методом LES - Smagorinsky



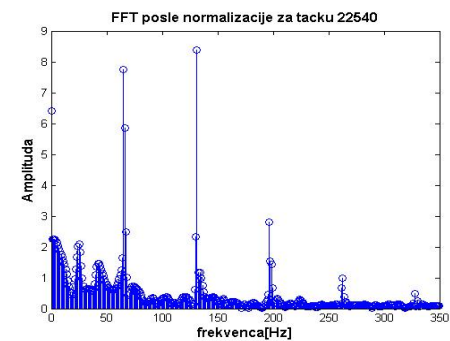
Слика 6.204: Временско праћење пројекције брзине на X осу у чвору 17641 прорачунске мреже за LES-Смагориски модел



Слика 6.205: Спектар фреквенци за пројекцију брзине на X осу добијени ФФТ-ом у чвору 17641

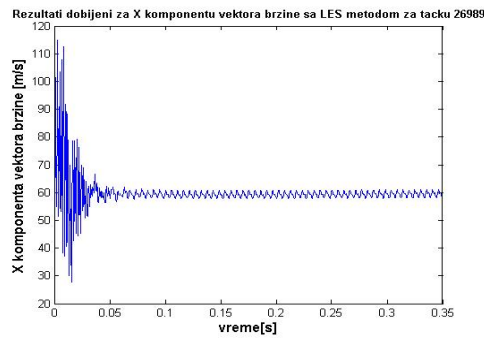


Слика 6.206: Временско праћење пројекције брзине на X осу у чвору 22540 прорачунске мреже за LES-Смагориски модел

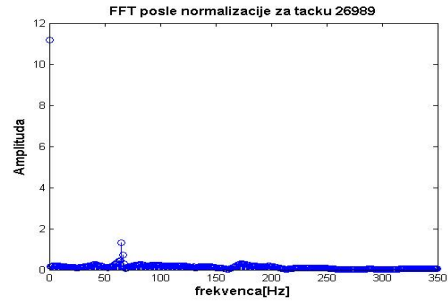


Слика 6.207: Спектар фреквенци за пројекцију брзине на X осу добијени ФФТ-ом у чвору 22540

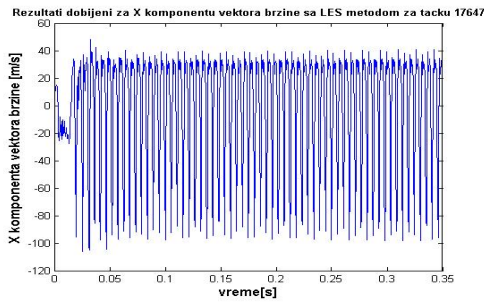
На сликама 6.192-6.203 приказана је симулација брзине и притиска око аеропрофила са отколоном закрилца где је нападни угао од 10° . Приметан је вртлог који се ствара на излазној ивици закрилца али је исто тако приметан и устаљено струјање са уједначеним вртлозима иза аеропрофила. Из литературе је познато да принципијално највећи звук генерише процеп између закрилца и тела аеропрофила и да интезитет звука зависи колики је процеп. Што се тиче LES модела Смагориског флукуације које се јављају у процепу и које касније утичу на струјање око горњак аеропрофила нису баш најуспешније репродуковане. Процеп је симулиран као да је устаљени режим добијен унутра процепа што се коси са физикалношћу појаве. Овај тренд је настављен и на временском праћењу у одређеним чворовима прорачунске мреже где су презентовани подаци за чвор који се налази у процепу, иза аеропрофила и иза



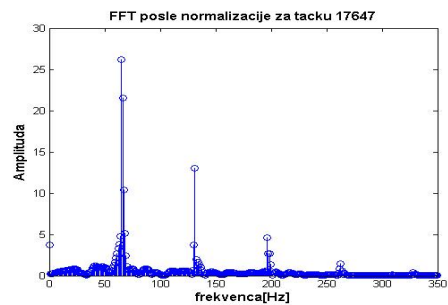
Слика 6.208: Временско праћење пројекције брзине на X осу у чвору 26989 прорачунске мреже за LES-Смагориснки модел



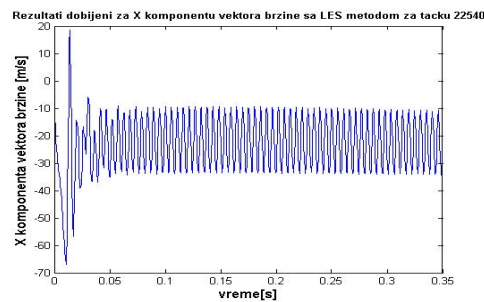
Слика 6.209: Спектар фреквенци за пројекцију брзине на X осу добијени ФФТ-ом у чвору 26989



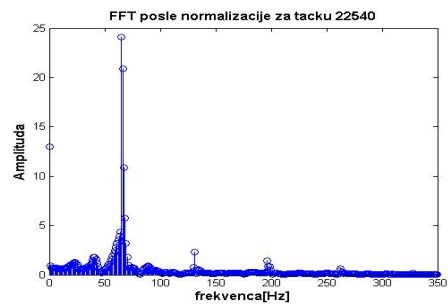
Слика 6.210: Временско праћење пројекције брзине на Y осу у чвору 17641 прорачунске мреже за LES-Смагориснки модел



Слика 6.211: Спектар фреквенци за пројекцију брзине на Y осу добијени ФФТ-ом у чвору 17641

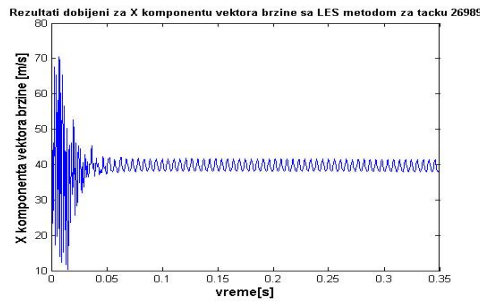


Слика 6.212: Временско праћење пројекције брзине на Y осу у чвору 22540 прорачунске мреже за LES-Смагориснки модел

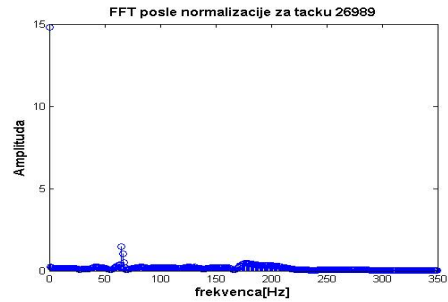


Слика 6.213: Спектар фреквенци за пројекцију брзине на Y осу добијени ФФТ-ом у чвору 22540

излазне ивице аеропрофила. Итекако је јасан флукуативан процес са добијањем само пар фреквенци унутар спектралног дијаграма за временске функције.



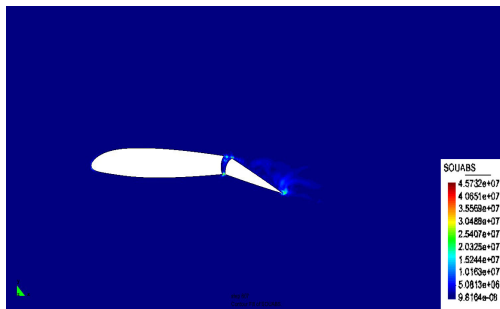
Слика 6.214: Временско праћење пројекције брзине на Y осу у чвору 26989 прорачунске мреже за LES-Смагорински модел



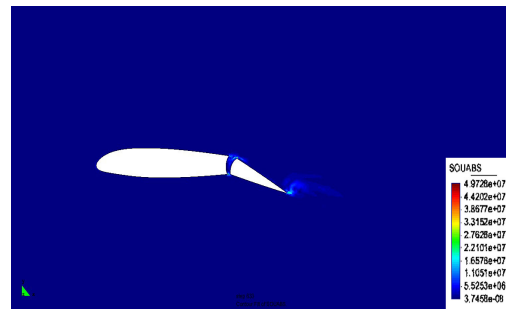
Слика 6.215: Спектар фреквенци за пројекцију брзине на Y осу добијени ФФТ-ом у чвору 26989

6.4.3 Поље акустичних извора добијени методом LES-Смагорински

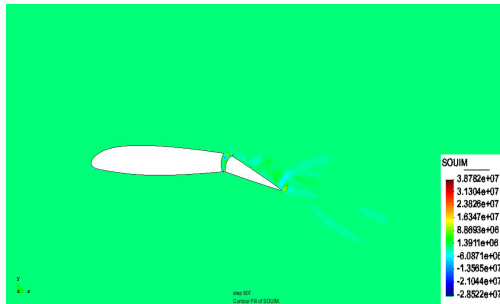
Као што смо коментарисали у претходном поглављу добијена је јасна флукуација притиска и брзине на излазној ивици закрилца што је репродуковало акустичне изворе који су се груписали око излазне ивице. Приметно је да се унутар процеа не јављају или у малом броју акустични извори што се коси са теоријом. Исто тако акустични извори су разливени и добијају се чак и монополи унутар процепа што је приказано на слици 6.208. Сходно горе наведеном LES-Смагорински модел са задатим параметрима није успео да репродукује физикално понашање акустичних извора.



Слика 6.216: Абсолютно поље акустичних извора око аеропрофила LES-Смагорински



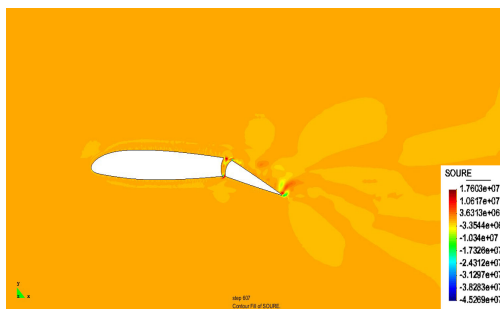
Слика 6.217: Абсолютно поље акустичних извора око аеропрофила LES-Смагорински



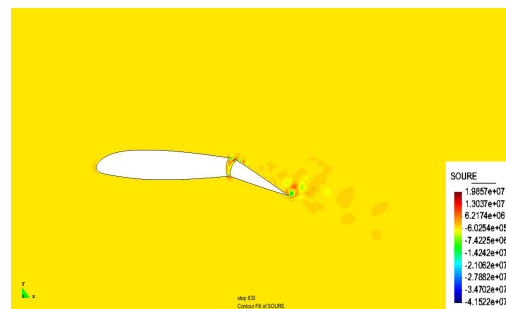
Слика 6.218: Имагинарно поље акустичних извора око аеропрофила LES-Смагорински



Слика 6.219: Имагинарно поље акустичних извора око аеропрофила LES-Смагорински

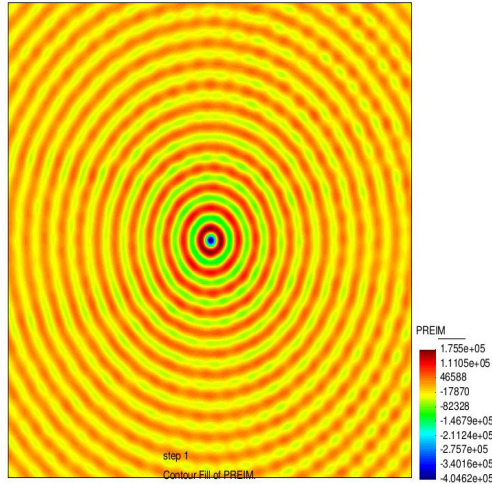


Слика 6.220: Реално поље акустичних извора око аеропрофила LES-Смагорински

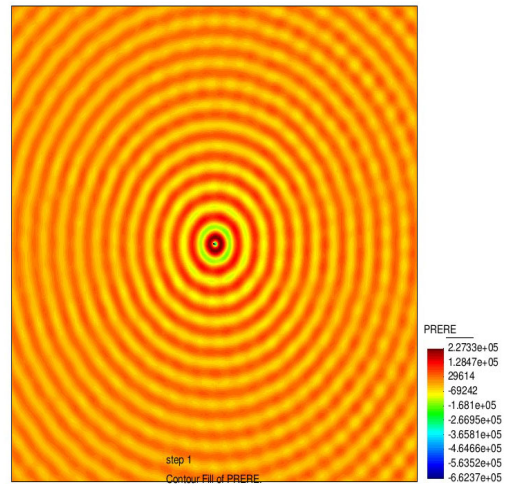


Слика 6.221: Реално поље акустичних извора око аеропрофила LES-Смагорински

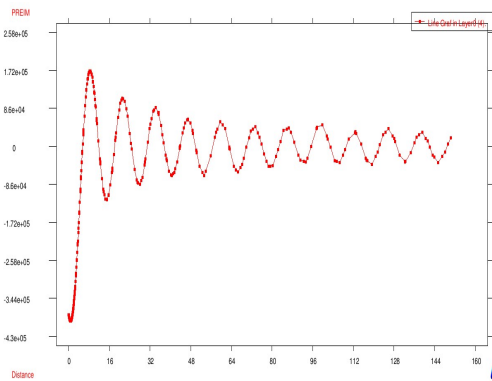
6.4.4 Акустична симулација са акустичним изворима добијени LES-Смагорински методом



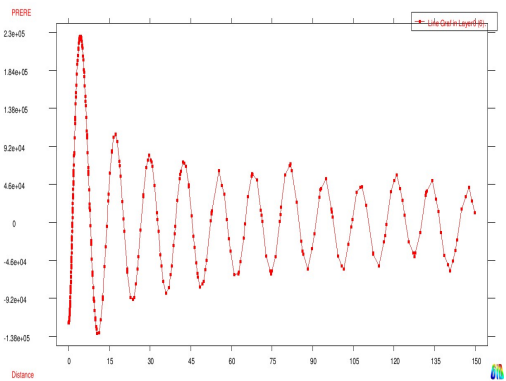
Слика 6.222: Имагинарно решење нехомогене Хелмхолцове јендачине за $k_0 = 0.5$



Слика 6.223: Realno решење нехомогене Хелмхолцове јендачине за $k_0 = 0.5$

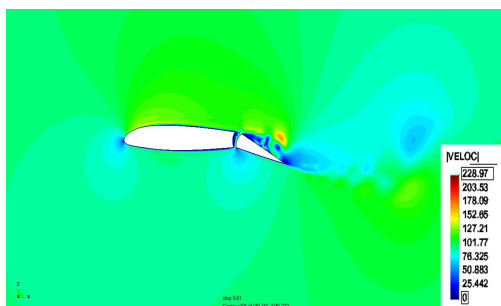


Слика 6.224: Подужни пресек реалног решења нехомогене Хелмхолцове јендачине за $k_0 = 0.5$

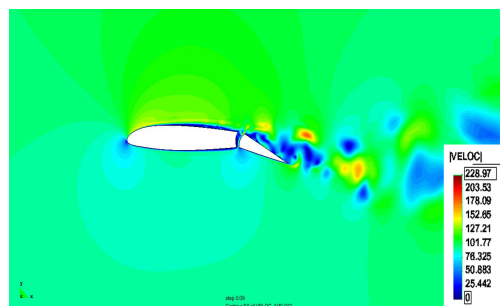


Слика 6.225: Подужни пресек имагинарног решења нехомогене Хелмхолцове јендачине за $k_0 = 0.5$

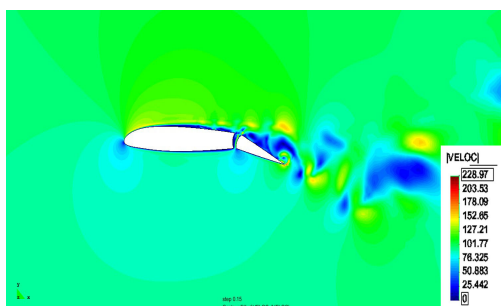
6.4.5 Симулација поља брзине, турбуленције и притиска добијени Ортогоналном SGS методом са динамичким праћењем малих величина



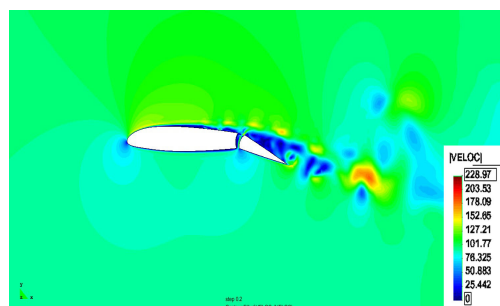
Слика 6.226: Векторско поље брзина око аеропрофила после 0.01 секунде добијени ортогоналном SGS методом са динамичким праћењем малих величина



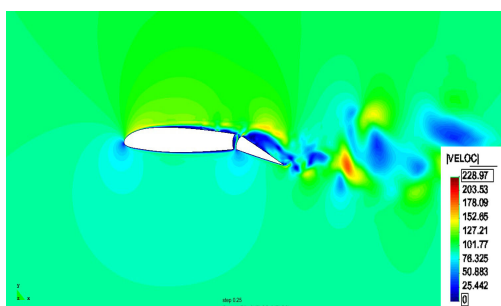
Слика 6.227: Векторско поље брзина око аеропрофила после 0.09 секунде добијени ортогоналном SGS методом са динамичким праћењем малих величина



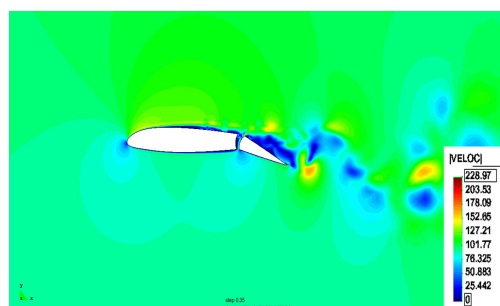
Слика 6.228: Векторско поље брзина око аеропрофила после 0.15 секунде добијени ортогоналном SGS методом са динамичким праћењем малих величина



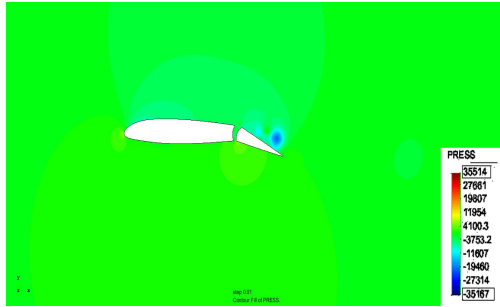
Слика 6.229: Векторско поље брзина око аеропрофила после 0.2 секунде добијени ортогоналном SGS методом са динамичким праћењем малих величина



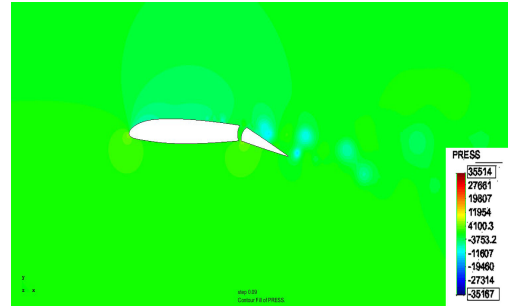
Слика 6.230: Векторско поље брзина око аеропрофила после 0.25 секунде добијени ортогоналном SGS методом са динамичким праћењем малих величина



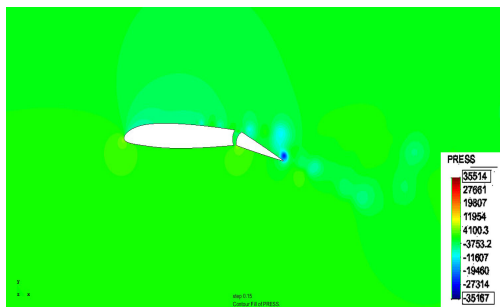
Слика 6.231: Векторско поље брзина око аеропрофила после 0.35 секунде добијени ортогоналном SGS методом са динамичким праћењем малих величина



Слика 6.232: Поље притиска око аеропрофила после 0.01 секунде добијени ортогоналном SGS методом са динамичким праћењем малих величина



Слика 6.233: Поље притиска око аеропрофила после 0.09 секунде добијени ортогоналном SGS методом са динамичким праћењем малих величина



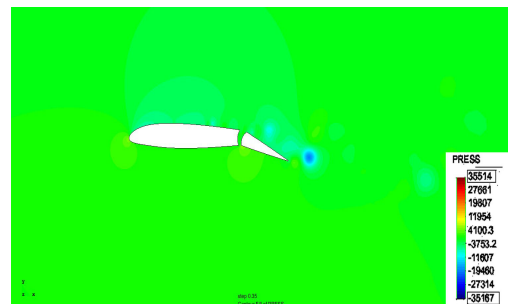
Слика 6.234: Поље притиска око аеропрофила после 0.15 секунде добијени ортогоналном SGS методом са динамичким праћењем малих величина



Слика 6.235: Поље притиска око аеропрофила после 0.2 секунде добијени ортогоналном SGS методом са динамичким праћењем малих величина

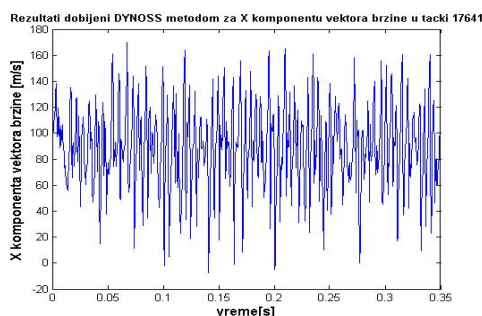


Слика 6.236: Поље притиска око аеропрофила после 0.25 секунде добијени ортогоналном SGS методом са динамичким праћењем малих величина

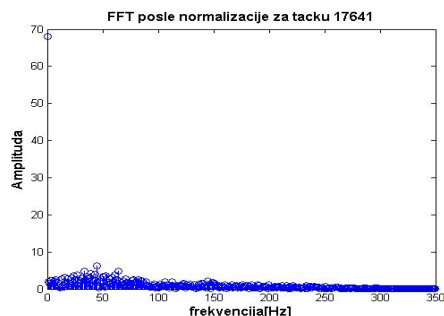


Слика 6.237: Поље притиска око аеропрофила после 0.35 секунде добијени ортогоналном SGS методом са динамичким праћењем малих величина

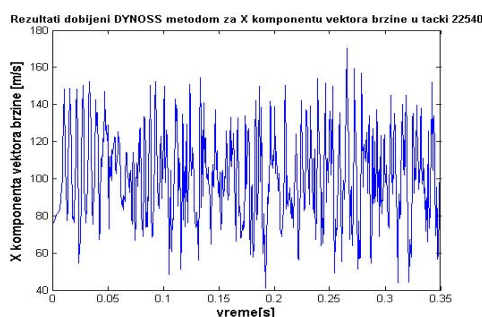
6.4.6 Временско праћење брзине у одређеним тачкама прорачунске мреже добијени Ортогоналном SGS методом са динамичким праћењем малих величина



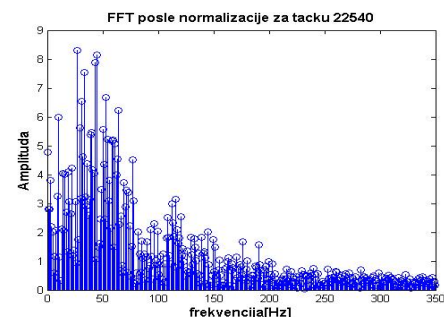
Слика 6.238: Временско праћење пројекције брзине на X осу у чвору 17641-OSGS



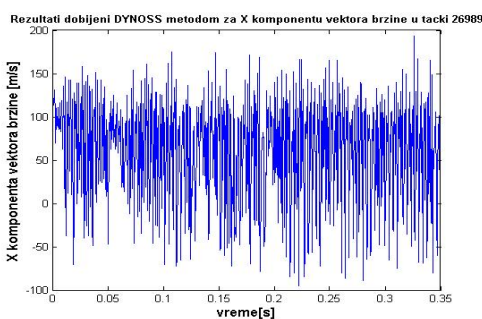
Слика 6.239: Спектар фреквенци за пројекцију брзине на X осу добијени ФФТ-ом у чвору 17641



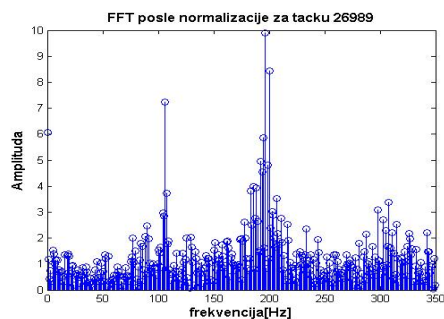
Слика 6.240: Временско праћење пројекције брзине на X осу у чвору 22540-OSGS



Слика 6.241: Спектар фреквенци за пројекцију брзине на X осу добијени ФФТ-ом у чвору 22540

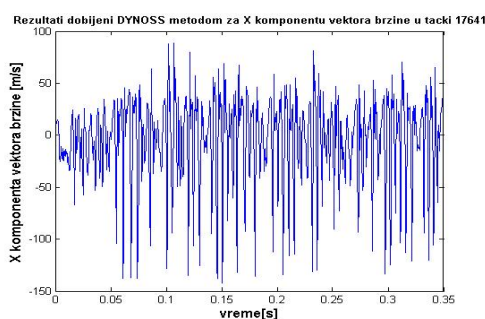


Слика 6.242: Временско праћење пројекције брзине на X осу у чвору 26989-OSGS

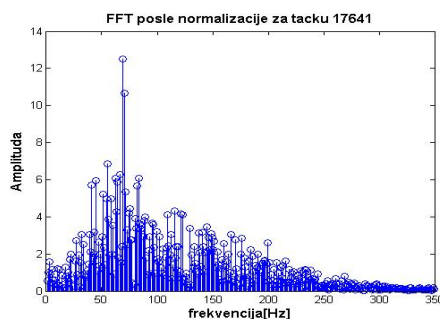


Слика 6.243: Спектар фреквенци за пројекцију брзине на X осу добијени ФФТ-ом у чвору 26989

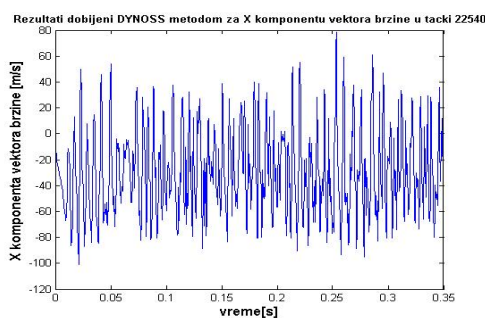
Са слика за поље притиска и брзине 6.226-6.237 око аеропрофила са отклоном закрилца се види да турбуленција има хаотичан патерн после излазне ивице закрилца што је у складу са физичким понашањем али са друге стране видимо да и унутар процена долази до флукуација које утичу на струјање око аеропрофила што нисмо



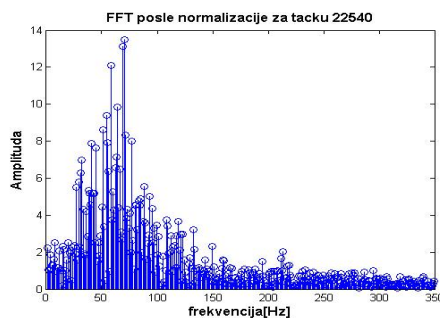
Слика 6.244: Временско праћење пројекције брзине на Y осу у чвору 17641-OSGS



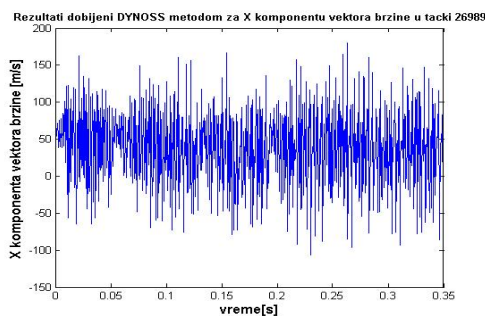
Слика 6.245: Спектар фреквенци за пројекцију брзине на Y осу добијени ФФТ-ом у чвору 17641



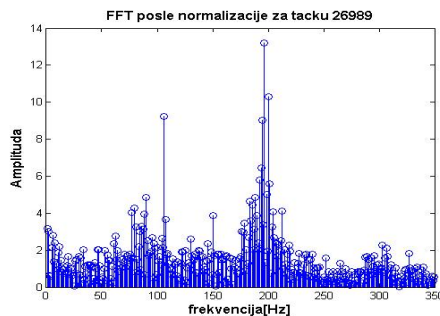
Слика 6.246: Временско праћење пројекције брзине на Y осу у чвору 22540-OSGS



Слика 6.247: Спектар фреквенци за пројекцију брзине на Y осу добијени ФФТ-ом у чвору 22540



Слика 6.248: Временско праћење пројекције брзине на Y осу у чвору 26989-OSGS



Слика 6.249: Спектар фреквенци за пројекцију брзине на Y осу добијени ФФТ-ом у чвору 26989

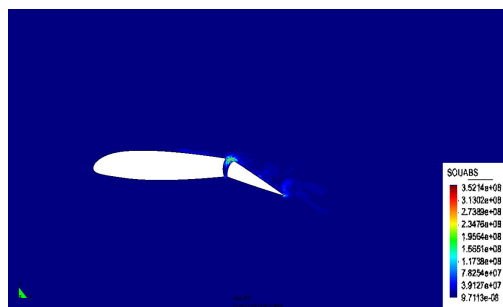
добили са LES моделом. Овај процес је можда најочигледнији на функцијама временског праћења брзине у временском интервалу. Јасно је да унутар ове функције улазе и мали и велики вртлози као и да се добија изглед временске криве карактеристичне за Рејнолдсове бројеве струјања. Исто тако на спектралном анализи добијени смо неупоредиво већи број фреквенци које су равномерно распоређени дуж фреквентне осе. Самим тим јасно је да смо са тотално нумеричким моделирањем турбуленције успели да добијемо физикално понашање за тотално развијену турбуленцију као и

за струјање унутар процепа између закрилца и тела аеропрофила.

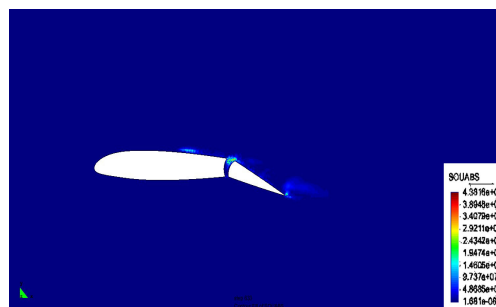
6.4.7 Поље акустичних извора добијени методом Ортогонална SGS са динамичким праћењем малих величина

На сликама 6.250-6.255 презентовани су апсолутни, иамгинарни и реални део решења акустичних извора за одређене фреквенце. Поред акустичних извора који су добијени на излазној ивици закрилца итекако су приметни извори који су добијени унутар процепа између закрилца и тела аеропрофила, тако и акустични извори који су добијени у интеракцији стурјања флуида на излазу из процепа и струјања флуида око аеропрофила што није био случај са LES моделом. Интезитет акустичних извора је већи као и велики број дипола и квадрипола који су густо груписани. Самим тим се јасно види да са презентованом методологијом која моделира турбулентно струјање добијају се јачи интезитетом, и богатију акустични извори.

На крају је урађена акустична симулација за акустичне изворе добијене отогоналном SGS методом са динамичким праћењем малих величина и плотовано је имагинарно и реално решење нехомогене Хелмхолцове једначине на сликама 6.256-6.257 као и попречни пресек на сликама 6.258 и 6.259. Ове резултате можемо да упоредимо са резултатима добијени за LES Смагорински моделом где слике 6.222-6.225 представљају решење нехомогене Хелмхолцове јендачине за исти таласни број $k_0 = 0.5$. Са графика је јасно да су добијени таласи мањег интезитета што представља редукцију звука који ће се простирати у домену.



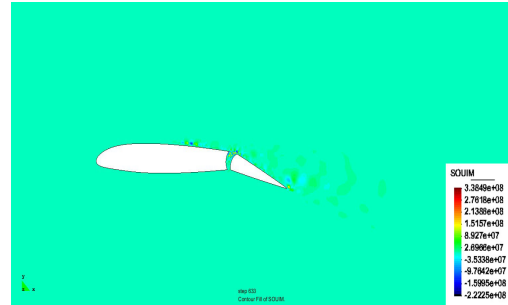
Слика 6.250: Абсолютно поље акустичних извора око аеропрофила добијени OSGS



Слика 6.251: Абсолютно поље акустичних извора око аеропрофила добијени OSGS



Слика 6.252: Имагинарно поље акустичних извора око аеропрофила добијени OSGS



Слика 6.253: Имагинарно поље акустичних извора око аеропрофила добијени OSGS

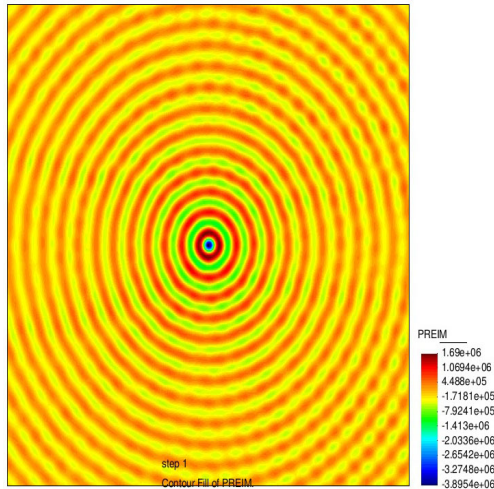


Слика 6.254: Реално поље акустичних извора око аеропрофила добијени OSGS

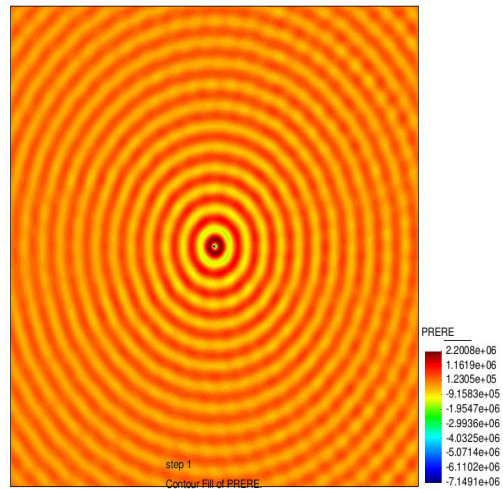


Слика 6.255: Реално поље акустичних извора око аеропрофила добијени OSGS

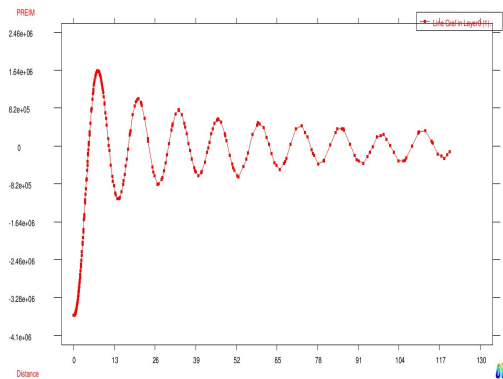
6.4.8 Акустична симулација за акустичне изворе добијене са акустичним изворима добијеним Ортогоналном SGS методом са динамичким праћењем малих величина



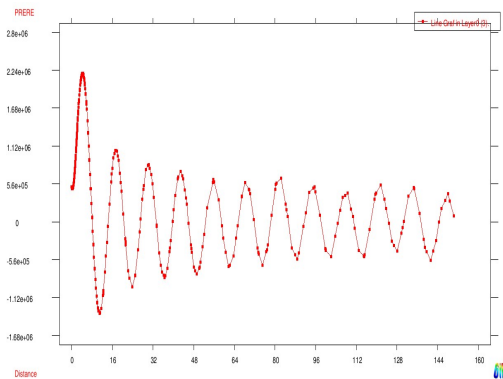
Слика 6.256: Имагинарно решење нехомогене Хелмхолцове јендачине за $k_0 = 0.5$



Слика 6.257: Realno решење нехомогене Хелмхолцове јендачине за $k_0 = 0.5$



Слика 6.258: Подужни пресек реалног решења нехомогене Хелмхолцове јендачине за $k_0 = 0.5$



Слика 6.259: Подужни пресек имагинарног решења нехомогене Хелмхолцове јендачине за $k_0 = 0.5$

Поглавље 7

Закључак

У овом поглављу ћемо се сконцентрисати на преглед научних доприноса тезе као и побољшања извршена током истраживачког рада. Поред тога ће бити предочени и могући будући правци истраживања и потребна истраживања ради даљег побољшавања методологије стабилизационе методе.

Превасходно докторска теза је изнела тотално нови правац размишљања нумеричког моделирања турбулентног струјања. Пошто већ постојећа сабгрид скејл стабилизациона метода постоји и служи да се стабилизују нестабилности које долазе приликом симулације турбулентног струјања при великим Рејнолдсовим бројевима или у случају када је конвектни члан Навије-Стоксове једначине доминантан. Додатним моделирањем малих величина или величина које се не могу ухватити прорачунском мрежом и проналажењем ових малих величина у ортогоналном простору решења добијени методом коначних елемената се добија целокупно моделирање тј. свих чланова који улазе у једначину количине кретања која је онда тотално задовољена. Поред тога самим тим што користимо SGS стабилизациону методу испуњен је инф-суп услов и добија се могућност да интерполационе функције за притисак и брзину буду истог реда што доводи до лакше имплементације и бржег рачинања презентоване методе. Моделирање Рејнолдсовог стрес тензора долази природно при раздвајању величина на оне које се могу решити прорачунском мрежом и на оне који то не могу. Додатно моделирање малих величина је дошло из Фуријеове анализе аргумената где је усвојен параметар апроксимације за поље притиска и брзине. Битно је напоменути да ови параметри могу бити

константни у сваком елементу или се могу рачунати за сваки елемент понаособ што убацује елементе адаптивних метода. Из енергије баланса се јасно показало да је коефицијент са којим се множе остатци пропорционална дисипацији енергије на нивоу малих вртлога која је једна од битних карактеристика енергетске каскаде презентоване од стране Колмогорова.

Оваквим приступом моделирања малих величина који су дефинисани у правом математичком простору где се они и налазе даје могућност овој методи да прописно моделира мале величине а самим тим и вртлоге. Поред тога је узет у обзир и временски извод малих величина којим сама метода може да моделира повратну енергију са малих вртлога ка великим вртлозима а не обрнуто што је карактеристика многих метода. Све предности презентоване методологије затим су тестиране на класичним примерима који се могу апроксимирати као равански проблеми. Ту превасходно мислимо на стајни трап и аеропрофил са закрилцима док ракета је узета као комплексна геометрија која лагано може да изазове комплексно развијено турбулентно струјање. За принцип упоређивања две методе презентоване у тези узета је иста прорачунска мрежа са истим нумеричким параметрима потребни за симулацију док је једино различит принцип нумеричког моделирања турбуленције. На примеру аеропрофила са отколоном закрилца је ухваћена физикалност процепа који утиче на струјање око аеропрофила што није био случај за LES модел исто тако је добијен прави богат спектар фреквенци који јасно приказују да се ради о развијеном хаотичном турбулентном струјању који је карактеристичан за задате Рејнолдсове бројеве струјања. Сходно томе правилном репрезентацијом и малих и великих вртлога утиче на расподелу и интензитет акустичних извора којих има много више него за LES модел и праве јасну структуру квадрипола и дипола. Аеропрофил са процепом је исто тако добра пример да модел може да ухвати понашање турбулентног струјања у присуству површина што је понекад веома тешко за класичне LES моделе, па се због тога родила целокупна заједница која моделира позитивне стране LES-а и RANS-а свртавајући их у такозване хибридне моделе. Пошто је нас превасходно интересовало тотално развијено турбулентно струјање које је извор акустичних извора направљене су две додатне симулације које лагано својом геометријом могу да изазови развијено турбулентно струјање. У ова случаја је приказана много боља презентација турбулентног струјања што је после рефлектовано на алокацију и интензитет акустичних извора. Бољом репродукцијом

акустичних извора добијали смо јаче акустичне таласе у домену што значи јачи интезитет звука што је био и иницијални подстрек за VALIANT пројекат пошто је примећено да постојеће методе дају мањи интезитет акустичних извора. На крају је приказано да презентована стабилизациона метода успешно може да реши и проблеме који се јављају код других парцијалних једначина отклањајући "pollution" грешку код Хелмхолцове једначине за велике таласне бројеве.

На крају са аспекта аероакустике показано је да је веома битно правилно ухватити не само велике вртлоге стурајња него и оне мале који локално дају флукуације које природно онда репродукују већи број акустичних извора што даје јачи акустични талас као решење Хелмхолцове једначине.

На крају ћемо по тачкама набројати две доприносе и научне доприносе докторске тезе:

- Методологија коришћена за симулацију прорачунске аероакустике је презентована у оквиру стабилизационе методе коначних елемената. Методологија се базирана на три корака код којег је први корак нестационарна симулација прорачунске механике флуида за некомп्रेसибилно струјање у просторном домену. Ова симулација служи да се добију акустични извори (двострука дивергенција Рејнолдсовог тензора) који су одговорни за генерисање аеродинамичке буке. У другом кораку методологије израчунати акустични извори су са директном Фуријеовом трансформацијом трансформисани у фреквенци домен. На крају у трећем кораку је решена Хелмхолцова једначина узимајући у обзир акустичне изворе израчунате у другом кораку као нехомогени члан једначине (Лајтхилова акустична аналогија у фреквентном домену)
- Унапређењу Стабилизационе методе Сабгрид Скејл стабилизације-"Subgrid Scale stabilization" у виду дефинисања нове методе која има ортогоналну пројекцију моделирања малих величина, тј. вртлога на простор који је дефинисан методом коначних елемената и која узима у обзир евалуацију тих малих величина у времену тј. узима се у обзир динамика малих вртлога.
- Дефинисању другачијег приступа моделирања турбулентног струјања који је чисто нумерички и који у себи носи моделирање како великих тако и малих вртлога, као и дефинисање малих величина које се не могу ухватити порачуском

мрежом у зависности од величина које се могу ухватити прорачунском мрежом. Самим тим је унапређено глобално нумеричко моделирање количине кретања које се принципијално губи у другим методама.

- Дефинисана стабилизациона метода омогућава коришћење истих апроксимативних функција за поље притиска и брзине струјања што омогућава лакшу и бржу имплементацију у софтвер који решава парцијалне диференцијалне једначине методом коначних елемената.
- Моделирање Рејнолдсовог стрес тензора који је задужен за ефекте турбулентног струјања малих вртлога и њен утицај на велике вртлоге.
- Динамичким праћењем малих величина тј. вртлога и њиховим моделирањем успешно је моделирана размена енергије између малих и великих вртлога где треба напоменути да је са овим новим приступом успешно моделирана енергија коју мали вртлози предају великим што није случај у великом броју класичних нумеричких приступа.
- Посебно треба напоменути да је са овом унапређеном методологијом успешно ухваћен спектрум у фреквеннтном домену развијеног турбулентног струјања који је приказан на конкретним примерима из аероакустичне апликације, где се показује да формулација није превише дисипативна као методологије које се обично користе у аероакустичној примени.
- Посебно је дат акценат на моделирање акустичних извора Лајтхиловом методом где наведена метода за моделирање турбулентног струјања даје диполе који се јављају не само од величина које се могу ухватити прорачунском мрежом, него и диполе који долазе од малих вртлога.
- Применом Директне Фуријеове трансформације унутар временске петље за решавање Навие-Стоксове једначине чиме се даје могућност да се уштеди велика количина меморије која је потребна за складиштење временских корака поља брзине које користи брза Фуријеова трансформација.
- Имплементација нове Стабилизационе методе за решавање Хелмхолцове једначине ефикасно решава проблеме које изазива "pollution" грешка која се јавља при великим таласним бројевима.

7.1 Будући рад и даљи правци истраживања

У овом делу ћемо се сконцентрисати на могућа будућа истраживања која могу да се спроведу да би побољшали презентовани рад. Биће разматрани будући правци за презентовану стратегију прорачунске аероакустике, као и прорачуна и моделирања турбулентног струјања и на крају правци за развој прорачуна акустичног поља.

- Неки вид анализе треба да се спроведе на прецизности прорачунатог акустичног поља. Иако је валидност Лајтхилове аналогije нашироко анализирана за континуални случај од стране многих аутора, даљи рад је потребан за анализу презентованог приступа прорачунској аероакустици.
- Надовезујући се на претходну тачку било би веома корисно да се имплементира Ристорћелијева аналогija и да се упореди тачност добијених резултата са Лајтхиловом акустичном аналогijом за неке тест или основне проблеме.
- Када би се презентована методологија кориситла на проблемима од индустријске важности (као што су брзи возови или ти тродимензионална конфигурација авиона и његових компоненти) са сигурношћу би био потребан приступ супер компјутерима да би се покрио цео спектар фреквенци који су интересантне.
- Потребно је имплементирати стабилизациону методу за тродимензиону Навије-Стоксову једначину и видети како се презентована стабилизациона методологија понаша на реалним геометријским телима као што су реалне компоненте авиона.
- Вредело би проверити да ли различите сабгрид скеил методе граде одговарајућу апроксимацију Навије-Стоксове једначине. Пошто је у тези доказано да само Галеркинов приступ методе коначних елемената са периодичним и Дирихлеовим граничним условима задовољава наведену претпоставку.
- Даља нумеричка испитивања треба да се ураде да би се даље провериле перформансе презентоване стабилизационе методе као алтернатива уобичајном приступу тј. симулацији великих вртлога LES(Large Eddy Simulation) за турбулентна струјања. Видели смо да убацувањем временског праћења малих вртлога прописно репродукује дводимензиони турбулентни спектрум.
- Нумеричко испитивање нестационарне Хелмхолцове јендачине је тек од скоро добило одговарајућу пажњу као и стабилизационе технике које су потребне да

би с превазишли проблеми "pollution" грешке за велике таласне бројеве. У тези је представљено само имплементација стабилизационе методе за једнодимензиони случај Хелмхолцове једначине. Потребно је имплементирати и решење за дводимензионо као и за тродимензиону Хелмхолцову једначину и видети како се стабилизациона метода понаша.

Прилог А

Matlab код имплементације Ортогоналне сабгрид скејл метода са динамичким праћењем малих величина

```
function [velL2,pL2,h,uex,vex,pex,u,v,p,x,y,elements,noe,nlnu] = navierstokestrans(elements,vertices,...
boundaries,fem,method,bcflagD,solver,options, verticesp, elementsp,...
boundariesp,
varargin,stabtype,sigma,mu,iexact,discu,discp,stabmethod,uDirDoffile,vDirDoffile,Defaultbc,time,texact
!Some values
intim = time(1); ! Initial time
fitim = time(2); ! Final time
dtime = time(3); ! Time step size
times = (fitim - intim)/dtime; ! Time step sizes to be computed
! Some values
[n,nov] = size(vertices);
```

```
[n,noe] = size(elements);

[nlnu] = select(fem);

! Number of pressure d.o.f.'s

if(discp == 0) ! n. of p d.o.f.'s = n. of elements

novp = noe;

nlnp = 1;

elseif(discp == -1) ! n. of p d.o.f.'s = n. of vertices

novp = max(max(elements(1:3,:)));

nlnp = 3;

elseif(discp == 1) ! n. of p d.o.f.'s = n. of elements * n. of nodes

novp = nlnu*noe;

nlnp = 3;

end

! Number of velocity d.o.f.'s per space component

if discu == -1

novv = nov;

else

novv = nlnu*noe;

end

! Coordinates

[x,y,xel,yel]=coordinates(vertices,noe,nlnu,elements);

! Boundary conditions

if(discu == -1)
```

```
[uDirDof,vDirDof]=findDirichletDof(bcflagD,boundaries,fem);

if mu>0

uDirDof = [uDirDof vDirDof];

vDirDof = uDirDof;

end

end

pDirDof(1) = 1;

! Exact solution values

ax = 0*ones(novv,1); ! Navier-Stokes adv = u ; Oseen adv = a

ay = 0*ones(novv,1); ! IMPORTANT:Oseen problem call exactvalues with stk instead
of ns

if texact == 1 ! RESTART option

load RESTART;

else

if(discp == 0) !piecewise constant pressure case

[ut,vt,pt,F,Fu] = exactvaluesdisc(x,y,xel,yel,nov,novv,...

noe,nlnu,discu,discp,elements,sigma,mu,iexact,texact-2,'ns',intim,1,ax,ay);

else

[ut,vt,pt,F,Fu] = exactvalues(x,y,nov,novv,noe,nlnu,discu,discp,elements,sigma,mu,0,0,iexact,texact-
2,'ns',intim,1,ax,ay);

end

end

! Gauss quadrature

if strcmp(fem,'P1') == 1
```

```
elem = 1; ! Triangular elements

ngaus = 3; ! Number of Gauss points

nen = 3; ! Number of nodes for velocity

nenP = 3; ! Number of nodes for pressure

nsd = 2; ! 2D problem

nenb = 2;

nenPb = 2;

quadt = 'open'; ! Quadrature type (open or closed)

if(discp == 0)

nenP = 1;

nenPb = 1; end end

[posgp,wgp,pogpb,wgpb] = Gaussquadrature(elem,ngaus,nsd,quadt);

[N,Ndref] = ShapeFunc(elem,nen,posgp,nsd);

[NP,NdrefP] = ShapeFunc(elem,nenP,posgp,nsd);

[Nb,Ndrefb] = ShapeFunc(elem,nenb,pogpb,nsd-1);

[NPb,NPdrefb] = ShapeFunc(elem,nenPb,pogpb,nsd-1);

! Basic matrices

[A,Kq,Mq,MLpq,aree] = ...

basicmatrices(vertices,noe,elements,nlnu,nlnp,novv,novp,varargin,discu,discp,wgp,N,Ndref(:,1),Ndref(:,1));

! Lumped mass matrix (velocity)

MLq = sparse(novv,novv);

for i=1:size(Mq,1)

rowsum = sum(Mq(i,:));
```



```
MLq(i,i) = rowsum;

end

! Characteristic length L0

L0sq = 0.1 * (ones(1,size(Mq,1))*Mq*ones(size(Mq,1),1))^(2/nsd);

c1 = 4;

c2 = 2;

c3 = 2;

! Stabilization parameters

hsq = (aree(1));

[taup,tauu,tauf,taug] = stabparameter(hsq,stabtype,sigma,mu,c1,c3);

clear tauu

Jpp = sparse(novp,novp);

! Loop on time

u = zeros(novv,times);

v = zeros(novv,times);

p = zeros(novp,times);

uexact = zeros(novv,times);

vexact = zeros(novv,times);

pexact = zeros(novp,times);

ktime = 0;

for itime = 1:times

ctime = intim + dtime*itime; ! Current time value

ktime = ktime + 1;
```

```

if(discp == 0)

[ux,vex,ex,F,Fu] = exactvaluesdisc(x,y,xel,yel,nov,novv,...
noe,nlnu,discu,discp,elements,sigma,mu,iexact,texact-2,'ns',ctime,1,ax,ay);

else

[ux,vex,pex,F,Fu] = exactvalues(x,y,nov,novv,noe,nlnu,discu,discp,elements,sigma,mu,0,0,iexact,texact-
2,'ns',ctime,1,ax,ay);

end

! Basic force terms

b = sparse(2*novv+novp,1);

b(1:novv) = Mq*Fu(1:novv);

b(novv+1:2*novv) = Mq*Fu(novv+1:2*novv);

Compute force term

if (discu == 1 || discp >= 0)

solex = [ux; vex];

[bu,bp] = boundaryforce(noe,elements,nlnu,nlnp,ledge,lbedg,norme,lenme,...
normb,lengb,novv,novp,0,1,varargin,discu,discp,wgpb,Nb,Ndrefb,NPb,solex,pex);

end

if (discu == 1 || discp >= 0)

b(2*novv+1:2*novv+novp) = MLpq*F + bp;

else

b(2*novv+1:2*novv+novp) = MLpq*F;

end

! Force terms associated to taug

if(discu == 1 || discp >= 0)

```

```
b(1:2*novv) = b(1:2*novv) + taug*bu;

end

!Transient force term

b(1:novv) = b(1:novv) + (1/dtime)*Mq*ut(1:novv);

b((novv+1):2*novv) = b((novv+1):2*novv) + (1/dtime)*Mq*vt(1:novv);

! Non-linear iterations

maxiter = 25;

tol = 1e-4;

iter = 0;

un = zeros(novv,1);

vn = zeros(novv,1);

pn = zeros(novp,1);

normite = sqrt(un'*Mq*un + vn'*Mq*vn + pn'*MLpq*pn);

normref = -1;

while iter <- maxiter && normite > tol*normref ! IMPORTANT : For Oseen

problem comment next 2 lines !!!

ax = un;

ay = vn;

! Convective basic matrix

[An] = basicmatrixconv(A,vertices,noe,elements,nlnu,novv,novp,varargin,discu,wgp,N,Ndref(:,,

1),Ndref(:,,2),ax,ay);

! Stab. matrices associated to tauu

[An,A2t] =
```

```
stabmatrixtauu(An,vertices,noe,elements,nlnu,nlnp,novv,novp,varargin,discu,discp,wgp,...
```

```
N,NP,NdrefP(:,:,1),NdrefP(:,:,2),stabtype,sigma,mu,
```

```
0,L0sq,c1,c2,c3,0,stabmethod,dtime,ax,ay);
```

```
! Stab. matrices associated to taup
```

```
[An] = stabmatrixtaup(An,vertices,noe,elements,nlnu,novv,novp,varargin,discu,wgp,...
```

```
N,Ndref(:,:,1),Ndref(:,:,2),stabtype,sigma,mu,0,L0sq,c1,c2,c3,0,ax,ay);
```

```
if(stabmethod == 0)
```

```
! Stab. convective matrices associated to tauu
```

```
[An,A3t] =
```

```
stabmatrixconv(An,vertices,noe,elements,nlnu,nlnp,novv,novp,varargin,discu,discp,wgp,...
```

```
N,Ndref(:,:,1),Ndref(:,:,2),NdrefP(:,:,1),NdrefP(:,:,
```

```
,2),stabtype,sigma,mu,L0sq,c1,c2,c3,ax,ay,dtime);
```

```
! Force terms associated to tauu
```

```
[bn] = stabforcestauu(b,vertices,noe,elements,nlnu,nlnp,novv,novp,varargin,...
```

```
discu,discp,wgp,N,NdrefP(:,:,1),NdrefP(:,:,2),stabtype,sigma,mu,
```

```
0,L0sq,c1,c2,c3,0,ax,ay,Fu);
```

```
! Force terms associated to taup
```

```
[bn] = stabforcestaup(bn,vertices,noe,elements,nlnu,novv,novp,varargin,...
```

```
discu,discp,wgp,N,Ndref(:,:,1),Ndref(:,:,2),NP,stabtype,sigma,mu,
```

```
0,L0sq,c1,c2,c3,0,ax,ay,F);
```

```
! Convective force terms associated to tauu
```

```
[bn] = stabforcesconv(bn,vertices,noe,elements,nlnu,novv,novp,varargin,...
```

```
discu,wgp,N,Ndref(:,:,1),Ndref(:,:,2),stabtype,sigma,mu,L0sq,c1,c2,c3,Fu,ax,ay);
```

```
end

! Transient terms

bn = bn + (A2t+A3t)*[ut; vt; pt];

! Dirichlet boundary conditions

if(discu == -1)

if Defaultbc == 1

[An,bn] = boundaryconditions(An,bn,uDirDof,vDirDof,pDirDof,novv,uex,vex,pex,'ns');

elseif Defaultbc == 2 ! BC from GiD file

[An,bn] = boundaryconditionsGiD(An,bn,uDirDoffile,vDirDoffile,pDirDof,novv,'ns');

end

end

sol = An\bn; ! Monolythic solver

else

unew = sol(1:novv);

vnew = sol(novv+1:2*novv);

pnew = sol(2*novv+1:end);

normite = sqrt((unew-un)'*Mq*(unew-un) + (vnew-vn)'*Mq*(vnew-vn) + (pnew-pn)'*MLpq*(pnew-
pn));

normref = sqrt((un)'*Mq*(un) + (vn)'*Mq*(vn) + (pn)'*MLpq*(pn));

un = unew;

vn = vnew;

pn = pnew;

iter = iter + 1; end

! Exact solution
```

```
solex = [uex; vex; pex];
```

```
Extract velocities and pressures
```

```
ut = sol(1:novv);
```

```
vt = sol(novv+1:2*novv);
```

```
pt = sol(2*novv+1:end);
```

```
u(:,itime) = ut;
```

```
v(:,itime) = vt;
```

```
p(:,itime) = pt;
```

```
uexact(:,itime) = uex;
```

```
vexact(:,itime) = vex;
```

```
pexact(:,itime) = pex;
```

```
end
```

```
un = u(:,end);
```

```
vn = v(:,end);
```

```
pn = p(:,end);
```

```
save('RESTART', 'un', 'vn', 'pn');
```

```
clear un vn pn
```

```
! Mesh size h = sqrt(hsq);
```

```
! Compute some errors
```

```
if(discu == 1)
```

```
A5 = [Juu sparse(2*novv,novp);
```

```
sparse(novp,2*novv), sparse(novp,novp)]; else A5 = [sparse(2*novv,2*novv) sparse(2*novv,novp);
```

```
sparse(novp,2*novv), sparse(novp,novp)]; end
```

! Stab. matrices associated to taup

A3 = sparse(2*novv+novp,2*novv+novp);

[A3] = stabmatrixestaup(A3,vertices,noe,elements,nlnu,novv,novp,varargin,discu,wgp,...

N,Ndref(:,1),Ndref(:,2),stabtype,sigma,mu,0,L0sq,c1,c2,c3,0,ax,ay);

velL2(1) = log10(sqrt((u(:,end) - uexact(:,end))'*Mq*(u(:,end) - uexact(:,end))...
 +(v(:,end) - vexact(:,end))'*Mq*(v(:,end) - vexact(:,end)))); !velL2

pL2(1) = log10(sqrt((p(:,end) - pexact(:,end))'*MLpq*(p(:,end) - pexact(:,end)))); !pL2

velL2(2) = log10(sqrt((sol-solex)'*A3*(sol-solex)...
 + (1/h)*(sol-solex)'*A5*(sol-solex))); !velL2

pL2(2) = 0; !log10(sqrt((p - pex)'*Kq*(p - pex)));

if(discu == discp)

pL2(2) = log10(sqrt((p(:,end) - pexact(:,end))'*Kq*(p(:,end) - pexact(:,end)) +...
 (1/h)*((p(:,end) - pexact(:,end))'*Jpp*(p(:,end) - pexact(:,end)))));

else

[Kp]= pgradmatrix(1,sigma,nov,vertices,verticesp,noe,elements,...

elementsp,nlnu,novv,novp,fem,0,1,varargin,discu,discp);

pL2(2) = log10(sqrt((p(:,end) - pexact(:,end))'*Kp*(p(:,end) - pexact(:,end)) +...
 (1/sqrt(hsq))*((p(:,end) - pexact(:,end))'*Jpp*(p(:,end) - pexact(:,end)))));

end

!-----

! basic convection matrix

!-----

function [An] = basicmatrixconv(A,vertices,noe,elements,nlu,novv,novp,varargin,discu,wgp,N,Nxi,Neta,

! Transformation from reference to real domains values

```
[detjac,dcdx,dcdy,dedx,dedy]=geotrasf2D(vertices,elements);
```

! Global matrices

! Initialization

```
C = sparse(novv,novv);
```

! Inverse of the Jacobian of element E: phi(E,index(i,j))

```
phi = [dcdx', dcdy', dedx', dedy'];
```

```
index = [[1, 2];[3, 4]];
```

! Loop over elements

```
ngaus = size(wgp,2);
```

```
for kelem=1:noe
```

```
if(discu == -1)
```

```
iglobalu = (elements(1:nlnu,kelem))';
```

```
else
```

```
inielu = (kelem-1)*nlnu;
```

```
iglobalu = inielu + [1,2,3];
```

```
end
```

```
uigaus = N*uprev(iglobalu);
```

```
vigaus = Nvprev(iglobalu);
```

! Convective Matrix $C = C_{xx} = C_{yy}$, $C_{xy} = C_{yx} = 0$

```
Clocal = zeros(nlnu,nlnu);
```

```
for ilocal = 1:nlnu
```

```
for jlocal = 1:nlnu
```



```
for igauss = 1:ngaus

Clocal(ilocal,jlocal) = Clocal(ilocal,jlocal) + wgp(igauss)*N(igauss,ilocal)* ...

(uiigauss(igauss)*(phi(kelem,index(1,1))*Nxi(igauss,jlocal) +

phi(kelem,index(2,1))*Neta(igauss,jlocal)) + ...

vigauss(igauss)*(phi(kelem,index(1,2))*Nxi(igauss,jlocal) +

phi(kelem,index(2,2))*Neta(igauss,jlocal)));

end

end

end

C(iglobalu,iglobalu) = C(iglobalu,iglobalu) + Clocal*detjac(kelem);

end

An = A + [C, sparse(novv,novv), sparse(novv,novp);

sparse(novv,novv), C, sparse(novv,novp);

sparse(novp,novv), sparse(novp,novv), sparse(novp,novp)];

!-----

! Stabilization matrix tauu

!-----

function [A,A2t] =

stabmatricestauu(A,vertices,noe,elements,nlnu,nlnp,novv,novp,varargin,discu,discp,wgp,...

N,NP,NPxi,NPeta,stabtype,sigma,mu,magpe,L0sq,c1,c2,c3,c4,stabmethod,dtime,uprev,vprev)

! ATENTION : Matrices for quadratic (or higher) elements not implemented.

! Only valid for linear (or constant) elements

! Transformation from reference to real domains values
```

```
[detjac,dcdx,dcdy,dedx,dedy]=geotrasf2D(vertices,elements);
```

```
! Stabilization parameter
```

```
hsq = detjac/2;
```

```
! stab. case
```

```
switch stabtype
```

```
case 1
```

```
lusq = hsq;
```

```
case 2
```

```
lusq = hsq; case 3
```

```
lusq = (L0sq * hsq).^0.5;
```

```
case 4
```

```
lusq = L0sq*ones(1,noe);
```

```
case 5
```

```
lusq = hsq;
```

```
end
```

```
! Global matrices
```

```
! Stabilization matrices
```

```
!novv = nlnu*noe
```

```
Su = sparse(novv,novv);
```

```
Sp = sparse(novp,novp);
```

```
Sxp = sparse(novv,novp);
```

```
Syp = sparse(novv,novp);
```

```
! Inverse of the Jacobian of element E: phi(E,index(i,j))
```

```
phi = [dcdx', dcdy', dedx', dedy'];

index = [[1, 2];[3 ,4]];

! Loop over elements

ngaus = size(wgp,2);

for kelem=1:noe

!local to global mapping for velocity

if(discu == -1)

iglobalu = (elements(1:nlnu,kelem))';

else inielu = (kelem-1)*nlnu;

iglobalu = inielu + [1,2,3];

end

!local to global mapping for pressure

if(discp == 0)

iglobalp = kelem;

elseif(discp == 1)

inielu = (kelem-1)*nlnu;

iglobalp = inielu + [1,2,3];

elseif(discp == -1)

iglobalp = (elements(1:nlnu,kelem))';

end

uigauss = N*uprev(iglobalu);

vigauss = N*vprev(iglobalu);

normu = sqrt(uigauss.^2+vigauss.^2);
```

```
! stabilization parameter

tauu = stabparu(c1,c2,c3,c4,hsq(kelem),normu,sigma,mu,magpe,L0sq,lusq(kelem));

! Su

Mlocal = zeros(nlnu,nlnu);

for ilocal = 1:nlnu

for jlocal = 1:nlnu

for igauss = 1:ngaus

Mlocal(ilocal,jlocal) = Mlocal(ilocal,jlocal) +

wgp(igauss)*N(igauss,ilocal)*N(igauss,jlocal)*tauu(igauss);

end

end

end

Su(iglobalu,iglobalu) = Su(iglobalu,iglobalu) - Mlocal*detjac(kelem);

end

if discp == 0 ! Linear elements for pressure

for kelem=1:noe

local to global mapping for pressure

if(discp == 0)

iglobalp = kelem;

elseif(discp == 1)

inielu = (kelem-1)*nlnu;

iglobalp = inielu + [1,2,3];

elseif(discp == -1)
```

```
iglobalp = (elements(1:nlnu,kelem))';  
  
end  
  
uigaus = NP*uprev(iglobalp);  
  
vigaus = NP*vprev(iglobalp);  
  
normu = sqrt(uigaus.^2+vigaus.^2);  
  
! stabilization parameter  
  
tauu = stabparu(c1,c2,c3,c4,hsq(kelem),normu,sigma,mu,magpe,L0sq,lusq(kelem));  
  
! Stab. pressure Sp  
  
Klocal = zeros(nlnp,nlnp);  
  
for ilocal = 1:nlnp  
  
for jlocal = 1:nlnp  
  
for igaus = 1:ngaus  
  
Klocal(ilocal,jlocal) = Klocal(ilocal,jlocal) + wgp(igaus)*tauu(igaus)* ...  
  
(phi(kelem,index(1,1))*phi(kelem,index(1,1))*NPxi(igaus,ilocal)*NPxi(igaus,jlocal) + ...  
  
phi(kelem,index(1,1))*phi(kelem,index(2,1))*NPxi(igaus,ilocal)*NPeta(igaus,jlocal) + ...  
  
phi(kelem,index(2,1))*phi(kelem,index(1,1))*NPeta(igaus,ilocal)*NPxi(igaus,jlocal) + ...  
  
phi(kelem,index(2,1))*phi(kelem,index(2,1))*NPeta(igaus,ilocal)*NPeta(igaus,jlocal) + ...  
  
phi(kelem,index(1,2))*phi(kelem,index(1,2))*NPxi(igaus,ilocal)*NPxi(igaus,jlocal) + ...  
  
phi(kelem,index(1,2))*phi(kelem,index(2,2))*NPxi(igaus,ilocal)*NPeta(igaus,jlocal) + ...  
  
phi(kelem,index(2,2))*phi(kelem,index(1,2))*NPeta(igaus,ilocal)*NPxi(igaus,jlocal) + ...  
  
phi(kelem,index(2,2))*phi(kelem,index(2,2))*NPeta(igaus,ilocal)*NPeta(igaus,jlocal));  
  
end  
  
end  
  
end
```

```
end

Sp(iglobalp,iglobalp) = Sp(iglobalp,iglobalp) + Klocal*detjac(kelem);

end

for kelem=1:noe

!local to global mapping for velocity

if(discu == -1)

iglobalu = (elements(1:nlnu,kelem))'; else

inielu = (kelem-1)*nlnu;

iglobalu = inielu + [1,2,3];

end

!local to global mapping for pressure

if(discp == 0)

iglobalp = kelem;

elseif(discp == 1)

inielu = (kelem-1)*nlnu;

iglobalp = inielu + [1,2,3];

elseif(discp == -1)

iglobalp = (elements(1:nlnu,kelem))';

end

uigaus = N*uprev(iglobalu);

vigaus = N*vprev(iglobalu);

normu = sqrt(uigaus.^2+vigaus.^2);

! stabilization parameter
```

```
tauu = stabparu(c1,c2,c3,c4,hsq(kelem),normu,sigma,mu,magpe,L0sq,lusq(kelem));

! Stab. pressure Sup

Glocal = zeros(nlnu,nlnp);

for ilocal = 1:nlnu

for jlocal = 1:nlnp

for igauss = 1:ngaus

Glocal(ilocal,jlocal) = Glocal(ilocal,jlocal) - wgp(igauss)*tauu(igauss)* ...

(N(igauss,ilocal)*phi(kelem,index(1,1))*NPxi(igauss,jlocal) + ...

N(igauss,ilocal)*phi(kelem,index(2,1))*NPeta(igauss,jlocal)); end

end

end

Sxp(iglobalu,iglobalp) = Sxp(iglobalu,iglobalp) + Glocal*detjac(kelem);

end

for kelem=1:noe

!local to global mapping for velocity

if(discu == -1)

iglobalu = (elements(1:nlnu,kelem));

else

inielu = (kelem-1)*nlnu;

iglobalu = inielu + [1,2,3];

end

!local to global mapping for pressure

if(discp == 0)
```

```
iglobalp = kelem;

elseif(discp == 1)

inielu = (kelem-1)*nlnu;

iglobalp = inielu + [1,2,3];

elseif(discp == -1)

iglobalp = (elements(1:nlnu,kelem))';

end

uigaus = N*uprev(iglobalu);

vigaus = N*vprev(iglobalu);

normu = sqrt(uigaus.^2+vigaus.^2);

! stabilization parameter

tauu = stabparu(c1,c2,c3,c4,hsq(kelem),normu,sigma,mu,magpe,L0sq,lusq(kelem));

! Syp

Glocal = zeros(nlnu,nlnp);

for ilocal = 1:nlnu

for jlocal = 1:nlnp

for igauss = 1:ngaus

Glocal(ilocal,jlocal) = Glocal(ilocal,jlocal) - wgp(igauss)*tauu(igauss)* ...

(N(igauss,ilocal)*phi(kelem,index(1,2))*NPxi(igauss,jlocal) + ...

N(igauss,ilocal)*phi(kelem,index(2,2))*NPeta(igauss,jlocal)); end

end

end

end

Syp(iglobalu,iglobalp) = Syp(iglobalu,iglobalp) + Glocal*detjac(kelem);
```



```
! Stab. pressure Spu = - Sup

end

end

A2t = 0;

if(stabmethod==0)

if (abs(dtime)>1e-8)

A2t = sparse([(1/dtime)*sigma*Su, sparse(novv,novv), sparse(novv,novp);
sparse(novv,novv), (1/dtime)*sigma*Su, sparse(novv,novp);
(1/dtime)*(-Sxp'), (1/dtime)*(-Syp'), sparse(novp,novp)]);

A = A + sparse([(sigma+1/dtime)*sigma*Su, sparse(novv,novv), sigma*Sxp;
sparse(novv,novv), (sigma+1/dtime)*sigma*Su, sigma*Syp;
(sigma+1/dtime)*(-Sxp'), (sigma+1/dtime)*(-Syp'), Sp]);

else

A = A + sparse([sigma*sigma*Su, sparse(novv,novv), sigma*Sxp;
sparse(novv,novv), sigma*sigma*Su, sigma*Syp;
sigma*(-Sxp'), sigma*(-Syp'), Sp]);

end

else

A = A + sparse([sparse(novv,novv), sparse(novv,novv), sparse(novv,novp);
sparse(novv,novv), sparse(novv,novv), sparse(novv,novp);
sparse(novp,novv), sparse(novp,novv), Sp]);

end

!-----
```

! stabilization matrix taup

!-----

function [A] = stabmatrixtaup(A,vertices,noe,elements,nlnu,novv,novp,varargin,discu,wgp,N,Nxi,Neta,
sigma,mu,magpe,L0sq,c1,c2,c3,c4,uprev,vprev)

! Transformation from reference to real domains values

[detjac,dcdx,dcdy,dedx,dedy]=geotrasf2D(vertices,elements);

! Stabilization parameter

gamma = 1;

beta = 1; ! for switching off taup term

hsq = detjac/2;

! stab. case

switch stabtype

case 1

lpsq = hsq; ! h = sqrt(area) = sqrt(detjac/2), c1 = 1, c2 = 2

case 2

lpsq = L0sq*ones(1,noe); ! h = sqrt(area) = sqrt(detjac/2), c1 = 1, c2 = 2

gamma = 0.1;

case 3

lpsq = (L0sq * hsq).^0.5; ! h = sqrt(area) = sqrt(detjac/2), c1 = 1, c2 = 2

case 4

lpsq = L0sq*ones(1,noe); ! h = sqrt(area) = sqrt(detjac/2), c1 = 1, c2 = 2

gamma = 0.1;

case 5

lpsq = hsq;

```
beta = 0; ! c1*mu;

end

! Integrals of useful values in the reference domain

! Stabilization matrices

lnovv = nlnu*noe

Sdxx = sparse(novv,novv);

Sdxy = sparse(novv,novv);

Sdyx = sparse(novv,novv);

Sdyy = sparse(novv,novv);

! Inverse of the Jacobian of element E: phi(E,index(i,j))

phi = [dcdx', dcdy', dedx', dedy'];

index = [[1, 2];[3 ,4]];

! Loop over elements

ngaus = size(wgp,2);

for kelem=1:noe

!local to global mapping for velocity

if(discu == -1)

iglobalu = (elements(1:nlnu,kelem))';

else

inielu = (kelem-1)*nlnu;

iglobalu = inielu + [1,2,3];

end

uigaus = N*uprev(iglobalu);
```

```
vigaus = N*vprev(iglobalu);

normu = sqrt(uiгаus.^2+vigaus.^2);

! stabilization parameter

таup = stabparp(c1,c2,c3,c4,hsq(kelem),normu,sigma,mu,magpe,gamma,beta,L0sq,lpsq(kelem));

! Stab. divergence S = [[Sxx Sxy];[Syx Syy]]

!Sdxx

Sdlocal = zeros(nlну,nlну);

for ilocal = 1:nlну

for jlocal = 1:nlну

for igaus = 1:ngaus

Sdlocal(ilocal,jlocal) = Sdlocal(ilocal,jlocal) + wgp(igaus)*таup(igaus)* ...

(phi(kelem,index(1,1))*phi(kelem,index(1,1))*Nxi(igaus,ilocal)*Nxi(igaus,jlocal) + ...

phi(kelem,index(1,1))*phi(kelem,index(2,1))*Nxi(igaus,ilocal)*Neta(igaus,jlocal) + ...

phi(kelem,index(2,1))*phi(kelem,index(1,1))*Neta(igaus,ilocal)*Nxi(igaus,jlocal) + ...

phi(kelem,index(2,1))*phi(kelem,index(2,1))*Neta(igaus,ilocal)*Neta(igaus,jlocal));

end

end

end

Sdxx(iglobalu,iglobalu) = Sdxx(iglobalu,iglobalu) + Sdlocal*detjac(kelem);

end

for kelem=1:noe

!local to global mapping for velocity

if(discu == -1)
```

```
iglobalu = (elements(1:nlnu,kelem))';

else

inielu = (kelem-1)*nlnu;

iglobalu = inielu + [1,2,3];

end

uigauss = N*uprev(iglobalu);

vigauss = N*vprev(iglobalu);

normu = sqrt(uigauss.^2+vigauss.^2);

! stabilization parameter

taup = stabparp(c1,c2,c3,c4,hsq(kelem),normu,sigma,mu,magpe,gamma,beta,L0sq,lpsq(kelem));

! Sdxy

Sdlocal = zeros(nlnu,nlnu);

for ilocal = 1:nlnu

for jlocal = 1:nlnu

for igauss = 1:ngauss

Sdlocal(ilocal,jlocal) = Sdlocal(ilocal,jlocal) + wgp(igauss)*taup(igauss)* ...

(phi(kelem,index(1,1))*phi(kelem,index(1,2))*Nxi(igauss,ilocal)*Nxi(igauss,jlocal) + ...

phi(kelem,index(1,1))*phi(kelem,index(2,2))*Nxi(igauss,ilocal)*Neta(igauss,jlocal) + ...

phi(kelem,index(2,1))*phi(kelem,index(1,2))*Neta(igauss,ilocal)*Nxi(igauss,jlocal) + ...

phi(kelem,index(2,1))*phi(kelem,index(2,2))*Neta(igauss,ilocal)*Neta(igauss,jlocal));

end

end

end

end
```

```
Sdxy(iglobalu,iglobalu) = Sdxy(iglobalu,iglobalu) + Sdlocal*detjac(kelem);

end

for kelem=1:noe

!local to global mapping for velocity

if(discu == -1)

iglobalu = (elements(1:nlnu,kelem))';

else

inielu = (kelem-1)*nlnu;

iglobalu = inielu + [1,2,3];

end

uigaus = N*uprev(iglobalu);

vigaus = N*vprev(iglobalu);

normu = sqrt(uigaus.^2+vigaus.^2);

! stabilization parameter

taup = stabparp(c1,c2,c3,c4,hsq(kelem),normu,sigma,mu,magpe,gamma,beta,L0sq,lpsq(kelem));

! Sdyx

Sdlocal = zeros(nlnu,nlnu);

for ilocal = 1:nlnu

for jlocal = 1:nlnu

for igaus = 1:ngaus

Sdlocal(ilocal,jlocal) = Sdlocal(ilocal,jlocal) + wgp(igaus)*taup(igaus)* ...

(phi(kelem,index(1,2))*phi(kelem,index(1,1))*Nxi(igaus,ilocal)*Nxi(igaus,jlocal) + ...

phi(kelem,index(1,2))*phi(kelem,index(2,1))*Nxi(igaus,ilocal)*Neta(igaus,jlocal) + ...
```

```
phi(kelem,index(2,2))*phi(kelem,index(1,1))*Neta(igauss,ilocal)*Nxi(igauss,jlocal) + ...
phi(kelem,index(2,2))*phi(kelem,index(2,1))*Neta(igauss,ilocal)*Neta(igauss,jlocal));
end
end
end
Sdyx(iglobalu,iglobalu) = Sdyx(iglobalu,iglobalu) + Sdlocal*detjac(kelem);
end
for kelem=1:noe
!local to global mapping for velocity
if(discu == -1)
iglobalu = (elements(1:nlnu,kelem));
else
inielu = (kelem-1)*nlnu;
iglobalu = inielu + [1,2,3];
end
uigauss = N*uprev(iglobalu);
vigauss = N*vprev(iglobalu);
normu = sqrt(uigauss.^2+vigauss.^2);
! stabilization parameter
taup = stabparp(c1,c2,c3,c4,hsq(kelem),normu,sigma,mu,magpe,gamma,beta,L0sq,lpsq(kelem));
! Sdyy
Sdlocal = zeros(nlnu,nlnu);
for ilocal = 1:nlnu
```

```

for jlocal = 1:nlnu

for igauss = 1:ngaus

Sdlocal(ilocal,jlocal) = Sdlocal(ilocal,jlocal) + wgp(igauss)*taup(igauss)* ...

(phi(kelem,index(1,2))*phi(kelem,index(1,2))*Nxi(igauss,ilocal)*Nxi(igauss,jlocal) + ...

phi(elem,index(1,2))*phi(kelem,index(2,2))*Nxi(igauss,ilocal)*Neta(igauss,jlocal) + ...

phi(kelem,index(2,2))*phi(kelem,index(1,2))*Neta(igauss,ilocal)*Nxi(igauss,jlocal) + ...

phi(kelem,index(2,2))*phi(kelem,index(2,2))*Neta(igauss,ilocal)*Neta(igauss,jlocal));

end

end

end

Sdyu(iglobalu,iglobalu) = Sdyu(iglobalu,iglobalu) + Sdlocal*detjac(kelem);

end

A = A + sparse([Sdxx, Sdxy, sparse(novv,novp);

Sdyx, Sdyu, sparse(novv,novp);

sparse(novp,novv), sparse(novp,novv), sparse(novp,novp)]);

!-----

! Stabilization vector tauu

!-----

function [b] = stabforcestauu(b,vertices,noe,elements,nlnu,nlnp,novv,novp,varargin,discu,discp,wgp,...

N,NPxi,NPeta,stabtype,sigma,mu,magpe,L0sq,c1,c2,c3,c4,uprev,vprev,Fu)

[detjac,dcdx,dcdy,dedx,dedy]=geotrasf2D(vertices,elements);

! Stabilization parameter

hsq = detjac/2;

```



```
! stab. case

switch stabtype

case 1

lusq = hsq;

case 2

lusq = hsq;

case 3

lusq = (L0sq * hsq).^0.5;

case 4

lusq = L0sq*ones(1,noe);

case 5

lusq = hsq;

end

!

! Stabilization matrices

Fuqx = sparse(novv,1);

Fuyy = sparse(novv,1);

Fvpx = sparse(novp,1);

Fvpy = sparse(novp,1);

! Inverse of the Jacobian of element E: phi(E,index(i,j))

phi = [dcdx', dcdy', dedx', dedy'];

index = [[1, 2];[3 ,4]];

! Loop over elements
```

```
ngaus = size(wgp,2);

for kelem=1:noe

!local to global mapping for velocity

if(discu == -1)

iglobalu = (elements(1:nlnu,kelem))';

else

inielu = (kelem-1)*nlnu;

iglobalu = inielu + [1,2,3];

end

uigaus = N*uprev(iglobalu);

vigaus = N*vprev(iglobalu);

normu = sqrt(uigaus.^2+vigaus.^2);

! stabilization parameter

tauu = stabparu(c1,c2,c3,c4,hsq(kelem),normu,sigma,mu,magpe,L0sq,lusq(kelem));

Figaus = N*Fu(iglobalu);

Fxlocal = zeros(nlnu,1);

for ilocal = 1:nlnu

for igaus = 1:ngaus

Fxlocal(ilocal) = Fxlocal(ilocal) - tauu(igaus)*wgp(igaus)*N(igaus,ilocal)*Figaus(igaus);

end

end

Fuqx(iglobalu) = Fuqx(iglobalu) + sigma*Fxlocal*detjac(kelem);

end
```

```
for kelem=1:noc

!local to global mapping for velocity

if(discu == -1)

iglobalu = (elements(1:nlnu,kelem))';

else

inielu = (kelem-1)*nlnu;

iglobalu = inielu + [1,2,3];

end

uigaus = N*uprev(iglobalu);

vigaus = N*vprev(iglobalu);

normu = sqrt(uigaus.^2+vigaus.^2);

! stabilization parameter

tauu = stabparu(c1,c2,c3,c4,hsq(kelem),normu,sigma,mu,magpe,L0sq,lusq(kelem));

Figaus = N*Fu(novv + iglobalu);

Fylocal = zeros(nlnu,1);

for ilocal = 1:nlnu

for igaus = 1:ngaus

Fylocal(ilocal) = Fylocal(ilocal) - tauu(igaus)*wgp(igaus)*N(igaus,ilocal)*Figaus(igaus);

end

end

Fuqy(iglobalu) = Fuqy(iglobalu) + sigma*Fylocal*detjac(kelem);

end

if discp = 0 ! Linear elements for pressure
```

```
for kelem=1:noe

!local to global mapping for velocity

if(discu == -1)

iglobalu = (elements(1:nlnu,kelem));

else

inielu = (kelem-1)*nlnu;

iglobalu = inielu + [1,2,3];

end

!local to global mapping for pressure

if(discp == 0)

iglobalp = kelem;

elseif(discp == 1)

inielu = (kelem-1)*nlnu;

iglobalp = inielu + [1,2,3];

elseif(discp == -1)

iglobalp = (elements(1:nlnu,kelem));

end

uigaus = N*uprev(iglobalu);

vigaus = N*vprev(iglobalu);

normu = sqrt(uigaus.^2+vigaus.^2);

! stabilization parameter

tauu = stabparu(c1,c2,c3,c4,hsq(kelem),normu,sigma,mu,magpe,L0sq,lusq(kelem));

! Stab. pressure Sup
```

```
Figaus = N*Fu(iglobalu);

Fxplocal = zeros(nlnp,1);

for jlocal = 1:nlnp

for igaus = 1:ngaus

Fxplocal(jlocal) = Fxplocal(jlocal) + wgp(igaus)*tauu(igaus)*Figaus(igaus)* ...

(phi(kelem,index(1,1))*NPxi(igaus,jlocal) + phi(kelem,index(2,1))*NPeta(igaus,jlocal));

end

end

Fxp(iglobalp) = Fxp(iglobalp) + Fxplocal*detjac(kelem);

end

for kelem=1:noe

!local to global mapping for velocity

if(discu == -1)

iglobalu = (elements(1:nlnu,kelem));

else

inielu = (kelem-1)*nlnu;

iglobalu = inielu + [1,2,3];

end

if(discp == 0)

iglobalp = kelem;

elseif(discp == 1)

inielu = (kelem-1)*nlnu;

iglobalp = inielu + [1,2,3];
```

```
elseif(discr == -1)

iglobalp = (elements(1:nlnu,kelem))';

end

uigaus = N*uprev(iglobalu);

vigaus = N*vprev(iglobalu);

normu = sqrt(uigaus.^2+vigaus.^2);

! stabilization parameter

tauu = stabparu(c1,c2,c3,c4,hsq(kelem),normu,sigma,mu,magpe,L0sq,lusq(kelem));

! Syp

Figaus = N*Fu(novv + iglobalu);

Fyplocal = zeros(nlnp,1);

for jlocal = 1:nlnp

for igaus = 1:ngaus

Fyplocal(jlocal) = Fyplocal(jlocal) + wgp(igaus)*tauu(igaus)*Figaus(igaus)* ...

(phi(kelem,index(1,2))*NPxi(igaus,jlocal) +

phi(kelem,index(2,2))*NPeta(igaus,jlocal));

end

end

Fypu(iglobalp) = Fypu(iglobalp) + Fyplocal*detjac(kelem);

end

end

b = b + [Fuqx; Fuqy; Fxpx+Fypu];

!-----
```

! Stabilization vector p

!-----

function [b]=stabforcestaup(b,vertices,noe,elements,nlnu,...

novv,novp,varargin,discu,discp,wgp,N,Nxi,Neta,...

NP,stabtype,sigma,mu,magpe,L0sq,c1,c2,c3,c4,uprev,vprev,F)

[detjac,dcdx,dcdy,dedx,dedy]=geotrasf2D(vertices,elements);

! Stabilization parameter

gamma = 1;

beta = 1; ! for switching off taup term

hsq = detjac/2;

!stab. case

switch stabtype

case 1

lpsq = hsq; ! h = sqrt(area) = sqrt(detjac/2), c1 = 1, c2 = 2

case 2

lpsq = L0sq*ones(1,noe); ! h = sqrt(area) = sqrt(detjac/2), c1 = 1, c2 = 2

gamma = 0.1;

case 3

lpsq = (L0sq * hsq).^0.5; ! h = sqrt(area) = sqrt(detjac/2), c1 = 1, c2 = 2

case 4

lpsq = L0sq*ones(1,noe); ! h = sqrt(area) = sqrt(detjac/2), c1 = 1, c2 = 2

gamma = 0.1;

case 5

```
lpsq = hsq;

beta = 0; !c1*mu;

end

! Global matrices

! Initialization

Fx = sparse(novv,1);

Fy = sparse(novv,1);

! Inverse of the Jacobian of element E: phi(E,index(i,j))

phi = [dcdx', dcdy', dedx', dedy'];

index = [[1, 2];[3, 4]];

! Loop over elements

ngaus = size(wgp,2);

for kelem=1:noe

if(discu == -1)

iglobalu = (elements(1:nlnu,kelem))';

else

inielu = (kelem-1)*nlnu;

iglobalu = inielu + [1,2,3];

end

!local to global mapping for pressure

if(discp == 0)

iglobalp = kelem;

elseif(discp == 1)
```



```
inielu = (kelem-1)*nlnu;

iglobalp = inielu + [1,2,3];

elseif(discp == -1)

iglobalp = (elements(1:nlnu,kelem))';

end

uigaus = N*uprev(iglobalu);

vigaus = N*vprev(iglobalu);

normu = sqrt(uigaus.^2+vigaus.^2);

!stabilization parameter

taup = stabparp(c1,c2,c3,c4,hsq(kelem),normu,sigma,mu,magpe,gamma,beta,L0sq,lpsq(kelem));

! Gradient matrix

! Gx

Figaus = NP*F(iglobalp);

Fxlocal = zeros(nlnu,1);

for ilocal = 1:nlnu

for igaus = 1:ngaus

Fxlocal(ilocal) = Fxlocal(ilocal) + wgp(igaus)*Figaus(igaus)*taup(igaus)* ...

(phi(kelem,index(1,1))*Nxi(igaus,ilocal) + phi(kelem,index(2,1))*Neta(igaus,ilocal));

end

end

Fx(iglobalu) = Fx(iglobalu) + Fxlocal*detjac(kelem);

end

for kelem=1:noe
```

!local to global mapping for velocity

if(discu == -1)

iglobalu = (elements(1:nlnu,kelem));

else

inielu = (kelem-1)*nlnu;

iglobalu = inielu + [1,2,3];

end

!local to global mapping for pressure

if(discp == 0)

iglobalp = kelem;

elseif(discp == 1)

inielu = (kelem-1)*nlnu;

iglobalp = inielu + [1,2,3];

elseif(discp == -1)

iglobalp = (elements(1:nlnu,kelem));

end

uigaus = N*uprev(iglobalu);

vigaus = N*vprev(iglobalu);

normu = sqrt(uigaus.^2+vigaus.^2);

! stabilization parameter

taup = stabparp(c1,c2,c3,c4,hsq(kelem),normu,sigma,mu,magpe,gamma,beta,L0sq,lpsq(kelem));

! Gy

Figaus = NP*F(iglobalp);

```
Fylocal = zeros(nlnu,1);

for ilocal = 1:nlnu

for igauss = 1:ngaus

Fylocal(ilocal) = Fylocal(ilocal) + wgp(igauss)*Figauss(igauss)*taup(igauss)* ...
(phi(kelem,index(1,2))*Nxi(igauss,ilocal) + phi(kelem,index(2,2))*Neta(igauss,ilocal));

end

end

Fy(iglobalu) = Fy(iglobalu) + Fylocal*detjac(kelem);

end

!-----
! Convective stabilization vector
!-----

function [bn] = stabforcesconv(b,vertices,noe,elements,nlnu,novv,novp,varargin,discu,wgp,...
N,Nxi,Neta,stabtype,sigma,mu,L0sq,c1,c2,c3,Fu,uprev,vprev)
[detjac,dcdx,dcdy,dedx,dedy]=geotrasf2D(vertices,elements);

! Stabilization parameter

hsq = detjac/2; ! stab. case

switch stabtype

case 1

lusq = hsq;

case 2

lusq = hsq;

case 3
```

```
lusq = (L0sq * hsq).^0.5;

case 4

lusq = L0sq*ones(1,noe);

case 5

lusq = hsq;

end

! Global matrices

! Stabilization matrices

Fx = sparse(novv,1);

Fy = sparse(novv,1);

! Inverse of the Jacobian of element E: phi(E,index(i,j))

phi = [dcdx', dcdy', dedx', dedy'];

index = [[1, 2];[3 ,4]];

! Loop over elements

ngaus = size(wgp,2);

for kelem=1:noe

if(discu == -1)

iglobalu = (elements(1:nlnu,kelem))';

else

inielu = (kelem-1)*nlnu;

iglobalu = inielu + [1,2,3];

end

uigaus = N*uprev(iglobalu);
```

```
vigaus = N*vprev(iglobalu);

normu = sqrt(uiгаus.^2+vigaus.^2);

Figaus = N*Fu(iglobalu);

! stabilization parameter

tauu = hsq(kelem)./(c1*mu + c2*sqrt(hsq(kelem))*normu + sigma*c3*lsq(kelem));

Fxlocal = zeros(nlnu,1);

for jlocal = 1:nlnu

for igaus = 1:ngaus

Fxlocal(jlocal) = Fxlocal(jlocal) + tauu(igaus)*wgp(igaus)*Figaus(igaus)*...

(uiгаus(igaus)*(phi(kelem,index(1,1))*Nxi(igaus,jlocal) +

phi(kelem,index(2,1))*Neta(igaus,jlocal)) + ...

vigaus(igaus)*(phi(kelem,index(1,2))*Nxi(igaus,jlocal) +

phi(kelem,index(2,2))*Neta(igaus,jlocal)));

end

end

Fx(iglobalu) = Fx(iglobalu) + Fxlocal*detjac(kelem);

end

for kelem=1:noe

!local to global mapping for velocity

if(discu == -1)

iglobalu = (elements(1:nlnu,kelem))';

else

inielu = (kelem-1)*nlnu;
```

```
iglobalu = inielu + [1,2,3];

end

uigaus = N*uprev(iglobalu);

vigaus = N*vprev(iglobalu);

normu = sqrt(uigaus.^2+vigaus.^2);

Figaus = N*Fu(novv + iglobalu);

! stabilization parameter

tauu = hsq(kelem)./(c1*mu + c2*sqrt(hsq(kelem))*normu + sigma*c3*lsq(kelem));

Fylocal = zeros(nlnu,1);

for jlocal = 1:nlnu

for igaus = 1:ngaus

Fylocal(jlocal) = Fylocal(jlocal) + tauu(igaus)*wgp(igaus)*Figaus(igaus)*...

(uigaus(igaus)*(phi(kelem,index(1,1))*Nxi(igaus,jlocal) +

phi(kelem,index(2,1))*Neta(igaus,jlocal)) + ...

vigaus(igaus)*(phi(kelem,index(1,2))*Nxi(igaus,jlocal) +

phi(kelem,index(2,2))*Neta(igaus,jlocal)));

end

end

Fy(iglobalu) = Fy(iglobalu) + Fylocal*detjac(kelem);

end

bn = b + [Fx; Fy; sparse(novp,1)];

!-----

! Stabilization parameter p
```

```
!-----  
  
function [taup] = stabparp(c1,c2,c3,c4,hsq,normu,sigma,mu,magpe,gamma,beta,L0sq,lpsq)  
  
taup = (c1*mu + c2*sqrt(hsq)*normu + sigma*gamma*c3*lpsq + c4*magpe*(hsq/L0sq))*beta;  
  
taup = 0*taup;  
  
end
```

```
!-----  
  
! Stabilization parameter u  
  
!-----  
  
function [tauu] = stabparu(c1,c2,c3,c4,hsq,normu,sigma,mu,magpe,L0sq,lusq)  
  
tauu = hsq./(c1*mu + c2*sqrt(hsq)*normu + sigma*c3*lusq + c4*magpe*(hsq/L0sq));  
  
end
```

Прилог В

Фортран код имплементације прорачуна акустичних извора

Ово је додатак за прорачун акустичних извора и њена Директна Фуријеова трансформација која је инкорпорирана у временску петљу нумеричког решења Навие Стоксове једначине. Код је написан у фортран 95

```
subroutine caaresten
```

```
!-----
```

```
! This subroutine calculate Reynolds stress tensor in
```

```
! space in time for computational Aeroacoustics
```

```
!-----
```

```
use defkintyp
```

```
use defmaster
```

```
use defdomain
```

```
use defaeroac
```

```
! Defining variables
```

```
real(rp) :: derux,deruy,dervx,dervy
```



```
real(rp), dimension(nmat,nmat) :: Rmat

real(rp) :: resten

integer(ip) :: idem,jdem

!Initializing variable rexti

rexti(1:npoin)=0.0rp

! Loop over elements

elements: do ielem=1,nelem

! Element properties and dimensions

pelty = 1

ispos = nnode(1)*(ielem-1)

!write(*,*)"ielem",ielem

!write(*,*)"nnode",nnode

!write(*,*)"ispos",ispos

pnode=nnode(pelty)

! write(*,*)"pnode",pnode

pgaus=ngaus(pelty)

call caagather(pnode,ndime,npoin,lnods(ielem)

! write(*,*)"elvel",elvel

call caagather(pnode,ndime,npoin,lnods(ielem)

! write(*,*)"elcod",elcod

! Gathering operations

! call gather(pnodecaa,ndime,npoin,lnods(ielem)

!write(*,*)"elvel",elvel
```

```
! call gather(ndime,npoin,pnode,lnods(ispos+1),elcod(:,:),coord(:,:))

! Cartesian derivatives and Jacobian for linear elements

call elmdel(pnode,ndime,elcod,cardd,detjm,linea,xjacm,xjaci)

! write(*,*)"cardd",cardd

! Cartesian derivatives of velocities

derux= dotproduct(cardd(1,:),elvel(1,:,1))

deruy= dotproduct(cardd(2,:),elvel(1,:,1))

dervx= dotproduct(cardd(1,:),elvel(2,:,1))

dervy= dotproduct(cardd(2,:),elvel(2,:,1))

! Components of the R matrix

Rmat(1,1)=derux

Rmat(1,2)=deruy

Rmat(2,1)=dervx

Rmat(2,2)=dervy

resten=0.0rp

! Double contraction of matrix grad(u):grad(v)

do idem=1,nmat

do jdem=1,nmat

resten= resten + Rmat(idem,jdem)*Rmat(jdem,idem)

end do

end do

! write(*,*)"resten",resten

! Storing components of reynolds stress tensor in vector rexti(npoin)
```

```
call caasterxt(resten,npoin,pnode,recti,lnods(ielem)

end do elements

recti = recti * 1.225

! write(*,*)"recti",recti

! Calculation of the Fourier transform

call caaftrete

end subroutine caaresten

subroutine caaftrete

!-----

! This subroutine calculates

! fourier transform of reynolds stress tensor

!----- use defparame

use defkintyp

use defmaster

use defdomain

use defaeroac

N=times

frequencies: do fr=1,freqs

points: do jpoin=1,npoin

soure(jpoin,fr)=soure(jpoin,fr)+(recti(jpoin)*cos(twopi*(fr-1)*(istep-1)/N)/N)

souim(jpoin,fr)=souim(jpoin,fr)+(recti(jpoin)*sin(twopi*(fr-1)*(istep-1)/N)/N)

souabs(jpoin,fr)=sqrt(soure(jpoin,fr)**2.+souim(jpoin,fr)**2.)

end do points
```

end do frequencies

end subroutine caaftrete

Прилог С

Matlab код имплементације акустичних симулација

Једнодимензиона Хелмхолц једначина са имплементираним стабилизационом техником

```
!-----
```

```
! main program
```

```
!-----
```

```
! Main program for calculating the 1D homogeneous Helmholtz equation
```

```
! domain is [0,1]
```

```
close all
```

```
clear all
```

```
clc
```

```
numelem = input('Number of elements n = '); ! Number of elements in domain
```

```
p = input(' Elements (1-linear, 2-parabolic)');
```

```
if p == 1
```

```
    numpoint = numelem + 1; ! Number of points
```

```
    domstart = 0; ! First point of domain
```

```
domend = 1;    ! Last point of domain

dh = (domend - domstart)/numelem;    ! Size of the element

elseif p == 2

numpoint = 2 * numelem + 1;

domstart = 0;

domend = 1;

dh = (domend - domstart) / (2 * numelem); end

xnode = domstart : dh : domend;    ! Vector of numerationes

k0 = input('Wave number k0 = ');    ! Wave number

disp(' ')

disp('The problem can be solved using one of the following methods');

disp(' [1] Galerkin');

disp(' [2] SGS with linear elements');

disp(' [3] SGS with quadratic elements');

stab = input ('Method = ');

disp(' ')

! Galerkin FEM approximation

if stab == 1

disp(' Galerkin formulation')

if p == 1

[K,M] = Helmholtz1D(numelem,numpoint,dh);    ! mass and stiffness matrix

else

[K,M] = Helmholtz1Dquad(numelem,numpoint,xnode);
```

```
end

elseif stab == 2

[K,M,S] = Helmholtz1DSGSlin(numelem,numpoint,dh,k0);

else

[K,M,S] = Helmholtz1DSGSquad(numelem,numpoint,dh,k0,xnode);

end

A = zeros(2*numpoint,2*numpoint);

f = zeros(2*numpoint,1);

if stab == 1

A(1:numpoint,1:numpoint) = K - k0 ^2 * M;

A(numpoint+1:2*numpoint, numpoint+1 :2*numpoint) = K - k0 ^2 * M;

elseif stab == 2

A(1:numpoint,1:numpoint) = K - k0 ^2 * M + S;

A(numpoint+1:2*numpoint, numpoint+1 :2*numpoint) = K - k0 ^2 * M + S;

else

A(1:numpoint,1:numpoint) = K - k0 ^2 * M + S;

A(numpoint+1:2*numpoint, numpoint+1 :2*numpoint) = K - k0 ^2 * M + S;

end

! Boundary conditiones

! Dirichlet boundary condition

A(1,1) = 1;

A(1,2:2*numpoint) = 0;

A(numpoint+1,1:2*numpoint) = 0;
```

```
A(numpoint+1,numpoint+1) = 1;

f(1)=1;

!Robin boundary conditiones

A(numpoint,2*numpoint) = k0;

A(2*numpoint,numpoint) = -k0;

! SOLUTION

press = A;

! EXACT SOLUTION

i = sqrt(-1);

pexact = exp(i*k0*xnode);

! INTERPOLANT SOLUTION

xq = xnode;

vq1 = interp1(xnode,real(pexact),xq);

vq2 = interp1(xnode,imag(pexact),xq);

! ERRORS

pexactre = real(pexact);

pexactim = imag(pexact);

errorre = abs(pexactre' - press(1:numpoint));

errorim = abs(pexactim' - press(numpoint+1:2*numpoint));

n = norm(errorre);

disp('errorre')

disp(n);

! L2 error norm
```



```
e2 = l2errorlinear(numpoint, xnode, press,k0);

disp('L2 norm error')

disp(e2);

! H1 seminorm error norm

h1s = h1serrorlinear ( numpoint, xnode, press,k0);

disp('H1 seminorm error')

disp(h1s);

!postprocessing

xnodeex = 0:0.01:1;

pexactsol = exp(i*k0*xnodeex);

figure(1)

plot(xnodeex,pexactsol,'-og')

hold on

plot(xq,vq1,'-*r')

hold on

plot(xnode,press(1:numpoint),'-b')

title('Real part of solution')

xlabel('x')

ylabel('Rep')

legend('Exact','Interp','FEM Sol')

hold off

xnodeex = 0:0.01:1;

pexactim = imag(exp(i*k0*xnodeex));
```

```
figure(2)

plot(xnodeex,pexactim,'-og')

hold on

plot(xq,vq2,'-r')

hold on

plot(xnode,press(numpoint+1:2*numpoint),'-b')

xlabel('x')

ylabel('Imp')

title('Imaginary part of solution')

legend('Exact','Interp','FEM Sol')

hold off

!-----

! Helmholtz 1D

!-----

function [K,M] = Helmholtz1D(numelem,numpoint,dh)

! function calculate stiffness matrix K and mass matrix M for solving

! inhomogeneous equation

xigauss = [-1/sqrt(3) 1/sqrt(3)];

wigauss = [1 1];

[nigauss migauss] = size(xigauss);

Nksi = zeros(migauss,migauss);

for i = 1:migauss

Nksi (1,i) = (1 - xigauss(1,i))/2;
```

```
Nksi (2,i) = (1 + xigauss(1,i))/2;

end

Nksider = [-1/2 1/2;-1/2 1/2];

K = zeros(numpoint,numpoint);

M = zeros(numpoint,numpoint);

jacob = dh/2;

invjacob = 2/dh;

for j = 1:numelem

isp = [j j+1];

weight = wigauss * jacob;

for igauss = 1:migauss

N = Nksi(igauss,:);

Nx = Nksider(igauss,:) * invjacob;

wig = weight(igauss);

K(isp,isp) = K(isp,isp) + wig * (Nx' * Nx);

M(isp,isp) = M(isp,isp) + wig * (N' * N);

end

end

!-----

! Helmholtz SGS stabilization

!-----

function [K,M,S] = Helmholtz1DSGSlin(numelem,numpoint,dh,k0)

! function for calculating Helmholtz equation applying
```

```
! SGS stabilization with linear elements

tausgslin = -(1/k0^2) + (6/(k0^4 * dh^2)) * ((1-cos(k0 * dh))/(2 + cos(k0 * dh)));

xigauss = [-1/sqrt(3) 1/sqrt(3)];

wigauss = [1 1];

[nigauss migauss] = size(xigauss);

Nksi = zeros(migauss,migauss);

for i = 1:migauss

Nksi (1,i) = (1 - xigauss(1,i))/2;

Nksi (2,i) = (1 + xigauss(1,i))/2;

end

Nksider = [-1/2 1/2;-1/2 1/2];

K = zeros(numpoint,numpoint);

M = zeros(numpoint,numpoint);

S = zeros(numpoint,numpoint);

jacob = dh/2;

invjacob = 2/dh;

for j = 1:numelem

isp = [j j+1];

weight = wigauss * jacob;

for igauss = 1:migauss

N = Nksi(igauss,:);

Nx = Nksider(igauss,:) * invjacob;

wig = weight(igauss);
```

```
K(isp,isp) = K(isp,isp) + wig * (Nx' * Nx);
```

```
M(isp,isp) = M(isp,isp) + wig * (N' * N);
```

```
S(isp,isp) = S(isp,isp) + wig * taugslin * (k0 ^2 * N') * (-k0 ^2 * N );
```

```
end
```

```
end
```

```
!----- ! L2 - error !-----  
-----
```

```
function e2 = l2errorlinear ( n, x, u, k0 )
```

```
! L2ERRORLINEAR estimates the L2 error norm of a finite element solution.
```

```
! Discussion:
```

```
! We assume the finite element method has been used, over an interval [A,B]
```

```
! involving N nodes, with piecewise linear elements used for the basis.
```

```
! The coefficients U(1:N) have been computed, and a formula for the
```

```
! exact solution is known.
```

```
! This function estimates the L2 norm of the error:
```

```
! L2NORM = Integral ( A ← X ← B ) ( U(X) - EXACT(X) )^2 dX
```

```
! Parameters:
```

```
! Input, integer N, the number of nodes.
```

```
! Input, real X(N), the mesh points.
```

```
! Input, real U(N), the finite element coefficients.
```

```
! Input, function EQ = EXACT ( X ), returns the value of the exact
```

```
! solution at the point X.
```

```
! Output, real E2, the estimated L2 norm of the error.
```

```
e2 = 0.0;
```

```
j = sqrt(-1);

! Quadrature definitions.

quadnum = 2;

abscissa(1) = -0.577350269189625764509148780502;

abscissa(2) = +0.577350269189625764509148780502;

weight(1) = 1.0;

weight(2) = 1.0;

! Integrate over each interval.

for i = 1 : n - 1

xl = x(i);

xr = x(i+1);

ul = u(i);

ur = u(i+1);

for q = 1 : quadnum

xq = ( ( 1.0 - abscissa(q) ) * xl ...

+ ( 1.0 + abscissa(q) ) * xr ) ...

/ 2.0;

wq = weight(q) * ( xr - xl ) / 2.0;

! Use the fact that U is a linear combination of piecewise linears.

uq = ( ( xr - xq ) * ul ...

+ ( xq - xl ) * ur ) ...

/ ( xr - xl );

eq = ( ( xr - xq ) * exact(i) ...
```

```
+ ( xq - xl ) * exact(i+1) ) ...
```

```
/ ( xr - xl );
```

```
eq = exact ( xq );
```

```
eq = real(exp(j*k0*xq));
```

```
e2 = e2 + wq * ( uq - eq )^2;
```

```
end
```

```
end
```

```
e2 = sqrt ( e2 );
```

```
return
```

```
end
```

```
!-----
```

```
! H1 - seminorm
```

```
!-----
```

```
function h1s = h1errorlinear ( n, x, u, k0 )
```

```
!! H1ERRORLINEAR: seminorm error of a finite element solution.
```

```
! Discussion:
```

```
! We assume the finite element method has been used, over an interval [A,B]
```

```
! involving N nodes, with piecewise linear elements used for the basis.
```

```
! The finite element solution U(x) has been computed, and a formula for the
```

```
! exact derivative V'(x) is known.
```

```
! This function estimates the H1 seminorm of the error:
```

```
!
```

```
! H1S = sqrt ( integral ( A ← x ← B ) ( U'(x) - V'(x) )^2 dx
```

```
! Parameters:

! Input, integer N, the number of nodes.

! Input, real X(N), the mesh points.

! Input, real U(N), the finite element coefficients.

! Input, function EQ = EXACTUX ( X ), returns the value of the exact
! derivative at the point X.

! Output, real H1S, the estimated seminorm of the error.

h1s = 0.0;

j = sqrt(-1);

! Quadrature definitions.

quadnum = 2;

abscissa(1) = -0.577350269189625764509148780502;

abscissa(2) = +0.577350269189625764509148780502;

weight(1) = 1.0;

weight(2) = 1.0;

! Integrate over each interval.

for i = 1 : n - 1

xl = x(i);

xr = x(i+1);

ul = u(i);

ur = u(i+1);

for q = 1 : quadnum

xq = ( ( 1.0 - abscissa(q) ) * xl ...
```



```
+ ( 1.0 + abscissa(q) ) * xr ) ...
```

```
/ 2.0;
```

```
wq = weight(q) * ( xr - xl ) / 2.0;
```

! The piecewise linear derivative is a constant in the interval.

```
uxq = ( ur - ul ) / ( xr - xl );
```

```
exq = real(j*k0*exp(j*k0*xq));
```

```
h1s = h1s + wq * ( uxq - exq )^2;
```

```
end
```

```
end
```

```
h1s = sqrt ( h1s );
```

```
return
```

```
end
```

Дводимензиона хомогена Хелмхолц једнаћина

! FILE: helmholtz.m

! AUTHOR: V. Jazarevic function [velL2,h,uex,u,x,y,elements,noe,nlnu]=helmholtz(elements,vertices,...

boundaries,fem,bcflagD,Wavenumberk0,Wavedirectionteta,ixact,discu,discp,uDirDoffile,Defaultbc)

```
[n,nov] = size(vertices);
```

```
[n,noe] = size(elements);
```

```
[nlnu] = select(fem);
```

! Number of velocity d.o.f.'s per space component

```
if discu == -1
```

```
novv = nov;
```

```
else
```

```
novv = nlnu*noe;

end

! Coordinates

[x,y,xel,yel]=coordinates(vertices,noe,nlnu,elements);

! Exact solution values

ax = 0;

ay = 0;

if(discp == 0) !piecewise constant pressure case

[ux,vx,px,F,Fu] = exactvaluesdisc(x,y,xel,yel,nov,novv,...
noe,nlnu,discu,discp,elements,0,mu,iexact,0,'helmh',0,0,ax,ay);

else

[ux,vx,px,F,Fu] = exactvalues(x,y,nov,novv,noe,nlnu,discu,discp,elements,
0,0,Wavenumberk0,Wavedirectionteta,iexact,0,'helmh',0,0,ax,ay);

end

clear px

!Gauss quadrature

if strcmp(fem,'P1') == 1

elem = 1; ! Triangular elements

ngaus = 3; ! Number of Gauss points

quadt = 'open'; ! Quadrature type (open or closed)

nen = 3; ! Number of nodes for velocity

nsd = 2; ! Number of nodes for pressure

nenb = 2; ! 2D problem
```

```

end

[posgp,wgp,pogpb,wgpb] = Gaussquadrature(elem,ngaus,nsd,quadt);

[N,Ndref] = ShapeFunc(elem,nen,posgp,nsd);

[Nb,Ndrefb] = ShapeFunc(elem,nenb,pogpb,nsd-1);

! Basic matrices

[Kq,Mq,MLq,aree] = basicmatriceslaplacian(vertices,noe,elements,nlnu,novv,discu,wgp,N,Ndref(:,1),Noe);

!Build global matrices

! Boundary Edge info for implementation of Robin B.C

[ledge,lbedg,rdom,cdom,lenge,norme,lengb,normb] = mesharrays(nov,noe,nlnu,elements,vertices);

clear ledge lenge norme

[g]=gfunction(lbedg,wgpb,elements,vertices,Wavenumberk0,Wavedirectionteta,pogpb);

[Juu,gu] = Robinbcforu(noe,elements,nlnu,lbedg,normb,lengb,novv,1,discu,wgpb,Nb,g,Wavenumberk0);

! System matrix

A =Kq+i*Wavenumberk0*Juu-Wavenumberk0^2*Mq;

hsq = (aree(1));

!Compute force term

b = zeros(novv,1);

! Basic force terms

b(1:novv,1) =gu(1:novv);

sol = A\u208b;

clear A b

! Extract pressures

u = sol(1:novv);

```

```
!-----! g-function !-----  
-----  
function [g]=gfunction(lbedg,wgpb,elements,vertices,Wavenumberk0,Wavedirectionteta,pogpb)  
  
! Loop over edges  
  
permb = [1 2; 2 3; 3 1];  
  
sigij = [1 -1;-1 1];  
  
sgpui = [1 -1];  
  
ngaus = size(wgpb,2);  
  
nbedg = size(lbedg,1);  
  
wgpb = wgpb*0.5;  
  
! Initialization  
  
g = sparse(size(lbedg,1),ngaus); !complex to real gr  
  
for iedgb = 1:nbedg  
  
elem1 = lbedg(iedgb,1);  
  
face1 = lbedg(iedgb,2);  
  
iglobalu(:,1,1) = elements(permb(face1,:),elem1);  
  
xpoint1=vertices(1,iglobalu(1));  
  
ypoint1=vertices(2,iglobalu(1));  
  
xpoint2=vertices(1,iglobalu(2));  
  
ypoint2=vertices(2,iglobalu(2));  
  
hx=abs(xpoint1-xpoint2);  
  
hy=abs(ypoint1-ypoint2);  
  
xm=(xpoint1+xpoint2)/2;  
  
ym=(ypoint1+ypoint2)/2;
```

```

for igauss = 1:ngaus

x = xm + (hx/2)*pogpb(igauss); ! x-coordinate of the gauss point

y = ym + (hy/2)*pogpb(igauss); ! y-coordinate of the gauss point

if ypoint1==0 && ypoint2==0

g(iedgb,igauss)=g(iedgb,igauss)+i*(Wavenumberk0

-(Wavenumberk0*sind(Wavedirectionteta)))*exp(i*Wavenumberk0*cosd(Wavedirectionteta)*x);

elseif xpoint1==1 && xpoint2==1

g(iedgb,igauss)=g(iedgb,igauss)

+i*(Wavenumberk0+Wavenumberk0*cosd(Wavedirectionteta))*exp(i*Wavenumberk0*cosd(Wavedirect

+i*Wavenumberk0*sind(Wavedirectionteta)*y);

elseif ypoint1==1 && ypoint2==1

g(iedgb,igauss)=g(iedgb,igauss)

+i*(Wavenumberk0+Wavenumberk0*sind(Wavedirectionteta))*exp(i*Wavenumberk0*cosd(Wavedirect

+i*Wavenumberk0*sind(Wavedirectionteta));

elseif xpoint1==0 && xpoint2==0

g(iedgb,igauss)=g(iedgb,igauss)+i*(Wavenumberk0-

Wavenumberk0*cosd(Wavedirectionteta))*exp(i*Wavenumberk0*sind(Wavedirectionteta)*y);

end end end

function [Juu,gu]=Robinbcforu(noe,elements,nlnu,lbedg,...

normb,lengb,novv,coeffBDF,discu,wgpb,Nb,g,Wavenumberk0)

nnodb = 2; !number of vertices per edge

! Initialization

Juu = sparse(novv,novv);

```

```
gu = sparse(2*novv,1);

! Loop over edges

permb = [1 2; 2 3; 3 1];

sigij = [1 -1;-1 1];

sgpui = [1 -1];

ngaus = size(wgpb,2);

nbedg = size(lbedg,1);

wgpb = wgpb*0.5;

! Boundary edges

for iedgb = 1:nbedg

    elem1 = lbedg(iedgb,1);

    face1 = lbedg(iedgb,2);

    iglobalu(:,1,1) = elements(permb(face1,:),elem1);

! Compute local matrices

    Juulo = zeros(nnodb,nnodb);

    guulo = zeros(nnodb,1);

    for igauss = 1:ngaus

        for inodb = 1:nnodb

            for jnodb = 1:nnodb

                Juulo(inodb,jnodb) = Juulo(inodb,jnodb) + wgpb(igauss)*lengb(iedgb)*...

                Nb(igauss,inodb)*Nb(igauss,jnodb);

            end

        end

    end

end
```

```
end

for igauss = 1:ngauss

for inodb = 1:ninodb

guulo(inodb)= guulo(inodb)+wgpb(igauss)*lengb(iedgb)*Nb(igauss,inodb)*g(iedgb,igauss);
end end

! Assembling

Juu(iglobalu(:,1,1),iglobalu(:,1,1))=...

Juu(iglobalu(:,1,1),iglobalu(:,1,1))+Juulo;

gu(iglobalu(:,1,1))=gu(iglobalu(:,1,1))+guulo;

end
```

Литература

- [1] Ewert R. Rpm – the fast random particle-mesh method to realize unsteady turbulent sound sources and velocity fields for caa applications. *AIAA paper 2007-3506.*, 2007.
- [2] Morris P.J. Long L.N. Bangalore A. Wang Q. A nonlinear disturbance equation method for supersonic jet noise. *Journal of Computational Physics*, 133:56–74, 1997.
- [3] Labourasse E. Sagaut P. Reconstruction of turbulent fluctuations using a hybrid rans/les approach. *Journal of Computational Physics*, 182:301–336, 2002.
- [4] Durbin P. A. Separated flow computations with the $k-\epsilon-\nu$ model. *AIAA Journal*, Vol. 33, No. 4,:659–664, 2002.
- [5] Singer B.A. Lockard D.P. Brentner K.S. Computational aeroacoustic analysis of slat trailing-edge flow. *AIAA Journal*, Vol. 38, No. 9,:1558–1564, 2000.
- [6] M. Roger M. Casalino D. Jacob. Prediction of rod-airfoil interaction noise using the fflowcs-williams-hawkings analogy. *AIAA Journal*, Vol. 41, No. 2,:182–191, 2003.
- [7] Khorrami M. Choudhari M. Jenkins L. Characterization of unsteady flow structures near leading-edge slat: Part ii: 2d computations. *AIAA Paper*, pages 2004–2802., 2004.
- [8] M. R. Streett C. L. Casper J. H. Lockard D. P. Khorrami. Investigation of volumetric sources in airframe noise simulations. *AIAA Paper*, pages 2004–2805, 2004.
- [9] Lockard D.P. Khorrami M.R. Li F. High resolution calculation of a simplified landing gear. *AIAA Paper*, pages 2004–2887, 2004.

- [10] M. Travin A. Shur, M. Spalart P.R. Squires K.D. Starelets. Three dimensionality in reynolds-averaged navier–stokes solutions around two-dimensional geometries. *AIAA Journal*, Vol. 43, No. 6:1230–1242, 2005.
- [11] Shur M.L. Spalart P.R. Strelets M. Noise prediction for increasingly complex jets. part i, methods and tests; part ii, applications. *International Journal Aeroacoustics*, Vol. 4, No. 3-4:213–266, 2005.
- [12] Menter F. Egorov Y. A scale adaptive simulation model using two-equation models. *AIAA Paper*, pages 2005–1095, 2005.
- [13] Spalart P.R. Jou W.-H. Strelets M. Allmaras S.R. Comments on the feasibility of les for wings and on a hybrid, rans/les approach. *Proceedings of 1st AFOSR International Conference on DNS/LES*, Greyden Press, Columbus, OH,, pages 137–147, 1997.
- [14] M. Spalart P. Strelets M. Travin A. Shur. Detached-eddy simulation on an airfoil at high angle of attack. *Engineering Turbulence Modelling and Experiments*, W.Rodi and D.Laurence, Eds. Elsevier,, Vol. 4:137–147, 1999.
- [15] Travin A. Shur M. Strelets M. Spalart P. Detached-eddy simulation past a circular cylinder. *Journal of Flow, Turbulence and Combustion*, Vol. 63:293–313, 2000.
- [16] M. Strelets. Detached eddy simulation of massively separated flows. *AIAA Paper 2001-0879*, 2001.
- [17] Hedges L.S. Spalart P.R. Travin A.K. Detached-eddy simulations over a simplified landing gear" ,. *Journal of Fluids Engineering*, Vol. 124, No.2:413–423, 2002.
- [18] J. Thiele F. Rung T. Eschricht, D. Yan. Sound radiation from the vortex flow past a generic side mirror. *AIAA Paper 2001-2549*, 2002.
- [19] Souliez F. Long L.N. Morris P.J. Sharma A. Landing gear aerodynamic noise prediction using unstructured grids. *International Journal of Aeroacoustics*, Vol. 124, No.2:115–135, 2002.
- [20] Greschner B. Thiele F. Casalino D. Jacob M.C. Influence of turbulence modeling on the broadband noise simulation for complex flows. *AIAA paper 2004-2943*., 2004.

- [21] Allen R. Mendonca F. Kirkham D. Rans and des turbulence model predictions of noise on the m219 cavity at $m=0.85$. *International Journal of Aeroacoustics*, Vol. 4 No.1-2:135–152, 2005.
- [22] A. Greschner B. Thiele F. Jacob M. Casalino D. Benyahia A. Gurr. Prediction of sound generated by a rod-airfoil configuration using easm des and the generalised lighthill/fw-h analogy. *Proceedings of the Euromech Colloquium no. 467 - Turbulent Flow and Noise Generation.*, 2005.
- [23] Allen R. Mendonca F. Kirkham D. Rans and des turbulence model predictions of noise on the m219 cavity at $m=0.85$. *International Journal of Aeroacoustics*, Vol. 4 No.1-2:135–152, 2005.
- [24] Greschner B. Yu C. Zheng S. Zhuang M. Wang Z. Thiele F. Knowledge based airfoil aerodynamic and aeroacoustic design. *AIAA paper 2005-2968.*, 2005.
- [25] Mockett C. Greschner B. Knacke T. Perrin J. Yan J. Thiele F. Demonstration of improved des methods for generic and industrial applications. in: *Advances in hybrid rans-les modelling. Notes on Numerical Fluid Mechanics and Multidisciplinary Desig*, Vol. 97:222–231, 2005.
- [26] G. Mary I. Ta P.L. Nolin. Les inflow conditions for turbulent boundary layers of complex flows using database. *AIAA Paper 2006-2888*, 2006.
- [27] F. Mathey. Computation of trailing-edge noise using a zonal rans-les approach and acoustic analogy. *AIAA Paper 2006-2888*, 2006.
- [28] Jarrin N. Benhamadouche S. Laurence D. Prosser R. A synthetic-eddy-method for generating inflow conditions for largeeddy simulations. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, Vol. 27, No.4:585–593., 2006.
- [29] L. Davidson. Using isotropic synthetic fluctuations as inlet boundary conditions for unsteady simulations. *Advances and Applications in Fluid Mechanics.*, Vol. 1: 1–35, 2007.
- [30] Hardin J.C. and Lamkin S. L. Aeroacoustic computation of cylinder wake flow. *AIAA Journal*, Vol. 2:51–57, 2007.
- [31] L. Gutin. On the sound field of a rotating airscrew. *Phys. Z. Sowjetunion.*, Vol. 9: 57–71, 1936.

- [32] J. Rayleigh. The theory of sound. *Reprinted by Dover, New York*,, 1945.
- [33] V. Strouhal. On a special type of tone excitation. *Ann. Phys.*, Vol. 5:216–251, 1878.
- [34] M. Lighthill. On sound generated aerodinamically i.general theory. *Proc. R. Soc. Lond.*, 211 A, page 564–587, 1952.
- [35] M. Lighthill. On sound generated aerodinamically ii.turbulence as a source of sound. *roc. R. Soc. Lond.*, 211 A, page 564–587, 1954.
- [36] D. Crighton. Acoustics as a branch of fluid mechanics. *J. Fluid Mech.*, page 261–298, 1981.
- [37] J. Hardin and M. Hussaini. Computational aeroacoustics. *Springer-Verlag*, 1993.
- [38] N. Curle. The influence of solid boundaries on aerodynamic sound. *Proc. R. Soc.Lond.*, 231 A 1187:, page 505–514, 1955.
- [39] J. Ffowcs-Williams. Hydrodynamic noise. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, page 197–222, 1969.
- [40] J. Ffowcs-Williams and D. Hawkings. Sound generated by turbulence and surfaces in arbitrary motion. *Phil. Trans. Roy. Soc. A*, 264, page 321–342, 1969.
- [41] R. Legendre. Bruits émis par la turbulence. *ONERA Publ. 1981-3*, page 321–342, 1983.
- [42] O. Phillips. The intensity of aeolian tones. *J. Fluid Mech.*, page 607–624, 1956.
- [43] H. Ribner. The generation of sound by turbulent jets. *Adv. Appl. Mech.*, 8, 1964.
- [44] G. Lilley. On noise from air jets. *Proc. R. Soc. Lond.*,211 A, page 564–587, 1952.
- [45] S. Crow. Aerodynamic sound emission as a singular perturbation problem. *Stud. Appl. Math.*, 49, page 21–44, 1970.
- [46] J. Ristorcelli. A closure for the compressibility of the source terms in lighthill’s acoustic analogy. *Technical Report ICASE Report 97-44, NASA/CR-1997-201738*, 1997.
- [47] M. Howe. Contributions to the theory of aerodynamic sound, with application to excess jet noise and the theory of the flute. *J. Fluid Mech.*, 71, page 625–673, 1975.

- [48] A. Powell. Theory of vortex sound. *J. Acoust. Soc. Am.*, 36, 1964.
- [49] A. Powell. Vortex sound: An alternative derivation of mohring's formulation. *J. Acoust. Soc. Am.*, 97, 1994.
- [50] H. Hubbard. Aeroacoustics of flight vehicles. theory and practice. volume i. *Noise Sources. Acoustical Society of America*, 1995.
- [51] H. Hubbard. Aeroacoustics of flight vehicles. theory and practice. volume ii. *Noise Control. Acoustical Society of America*, 1995.
- [52] M. Howe. A review of the theory of trailing edge noise. *J. Sound Vibr.*, 61, page 437–465, 1978.
- [53] Y. Guo. Application of the fflowcs-williams/hawkings equation to two-dimesnional problems. *J. Fluid Mech*, page 201–221, 2000.
- [54] C. Seror P. sagaut C. Bailly and D. Juvé. On the radiated noise computed by large-eddy simulation. *Phys. Fluids*, 13, page 4876–4878, 2001.
- [55] J. Whitmire and S. Sarkar. Validation of acoustic-analogy predictions for sound radiated by turbulence. *Phys. Fluids*, 12, page 381–391, 2000.
- [56] V. Wells and R. Renaut. Computing aerodynamically generated noise. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, page 161–199, 1997.
- [57] M. Lighthill. The final panel discussion, in computational aeroacoustics, j.c. hardin and m.y. hussaini (eds.),. *Springer Verlag*, page 499–513, 1993.
- [58] D. Crighton. Computational aeroacoustics for low mach number flows. in j. hardin and m. hussaini editors computational aeroacoustics. *Springer Verlag*, 1993.
- [59] F. Bastin P. Lafon and S. Candel. Computation of jet mixing noise due to coherent structures: the plane jet case. *J. Fluid Mech*, page 261–304, 1997.
- [60] D. Chapman. Computational aerodynamics, development and outlook. *AIAA Journal*, page 1293–1313, 1979.
- [61] W. Zorumski. Classical theoretical approaches to computational aeroacoustics. *Springer Verlag*,, page 161–199, 1993.

- [62] O. Inoue and N. Hatakeyama. Sound generation by a two-dimensional circular cylinder in a uniform flow. *J. Fluid Mech*, page 285–314, 2002.
- [63] B. Mitchell S. Lele and P. Moin. Direct computation of the sound from compressible co-rotating vortex pair. *J. Fluid Mech*, page 113–142, 1999.
- [64] M. Gennaretti L. Lucer and L. Morino. A unified integral methodology for aerodynamics and aeroacoustics of rotors. *J. Sound Vibr*, page 467–489, 1997.
- [65] F. Farrassat and M. Meyers. Extension of kirchoff’s formula to radiation from moving surfaces. *J. Sound Vibration*, page 451–460, 1998.
- [66] C. Bailly and D. Juvé. A stochastic approach to compute subsonic noise using linearized euler equations. *AIAA Paper*, 1999.
- [67] J. Djambazov C. Lai and K. Pericleous. Development of numerical techniques for near-field aeroacoustic computations. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, page 719–731, 1999.
- [68] T. Kambe T. Minota and Y. Ikushima. Acoustic wave emitted by vortex ring passing near the edge of a half plane. *J. Fluid Mech*, pages 77–103, 1985.
- [69] T. Kambe T. Minota and Y. Ikushima. Acoustics emissions by vortex motions. *J. Fluid Mech*, page 643–666, 1986.
- [70] E. Manoha B. Trof and P. Sagaut. Trailing-edge noise prediction using large-eddy simulation and acoustic analogy. *AIAA J.*, Vol. 4:575–583, 1985.
- [71] A. Oberai F. Roknaldin and T. Hughes. Computation of trailing-edge noise due to turbulent flow over an airfoil. *AIAA J.*, Vol. 40:77–103, 1985.
- [72] M. Wang and P. Moin. Computation of trailing-edge flow and noise using large-eddy simulation. *AIAA J.*, Vol. 38:2201–2209, 2000.
- [73] P. Lockard. An efficient, two-dimensional implementation of the ffwoes-williams and hawkins equation. *J. Sound Vibr.*, 229, page 897–911, 2000.
- [74] S. Chang X. Wang and C. Chow. The space-time conservation-element and solution-element method. a new high resolution and genuinely multidimensional paradigm for solving conservation laws. *J. Comput. Phys.*, 159, page 89–136, 1999.

-
- [75] M. E. Goldstein. Aeroacoustics. *Mc Graw-Hill*, page 89–136, 1976.
- [76] M. S. Howe. Theory of vortex sound. *Cambridge Texts in Applied Mathematics*, page 89–136, 2003.
- [77] M. S. Howe. Acoustics of fluid-structure interactions. *Cambridge University Press*, 1998.
- [78] P. Morse and K. Ingard. Theoretical acoustics. *Princeton University Press*, 1968.
- [79] P. Nelson and S. Elliot. Active control of sound. *Academic Press*, 1992.
- [80] M. Lighthill. Waves in fluids. *Cambridge University Press*, 1978.
- [81] A. Pierce. Acoustics: An introduction to its physical principles and applications. *Mc Graw-Hill*, 1981.
- [82] O. Guasch and R. Codina. An algebraic subgrid scale finite element method for the convected helmholtz equation in two dimensions with applications in aeroacoustics. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 196:4672–4689, 2007.
- [83] S. Pope. Turbulent flows. *Cambridge University Press*, 2000.
- [84] P. Sagaut. Large eddy simulation for incompressible flows. *Scientific Computing*, *Springer*, 2001.
- [85] T. Hughes L. Mazzei and K. Jansen. Large eddy simulation and the variational multiscale method. *Comput. Visual. Sci*, pages 47–59, 2000.
- [86] T. Hughes. Multiscale phenomena: Green’s function, the dirichlet-to-neumann formulation, subgrid scale models, bubbles and the origins of stabilized formulations. *Methods Appl. Mech. Engrg*, page 387–401, 1995.
- [87] T Hughes G Feijóo L Mazzei and J Quincy. The variational multiscale method—a paradigm for computational mechanics. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg*, Vol. 13:3–24, 1998.
- [88] T. Hughes L Mazzei and A. Oberai. Large eddy simulation of turbulent channel flow by the variational multiscale method. *Phys. Fluids*, page 1784–1798, 2001.

- [89] T. Hughes L Mazzei and A. Oberai. The multiscale formulation of large eddy simulation: Decay of homogeneous isotropic turbulence. *Phys. Fluids*, page 505–512, 2001.
- [90] V. Calo. Residual based multiscale turbulence modeling: finite volume simulations of bypass transition. phd thesis. *Department of Civil and Environmental Engineering, Stanford University*, 2004.
- [91] R. Codina. Stabilization of incompressibility and convection through orthogonal sub-scales in finite element methods. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg*, page 1579–1599, 2000.
- [92] R. Codina. Stabilized finite element approximation of transient incompressible flows using orthogonal subscales. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg*, page 1579–1599, 2002.
- [93] R. Codina J. Principe O. Guasch and S. Badia. Time dependent subscales in the stabilized finite element approximation of incompressible flow problems. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg*, page 2413–2430, 2007.
- [94] D. Lilly. The representation of small-scale turbulence theory in numerical simulation experiments. In *H. Goldstine, editor, Proc. IBM Scientific Computing Symposium on Environmental Sciences*, 1967.
- [95] V. Canuto. Large eddy simulation of turbulence: a subgrid scale model including shear, vorticity, rotation and buoyancy. *Astrophysical J*, page 729–752, 1994.
- [96] P. Spalart. Trends in turbulence treatment. *Technical Report AIAA Paper*, pages 2000–2306, 2000.
- [97] P. Spalart W. Jou M. Strelets and S. Allmaras. Comments on the feasibility of les for wings and on a hybrid rans/les approach, in advances in dns/les,. *Columbus, OH: Greyden*, page 137–148, 1997.
- [98] B. Vreman B. Geurts and H. Kuerten. Large-eddy simulation of the turbulent mixing layer. *J. Fluid Mech*, page 357–390, 1997.
- [99] A. Leonard. Energy cascade in large eddy simulation of turbulent fluid flows. *Adv. Geophys*, page 237–248, 1974.

- [100] J. Smagorinsky. General circulation experiments with the primitive equations. i: The basic experiment. *Mon. Wea. Rev.*, page 99–164, 1963.
- [101] M. Germano. Differential filters for the large eddy simulation of turbulent flows. *Phys. Fluids*, page 1755–1757, 1986.
- [102] M. Germano. Differential filters of elliptic type. *Phys. Fluids*, page 1757–1758, 1986.
- [103] C. Fureby G. Tabor. Mathematical and physical constraints on large eddy simulations. *Theoret. Comput. Fluid Dynamics*, page 85–102, 1997.
- [104] S. Ghosal. Mathematical and physical constraints on large eddy simulation of turbulence. *AIAA Journal.*, Vol. 37:425–433, 1999.
- [105] S. Ghosal and P. Moin. The basic equations of the large eddy simulation of turbulent flows in complex geometry. *Journal Computation Physsics*, page 24–37, 1995.
- [106] C. Speziale. Galilean invariance of subgrid-scale stress models in large-eddy simulation of turbulence. *J. Fluid Mech*, page 55–62, 1985.
- [107] U. Piomelli. High reynolds number calculations using the dynamic subgrid-scale stress model. *Phys. Fluids*, page 1484–1490, 1993.
- [108] M. Germano U. Piomelli P. Moin W. Cabot. A dynamic subgrid-scale eddy viscosity model. *Phys. Fluids*, page 1760–1765, 1991.
- [109] D. Carati S. Ghosal and P. Moin. On the representation of backscatter in dynamic localization models. *Phys. Fluids*, page 606–616, 1995.
- [110] W. Layton. Advanced models for large eddy simulation. *Von Karman Institute for Fluid Dynamics*, Ed. H. Decononck, September 2002.
- [111] W. Layton. A mathematical introduction to large eddy simulation. *Von Karman Institute for Fluid Dynamics*, Ed. H. Decononck, September 2002.
- [112] W. Layton. Variational multiscale methods and subgrid scale viscosity. *Von Karman Institute for Fluid Dynamics*, Ed. H. Decononck, September 2002.
- [113] V. John. Variational multiscale methods and subgrid scale viscosity. *Springer-Verlag*, 2004.

- [114] L. Berselli T. Iliescu and W. Layton. Mathematics of large eddy simulation of turbulent flows. *Springer-Verlag*, 2006.
- [115] F. Chow and P. Moin. A further study of numerical errors in large-eddy simulations. *Journal in Computational Physics*, Vol. 184, 2003.
- [116] B. Knaepen O. Debligny and D. Carati. Large-eddy simulation without filter. *Journal in Computational Physics*, Vol. 205:98–107, 2005.
- [117] J. Guermond J. Oden and S. Prudhomme. Mathematical perspectives on large eddy simulation models for turbulent flows. *Journal Mathematical Fluid Mechanics*, Vol. 6:194–248, 2004.
- [118] J. Guermond and S. Prudhomme. On the construction of suitable solutions to the navier-stokes equations and questions regarding the definition of large eddy simulation. *Journal Physics. D.*, Vol. 207:64–78, 2005.
- [119] J. von Neumann and R. Richtmyer. A method for the numerical calculation of hydrodynamical shocks. *Journal Applied Physics*, 1950.
- [120] A. Brooks and T. Hughes. Streamline upwind / petrov-galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible navier-stokes equation. *Computation Methods Applied. Mechanical. Engineering*, Vol. 32: 199–259, 1982.
- [121] T. Hughes L. Franca and M. Balestra. A new finite element formulation for computational fluid dynamics: V. circumventing the babuška-brezzi condition: a stable petrov-galerkin formulation for the stokes problem accommodating equalorder interpolations. *Computation Methods Applied. Mechanical. Engineering*, Vol. 59: 85–99, 1986.
- [122] T. Hughes L. Franca and G. Hulbert. A new finite element formulation for computational fluid dynamics: Vii. the stokes problem with various well-posed boundary conditions: symmetric formulations that converge for all velocity/pressure spaces. *Computation Methods Applied. Mechanical. Engineering*, Vol. 65:85–96, 1987.
- [123] L. Franca and R. Stenberg. Error analysis of some galerkin least-squares methods for the elasticity equations. *Computation Methods Applied. Mechanical. Engineering*, Vol. 28:1680–1697, 1991.

- [124] L. Franca and R. Stenberg. Error analysis of some galerkin least-squares methods for the elasticity equations. *Computation Methods Applied. Mechanical. Engineering*, Vol. 28:1680–1697, 1991.
- [125] L. Franca and C. Farhat. Bubble functions prompt unusual stabilized finite element methods. *Computation Methods Applied. Mechanical. Engineering*, Vol. 123: 299–308, 1998.
- [126] R. Codina. On stabilized finite element methods for linear systems of convection diffusion- reaction equations. *Computation Methods Applied. Mechanical. Engineering*, Vol. 188:61–82, 2000.
- [127] Y. Bazilevs V. Calo J. Cottrell T. Hughes A. Reali and G. Scovazzi. Variational multiscale residual-based turbulence modeling for large eddy simulation. *Computation Methods Applied Mechanical Engineering*, 2007.
- [128] J. Leray. Essai sur le mouvement d'un fluide visqueux emplissant l'espace. *Acta Math*, page 193–248, 1934.
- [129] A. Kolmogorov. The local structure of turbulence in incompressible viscous fluids for very large reynolds number. *Dokl. Akad. Sci. Nauk. SSSR*, page 299–330, 1941.
- [130] C. Foias O. Manley R. Rosa and R. Temam. Navier-stokes equations and turbulence. encyclopedia of mathematics and its applications. *Cambridge University Press*, 2001.
- [131] U. Frisch. Turbulence, the legacy of a.n. kolmogorov. *Cambridge University Press*, 1995.
- [132] L. Richardson. Weather prediction by numerical process. *Cambridge: Cambridge University Press*, 1922.
- [133] G. Batchelor. Pressure fluctuations in isotropic turbulence. *Proc. Camb. Phil. Soc.*, page 359–374, 1951.
- [134] A. Obukhov. On the distribution of energy in the spectrum of turbulent flow. *Dokl. Akad. Sci. Nauk. SSSR*, page 22–24, 1949.
- [135] A. Monin and A. Yaglom. Statistical fluid mechanics. *Mechanics of Turbulence. Volume II. Cambridge MA: MIT Press.*, page 22–24, 1975.

- [136] J. Gibbon and E. Titi. Attractor dimension and small length scale estimates for the three dimensional navier-stokes equations. *Nonlinearity*, page 109–119, 1997.
- [137] P. Constantin C. Foias and R. Temam. Attractors representing turbulent flows. *Memoirs of AMS*, page 53:314, 1985.
- [138] S. Ghosal. An analysis of numerical errors in large-eddy simulations of turbulence. *Journal Computation Physics*, page 187–206, 1996.
- [139] A. Dunca V. John and W. Layton. The commutation error of the space averaged navier-stokes equations on a bounded domain in contributions to current challenges in mathematical fluid mechanics, advances in mathematical fluid mechanics. *Birkhauser Verlag Basel*,, page 53–78, 2004.
- [140] J. Guermond J. Oden and S. Prudhomme. An interpretation of the navier-stokes alpha model as a frame-indifferent leray regularization. *Phys. D*, pages 23–30, 2003.
- [141] J. Guermond. Finite-element-based faedo-galerkin weak solutions to the navier-stokes equations in the three-dimensional torus are suitable. *J. Math. Pures Appl*, page 451–464, 2006.
- [142] R. Codina. Analysis of a stabilized finite element approximation of the oseen equations using orthogonal subscales. *Applied Numerical Mathematics*, 2010.
- [143] J.W. Cooley J.W. Tukey. An algorithm for the machine calculation of complex fourier series. *Mathematics Calculation*, Vol. 19:297–301, 1965.
- [144] Smith J. Mathematics of the discrete fourier transform. *Stanford University*, 2002.
- [145] I. Harari. Curvey of finite element methods for time harmonic acoustics. *Computational Methods in Applied Mechanical Engineering*, Vol. 195:1594–1607, 2006.
- [146] F. Ihlenburg. Finite element analysis of acoustic scattering. *Applied Mathematical Sciences 132*, Springer Verlag,, 1998.
- [147] J. Keller D. Givoli. Exact nonreflecting boundar conditions. *Journal Computation Physics*, Vol. 182:172–192, 1989.
- [148] D. Givoli J. Keller. A finite element method for large domains. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg*, Vol. 76:41–66, 1989.

- [149] R. Astley. Infinite elements for wave problems: a review of current formulations and an assessment of accuracy. *International Journal Numerical Methods Engineering*, Vol. 49:951–976, 2000.
- [150] P. Bettess. Infinite elements. *Penshaw Press*, 1992.
- [151] I. Harari M. Slavutin and E. Turkel. Analytical and numerical studies of a finite element pml for the helmholtz equation. *Journal Computation Acoustics*, Vol. 8: 121–137, 2000.
- [152] J. Berenger. A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves. *Journal Computation Physics*, Vol. 114:185–200, 1994.
- [153] S. Abarbanel D. Gottlieb. A mathematical analysis of the pml method. *Journal Computation Physics*, Vol. 134:357–363, 1997.
- [154] E. Bécache S. Fauqueux P. Joly. Stability of perfectly matched layer. *Journal Computation Physics*, Vol. 188:399–433, 2003.
- [155] I. Harari T. Hughes. Finite element methods for the helmholtz equation in an exterior domain: model problems. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg*, Vol. 188: 57–96, 1991.
- [156] I. M. Babuška S. A. Sauter. Is the pollution effect of the fem avoidable for the helmholtz equation considering high wave numbers. *SIAM J. Numer. Anal.*, Vol. 34:2392–2423, 1997.
- [157] G. Gabard R. Astley and M. Tahar. Stability and accuracy of finite element methods for flow acoustics i: general theory and application to one-dimensional propagation. *International Journal Numerical Methods Engineering*, Vol. 63:974–987, 2005.
- [158] K. Gerdes and F. Ihlenburg. On the pollution effect in fe solutions of the 3d helmholtz equation. *Computational Methods Applied Mechanical Engineering*, Vol. 170:155–172, 1999.
- [159] L. Thompson P. Pinsky. A galerkin least-squares finite element method for the two-dimensional helmholtz equation. *International Journal Numerical Methods Engineering*, Vol. 38:371–397, 1995.

- [160] G. Gabard R. Astley and M. Tahar. Stability and accuracy of finite element methods for flow acoustics i: general theory and application to one-dimensional propagation. *International Journal Numerical Methods Engineering*, Vol. 63:947–973, 2005.
- [161] I. Harari T. Hughes. Galerkin/least-squares finite element methods for the reduced wave equation with non-reflecting boundary conditions in unbounded domains. *Computation Methods Applied Mechanical Engineering*, Vol. 98:411–454, 1992.
- [162] Boško Rašuo Vladimir Jazarevic. Numerical prediction of aerodynamic noise generated from missile for low mach number flows. *Technical Gazette*, Will be published in june 2017.
- [163] De Roeck W. Baelmans M. Desmet W. Aerodynamic/aeroacoustic splitting technique for computation aeroacoustics applications at low-mach numbers. *AIAA Journal*, Vol. 46, No.2:463–475, 2009.
- [164] Boško Rašuo Vladimir Jazarević. Computation of acoustic sources for the landing gear during the take-off and landing. *FME Transaction*, Vol. 41 No 3:180–188, 2013.
- [165] Boško Rašuo Vladimir Jazarević. Numerical calculation of acoustic sources for the landing gear of airplane during the take-off and landing. *PAMM-Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics*, Vol. 15:529–530, 2015.
- [166] Neil Ashton Alastair West Fred Mendonca. Slat noise prediction using hybrid rans-les methods of structured and unstructured grids. *AIAA Aviation*, 2015.

Прилог 1.

Изјава о ауторству

Потписани-а Vladimir Jazarević

број индекса D21/12

Изјављујем

да је докторска дисертација под насловом

Optimizacija aeroakustičnih fenomena kod
uzgonskih površina

- резултат сопственог истраживачког рада,
- да предложена дисертација у целини ни у деловима није била предложена за добијање било које дипломе према студијским програмима других високошколских установа,
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио/ла ауторска права и користио интелектуалну својину других лица.

Потпис докторанда

У Београду, 22.06.2016.



Прилог 2.

Изјава о истоветности штампане и електронске верзије докторског рада

Име и презиме аутора Vladimir Jazarević

Број индекса 021/12

Студијски програм Vazduhoplovstvo

Наслов рада Optimizacija aeroakustičnih fenomena kod uzgonskih površina

Ментор Boško Rašuo

Потписани/а Vladimir Jazarević

Изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предао/ла за објављивање на порталу **Дигиталног репозиторијума Универзитета у Београду**.

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Београду.

Потпис докторанда

У Београду, 22. 06. 2016



Прилог 3.

Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом:

Optimizacija aeroakustičnih fenomena kod uzgonskih površina

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство
2. Ауторство - некомерцијално
3. Ауторство – некомерцијално – без прераде
4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима
5. Ауторство – без прераде
6. Ауторство – делити под истим условима

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци, кратак опис лиценци дат је на полеђини листа).

У Београду, 22.06.2016.

Потпис докторанда



1. Ауторство - Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце, чак и у комерцијалне сврхе. Ово је најслободнија од свих лиценци.
2. Ауторство – некомерцијално. Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела.
3. Ауторство - некомерцијално – без прераде. Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела. У односу на све остале лиценце, овом лиценцом се ограничава највећи обим права коришћења дела.
4. Ауторство - некомерцијално – делити под истим условима. Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада.
5. Ауторство – без прераде. Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела.
6. Ауторство - делити под истим условима. Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада. Слична је софтверским лиценцама, односно лиценцама отвореног кода.