

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
АРХИТЕКТОНСКИ ФАКУЛТЕТ

Предраг М. Несторовић

**3D ОПТИЧКА ДЕФОРМАЦИЈСКО-НАПОНСКА
АНАЛИЗА МОДЕЛСКИХ NURBS СТРУКТУРА
КОНСТРУИСАНИХ БРЗОМ ИЗРАДОМ
ПРОТОТИПА**

докторска дисертација

Београд, 2016.

UNIVERSITY OF BELGRADE
FACULTY OF ARCHITECTURE

Предраг М. Несторовић

**3D OPTICAL STRAIN AND STRESS ANALYSIS OF
NURBS STRUCTURES MODELS CONSTRUCTED
BY RAPID PROTOTYPING**

Doctoral Dissertation

Belgrade, 2016.

ментор:

Академик Ђорђе Злоковић

редовни члан

Српске академије наука и уметности

чланови комисије:

др Ташко Манески

редовни професор

Универзитет у Београду Машински факултет

др Глигор Раденковић

ванредни професор

Универзитета у Београду Грађевински факултет

Изјава захвалности

Докторска дисертација настала је захваљујући сугестијама и подршци великог броја људи којима би овом приликом желео да се захвалим.

Посебну захвалност дугујем свом ментору академику Борђу Злоковићу који је подржао мој рад и који је искуством и саветима усмеравао истраживање и допринео његовој реализацији.

Изузетно се захваљујем професорима др Ташку Манском и др Глигору Раденковићу који су са становишта својих области експертности конкретним ангажовањем и коментарима помогли да проблем којим сам одабрао да се бавим буде истражен. У том смислу професору Манском се захваљујем на уложеном труду да са својим сарадницима омогући спровођење најзначајнијег дела експерименталних истраживања и нумеричких анализа. С друге стране професору Раденковићу се захваљујем на несебичној помоћи око теоријског аспекта истраживања и математичкој формулацији проблема.

Такође, ваома се захваљујем и професору др Милораду Зрилићу у чијој лабораторији на Технолошко-металуришком факултету Универзитета у Београду су реализована испитивања материјала као и докторанду Саши Ковачевићу коме дугујем валику захвалност на помоћи око програмске имплементације.

Неизмерну захвалност дугујем својој породици за огромно разумевање, подршку и помоћ током рада на дисертацији.

Предраг Несторовић

Подаци о докторској дисертацији

Наслов дисертације

3D ОПТИЧКА ДЕФОРМАЦИЈСКО-НАПОНСКА АНАЛИЗА
МОДЕЛСКИХ NURBS СТРУКТУРА КОНСТРУИСАНИХ БРЗОМ
ИЗРАДОМ ПРОТОТИПА

Резиме

Радам ће бити предложен неконвенционални поступак за пројектовање *NURBS* просторних структура, којим се интегришу методе за израду физичких модела *Rapid Prototyping* и метода *3D* оптичког мерења деформација, у поступку конципирања пројектних решења. Дефинисање овакве процедуре, омогућило би једноставније и ефикасније пројектовање неконвенционалних *NURBS* структура. *Rapid Prototyping* представља технологију која се константно развија и чији потенцијали, још увек нису довољно искоришћени у процесу конципирања архитектонских форми. У оквирима овог рада конструисани модели биће коришћени у поступку структуралне анализе. Дијагностика понашања структуре у погледу деформације и напона намеће се као потребан корак, провере резултата компјутерске анализе методом коначних елемената, када су у питању неконвенционална решења и представља логичан корак који предходи фази изградње реалне конструкције. Примена ових технологија обезбедила би изналажење рационалних решења у конструктивном погледу.

Рад је заснован на становишту да је коришћењем потенцијала напредних дигиталних технологија и мултидисциплинарним приступом могуће извршити унапређење процеса пројектовања. Бројни примери изузетно успешних архитектонских пројеката реализованих на овим принципима су потврда оправданости оваквог приступа. А константан развој дигиталних технологија, у смислу унапређења перформанси, отвара могућност увођења одређених технологија, које иницијално нису намењене процесу архитектонског

пројектовања, у поступак решавања архитектонско-инжењерских проблема. Уз напомену да је постизање квалитетних резултата подједнако условљено познавањем проблема и технологије која се користи за његово решавање, архитектури је наметнуто да усавршава средства своје продукције излазећи из оквира сопствене струке. У том смислу се сматра оправданим коришћење предложене научне методе коју је могуће применити за пројектовање неконвенционалних *NURBS* структура.

Полазећи од теорије гредних и површинских носача у најопштијим сплајн параметарским *NURBS* координатама у раду је формулисан читав низ изогеометријских Кирховљевих елемената љуски и Бернули Ојлерових гредних елемената произвољног континуитета а што није могуће класичним изопараметарским приступом. Генералисане координате ових елемената су искључиво трансляторна померања тачака осе штапа као и тачака средње површи љуске. Овакви елементи егзактно описују оригиналну геометрију поменутих структура што има за последицу ефикасну напонско деформацијску анализу са релативно малим бројем не само коначних елемената већ и степени слободе померања.

Кључне речи

3D оптика, деформацијско-напонска анализа, *NURBS* структуре, Rapid Prototyping - брза израда прототипа, IGA, MKE

Научна област

Архитектура и урбанизам

Ужа научна област

Конструктивни системи

УДК број

72.01: 624. 04: 004 (043.3)

Data on Doctoral Dissertation

Thesis title

3D OPTICAL STRAIN AND STRESS ANALYSIS OF NURBS
STRUCTURES MODELS CONSTRUCTED BY RAPID PROTOTYPING

Abstract

The work will propose the unconventional process for the design of NURBS spatial structures, which integrates methods for fabrication of physical models Rapid Prototyping and methods for 3D optical strain measurement, in the process of conception the design solutions. Defining such a procedure would allow more simple and more efficient design of unconventional NURBS structures. Rapid Prototyping represents a technology that is constantly evolving and whose potential is still not enough exploited in the process of designing architectural forms. Within the framework of this paper constructed models will be used in the process of structural analysis. Diagnostics of structural behavior in terms of strain and stresses is imposed as a necessary step of validation of the results of computer analysis using finite element method when it comes to unconventional solutions, and is a logical step that precedes the phase of the building of real structure. The application of these technologies would ensure finding rational solutions in a structural terms.

The work is based on the view that the using potentials of the advanced digital technologies and multidisciplinary approach enables the improvement of the design process. Numerous examples of extremely successful architectural projects realized on these principles confirm validity of this approach. A constant development of digital technologies, in terms of improvement of performances, opens up the possibility of introducing certain technologies, which are not initially intended for the process of architectural design, in the process of solving of architectural-engineering problems. With the remark that achieving quality results is equally conditioned by knowledge of the problem and the technology used for its solution. It is imposed to the architecture to refine the means for production out of the framework of its field. In this sense, it is

considered justified use of the proposed scientific method that can be applied for designing unconventional NURBS structures.

Starting from the theory of beam and surface bearing elements in the general Spline parametric NURBS coordinates a series of isogeometric Kirchhoff shell elements and Bernoulli Euler beam elements of arbitrary continuity is formulated in the work, which was not possible by classical isoperimetric approach. Generalized coordinates of these elements are purely translation displacements of the points on the rod axis and the points on the middle surface of the shell. These elements accurately describe the original geometry of the mentioned structures which results in efficient strain and stress analysis with a relatively small number of both finite elements and degrees of freedom of displacements.

Key Words

3D optics, strain and stress analysis, NURBS structures, Rapid Prototyping, IGA, FEM

Academic Expertise

Architecture and Urbanism

Field of Academic Expertise

Structural Systems

UDC number

72.01: 624. 04: 004 (043.3)

САДРЖАЈ:

I Списак коришћених ознака и преглед акронима.....	13
II Списак табела.....	16
II Списак илустрација.....	16
1.0 Уводни део - општа разматрања.....	22
1.1 Проблеми и предмет истраживања.....	23
1.2 Циљ истраживања.....	24
1.3 Задаци истраживања.....	25
1.4 Хипотезе.....	26
1.5 Методе истраживања.....	27
1.6 Структура рада.....	32
2.0 Примена дигиталних технологија у процесу пројектовања NURBS структура.....	34
2.1 Примена дигиталних технологија у процесу генерисања форме.....	35
2.2 Дигиталне технологије производње физичких модела комплексних форми.....	43
2.2.1 Производња.....	47
2.2.1.1 Субтрактивна производња.....	48
2.2.1.2 Адитивна производња.....	49
2.2.1.3 Формативна производња.....	49
2.3 Технологија брзе израде прототипа- Rapid Prototyping (RP).....	50
2.3.1 Приказ уређаја типа 1- <i>MakerBot® Replicator™ 2 Desktop Printer</i>	52
2.3.2 Функција/Улога <i>RP</i> у процесу пројектовања.....	56
2.4 Примена у архитектури.....	60
3.0 Експериментални приступ пројектовању система љуски и греда.....	69

3.1 Материјал прототипа (PLA)	71
3.2 Поставка 3D оптичке методе мерења деформацијско-напонског стања	80
3.2.1 Систем за оптичко 3D мерење померања и деформација..	80
3.2.2 Дефинисање мерне запремине.....	82
3.2.3 Припрема мерне површине.....	83
3.2.4 Калибрација система	84
3.2.5 Дефинисање величине "малих површина"	86
3.2.6 Прорачун деформација малих површина	88
3.2.7 Дефинисање почетне тачке.....	89
3.2.8 Прорачун деформације.....	89
3.2.8.1 Методе линеарне деформације.....	89
3.2.8.2 Параметарска метода за оптичко мерење деформација..	91
3.2.9 Резултати система за оптичко мерење деформација.....	91
3.3 Конвенционални поступак експеримента	92
3.4 Оптичко мерење тродимензионалних деформација за изабране моделе и њиховог оптерећења	94
3.5 Анализа резултата мерења	97
3.5.1 Графички приказ изведених експеримената	97
4.0 Нумерички приступ пројектовању система љуски и греда произвољног облика	106
4.1 Аналитика геометрије	109
4.1.1 Криве и површи произвољног облика	113
4.1.2 B-Spline линија.....	117
4.1.3 B-Spline површ	125
4.1.4 Инсертовање чворова	127
4.1.5 Елевација B-Spline кривих	128
4.1.6 Неуниформни рационални B-Spline.....	129
4.1.7 Инсертовање чворова и елевација NURBS-а	133
4.1.8 Рационални Spline површи	134
4.2 Основи Кирховљеве теорије танких еластичних љуски у <i>Spline</i>	

параметарским координатама	134
4.2.1 Геометрија љуске	135
4.2.2 Метрика средње површи љуске.....	136
4.2.2.1 Кристофелови коефицијенти повезаности друге врсте	138
4.2.3 Метрика еквилистантне површи љуске.....	140
4.2.4 Тензор деформације средње површи љуске.....	140
4.2.5 Тензор деформације еквилистантне површи љуске – тензор промене кривина	144
4.3 Формулација изогеометријског коначног елемента љуске.....	146
4.3.1 Напонско - деформацијске релације	146
4.3.2 Пресечне силе.....	147
4.3.3 Принцип виртуалних померања - Матрица крутости изогеометријског коначног елемента Кирховљеве љуске	153
4.3.4 Оператори трансформације деформација.....	155
4.3.5 Еквивалентне контролне силе	157
4.4 Нумерички пример са изогеометријским Кирховљевим елементом љуске	158
4.4.1 Бирационални Кирховљеви елементи љуске	158
4.5 Основи Бернули-Ојлерове гредне теорије у <i>Spline</i> параметарској координати	161
4.5.1 Геометрија осе штапа у NURBS параметарској координати.....	161
4.5.2 Метрика осе штапа	163
4.5.2.1 Вектор кривине осе штапа	168
4.5.3 Метрика произвољне тачке попречног пресека штапа	171
4.5.4 Деформација осе штапа.....	173
4.5.5 Деформација у произвољној тачки попречног пресека - промена кривине осе штапа	175
4.5.6 Деформација промене кривина	177
4.5.7 Торзиона промена кривине	179
4.6 Формулација изогеометријског Бернулиј-Ојлеровог гредног коначног елемента.....	180

4.6.1 Напонско деформацијске релације	180
4.6.1.1 Пресечне силе.....	181
4.6.2 Принцип виртуалних померања	185
4.6.3 Матрица крутости изогеометријског гредног елемента ..	187
4.6.4 Вектор еквивалентних контролних сила.....	189
4.7 Нумерички примери са изогеометријским Бернули-Ојлеровим гредним коначним елементом.....	190
4.8 Прорачун љуски и греда NURBS површи класичном методом коначних елемената	193
4.8.1 Двоструко симетрична купола типа љуске.....	194
4.8.2 Двоструко симетрична купола типа гредног роштиља...	199
4.8.3 Двоструко закривљена слободна форма куполе типа гредног роштиља и љуске.....	211
4.8.4 Двоструко закривљена једноосно симетрична купола типа гредног роштиља.....	222
4.9 Анализа резултата пројектовања.....	228
5.0 Закључна разматрања и правци даљег истраживања	229
6.0 Референце.....	235
7.0 Прилози (Прилог 1, 2 и 3)	244

I Списак коришћених ознака

\mathbb{R}^d	d -димензионални простор
x, y, z	систем глобалних координата
ξ, η, ζ	систем параметарских координата
e_i	јединични вектор i димензионалног линеарног простора
$G(\xi_i, \xi_j, \dots, \xi_n)$	поларне координате сплајна
ξ, η	чворни вектори сплајна
\vec{r}	вектор положаја произвољне тачке сплајна
\vec{r}^w	вектор положаја произвољне тачке сплајна у R^{d+1} димензионалном простору
$B_{i,n}(\xi)$	Бернштајн базне функције
$R_{i,n}(\xi)$	рационалне базне функције
$N_{i,p}(\xi)$	B - <i>Spline</i> базне функције
$N_{i,p}(\xi)M_{j,q}(\eta)$	тензорски производ B - <i>Spline</i> базних функција
$R_{i,p}(u)$	рационалне B - <i>Spline</i> базне функције
P_i	контролне тачке
P_{ij}	мрежа контролних тачака
\vec{r}_{IJ}	вектор положаја контролних тачака
w_i	тежински фактори контролних тачака
$w(\xi, \eta)$	тежинска функција сплајна
\mathcal{C}_0	почетна конфигурација
\mathcal{C}_t	просторна конфигурација
θ^i	систем криволинијских конвективних координата средње површи
G_i, g_i	коваријантни базни вектор почетне и просторне конфигурације
G^i, g^i	контраваријантни базни вектор почетне и просторне конфигурације
G_{ij}, g_{ij}	метрички тензор у почетној и просторној конфигурацији
G^{ij}, g^{ij}	реципрочни метрички тензор у почетној и просторној конфигурацији
G_3, g_3	нормала на површ у почетној и просторној конфигурацији
G	детерминанта метричког тензора
δ_i^j	Кронекер делта симбол
\vec{u}	поље померања
\mathbf{q}_{IJ}	вектор контролних померања
\mathbf{u}_{IJ}^m	померања контролних тачака
W	виртуални рад
δR_u	унутрашњи виртуални рад
δR_s	спољашњи виртуални рад

$\sigma^{\alpha\beta}$	компоненте тензора напона
$\varepsilon_{\alpha\beta}$	компоненте тензора деформације
\mathbf{R}	вектор енергетски коњугованих пресечних сила
\mathbf{E}	вектор деформација средње површи љуске
$R^{\alpha\beta}$	мембранске пресечне силе
S_{β}^{α}	моменти савијања и торзије
$N^{\alpha\beta}$	енергетски коњуговане мембранске силе
$\bar{M}^{\alpha\beta}$	енергетски коњуговани моменти
$D^{\alpha\mu\beta\gamma}$	конститутивни тензор еластичности
\mathbf{D}	матрица еластичности
$\mathbf{D}_M, \mathbf{D}_B, \mathbf{D}_{MB}$	мембранска, савијајућа и мешовита матрица еластичности
\mathbf{K}_L	линеарна матрица крутости
L_m	оператори трансформације
$\mathbf{u}_{1,2}^m$	градијенти померања
\mathbf{B}_L	матрица трансформације деформације
\vec{p}	вектор расподељених оптерећења
Q_{ij}	еквиваленте контролне силе
ds	диференцијални линијски елемент
x_i^m	Декартове компоненте базних вектора
x_m^i	Декартове компоненте реципрочних базних вектора
\vec{K}	вектор кривина
$\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}$	базни природни триједар линије
Γ_{ij}^m	Кристофелови симболи друге врсте
$\vec{\tau}$	вектор торзије (друге кривине) линије
\vec{G}_{λ}	базни вектор ξ_{λ} линије
μ, λ	Ламеове константе
E	Јангов модул еластичности
ν	Поасонов коефицијент
h	дебљина љуске
dA	диференцијална површина средње површи
V	запремина љуске
$b_{\alpha\beta}, b^*_{\alpha\beta}$	коефицијенти кривине средње површи у почетној и просторној конфигурацији
$\kappa_{\alpha\beta}$	промена кривине средње површи
e	вектор прираштаја линеарне деформације
η	вектор прираштаја нелинеарне деформације

Преглед акронима

2D, 3D		Дводимензионално, тродимензионално
3DP	<i>3D Plotter</i>	3D штампач
3DP	<i>3D Printing</i>	3D штампач
AR	<i>Augmented Reality</i>	Проширена реалност
CAAD	<i>Computer Aided Architectural Design</i>	
CAD	<i>Comuter Aided Design</i>	
CAE	<i>Computer Aided Engineering</i>	
CAGD	<i>Computer Aided Geometric Design</i>	
CAM	<i>Computer Aided Manufacturing</i>	
CASA	<i>Computer Aided Structural Design</i>	
CNC	<i>Computer Numerically Controlled</i>	
FDM	<i>Fused Deposition Modelling</i>	
FEA	<i>Finite Element Analysis</i>	Анализа методом коначних елемената
IGA	<i>Isogeometric Analysis</i>	Изогеометријска анализа
LM	<i>Layer Manufacturing</i>	Технологија производње у слојевима
LOM	<i>Laminated Object Manufacturing</i>	
MJM	<i>Multijet Modeling</i>	
NURBS	<i>Non-Uniform Rational B-Spline</i>	Неравномерни рационални базни сплајн
RP	<i>Rapid Prototyping</i>	Брза израда прототипова
SLA	<i>Stereolithography</i>	Стереолитографија
SLS	<i>Selective Laser Sintering</i>	Селективно ласерско синтеровање
VR	<i>Virtual Reality</i>	Виртуална реалност

II Списак табела

Табела 1. Структура рада	32
Табела 4.1 Резултати експеримента и нумеричке симулације	159
Табела 4.2 Базне функције по елементима.....	160

III Списак илустрација

Слика 2.1 Приказ дела истраживања заснованих на експриментима са физичким моделима које је спроводио Ислер [Ram11, Chi00]	44
Слика 2.2 Приказ дела истраживања заснованих на експериментима са физичким моделима који су спровођени на <i>IL</i> под руководством Фрај Ота [ILE].....	45
Слика 2.3 Моделовање правоизводне површи коришћењем алата развијеног у Гери технологији (<i>Ghery Technology</i>) фирме Гери и партнери (<i>Ghery and Partners</i>) /лево/; реализација сличне форме /десно/ [She02].....	47
Слика 2.4 Модел тип 1	50
Слика 2.5 Ласерско скенирање модела слободне форме.....	51
Слика 2.6 Приказ машине и поступка екструдовања пластике	52
Слика 2.7 Репликатор типа 2- <i>CubePro Duo</i>	53
Слика 2.8 Софтвер типа G-код.....	54
Слика 2.9 Модели гредних роштиља произведених од PLA	55
Слика 2.10 Модели типа 1, 2, 3, 4, 5 и 6.....	56
Слика 2.11 Модели типа 1 и 2.....	57
Слика 2.12 Модели типа 3 и 4.....	58
Слика 2.13 Модели типа 5 и 6.....	59

Слика 2.14 <i>MakerBot® Replicator™ 2 Desktop 3D Printer</i>	61
Слика 2.15 Процес израде модела применом технологије спајања влакана (<i>fused filament fabrication</i>)	61
Слика 2.16 Финални 3D-PLA физички модел ротационог хиперболоида.....	62
Слика 2.17 Графичка студија катедрале – основа за моделовање.....	63
Слика 2.18 Модел катедрале из 21 елемената од PLA материјала	64
Слика 2.19 Модел катедрале у склопу и расклопу од PLA материјала	65
Слика 2.20 Папирни модели.....	66
Слика 2.21 Генерисање дигиталног модела набора слободне форме и рендер	66
Слика 2.22 3D штампач SpectrumZ™510 коришћен за израду модела.....	67
Слика 2.23 Фотографија финалног модела.....	68
Слика 2.24 Модел куполе од "прашкастог материјала" триангулисаног гредног роштиља.....	68
Слика 3.1 Лабораторија са опремом за испитивање карактеристика PLA материјала (Технолошко-металуршки факултет Београд)	71
Слика 3.2 Епрувете за испитивање PLA материјала: а) стандардне епрувете P1, P2 и P3, б) жица P01 и ц) штап P02, P03, за одређивање модула еластичности и кидана материјала	72
Слика 3.3 Процес лабораториског испитивања.....	73
Слика 3.4 Експериментално одређивање Хуковог закона стандардне епрувете P1 и модула еластичности PLA материјала	74
Слика 3.5 Експериментално одређивање Хуковог закона стандардне епрувете P2 и модула еластичности PLA материјала.....	75
Слика 3.6 Експериментално одређивање Хуковог закона стандардне епрувете P3 и модула еластичности PLA материјала	76

Слика 3.7 Експериментално одређивање Хуковог закона жице P01 и модула еластичности PLA материјала.....	77
Слика 3.8 Експериментално одређивање Хуковог закона штапа P02 епрувете и модула еластичности PLA материјала.....	78
Слика 3.9 Експериментално одређивање Хуковог закона штапа P03 епрувете и модула еластичности PLA материјала.....	79
Слика 3.10 GOM hardver и software ARAMIS www.gom.de	81
Слика 3.11 Сензорска јединица [Gom].....	83
Слика 3.12 Примери лоших и добрих стохастичких шара.....	84
Слика 3.13 Изглед калибрационе плоче.....	85
Слика 3.14 Нумерација тачака у току калибрације: а) лева и б) десна камера	85
Слика 3.15 Деформација малих површина, а) корак 0, б) корак 1[Gom].....	86
Слика 3.16 Распоред правоугаоних "малих површина" облика у а) недеформисаном стању, б) деформисаном стању [Gom].....	87
Слика 3.17 Детаљ "мале површине"	88
Слика 3.18 Графички приказ принципа линеарне методе прорачуна деформације [Gom]	90
Слика 3.19 Графички приказ принципа параметарске методе прорачуна деформација [Gom].....	91
Слика 3.20 Извођење конвенционалног експеримента оптерећења и мерење деформације гредног роштиља	92
Слика 3.21 Извођење конвенционалног експеримента оптерећења и мерење деформације гредног роштиља	93
Слика 3.22 Графички приказ припремљених PLA модела за оптичко мерење деформације (растер црних тачкица на белој основи).....	94

Слика 3.23 Поступак извођења експеримента за 3D оптичко мерење деформација код љуске.....	95
Слика 3.24 Поступак извођења експеримента за 3D оптичко мерење деформација код гредног роштиља	96
Слика 3.25 Графички приказ екрана софтвера ARAMIS	97
Слика 3.26 Анализа резултата експеримента са 3D камером за модел љуске-врх: - дијаграм деформација-оптерећење са нормалом на оптерећење, - поље еквивалентних деформација и - графички приказ камера.....	98
Слика 3.27 Анализа резултата експеримента са 3D камером за модел љуске-седло: - дијаграм деформација-оптерећење са нормалом на оптерећење, - поље еквивалентних деформација и - графички приказ камера.....	99
Слика 3.28 Анализа резултата експеримента са 3D камером за модел љуске-дно: - дијаграм деформација-оптерећење са нормалом на оптерећење, - поље еквивалентних деформација и - графички приказ камера.....	100
Слика 3.29 Анализа резултата експеримента са 3D камером за модел гредног роштиља: - дијаграм деформација-оптерећење са нормалом на оптерећење, - поље еквивалентних деформација и - графички приказ камера.....	101
Слика 3.30 Анализа резултата експеримента са 3D камером за модел гредног роштиља-дно: - дијаграм деформација-оптерећење са нормалом на оптерећење, - поље еквивалентних деформација и - графички приказ камера.....	102
Слика 3.31 Анализа резултата експеримента са 3D камером за модел гредног роштиља-дно: - дијаграм деформација-оптерећење са нормалом на оптерећење, - поље еквивалентних деформација и - графички приказ камера.....	103
Слика 3.32 Анализа резултата експеримента са 3D камером за модел гредног роштиља-седло: - дијаграм деформација-оптерећење са нормалом на оптерећење, - поље еквивалентних деформација и - графички приказ камера.....	104

Слика 3.33 Анализа резултата експеримента са 3D камером за модел гредног роштиља-врх: - дијаграм деформација-оптерећење са нормалом на оптерећење, - поље еквивалентних деформација и - графички приказ камера.....	105
Слика 4.1 Лагранжови полиноми степена n	106
Слика 4.2 Континуитет Лагранжових полинома на граници елемената	107
Слика 4.3 Базни Spline	107
Слика 4.4 Кривине површи	109
Слика 4.5 Класификација површи у односу на закривљеност-предзнак Гаусове кривине	110
Слика 4.6 Геометрија – поступци генерисања површи	112
Слика 4.7 Контролни полигон.....	113
Слика 4.8 Параметарски простор површи E_2	114
Слика 4.9 Праволинијски штап.....	115
Слика 4.10 Кубна и квадратна крива.....	117
Слика 4.11 Кубна Безијева крива.....	120
Слика 4.12 Базне функције кубног B-Spline	122
Слика 4.13 Први извод базних функција	124
Слика 4.14 Конвексни омотач контролних полигона.....	124
Слика 4.15 Трансформација 3D криве на R^2 раван	131
Слика 4.16 Средња површ љуске.....	137
Слика 4.17 Кирховљев елемент љуске	142
Слика 4.18 Пресечне силе.....	148
Слика 4.19 Кирховљев коначни елемент љуске.....	154
Слика 4.20 Почетна геометрија љуске са контролним тачкама	158

Слика 4.21 Нумеричка симулација љуске модела N50.....	160
Слика 4.22 Произвольна крива линија	162
Слика 4.23 Угао између главних оса инерције, нормале и бинормале	170
Слика 4.24 ξ_λ линија	172
Слика 4.25 Контролни степени слободе Бернули-Ојлерове греде	188
Слика 4.26 Гредни роштиљ а) параметарски простор, б) реални простор	191
Слика 4.27 Анализа утицаја висине куполе $H= 5 - 50$ mm	193
Слика 4.28 Дијаграми деформација и напона разматраних модела	194
Слика 4.29 Утицај густине мреже КЕ на деформацију и напон	198
Слика 4.30 Дати су модели разматраних купола типа гредног роштиља.....	199
Слика 4.31 Анализа резултата за деформацију, напон и дужину греда куполе...209	
Слика 4.32 Анализа резултата за прву, другу и трећу сопствену фреквенцу.....210	
Слика 4.33 Дати су модели разматраних двоструко закривљених купола типа гредног роштиља и љуске.....211	
Слика 4.34 Анализа резултата деформације, напона и сопствене фреквенце.....221	
Слика 4.35 Дати су модели разматраних двоструко закривљених једноосно симетричних купола типа гредног роштиља	222
Слика 4.36 Анализа резултата деформације, напона, прве, друге и треће сопствене фреквенце	228

1.0 Уводни део - општа разматрања

Рад је заснован на становишту да је коришћењем потенцијала напредних дигиталних технологија и мултидисциплинарним приступом могуће извршити унапређење процеса пројектовања. Бројни примери изузетно успешних архитектонских пројеката реализованих на овим принципима су потврда оправданости оваквог приступа. А константан развој дигиталних технологија, у смислу унапређења перформанси, отвара могућност увођења одређених технологија, које иницијално нису намењене процесу архитектонског пројектовања, у поступак решавања архитектонско-инжењерских проблема. Уз напомену да је постизање квалитетних резултата подједнако условљено познавањем проблема и технологије која се користи за његово решавање, архитектури је наметнуто да усавршава средства своје продукције излазећи из оквира сопствене струке. У том смисли се сматра оправданим коришћење предложене научне методе коју је могуће применити за пројектовање неконвенционалних NURBS структура.

Rapid prototyping представља технологију која се константно развија и чији потенцијали, у овом тренутку, још увек нису довољно искоришћени у процесу концепирања архитектонских решења, а посебно погодност ове технологије за производњу прецизних модела за различите врсте анализа архитектонских структура. Претходно ће у оквирима овог рада бити потврђено управо коришћењем модела у поступку структуралне анализе. Дијагностика понашања структуре у погледу деформације и напона, намеће се као потребан корак, провере резултата компјутерске анализе методом коначних елемената, када су у питању неконвенционална решења и представља логичан корак који претходи фази изградње реалне конструкције.

Коришћење поменутих технологија и поступка се сматра погодним и оправданим за случај пројектовања NURBS структура обзиром на комплексност решења које је могуће постићи применом ове технологије геометријске презентације. Оваквим приступом ће се повећати ефикасност, превазићи ограничења и реализовати рационална решења, те је у том смислу очекивано да предложени поступак нађе практичну примену у процесу пројектовања NURBS структура.

1.1 Проблеми и предмет истраживања

У најширем смислу рад се бави проблемом унапређења процеса пројектовања у области архитектонског инжењерства, применом дигиталних технологија. Истраживањем ће се посебно разматрати следећи проблеми:

1. Примена дигиталних технологија у процесу пројектовања NURBS структура;
2. Деформацијско-напонска анализа физичких модела.

1. Примена дигиталних технологија у процесу пројектовања NURBS структура

Дигиталне технологије су омогућиле да архитектура све чешће свој израз проналази у комплексним, закривљеним геометријским формама. Применом CAD (*Computer Aided Design*) софтвера превазиђена су ограничења конвенционалних поступака презентације идеја. Компјутерским генерисањем форме (*computation*) превазилази се улога рачунара као средства којим се опонаша мануелни поступак цртања (*Computer Aided Drafting*) и адекватније користе потенцијали ове технологије. Кроишћењем различитих компјутерских метода за аутоматско генерисање форми могуће је произвести читав низ неочекиваних формалних решења, њихове варијације, статичке и динамичке трансформације. Унапређењем софтвера за анализу и симулацију могуће је, релативно једноставно, прецизно одређивање понашања предложених решења. У случају комплексних форми примена конвенционалних система конструисања најчешће не представља адекватно решење. Понашање ових конструкција у статичко - механичком погледу најчешће није искуствено познато, па је спровођење адекватних анализа неопходна провера која претходи реализацији оваквих структура.

Могућност коришћења дигиталних технологија за извођење таквих анализа позитивно утиче на процес пројектовања и реализације структура. Перманентни напредак дигиталних технологија отвара нове могућности за њихову употребу у контексту истраживања и практичне употребе, а у циљу унапређења процеса пројектовања и реализације архитектонских структура. У том смислу, пројектантска методологија која је оријентисана ка структуралним перформансама

и коришћењу потенцијала деформацијско-напонске анализе у поступку конципирања форме, заснована на употреби дигиталних метода израде физичких модела (поступак *rapid prototyping*) и метода 3D оптичког мерења ће бити у фокусу овог рада.

2. Деформацијско-напонска анализа физичких модела

Коришћење методе за производњу физичких модела *rapid prototyping*, у процесу пројектовања структура, подразумева брзу производњу физичких модела на основу података претходно генерисаних CAD тродимензионалних модела. Без обзира на унапређене могућности технологија тродимензионалног приказивања модела (тзв. рендеринга) израда макета је и даље незаобилазна и представља најбољу верификацију решења. У оквирима овог рада ће се посебно разматрати проблематика могућности коришћења ових модела за анализе понашања структура услед статичких и динамичких утицаја. Коришћењем модела у овакве сврхе се превазилази њихова стандардна функција, као средстава презентације, и користе погодности ове технологије у поступку изналажења оптималних формалних решења. За дијагностицирање понашања структуре у погледу деформације и напона се користи поступак 3D оптичког мерења. Уобичејено се за спровођење структуралне анализе користе софтвери базирани на методи коначних елемената. Прорачуни који се раде овим софтверима су високо поуздани, међутим у случају неконвенционалних формалних решења неопходно је извршити верификацију физичких модела одређеним методама мерења, односно у конкретном случају применом технике 3D оптичког мерења. Овакав пројектантски приступ се разликује од конвенционалног у смислу да се механичке перформансе структуре користе у самом поступку конципирања њене форме, а не након што је она дефинисана.

1.2 Циљ истраживања

Иако је имплементација дигиталних технологија у процес генерисања, анализе и продукције (CAD/CAM/CAE) омогућила производњу неконвенционалних обликовних решења, њихова валидација израдом физичких модела и

експерименталним методама мерењем, ипак представља потребан верификациони корак који би претходио фази реализације ових решења.

У том смислу, циљ рада представља развој процедуре која би нашла примену у процесу пројектовања неконвенционалних NURBS просторних структура. Предметном процедуром би се предвидео начин укључивања израде физичких модела поступком *rapid prototyping* и њихове деформацијско-напонске анализе применом 3D оптичког мерења у фази конципирања формалног решења NURBS просторних структура. Примена ових технологија обезбедила би изналажење рационалних решења у конструктивном погледу.

Оваквим приступом намера је да се укаже на значај укључивања напредних дигиталних технологија, неконвенционалних поступака и мултидисциплинарног приступа у процес пројектовања у области архитектонског инжењерства. А примери, као саставни део истраживања, би требало да потврде ефикасност предложеног поступка.

1.3 Задаци истраживања

У складу са претходно дефинисаним предметом, проблемима и циљевима истраживања, постављају се следећи задаци.

Задатак 1. Разматрање потенцијала употребе технологије *rapid prototyping* за израду физичких модела NURBS структура, као функционалних модела у поступку структуралне, деформацијско-напонске анализе.

Задатак 2. Разматрање потенцијала употребе 3D оптичког мерења као алатке за анализу архитектонских NURBS структура у процесу конципирања пројектног решења. Задатак је да се установе адекватни модуси коришћења методе 3D оптичког безконтактнoг мерења у контексту пројектовања у области архитектонског инжењерства.

Задатак 3. Развој итеративне методе за пројектовања неконвенционалних NURBS структура, оптималних у погледу структуралних перформанси. Метода се реализује интеграцијом поступка производње физичких модела *rapid prototyping* и

њихове анализе применом 3D оптичког мерења. Предложена технологија израде физичких модела је у функцији верфиковања формалних решења и реализације функционалних модела за поступак 3D оптичког мерења, којим се врши дијагностика понашања структура у погледу деформације и напрезања услед одређених, статичких и динамичких утицаја. Резултати добијени поступком мерења, ће затим представљати основ за модификацију предложене форме и изналажења рационалних решења.

Задатак 4. Тестирање ефикасности и оправданости предложеног поступка одговарајућим примерима. Израда и анализа физичких модела је у циљу илустрације да је применом предложених технологија могуће произвести иновативна и у погледу структуралних перформанси рационална решења.

1.4 Хипотезе

Истраживањем је потребно проверити следеће хипотезе.

Хипотеза 1. Интеграција поступака израде физичких модела *rapid prototyping*-ом и њихова анализа методом 3D оптичког мерења, у процес пројектовања неконвенционалних NURBS структура, нуди могућност за унапређење процеса пројектовања, обзиром да употреба тих технологија обезбеђује поуздану и ефикасну анализу и верификацију формалних предлога и њихових варијација у циљу изналажења у конструктивном погледу рационалних решења.

Хипотеза 2. Иако постоји висок степен корелације између експерименталне и нумеричке анализе, стандардни поступак компјутерске анализе методом коначних елемената, не даје увек поуздане резултате када су у питању геометријски комплексне, неконвенционалне NURBS структуре. Валидација методом мерења представља често неопходан корак, а метода 3D оптичког мерења, обзиром на прецизност и поузданост добијених резултата, адекватан алат за валидацију.

Хипотеза 3. Обзиром да се за продукцију физичких модела изабраном технологијом *rapid prototyping*-а користе еластични материјали, ове моделе је могуће користити за анализу 3D оптичким мерењем, чиме се јединствени модел користи за презентацију и анализу.

1.5 Методе истраживања

Предложено истраживање спровешће се коришћењем следећих метода: (1) симулација и моделовање и (2) студија случаја.

1. Симулација и моделовање

Симулација као научна метода омогућава да се на основу реплицирања реалности стичу сазнања о аспектима који представљају предмет истраживања. Предност ове методе биће искоришћена у оквирима овог рада како би се емпиријски проверило понашање реалне инжењерске конструкције, у погледу деформације и напона, њеном заменом адекватним физичким моделима. Физички модели израђени технологијом *rapid prototyping*, у одговарајућој размери и од одговарајућег материјала, биће затим анализирани применом 3D оптичког мерења, у циљу да се на основу добијених резултата изврше корекције решења. Дакле, у контексту овог рада физички модели конструисани *rapid prototyping*-ом неће имати само функцију презентације, већ ће представљати функционалне моделе на којима ће се спроводити анализе. У складу са проблемом који се анализирају, потребно је да модели представљају што прецизнију реплику, како би добијени резултати давали поуздану слику понашања реалне конструкције. У том смислу, поступак *rapid prototyping* је одабран јер се на овај начин омогућава релативно брза и економична израда модела довољне прецизности за анализу, а 3D оптичко безконтактно мерење, као метода деформацијско-напонске анализе због своје поузданости и ефикасности.

Rapid prototyping (RP) је термин који се користи да означи различите технологије, условно речено брзе, производње 3D физичких модела (прототипова) на основу геометрије дефинисане у CAD софтверу. Ови модели се данас

уобичајено користе за визуализацију комплексних форми, за чије разумевање није довољан конвенционални начин презентације цртежима. Технологија је погодна за визуализацију различитих фаза процеса пројектовања - од концептуалних предлога до провере компонената склопа и детаља финалног решења. На овај начин пројектанту је омогућено да провери сопствену идеју (почевши од најраније фазе процеса пројектовања), а поступак може служити и као корак који претходи дигиталној производњи реалног објекта. Иницијално ова технологија је била намењена за унапређење индустријске производње, али је пронашла примену и у другим областима (попут медицине, архитектуре, уметности - скулптура, производње накита, итд.)

Сам термин брза (*rapid*) је релативан, обзиром да се поступак сматра брзим у односу на време које би било потребно за конвенционалне поступке производње модела. Претходно узрокује и смањује цену производње, што је такође једна од предности овог поступка. Иако се примењене технологије израде модела у великој мери разликују, заједничко им је да се физички модели производе додавањем (адитијом) танких слојева (*layer*) материјала - поступак адитивне фабрикације. Слојеви се добијају поделом тродимензионалног CAD модела на танке паралелне делове (*slices*), где растојање између делова представља дебљину слоја. Слој се производи депоновањем, синтеровањем или учвршћивањем материјала, а модел тако што се сваки наредни слој полаже директно на предходни. Због оваквог производног поступка ова технологија се назива и *Layer Manufactur* (LM).

Обзиром да је овом технологијом могуће произвести моделе на основу произвољне геометрије креиране CAD софтвером, тачности и до 0.1 mm, њена погодност за коришћење у процесу пројектовања је несумњива. Осим за проверу обликовног решења, технологију је могуће користити и за проверу склопа, тј. састава, спојева, димензија компоненти, што представља функционални тест посебно неопходан за реализацију реалне конструкције комплексне геометрије. Незанемарљива је и примена ове технологије као средства комуникације између пројектаната и наручиоца (инвеститора). А оно што је од посебног значаја, за предмет овог рада, је могућност коришћења оваквих модела за различите

функционалне анализе, у конкретном случају деформацијско - напонске анализе структуре.

Тренутно расположиве технологије се у великој мери разликује у зависности од времена потребног за израду модела, тачност модела, маханичких својстава материјала које користе за продукцију модела (епоксиди, папир, полиестер, *ABS*, полиамид, восак, итд.). Одабир одговарајуће технологије зависи од намене модела. У том смислу могуће је направити следећу класификацију уређаја за моделовање: (1) концептуални уређаји за моделовање (*Concept Modellers*) - *3DPlotter*, *MultijetModeling* (MJM), *3DPrinting*; (2) обликовни уређаји за моделовање (*Form Modellers*) – *Stereolithography* (SLA), *Laminated Object Manufacturing* (LOM), *Fused Deposition Modelling* (FDM), *PolyJet*; (3) функционални уређаји за моделовање (*Functional Modellers*) - *Selective Laser Sintering* (SLS).

Прва група уређаја се најчешће користи за брзу проверу иницијалне геометрије. Израда модела овом технологијом је најбржа, најјефтинија и сходно томе слабије прецизности и завршне обраде модела. Уређаји друге групе су изузетне прецизности, спектар материјала који користе је широк, а квалитет завршне обраде је добар. Израда модела овом технологијом је скупља, а конструисани модели се осим за визуализацију могу користити за тестирање склопа, као и за одређене функционалне експерименте. Трећа група има карактеристике у великој мери сличне другој групи уређаја, с том разликом што примењени материјали поседују механичке карактеристике које омогућавају њихову примену у функционалним тестовима. Модели које производе ови уређаји су лошије завршне обраде у поређењу са моделима произведеним уређајима друге групе, иако је израда модела скупља.

У поређењу са традиционалним начином израде архитектонских макета, у зависности од различитих параметара (прецизност, цена, време потребно за продукцију, итд.) и потреба за које се израђују, модели израђени технологијом *rapid prototyping* могу представљати погоднију технику. Када су у питању комплексне геометрије ова предност је несумњива, обзиром да је облике могуће конструисати директно на основу прецизних тродимензионалних CAD модела.

3D оптичко мерење је експериментална метода за анализу деформацијско - напонских карактеристика физичких модела. У конкретном случају физички модели израђени поступком *rapid prototyping* представљају реплику чврстоће реалне архитектонско-гређевинске конструкције. За сам поступак мерења биће коришћена опрема GOM и софтверска апликација ARAMIS. Обзиром да је кључни задатак утврђивање понашања NURBS структура у погледу деформације и напона, радом ће бити приказано и како је експерименталне резултате могуће предвидети коришћењем анализе методом коначних елемената. За те потребе нумеричка анализа биће спроведена коришћењем програма KOMIPS, аутора проф. др Ташка Манеског. Резултати анализа биће искоришћени како би се на основу њих побољшала крутост структура.

Машински факултет Универзитета у Београду поседује опрему за 3D оптичко мерење. Опрема се састоји од две мобилне оптичке дигиталне стерео камере резолуција 2 Мегарихелс, које имају способност да мере запремину димензија 2000 mm x 1500 mm x 1500 mm. Камере су подржане ARAMIS софтверском апликацијом, која се користи за мерење 3D промена облика анализираног модела и утврђивање расподеле деформације настале услед утицаја статичких или динамичких оптерећења. Апликација ARAMIS поседује могућности анализе и прорачуна деформације делова или целе структуре.

Овом врстом опреме могуће је извршити мерење: (1) 3D деформација, кретања и детекцију вибрација; (2) динамичког понашања за фреквенце до 25Hz; (3) линеарног и нелинеарног понашања вискозно еластичних материјала; (4) тестирање хомогених, нехомогених, изотропних и анизотропних материјала; (5) тестови течења материјала (creep-testing), тј. мерење тенденције материјала да услед напрезања мења форму током времена и ефеката старења комплексних структура; (6) NVH тестирање у аутомобилској индустрији и у аеродинамичким тунелима; (7) прорачун, визуализација и приказ положаја тачака мерења у различитим фазама тестирања; (8) верификација резултата анализе коначним елементима (KE).

Осим покретања сензора и контролера, извршавања мерења, аутоматског прорачуна резултата и пост-процесирања, посебна предност софтвера ARAMIS,

креираног да задовољи захтеве сложених истраживачких задатака, је могућност његове интеграције у стандардни процес анализе обзиром на бројне могућности импорта и експорта података. На овај начин је омогућено коршћење CAD или *STL* података (и то: *Catiav4/v5*, *UG*, *ProE* или општих формата: *IGES*, *STL*, *VDA*, *STEP*) и експортовање резултата у стандардним или слободно дефинисаним фајл форматима (ASCII, пресеци, дијаграми, слике, извештаји, итд.). Предност примене овог софтвера је и у могућности прорачуна одступања измерених од реферисаних података. Као и компарација са подацима добијеним анализом коначним елементима (и то: *ABAQUS*, *LS-DYNA*, *PAM-STAMP*, *AutoForm*, *ASCII*).

Сам поступак анализе подразумева следеће кораке: (1) снимање камерема објекта анализе; (2) аутоматски прорачун резултата - брз прорачун свих фаза оптерћивања, аутоматско прорачунавање 3D координата површи, 3D померања (у Декартовим и радијалним координатама) и раванског тензора деформације, прорачун напона на основу података о материјалу; (3) прављење извештаја.

2. Студија случаја

Студија случаја, у оквирима овог рада, биће искоришћена како би се адекватним примерима, урађеним за потребе овог истраживања, потврдила ефикасност предложене методе и извршила генерализација у смислу да је методу погодно користити у процесу пројектовања NURBS структура.

Процес који ће се користити је итеративан и подразумева следеће фазе: (1) фаза конципирања идеје; (2) фаза продукције тродимензионалног компјутерског модела коришћењем одабраног CAD система (*AutoCAD*, *Archicad*, *3dStudio*, *Rhinoceros*, *Pro-Engineer*, *Catia*, *SolidWorks*, *SolidEdge*, *Unigraphics*, *Microstation*, итд.), уз вођење рачуна о методологији моделовања (одн. модели морају бити од запреминских - солид елемената); (3) фаза конверзије података тродимензионалног компјутерског модела - пребацивање тродимензионалног CAD модела у *STL* формат (скраћеница од *STeroLitpgraphy*) из ког се врши производња модела; (4) фаза производње физичког модела изабраном *rapid prototyping* технологијом (3DP); (5) фаза деформацијско-напонске анализе модела поступком 3D оптичког мерења - снимање деформација стерео камерама и обрада добијених резултата софтверском апликацијом *ARAMIS*; (6) фаза закључивања - на основу добијених

результата усвајање предложеног решења и могућност даље разраде или повратак на фазу концепције због потреба модификација предложене геометрије.

1.6 Структура рада

Рад се састоји из седам поглавља. Прво поглавље је уводно. Другим поглављем даје се преглед примене дигиталних технологија у процесу пројектовања NURBS структура са посебним освртом на технологије дигиталне производње физичких модела. Трећим поглављем је приказан експериментални приступ пројектовању система љуски и греда произвољног облика. Четврто поглавље приказује нумеричку верификацију експерименталних резултата применом изогеометријске анализе и класичне методе коначних елемената. Петим поглављем дата су закључна разматрања и смернице за наставак истраживања. Шесто и седмо поглавље подразумевају преглед литературе и прилоге.

Структура рада сумирана је Табелом 1.1.

Табела 1.1 Структура рада

1.	Уводни део
	Предмет, циљеви, задатаци, хипотезе и методологија истраживања.
2.	Примена дигиталних технологија у процесу пројектовања NURBS структура
	Преглед информација и радова о поступцима генерисања комплексних форми. Преглед информација и радова о дигиталним технологијама производње физичких модела са посебним освртом на технологије брзе израде прототипова (<i>Rapid prototyping - RP</i>) и њихове примене у архитектури.
3.	Експериментални приступ пројектовању система љуски и греда
	Приказ експерименталног утврђивања карактеристика материјала прототипа - PLA. Приказ експерименталног поступка испитивања (одређивање деформације и напона) физичких модела NURBS структура система љуски и греда

	применом методе 3D оптичког бесконтактног мерења и резултата.
4.	Нумерички приступ пројектовању система љуски и греда произвољног облика
	Нумеричка верификација експерименталних резултата применом изогеометријске анализе и класичне методе коначних елемената. Основне поставке Бернули-Ојлерове гредне теорије и Кирховљеве теорије танких еластичних љуски у <i>Spline</i> параметарској координати. Формулација изогеометријског Бернулиј-Ојлеровог гредног коначног елемента и изогеометријског Кирховљевог коначних елемената љуске. Нумерички пример са изогеометријским Бернули-Ојлерувим гредним коначним елементом и Кирховљевим елементом љуске. Прорачун љуски и греда NURBS површи класичном методом коначних елемената. Анализа резултата.
5.	Закључна разматрања и правци даљег истраживања
	Анализа и вредновање резултата истраживања и постављање смернице за наставак истраживања.
6.	Референце
7.	Прилози

Актуелне теме развоја и примене савремених дигиталних технологија и научних метода у области пројектовања конструктивних система као и предности оваквог приступа и доступност напредних технологија отварају могућност реализације неконвенционалних слободних форми. Дисертацијом је предложен и тестиран приступ пројектовању NURBS структура заснован на савременом концепту пројектовања орјентисаног на перформансе и примени технологија брзе израде прототипова, 3D оптичко деформацијско-напонске анализе и нумеричке анализе. Моделовање перформанси засновано је на класичном изопараметарском концепту као и актуелном изогеометријском концепту који је у правцу интеграције пројектовања и анализе.

2.0 Примена дигиталних технологија у процесу пројектовања NURBS структура

Напустивши дискурс стила, архитектуру модерног доба карактерише њена способност да искористи специфична достигнућа те исте модерности: иновације које јој данас нуде наука и технологија. Веза између нових технологија и нове архитектуре чак подразумева основу оног што се сматра авангардном архитектуром, тако фундаментално да представља доминантан али дифузан мотив у обликовању нове архитектуре. (Ignasi de Sola Morales)

Интеграција дигиталних технологија је учинила да архитектура еволуира. Потенцијал компјутера све чешће се не користи само у сврху презентације и визуелизације већ као генеративна алатка за продукцију и трансформацију форме – дигитална морфогенеза [Kol03]. Тродимензионални дигитални модели засновани на NURBS технологији, отворили су универзум нових форми који је до појаве CAD/CAM технологије било тешко замислити, приказати, и још теже произвести. Комплексне закривљене геометрије, способне за конзистентну, континуалну и динамичну трансформацију, помоћу компјутера се приказују подједнако једноставно као и равни облици или сверичне, цилиндричне и коничне форме. Ортогоналне мреже, репетиција и симетрија губе своју оправданост, обзиром да бескрајна варијабилност постаје изводљива и рационална подједнако као модуларност, а *масовно-прилагођавање (mass-customization)* постаје алтернатива масовној-производњи. Међутим, далеко значајније од формалне промене представља промена процеса у коме дигитални дизајн, анализа, презентација, производња и монтажа постају део колаборативног процеса који је једино зависан од дигиталних технологија – дигитални континуум [Kol03]. Консеквенца је преиспитивање конвенционалног односа архитектуре и средстава њене производње. Идеја генерисања јединственог дигиталног информационог модела, има потенцијал да реактивира и фундаментално редефинише везу концептуализације и продукције архитектуре – интегрално пројектовање. Приближавањем свих фаза продукције објеката и реинтеграцијом на новим

основама, тренутно раздвојених струка, јасно диференцираних надлежности – архитектуре, инжењерства и грађевине, уводи се идеја о информационом мастер градитељу [Kol03].

2.1 Примена дигиталних технологија у процесу генерисања форме

Архитектура *дигиталне авангарде* је свој израз пронашла у закривљеним формама, лишеним утиска урбане и структуралне топологије, и континуитета историјског стила, и у том смислу чини се као нови начин промишљања архитектуре, који игнорише конвенционалне стилове естетике у корист експеримента заснованог на дигиталном генерисању и трансформацији, форме која одговара на комплексне контекстуалне и функционалне, статичке и динамичке утицаје. За разлику од конвенционалног приступа ове форме настају помоћу изабране генеративне комјутерске методе, односно уместо осмишљавања саме форме задатак пројектанта је артикулација интерне генеративне логике која, затим, аутоматски продукује опсег могућих формалних решења из којих пројектант може да изабере адекватно за даљу разраду. Примена геометријских и нумеричких комјутерских метода као дизајн принципа омогућава формалну артикулацију, фокусирану на *настајућим (emergent)* и *прилагодљивим (adaptive)* особинама форме - стабилно је земењено варијаблама, сингуларност, мултипликарношћу. Акцент се помера са *прављења форме* на *проналажење форме*. У основи дигиталних концепција морфогенезе су логике тополошке геометрије, изоморфних полиповрши (*blobs*), кретања, кинематике и динамике, анимације (метаморфозе), параметарског пројектовања, генетике, еволуционих алгорита (*evolutionary architecture*), перформативне архитектуре (*performance architecture*), итд.

Топологија - тополошка геометрија је грана математике која се бави квалитативним особинама геометријских форми које су инваријантне под утицајем трансформација или еластичних деформација (као што су издуживање или увртање), дакле особинама које се не мењају услед промене величине или облика. Јединствени тополошки конструкт се манифестује кроз мноштво различитих, не

обавезно кривих, форми. Везана је за интерконекцију са датим просторним контекстом, а не за одређене облике. Могуће је разликовати тополошки идентичне или *хомеоморфичне* облике, што је особина фокусирана на релационој структури а не на геометрији објекта. Тополошке трансформације пре свега утичу на релациону структуру што резултира одређеном формом односно формама [Kol03].

Не-Еуклидовска геометрија је развијена на бази петог постулата Еуклидовске геометрије, тзв. *постулата паралелизма* [Bob95]. Постојање не-Еуклидовске геометрије је први успео да докаже Гаус (Carl Friedrich Gauss), а својим радовима Лобочевски (Lobachevsky), Риман (Riemann), вон Хелмхолц (von Helmholtz), и други математичари и физичари су доказали да је простор не само закривљен већ и мулти-димензионалан, чиме су отворне најразличитије, не-емпиријске просторне могућности. Са становишта архитектуре претходним се остварају могућности радикално другачије концепције простора. Развијене су различите не-Еуклидовске геометрије, од којих свака има посебно подручје примене. Па тако, у Поенкареовој геометрији, која је своју примену нашла у балистици и за приказивање елекромагнетних сила, "линије" су хиперболе на Декартовој равни. Поенкаре сматра да постоји бесконачан број "линија" кроз изабрану тачку које су међусобно паралелне. С друге стране Риманова *сверична* геометрија, која је примену пронашла у навигацији, оперише на површини сфере, помоћу кругова истог радијуса као сфера. У сферичној геометрији не постоје паралелне линије, а дистанца између две тачке је крива а не права линија. Још један интересантан концепт, који Риман уводи је концепт закривљености простора, разликујући тако просторе позитивне и негативне закривљености. Према овој дефиницији Еуклидовска равна заузима средишњи положај обзиром да има нулту закривљеност. У том смисли Еуклидовска геометрија је само специјалан случај на бесконачној скали закривљености, тј. она је манифестација еквилибриума између различитих утицаја закривљености простора [Bob95].

Non-uniform Rational B-Splines (NURBS) су стандард за описивање и моделовање кривих линија и површи у CAD-у. Са компјутерског становишта NURBS омогућава ефикасно приказивање широког спектра геометријских форми,

коришћењем минималне количине података у неколико корака. Оно што је ову технологију учинило доминантном је могућност једноставне контроле облика интерактивном манипулацијом контролних тачака (које, осим крајњих, не морају бити интерполационе и које образују контролни полигон), чворова, променом вредности тежинских фактора и степена закривљености (највећи експонент у полиномској једначини контролне тачке). Свакој контролној тачки је придружен тежински фактор, који дефинише домет њеног утицаја и полиномска једначина – базна функција. Свака базна функција има утицај на део криве у близини контролне тачке којој је придружена, а њен утицај је ограничен чворовима. Могуће је разликовати Безиеове криве и B-Splines од NURBS-a. Код NURBS-a утицај контролних тачака на криву може варирати променом локације чворова дуж контролног сегмента који повезује две контролне тачке, односно растојања између тачака могу бити неједнака. Уколико су вредности свих тежинских фактора једнаке NURBS постаје B-Spline, односно B-Spline је NURBS са једнако распоређеним контролним тачкама. Безиеове криве су B-Splines са једнако распоређеним чворовима. Још једна битна особина NURBS-a је промена континуитета закривљености, тј, радијуса криве. У том смислу разликујемо: крива са ломом које имају C^0 континуитет, крива без лома али са променом кривине које имају C^1 континуитет и криве константне закривљености односно C^2 континуитета. Иако су већи степени континуитета могући, у практичном смислу, ова три нивоа су довољна. NURBS криве имају потенцијал мултипликарности (*multiplicity*) тј. промену степена континуитета. NURBS површ се математички дефинише аналогно NURBS линији. У том смислу NURBS површ поседује контролну мрежу којом су повезане контролне тачке, које имају исте карактеристике и којима се манипулише на исти начин као код линија. NURBS објекти су дефинисани у оквирима локалног параметарског простора, који се налази у Декартовом геометријском простору. Када су у питању NURBS линије тај простор је једнодимензионалан и дефинисан је као тополошки ниво једним параметром, и ако оне постоје у тродимензионалном простору. Површи имају две димензије у параметарском простору. Изопараметарске криве *изопарми* се користе у функцији визуализација NURBS површи, описивањем контура. Ове криве имају константан један параметар и сличне су изохипсама које се користе да прикажу елевацију терена [Pie97].

Параметри – параметарски опис форме је погодан начин за описивање комплексних кривих и површи системом једначина који се користи да изразе одређене квалитативне вредности као експлицитне функције бројева или променљивих, тј. параметара, који могу бити независни или зависни. Уопштено, исти објекат је могуће параметарски исказати на различите начине. Параметри представљају моћну алатку за конципирање архитектонске форме описујући опсег могућности. Коришћењем овог принципа могуће је креирати бесконачно много сличних објеката, геометријских манифестација, претходно артикулисане шеме променљивих димензија, односа или оперативних зависности. Додељивањем одређених вредности променљивим, креирају се одређени објекти или конфигурације из потенцијално бесконачног опсега могућности. Дакле, нема фиксних решења већ је могуће истраживати потенцијал бесоначних променљивих. Параметарско пројктовање подразумева дефинисање параметара одређеног објекта, додељивање процедура, тј. алгоритамске дескрипције објекта геометрије, а не форме. Једначине могу бити употребљене и да опишу релације између објеката, успостављајући тако међузависност објекта и дефинишући понашање под утицајем трансформације.

Динамика сила или тачније **поље сила** је процес у коме су форма и њена промена резултат динамичног деловања сила. Коришћење принципа је засновано на становишту да архитектонска форма није само манифестација интерне параметарски дефинисане релационе логике, већ представља одговор на динамичне утицаје свог енвајроменталног и социо-економског контекста.

Архитектонска форма није статична нити инертна, она је пластична, мутирајућа и способна да еволуира услед интеракције са екстерним променљивим силама. Насупрот традиционалном схватању где се простор пројктовања предпоставља као вакум, неутрални простор дефинисан Декартовим координатама, према Лину контекст пројктовања је активни абстрактни простор који усмерава силе које делују у том тренутку, а које могу представљати информацију за обликовање, [Lyn98]. Дакле у питању је промена парадигме од "од пасивног простора статичних координата до активног простора интеракције", или промена од аутономне чистоте до контекстуалне особености простора пројктовања. Поступак у ком силе представљају иницијални услов за одређено кретање, које

имплицира акцију, анимацију, које се манифестују као еволуција форме. Потребно је нагласити да силе нису унутрашње силе објекта или система (тј. физичке особине као што су маса/густина, еластичност, статика, кинетичка фрикција или чврстоћа) већ спољашње (гравитационе силе, енвајроментални утицаји попут ветра и сунца, али и контекстуални феномени, као што су пешаци или кретање возила, урбане визууре, конфигурације, шеме или укрштања намена, итд), дакле разлика између кинематике и динамике. Спољашње силе могу бити компјутерски задате употребом анимације или софтвера за специјалне ефекте као динамички стимулус. Идеја увођења временске димензије у архитектуру није нова, али је различита у односу на схватања модерне јер фаворизује увођење кретања и сила у тренутку концептирања форме. Идеја је да се уместо излагања већ дефинисаних објеката, директно визуелизује облик поља сила помоћу изоморфних полиповрши. Блобови или мета лопте, што је други назив за изоморфне полиповршине, су аморфни објекти конструисани као композитни спој промљивих параметарских објеката са унутрашњим силама масе и привлачности. Они испољавају поља или регионе утицаја који могу бити адитивни (позитивни) или субтрактивни (негативни). Геометрија је конструисана компјутерским генерисањем површине где композитно поље има исти интензитет – отуд име изоморфне површине. Објекти међусобно ступају у интерактиве односе, а целина је увек подложна варијацијама, додају се нови блобови (поља утицаја), стварају се нове релације, креирају се нове могућности. Гранична површ (изоморфна полиповрш) мења се или помера у зависности од варирања интензитета поља утицаја, стварајући временско условљену динамику у којој објекти функционишу.

Датаскејп (*Datascape*) је концепт у коме су објекти и пројекти генерално замишљени у комплексној мрежи планирања и грађевинске регулације, разних техничких ограничења, енвајроменталних услова, итд. Односно замишљени су да функционишу у високо динамичном социо-економском и политичком контексту. Квантификација неких од ових утицаја и модела њихове промене се врши како би се симулирала прошлост, предвидела садашњост и будући утицаји. Датаскејп или информациони пејзажи постају есенцијални у разумевању како се различити утицаји манифестују у изграђеном окружењу и како социјална, економска,

политичка и културна кретања и промене утичу на савремену архитектуру, обзиром да комплексност суперпонираних утицаја урбаног контекста превазилази људско поимање. Није намера да буду ограничавајући нити погубни за струку, напротив нуде алтернативе формалних могућности [Kol03].

Метаморфоза је последица различитих могућности трансформација које нуде софтвери за дигитално моделовање, а које је могуће користити у циљу даљег истраживања формалних потенцијала претходно дефинисане геометрије. Тополошке инваријантне трансформације (нпр. увртање или кривљење) су начини за креирање алтернативних форми, а метаморфозу објекта је могуће реализовати и укључивањем четврте димензије у процесу деформације што омогућавају софтвери за анимацију. Па тако, у *Keyshape* (или *Keyframe*) анимацији, различита стања објекта су позиционирана у дискретним тачкама у времену, а софтвер помоћу интерполације остварује транзицију у временски дефинисаним интервалима. Пројектант је у могућности да изабере једно од стања за даљу разраду, или може користити саму интерполацију као технику моделовања која производи инстанце објекта у тренутку прелаза форме из једног у друго стање. *Morphing* је временска техника моделовања у којој се различите форме мешају како би се произвео опсег хибридних форми. У *Path* анимацији објекат се деформише померањем дуж селектоване путање. Остале технике генерисања облика поступком метаморфозе су деформација простора моделовања, што се остварује коришћењем мреже деформације (bounding box), Spline криве, или деформације једне од координата системних оса, или равни, где се облик објекта прилагођава промени геометрије простора моделовања [Kol03].

Генетика, је стратегија у којој се концепт биолошког раста примењује као генеративни процес, у смислу да архитектонски концепти могу бити изражени као сет генеративних законитости чија еволуција и развој могу бити дигитално кодирани - биомимикрија. [Fra95] Гени диктирају генезу живих организама, генеришу њихову форму, а кодирани су у стандардима ДНК. Варијације у оквиру исте врсте се постижу прелазом и мутацијом гена, тј. кроз размену и промену информанција које управљају биолошком морфогенезом. У еволутивном приступу архитектури кључан је концепт генетског алгоритма који представља класу

еволуционарно-адаптивних процедура, карактеристичне структуре у виду ланца, еквивалентног хромозомима у природи. Генеративни записи су инструкције које остварују велики број прототипских, сличних, *псеудо* форми - генерисане популације, које се затим оцењују на основу њихових перформанси и критеријума адекватности у симулираном окружењу. Параметари су инкодирани у структуру у виду ланца, а њихове вредности се насумице мењају, током генеративног процеса. Селектовани *организми* и кореспондирајуће вредности параметара, се потом укрштају на тај начин преносећи пожељне особине новој генерацији. Оптимална решења се одржавају помоћу малих инкременталних промена кроз неколико генерација. Задатак архитекте је да дефинише извор форме, тј. да изврши *генетско кодирање* за велику фамилију сличних објеката, у коме су варијације постигнуте кроз различите процесе *репродукције*. Као што је случај и са осталим савременим приступима у процесу генетског кодирања нагласак је на артикулацији интерне логике пројекта пре него екстерне форме.

Перформативна архитектура, представља приступ у коме се понашање објекта користи као принцип којим је могуће водити се приликом пројектовања градова, објеката и инфраструктуре. Перформансе у најширем смислу (од финансија, просторних, социјалних, социо-културних до чисто техничких-структура, термике, акустике, итд.) се дефинишу помоћу дигиталних технологија, квалитативно и квантитативно заснованих симулација и представљају контекст пројектовању. Аналитичке компјутерске методе засноване на Методи коначних елемената (МКЕ), у којој је геометријски модел дискретизован у виду мреже повезаних елемената, се користе за егзактне анализе конструкције, енергије, и динамике флуида, објекта. Суперпонирањем различитих аналитичких процена, релативно је једноставно поређење алтернатива у циљу селекције решења оптималних перформанси. Софтвери за анализу динамике флуида (CFD) користе се пре свега за анализу ваздушних струјања унутар и око објекта. Без обзира на утисак који остављају дигиталне технологије засноване на симулацији изазови су у начину на који се те технике користе. Уместо пасивног начина, тј. анализа након што је форма објекта артикулисана, што је тренутно углавном случај, идеја је да се програми за анализу користе активно у процесу концептуализације објекта. Претходно изграђена топологија објекта, може бити предмет динамичких,

метаморфичних трансформација као резултат претходно дефинисаних циљева. Динамични опсег перформативних могућности на једном крају може садржати неоптимизовано решења, а на другом, оптимизовано стање (уколико постоји), које не мора бити прихватљиво са естетског или неког другог становишта. У том случају, субоптимално решење, које задовољава и остале критеријуме и интересантно је за даље разматрање, може бити селектовано из понуђеног опсега међурешења. На овај начин ће се сачувати предложена топологија, тј. геометријска конфигурација али ће се прилагодити облик у циљу оптимизовања одређеног критеријума [Kol03].

Не-линеарност, индетерминисаноси и настанак (*Emergence*), су актуелни приступи архитектонском пројектовању, који заговарају напуштање детерминизма и прихватање прецизне неодређености које нуде дигитални проступци концептуализације. Уместо пројектовања самог објекта, тежиште је на конструисању генеративних система формалне продукције, контроли њиховог понашања током времена, и селектовању форме која настаја (*emerge*) као резултат процеса. Дакле овај приступ пројектовању подразумева дефинисање система утицаја, релација ограничења и правила и спецификацију понашања током времена у процесу *ин-формације*; резултујућа структура међузависности је затим обично дата генетском формом - *формација*; која је потом субјекат процеса *де-формације* или *транс-формације*, које се изводе под утицајем истих релација или правила уграђених у систем. Форме нису стабилне већ подлежу варијацијама, имају неограничен потенцијал промене а формална комплексност је често намерна. Пројектант у суштини постаје *едитор*, који селекује форму на основу сопственог сензибилитета. Генеративна улога дигиталних технологија је остварена кроз симултану интерпретацију и манипулацију компјутерског конструкта (тополошке површине, изоморфних поља, кинетичког скелета, параметарског модела, генетичких алгоритама, итд.) у комплексном дискурсу који се континуално реконституише - *саморефлексивни* дискурс у коме графика активно обликује пројектантов процес мишљења. Ипак не постоји ништа аутоматски, форма се *проналази* кроз динамични, не-линеарни систем који се мења недетерминисано, континуално производећи нове неочекиване резултате, и који дигиталним медијима даје критични, генеративни капацитет. У тим комплексним мрежама међузависности и интеракција адиција или субстракција одређене врсте информација може

драматично утицати на понашање, другим речима мале квантитативне промене могу диспропорционално произвести велике квалитативне ефекте.

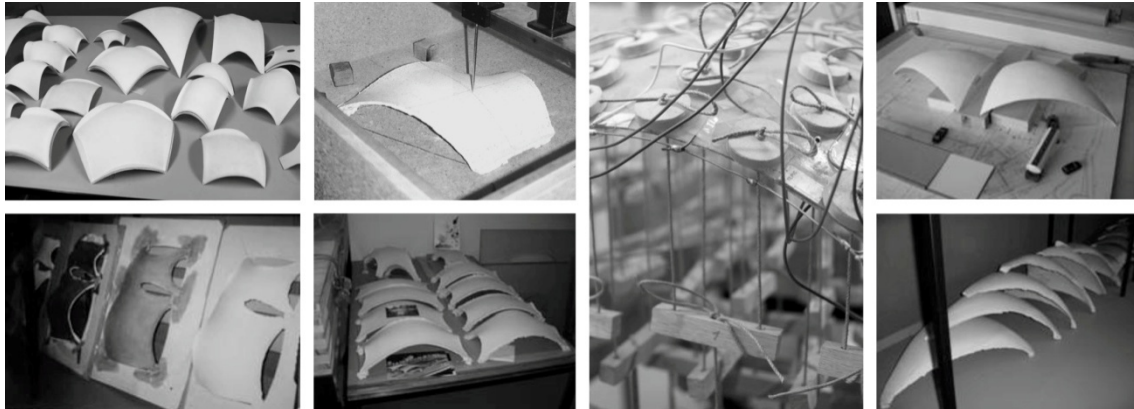
2.2 Дигиталне технологије производње физичких модела комплексних форми

Примена физичких модела, као медијума истраживања, провере, презентације и комуникације архитектонских идеја има изузетно дугу традицију. Ови модели омогућавају просторну, естетски и проверу механичког понашања структуре. Временом су се мењале технологије, поступци и материјали коришћени за продукцију физичких модела.

У области конструктивних система улога физичких модела посебно добија на значају у 20. веку у периоду развоја лаких просторних конструкција. Једно време експерименти физичким моделима били су једине одрживе методе за пројектовање форми ових конструкција.

Допринос Ислера (Isler) у области истраживања техника проналажења форме огледа се у примени ових поступака у процесима пројектовања његових конструктерских остварења, предлагању иновативних приступа и усавршавању више техника [Isl59], [Isl80], [Bil80], [Ram11]. Ислер је довео до перфекције примену технике конструисања висећих текстилних модела која му је послужила за реализацију великог броја објеката, попут на пример бензинске станице у Деитингену (*Deitingen*) у Швајцарској из 1968. године. Први је применио технику пнеуматских модела¹, 1954. године приликом израде пројекта за кров фабрике Трош (*Trösch*). Такође први је користио и моделе од екструдиране полиуретанске пене, којом се послужио приликом пројектовања Вис гарден центра (*WyssGardenCenter*) у Зуцвилу (*Zuchwil*) у Швајцарској 1962. године. Изградња низа објеката заснованих на овим експериментима учинила је Ислера једним од водећих експерата у области пројектовања танких љуски 1950-тих година, Сл.2.1.

¹ Ислеров допринос такође представља технологија употребе пнеуматских структура као оплоте при изградњи љуски. Могућност вишекратног коришћења овакве оплоте утиче на економичност изградње.

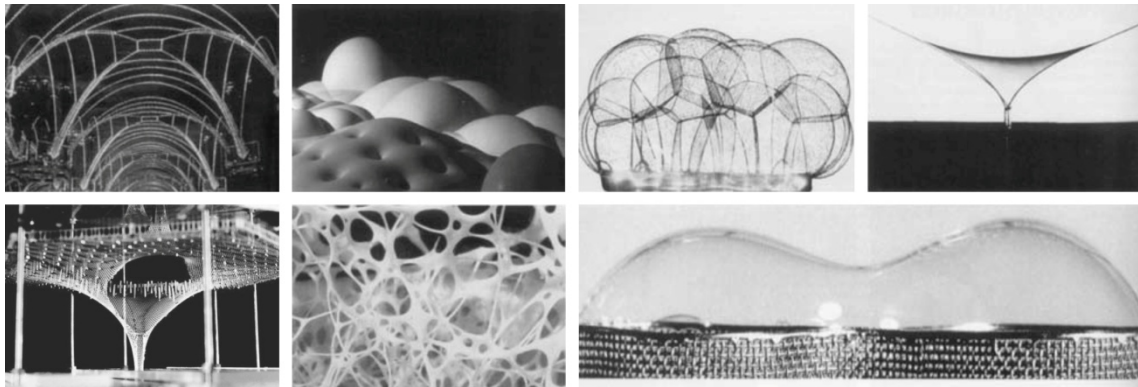


Слика 2.1 Приказ дела истраживања заснованих на експериментима са физичким моделима које је спроводио Ислер [Ram11, Chi00]

Елеганција, економичност у смислу минималног утрошка материјала и рафинираност која карактерише Ислерове љуске резултат су његове фокусираности на фина подешавања и стрпљивост у томе да решење доведе до перфекције, имајући у виду осетљиву природу ових конструкција. Настављајући традицију Мајара (Maliar) и других представника швајцарске конструкторске школе Ислеров став у пројектовању љуски орјантисан је на приступ у коме се решавање техничких проблема и креативни подстицаји органских принципа уједињују како би се произвеле рационалне и складне структуре. Међутим, Ислер никада није био спреман да одступи од крутог контекста својих експерименталних поставки, остајући доследан сопственим уверењима у универзалност природних законитости. Ова концептуална ригидност онемогућила му је да у потпуности искористи архитектонске потенцијале љуски, без обзира на сву хармоничност и несумњиве естетске вредности његових органских форми.

Фрај Ото (Frei Otto) је дао изузетан допринос еволуцији метода проналажења форме својим огледним радовима које је спроводио заједно са тимим истраживача на Институту за лаке конструкције (*Institut für Leichte Flächentragwerke - IL*) на Универзитету у Штудгарту, Сл. 2.2. У својим истраживањима експериментисали су са различитим техникама проналажења форме, од viseћих жичаних модела до модела од сапунице, а реализацијом једног броја објеката потврђена је ефикасност оваквог приступа. Пример представља решеткаста љуска (*grid shell*) Мултихале (*Multihalle*) у Манхајму, чија форма је добијена изградом viseћег модела. Опсежна

истраживања вршена су у области моделовања минималних површи које описују хомогено мембранско стање напона, кроз израду експерименталних модела од сапунице и текстила [Ott96], [Hen74]. Експерименти са моделима од сапунице демонстрирају могућности примене ове методе за проналажење форме мембранских структура, а шатор за Националну изложбу вртларства у Колону (*Cologne*) из 1957. године пример је објекта моделованог на тај начин [Вес08]. Форме објеката Олимпијског комплекса у Минхену конципиране су кроз процес израде модела од текстила на основу којих су у наредној фази израђени прецизни модели у размери од неопренских плоча помоћу којих су извођени прорачуни [Nes00].



Слика 2.2 Приказ дела истраживања заснованих на експериментима са физичким моделима који су спровођени на ПЛ у Штудгарду под руководством Фрај Ота [PLE]

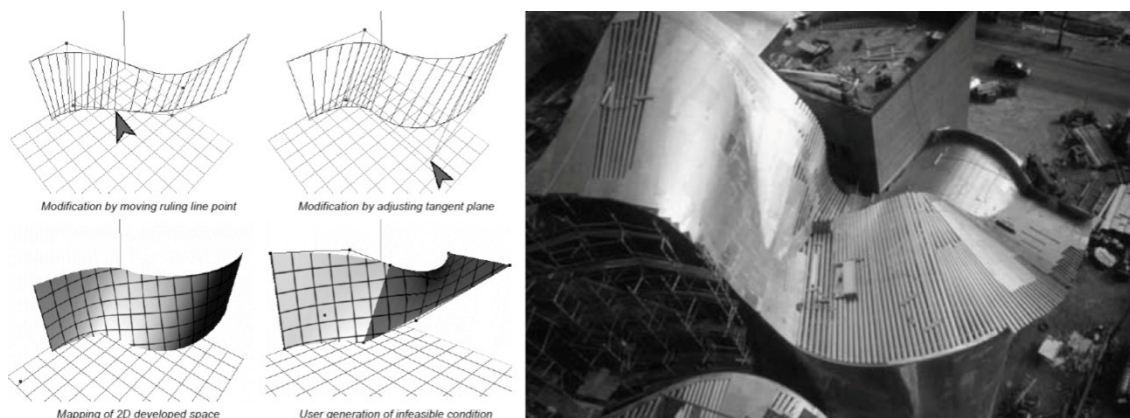
У којој мери је Ото преферирао овај емпиријски приступ у свом раду потврђује и његов исказ: *Ја не пројектујем, ја претражујем* [Ser06]. Али Ото је препознао његова ограничења, подвлачећи да сама геометрија чак и када је произашла из процеса тражења форме није довољна, наглашавајући важност интерпретације резултата и поступка њиховог превођења у детаље који ће одговарати материјалу и размери како би се остварило успешно пројектно решење [Ser06]. Ото је препознао и ригидност експерименталне поставке, наглашавајући: *Изузетно је тешко урадити архитектонски пројекат у оквирима процеса само формирања (self-formation). Експерименти заиста директно воде форми, која је по себи већ прошла кроз оптимизациони модел, али пројектовање се може само сагледати узимањем у обзир комплексности пројекта (building project) и начина на који се*

објекат интегрисање у окружење и друштво [Otto90]. Отвореност у приступу и спремност да прилагоди услове експерименталне поставке комплексним условима пројектовања у циљу реализације у сваком погледу доброг решења свакако га издваја међу конструкторима.

У скулптуралном процесу пројектовања фирме Гери и партнери (*Ghery and Partners*) оптимизација механичких карактеристика врши се тек након што је форма објекта дефинисана, због чега се не може рећи да њихови објекти подпадају под реторику проналажења форме, међутим навођење примера ове праксе је потребно обзиром да представљају пионире у коришћењу дигиталних технологија у процесу пројектовања и реализације слободних форми. Гери (*Ghery*) потенцијале дигиталних технологија ставља у службу реализације објеката комплексне форме, дефинишући нови ниво слободе у вези између форме и функције. Коришћењем *методологије главног модела (master model methodology)*, у чијој основи је идеја генерисања јединственог дигиталног информационог модела, фундаментално се редефинише веза концептуализације и реализације архитектуре, омогућавајући приближавање свих фаза продукције и њихово реинтегрисање на новим основама.

Такође њихов процес пројектовања специфичан је по изради папирних модела у фази концепције помоћу којих се описују закривљене најчешће правоизводне површи које се у реализацији објекта материјализују применом металних лимова. Дакле и у овом случају се узимају у обзир ограничења које намеће материјал, а која су предходно проверена израдом папирних и картонских физичких модела и њиховим превођењем у дигиталну репрезентацију. За те потребе Шелден (*Shelden*) из *Ghery Technologies* развио је компјутерску алатку за *Rhinoceros®* и *CATIA®* која пројектантима омогућава моделовање правоизводних површи, Сл.2.3 [She02]. Коришћење ове алатке омогућава флексибилан рад и интеракцију са геометријом, као и могућност истраживања и анализа особина резултујуће површи.

Абстракција форме помоћу папира и његово коришћење као генератора пројектног решења у сваком случају представља значајан пример пројектантске методологије у колаборативном дизајн окружењу.



Слика 2.3 Моделовање правоизводне површи коришћењем алата развијеног у Гери технологији (*Ghery Technology*) фирме Гери и партнери (*Ghery and Partners*) /лево/; реализација сличне форме /десно/ [She02]

2.2.1 Производња

Напредак CAD (*Computer Aided Design*), CAM (*Computer Aided Manufacturing*), CEA (*Computer Aided Engineering*) и CNC (*Computer Numerical Controlled*) технологија, посебно од средине 1990-тих, утицао је подједнако на пројектовање и изградњу архитектонских објеката. Коришћење потенцијала *дигиталног континуума* у циљу унапређења архитектонско-грађевинске продукције одговор је на аутоматизовану производњу у аутомобилској, авио индустрији и бродоградњи. Комплексне форме и изазов који представља њихова реализације намеће архитектама да се више ангажују у свим фазама продукције објекта (од концепције до реализације).

Процес *тродимензионалног пројектовања* и производња тро-димензионалних дигиталних модела се сматра, према [Kol03], почетком дигиталне производње на нивоу пројектовања. Методолошки је могуће разликовати два поступка. (1) Први поступак подразумева превођење података дигиталног модела, насталог на основу скица или замисли, у САМ софтвер који генерише CNC инструкције које се потом преносе опреми за производњу као што је 3D принтер. (2) Други, у неку руку, обрнути процес тзв. *reverseengineering* подразумева развој концепције на радном моделу, затим помоћу 3D скенера његово превођење у дигитални модел. Скенирањем физичког модела формира се шема која се назива *облак тачака*

(*point cloud*), које се потом интерпретирају конвенционалним софтверима у циљу производње што сличније апроксимације геометрије модела. Независно од селектованог поступка суштина је производња тродимензионалног модела, којим је дефинисана геометрија, главни елементи, димензије и остали релевантни подаци потребни за наредне фазе у процесу пројектовања.

Процес дигиталне производње (тзв. *file-to-factory*) одвија се, у најопштијем случају, кроз неколико корака. (1) Први корак је анализа информација свих делова објекта тродимензионалног CAD модела коришћењем CAM софтвера, (2) други корак је превођење свих анализираних информација у CNC код који је у форми одређених инструкција за различите производне машине и (3) сама производња која се реализује применом неке од техника као што су: дводимензионално сечење, субтрактивна, адитивна или формативна фабрикација.

Дводимензионално сечење је најчешће коришћена техника производње, а подразумева сечење материјала коришћењем различитих технологија (као што су *plasma-arc*, *laser-beam* и *water-jet*). Да би се извело сечење материјала неопходно је обезбедити двоосно кретање, што се остварује померањем главе, постоља или померањем и главе и постоља. Сама технологија сечења се у великој мери разликују од врсте материјала и максималне могуће дебљине сечења.

2.2.1.1 Субтрактивна производња

Субтрактивна фабрикација представља уклањање одређене запремине материјала из солида (тела) коришћењем електро, хемијског или механичког редуктивног процеса. *Milling* – глодање је производни поступак, који може бити аксијално, површински или запремински ограничен. Код аксијално ограничених уређаја, материјал се уклања у правцу једне осе или ротационо, док се код тродимензионалних глодалица материјал уклања запремински. За производњу специјалних облика могуће је користити и четворо и пето-осне машине. CNC програмским инструкцијама контролишу се операциони параметри (нпр. кретање, пуњење, хлађење, замена алата, итд.). Обзиром да *milling* може бити реализовано на различите начине неопходно је направити адекватну секвенцу инструкција (*tool path*) које машина треба да изврши.

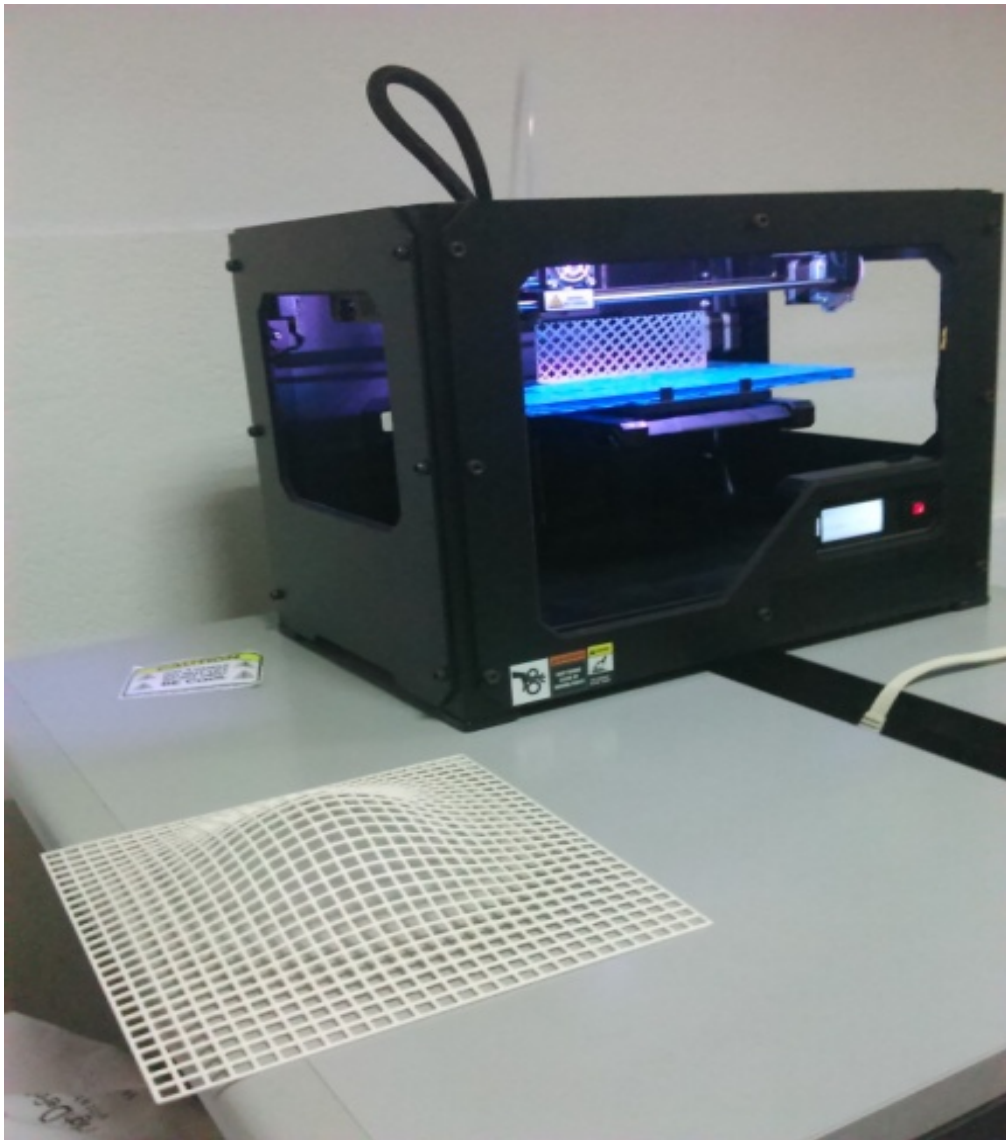
2.2.1.2 Адитивна производња

Адитивна фабрикација је процес инверзан *milling*-у, а подразумева постепено образовање форме додавањем (адисијом) материјала слој по слој (*layer-by-layer*), због чега се назива и *Layered Manufacturing* (LM). Дигитални модел неопходан за овај производни поступак је слојевит, састављен од дводимензио-налних слојева. Трансфер информација о сваком појединачном слоју се посебно преноси до главе производне машине, што је процес који се понавља до завршетка производње модела [Kol03]. Овај начин дигиталне производње се назива и *Rapid prototyping* (RP) и биће примењен за извођење истраживања у оквирима овог рада.

2.2.1.3 Формативна производња

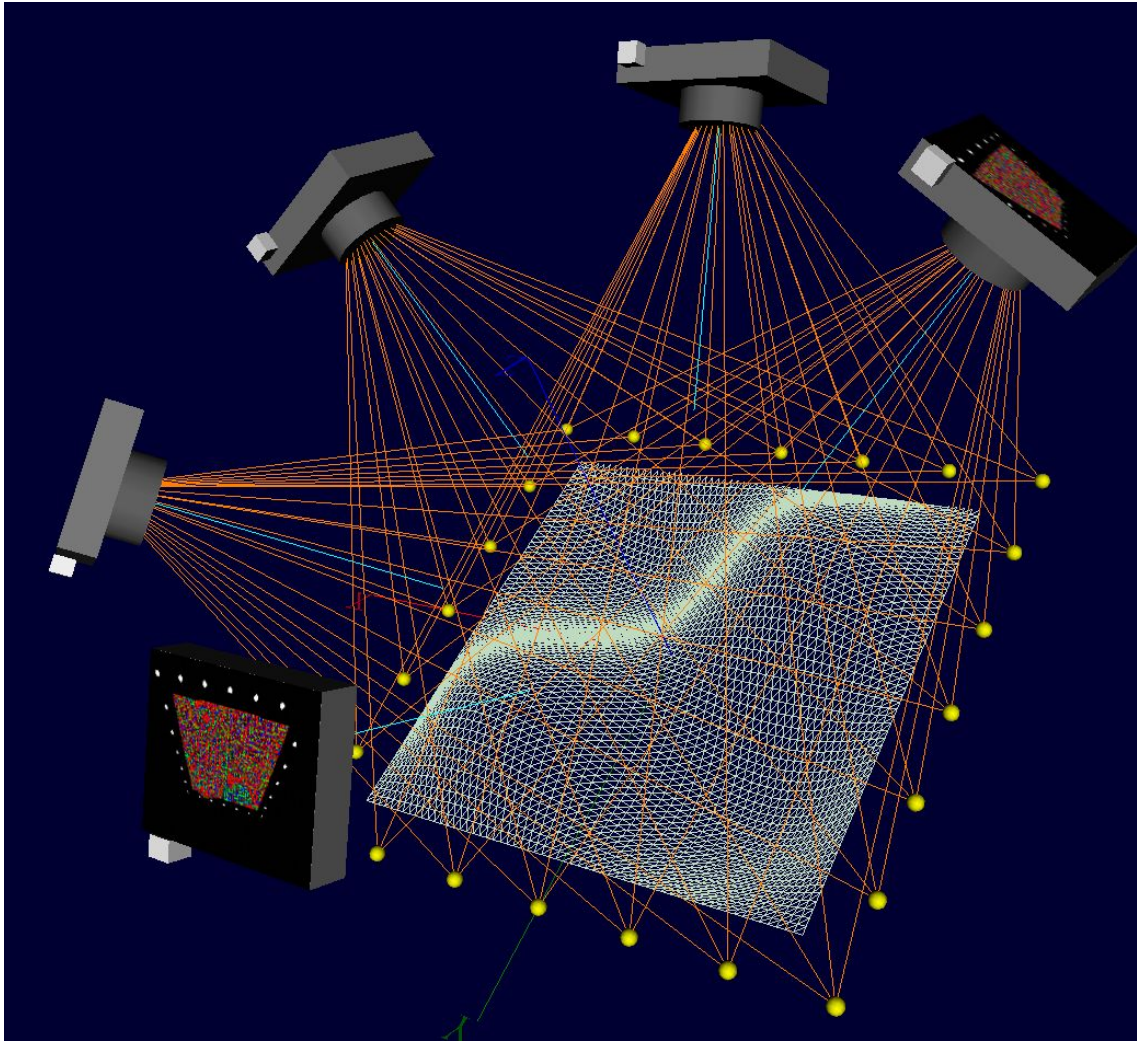
Формативна фабрикација је поступак у коме се механичке силе (топлота или пара) користе како би се реализовао жељени облик материјала применом аксијално или површински ограничених деформација. Овим процесом је могуће трајно обликовати материјал. Примери овакве производње су паро-савијање метала (загревање метала, а потом његово савијање док је у мекшем стању) или обликовање двоструко закривљених површи помоћу низа веома прилагодљивих нумерички контролисаних игли (примењује се за обликовање стаклених и пластичних табли или за кривљење металних лимова).

2.3 Технологија брзе израде прототипова - *Rapid prototyping (RP)*



Слика 2.4 Модел тип 1.

Брза израда прототипова (Rapid prototyping – RP) представља низ релативно нових, углавном адитивних технолошких поступака, који омогућавају директну производњу сложених објеката користећи као улаз 3D дигитални геометријски модел Сл.2.4. [Kho98], [Mit95], [Geb03]. Геометријски модел може се формирати коришћењем неког CAD програма или 3D скенирањем постојећег објекта Сл.2.5.

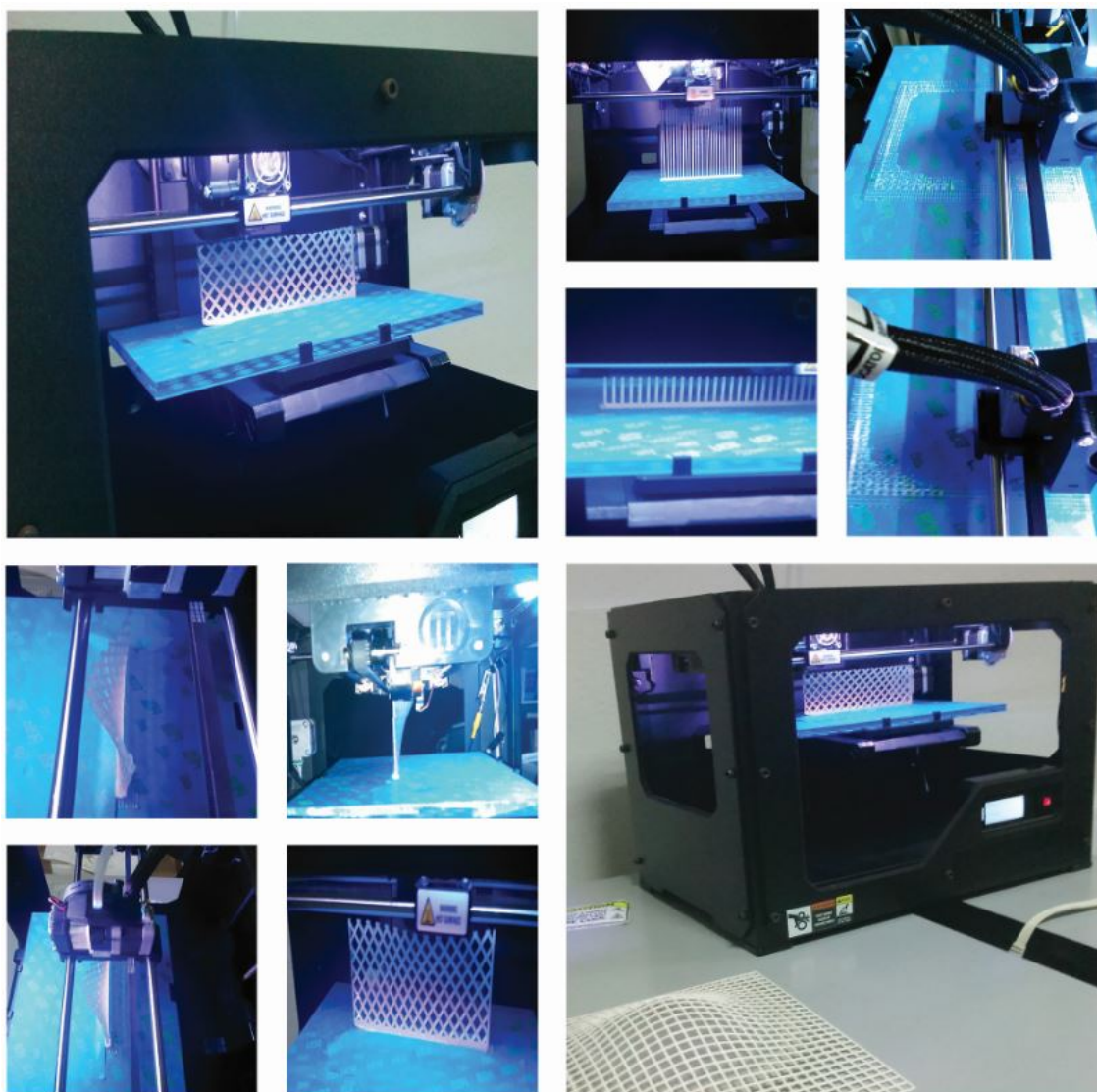


Слика 2.5 Ласерско скенирање модела слободне форме

Ласерско скенирање се често користи за скенирање објеката и добијање прилично тачних дигиталних модела. Принцип рада уређаја за ласерско скенирање заснован је на емитовању ласерских зрака на објекат и снимању њихове рефлексије у реалном времену помоћу дигиталног видео уређаја. Обзиром да су у скенеру ласер и видео уређај постављени на одређеној удаљености, координате сваке скениране тачке реконструишу се на основу познате вредности те дистанце.

Ограничења технике ласерског скенирања испољавају се у случају модела који имају исувише компликоване облике и поседују делове скривене од ласерских зрака. Међутим моделе је могуће скенирати из различитих углова, а скенове (*scans*) је могуће касније спојити у јединствене 3D модел.

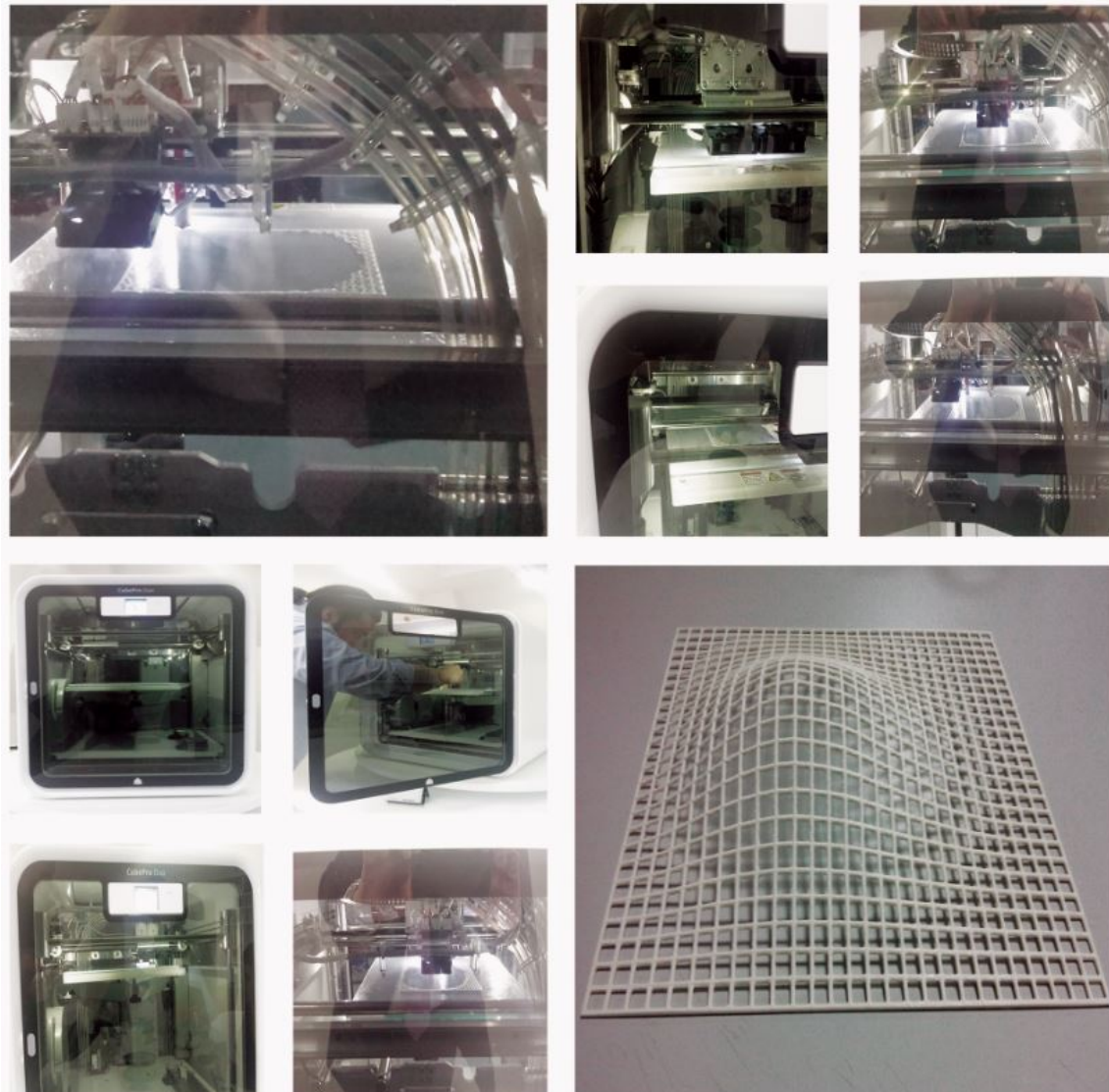
2.3.1 Приказ уређаја типа 1- *MakerBot® Replicator™ 2 Desktop 3D Printer*



Слика 2.6 Приказ машине и поступка екструдовања пластике

Ова технологија спада у поступке који користе принцип наношења топљеног материјала у простору и његовог слагања по слојевима након чега се формира жељени објекат. Као материјал се користе разни типови пластике различитих боја. Најчешћи материјали у употреби су ABS и PLA, од којих се ABS добија из нафте (као већина пластичних полимера) док се PLA прави од скроба и биоразградив је у благо киселом компосту на температури од 60 °C. MakerBot 3D штампач,

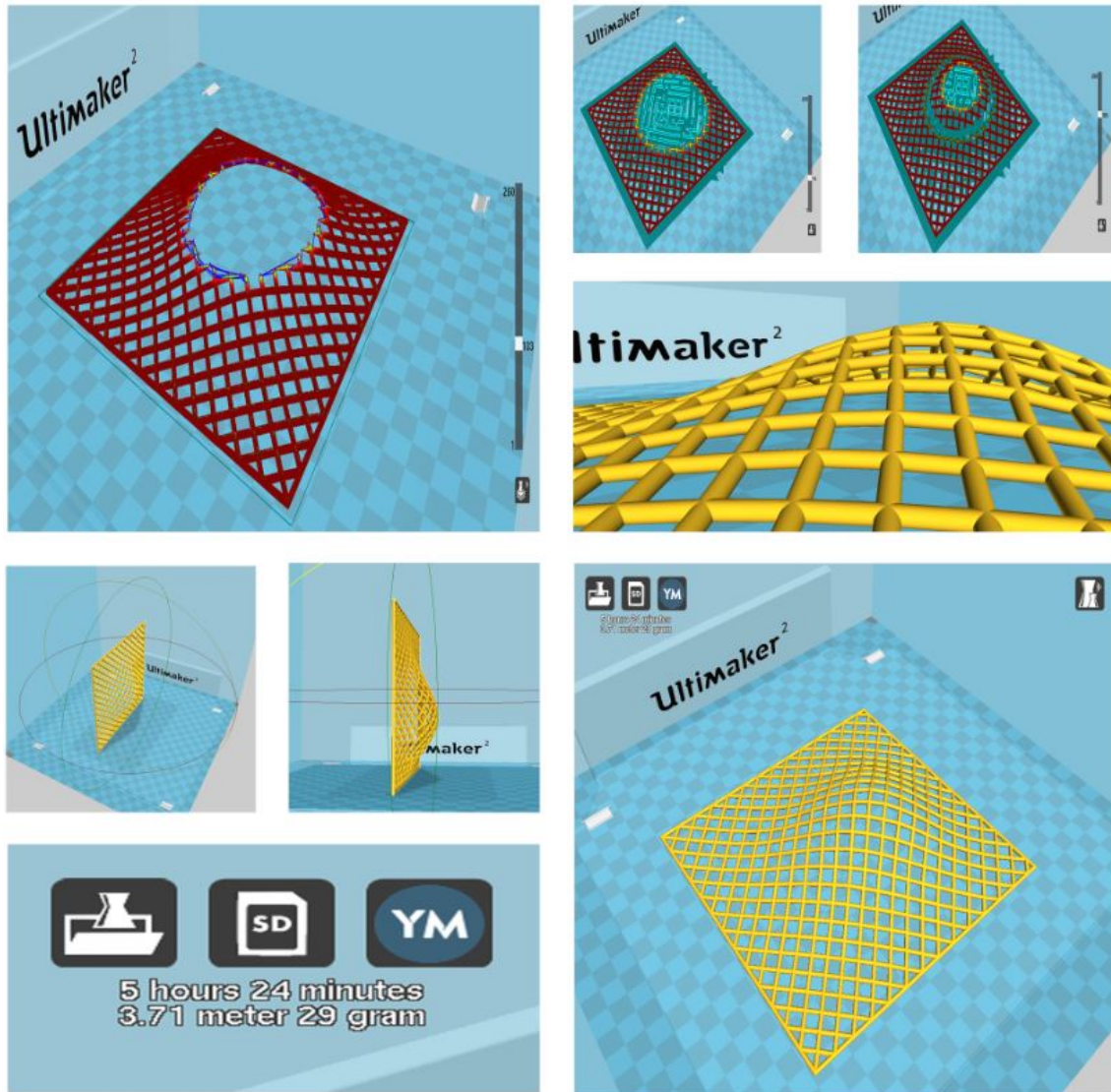
представља машину базирану на поступку екструдовања пластике у простору Сл. 2.6. Постизањем задате температуре у зависности од врсте пластике врши се њена



Слика 2.7 Репликатор типа 2- *CubePro Duo*

екструзија у виду танке „нити” којом се „исцртава” слој по слој и тако врши штампање објекта-модела. Приказ поступка 3D штампе могао би се описати на следећи начин: као прво треба уочити основна два дела, екструдер и платформу. Екструдер (истискивач) преко потисног механизма доводи материјал до грејача где постизањем радне температуре истискује пластику образујући слој (layer) на платформи. Екструдер поседује могућност кретања по X и Y координатама. Након

завршене прве операције долази до спуштања платформе у правцу Z осе за дебљину слоја и све је спремно за наредни циклус Сл.2.7. Екструдер као и радну платформу покрећу степ мотори којима се управља електроником путем које се



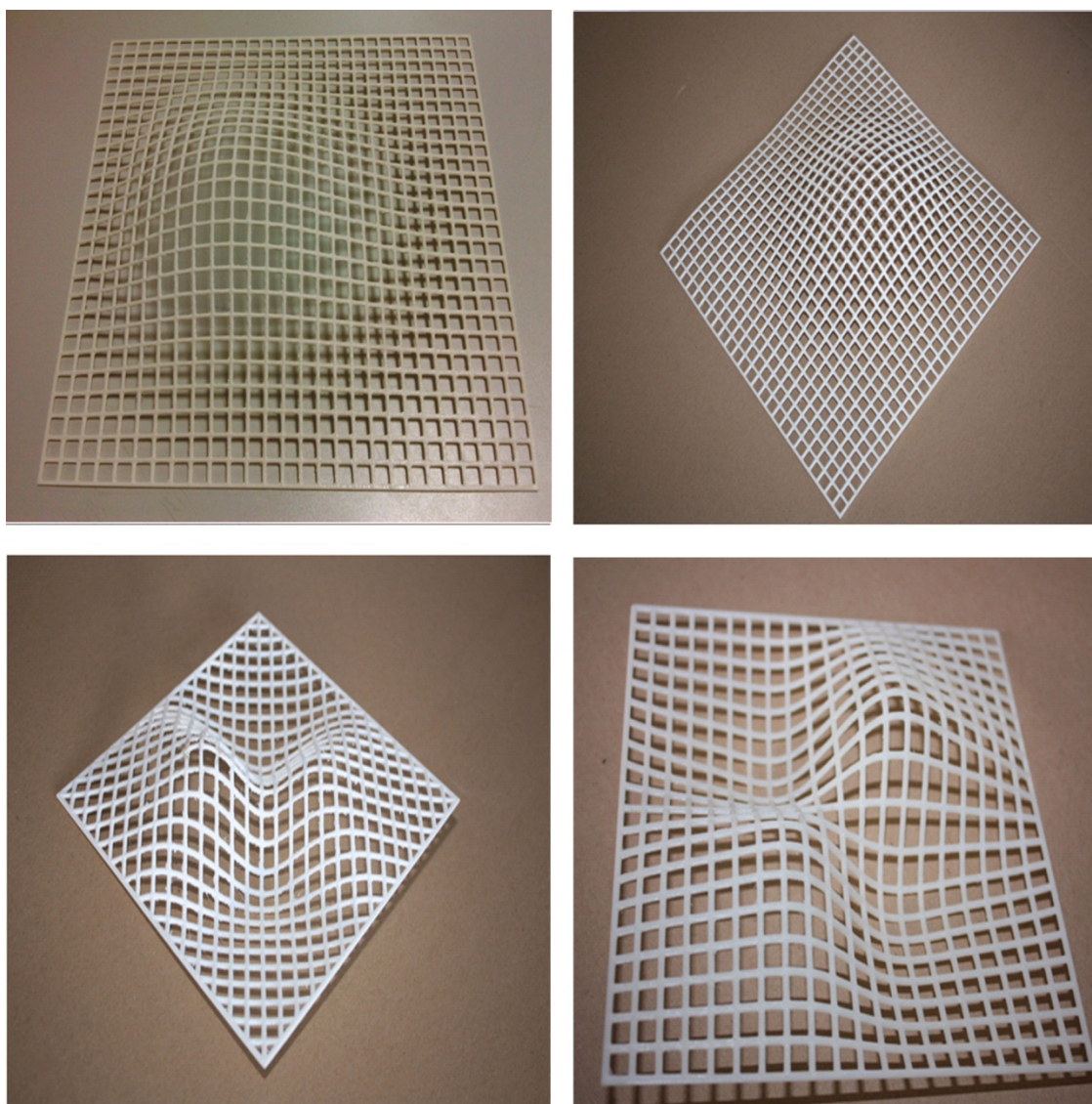
Слика 2.8 Софтвер типа G-код

врше подешавања параметара температуре, брзине истискивања материјала, дебљине слоја, као и позиционирање главе грејача у односу на платформу.

Уобичајени поступак израде прототипа подразумева следеће кораке: израду 3D модела, чување модела у формату који САМ пакети умеју да препознају STL

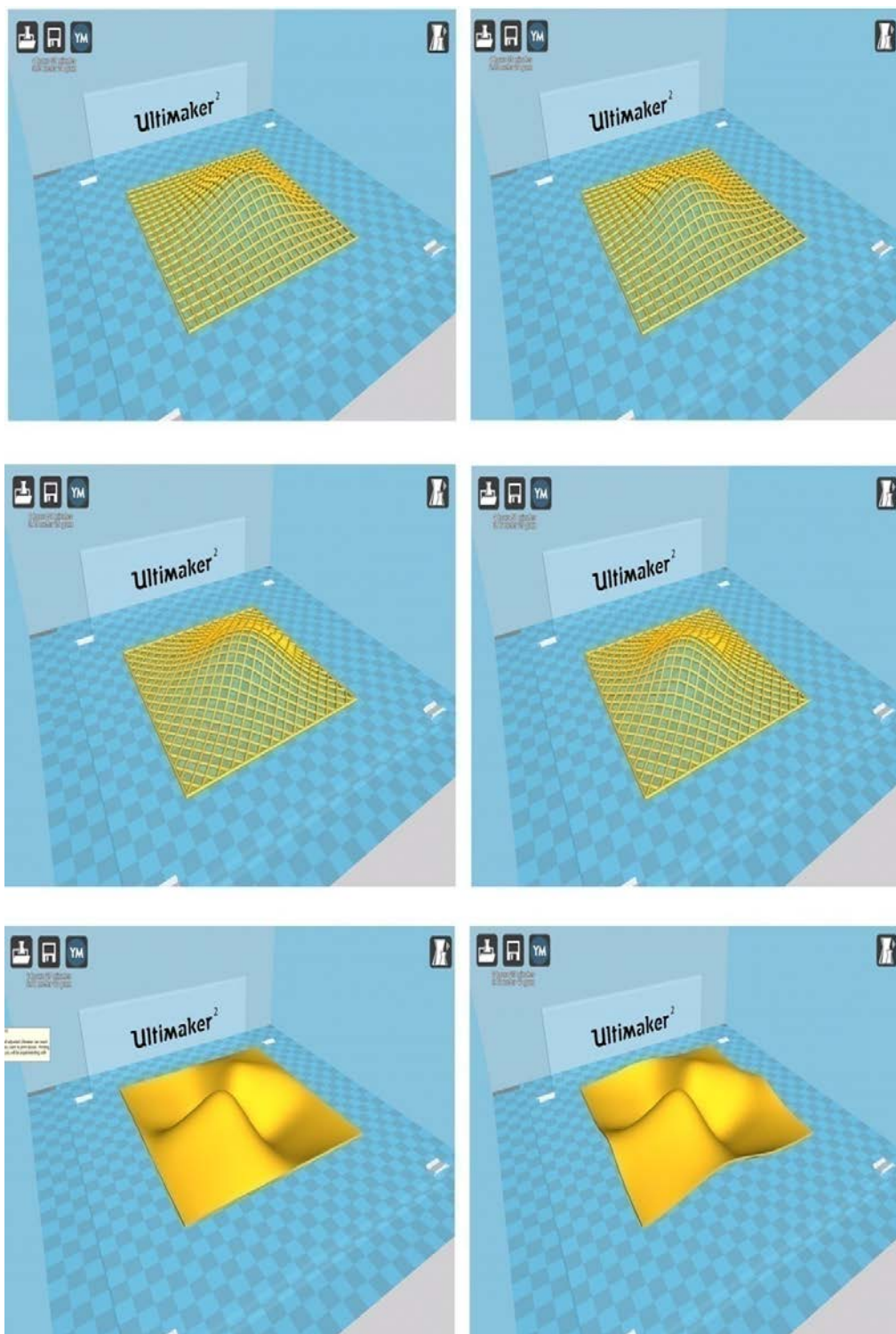
екстензију, уклањање могућих неправилности у STL формату, превођење САМ пакетом у G-код и на крају штампање модела.

Године 1984 Čarls Hal и његов изум стереолитографија - процес штампања тродимензионалних објеката из дигиталног фајла, означава почетак 3D револуције, а осмишљен је у циљу брзе и јефтине производње прототипа и његовог испитивања пре серијске производње.

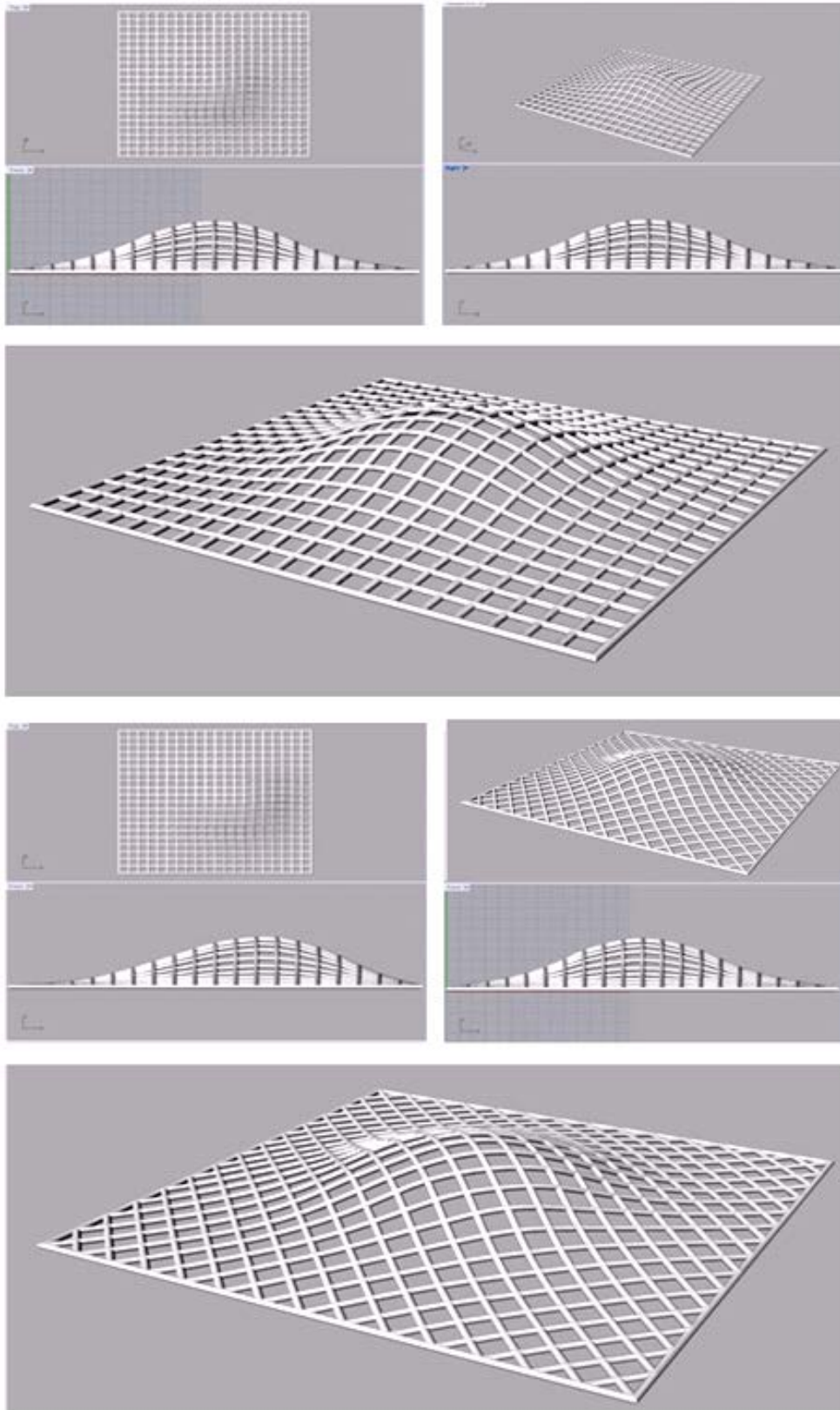


Слика 2.9 Модели гредних роштиља произведених од PLA

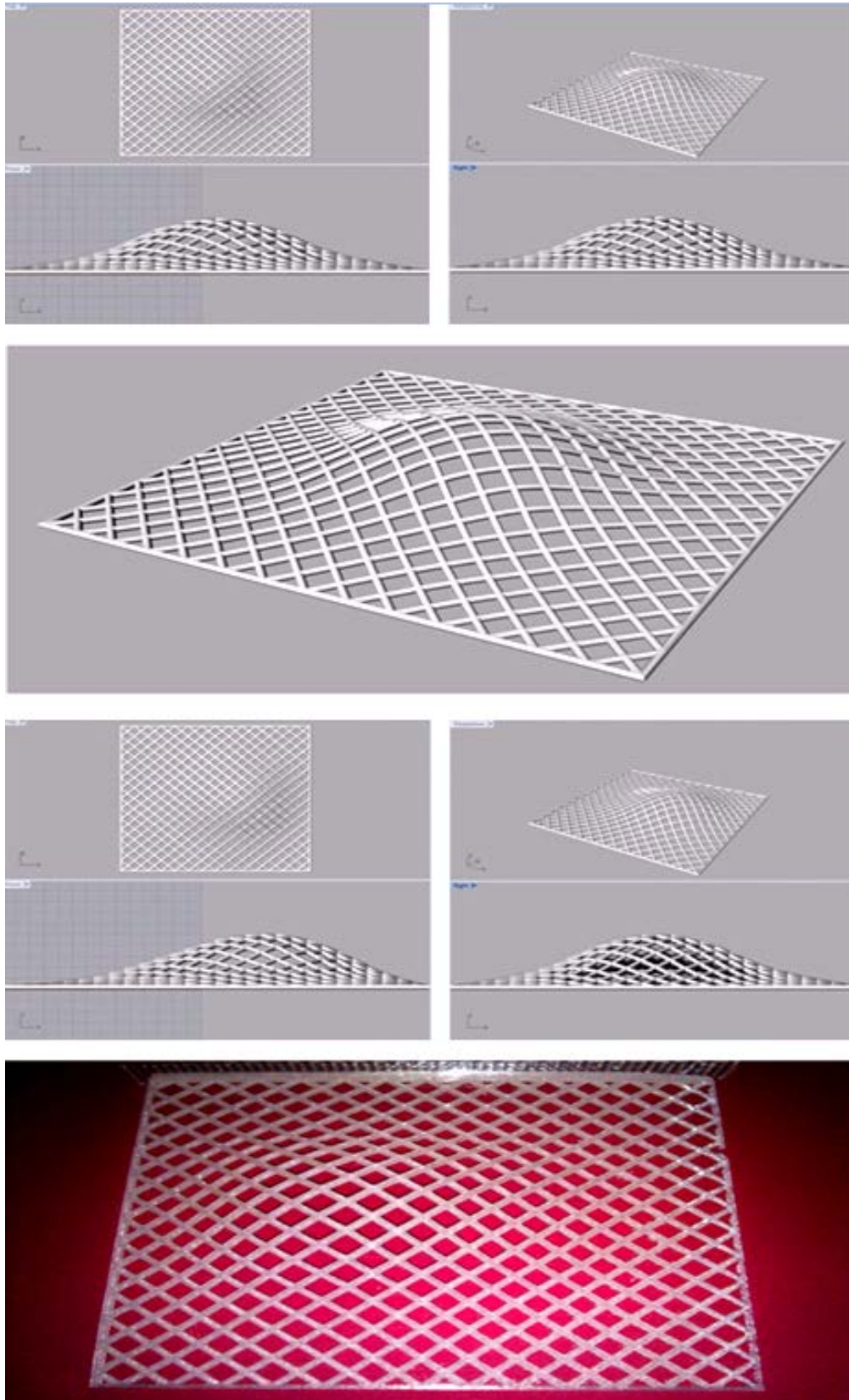
2.3.2 Функција/Улога RP у процесу пројектовања



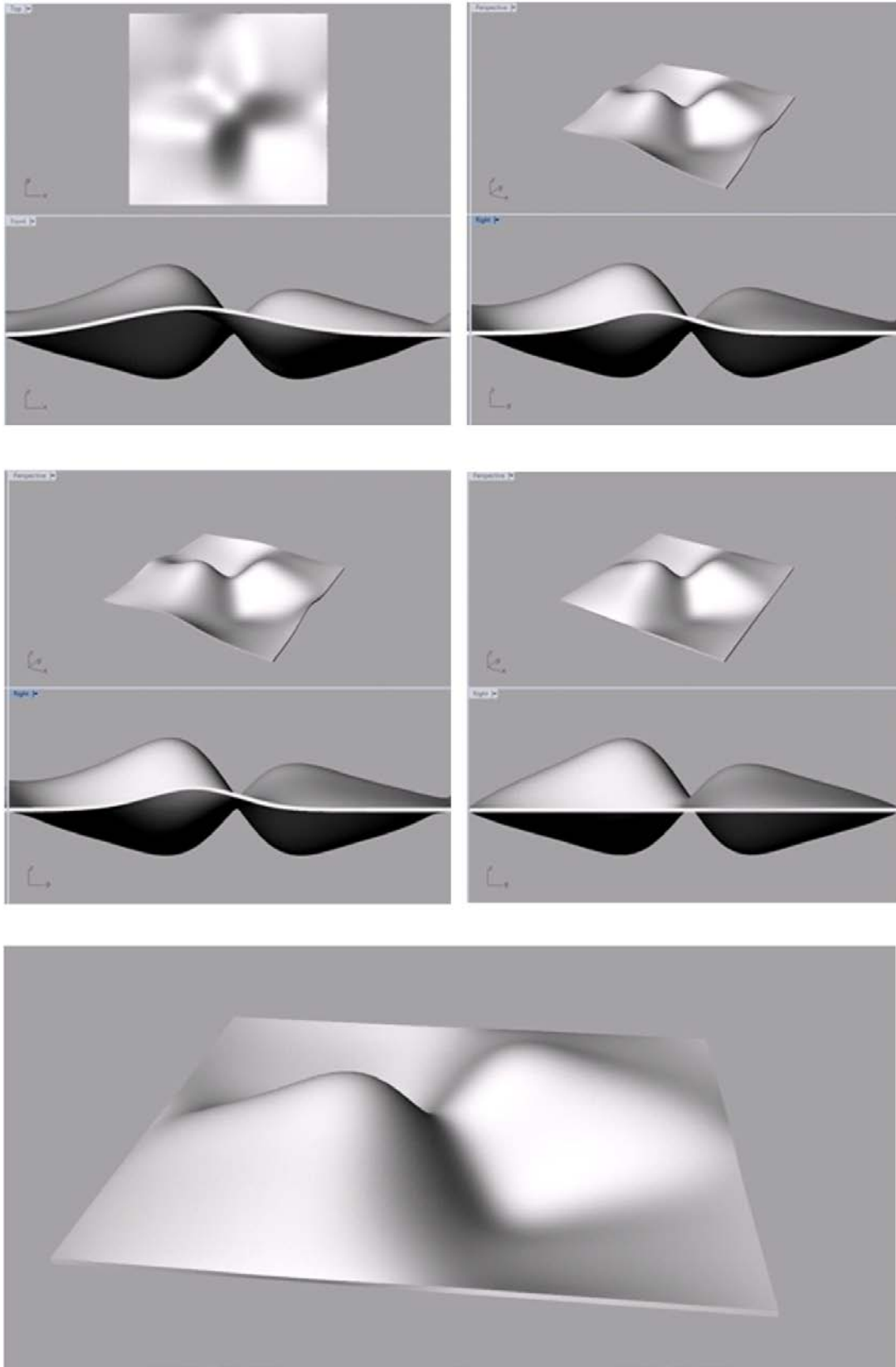
Слика 2.10 Модели типа 1, 2, 3, 4, 5 и 6



Слика 2.11 Модели типа 1 и 2.



Слика 2.12 Модели типа 3 и 4.



Слика 2.13 Модели типа 5 и 6.

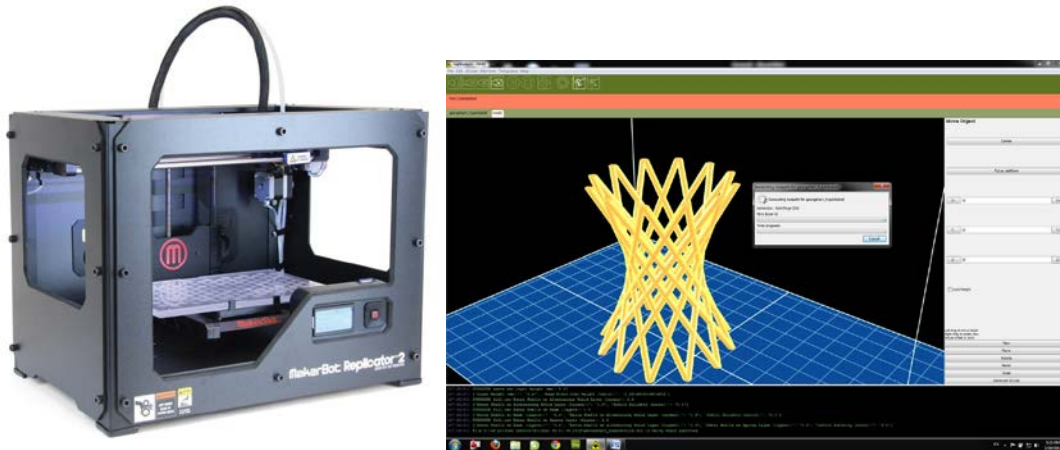
2.4 Примене у архитектури

Једна од позитивних последица примене дигиталних технологија у процесу пројектовања и произвођење је тзв. *mass-customization*, односно могућност производње објеката применом различитих компонената уместо стандардизованих делова. Индустијска производња у области грађевине је базирана на логици стандардизације, префабрикације и на монтажи на лицу места. Рационалност производње фаворизовала је симплифициране геометрије у односу на комплексне и репетицију јефтених масовно произведених компоненти. Обзиром да је дигитално контролисаном, аутоматизованом производњом практично изједначена продукција једноставних и комплексно обликованих компоненти, а да варијације не утичу на ефикасност и економичност продукције ригидност производње више није неопходна. У том смислу, појединачне компоненте могу бити прилагођене како би се омогућиле оптималне варијације као одговор на локалне услове (нпр. производња различито оптимално обликованих и димензионисаних конструктивних елемената у зависности од оптерећења).

Пример 1: Креирање модела коришћењем репликатора

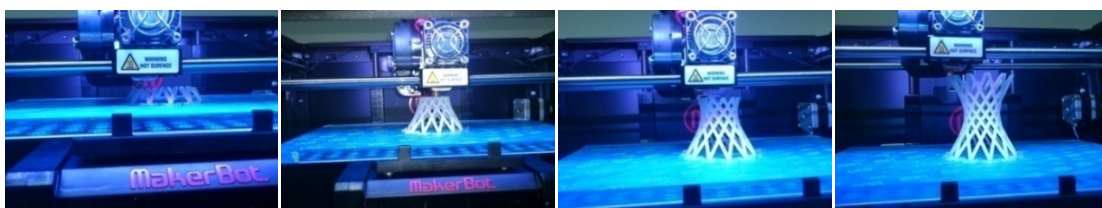
Примером је описан процес дигиталне производње физичког модела - прототипа облика ротационог хиперболоида применом 3D штампача [Nes13]. Облик хиперболоида генерисан је коришћењем CAD софтвера за моделовање тела (*solid modeling*), а физички модел је произведен употребом концептуалног моделара (*concept modeler*).

За конструисање прототипа коришћен је уређај *MakerBot® Replicator™ 2 Desktop 3D Printer* који подржава софтвер *ReplicatorG*, [Маk10] а који је у власништву Архитектонског факултета у Београду, Сл.2.4. Овај уређај за израду прецизних, комплексних, квалитетних модела добре завршне обраде припада класи уређаја ниске цене.



Слика 2.14 *MakerBot® Replicator™ 2 Desktop 3D Printer* и софтвер *ReplicatorG*

Запремина модела је 28.5L x 15.3W x 15.5H cm. Пречник влакна износи 1.75mm, а пречник игле 0.4mm. Висина слоја од 100 микрона обезбеђује конструисање глатких површи без потребе за накнадну обраду. Захваљујући оптимизованом софтверу, хардвер штампа модел на основу 3D солид CAD дигиталног модела коришћењем овог уређаја доста брзо. Типови фајлова које подржава софтвер су STL, OBJ или THING. Примењена технологија штампе је фабрикација спајањем влакана (*fused filament fabrication*), а PLA (*PolyLactic Acid*) је материјал коришћен за штампу, Сл.2.14. PLA је обновљиви еколошки биопластични материјал који омогућава производњу прототипова високог квалитета.



Слика 2.15 Процес израде модела применом технологије спајања влакана (*fused filament fabrication*)

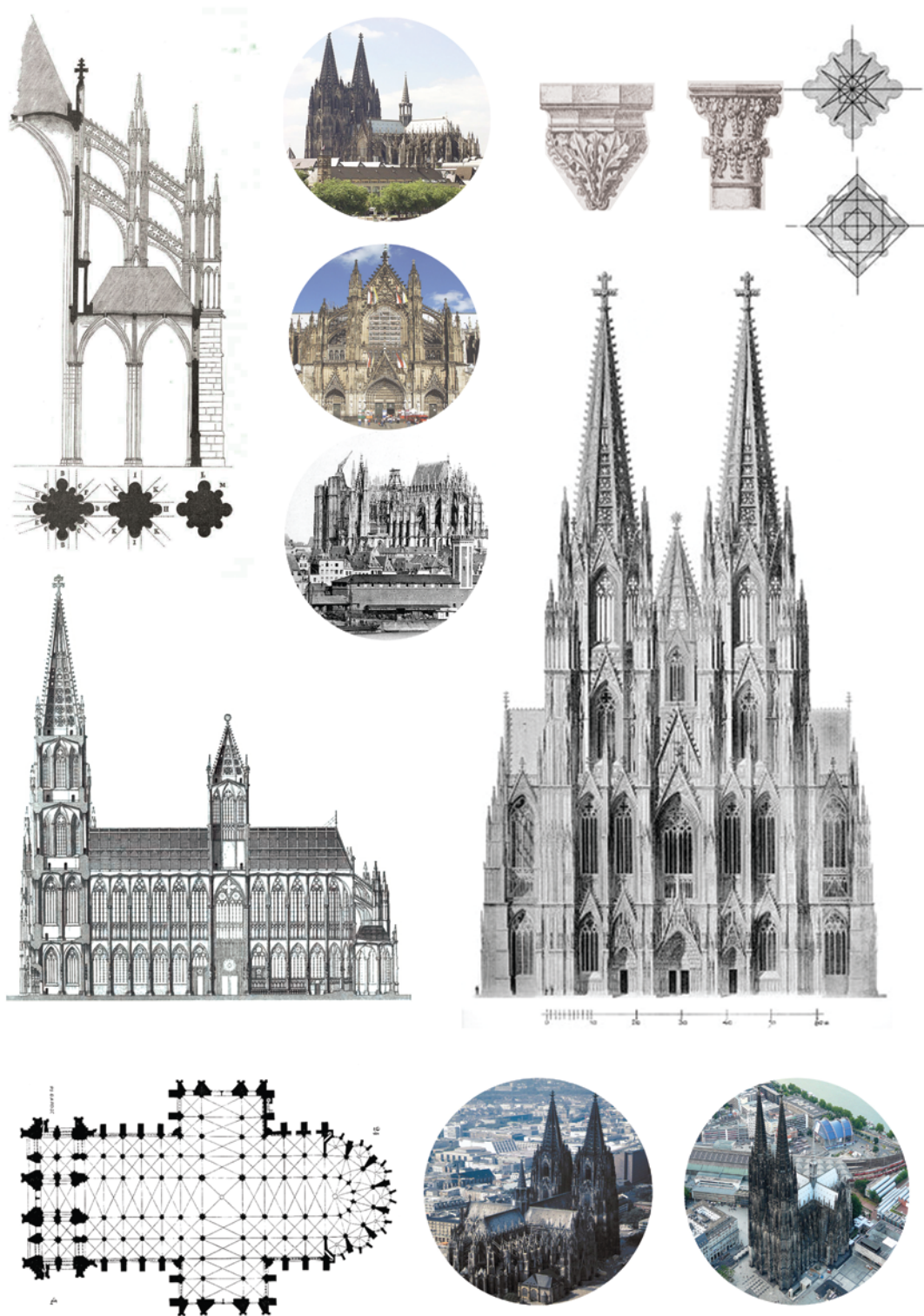
Ротациони хиперболоид представља једнограну квадратну 3D површ негативне Гаусове кривине која настаје ротацијом косе линије. Модел ротационог хиперболоида преставља дискретну просторну структуру коју чини 12 греда, чије су димензије следеће: пречник основе $D=6.5\text{cm}$, висина $H=7.5\text{cm}$, и пречник греда $\varnothing 3\text{mm}$. Време потребно за израду прототипа је 1h 35min, Сл.2.15.



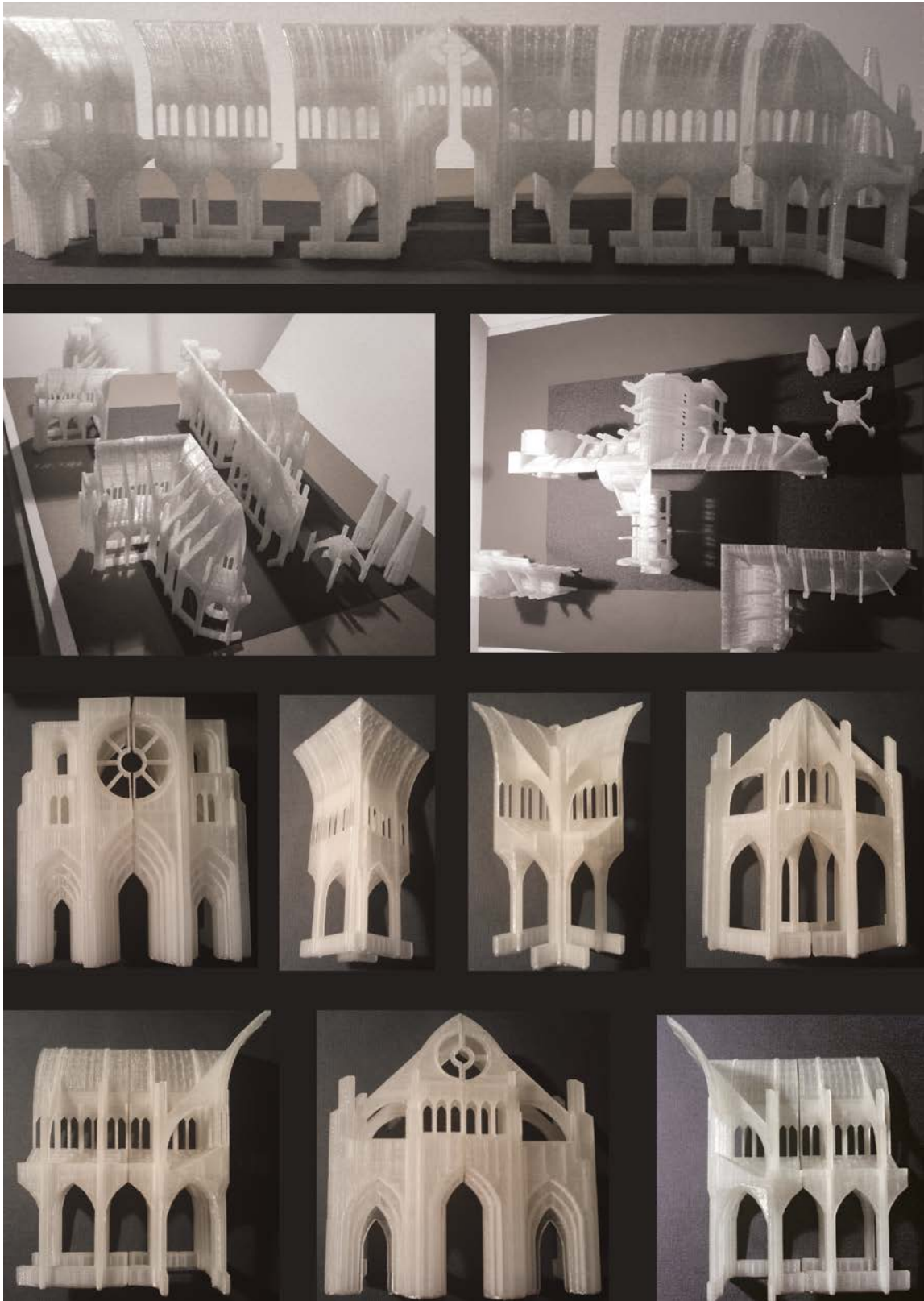
Слика 2.16 Финални 3D-PLA физички модел ротационог хиперболоида

Разноврсна је примена геометрије ротационог хиперболоида у пројектовању архитектонских структура, тзв. хиперболичних структура. Ову двоструко закривљену правоизводну површ је могуће једноставно конструисати полазећи од правих греда, а захваљујући својој геометрији представља ефикасан конструктивни систем, Сл.2.16. Прву хиперболичну просторну структуру изградио је В. Г. Шуков. У циљу реализације ових структура Шуков је развио ефикасан и једноставан конструктивни систем штапастих љуски (*grid-shells*). А. Гауди је једновремено али независно спроводио експерименте такође примењујући облик ротационог хиперболоида. Ова геометрија је нашла распрострањену примену у изградњи танких љуски. Познати су примери употребе ротационог хиперболоида као облика низа објеката које су пројектовали различити аутори попут Е. Тороје (Е. Torroja), Ле Корбизјеа (Le Corbusier), Ф. Канделе (F. Candela) и др.

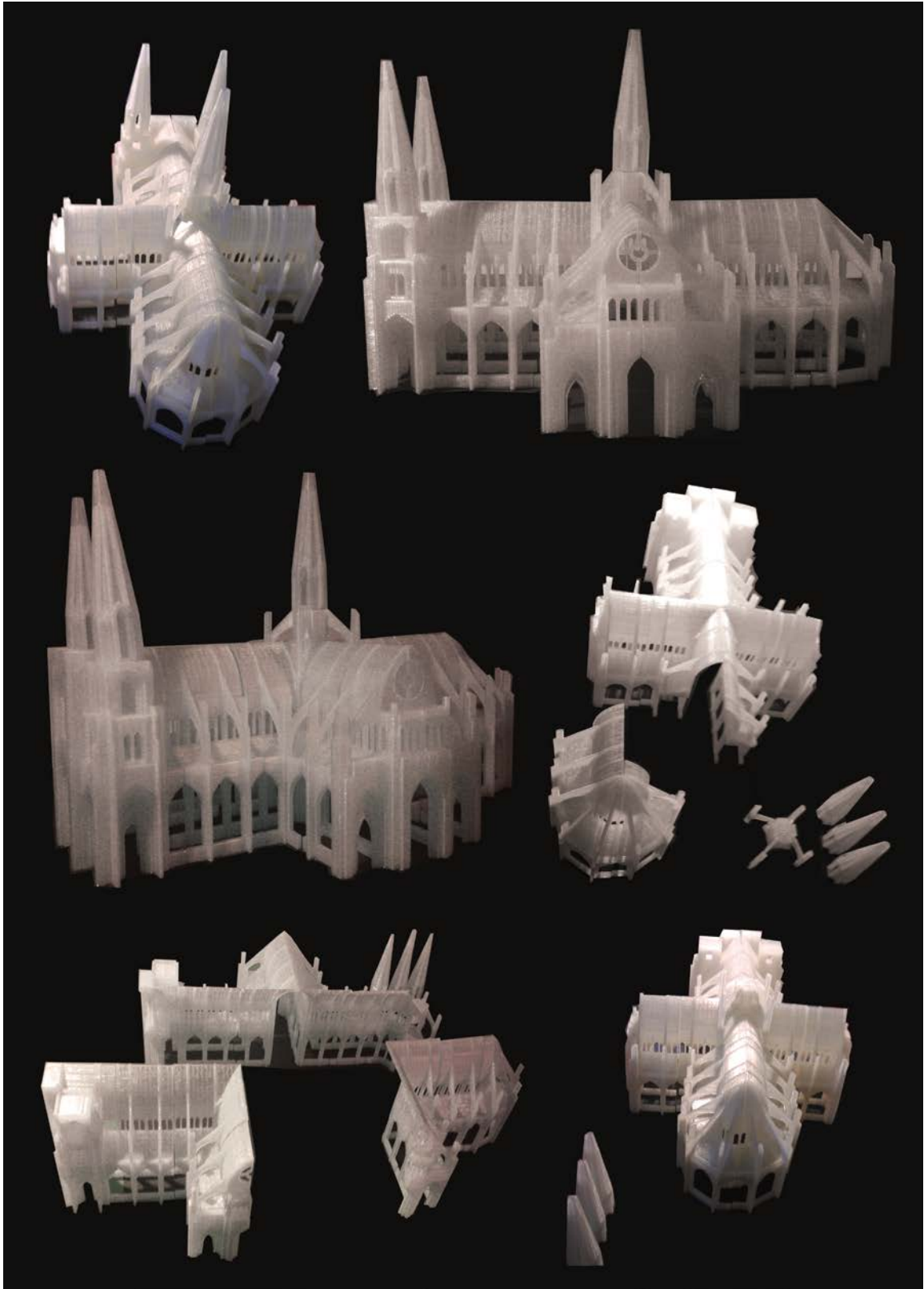
Пример 2: Креирање модела коришћењем репликатора – модел катедрале



Слика 2.17 Графичка студија катедрале – основа за моделовање



Слика 2.18 Модел катедрале из 21 елемената од PLA материјала



Слика 2.19 Модел катедрале у склопу и расклопу од PLA материјала

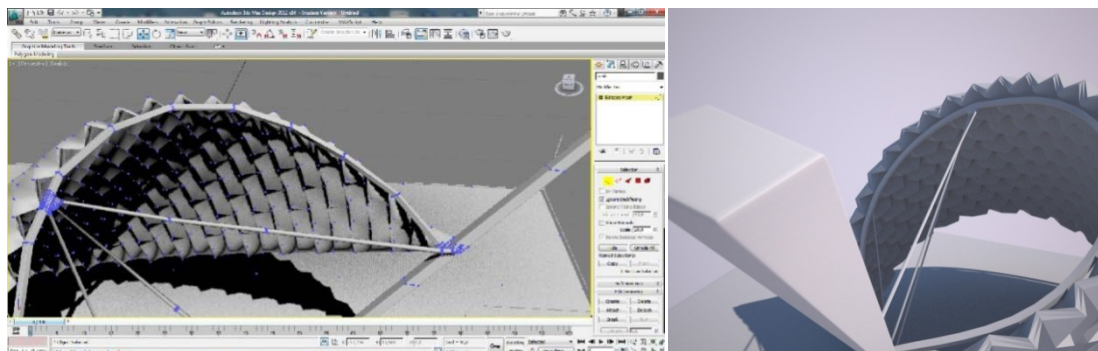
Пример 3: Креирање модела коришћењем 3D штампача високе прецизности

Примером је описан процес дигиталне производње физичког модела – прототипа набора слободне форме [Hag08], [Hul06], [Hul95], [Jas11], [Miu97] применом 3D штампача. Генерисању геометрије модела претходио је период истраживања геометрије коришћењем физичких модела, Сл.2.20, а у изради папирних модела учествовала је група студената Архитектонског факултета у Београду у оквиру предмета Конструктивни системи [Nes12], [Nes16a].



Слика 2.20 Папирни модели

У следећој фази је генерисан дигитални модел наборане структуре слободне форме коришћењем CAD софтвера за моделовање, Сл.2.21. Модел је генерисан мапирањем теселација набора на површ произвољне форме коришћењем концепта контролних линија [Nes12].



Слика 2.21 Генерисање дигиталног модела набора слободне форме и рендер

На крају је конструисан прототип у малој размери коришћењем технике 3D штампе. За производњу прототипа коришћен је уређај Spectrum ZTM510, из класе високо прецизних функционалних уређаја за израду физичких модела. Овај 3D штампач има следеће особине: (1) брзина штампе 2-4 слоја у минути; (2) максимална запремина модела 254X x 356Y x 203Z mm; (3) материјал–композит високох перформанси; (4) дебљина слоја 0.89-2.03mm; (5) резолуција 600 x 540 dpi. Уређај подржава системски софтвер који прихвата модела у STL, VRML и

PLY фајл форматима, Сл.2.22.

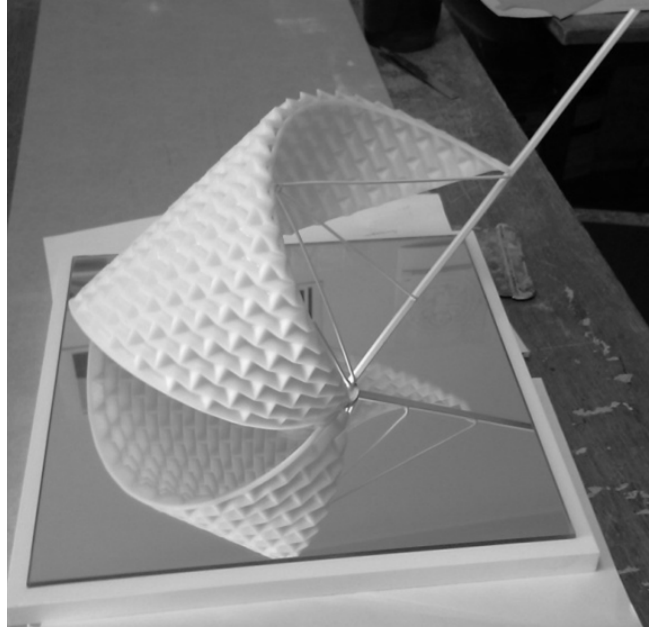


Слика 2.22 3D штампач Spectrum Z™ 510 коришћен за израду модела

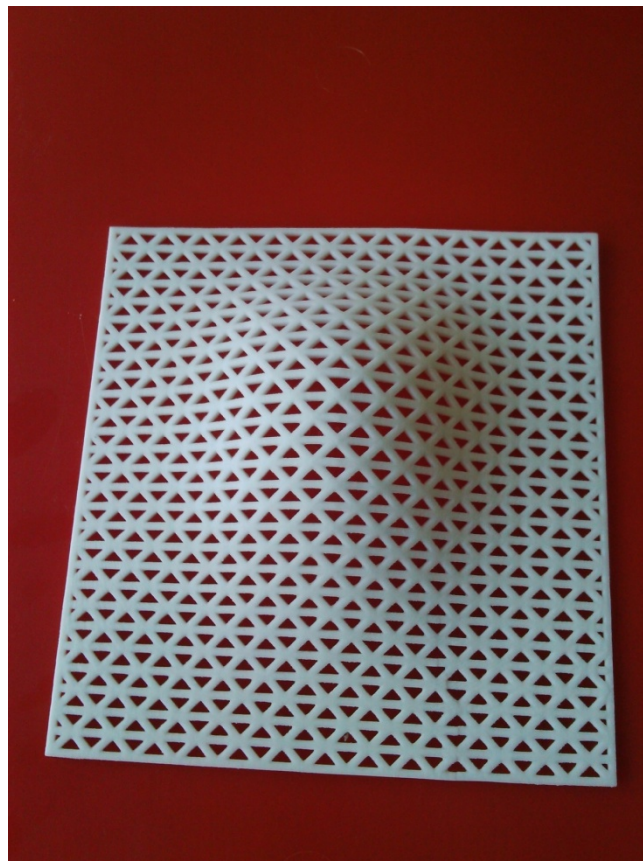
Процедура израде прототипа подразумевала је следеће фазе:

- Припрему модела која подразумева конверзију 3D солид модела генерисаног коришћењем CAD у STL фајл формат. Моделу набора је додељена стандардна дебљина од 2mm.
- Модел је затим подељен на 2D паралелне хоризонталне слојева стандардне дебљине од 0.1mm.
- Трансфер дигиталног модела машини и прорачун тзв. пута изградње (*build path*), тј. најефикаснијег начина штампе модела.
- Трансфер информација о сваком слоју глави (*processing head*) машине и производња модела сукцесивним додавањем материјала слој-по-слој (*layer-by-layer*). У том процесу ласер селективно спаја прашкасти материјал на постољу штампача на основу података дигиталног модела.
- Након финализације једног слоја, постоље се спушта за дебљину једног слоја, а нови материјал се наноси на површину. Овај поступак се понавља све до завршетка прототипа.

Током штампе модел је окружен не спојеним (*un-sintered*) прахом, због чега нема потребе за додатном конструкцијом која ће служити као ослонац у току израде, а чиме је олакшана израда комплексне геометрије. Финални модели приказани на Слици 2.23 и 2.24. поред површи реализоване методом 3D штампе има и друге носеће елементе лук, пилон и затеге који су израђени од других материјала.



Слика 2.23 Фотографија финалног модела



Слика 2.24 Модел куполе од "прашкастог материјала" триангулисаног гредног роштиља

3.0 Експериментални приступ пројектовању система љуски

и греда

Коришћење физичких модела у процесу архитектонског пројектовања, како би се провериле и презентовале идеје, је уобичајени поступак. Израда макета није страна архитектама, који примењују овај поступак још од ренесансе. Осим функције презентације, бројни су примери коришћења модела у поступку проналажења оптимално, структурално-формалних решења и тестирања понашања структура. Различите научне методе коришћене су како би се развили нови конструктивни системи. Познат је пример израде жичаних модела које је користио Гауди за реализацију својих изузетних архитектонских решења, али и Ото за проналажење форме својих висећих кровова. Конструктори попут Фулера, Нервија, Канделе, Торохе, Ислера и др. су такође експериментисали израђујући различите моделе у циљу реализације својих иновативних, и за време у коме су стварали, смелих конструктивних решења. Коришћење дигиталних тродиманзи-тродимензионалних модела и израда на основу њих физичких и виртуалних прототипова представља логичан континуитет. Савремене CAD/CAM технологије, производња модела поступком *rapid prototyping*, нуде различите могућности за продукцију модела у погледу прецизности, квалитета материјализације и брзине израде. Ови модели могу имати улогу која није само презентација већ као функционални модели за поуздано утврђивање понашања структуре у погледу деформације и напона. У том смислу, савремени поступци моделовања, анализе, симулације, производње и тестирања, представљају поуздане и ефикасне методе за производњу комплексних неконвенционалних структура.

3D оптичка анализа деформације представља један од напредних поступака који је могуће користити у поступку анализе физичких модела структура. Ова технологија омогућава увид у понашање структуре, њених компоненти и материјала. Статичко и динамичко понашање структуре и њених компоненти услед одређених утицаја је неопходно за њену реализацију. Овај захтев је условио развој ефикасних метода и прецизних апарата за спровођење оваквих анализа.

Предност 3D оптичке анализе огледа се у примени опреме која није у непосредном контакту са структуром која представља предмет анализе, независна је од материјала и са високом прецизношћу одређује/мери 3D површинске координате, 3D померања и брзине померања и вредности деформације површи. Коришћењем ове методе мерења могуће је одредити материјалне карактеристике (модул еластичности, Поасонов коефицијент, итд.), извршити анализу компоненти (crash tests, анализу вибрација, отпорности, итд.) и верификацију анализе спроведене коришћењем коначних елемената (КЕ). Коришћењем овог система, за разлику од конвенционаних метода мерења у којима се користе различити мерни уређаји (мерне траке, екстензиометри и сл.), могуће је добити податке о померањима и деформацији у најразличитијим условима.

Обзиром да је сам процес пројектовања структура, уобичејено интерактиван, чињеница да системи 3D оптичког мерења редукују процедуру мерења, такође представља важну предност ове методе. Претходно је остварено интеграцијом софтвера и хардвера. Јединствена софтверска апликација омогућава мерење, анализу добијених резултата и креирање документације. Софтверска апликација система резултате добијене мерењем (тј. снимањем помоћу хардверске опреме високе прецизности) директно обрађује и креира извештај. За визуализацију резултата се користе напредне технике попут анимације.

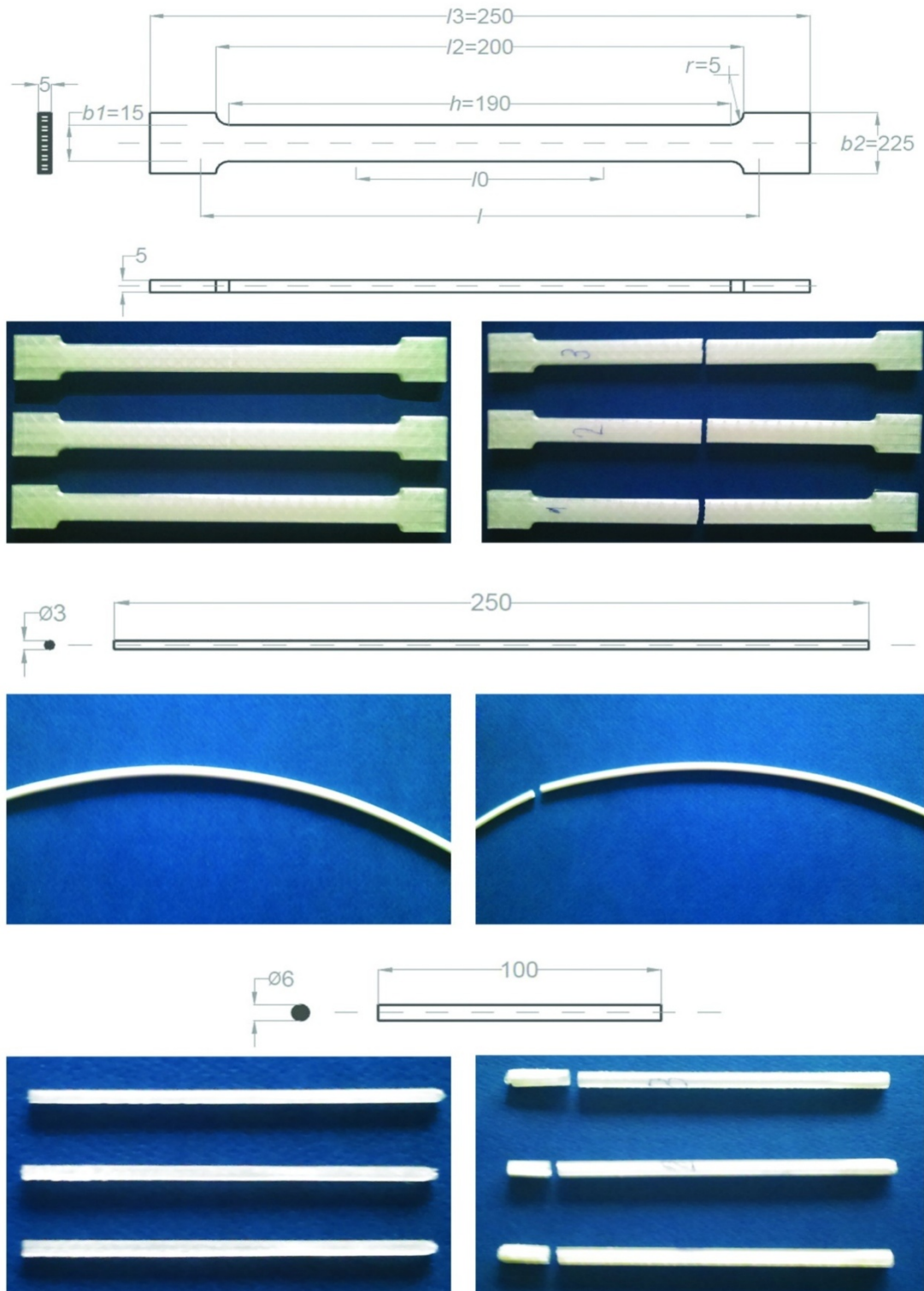
Напонско деформацијска анализа применом методе коначних елемената (МКЕ) је уобичајени поступак нумеричке анализе структура. Међутим, у последње време, осим нумеричких симулација примена система оптичког мерења постала је важна алатка за дијагностику понашања структура. Овом методом је могуће извршити верификацију МКЕ симулација, а могућност одређивања материјалних параметара помаже унапређењу процене модела. Могућност уноса резултата МКЕ анализе омогућава компарацију и валидацију резултата МКЕ симулација и добијање поузданијих резултата.

3.1 Материјал прототипа (PLA - PolyLacticAcid)



Слика 3.1 Лабораторија са опремом за испитивање карактеристика PLA материјала (Технолошко-металуршки факултет Београд)

Опрема на којој је вршено испитивање карактеристика PLA материјала се састоји од следећих компоненти. Основни уређај је серво хидрауличка кидалица "INSTRON-1332", Instron England. Овај уређај служи за статичко и испитивање на замор у контроли силе, померања или деформације. Мерни опсег силе је 100 kN, ход 100 mm, из 1979. године.



Слика 3.2 Епрувете за испитивање PLA материјала: а) стандардне епрувете P1, P2 и P3, б) жица P01 и ц) штап P02, P03, за одређивање модула еластичности и кидања материјала



Слика 3.3 Процес лабораториског испитивања

Друга компонента уређаја за мерење је управљачка мерно регулациона електроника, FastTrack 880, са основним софтверским пакетом FastTrack Console, Software 2003 год. Трећу компоненту чини аксијални екстензометар "INSTRON-mod 2630-113", мерне дужине 50 mm и издужења 100% [Cha98], [Hul96].



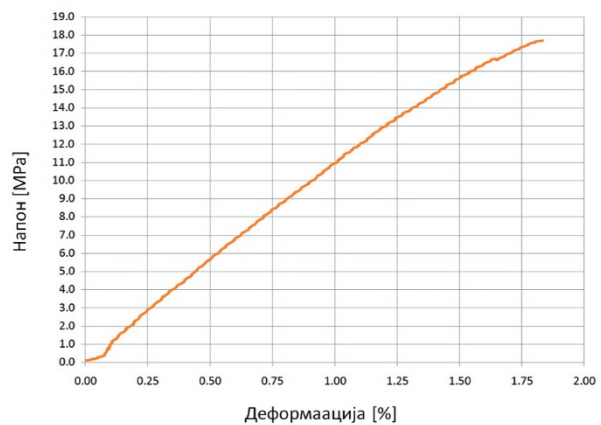
$$\sigma = E \cdot \varepsilon = \frac{F}{A}$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$$

$$l = 50\text{mm}$$

(екстензометар)

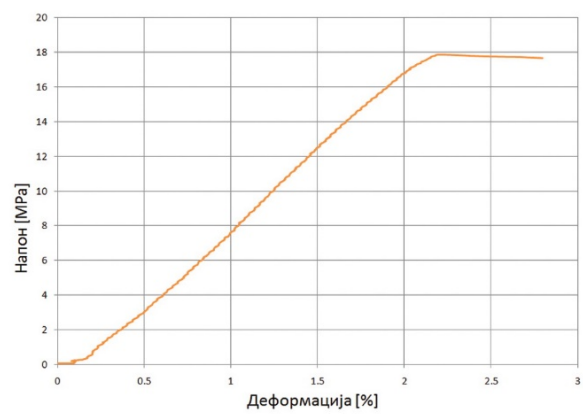
$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{16}{1,5 \cdot 10^{-2}} = 1067 \text{ MPa}$$



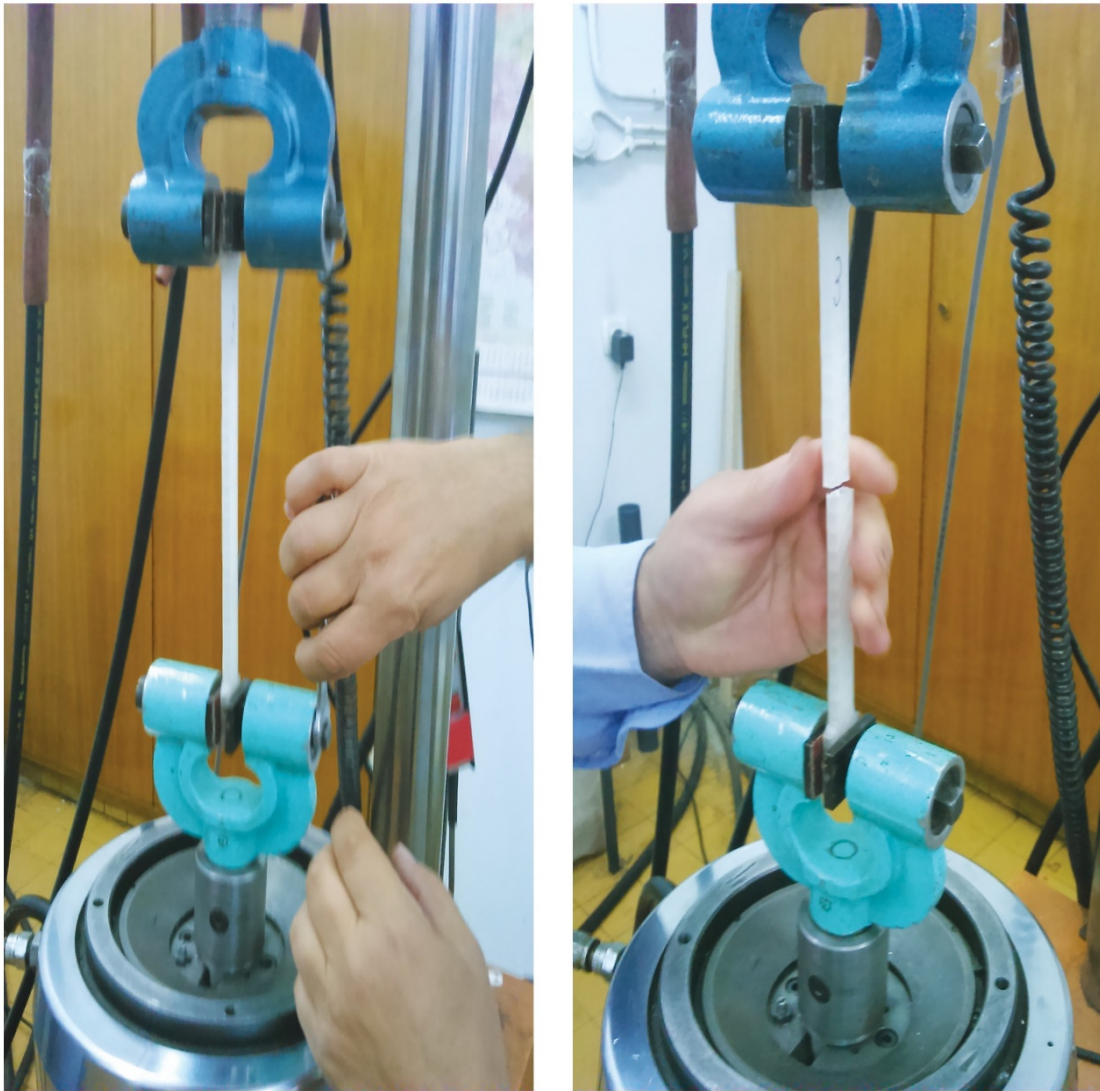
Слика 3.4 Експериментално одређивање Хуковог закона стандардне епрувете P1 и модула еластичности PLA материјала



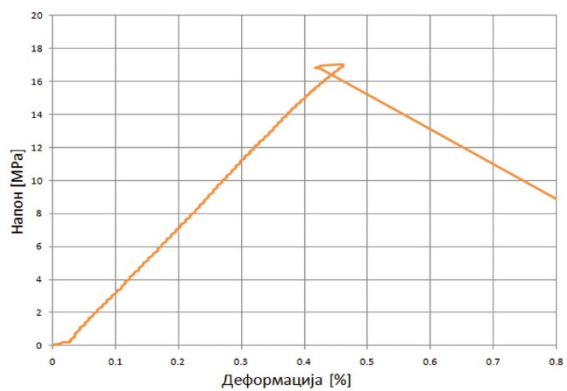
$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{18}{2 \cdot 10^{-2}} = 900 \text{ MPa}$$



Слика 3.5 Експериментално одређивање Хуковог закона стандардне епрувете P2 и модула еластичности PLA материјала



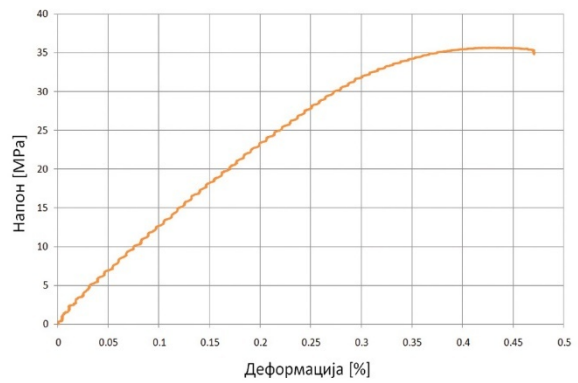
$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{17}{1,8 \cdot 10^{-2}} = 950 \text{ MPa}$$



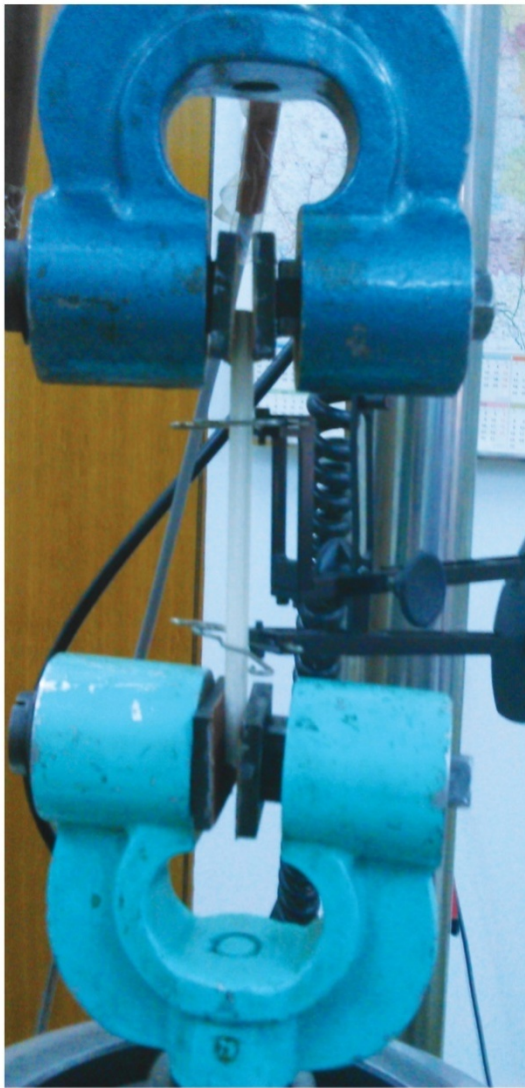
Слика 3.6 Експериментално одређивање Хуковог закона стандардне епрувете РЗ и модула еластичности PLA материјала



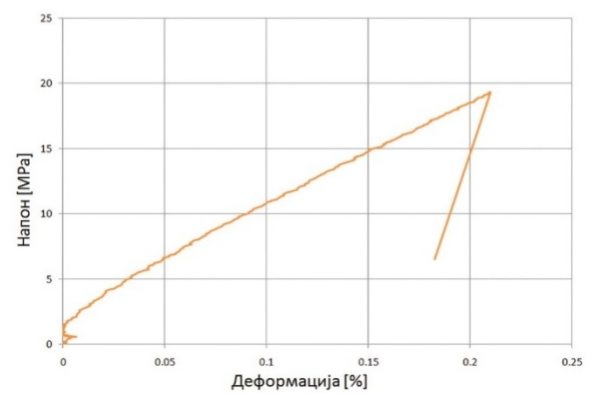
$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{30}{0,3 \cdot 10^{-2}} = 10000 \text{ MPa}$$



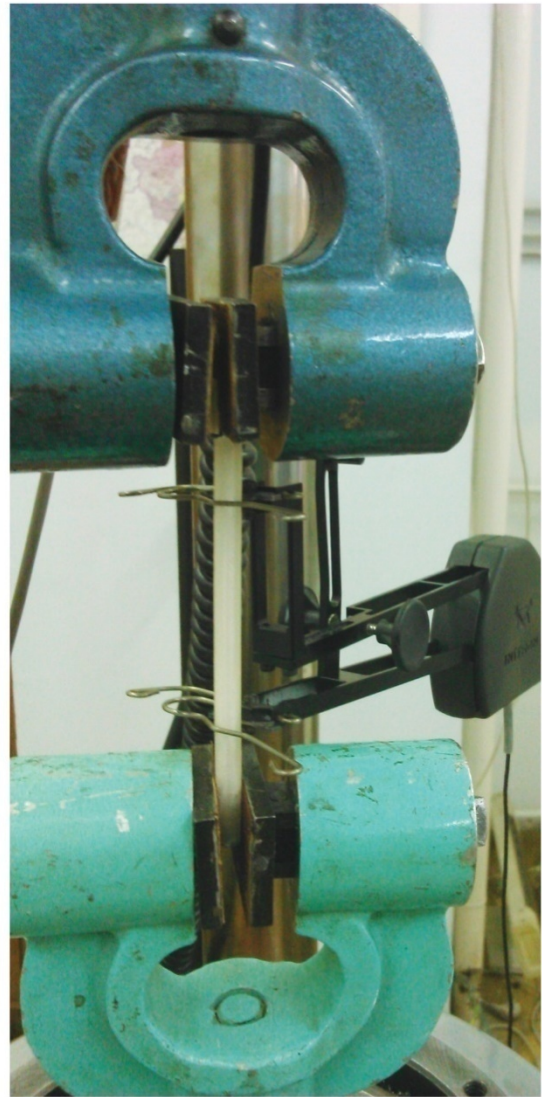
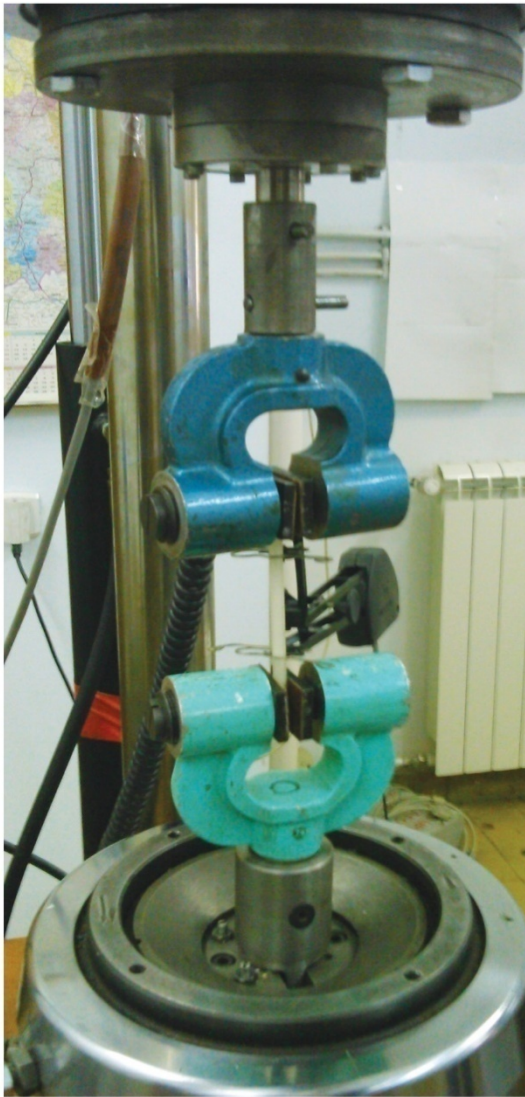
Слика 3.7 Експериментално одређивање Хуковог закона жице P01 и модула еластичности PLA материјала



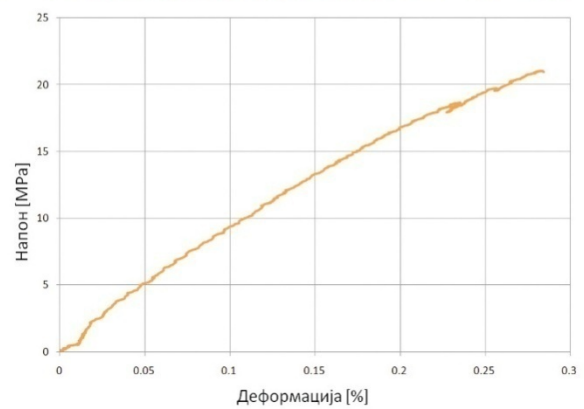
$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{16}{0,22 \cdot 10^{-2}} = 7270 \text{ MPa}$$



Слика 3.8 Експериментално одређивање Хуковог закона штапа епрувете P02 и модула еластичности PLA материјала



$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{18}{0,25 \cdot 10^{-2}} = 7200 \text{ MPa}$$



Слика 3.9 Експериментално одређивање Хуковог закона штапа епрувете P03 и модула еластичности PLA материјала

3.2 Поставка 3D оптичке методе мерења деформацијско-напонског стања

3.2.1 Систем за оптичко 3D мерење померања и деформација

Метода за тродимензионалну (3D) оптичку анализу деформација и померања заснива се на корелацији дигиталних слика (DIC – Digital Image Correlation). Ова техника укључује дигитализацију припремљене мерне површине сликаног објекта пре и после дејства оптерећења тј. померања или деформисања. Опрема за експерименталну анализу се састоји из система за 3D оптичку анализу деформација/померања, тј. посебних сетова стерео камера и сочива за сваки од софтвера, програмског пакета ARAMIS, постоља које омогућава сигурност и стабилност сензора, уређаја за контролу напајања и снимања слика, РС система и додатног осветљења, Сл.3.10.

Све промене почетних тачака или малих површина на сликама пореде се са претходним сликама у низу, коришћењем корелационих функција, до проналажења што приближније сличности. Сваки пиксел на слици има своју нумеричку вредност и поређењем слика пореде се низови тих вредности. Резолуција померања у под – пикселском опсегу се креће од 0,02 до 0,01 пиксела, а максимална тачност деформације је реда величине 0,02 %.

Пре сваког мерења потребни кораци за извођење процедуре мерења су следећи:

1. дефинисање мерне запремине. Пре почетка мерења потребно је дефинисати димензије мерног објекта, тако да се мерни објект налази унутар дефинисане мерне запремине у свим корацима деформисања;
2. припрема узорка;
3. хардверско подешавање система;
4. калибрација мерне запремине;
5. отварање новог пројекта у програму и дефинисање његових параметара (мале површине, опсег деформација, кључне речи, параметри корака);
6. подешавање начина снимања слика, на пример једноставно (*simple measurement*) или брзо мерење (*fast measurement*);
7. снимање слика током мерења;



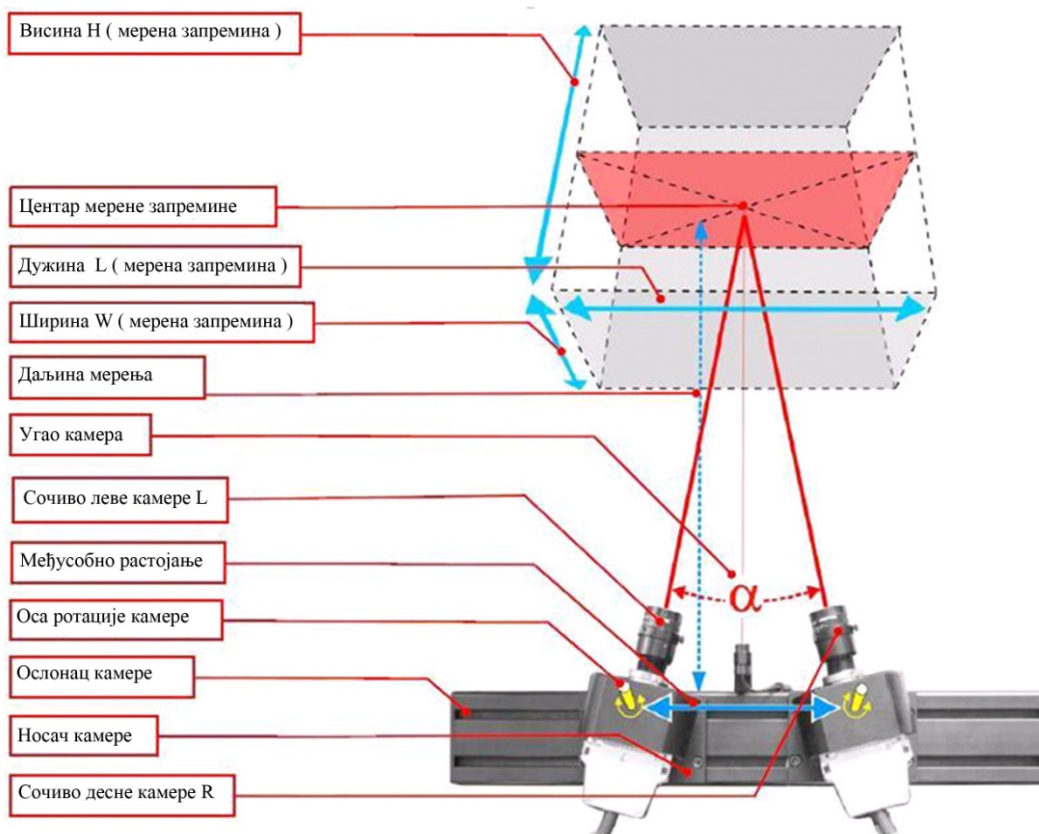
Слика 3.10 GOM hardver и software ARAMIS www.gom.de

8. дефинисање величине "малих површина";
9. дефинисање прорачунског оквира у сликама за мерење, тако да се само битне области узорка прорачунавају;
10. дефинисање почетне тачке за поступак прорачуна;
11. прорачун;
12. избор начина приказивања резултата;
13. трансформација координатног система;
14. процесуирање података ради уклањања сметњи при мерењу, интерполирање недостајућих тродимензионалних тачака, наглашавање локалних утицаја итд.;
15. дефинисање елемената за анализу, пресека или тачака у корацима;
16. документовање резултата (извештаји, приказивање у другим софтверима и сл.).

3.2.2 Дефинисање мерне запремине

Пре почетка мерења потребно је изабрати одговарајућу запремину мерења која зависи од димензија мерног објекта, односно од димензија мерне површине. Мерна површина представља анализирано поље померања и деформација и мора да се налази унутар мерне запремине у сваком тренутку снимања. У зависности од величине мереног објекта и расположивих сочива, одговарајућа мерна запремина се може изабрати на основу препорука произвођача. Уколико је потребно прилагодити мерну запремину, потребно је и поново подесити и калибрисати сензор. Изабраном мерном запремином одређује се растојање између сензорске јединице и мерног узорка, Сл.3.11.

Пре употребе система, неопходно је подешавање сензорске јединице, односно потребно је извршити хардверску калибрацију система. Потребно је подесити угао између сочива, фокус и бленду. Потом се цео систем калибрише уз помоћ калибрационих плоча или крстова. Када се калибрацијом успешно подеси запремина мерења, може се почети са експерименталним мерењима.



Слика 3.11 Сензорска јединица [Gom]

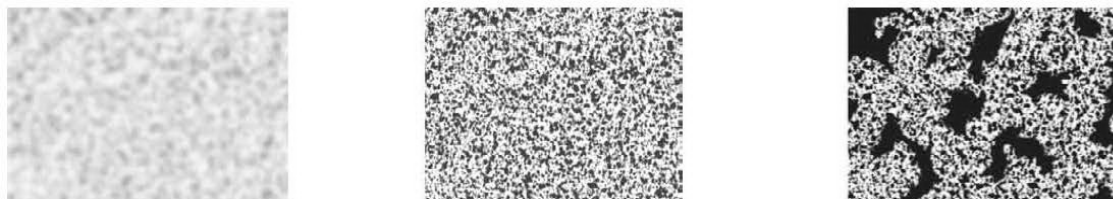
3.2.3 Припрема мерне површине

Структура површине је веома важна при припреми мерне површине и реализације мерења. Површина узорка мора да задовољи следеће захтеве:

- површина мерног објекта мора имати нанетуfino дисперговану боју, како би се јасно дефинисали пиксели на сликама снимљеним камерама. Из тог разлога, област пиксела на референтној слици може бити додељена одговарајућој области пиксела на наредној слици.
- нанета диспергована боја мора пратити контуру мерне површине, не сме се разливати и ломити.
- оптимална површина је релативно равна. Изразито храпаве површине могу направити проблем при одређивању малих површина и прорачуна 3D тачака.

- нанета диспергована боја на узорку мора да има добар контраст, јер у супротном додељивање пиксела неће бити успешно.
- нанета диспергована боја на површини мора бити мат, како би се елиминисала појава рефлексије. Рефлектована светлост изазива лош контраст и разлику у осветљењу између леве и десне камере, која није пожељна и даје лоше резултате при прорачуну малих површина у областима где се она јавља.

Са једне стране, величина фино диспергованих тачака мора бити довољно мала да омогући фини распоред малих површина током прорачуна, а са друге стране мора бити довољно крупна да би у потпуности била препознатљива за камере. Најбоље су стохастичне шаре које су прилагођене контролној запремини, резолуцији камере и величини малих површина. У зависности од задатка мерења и услова у којима се одвија мерење користе се различити лакови и боје у спреју. Мерна површина се мора прво очистити од нечистоћа (без трагова масти, уља) како би се нанела стохастичка шара. У првом кораку потребно је нанети бели и мат сјај. Као други корак, потребно је нанети црни стохастично дисперговани слој и на тај начин се добија погодна површина за мерење – шара. Мање мерне запремине захтевају финију шару од већих мерних запремина. Да би се проверило да ли је постигнута одговарајућа шара за одређену мерну запремину, потребно је добијену шару упоредити са референтним шарама препорученим од стране произвођача, Сл.3.12.

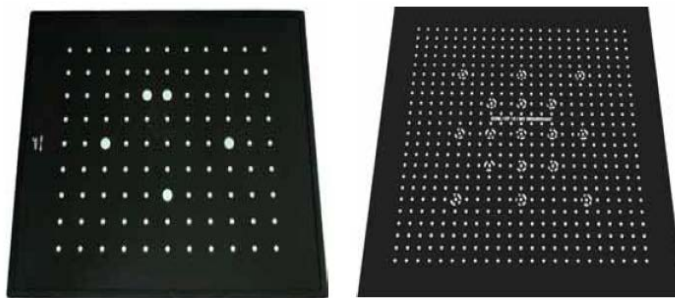


Слика 3.12 Примери лоших и добрих стохастичких шара

3.2.4 Калибрација система

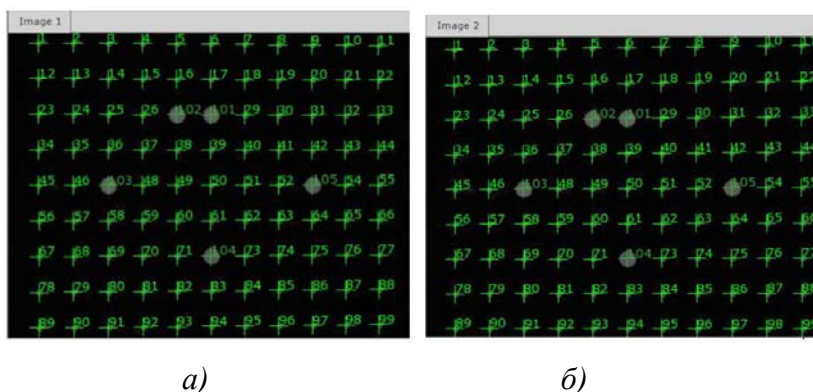
Калибрација је процес током којег се обезбеђује димензиона конзистенција система за мерење. За сваку стандардну запремину мерења, постоји одговарајуће

калибрационо тело које може бити плоча или крст, и који постоје у различитим величинама и верзијама [Gom]. Калибрационе плоче се користе за мале, а калибрациони крстови за велике мерне запремине. Параметри калибрације (растојање између камера и њихова оријентација, фокус, подаци о калибрационим телима и др.) су дефинисани од стране произвођача. На Сл.3.13 је приказана калибрациона плоча коришћена у оквиру овог рада.



Слика 3.13 Изглед калибрационе плоче

Поступак калибрације се састоји из 13 корака (дефинисано од стране произвођача), при чему за исправну калибрацију софтвер мора у сваком кораку да препозна референтне тачке на калибрационој плочи. Један од параметара успешне калибрације је да систем са обе камере препозна и нумерише референтне тачке на калибрационој плочи у сваком кораку, Сл.3.14.



а)

б)

Слика 3.14 Нумерација тачака у току калибрације: а) лева камера; б) десна камера

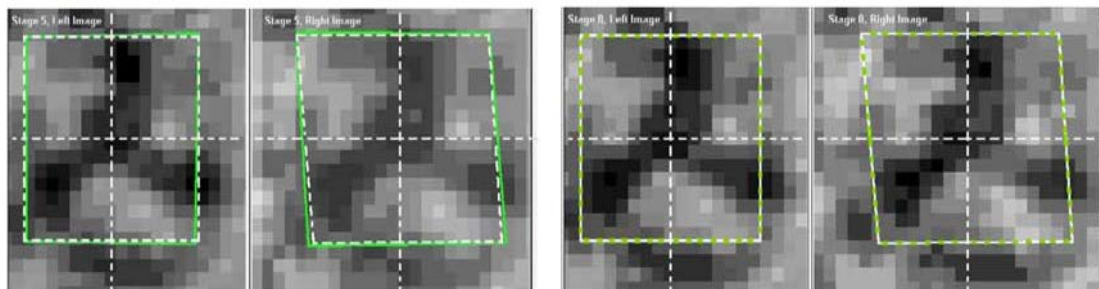
У радним условима, сензор се не сме излагати непотребним променама температуре, дејству високе температуре у случају јаког осветљења објекта [Gom]. На крају поступка калибрације, програм приказује резултате калибрације.

За тачну калибрацију, одступање мора бити између 0,01 и 0,04 пиксела. Добијено одступање (*calibration deviation*) износи 0,028 пиксела, што улази у оквире прихватљивости. Велико одступање указује на погрешно, оштећено калибрационо тело или нетачне параметре размере.

На основу ових подешавања, програм прорачунава на основу референтних тачака калибрационог тела на сликама њихове 3D координате. Израчунате 3D координате се затим поново додељују 2D сликама са камере. Овакав приступ доводи до одступања референтних тачака и приказивања грешки преклапања, односно позиције референтних тачака. Укупно одступање калибрације се израчунава на основу просечног одступања свих референтних тачака које су снимане током процеса калибрације.

3.2.5 Дефинисање величине "малих површина"

Програм током прорачуна региструје деформацију узорка помоћу слика које су подељене на квадратне и правоугаоне "мале површине". На Сл.3.15 су приказане "мале површине" са леве и десне камере, чије су вредности нивоа сиве боје праћене кроз два корака деформисања. У програму је могуће подешавање величине "малих површина".

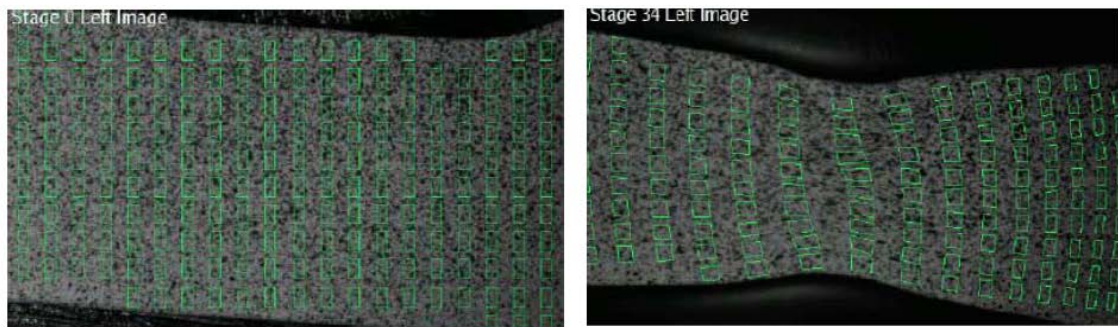


Слика 3.15 Деформација малих површина, а) корак 0, б) корак 1[Gom]

Корак 0 је недеформисани корак, а корак 1 је коначно стање деформисаности. Белом испрекиданом линијом је приказано недеформисано стање, а на основу углова зелене линије малих површина и резултујућих центара систем одређује дводимензионалне координате малих површина. На основу координата "мале површине" посматране кроз леву камеру и "мале површине" посматране кроз десну камеру добијамо заједничке тродимензионалне координате. Након

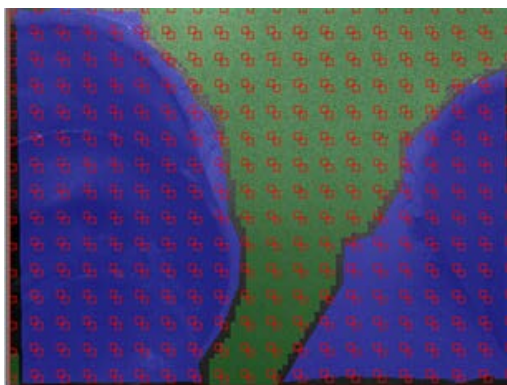
успешног прорачуна, подаци пролазе процедуру процесуирања, а измерени резултат је доступан у тродимензионалном приказу.

Облик "мале површине" (квадрат, правоугаоник и четвороугао) утиче на могућност прорачуна пројекта мерења. Квадратне и правоугаоне мале површине у нултом кораку су увек сложене тако да одговарају оријентацији X-Y на дводимензионалној слици. За мерење деформација, где је узорак изложен великим деформацијама, потребно је користити правоугаони облик мале површине ради добијања одговарајућих поља малих површина, Сл.3.16.



Слика 3.16 Распоред правоугаоних "малих површина" облика у а) недеформисаном стању, б) деформисаном стању [Gom]

У случају четвороугаоних узорака потребно је направити одговарајуће мале површине до ивице узорка, неопходно је ручно формирати мале површине које прате геометрију узорка. Појединачне мале површине ће обликовати одговарајуће поље. Координатни X-Y систем је такође заснован на овом пољу. За испитивање цилиндричне посуде под притиском са прикључцима дефинисана је мала површина димензија 21 x 17 пиксела. Мала површина је облика четвороугла. Изглед и распоред малих површина је приказан на Сл.3.17.



Слика 3.17 Детаљ "мале површине"

3.2.6 Прорачун деформација малих површина

Користећи димензије једне мале површине на експерименталном узорку приказан је принцип прорачуна 3D модела кроз неколико корака при деформисању

- Прорачун малих површина захтева координате почетних тачака у свим корацима. Величина мале површине одређена је при дефинисању поља малих површина при започињању сваког новог пројекта.
- Прорачун почиње у нултом кораку.
- При дефинисању почетне тачке, програм препознаје позицију почетне тачке и њених суседних почетних тачака на дводимензионалним сликама. Идентификацијом појединачних шара малих површина на левој и десној слици са камера, четвороугаона област је оптимизована. Из резултујућих координата почетне тачке са дводимензионалних слика леве и десне камере, израчуната је тродимензионална позиција почетне тачке.
- После прорачуна тродимензионалне позиције једног корака, програм аутоматски прелази на други корак. Овде је такође позната почетна позиција мале површине због дефинисане почетне тачке. Прорачун тродимензионалне позиције мале површине урађен је поново. Деформације се кроз кораке рачунају у односу на недеформисану малу површину која се дефинише у кораку 0.
- Резултати прорачуна деформације произилазе из померања тродимензионалних тачака.

3.2.7 Дефинисање почетне тачке

За прорачун малих површина у свим корацима дефинисане су почетне тачке. Могуће је користити и више различитих почетних тачака у једном пројекту мерења, али у општем случају почетна тачка се односи на исту малу површину у свим корацима. При одабиру почетних тачака посебна пажња је посвећена томе да унутар мале површине буде одговарајућа шара, и да позиција почетних тачака не улази у поље највећих померања, како оне не би напустиле видно поље једне од камера у свим корацима снимања. Софтвер омогућава три различита начина за дефинисање почетних тачака:

- ручно или полуаутоматско дефинисање почетне тачке,
- аутоматско дефинисање почетних тачака,
- дефинисање сложених тачака.

Почетне тачке за мерна места су постављене полуаутоматски у зони најмањих деформација.

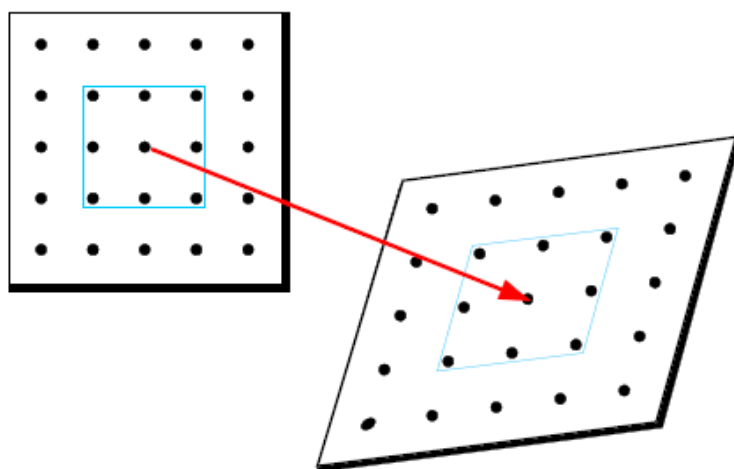
3.2.8 Прорачун деформације

За прорачун деформације ARAMIS користи две методе, прорачун линеарне деформације и прорачун параметарском методом деформације. У овој дисертацији коришћен је прорачун методом линеарне деформације, који се користи код већине мерења, која се изводе применом овог система. Изузетак представља потреба за одређивањем деформација у областима великих геометријских дисконтинуитета на узорцима, када се користи прорачун параметарском методом деформација.

3.2.8.1 Метода линеарне деформације

На Сл.3.18 су приказани делови узорка у деформисаном и недеформисаном стању. У овом примеру узета је у обзир деформација мерне тачке (црвена стрелица) заједно са околним тачкама (плави четвороугао). Деформација се одређује у вези са околним мерним тачкама које директно проистичу из малих површина.

Предности ове методе су: брзи прорачун деформација, мале сметње при мерењу, стварне тачке су референтне локације за деформацију. Мане примене ове методе огледају се у томе што је тешко одредити деформацију за кривине малих радијуса, које су мање или једнаке величини мале површине. Важно је да плави четвороугао нема велико закривљење, јер у супротном настаје неодговарајућа површина за прорачун деформације, што захтева примену друге методе прорачуна.

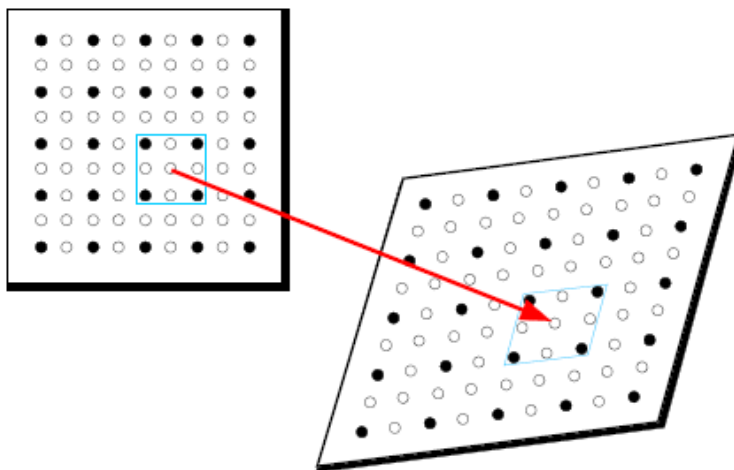


Слика 3.18 Графички приказ принципа линеарне методе прорачуна деформације [Gom]

При методи линеарне деформације најзначајнији параметар је прорачунска величина поља, која подразумева број околних тачака око тачке прорачуна деформације. Најчешће коришћена вредност за величину поља је и најмања могућа, а то је три. Ово значи да се тродимензионално поље мерних тачака величине 3×3 користи да би се израчунала вредност деформације средишње тачке. Ова величина поља је нарочито корисна за одређивање локалних деформација. Са повећањем величине поља долази до смањења шума при снимању, а у граничним областима се могу одредити и мање деформације. Уколико не постоје све суседне мерне тачке око средишње тачке, прорачун деформације средишње мерне тачке се опет може израчунати. Број неопходних суседних мерних тачака које морају да постоје да би се извео прорачун се одређује софтверски. Најчешће се поставља услов да мора постојати минимум 55 % суседних тачака.

3.2.8.2 Параметарска метода за оптичко мерење деформација

На Сл.3.19 приказан је изглед недеформисаног и деформисаног стања. Црне тачке на слици представљају мерне тачке које проистичу директно из малих површина, док су беле тачке добијене интерполацијом из црних тачака користећи параметарску функцију. У овом случају, при прорачуну деформација узимају се у обзир и вредности белих тачака. Предност ове методе је одговарајућа вредност добијене деформације у свим случајевима облика узорка. Мане ове методе су дуге време прорачуна деформација услед већег броја тачака, већи ниво шума при мерењу и то што интерполиране тачке представљају референтну локацију за прорачун деформација. Због ограничења система, прорачун тродимензионалних тачака у ARAMIS-у се увек изводи на површини узорка.



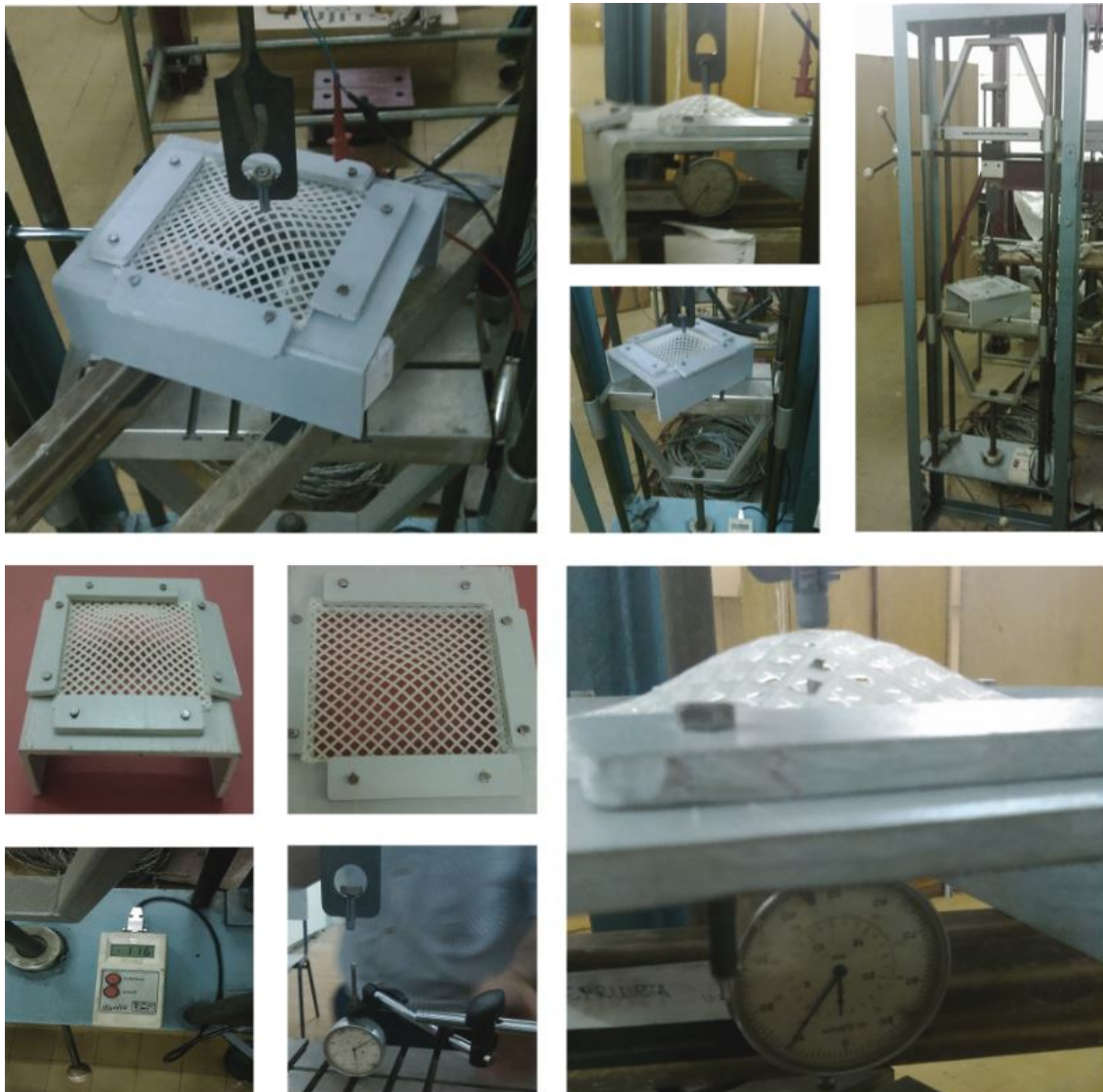
Слика 3.19 Графички приказ принципа параметарске методе прорачуна деформација [Gom]

3.2.9 Резултати система за оптичко мерење деформација

После прорачуна, добијени подаци су доступни у дводимензионалном и тродимензионалном облику у сваком кораку. Пре сређивања резултата, потребно је одабрати одговарајући начин представљања 3D резултата. За приказивање резултата у дијаграмима и 3D моделу могу се направити тачке корака, секције (секције равни, кружне секције, параметраске секције) и примитиви. Програм омогућава издвајање прорачунатих 3D података.

С обзиром да систем за оптичко мерење деформација снима тродимензионалну површину мерног објекта, могуће је приказати поље померања мерних тачака у сва три правца, као и одговарајуће векторе померања. Користећи претходно дефинисане методе прорачуна, систем прерачунава поља померања и координате тачака у поље деформација.

3.3 Конвенционални поступак експеримента



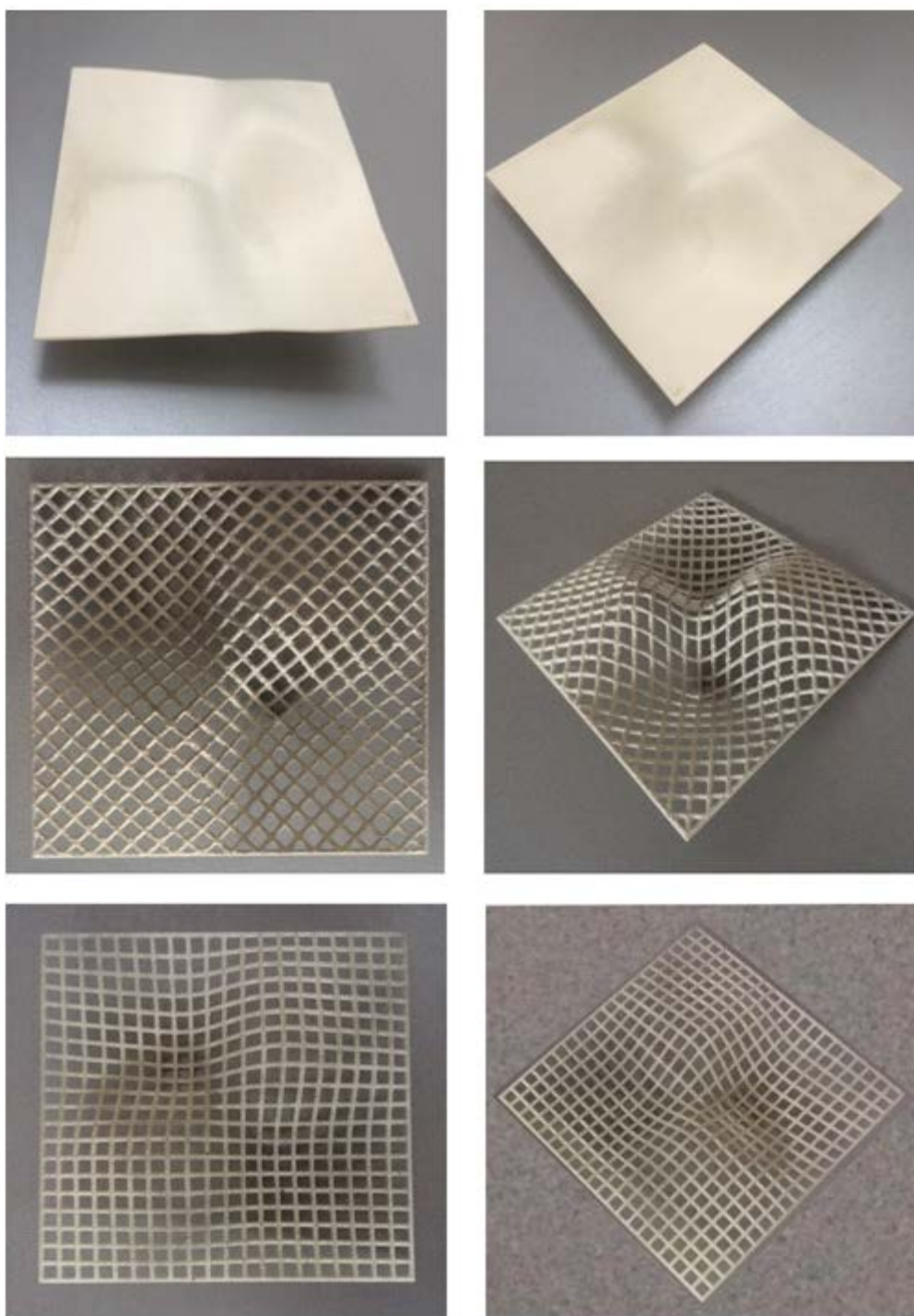
Слика 3.20 Извођење конвенционалног експеримента оптерећења и мерење деформације гредног роштиља

Конвенционални поступак изведених експеримената приказани су на наредним сликама. Увођење ослонаца и оптерећења изведено је у челичном раму. Оптерећење је увођено ручно путем система вретено-навртка. Мерење деформације је извођено помоћу механичког компартера са тачношћу 0,01 мм. Мерење оптерећења је извођено са механичким динамометром са скалом.

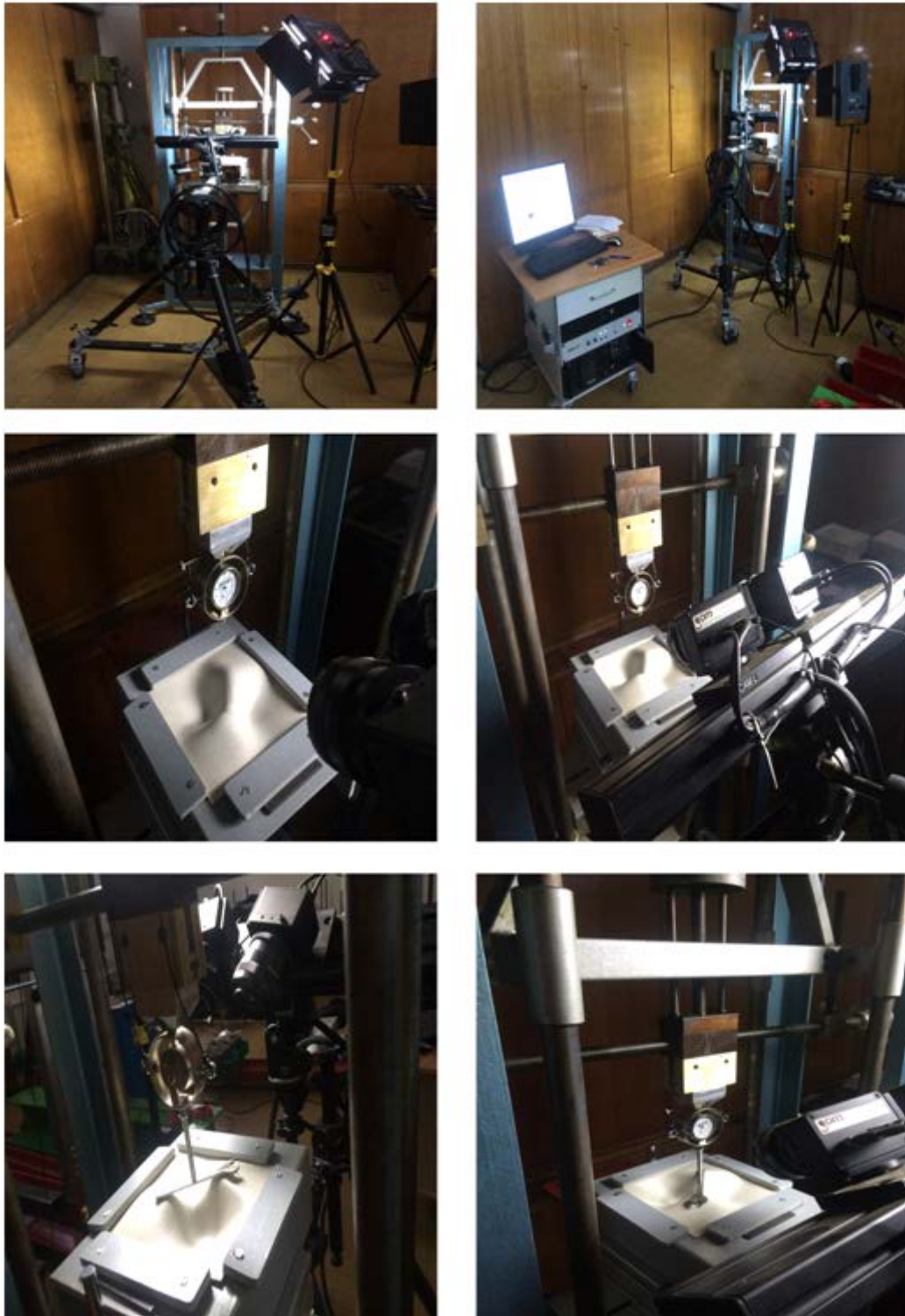


Слика 3.21 Извођење конвенционалног експеримента оптерећења и мерење деформације гредног роштиља

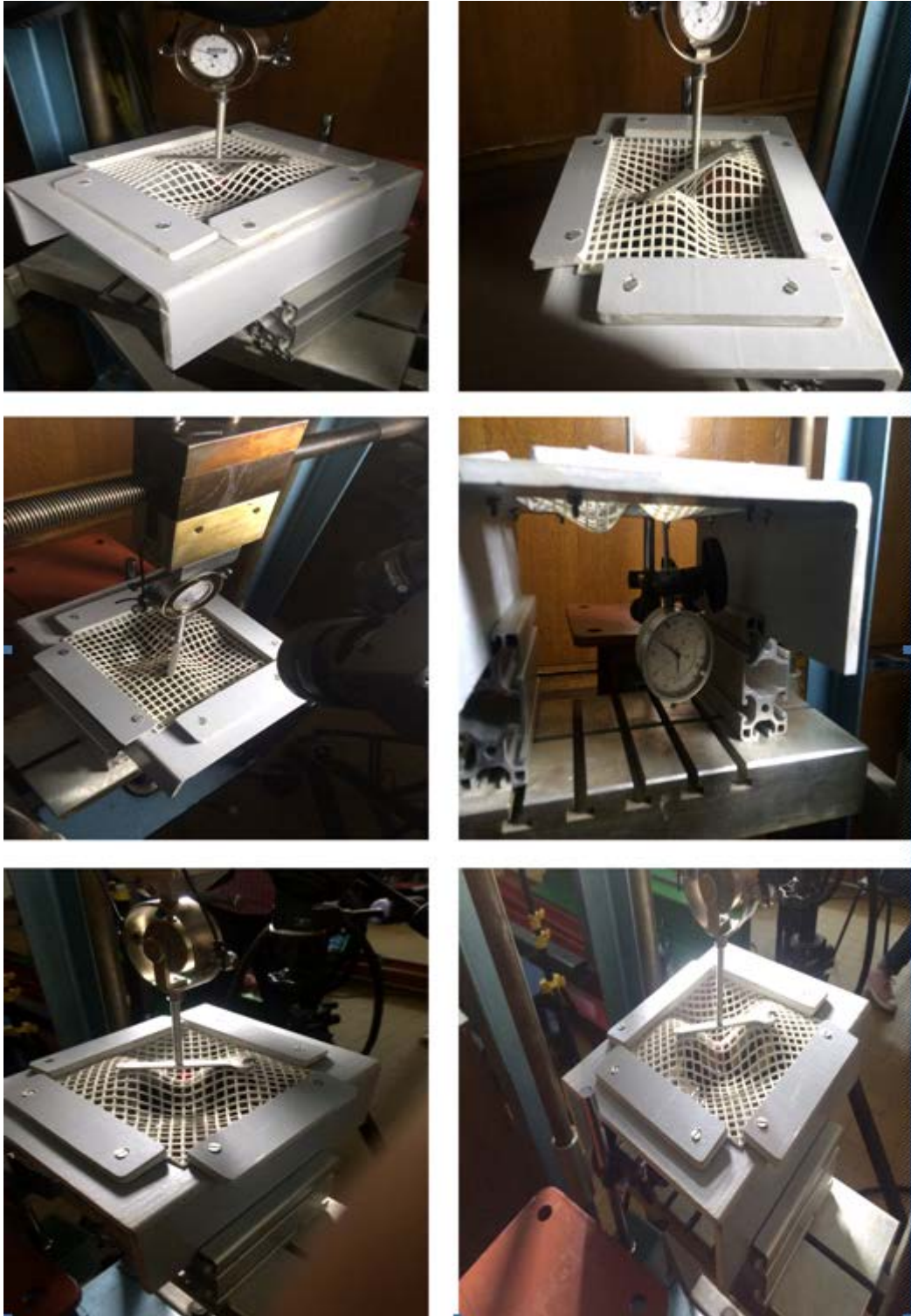
3.4 Оптичко мерење тродимензионалних деформација за изабране моделе и њиховог оптерећења.



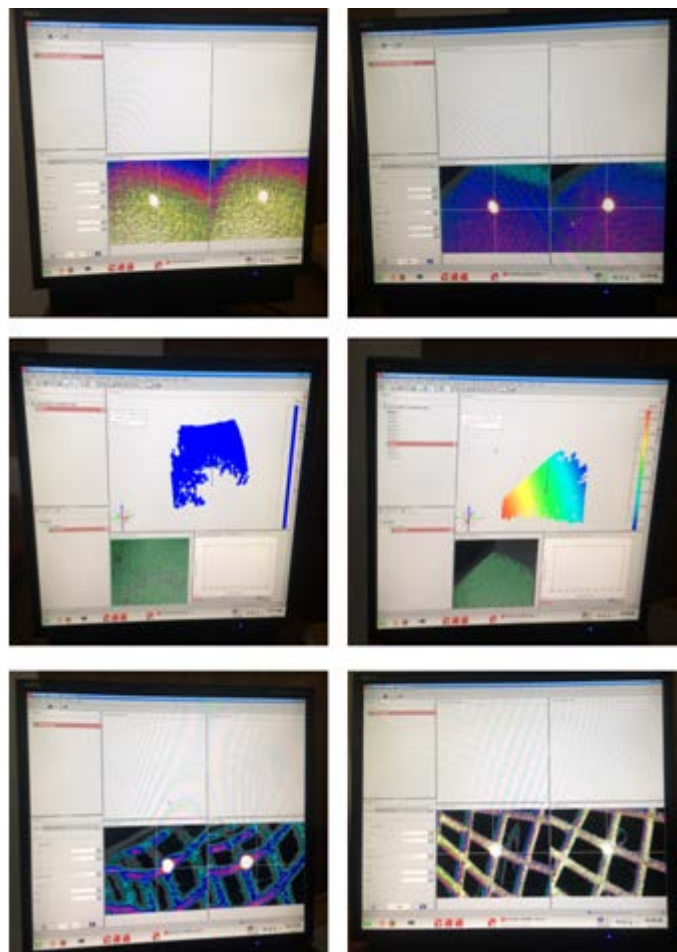
Слика 3.22 Графички приказ припремљених PLA модела за оптичко мерење деформације (растер црних тачкица на белој основи)



Слика 3.23 Поступак извођења експеримента за 3D оптичко мерење деформација код љуске



Слика 3.24 Поступак извођења експеримента за 3D оптичко мерење деформација код гредног роштиља



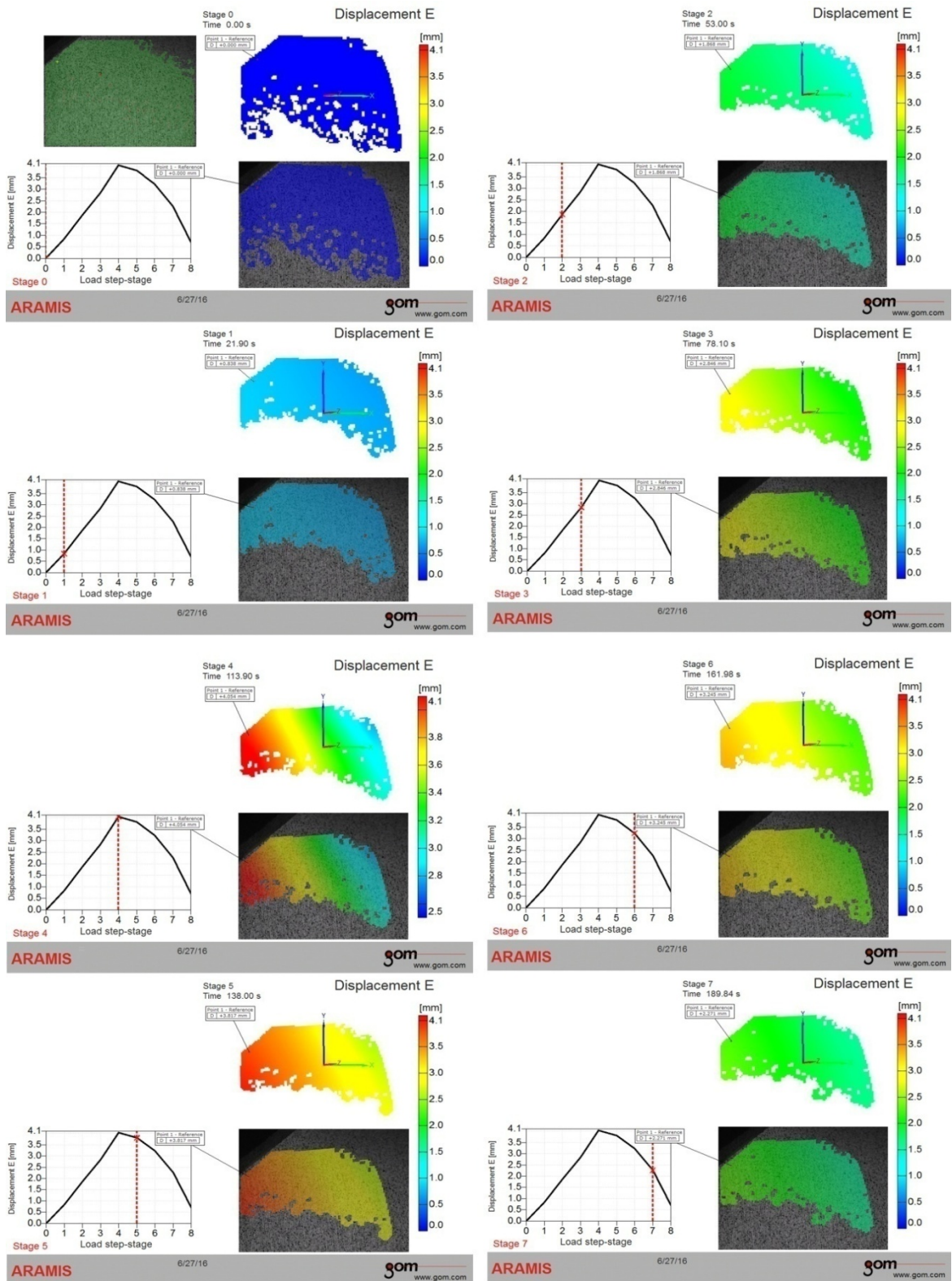
Слика 3.25 Графички приказ екрана софтвера ARAMIS

При овим експериментима остављен је конвенционални начин мерења оптерећења и деформације. Мерење деформације је изведено паралелно на конвенционални и неконвенционални начин ради корелације истих.

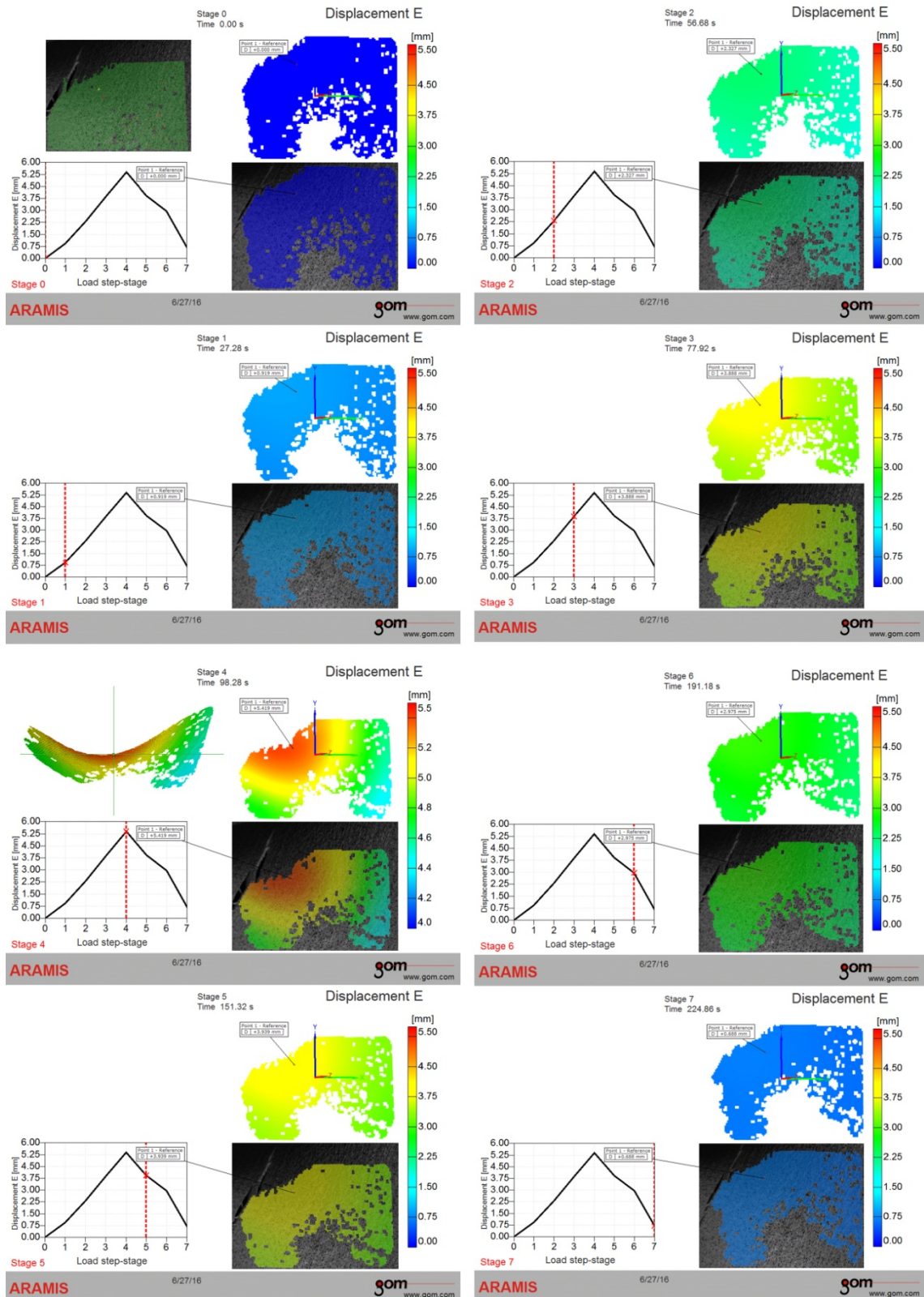
3.5 Анализа резултата мерења

3.5.1 Графички приказ изведених експеримената

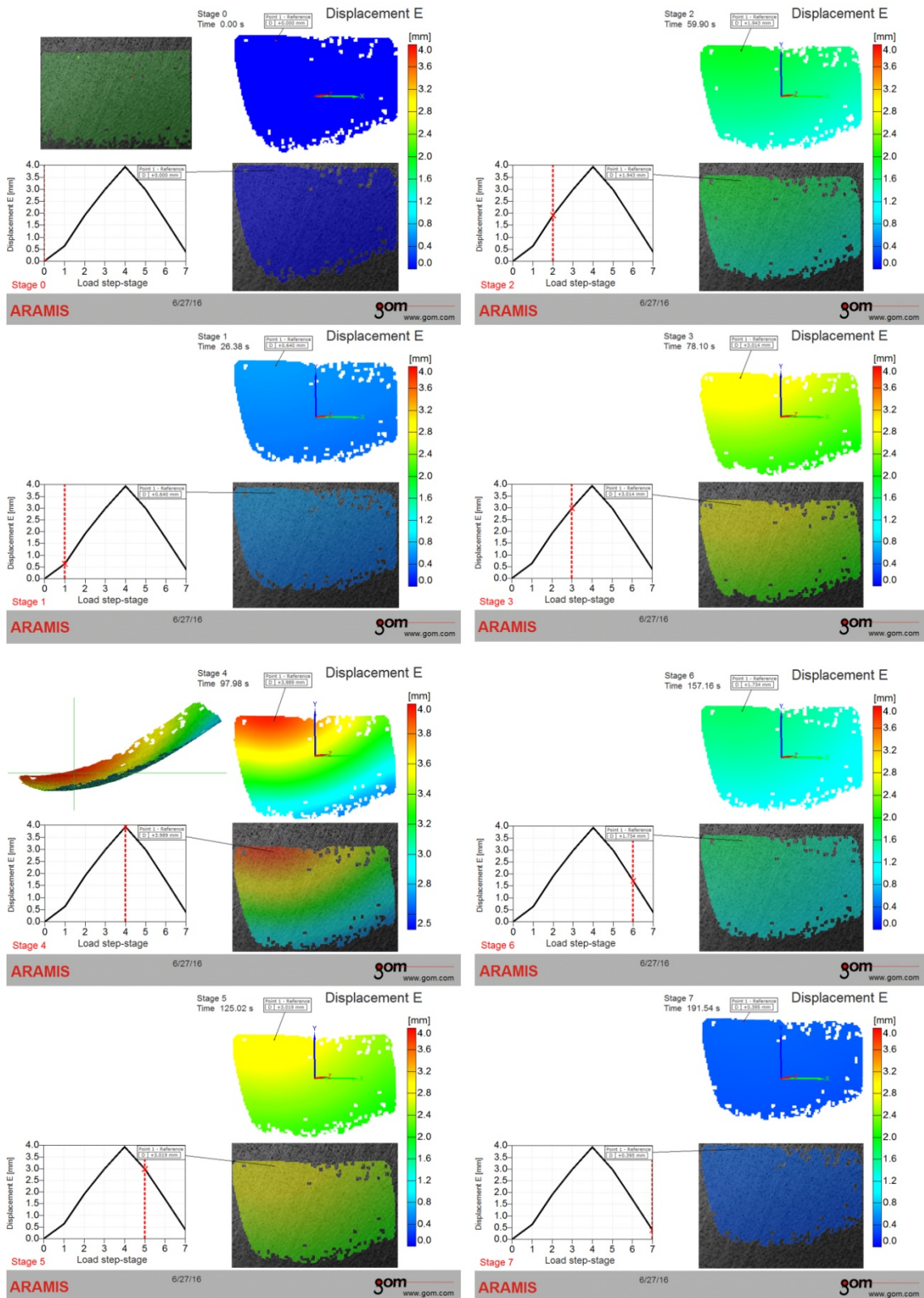
При извођењу експеримента увођење оптерећења је изведено са кораком до максималне вредности и до растерећења модела (један циклус оптерећење-растерећење).



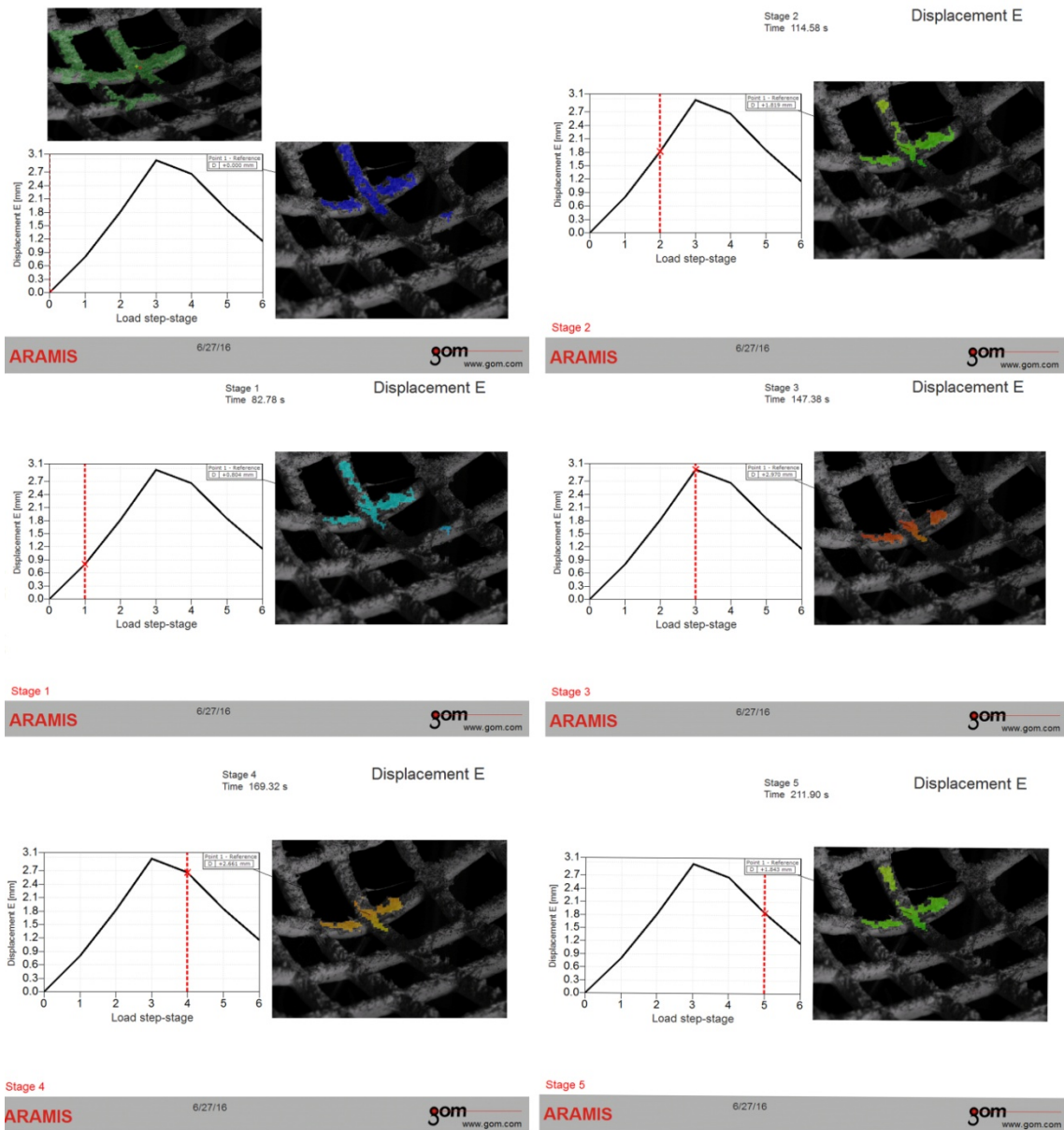
Слика 3.26 Анализа резултата експеримента са 3D камером за модел љуске-врх: - дијаграм деформација-оптерећење са нормалом на оптерећење, - поље еквивалентних деформација и - графички приказ камера



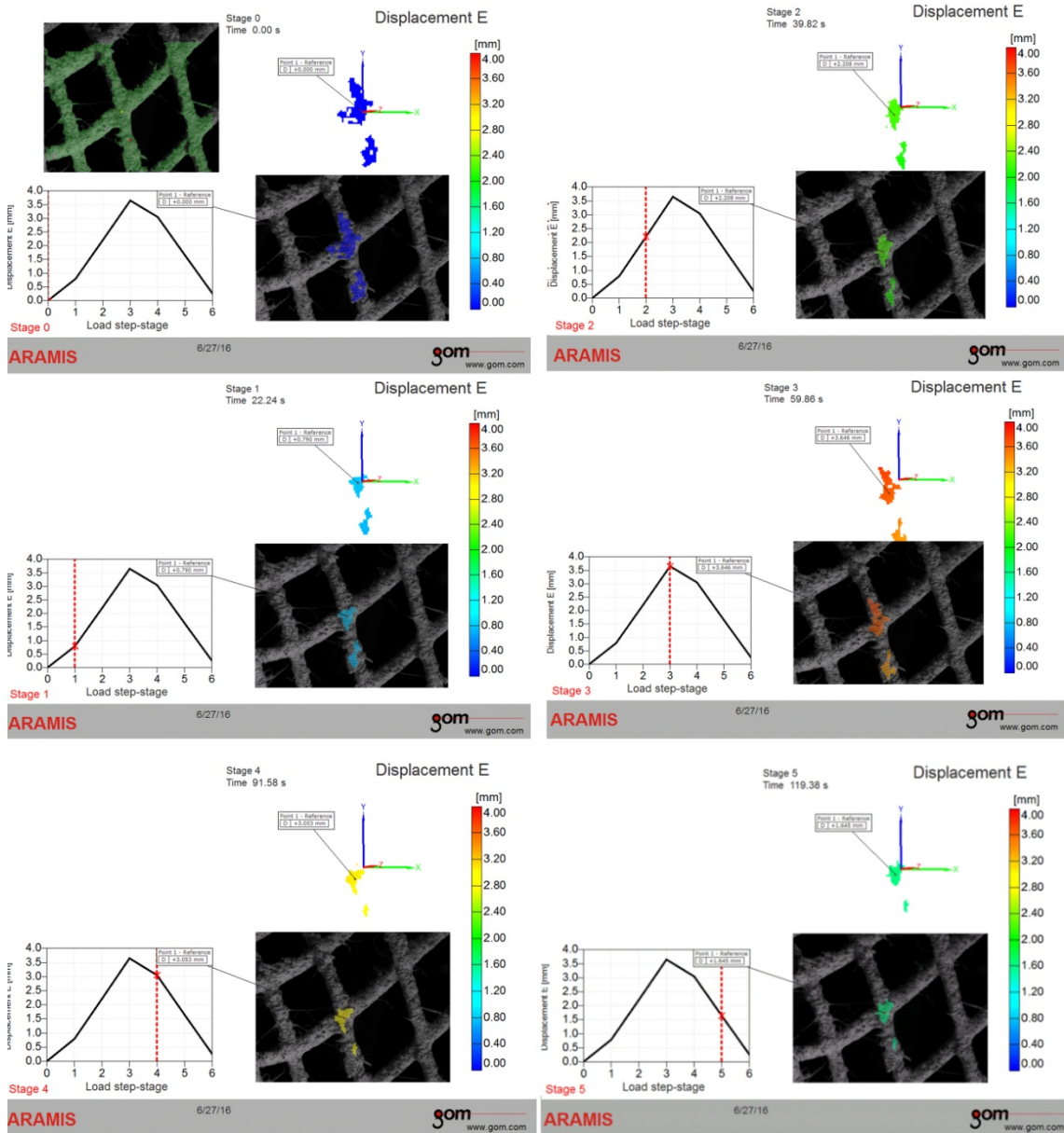
Слика 3.27 Анализа резултата експеримента са 3D камером за модел љуске-седло: - дијаграм деформација-оптерећење са нормалом на оптерећење, - поље еквивалентних деформација и - графички приказ камера



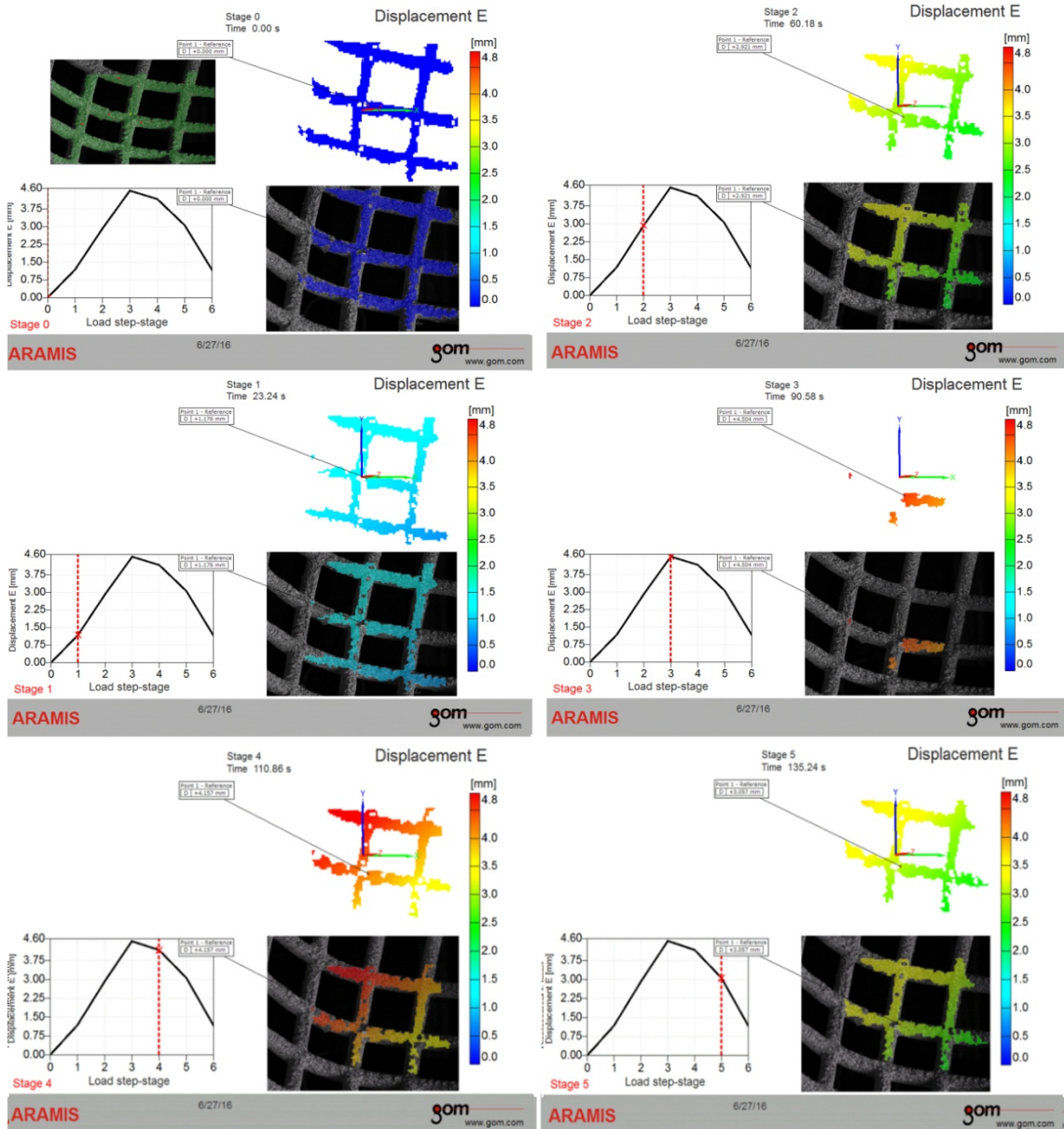
Слика 3.28 Анализа резултата експеримента са 3D камером за модел љуске-дно:
 - дијаграм деформација-оптерећење са нормалом на оптерећење, - поље
 еквивалентних деформација и - графички приказ камера



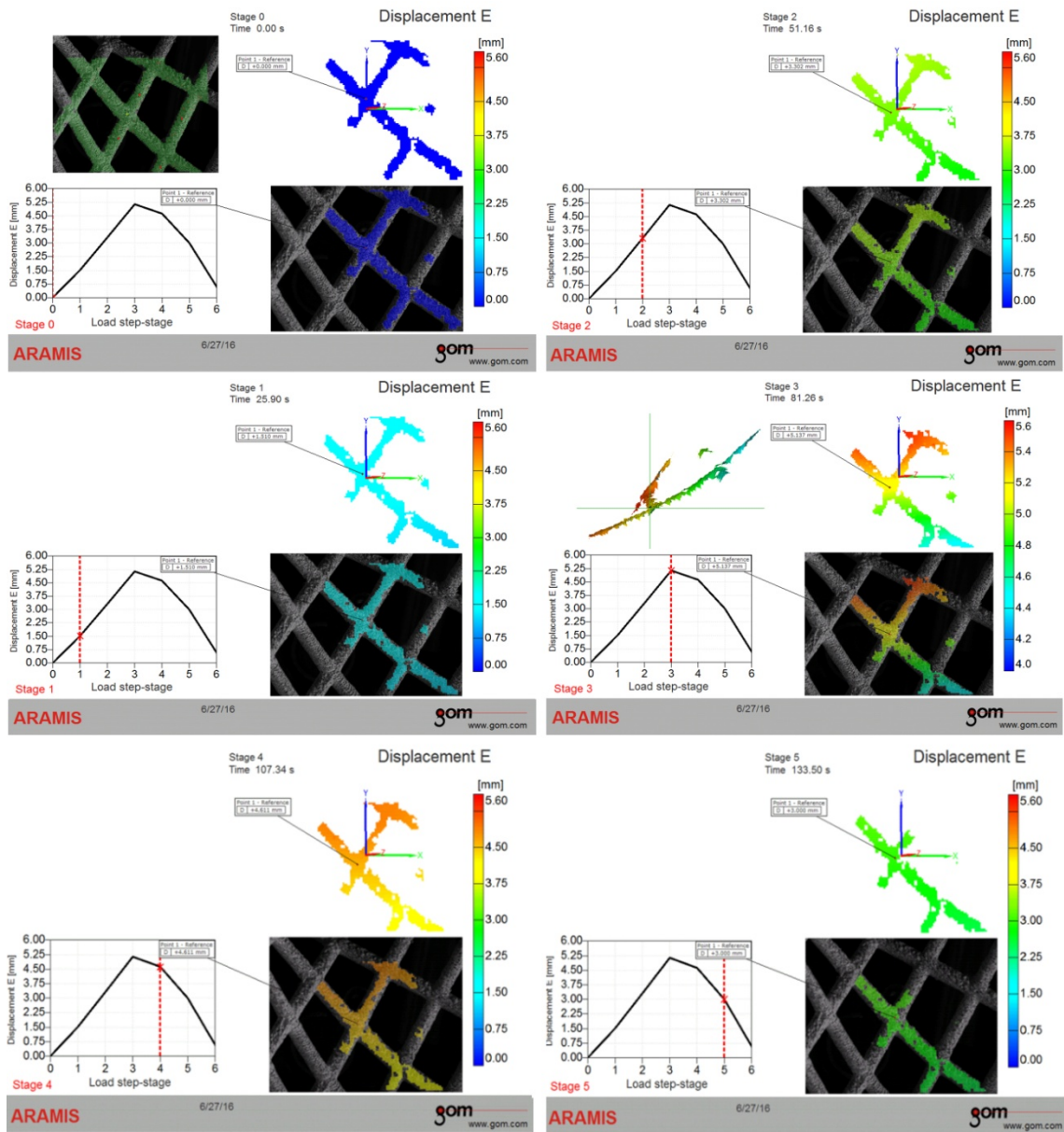
Слика 3.29 Анализа резултата експеримента са 3D камером за модел гредног роштиља-дно 90^0 : - дијаграм деформација-оптерећење са нормалом на оптерећење, - поље еквивалентних деформација и - графички приказ камера



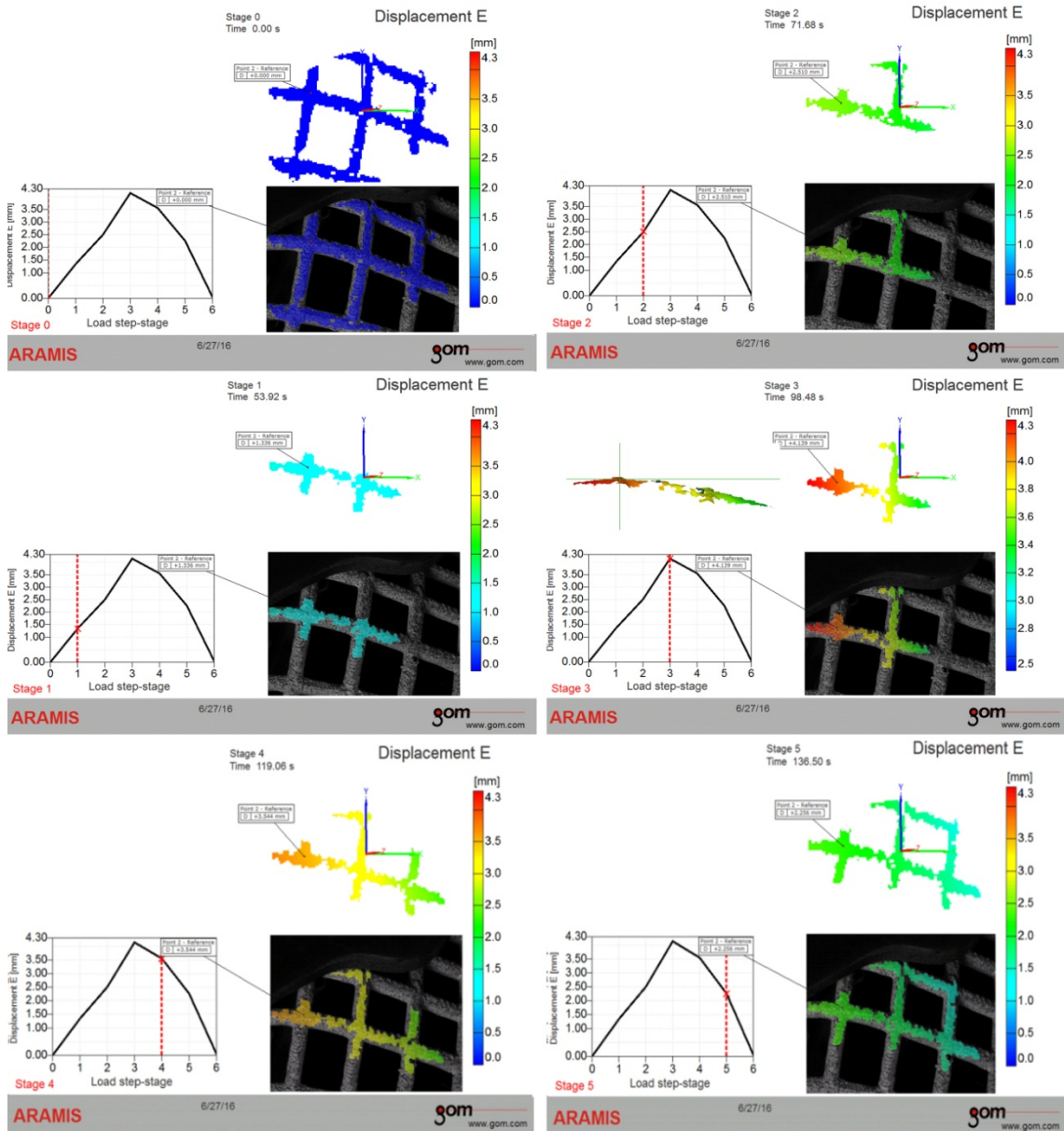
Слика 3.30 Анализа резултата експеримента са 3D камером за модел гредног роштиља-дно 45° : - дијаграм деформација-оптерећење са нормалом на оптерећење, - поље еквивалентних деформација и - графички приказ камера



Слика 3.31 Анализа резултата експеримента са 3D камером за модел гредног роштиља-дно 90^0 : - дијаграм деформација-оптерећење са нормалом на оптерећење, - поље еквивалентних деформација и - графички приказ камера



Слика 3.32 Анализа резултата експеримента са 3D камером за модел гредног роштиља-седло 45^0 : - дијаграм деформација-оптерећење са нормалом на оптерећење, - поље еквивалентних деформација и - графички приказ камера



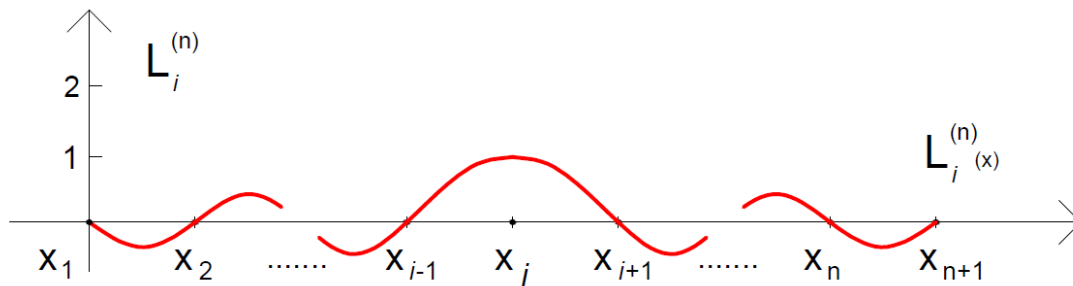
Слика 3.33 Анализа резултата експеримента са 3D камером за модел гредног роштиља-врх 90^0 : - дијаграм деформација-оптерећење са нормалом на оптерећење, - поље еквивалентних деформација и - графички приказ камера

4.0 Нумерички приступ пројектовању система љуски и греда произвољног облика

У процесу пројектовања система љуски и греда произвољног облика кључно питање са становишта нумерике представља формулација коначног елемента којим ће бити описана њихова како почетна тако и деформисана геометрија. Нумерички аспект система произвољног облика, усвојеним коначним елементом, подразумева опис њихове почетне геометрије и изналагање одоварајуће деформисане као резултат напонско деформацијске анализе.

Лагранжови полиноми произвољног степена n Сл.4.1[Bat82] [Sek72], дефинисани на следећи начин

$$L_i^n(x) = \prod_{j=1(j \neq i)}^{n+1} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} = \frac{(x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdots (x - x_{i-1}) \cdot (x - x_{i+1}) \cdots (x - x_n) \cdot (x - x_{n+1})}{(x_i - x_1) \cdot (x_i - x_2) \cdots (x_i - x_{i-1}) \cdot (x_i - x_{i+1}) \cdots (x_i - x_n) \cdot (x_i - x_{n+1})}$$

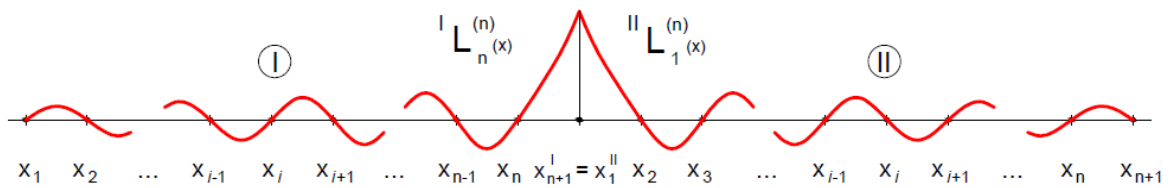


Слика 4.1 Лагранжови полиноми степена n

најчешће чине основу класичног изопараметарског коначног елемента. Наиме, претпостављено кинематичко поље, које је последица механичког или термичког утицаја, као и оригинална (почетна, недеформисана) геометрија пројектованог конструктивног система интерполационог су карактера и описани су истим функцијама.

На границама два суседна елемента Сл.4.2, лако се да уочити да последњи полином првог ${}^{(I)}L_{n+1}^n(x)$ и први полином њему суседног елемента ${}^{(II)}L_1^n(x)$ могу обезбедити само непрекидност а не и диференцијабилност функције, односно

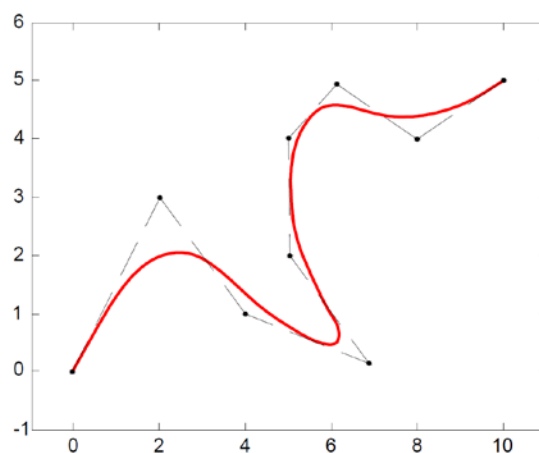
$$\frac{d^{(I)}L_{n+1}^n(x)}{dx} \Big|_{x={}^{(I)}x_{n+1}} \neq \frac{d^{(II)}L_1^n(x)}{dx} \Big|_{x={}^{(II)}x_1}$$



Слика 4.2 Континуитет Лагранжових полинома на граници елемената

одакле нужно следи да такав коначни елемент поседује само континуитет C^0 . Сходно томе намеће се закључак да се поменути приступом могу формулисати искључиво Миндлин Рајснерови елементи љуске као и Тимошенкови гредни елементи [Tim62].

Усвојене функције облика остају непромењене за описивање геометрије и кинематике ма које линије или површи. Јасно је онда да у општем случају оригинална геометрија пројектованих структура, с обзиром на њен интерполациони карактер, није тачна унутар чворних тачака. Из тих разлога можемо поставити крајње једноставно питање, како се може очекивати ефикасно изналагање деформисане геометрије ако и почетна није представљена на ваљани начин. Поменути проблем превазилазимо прогушћавањем мреже коначних елемената чиме се умањује ефекат интерполације и условљава конвергенција ка тачном решењу.



Слика 4.3 Базни Spline

У последњих десетак година долази до интензивног развоја тзв. изогеометријског коначног елемента, базиран на контролном приступу како почетне тако и деформисане геометрије структуре. Наиме, геометрија линије и површи, или произвољног материјалног тела се не интерполује већ се егзактно описује функцијама које у математичком погледу представљају базни B-Spline [Bez66] [Bez67][Cot09][DeB72].

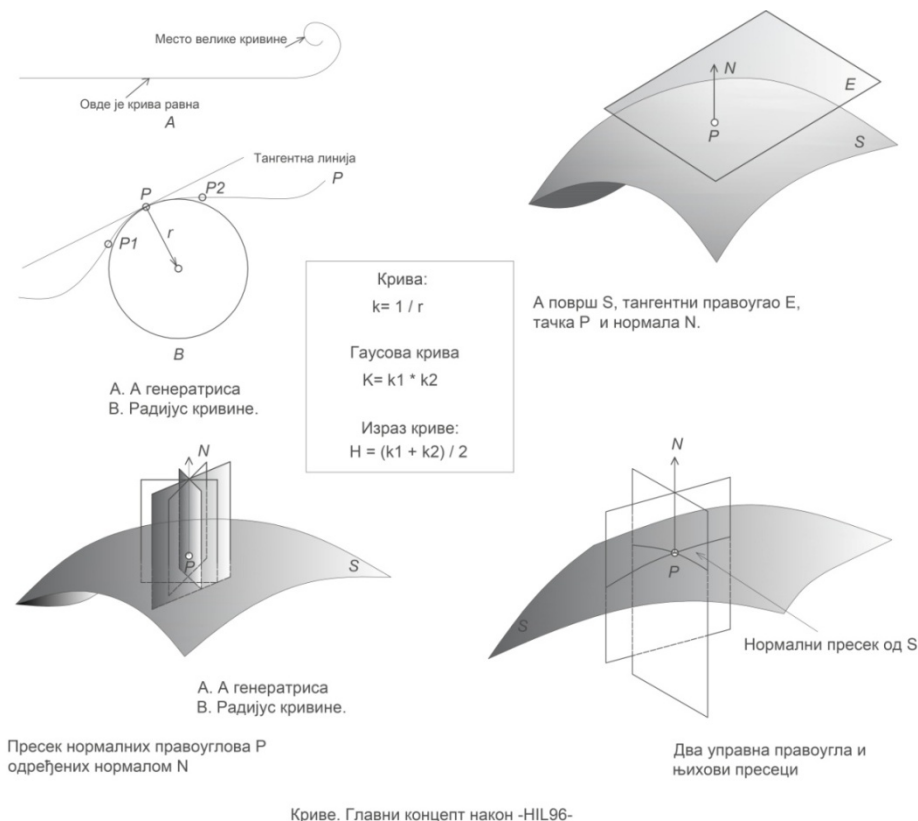
Контролне тачке у већини случајева не леже на посматраној линији, што значи да не представљају њене чворне тачке и немају интерполациони карактер. Са Сл.4.3 уочавамо да прва и последња контролна тачка припадају линији, постају интерполационе, што је и нужно да би се дефинисао њен почетак и крај. Другим речима вектор положаја линије на почетку и на крају одређен је искључиво из прве и последње контролне тачке, респективно [Cot09] [Rad14]. Геометрија линије унутар назначених крајева последица је преосталих контролних (неинтерполационих) тачака чији се положаји одређују из услова њеног егзактног описа.

Имајући на уму да је базни сплајн линије или површи у основи полином произвољног степена по сплајн параметрима ξ или ξ, η , јасно је онда да он не може егзактно да представи бесконачно диференцијабилне функције, односно функције чији Тејлоров развој садржи бесконачно много чланова. Тригонометријске и хиперболичке функције које представљају математички запис конусних пресека: кружница, елипса, хипербола и парабола су управо таквог карактера. Проблем се превазилази увођењем неравномерног рационалног базног сплајна у литератури познатијег као NURBS [Cot09]. Заправо, погодним избором контролних тачака и њихових одговарајућих тежинских фактора [Cot09] [Rad14], рационалним функцијама које представљају количник два полинома могу се егзактно описати сви конусни пресеци. На тај начин решавамо широку класу површи другог реда које чине основу инжењерских конструкција система љуски. С друге стране NURBS сплајном, односно варијацијом тежинског фактора и положаја контролних тачака омогућено је тачно описивање геометрије линије и површи потпуно произвољног облика.

4.1 Аналитика геометрије

Облик површи повезан је са природом кривине и техником генерисања [Pot07]. Дакле, облик и кривана представљају фундаменталне карактеристике површи, значајне за разматрање система.

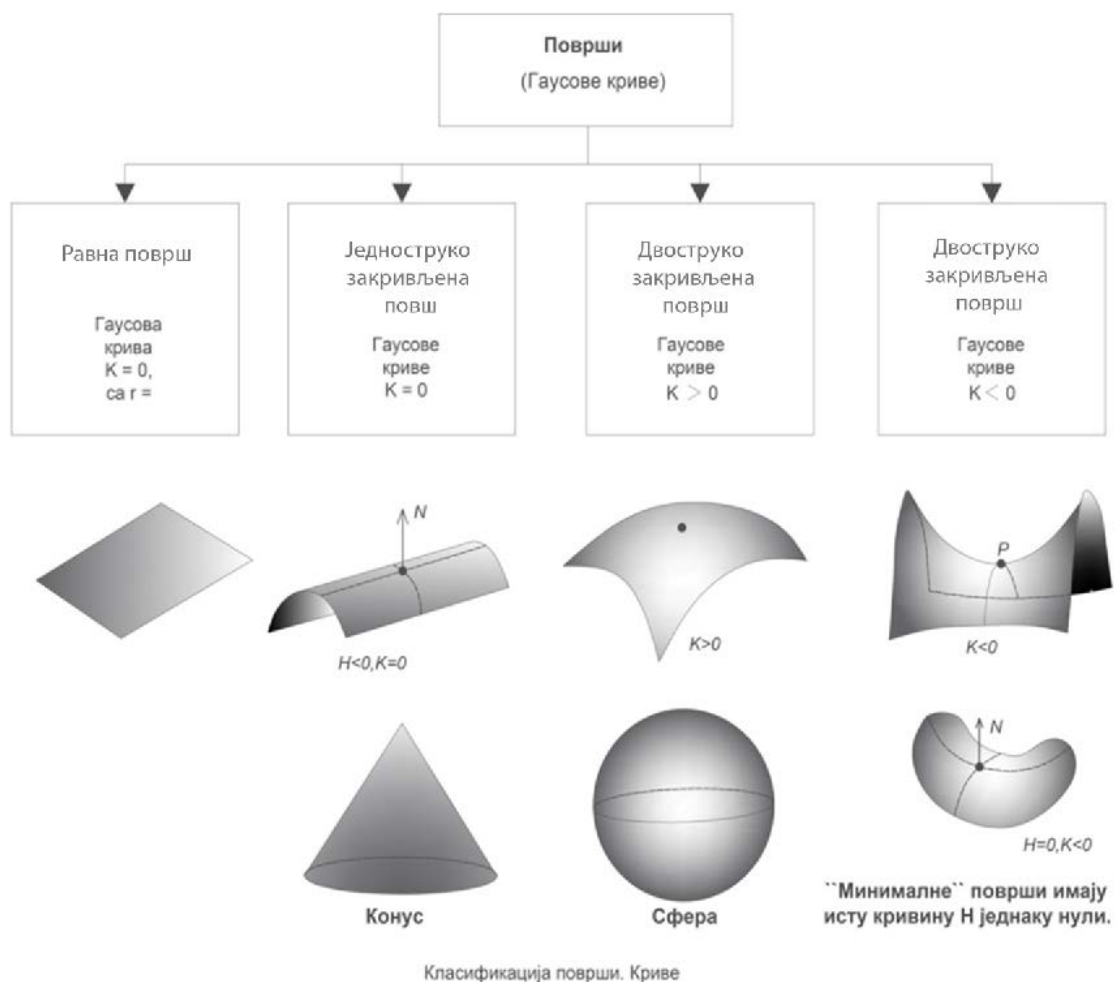
На Сл.4.4 су приказани тангенте и нормале на криву и површ, дати су изрази за кривину k , Гаусову кривину K и средњу кривину H .



Слика 4.4 Кривине површи

Површи представљају дводимензионалне континуалне облике у тродимензионалном простору. Оне у себи могу садржати тачке праве криве линије и мреже. На Сл.4.4 су приказани главни концепти кривина на основу којих је могуће извршити класификације површи као на Сл.4.5. Површи се могу класификовати на различите начине међутим оне које примену налазе у архитектури примарно се класификују на основу Гаусове кривине, а затим је подкласификацију могуће извршити на основу начина генерисања. Процеси генерисања могу се поделити на геометријске и негеометријске који подразумевају уношење различитих утицаја,

нпр. гравитације, ваздушног притиска или преднапрезања. Са становишта геометријског конструисања површи се генеришу кретањем кривих (генератриса по директриси). Велике групе површи се добијају транслацијом, ротацијом а могуће су и друге операције. Општију групу површи чине површи слободне форме чија је геометријска дефиниција NURBS.



Слика 4.5 Класификација површи у односу на закривљеност-предзнак Гаусове кривине

NURBS-ом је могуће представити ма коју форму. На Сл.4.6 су шематски приказане различите геометријске компоненте које се користе у NURBS моделовању слободне форме. На површима слободне форме могуће је конструисати мреже и то користећи правце главних кривина, затим паралелним пројектовањем спољних планарних мрежа, или неком другом врстом мапирања на површ.

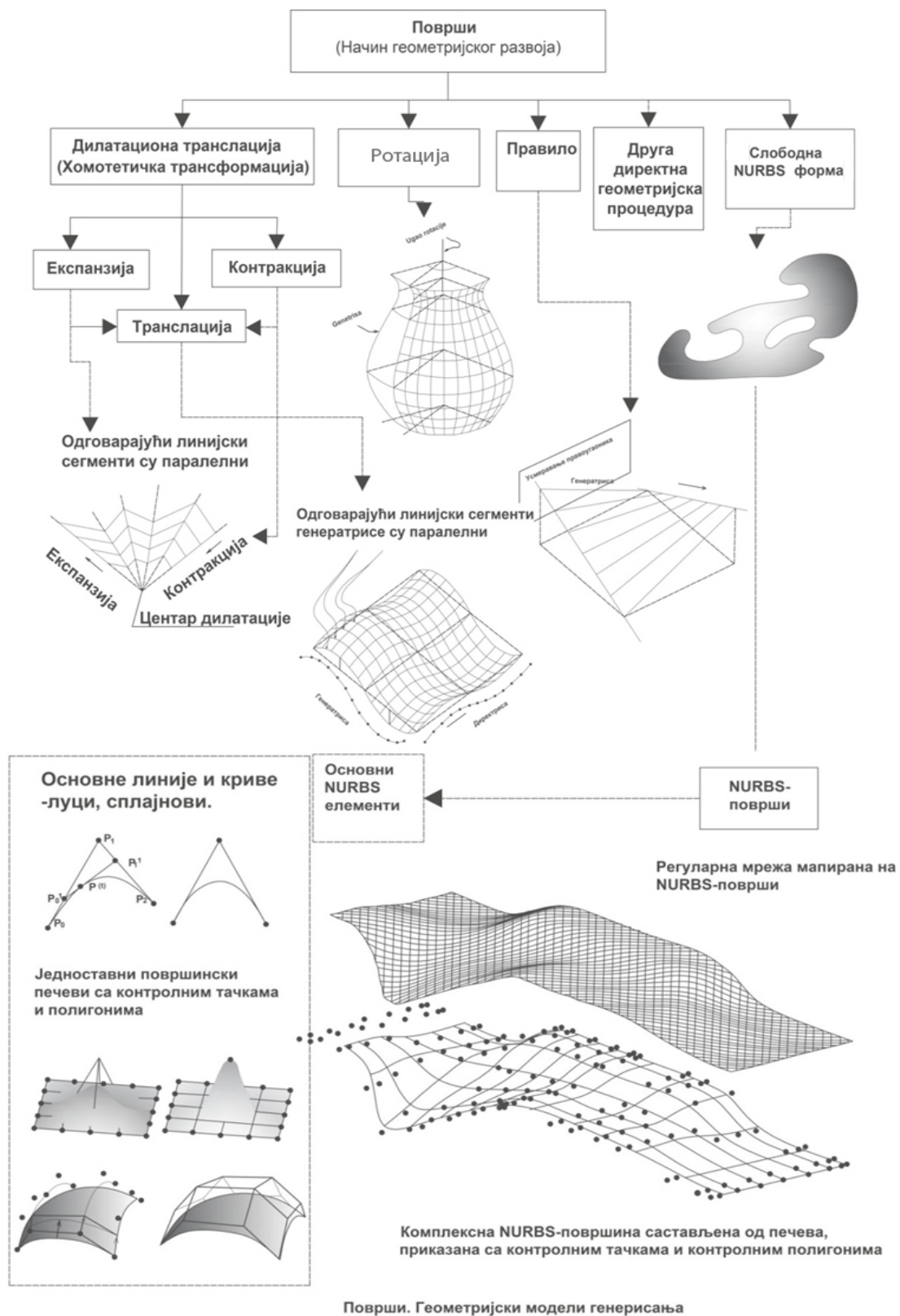
На Сл.4.6 приказани су различити начини геометријског развоја површи. Полазећи од задатих кривих генератриса и директриса применом одговарајућих трансформација могуће је генерисати најразличитије облике површи.

За описивање геометрије површинских система у оквирима овог рада користиће се параметарске криве и површи, у првом реду неравномерни рационални базни сплајн (*Non-Uniform Rational B-Spline*- NURBS) универзални, стандардни алат за моделовање кривих линија, површи и тела у CAD/CAM/CAE и компјутерској графици, који омогућава ефикасно и прецизно приказивање различитих геометријских форми коришћењем минималне количине података, једноставну контролу форме и интуитивно обликовање.

Историја истраживања у овој области, мотивисана потребама практичне индустријске примене, започела је радовима Пјер Безијеа (*Pierre Bezier*) и Пола де Кастелжа (*Paul de Casteljau*) инжењера запосланих у француској аутомобилској индустрији, који су се ослањали на богату француску математичку традицију. Полазећи од Безијеових кривих и површи у следећој фази развоја формулисана су Б-Спалјн које представљају сегментне полиномске криве и површи. Оне претстављају генерализацију у односу на Безијеове криве/површи, којом је могуће описати најразличитије комплексно закривљене форме, али не и коничне пресеке. NURBS криве и површи као следећи ниво генерализације отклањају претходно наведени недостатак, односно оне омогућавају да се јединственом формулацијом опишу и произвољно закривљене криве и површи и конични пресеци.

Применом ове технологије пројектантима је омогућено да манипулисањем контролним тачкама и њима придруженим тежинским факторима генеришу спектар варијантних облика. Предност ове технологије је и у томе што се комплексни облици крива и површи генеришу помоћу ограниченог броја тачака, због чега су величине њихових датотека мале. Описивање комплексних геометрија коришћењем полигона подразумева поделу крива на већи број кратких, правих сегмената што захтева дефинисање сваке тачке. Овакав поступак захтева далеко више меморије, да би се постигла глаткоћа (*smoothness*).

У наставку рада детаљније ће бити приказане, B-Spline и NURBS криве и површи.



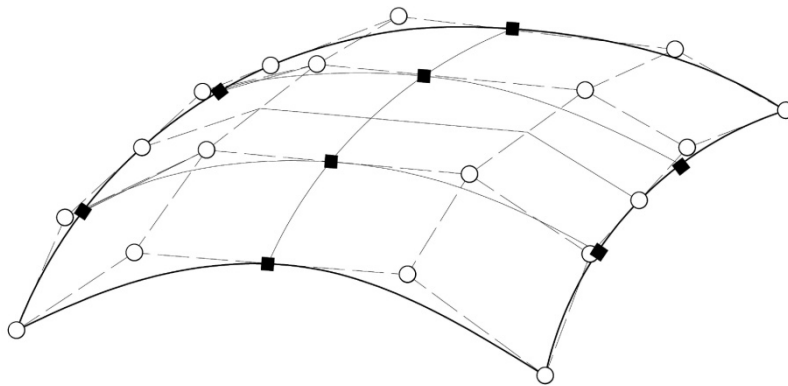
Слика 4.6 Геометрија – поступци генерисања површи

4.1.1 Криве и површи произвољног облика

За описивање геометрије линије, базе су функција једног док су у случају површи функција два параметра што има за последицу да је изометријски запис заправо параметарски облик њихових једначина у систему Декартових координата, тј.

$$\vec{r}(\xi) = \sum_{i=1}^N B_i(\xi) \vec{r}_i \quad \vec{r}(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M N_i(\xi) M_j(\eta) \vec{r}_{ij} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M B_{ij}(\xi, \eta) \vec{r}_{ij} \quad (1)$$

при чему $B_i(\xi)$ и $B_{ij}(\xi, \eta)$ представљају базне полиномске функције док су \vec{r}_i и \vec{r}_{ij} вектори положаја контролних тачака а N и $N \times M$ њихов укупан број, Сл.4.7 Из једначине (1)₂ намеће се закључак да су базне функције површи производ базних функција двеју фамилија линија $N_i(\xi)$ и $M_j(\eta)$.



Слика 4.7 Контролни полигон

Бројне вредности параметра ξ формирају генерализовани чворни вектор, односно

$$\xi^T = [\xi_1 \quad \xi_2 \quad \xi_3 \quad \dots \quad \xi_{N+p-1} \quad \xi_{N+p} \quad \xi_{N+p+1}] \quad (2)$$

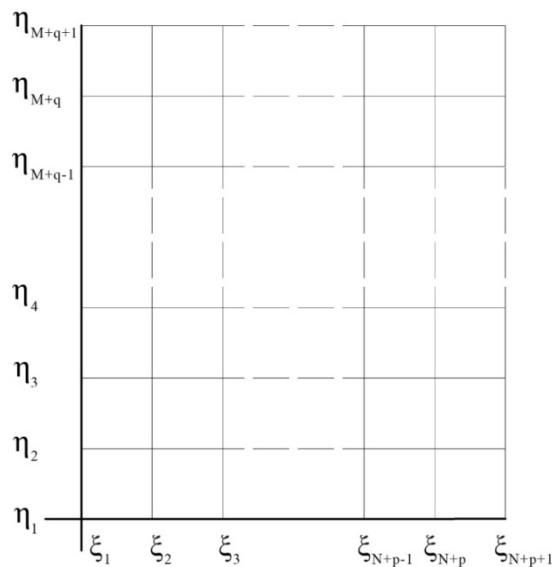
који у случају отвореног вектора садржи $N + p + 1$ компоненту где је p степен полиномних функција. Компоненте вектора ξ формирају параметарски или индексни простор линије. За разлику од тачне и контролне геометрије која у

општем случају припада Еуклидском E_3 простору параметарски простор линије је увек једнодимензионалан.

На исти начин и вектор

$$\boldsymbol{\eta}^T = [\eta_1 \quad \eta_2 \quad \eta_2 \quad \dots \quad \eta_{M+q-1} \quad \eta_{M+q} \quad \eta_{M+q+1}] \quad (3)$$

са $M + q + 1$ -ом компонентом где је q степен $M, (M)$ функција заједно са вектором ξ дефинише параметарски E_2 простор површи, Сл.4.8.



Слика 4.8 Параметарски простор површи E_2

Вредности ξ_1 и ξ_{N+p+1} као и η_1 и η_{M+q+1} одређују границе интервала чворих вектора ξ и $\boldsymbol{\eta}$. За чворне векторе кажемо да су равномерни ако је разлика између ма која његова два суседна елемента константна унутар целокупног интервала. Уколико се први и последњи елемент у задатом интервалу понављају $p+1$ -та, односно $q+1$ -та онда ћемо ξ и $\boldsymbol{\eta}$ звати отворене чворне векторе [Cot09] [Rad14].

Број и вредности компонената чворног вектора од суштинског су значаја за облик базних функција као и положај контролних тачака, односно ма који вектор ξ и $\boldsymbol{\eta}$ једнозначно дефинишу само једну линију односно површ у E_3 простору. Основу B-Spline чине Бернштајнове базе и Безиеове [Bez67][Bez72][Cot09].

Безиеове криве су полиноми произвољног реда и представљају B-Splines дефинисане отвореним чворним вектором на интервалу (0,1), односно

$$\xi^T = \left[\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{p+1} \quad \underbrace{1, 1, \dots, 1}_{p+1} \right] \quad (4)$$

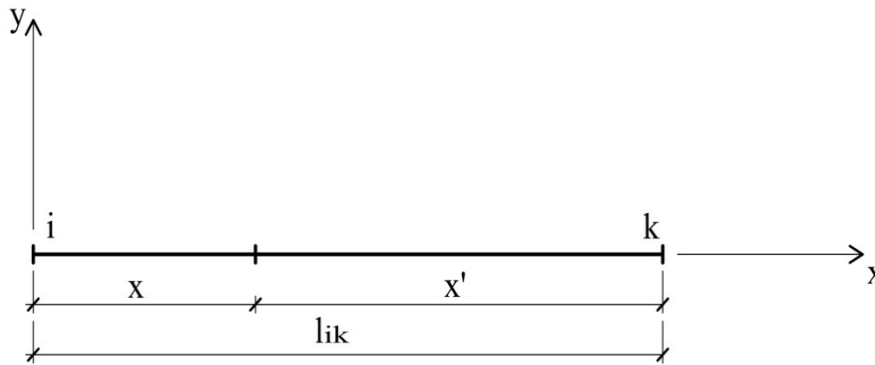
при чему је мултиплицитет чворова 0 и 1 једнак $p+1$ где је p степен полинома. Такве криве су линеарна комбинација $p+1$ -е базне функције, тј

$$P(\xi) = \sum_{i=1}^{p+1} B_{i,p}(\xi) \mathbf{P}_i \quad (5)$$

при чему $B_{i,p}(\xi)$ представљају Бернштајнове базе а \mathbf{P}_i контролне тачке.

На Сл.4.9 дата је линија дужине l_{ik} крајњих чворова i и k која може представљати осу праволинијског раванског штапа у систему x, y координата. Положај ма које тачке одређен је x координатом у односу на чвор i или x' координатом у односу на чвор k тако да је

$$x + x' = l_{ik} \quad \Rightarrow \quad x' = l_{ik} - x$$



Слика 4.9 Праволинијски штап

Нормирањем ових координата, тј.

$$\xi = \frac{x}{l_{ik}} \quad \xi' = \frac{x'}{l_{ik}} \quad (6)$$

уочавамо да је њихов збир у ма којој тачки дужи l_{ik} једнак јединици, односно

$$\xi + \xi' = 1 \Rightarrow \xi' = 1 - \xi \quad (7)$$

Очигледно је да координате x' и ξ' нису независне већ да су изведене из x и ξ координате. Произвољни степен m збира координата ξ и ξ' за свако ξ такође је једнак јединици и коришћењем биномног обрасца изразићемо га као

$$(\xi' + \xi)^m = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} (1-\xi)^{m-k} \xi^k = \sum_{k=1}^{m+1} \binom{m}{k-1} (1-\xi)^{m+1-k} \xi^{k-1} = 1 \quad (8)$$

Претходни израз не представља ништа друго до суму Бернштајнових база, тј

$$(\xi' + \xi)^m = \sum_{k=1}^{m+1} B_k(\xi) = 1 \quad (8)_1$$

чије су вредности

$$B_k(\xi) = \binom{m}{k-1} (1-\xi)^{m+1-k} \xi^{k-1} \quad (9)$$

Особина база $B_k(\xi)$ да је њихов збир за ма које ξ једнак јединици је и неопходна јер само такве функције и могу бити коришћене у формулацији коначних елемената како би коректно представиле нулте енергетске модусе који укључују крута трансляторна и ротациона кретања греда и љуски. Друго важно својство ових функција садржано је у чињеници да су њихове вредности увек позитивне за разлику од функција облика коришћених у класичној методи коначних елемената које могу имати и негативне вредности.

Безиеова крива првог степена

$$P_1(\xi) = (1-\xi)\mathbf{P}_1 + \xi\mathbf{P}_2 \quad (10)$$

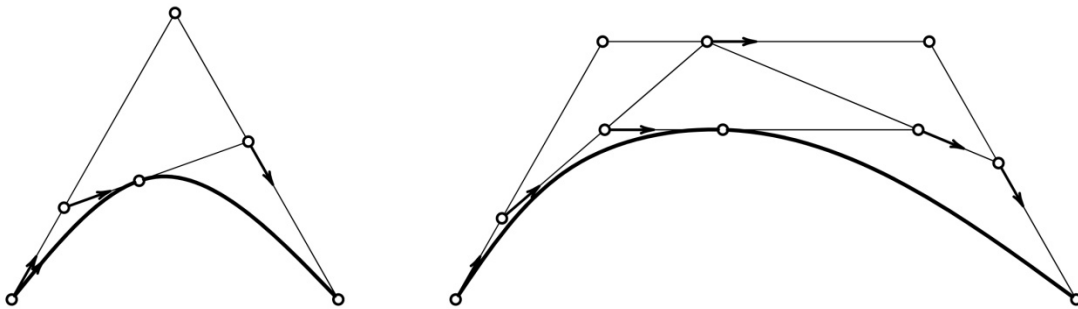
представља дуж чије контролне тачке \mathbf{P}_1 и \mathbf{P}_2 садрже Декартове координате крајњих тачака. Произвољна Безиеова крива степена m такође се може представити као линеарна функција облика (10) при чему је аргумент такве функције крива $m-1$ -ог степена, односно

$$P_m(\xi) = (1 - \xi)P_{m-1}(\xi) + \xi P_{m-1}'(\xi) \quad (11)$$

где је

$$P_{m-1}(\xi) = \sum_{k=1}^m B_k(\xi) P_k \quad (12)$$

Кубна и квадратна крива као линеарне функције од квадратне криве и праве линије приказане су на Сл.4.10



Слика 4.10 Кубна и квадратна крива

4.1.2 B-Spline линија

Функције B-Spline дефинисаног произвољним неравномерним чворним вектором могу се одредити Кокс-де Боровим или Де Кастелжовим алгоритмом. Кокс-де Боров алгоритам [DeB72] [DeC59] заснован је на рекурзивном изразу

$$B_{i,p}(\xi) = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i} B_{i,p-1}(\xi) + \frac{\xi_{i+p+1} - \xi}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} B_{i+1,p-1}(\xi) \quad (p = 1, 2, 3, \dots) \quad (13)$$

где је $B_{i,p}(\xi)$ i -та B-Spline полиномна функција степена p док су $B_{i,p-1}(\xi)$ и $B_{i+1,p-1}(\xi)$ i -та и $i+1$ -ва функција степена $p-1$.

Базе нултог степена садржане у изразу (13) за случај линеарног сплајна су константе чије су вредности

$$B_{i,0} = \begin{cases} 1 & \xi_i < \xi < \xi_{i+1} \\ 0 & \xi < \xi_i \wedge \xi > \xi_{i+1} \end{cases} \quad (14)$$

Из израза (13) лако се да закључити да се дејство i -те базне функције протеже унутар чворова ξ_i до ξ_{i+p+1} . Ако међу њима постоје и мултиплицирани чворови, односно чворови истих бројних вредности онда је вредност функција $B_{i,p}(\xi)$ унутар два суседна мултиплицирана чвора једнака нули.

Особина линеарности Безиерових кривих исказана једначином (11) садржана је и у рекурзивном изразу (13). Наиме, B-Spline функцију степена p унутар чворова ξ_i до ξ_{i+p+1} налазимо као линеарни сплајн двеју функција $p-1$ -ог степена $B_{i,p-1}$ и $B_{i+1,p-1}$. Кокс-де Боров алгоритам је поприлично неефикасан јер се за одређивање ма које B-Spline функције захтева развијање свих функција нижих степена почев од нула до $p-1$ унутар целкупног интервала.

Особина линеарности B-Spline функција ефикасније је искоришћена у Де Кастелжовом алгоритму [DeC59] који почива на поларној форми полинома. Примера ради кубни полином

$$P^3(x) = a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 \quad (15)$$

који је функција само аргумента x можемо представити у линеарном R^3 простору као функцију од три променљиве у облику

$$P^3(u_1, u_2, u_3) = a_0u_1u_2u_3 + \frac{1}{3}a_1(u_1u_2 + u_2u_3 + u_3u_1) + \frac{1}{3}a_2(u_1 + u_2 + u_3) + a_3 \quad (16)$$

одакле уочавамо да је она симетрична функција у односу на сва три аргумента, тј

$$P^3(u_1, u_2, u_3) = P^3(u_2, u_3, u_1) = P^3(u_3, u_1, u_2) \quad (17)$$

Једначина (16) представља поларну форму функције (15) која је за произвољни полином n -ог степена

$$P^n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = \sum_{k=0}^n a_k x^{n-k} \quad (18)$$

изражена као

$$P^n(u_1, u_2, \dots, u_n) = \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{\binom{n}{k}} \sum_{i=1}^{\binom{n}{k}} (C_{n-k}^n)_i \quad (19)$$

где $(C_{n-k}^n)_i$ дефинише i -ту комбинацију производа без понављања елемената из скупа променљивих u_1, u_2, \dots, u_n при чему у комбинацији $(C_{n-k}^n)_i$ треба измножити $n-k$ елемената.

Линеарни R^n простор дефинисан је са n линеарно независних јединичних базиса

$$\mathbf{e}_1^T = [1 \ 0 \ \dots \ 0] \quad \mathbf{e}_2^T = [0 \ 1 \ \dots \ 0] \quad \dots \quad \mathbf{e}_n^T = [0 \ 0 \ \dots \ 1] \quad (20)$$

тако да је ма који вектор тог простора линеарна комбинација јединичних \mathbf{e}_i ($i = 1, 2, \dots, n$) вектора.

На основу претходних израза Безиеове криве произвољног степена n такође можемо представити у поларној форми у R^n простору изражавањем њихових контролних тачака у функцији од \mathbf{e}_i базиса, односно

$$\mathbf{P}_1^T = G(0, 0, \dots, 0) \quad \mathbf{P}_2^T = G(\mathbf{e}_1^T) = G(1, 0, \dots, 0) \quad \dots \quad \mathbf{P}_{n+1}^T = G(\mathbf{e}_1^T + \mathbf{e}_2^T + \dots + \mathbf{e}_n^T) = G(\underbrace{1, 1, \dots, 1}_n) \quad (21)$$

или

$$\mathbf{P}_i^T = G(\mathbf{e}_1^T + \mathbf{e}_2^T + \dots + \mathbf{e}_{i-1}^T) = G(\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{i-1}, 0, \dots, 0) \quad (i = 1, 2, \dots, n+1) \quad (22)$$

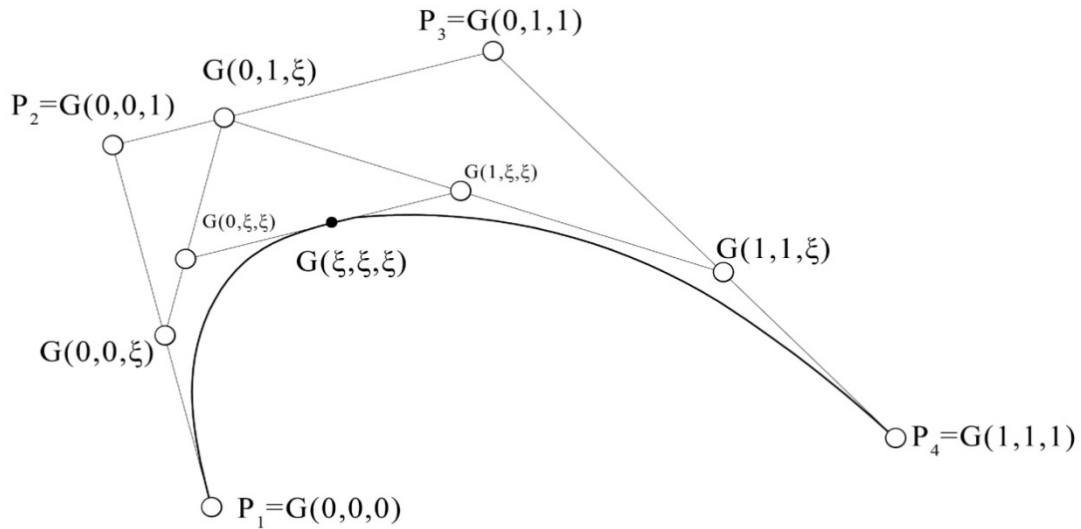
Симетрија поларне форме огледа се и у симетрији поларног записа контролних тачака Безиеових кривих за које у случају кубне функције важи да је

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_2^T &= G(1, 0, 0) = G(0, 1, 0) = G(0, 0, 1) \\ \mathbf{P}_3^T &= G(1, 1, 0) = G(1, 0, 1) = G(0, 1, 1) \end{aligned} \quad (23)$$

Конструкцијом линеарних сплајнова између контролних тачака \mathbf{P}_1 до \mathbf{P}_4 за случај кубне Безијерове криве Сл.4.11, на начин

$$G(0,0,\xi) = (1-\xi)G(0,0,0) + \xi G(0,0,1) \quad G(0,\xi,1) = (1-\xi)G(0,0,1) + \xi G(0,1,1)$$

$$G(\xi,1,1) = (1-\xi)G(0,1,1) + \xi G(1,1,1)$$
(24)



Слика 4.11 Кубна Безиерова крива

дефинисане су три линеарне функције $G(0,0,\xi)$, $G(0,\xi,1)$ и $G(\xi,1,1)$ Сл.5 на правим линијама P_1P_2 , P_2P_3 и P_3P_4 , респективно. Користећи својство линеарности оваквих кривих формулисаћемо и линеарне сплајнове од линеарних функција чије тачке у R^3 простору имају следеће координате

$$G(0,\xi,\xi) = (1-\xi)G(0,0,\xi) + \xi G(0,1,\xi) \quad G(1,\xi,\xi) = (1-\xi)G(1,0,\xi) + \xi G(1,1,\xi) \quad (25)$$

описујући при томе две квадратне функције које на основу (23) и (24) можемо приказати као

$$G(0,\xi,\xi) = (1-\xi)^2 G(0,0,0) + 2(1-\xi)\xi G(0,0,1) + \xi^2 G(0,1,1)$$
(26)

$$G(1,\xi,\xi) = (1-\xi)^2 G(0,0,1) + 2(1-\xi)\xi G(0,1,1) + \xi^2 G(1,1,1)$$

Коначно линеарна функција од горњих квадратних, односно

$$G(\xi,\xi,\xi) = (1-\xi)G(0,\xi,\xi) + \xi G(1,\xi,\xi) \quad (27)$$

дефинише покретну тачку $G(\xi, \xi, \xi)$ Сл. 4.11 која описује кубну Безиерову криву

$$P^3(\xi) = G(\xi, \xi, \xi) = (1-\xi)^3 \mathbf{P}_1 + 3(1-\xi)^2 \xi \mathbf{P}_2 + 3(1-\xi)\xi^2 \mathbf{P}_3 + \xi^3 \mathbf{P}_4 \quad (28)$$

Приказани алгоритам на примеру кубне полиномне криве је универзалног карактера и може се применити и на сплајну који је дефинисан произвољним неравномерним чворним вектором при чему је линеарни сплајн унутар контролних тачака са поларним координатама $\mathbf{P}_i = G(\xi_{i+1}, \dots, \xi_{i+p})$ и $\mathbf{P}_{i+1} = G(\xi_{i+2}, \dots, \xi_{i+p+1})$ на основу својства симетрије дат као

$$G(\xi, \xi_{i+2}, \dots, \xi_{i+p}) = \frac{\xi_{i+p+1} - \xi}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} \mathbf{P}_i + \frac{\xi - \xi_{i+1}}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} \mathbf{P}_{i+1} \quad (29)$$

Оваква процедура је веома погодна у случајевима када се врши инсертовање, односно додавање нових чворова у већ постојећем чворном вектору у циљу прогушћавања мреже коначних елемената при чему имамо захтев да постојећа геометрија линије или површи остане непромењена.

Континуитет базних функција од посебног је значаја при формулацији коначних елемената. Закључке о континуитету B-Spline функција дефинисане произвољним чворним вектором можемо донети на основу његових чворова. У случају отвореног чворног вектора чији се први и последњи чвор мултиплицирају $p+1$ - та јасно је да у тим чворовима, односно крајевима B-Spline може бити задовољен само C^0 континуитет. У погледу унутрашњих чворова континуитет је директна последица њиховог понављања. Свако појављивање унутрашњег чвора за ту вредност параметра умањује континуитет за један. Уколико је такав чвор мултиплициран m пута онда је континуитет B-Spline функција у том чвору једнак C^{p-m} . Тако на пример за кубни B-Spline дефинисан чворним вектором

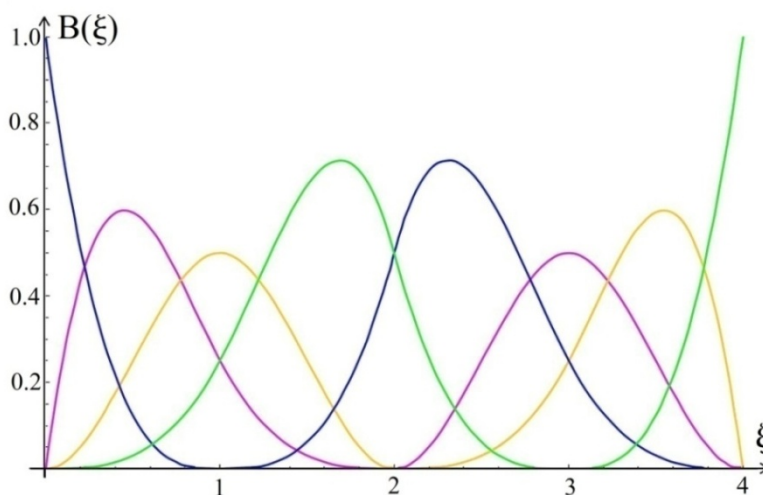
$$\xi^T = [0, 0, 0, 0, 1, 2, 2, 3, 4, 4, 4, 4] \quad (30)$$

базне функције имају континуитет C^0 у крајњим чворовима 0 и 4, континуитет C^1 у чвору 2 и континуитет C^2 у чворовима 1 и 3. Ако се неки од чворова појављује $p+1$ - пута онда на тако дефинисаном сплајну у том чвору долази до дисконтинуитета што значи да такав чворни вектор заправо садржи два независна B-Spline.

Примену Де Кастелжовог алгоритма приказаћемо на примеру чворног вектора (30). Како је реч о кубном сплајну, на основу броја елемената у вектору ξ следи да је број контролних тачака осам чије су поларне координате

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_1 &= G(0,0,0) & \mathbf{P}_2 &= G(0,0,1) & \mathbf{P}_3 &= G(0,1,2) & \mathbf{P}_4 &= G(1,2,2) \\ \mathbf{P}_5 &= G(2,2,3) & \mathbf{P}_6 &= G(2,3,4) & \mathbf{P}_7 &= G(3,4,4) & \mathbf{P}_8 &= G(4,4,4) \end{aligned}$$

На основу претходног примера можемо донети и одрђене закључке о особинама B-Spline функција Сл.4.12.



Слика 4.12 Базне функције кубног B-Spline

Збир B-Spline функција у свакој тачки сплајна једнак је јединици, односно

$$\begin{aligned} \xi \in [0,1] & \quad \sum_{i=1}^4 B_i = 1 & \quad \xi \in [1,2] & \quad \sum_{i=2}^5 B_i = 1 \\ \xi \in [2,3] & \quad \sum_{i=4}^7 B_i = 1 & \quad \xi \in [3,4] & \quad \sum_{i=5}^8 B_i = 1 \end{aligned}$$

Базне функције имају само позитивне вредности што се лако уочава са Сл.4.12. Обзиром да је свакој контролној тачки придружена само једна B-Spline функција из поларних координата контролних тачака одређујемо домен дејства сваке функције понаособ. Тако на пример контролна тачка \mathbf{P}_3 поред координата 1, 2 садржи и поларну координату 0 која нема додира са интервалом [2, 3] одакле

следи да не постоји њено дејство на том делу сплајна већ да је ограничено на интервалима $[0, 1]$ и $[1, 2]$. Такође и координата 3 контролне тачке \mathbf{P}_5 елиминише њен утицај на интервалу $[0, 1]$. Контролне тачке чије су све поларне координате исте интерполационог су карактера и имају утицај само на једном интервалу, \mathbf{P}_1 на $[0, 1]$ и \mathbf{P}_8 на $[3, 4]$.

Из првог и другог извода базних функција по ξ параметру на интервалу $[0, 1]$, Сл.4.13.

$$\begin{aligned} G'_{01}(\xi) &= -3(1-\xi)^2 \mathbf{P}_1 + (3-9\xi+5.25\xi^2) \mathbf{P}_2 + 3\xi(1-\xi) \mathbf{P}_3 + 0.75\xi^2 \mathbf{P}_4 \\ G''_{01}(\xi) &= 6(1-\xi) \mathbf{P}_1 + (10.5\xi-9) \mathbf{P}_2 + 3(1-2\xi) \mathbf{P}_3 + 1.5\xi \mathbf{P}_4 \end{aligned} \quad (31)$$

и интервалу $[1, 2]$

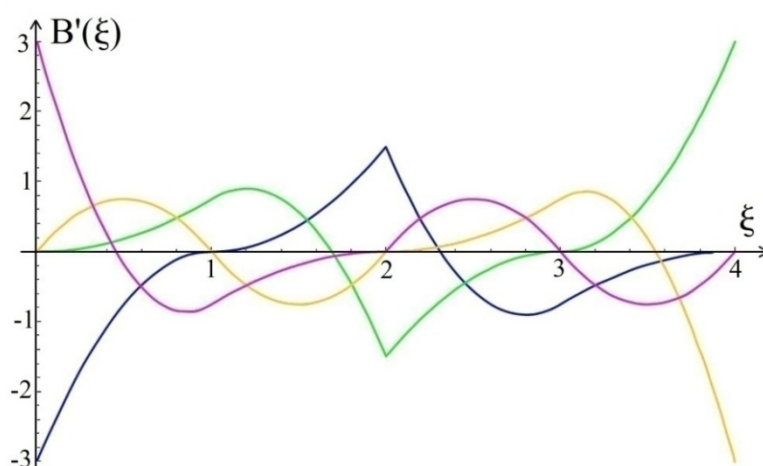
$$\begin{aligned} G'_{12}(\xi) &= -\frac{3}{4}(2-\xi)^2 \mathbf{P}_2 + 3(2-\xi)(1-\xi) \mathbf{P}_3 + \frac{1}{2}(18\xi-9-7.5\xi^2) \mathbf{P}_4 + \frac{3}{2}(\xi-1)^2 \mathbf{P}_5 \\ G''_{12}(\xi) &= \frac{3}{2}(2-\xi) \mathbf{P}_2 + 3(2\xi-3) \mathbf{P}_3 + \frac{1}{2}(18-15\xi) \mathbf{P}_4 + 3(\xi-1) \mathbf{P}_5 \end{aligned} \quad (32)$$

следи да је у тачки $\xi = 1$

$$G'_{01}(1) = -\frac{3}{4} \mathbf{P}_2 + \frac{3}{4} \mathbf{P}_4 = G'_{12}(1) \quad G''(1) = \frac{3}{2} \mathbf{P}_2 - 3 \mathbf{P}_3 + \frac{3}{2} \mathbf{P}_4 = G''_{12}(1)$$

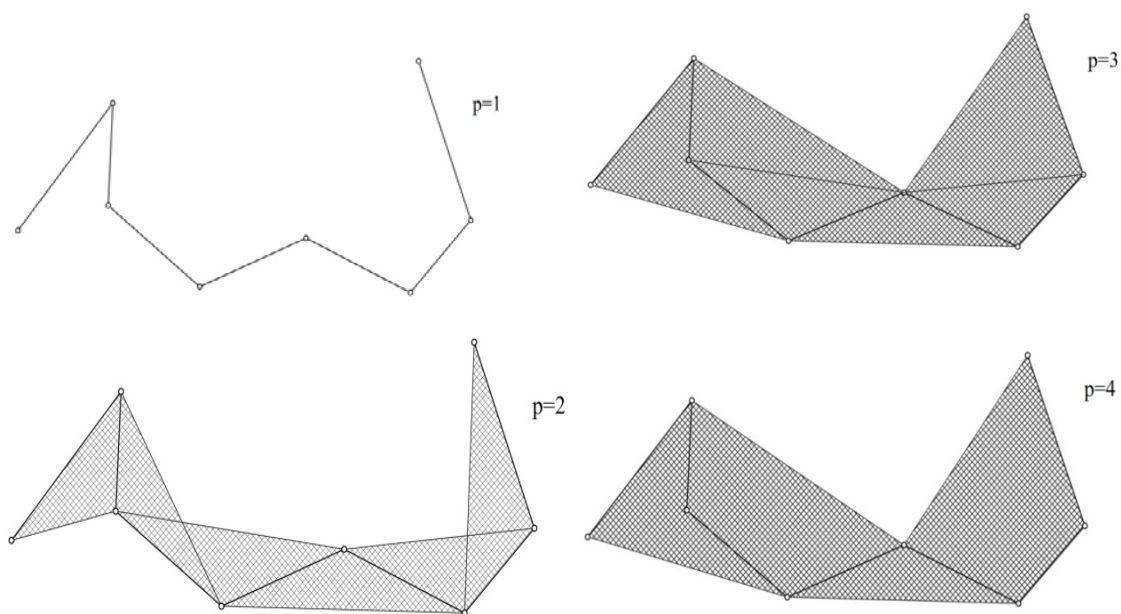
обезбеђен континуитет C^1 и C^2 .

Раније је већ напомињано да B-Spline крива n -ог степена, дефинисана отвореним чворним вектором на интервалу $\xi \in [0, 1]$, садржи $n+1$ контролну тачку при чему је свакој од њих придружена само једна базна функција истог степена.



Слика 4.13 Први извод базних функција

Контролне тачке формирају контролни полигон који представља скуп од n линеарних сплајнова. Истим контролним тачкама могу се представити и криве степена p , ($1 < p < n$) тако да је њихов укупан број $n + 1 - p$. За дати контролни полигон базне функције свих кривих обзиром на њихове не негативне вредности леже унутар заједничког конвексног омотача Сл.4.14.



Слика 4.14 Конвексни омотач контролних полигона

Са повећањем степена B-Spline криве, базне функције постају глаткије као последица увећања реда њихове диференцијабилности чиме се умањује ефекат контролних тачака.

На основу рекурзивног израза (13) извод B-Spline функција можемо изразити преко сплајн функција нижег степена. За дати полином степена p извод i -те функције налазимо као

$$\frac{d}{d\xi} B_{i,p}(\xi) = \frac{p}{\xi_{i+p} - \xi_i} B_{i,p-1}(\xi) - \frac{p}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} B_{i+1,p-1}(\xi) \quad (33)$$

Генерализацијом претходне релације произвољни k -ти извод одређен је као

$$\frac{d^k}{d\xi^k} B_{i,p}(\xi) = \frac{p!}{(p-k)!} \sum_{j=0}^k \alpha_{k,j} B_{i+j,p-k}(\xi) \quad (34)$$

где је

$$\alpha_{k,j} = \frac{\alpha_{k-1,j} - \alpha_{k-1,j-1}}{\xi_{i+p+j-k+1} - \xi_{i+j}} \quad j = 1, 2, \dots, k-1 \quad (35)$$

$$\alpha_{0,0} = 1 \quad \alpha_{k,0} = \frac{\alpha_{k-1,0}}{\xi_{i+p-k+1} - \xi_i} \quad \alpha_{k,k} = -\frac{\alpha_{k-1,k-1}}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+k}}$$

4.1.3 B-Spline површ

B-Spline површ дефинисана је тензорским производом двеју независних фамилија B-Spline линија [Cot09]. За отворене чворне векторе ξ и η на интервалима $[0,1]$, тј.

$$\xi^T = \left[\underbrace{0 \dots 0}_{n+1} \quad \underbrace{1 \dots 1}_{n+1} \right] \quad \eta^T = \left[\underbrace{0 \dots 0}_{m+1} \quad \underbrace{1 \dots 1}_{m+1} \right] \quad (36)$$

резултира површ облика

$$\bar{r}(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{m+1} N_{i,n}(\xi) M_{j,m}(\eta) \bar{r}_{ij} = \sum_{i,j=1,1}^{n+1,m+1} B_{ij}(\xi, \eta) \bar{r}_{ij} \quad (37)$$

као производ линија n -тог и m -тог степена при чему је свакој контролној тачки чији је укупан број $(n+1) \times (m+1)$ придружена само једна базна функција вредности

$$B_{ij}(\xi, \eta) = N_{i,n}(\xi)M_{j,m}(\eta) \quad (38)$$

ξ и η линија елемента површи одређеног чворним векторима (36) су Безиеове криве n -тог и m -тог степена, респективно чије једначине у систему Декартових координата гласе

$$\vec{r}(\xi, \eta_0) = \vec{r}(\xi) = \sum_{i=1}^{n+1} N_{i,n}(\xi) \mathbf{P}_i(\eta_0) \quad \vec{r}(\xi_0, \eta) = \vec{r}(\eta) = \sum_{j=1}^{m+1} M_{j,m}(\eta) \mathbf{Q}_j(\xi_0) \quad (39)$$

при чему су контролне тачке $\mathbf{P}_i(\eta_0)$ и $\mathbf{Q}_j(\xi_0)$ једнаке

$$\mathbf{P}_i(\eta_0) = \sum_{j=1}^{m+1} M_{j,m}(\eta_0) \vec{r}_{ij} \quad \mathbf{Q}_j(\xi_0) = \sum_{i=1}^{n+1} N_{i,n}(\xi_0) \vec{r}_{ij} \quad (40)$$

Из израза (9) и (38) непосредно следи да је збир базних функција у свакој тачки површи једнак јединици, тј.

$$\sum_{i,j=1,1}^{n+1,m+1} B_{ij}(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{m+1} N_{i,n}(\xi) M_{j,m}(\eta) = \sum_{i=1}^{n+1} N_{i,n}(\xi) \sum_{j=1}^{m+1} M_{j,m}(\eta) = \sum_{i=1}^{n+1} N_{i,n}(\xi) = 1 \quad (41)$$

Нека је В-сплајн површ одређена неравномерним отвореним чворним векторима

$$\xi^T = [\xi_1 \quad \xi_2 \quad \dots \quad \xi_{N+p} \quad \xi_{N+p+1}] \quad \eta^T = [\eta_1 \quad \eta_2 \quad \dots \quad \eta_{M+q} \quad \eta_{M+q+1}] \quad (42)$$

са N контролних тачака у ξ и M у η правцу при чему су ξ линије степена p а η степена q .

Број коначних елемената такве површи одређен је бројем различитих интервала ξ и η параметра у кореспондентним чворним векторима. Континуитет базних функција, односно континуитет ξ и η линија на површи директна је последица мултиплицитета тачака унутар чворних вектора. С тога сви закључци у погледу континуитета В-Spline кривих остају у важности и у случају површи

4.1.4 Инсертовање чворова

У већ постојећем чворном вектору ξ можемо уврстити и произвољан број нових чворних тачака тако да неопадајући низ њихових вредности у вектору ξ није нарушен. Нови чворни вектор имплицира нове базне функције као и повећање контролних тачака. Наш задатак јесте да се пронађу такви нови положаји контролних тачака при којима је оригинална геометрија посматраног B-Spline сачувана. Инсертовање чворова јавља се као потреба у напонско деформацијској анализи материјалних линија и површи у смислу прогушћавања мреже коначних елемената.

Инсертовање чвора $\bar{\xi}_{i+1}$ на интервалу $\xi \in [\xi_i, \xi_{i+1}]$ постојећи интервал подељен је на два сегмента $[\bar{\xi}_i = \xi_i, \bar{\xi}_{i+1}]$ и $[\bar{\xi}_{i+1}, \bar{\xi}_{i+2} = \xi_{i+1}]$. Чвор $\bar{\xi}_{i+1}$ број контролних тачака посматраног сплајна увећава за један и уноси промене у поларним координатама неких од постојећих контролних тачака. Нека је $G_{i,i+1}$ поларни облик линије на оригиналном интервалу док је иста геометрија после инсертовања на новоформираним сегментима описана поларним формама $\bar{G}_{i,i+1}$ и $\bar{G}_{i+1,i+2}$. Оригинална линија остаће непромењена само ако је $G_{i,i+1} = \bar{G}_{i,i+1} = \bar{G}_{i+1,i+2}$. Из линеарног својства B-Spline кривих следи да је услов о непромењеној поларној форми преко сегмената $[\bar{\xi}_i, \bar{\xi}_{i+1}]$ и $[\bar{\xi}_{i+1}, \bar{\xi}_{i+2}]$ задовољен ако су новоформиране контролне тачке одређене линеарном интерполацијом између постојећих, сагласно изразу (29).

Инсертовањем произвољног броја чворова m у чворном вектору $\xi^T = [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{N+p}, \xi_{N+p+1}]$ вектор ξ постаје $\bar{\xi}^T = [\bar{\xi}_1 = \xi_1, \bar{\xi}_2, \dots, \bar{\xi}_{N+m+p}, \bar{\xi}_{N+m+p+1}]$ тако да је $\xi \subset \bar{\xi}$. Чворни вектор $\bar{\xi}$ генерише $N+m$ контролних тачака и исто толико базних функција. Линеарном интерполацијом оригиналних контролних тачака $\mathbf{P}^T = [\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \dots, \mathbf{P}_N]$ вектор новоформираних контролних тачака $\bar{\mathbf{P}}^T = [\bar{\mathbf{P}}_1, \bar{\mathbf{P}}_2, \dots, \bar{\mathbf{P}}_{N+m}]$ изразићемо као

$$\bar{\mathbf{P}} = \mathbf{M} \mathbf{P} \quad (43)$$

где је матрица \mathbf{M} реда $(N + m) \times N$, при чему се њени елементи на отвореном чворном вектору могу записати у рекурзивној форми у функцији од B-Spline кривих нижег степена на следећи начин

$$M_{ij}^0 = \begin{cases} 1 & \xi_j < \bar{\xi}_i < \xi_{j+1} \\ 0 & \bar{\xi}_i < \xi_j \wedge \bar{\xi}_i > \xi_{j+1} \end{cases} \quad (44)$$

$$M_{ij}^{r+1} = \frac{\bar{\xi}_{i+r} - \xi_j}{\xi_{j+r} - \xi_j} M_{ij}^r + \frac{\bar{\xi}_{j+r+1} - \bar{\xi}_{i+r}}{\xi_{j+r+1} - \xi_{j+1}} M_{ij+1}^r \quad (r = 0, 1, 2, \dots, p-1)$$

Из услова непромењене оригиналне геометрије посматраног сплајна следи да је

$$\bar{r}(\xi) = \mathbf{B}^T \mathbf{P} = \bar{\mathbf{B}}^T \bar{\mathbf{P}} \quad (44)_1$$

одакле коришћењем израза (43) можемо успоставити зависност између старих \mathbf{B} и нових $\bar{\mathbf{B}}$ базних функција у облику

$$\mathbf{B}^T \mathbf{P} = \bar{\mathbf{B}}^T \mathbf{M} \mathbf{P} \Rightarrow \mathbf{B}^T = \bar{\mathbf{B}}^T \mathbf{M} \Rightarrow \mathbf{B} = \mathbf{M}^T \bar{\mathbf{B}} \quad (44)_2$$

4.1.5 Елевација B-Spline кривих

Котристећи линеарно својство базних функција ма која B-Spline крива може бити приказана као линија вишег степена при чему њена основна геометрија остаје непромњена, односно

$$\mathbf{B}_{n+1}(\xi) = (1 - \xi) \mathbf{B}_n(\xi) + \xi \mathbf{B}_n(\xi) \quad (45)$$

или

$$\mathbf{B}_{n+1}(\xi) = (1 - \xi) \sum_{i=1}^{n+1} B_{i,n}(\xi) \mathbf{P}_i + \xi \sum_{i=1}^{n+1} B_{i,n}(\xi) \mathbf{P}_i \quad (46)$$

Како је

$$\binom{n+2}{i} (1 - \xi) B_{i,n} = \binom{n+1}{i} B_{i,n+1} \quad (1 - \xi) B_{i,n} = \frac{n+2-i}{n+1} B_{i,n+1} \quad (47)$$

$$\binom{n+2}{i+1} \xi B_{i,n} = \binom{n+1}{i} B_{i+1,n+1} \quad \xi B_{i,n} = \frac{i+1}{n+1} B_{i+1,n+1}$$

релацију (46) написаћемо у облику

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{n+1}(\xi) &= \sum_{i=1}^{n+1} \frac{n+2-i}{n+1} B_{i,n+1}(\xi) \mathbf{P}_i + \sum_{i=1}^{n+1} \frac{i+1}{n+1} B_{i+1,n+1}(\xi) \mathbf{P}_i = \\ &= \sum_{i=1}^{n+2} \left(\frac{n+2-i}{n+1} + \frac{i+1}{n+1} \right) B_{i,n+1}(\xi) \mathbf{P}_i = \sum_{i=1}^{n+2} B_{i,n+1}(\xi) \bar{\mathbf{P}}_i \end{aligned} \quad (48)$$

при чему су контролне тачке $\bar{\mathbf{P}}_i$ једнаке

$$\bar{\mathbf{P}}_i = \frac{i-1}{n+1} \mathbf{P}_{i-1} + \frac{n+2-i}{n+1} \mathbf{P}_i \quad (i = 1, 2, \dots, n+2) \quad (49)$$

Елевација произвољног B-Spline реда p дефинисаног неравномерним отвореним чворним вектором садржи неколико корака. У првом кораку потребно је повећати мултиплицитет свих чворова за један, без додавања нових чворова. На тај начин први и последњи чвор мултиплицирани су $p+2$ пута. Други корак подразумева мултиплицирање само унутрашњих чворова у оригиналном чворном вектору до степена полиномне криве p , чиме се врши декомпозиција оригиналног сплајна на Безиеове елементе. У трећем кораку извршићемо елевацију свих Безиеових кривих на наредни полиномни степен $p+1$. Коначно, уклањањем сувишних чворова, односно свођењем чворног вектора на први корак, успоставићемо зависност између тражених базних функција и функција Безиеових елемената као и зависност између контролних тачака елевираних и почетног сплајна.

4.1.6 Неуниформни рационални B-Spline

У претходном делу овог поглавља је показано да се ма који алгебарски полином облика (42) може егзактно представити обичним B-Spline. Међутим када је реч о рационалној функцији која представља количник два алгебарска полинома, односно

$$y = \frac{P^n(x)}{Q^m(x)} \quad (50)$$

проблем постаје коплекснији. Наиме, обични B-Spline није у могућности да изрази функцију (50) већ се захтева формулација општијег, рационалног B-Spline, у литератури назван NURBS.

Имајући на уму да су сви конусни пресеци који укључују кружницу, елипсу, хиперболу и параболу дати једначином (50), јасно је онда да је њихова сплајн интерпретација могућа само посредством рационалног сплајна. Ова чињеница је за нас посебно значајна обзиром да конусни пресеци чине основу већине квадратних површи.

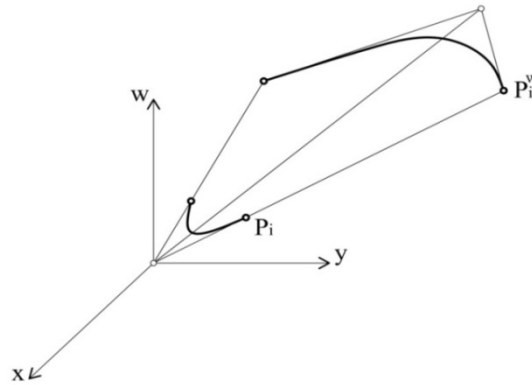
Неравномерни рационални B-Spline (NURBS) у R^d простору добијен је пројективном трансформацијом B-Spline из R^{d+1} простора [Pie97] [Rog01]. Сагласно томе NURBS просторне линије, као општији случај, представља пројекцију четвородимензионалног сплајна на $3-D$ простор. Четвородимензионални простор је линеарни простор добијен из $3-D$ Еуклидског простора дефинисаног са три Декартове координате додавањем и четврте коју ћемо обележити са w и зваћемо је тежинским фактором, [Hug05] [Pie97] [Rog01]. На тај начин вектор положаја произвољне тачке одређен је као $\vec{r}^w = [x, y, z, w]$, док је $4-D$ B-Spline крива степена p дефинисана изразом

$$\vec{r}^w = \sum_{i=1}^N B_{i,p}(\xi) \mathbf{P}_i^w \quad (51)$$

где су \mathbf{P}_i^w контролне тачке у $4-D$ простору. Четвородимензионалне координате тачака могу бити третиране на два начина: као хомогене или тежинске Еуклидске. Хомогене репрезентују положај тачке у $4-D$ простору тако да су $3-D$ Еуклидске координате једнаке $[x/w, y/w, z/w]$. Тежинске Еуклидске подразумевају да су његове три просторне координате већ подељене са тежинским фактором што има за последицу да је вектор положаја произвољне тачке $4-D$ простора одређен са координатама $\vec{r}^w = [wx, wy, wz, w]$. Наше даље анализе засноване су на тежинским координатама што има за последицу да је

$$\mathbf{P}_i^w = w_i \mathbf{P}_i \quad (52)$$

У случају раванске криве $d = 2$, $R^{d+1} = R^3$ простор дефинисан је са две Декартове координате и тежином w па је вектор $\vec{r}^w = [xw, yw, w]$. Пројективна трансформација 3-D криве са координатама $[wx, wy, w]$ на раван R^2 приказана је на Сл.4.15. Све тачке раванске криве су тачке продора кроз раван R^2 праве линије која спаја тачке 3-D сплајна и координатни почетак.



Слика 4.15 Трансформација 3D криве на R^2 раван

На основу израза (51) и (52) једначину NURBS сплајна написаћемо као

$$\vec{r}(\xi) = \frac{\vec{r}^w(\xi)}{w(\xi)} = \frac{\sum_{i=1}^N B_{i,p}(\xi) w_i \mathbf{P}_i}{\sum_{j=1}^N B_{j,p}(\xi) w_j} \quad (53)$$

или сажетије

$$\vec{r}(\xi) = \sum_{i=1}^N R_{i,p}(\xi) \mathbf{P}_i \quad (54)$$

где су

$$R_{i,p}(\xi) = \frac{B_{i,p}(\xi) w_i}{\sum_{j=1}^N B_{j,p}(\xi) w_j} \quad (55)$$

његове базне функције.

Основне карактеристике базних функција обичног B-Spline сачуване су и у NURBS случају. Наиме, функције $R_{i,p}(\xi)$ немају негативне вредности и њихов збир у ма којој тачки сплајна једнак је јединици што се лако да проверити обзиром да је

$$\sum_{i=1}^N R_{i,p}(\xi) = \frac{\sum_{i=1}^N B_{i,p}(\xi)w_i}{\sum_{j=1}^N B_{j,p}(\xi)w_j} = \frac{w(\xi)}{w(\xi)} = 1 \quad (56)$$

Ако су тежински фактори у свим контролним тачкама међусобно једнаки, односно $w_i = const.$, $i = 1, 2, \dots, N$, онда NURBS базне функције $R_{i,p}(\xi)$ постају базне функције обичног сплајна $B_{i,p}(\xi)$ а самим тим NURBS обични B-Spline. Сагласно томе можемо закључити да је обични B-Spline специјалан случај NURBS-a.

Извод NURBS базне функције $R_{i,p}(\xi)$ у складу са изразом (55) одређен је као

$$R'_{i,p}(\xi) = w_i \frac{B'_{i,p}(\xi)w(\xi) - w'(\xi)B_{i,p}(\xi)}{w^2(\xi)} \quad (57)$$

Произвољне изводе базних функција који су потребни за проверу њихових континуитета, изразићемо у рекурзивној форми [Cot09] преко нижих извода у облику

$$\frac{d}{d\xi^k} R_{i,p}(\xi) = \frac{w_i \frac{d^k B_{i,p}(\xi)}{d\xi^k} - \sum_{l=1}^k \binom{k}{l} \frac{d^l w(\xi)}{d\xi^l} \frac{d^{(k-l)} R_{i,p}(\xi)}{d\xi^{(k-l)}}}{w(\xi)} \quad (58)$$

Како је тежинска функција $w(\xi)$ линеарна комбинација основних $B_{i,p}(\xi)$, из израза (55) и (58) непосредно следи да је континуитет NURBS база $R_{i,p}(\xi)$ на границама интервала унутар чворног вектора идентичан континуитету основних функција $B_{i,p}(\xi)$. С тога сви закључци у погледу континуитета основног B-Spline остају у важности и у рационалном случају.

4.1.7 Инсертовање чворова и елевација NURBS-а

Процедуре инсертовања чворова и подизања степена сплајн криве у потпуности могу бити спроведене и у NURBS случају. Како су ове процедуре у основи могуће само на обичном B-Spline то се у случају NURBS кривих захтевају додатне трансформације. Додатни кораци подразумевају превођење оригиналног рационалног сплајна из R^d простора у $d+1$ димензионални B-Spline као и пројекцију новодобијеног обичног сплајна на d димензионални NURBS.

Додавањем нових m чворова у већ постојећем чворном вектору $\xi^T = [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{N+p}, \xi_{N+p+1}]$ формулишемо вектор $\bar{\xi}^T = [\bar{\xi}_1 = \xi_1, \bar{\xi}_2, \dots, \bar{\xi}_{N+m+p}, \bar{\xi}_{N+m+p+1}]$ који генерише $N+m$ контролних тачака и базних функција. Тежинске Еуклидске координате $d+1$ димензионалног вектора положаја у складу са изометријским концептом изражене су као

$$\bar{r}^w(\xi) = \sum_{i=1}^{N+m} B_{i,p}(\xi) \mathbf{P}_i^w \quad (59)$$

Пројекцијом полиномске криве степена p на R^d простор резултира NURBS сплајн облика

$$\bar{r}(\xi) = \frac{\bar{r}^w(\xi)}{w(\xi)} = \sum_{i=1}^{N+m} R_{i,p}(\xi) \mathbf{P}_i \quad (60)$$

где је тежинска функција $w(\xi)$ сагласно изразу (59) једнака

$$w(\xi) = \sum_{i=1}^{N+m} B_{i,p}(\xi) w_i \quad (61)$$

У погледу елевације NURBS криве, Безиеова декомпозиција, подизање степена полиномских функција као и елиминација сувишних чворова спроводе се на $d+1$ димензионалном B-Spline. Као и у случају инсертовања чворова, базне функције елевације $B_{i,p+1}(\xi)$ изражене су матричном релацијом (44)_{1,2} преко Безиеових функција декомпонованог сплајна. Коначно пројективном трансформацијом елевираниог B-Spline на R^d простор резултира тражена елевираниа NURBS крива.

4.1.8 Рационални Spline површи

Рационални сплајн површи дефинисан је тензорским производом двеју фамилија линија од којих је бар једна NURBS карактера. Аналогним изразима (53) и (55) вектор положаја произвољне тачке такве површи у систему Декартових координата изразићемо као

$$\bar{r}(\xi, \eta) = \frac{\bar{r}^w(\xi, \eta)}{w(\xi, \eta)} = \frac{\sum_{i,j}^{N,M} N_{i,p}(\xi) M_{j,q}(\eta) w_{ij} \mathbf{P}_{ij}}{\sum_{k,l}^{N,M} N_{k,p}(\xi) M_{l,q}(\eta) w_{kl}} \quad (62)$$

односно

$$\bar{r}(\xi, \eta) = \sum_{i,j}^{N,M} R_{ij,pq}(\xi, \eta) \mathbf{P}_{ij} \quad (63)$$

где су

$$R_{ij,pq}(\xi, \eta) = \frac{N_{i,p}(\xi) M_{j,q}(\eta) w_{ij}}{\sum_{k,l}^{N,M} N_{k,p}(\xi) M_{l,q}(\eta) w_{kl}} = \frac{N_{i,p}(\xi) M_{j,q}(\eta) w_{ij}}{w(\xi, \eta)} \quad (64)$$

базне функције NURBS-а површи, док је

$$w(\xi, \eta) = \sum_{k,l}^{N,M} N_{k,p}(\xi) M_{l,q}(\eta) w_{kl} \quad (65)$$

функција тежинских фактора.

4.2 Основи Кирховљеве теорије танких еластичних љуски у сплајн параметарским координатама

Изогеометријска теорија љуски у најопштијим сплајн параметарским координата са становишта Кирховљеве и Миндлин Рајснерове теорије детаљно је приказана у књизи [Rad14]. С тога у овом одељку биће дат само кратак приказ Кирховљеве теорије, без упуштања у детаље извођења, за потребе формулације

изогеометријског Кирховљевог елемента љуске произвољног континуитета. Сплајн параметарске координате не представљају ништа друго до параметре неравномерног рационалног базног сплајна (NURBS-а) површи. NURBS сплајн омогућава нам егзактно описивање у математичком погледу широке класе површи произвољног облика укључујући и сасвим слободне форме. Ове координате су криволинијског карактера па рад са њима захтева коришћење тензорске алгебре. У циљу што једноставнијег праћења кинематике еквидистантне тачке као и тачке средње површи љуске веома је згодно да се њихове координате не мењају у току процеса деформације. Из тих разлога овим координатама приписаћемо и конвективни карактер [Rad14] [Vuk95] што у многоне поједностављује наше теоријске анализе.

4.2.1 Геометрија љуске

Геометрија средње површи љуске у односу на Декартов систем координата у општем случају дефинисана је рационалним B-Spline (NURBS) површи у облику

$$\vec{r} = \sum_{I,J}^{N,M} R_{IJ}(\xi, \eta) \vec{r}_{IJ} \quad (1)$$

где је

$$\vec{r} = [x \quad y \quad z] \quad (2)$$

вектор положаја ма које тачке површи, док су

$$\vec{r}_{IJ} = [x_{IJ} \quad y_{IJ} \quad z_{IJ}]$$

Декартове координате контролних тачака усвојеног B-Spline.

Израз (1) записаћемо и у тензорској нотацији као

$$x^m = \sum_{I,J=1}^{N,M} R_{IJ}(\theta^\alpha) x_{IJ}^m \quad (3)$$

при чему само индекси m и α имају тензорски карактер. Са θ^α обележили смо сплајн параметре ξ и η тако да је $\theta^1 = \xi$ а $\theta^2 = \eta$.

4.2.2 Метрика средње површи љуске

Ако усвојимо да су ξ и η параметар криволинијске θ^α координате онда одговарајуће базне векторе одредићемо као парцијалне изводе вектора положаја (1) по θ^α координатама, тј.

$$\vec{g}_\alpha = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta^\alpha} = x_{,\alpha}^m \vec{i}_m \quad (\alpha = 1, 2) \quad (4)$$

где је

$$x_{,\alpha}^m = \sum_{I,J}^{M,N} R_{IJ,\alpha} x_{IJ}^m \quad (5)$$

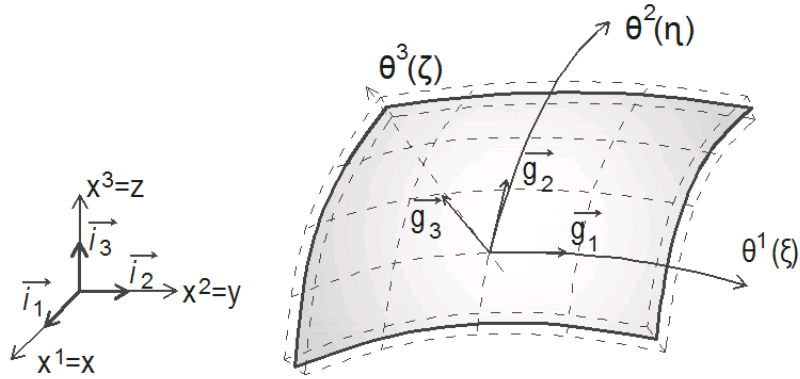
Координатама θ^α и базним векторима \vec{g}_α дефинисана је средња површ љуске. Тако дефинисана површ представља координатну површ ма којег тродимензионалног криволинијског координатног система коме припадају и θ^α координате.

Имајући на уму да је љуска тродимензионално материјално тело а не површ (2D) јер поседује и дебљину, у циљу употпуњавања тродимензионалног Еуклидског простора ради њеног представљања увешћемо поред θ^α и трећу координату. Не ради једноставности већ из захтева Кирховљеве теорије танких еластичних љуски за трећу координату усвајамо праволинијску координатну линију ζ управну на θ^α координатне линије Сл.4.16. Сходно томе базни вектор \vec{g}_3 једнак је реципрочном \vec{g}^3 вектору, јединичног је интензитета и није ништа друго до нормала у ма којој тачки површи, односно

$$\vec{g}_3 = \vec{g}^3 = \frac{1}{\sqrt{g}} (\vec{g}_1 \times \vec{g}_2) \quad (6)$$

или

$$\vec{g}_3 = \frac{1}{\sqrt{g}} x_{,1}^m x_{,2}^n e_{mnk} \vec{i}^k \quad (7)$$



Слика 4.16 Средња површ љуске

У претходном изразу ознаке $x_{,1}^m$ и $x_{,2}^m$ представљају парцијалне изводе Декартових координата NURBS-а површи по ξ, η параметрима, респективно, односно по усвојеним криволинијским θ^a координатама, док је g детерминанта метричког тензора.

Компоненте вектора \vec{g}_3 написаћемо и сажетијем облику као

$$\vec{g}_3 = x_{,3}^m \vec{i}_m \quad (8)$$

при чему је уведена ознака $x_{,3}^m$ једнака

$$x_{,3}^m = x_{m,3} = \frac{1}{\sqrt{g}} x_{,1}^k x_{,2}^l e_{klm} \quad (9)$$

На основу израза (4) и (8) за компоненте метричког тензора усвојеног координатног система добијамо

$$g_{ij} = \begin{bmatrix} x_{,1}^m x_{m,1} & x_{,1}^m x_{m,2} & 0 \\ x_{,2}^m x_{m,1} & x_{,2}^m x_{m,2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad g_{12} = g_{21} \quad (10)$$

одакле следи да је његова детерминанта једнака

$$g = \det g_{ij} = g_{11}g_{22} - g_{12}^2 \quad (11)$$

Реципрочни метрички тезор средње површи љуске одредићемо инверзијом тензора (10), односн

$$g^{ij} = \frac{1}{g} \begin{bmatrix} g_{22} & -g_{12} & 0 \\ -g_{12} & g_{11} & 0 \\ 0 & 0 & g \end{bmatrix} \quad (12)$$

4.2.2.1 Кристофелови коефицијенти повезаности друге врсте

Коефицијенте повезаности изогеометријске површи одредићемо диференцирањем базних вектора по криволинијским координатама, тј.

$$\vec{g}_{\alpha,\beta} = x_{,\alpha\beta}^m \vec{i}_m = \Gamma_{\alpha\beta k} \vec{g}^k = \Gamma_{\alpha\beta}^n \vec{g}_n \quad \Rightarrow \quad \Gamma_{\alpha\beta k} = x_{,\alpha\beta}^m \vec{i}_m \cdot \vec{g}_k \quad \Gamma_{\alpha\beta}^n = x_{,\alpha\beta}^m \vec{i}_m \cdot \vec{g}^n \quad (13)$$

при чему величине $\Gamma_{\alpha\beta k}$ и $\Gamma_{\alpha\beta}^k$ представљају Кристофелове симболе повезаности прве и друге врсте, респективно [Jar88] [Мић90] [Vuk95] [Rad14]. На основу претодних израза Кристофелове симболе прве врсте налазимо као

$$\Gamma_{\alpha\beta k} = x_{,\alpha\beta}^m \vec{i}_m \cdot x_{,n,k} \vec{i}^n = x_{,\alpha\beta}^m x_{,n,k} \delta_m^n = x_{,\alpha\beta}^m x_{m,k} \quad (14)$$

док су симболи друге врсте одређени на следећи начин

$$\Gamma_{\alpha\beta}^n = g^{nk} \Gamma_{\alpha\beta k} = g^{nk} x_{,\alpha\beta}^m x_{m,k} \quad (15)$$

Величине $x_{,\alpha\beta}^m$, сагласно релацијама (13)₃ имају вредности

$$x_{,\alpha\beta}^m = \Gamma_{\alpha\beta}^n \vec{g}_n \cdot \vec{i}^m = \Gamma_{\alpha\beta}^n x_{,n}^m \quad (16)$$

Имајући на уму да су реципрочни базни вектори једнаки

$$\vec{g}^1 = \frac{1}{\sqrt{g}} (\vec{g}_2 \times \vec{g}_3) \quad \vec{g}^2 = \frac{1}{\sqrt{g}} (\vec{g}_3 \times \vec{g}_1) \quad (17)$$

за њихове компоненте у односу на Декартове координате налазимо

$$\begin{aligned}\bar{g}^1 &= \frac{1}{\sqrt{g}} x_{,2}^m x_{,3}^k e_{mkn} \vec{i}^n = x_n^1 \vec{i}^n \Rightarrow x_n^1 = \frac{1}{\sqrt{g}} x_{,2}^m x_{,3}^k e_{mkn} \\ \bar{g}^2 &= \frac{1}{\sqrt{g}} x_{,3}^m x_{,1}^k e_{mkn} \vec{i}^n = x_n^2 \vec{i}^n \Rightarrow x_n^2 = \frac{1}{\sqrt{g}} x_{,3}^m x_{,1}^k e_{mkn}\end{aligned}\quad (18)$$

Коришћењем израза (13) и (18) за Кристофелове симболе друге врсте добијамо

$$\Gamma_{\alpha\beta}^n = x_{,\alpha\beta}^m \vec{i}_m x_k^n \vec{i}^k = x_{,\alpha\beta}^m x_k^n \delta_m^k = x_{,\alpha\beta}^m x_m^n \quad (19)$$

одакле упоређивањем са једначином (15) можемо закључити да је

$$x_m^n = g^{nk} x_{m,k} \quad (20)$$

Кристофелови симболи друге врсте $\Gamma_{\alpha\beta}^3$ за нас су од посебног значаја с обзиром да они претстављају кривине површи у систему криволинијских θ^a координата па ћемо их надаље обележавати посебним симболом $\Gamma_{\alpha\beta}^3 = b_{\alpha\beta}$. Компоненте тензора кривина можемо одредити и диференцирањем вектора нормале по криволинијским координатама [Vuk95], односно

$$\bar{g}_{3,\alpha} = -\Gamma_{3\alpha}^\mu \bar{g}_\mu = -b_\alpha^\mu \bar{g}_\mu \quad (\Gamma_{3\alpha}^3 = 0) \quad (21)$$

при чему су величине b_α^μ мешовите компоненте тензора кривине и са коваријантним компонентама повезане су уобичајеном метричком трансформацијом $b_\alpha^\mu = g^{\mu\nu} b_{\nu\alpha}$.

Промену реципрочних вектора по криволинијским координатама одредићемо диференцирањем услова ортогоналности базних и реципрочних вектора, тј

$$(\bar{g}^i \bar{g}_j)_{,\alpha} = (\delta_j^i)_{,\alpha} \Rightarrow \bar{g}_{j,\alpha}^i = -\Gamma_{j\alpha}^i \bar{g}^j \quad (22)$$

одакле можемо успоставити зависност облика

$$x_{k,\alpha}^i = -\Gamma_{j\alpha}^i x_k^j \quad (23)$$

4.2.3 Метрика еквидистантне површи љуске

Вектор положаја тачке на ζ одстојању од средње површи љуске написаћемо као

$$\vec{r} = \vec{r} + \zeta \vec{g}_3 \quad (24)$$

одакле следи да су тангенцијални базни вектори у еквидистантним површима љуске једнаки

$$\vec{g}_\alpha = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta^\alpha} = \vec{g}_\alpha - \zeta b_\alpha^\nu \vec{g}_\nu = (\delta_\alpha^\nu - \zeta b_\alpha^\nu) \vec{g}_\nu \quad (25)$$

Из претходног израза лако се да уочити да је вектор нормале управан и на тангенцијалне базне векторе у еквидистантним површима односно, праволинијска координата ζ је ортогонална на криволинијске координате θ^α у свакој тачки љуске.

Успостављање зависности између детерминанти метричких тензора, реципрочних базних вектора и метричких тензора као и елементарних површина еквидистантне и средње површи љуске претставља сложен математички задатак. С тога на овом месту само ћемо приложити наведене изразе, јер су нам потребни за даља извођења, а читаоци се упућују на књигу [Rad14], односно

$$\begin{aligned} \sqrt{g} &= g_0 \sqrt{g} & g_0 &= 1 - \zeta b_\nu^\nu + \zeta^2 b & b &= \det b_\alpha^\mu = \begin{vmatrix} b_1^1 & b_2^1 \\ b_1^2 & b_2^2 \end{vmatrix} = b_1^1 b_2^2 - b_1^2 b_2^1 \\ \vec{g}^\alpha &= C_\nu^\alpha \vec{g}^\nu & C_\nu^\alpha &= \sqrt{\frac{g}{g}} [(1 - \zeta b_\gamma^\nu) \delta_\nu^\alpha + \zeta b_\nu^\alpha] d\bar{a}_\alpha = \sqrt{\frac{g}{g}} da_\alpha = g_0 da_\alpha \\ \bar{g}^{\alpha\beta} &= (1 - \zeta b_\gamma^\nu + \zeta^2 b)^{-2} [(1 - \zeta b_\gamma^\nu)^2 g^{\alpha\beta} + 2\zeta (1 - \zeta b_\gamma^\nu) b^{\alpha\beta} + \zeta^2 b_\mu^\alpha b^{\beta\mu}] \end{aligned} \quad (26)$$

4.2.4 Тензор деформације средње површи љуске

Изогеометријски концепт теорије љуски подразумева да је не само оригинална већ и деформисана средња површ љуски дефинисана истим базним функцијама.

Следствено томе вектор померања произвољне тачке средње површи љуске описаћемо аналогним изразом (1), односно

$$\vec{u} = \sum_{I,J=1}^{N,M} R_{IJ}(\theta^\alpha) \vec{u}_{IJ} \quad (27)$$

где су

$$\vec{u} = u^m \vec{i}_m = u_m \vec{i}^m \quad \vec{u}_{IJ} = (u_{IJ})^m \vec{i}_m = (u_{IJ})_m \vec{i}^m \quad (28)$$

вектори померања произвољне тачке срење површи љуске и контролних тачака, респективно.

На основу израза (1) и (27) вектор положаја деформисане средње површи љуске изразићемо као

$$\vec{r}^* = \vec{r} + \vec{u} = \sum_{I,J=1}^{N,M} R_{IJ}(\theta^\alpha) \vec{r}_{IJ}^* \quad \Rightarrow \quad x^{*m} = x^m + u^m \quad (29)$$

где је

$$\vec{r}_{IJ}^* = \vec{r}_{IJ} + \vec{u}_{IJ} \quad \Rightarrow \quad x_{IJ}^{*m} = x_{IJ}^m + u_{IJ}^m \quad (30)$$

вектор положаја контролне тачке IJ у деформисаном положају.

За познату почетну геометрију (1), деформисани положај средње површи љуске једнозначно је одређен компоненталним померањима контролних тачака $u_{IJ}^m = (u_{IJ})_m$, одакле закључујемо да су она генералисане координате, односно степени слободе изогеометријског коначног елемента љуске. Ови степени слободе реферисани су у односу на глобални Декартов координатни систем.

Ако криволинијским координатама θ^α припишемо конвективни карактер [Rad14], [Vuk95] за базне векторе деформисаног положаја налазимо

$$\vec{g}_\alpha^* = \frac{\partial \vec{r}^*}{\partial \theta^\alpha} = \frac{\partial}{\partial \theta^\alpha} (\vec{r} + \vec{u}) = \vec{g}_\alpha + u_{,\alpha}^k \vec{i}_k \quad (31)$$

односно

$$\vec{g}_\alpha^* = x_{,\alpha}^{*k} \vec{i}_k = (x_{,\alpha}^k + u_{,\alpha}^k) \vec{i}_k \quad (32)$$

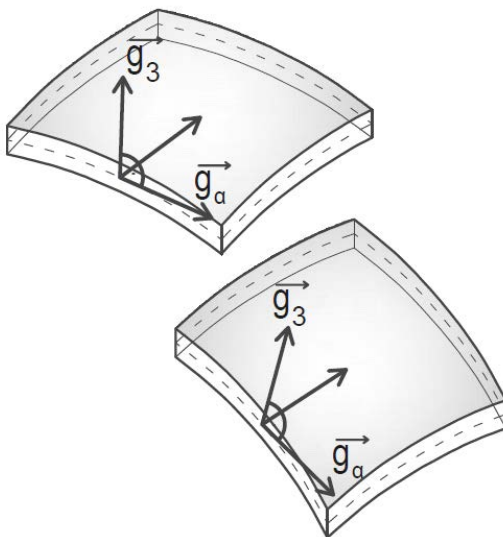
одакле следи да је метрички тензор деформисане средње површи љуске једнак

$$g_{\alpha\beta}^* = x_{,\alpha}^{*m} x_{,\beta}^{*n} g_{mn} \quad (33)$$

Кирхов-Лав хипотеза о управности попречног пресека љуске и у деформисаном положају као и непроменљивости њене дебљине обезбеђена је чињеницом да је попречни пресек деформисаног положаја дефинисан једним од базних вектора \vec{g}_α^* и јединичном нормалом \vec{g}^{*3} , Сл.4.17 која је одређена анологним изразом (7), тј.

$$\vec{g}_3^* = \vec{g}^{*3} = \frac{1}{\sqrt{g^*}} (\vec{g}_1^* \times \vec{g}_2^*) = \frac{1}{\sqrt{g^*}} x_{,1}^{*m} x_{,2}^{*n} e_{mnk} \vec{i}^k = x_{,k,3}^* \vec{i}^k \quad (34)$$

Величине $x_{,k,3}^*$ представљају Декартове компоненте вектора нормале на деформисану средњу површ љуске.



Слика 4.17 Кирховљев елемент љуске

Из претходног израза уочавамо да су оне функција њених координата и померања. Како нормала \vec{g}_3^* дефинише попречни пресек после деформације јасно је онда да је његов положај у простору одређен само кинематиком средње површи. Конвективни карактер криволонијских координата од суштинског је значаја за

изогеометријски коначни елемент танке љуске. Оне нам заправо омогућавају изналажење како коначне тако и инфинитезималне деформације искључиво из метрике средње површи љуске деформисаног и почетног положаја. На основу израза (10), (32) и (33) можемо закључити да су компоненте мембранске деформације функција глобалних степени слободе, односно померања контролних тачака изражена у односу на Декартов систем координата. Такође можемо закључити да такав коначни елемент нема потребе за увођењем ротација као генералисаних координата обзиром да је одговарајући континуитет обезбеђен искључиво базним функцијама $R_{ll}(\theta^\alpha)$ и померањима контролних тачака u_{ll}^m .

Деформације савијања, односно промене кривина средње површи љуске одредићемо из разматрања њене друге метричке форме у оригиналном и деформисаном положају. Као коначан закључак се намеће чињеница да овакав приступ омогућава третирање материјалног тела љуске као материјалне површи.

Имајући на уму да су компоненталне деформације у систему конвективних координата изражене Лагранжовим тензором деформације [Vuk95] [Gre60] [Rad14] [Rad96], односно

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(g_{\alpha\beta}^* - g_{\alpha\beta}) \quad (35)$$

коришћењем израза (17) и (40) налазимо да је

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(x_{,\alpha}^{*m} x_{m,\beta}^* - x_{,\alpha}^m x_{m,\beta}) \quad (36)$$

или изражено у функцији од компоненталних померања као

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}[(x_{,\alpha}^m + u_{,\alpha}^m)(x_{m,\beta} + u_{m,\beta}) - x_{,\alpha}^m x_{m,\beta}] = \frac{1}{2}(x_{,\alpha}^m u_{m,\beta} + x_{,\beta}^m u_{m,\alpha} + u_{,\alpha}^m u_{m,\beta}) \quad (37)$$

С обзиром да наше анализе подразумевају инфинитезималне (линаерне) деформације, претходни израз у том случају постаје

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(x_{,\alpha}^m u_{m,\beta} + x_{,\beta}^m u_{m,\alpha}) \quad (38)$$

4.2.5 Тензор деформације еквидистантне површи љуске - тензор промене кривина

Вектор положаја произвољне тачке на еквидистантном одстојању од средње површи љуске у деформисаној конфигурацији изразићемо као

$$\vec{r}^* = \vec{r} + \zeta \vec{g}_3^* \quad (39)$$

Диференцирањем претходне једначине по θ^α координатама за тангенцијалне базне векторе еквидистантних површи у деформисаном положају налазимо

$$\vec{g}_\alpha^* = \frac{\partial \vec{r}^*}{\partial \theta^\alpha} = \frac{\partial}{\partial \theta^\alpha} (\vec{r} + \zeta \vec{g}_3^*) = \vec{g}_\alpha - \zeta b_\alpha^{*v} \vec{g}_v^* = (\delta_\alpha^v - \zeta b_\alpha^{*v}) \vec{g}_v^* \quad (40)$$

где је $b_\alpha^{*v} = g^{*v\mu} b_{\alpha\mu}^*$ мешовита компонента тензора кривине деформисаног положаја, док су његове коваријантне компоненте једнаке

$$b_{\alpha\beta}^* = \vec{g}_{\alpha,\beta}^* \vec{g}^3 = x_{,\alpha\beta}^{*m} x_{m,3}^* \quad (41)$$

Комбинацијом израза (25) и (40) одредићемо Лагранжове компоненте тензора деформације у произвољној тачки љуске, односно

$$\bar{\varepsilon}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\vec{g}_{\alpha\beta}^* - \bar{g}_{\alpha\beta}) = \frac{1}{2} [(\delta_\alpha^v - \zeta b_\alpha^{*v})(\delta_\beta^\mu - \zeta b_\beta^{*\mu}) g_{v\mu}^* - (\delta_\alpha^v - \zeta b_\alpha^v)(\delta_\beta^\mu - \zeta b_\beta^\mu) g_{v\mu}] \quad (42)$$

одакле занемаривањем чланова уз ζ^2 добијамо

$$\bar{\varepsilon}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} [(g_{\alpha\beta}^* - g_{\alpha\beta}) - 2\zeta (b_{\alpha\beta}^* - b_{\alpha\beta})] \quad (43)$$

односно

$$\bar{\varepsilon}_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta} - \zeta \kappa_{\alpha\beta} \quad (44)$$

где је

$$\kappa_{\alpha\beta} = b_{\alpha\beta}^* - b_{\alpha\beta} \quad (45)$$

деформација савијања, односно тензор промене кривина средње површи љуске.

На основу израза (41) и (45) деформацију савијања написаћемо у облику

$$\kappa_{\alpha\beta} = x_{,\alpha\beta}^{*m} x_{m,3}^* - x_{,\alpha\beta}^m x_{m,3} \quad (46)$$

Како је

$$x_{,\alpha\beta}^{*m} = x_{,\alpha\beta}^m + u_{,\alpha\beta}^m \quad (47)$$

претходни израз постаје

$$\kappa_{\alpha\beta} = (x_{,\alpha\beta}^m + u_{,\alpha\beta}^m)(x_{m,3} + u_{m,3}) - x_{,\alpha\beta}^m x_{m,3} = x_{,\alpha\beta}^m u_{m,3} + x_{,3}^m u_{m,\alpha\beta} + u_{,\alpha\beta}^m u_{m,3} \quad (48)$$

Једначином (48) промене кривина средње површи љуске у систему криволинијских θ^α координата изражене су у функцији од Декартових координата и померања. Израз (48) је нелинеарног карактера јер у њему фигуришу производи градијената померања. Занемаривањем члана $u_{,\alpha\beta}^m u_{m,3}$ дефинишемо линеарну форму тензора промене кривина, односно

$$\kappa_{\alpha\beta} \approx x_{,\alpha\beta}^m u_{m,3} + x_{,3}^m u_{m,\alpha\beta} \quad (49)$$

Величину $u_{m,3}$ одредићемо из анализе вектора нормале деформисаног положаја, односно њене Декартове компоненте $x_{m,3}^*$, тј.

$$x_{m,3}^* = \frac{1}{\sqrt{g^*}} x_{,1}^{*k} x_{,2}^{*l} e_{klm} = x_{m,3} + u_{m,3} \quad (50)$$

Једноставним увидом у израз (50) лако се да закључити да је $x_{m,3}^*$ а самим тим и $u_{m,3}$ нелинеарна функција градијената померања. С тога, извршићемо линеаризацију функције $x_{m,3}^*$ Тејлоровим развојем у околини почетног положаја, односно

$$x_{m,3}^* \approx x_{m,3} + \left(\frac{\partial x_{m,3}^*}{\partial u_{,\alpha}^k} \right)_{u^k=0} u_{,\alpha}^k \quad (51)$$

одакле следи да је линеаризована вредност величине $u_{m,3}$ једнака

$$u_{m,3} = \left(\frac{\partial x_{m,3}^*}{\partial u_{,\alpha}^k} \right)_{u^k=0} u_{,\alpha}^k \quad (52)$$

Развијањем члана $(\partial x_{m,3}^* / \partial u_{,\alpha}^k)_{u^k=0}$ [Rad14], једначину (52) написаћемо у облику

$$u_{m,3} = -(x_m^1 u_{,1}^k + x_m^2 u_{,2}^k) x_{k,3} \quad (53)$$

Заменом израза (53) у једначину (49) тензор промене кривина средње површи љуске у условима Кирховљеве теорије коначно ћемо напистати у облику

$$\kappa_{\alpha\beta} = x_{,3}^m u_{m,\alpha\beta} - x_{,\alpha\beta}^m x_{k,3} (x_m^1 u_{,1}^k + x_m^2 u_{,2}^k) \quad (54)$$

$$\kappa_{\alpha\beta} = x_{,3}^m u_{m,\alpha\beta} - x_{,\alpha\beta}^m x_m^v u_{k,v} x_{,3}^k \quad (55)$$

На крају релацију (16), тензор промене кривине средње површи љуске у условима Кирховљеве теорије изразићемо као

$$\begin{aligned} \kappa_{\alpha\beta} &= x_{,3}^m u_{m,\alpha\beta} - \Gamma_{\alpha\beta}^n x_{,n}^m x_m^v u_{k,v} x_{,3}^k = \\ &= x_{,3}^m u_{m,\alpha\beta} - \Gamma_{\alpha\beta}^n \delta_n^v u_{k,v} x_{,3}^k = x_{,3}^m u_{m,\alpha\beta} - \Gamma_{\alpha\beta}^v u_{k,v} x_{,3}^k \end{aligned}$$

односно, елегантније записано у облику

$$\kappa_{\alpha\beta} = x_{,3}^m (u_{m,\alpha\beta} - \Gamma_{\alpha\beta}^v u_{m,v}) \quad (56)$$

4.3 Формулација изогеометријског коначног елемента љуске

4.3.1 Напонско - деформацијске релације

За линеарно еластично материјално тело везе између Пиолиних компонената напона друге врсте и Лагранжових деформација успостављене су генералисаним Хуковим законом, тј

$$\sigma_j^i = 2\mu \varepsilon_j^i + \lambda \delta_j^i \varepsilon_m^m \quad (57)$$

при чему

$$\mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (58)$$

представљају Ламеове параметре, E и ν материјалне константе: Јангов модул еластичности и Поасонов кефицијент, респективно док је G модул смицања. Релацију (57) можемо написати и у облику контраваријантних компонената напона и коваријантних компоненти деформација, односно

$$\sigma^{ij} = 2\mu g^{ik} g^{jl} \varepsilon_{kl} + \lambda g^{ij} g^{kl} \varepsilon_{kl} \quad (59)$$

Кирховљева техничка теорија љуски претпоставља равно стање напона што има за последицу да је

$$\sigma_3^3 = 2\mu \varepsilon_3^3 + \lambda(\varepsilon_\nu^\nu + \varepsilon_3^3) = 0 \quad (60)$$

одакле следи да је

$$\varepsilon_3^3 = -\frac{\nu}{1-\nu} \varepsilon_\nu^\nu \quad (61)$$

Комбинацијом израза (61) и (59) компоненте напона танке еластичне љуске изразићемо преко компоненталних деформација у облику

$$\sigma^{\alpha\beta} = 2\mu(g^{\alpha\nu} g^{\beta\gamma} + \frac{\nu}{1-\nu} g^{\alpha\beta} g^{\nu\gamma}) \varepsilon_{\nu\gamma} \quad (62)$$

4.3.2 Пресечне силе

Интеграцијом вектора напона по дебљини љуске дефинишемо одговарајући вектор пресечних сила, односно

$$\vec{R}^\alpha = \int_{-h/2}^{h/2} \vec{\sigma}^\alpha g_0 d\zeta \quad (63)$$

чије су компоненте једнаке

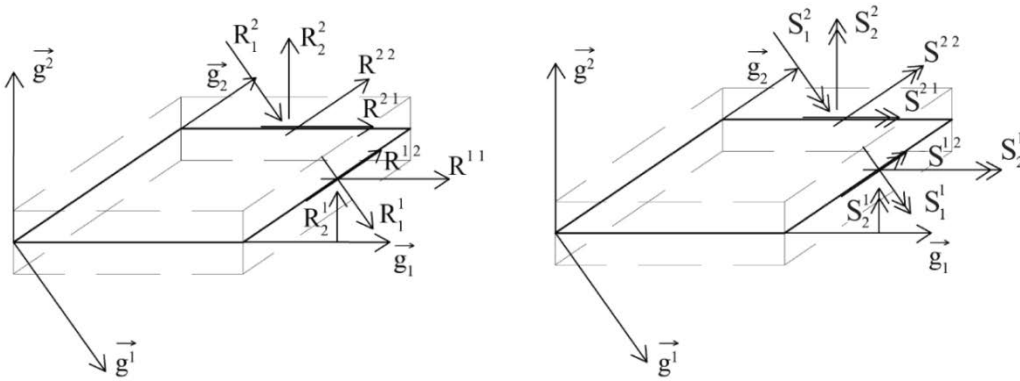
$$R^{\alpha\beta} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma^{\alpha\nu} (\delta_\nu^\beta - \zeta b_\nu^\beta) g_0 d\zeta \quad (64)$$

тако да је $\vec{R}^\alpha = R^{\alpha\beta} \vec{g}_\beta$.

Уважавајући релацију (26)₂ једначина (64) постаје

$$R^{\alpha\beta} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma^{\alpha\nu} (\delta_\nu^\beta - \zeta b_\nu^\beta) (1 - \zeta b_\mu^\mu + \zeta^2 b) d\zeta \quad (65)$$

одакле одмах уочавамо да тензор мембранских пресечних сила није симетричан обзиром да је $R^{\alpha\beta} \neq R^{\beta\alpha}$. Силе $R^{\alpha\beta}$ делују у пресецима љуске са нормалом \vec{g}^α у правцу базних вектора \vec{g}_β , Сл.4.18.



Слика 4.18 Пресечне силе

На исти начин дефинисаћемо и вектор момента у пресеку са нормалом \vec{g}^α , тј.

$$\begin{aligned} \vec{S}^\alpha &= \int_{-h/2}^{h/2} \vec{\rho} \times \vec{\sigma}^\alpha \sqrt{g} d\zeta = \int_{-h/2}^{h/2} [\zeta \vec{g}_3 \times \sigma^{\alpha\nu} (\delta_\nu^\mu - b_\nu^\mu) \vec{g}_\mu] g_0 d\zeta = \\ &= \varepsilon_{3\mu\beta} \left[\int_{-h/2}^{h/2} \zeta \sigma^{\alpha\nu} (\delta_\nu^\mu - b_\nu^\mu) g_0 d\zeta \right] \vec{g}^\beta = S_\beta^\alpha \vec{g}^\beta \end{aligned} \quad (66)$$

при чему S_β^α представљају мешовите компоненте тензора момената (Сл.3) и имају вредности

$$S_\beta^\alpha = \varepsilon_{3\mu\beta} \int_{-h/2}^{h/2} \zeta \sigma^{\alpha\nu} (\delta_\nu^\mu - \zeta b_\nu^\mu) (1 - \zeta b_\gamma^\gamma + \zeta^2 b) d\zeta \quad (67)$$

Компонентални моменти S_{β}^{α} делују у пресеку са нормалом \vec{g}^{α} у правцу реципрочног вектора \vec{g}^{β} , Сл.4.18.

Кирховљева теорија љуски у складу са својом хипотезом о управности попречног пресека на средњу површ љуске и после деформације за силе $R^{\alpha 3}$ пружа тривијално решење. Имајући на уму да равнотежа ма којег диференцијалног елемента љуске у правцу нормале на површи не може бити задовољена без смичићих сила, нетривијалне вредности $R^{\alpha 3}$ сила одређују се из равнотежних једначина о нултој вредности главног момента сила посматраног диференцијалног елемента.

Лако се да уочити да су подинтегралне функције у изразима (65) и (67) поприлично сложене. Из тих разлога потребно је дефинисати једноставнију форму пресечних сила у циљу ефикаснијег формулисања изогеометријског коначног елемента љуске. Ако изоставимо члан ζb_{μ}^{ν} у изразу (67) онда компоненте вектора момента можемо написати у облику

$$M_{\beta}^{\alpha} = \varepsilon_{3\mu\beta} \int_{-h/2}^{h/2} \zeta \sigma^{\alpha\mu} (1 - \zeta b_{\gamma}^{\nu} + \zeta^2 b) d\zeta \quad (68)$$

Множењем обе стране претходне једначине са $\varepsilon^{3\mu\nu}$, односно

$$\varepsilon^{3\mu\nu} M_{\beta}^{\alpha} = \delta_{\beta}^{\nu} \int_{-h/2}^{h/2} \zeta \sigma^{\alpha\mu} g_0 d\zeta \quad (69)$$

успоставићемо следећу зависност

$$\int_{-h/2}^{h/2} \zeta \sigma^{\alpha\mu} g_0 d\zeta = \varepsilon^{3\mu\nu} \delta_{\nu}^{\beta} M_{\beta}^{\alpha} = \varepsilon^{3\mu\beta} M_{\beta}^{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{g}} e^{3\mu\beta} M_{\beta}^{\alpha} \quad (70)$$

Увођење ознаке

$$\bar{M}^{\alpha\mu} = \frac{1}{\sqrt{g}} e^{3\mu\beta} M_{\beta}^{\alpha} = \int_{-h/2}^{h/2} \zeta \sigma^{\alpha\mu} g_0 d\zeta \quad (71)$$

компоненте пресечних сила написаћемо као

$$R^{\alpha\beta} = N^{\alpha\beta} - b_\nu^\beta \bar{M}^{\alpha\nu} = N^{\alpha\beta} - b_\nu^\beta \varepsilon^{3\nu\mu} M_\mu^\alpha \quad (72)$$

где је

$$N^{\alpha\beta} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma^{\alpha\beta} (1 - \zeta b_\lambda^\lambda + \zeta^2 b) d\zeta = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma^{\alpha\beta} g_0 d\zeta \quad (73)$$

при чему треба нагласити да величине $\bar{M}^{\alpha\nu}$ не представљају коваријантне компоненте тензора момента и не подлежу стандардној метричкој трансформацији. Из израза (73) и (71) да се приметити да су величине $N^{\alpha\beta}$ и $\bar{M}^{\alpha\beta}$ симетричне у односу на индексе α и β . Другим речима упрошћене мембранске силе $N^{\alpha\beta}$ и momenti $\bar{M}^{\alpha\beta}$ су симетричног карактера што је за нас од посебног значаја при разматрању енергије елемента љуске.

Релацију (62) написаћемо и у погоднијем облику за даља извођења

$$\sigma^{\alpha\beta} = D^{\alpha\mu\beta\nu} \varepsilon_{\mu\nu} \quad (74)$$

где је

$$D^{\alpha\mu\beta\nu} = 2\mu \left(g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} + \frac{\nu}{1-\nu} g^{\alpha\beta} g^{\mu\nu} \right) \quad (75)$$

конститутивни тензор линеарне еластичности, односно генерализани Хуков закон за случај равнoг стања напона.

Матричним записом, претходне једначине на произвољном ζ одстојању од средње површи љуске представимо јединственом релацијом

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \bar{\mathbf{D}} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (76)$$

где су

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}^T = [\bar{\sigma}^{11} \quad \bar{\sigma}^{22} \quad \bar{\sigma}^{12}] \quad \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^T = [\bar{\varepsilon}_{11} \quad \bar{\varepsilon}_{22} \quad \bar{\gamma}_{12}] \quad (77)$$

вектори напона и деформација, респективно, док су елементи матрице \mathbf{D} једнаки

$$\bar{\mathbf{D}} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} \bar{g}^{11}\bar{g}^{11} & \bar{g}^{12}\bar{g}^{12} + \nu\bar{g}^{-1} & \bar{g}^{11}\bar{g}^{12} \\ \bar{g}^{21}\bar{g}^{21} + \nu\bar{g}^{-1} & \bar{g}^{22}\bar{g}^{22} & \bar{g}^{22}\bar{g}^{12} \\ \bar{g}^{11}\bar{g}^{21} & \bar{g}^{22}\bar{g}^{21} & \bar{g}^{12}\bar{g}^{21} + \frac{(1-\nu)\bar{g}^{-1}}{2} \end{bmatrix} \quad (78)$$

На основу једначина (26)₆ и (75) да се уочити да су на произвољном одстојању од средње површи љуске компоненте напона $\bar{\sigma}^{\alpha\beta}$ функцијама четвртог реда по ζ координати изражене преко деформације и метрике средње површи. Из тих разлога извршићемо поједностављење реципрочног метричког тензора $\bar{g}^{\alpha\beta}$ задржавањем само линеарног члана [Rad14] [Vuk95], односно

$$\bar{g}^{\alpha\beta} \approx g^{\alpha\beta} + 2\zeta b^{\alpha\beta} \quad (79)$$

Заменом једначине (79) у аналогну једначину (75), добијамо да је

$$\bar{D}^{\alpha\mu\beta\nu} = D_1^{\alpha\mu\beta\nu} + 2\zeta D_2^{\alpha\mu\beta\nu} + 4\zeta^2 D_3^{\alpha\mu\beta\nu} \quad (80)$$

где је

$$\begin{aligned} D_1^{\alpha\mu\beta\nu} &= 2\mu(g^{\alpha\mu}g^{\beta\nu} + \frac{\nu}{1-\nu}g^{\alpha\beta}g^{\mu\nu}) & D_3^{\alpha\mu\beta\nu} &= 2\mu(b^{\alpha\mu}b^{\beta\nu} + \frac{\nu}{1-\nu}b^{\alpha\beta}b^{\mu\nu}) \\ D_2^{\alpha\mu\beta\nu} &= 2\mu[(g^{\alpha\mu}b^{\beta\nu} + b^{\alpha\mu}g^{\beta\nu}) + \frac{\nu}{1-\nu}(g^{\alpha\beta}b^{\mu\nu} + b^{\alpha\beta}g^{\mu\nu})] \end{aligned} \quad (81)$$

Коришћењем једначина (73) и (71) поједностављене форме пресечних сила $N^{\alpha\beta}$ и $\bar{M}^{\alpha\beta}$ записаћемо у облику

$$N^{\alpha\beta} = D_M^{\alpha\mu\beta\nu} \varepsilon_{\mu\nu} - D_{MB}^{\alpha\mu\beta\nu} \kappa_{\mu\nu} \quad \bar{M}^{\alpha\beta} = D_{MB}^{\alpha\mu\beta\nu} \varepsilon_{\mu\nu} - D_B^{\alpha\mu\beta\nu} \kappa_{\mu\nu} \quad (82)$$

где су

$$\begin{aligned}
D_M^{\alpha\mu\beta\gamma} &= \left[\left(h + \frac{h^3}{12} b \right) D_1^{\alpha\mu\beta\gamma} - \frac{h^3}{6} b_\lambda^\lambda D_2^{\alpha\mu\beta\gamma} + \left(\frac{h^3}{3} + \frac{h^5}{20} b \right) D_3^{\alpha\mu\beta\gamma} \right] \\
D_{MB}^{\alpha\mu\beta\gamma} &= \left[\left(\frac{h^3}{6} + \frac{h^5}{40} b \right) D_2^{\alpha\mu\beta\gamma} - b_\lambda^\lambda \left(\frac{h^3}{12} D_1 + \frac{h^5}{20} D_3 \right)^{\alpha\mu\beta\gamma} \right] \\
D_B^{\alpha\mu\beta\gamma} &= \left[\left(\frac{h^3}{12} + \frac{h^5}{80} b \right) D_1^{\alpha\mu\beta\gamma} + \frac{h^5}{20} D_3^{\alpha\mu\beta\gamma} - \frac{h^5}{40} b_\lambda^\lambda D_2^{\alpha\mu\beta\gamma} \right]
\end{aligned} \tag{83}$$

мембранска, мешовита и крутост љуске на савијање, респективно.

У случају елемента плоче, обзиром да су њене кривине $b^{\alpha\beta}$ једнаке нули, резултирају следеће једнакости

$$\begin{aligned}
D_2^{\alpha\mu\beta\gamma} &= D_3^{\alpha\mu\beta\gamma} = 0 \\
D_M^{\alpha\mu\beta\gamma} &= h D_1^{\alpha\mu\beta\gamma} \quad D_B^{\alpha\mu\beta\gamma} = \frac{h^3}{12} D_1^{\alpha\mu\beta\gamma} \quad D_{MB}^{\alpha\mu\beta\gamma} = 0
\end{aligned}$$

Увођењем вектора мембранских, трансверзалних сила и момената савијања, односно

$$\mathbf{N}^T = \begin{bmatrix} N^{11} & N^{22} & N^{12} \end{bmatrix} \quad \bar{\mathbf{M}}^T = \begin{bmatrix} \bar{M}^{11} & \bar{M}^{22} & \bar{M}^{12} \end{bmatrix} \tag{84}$$

и вектора деформација

$$\boldsymbol{\varepsilon}^T = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{22} & \gamma_{12} \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\kappa}^T = \begin{bmatrix} -\kappa_{11} & -\kappa_{22} & -2\kappa_{12} \end{bmatrix} \tag{85}$$

релације (82) написаћемо у матричном облику, тј

$$\mathbf{N} = \mathbf{D}_M \boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{D}_{MB} \boldsymbol{\kappa} \quad \bar{\mathbf{M}} = \mathbf{D}_{MB} \boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{D}_B \boldsymbol{\kappa} \tag{86}$$

при чему матрице $\mathbf{D}_M, \mathbf{D}_{MB}, \mathbf{D}_B$ и садрже мембранске, мешовите и савијајуће материјалне крутости љуске, респективно.

Једначине (86) можемо изразити и сажетије у форми

$$\mathbf{R} = \mathbf{D} \mathbf{E} \quad \text{где су} \tag{87}$$

$$\mathbf{R}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{N}^T & \mathbf{M}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N^{11} & N^{22} & N^{12} & \bar{M}^{11} & \bar{M}^{22} & \bar{M}^{12} \end{bmatrix} \quad (88)$$

$$\mathbf{E}^T = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^T & -\boldsymbol{\kappa}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{22} & \gamma_{12} & -\kappa_{11} & -\kappa_{22} & -2\kappa_{12} \end{bmatrix}$$

вектори генерализаних сила и деформација елемента љуске, док је

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_M & \mathbf{D}_{MB} \\ \mathbf{D}_{MB}^T & \mathbf{D}_B \end{bmatrix} \quad (89)$$

његова материјална матрица крутости.

4.3.3 Принцип виртуалних померања - Матрица крутости изогеометријског коначног елемента Кирховљеве љуске

Унутрашњи виртуални рад коначног елемента изразићемо као

$$\delta R_u = \int_V \bar{\sigma}^{\alpha\beta} \delta \bar{\varepsilon}_{\beta\alpha} dV \quad (90)$$

где је V запремина елемента. Диференцијални елемент запремине на произвољном одстојању од средње површи љуске једнак је

$$dV = (\bar{\mathbf{g}}_1 \times \bar{\mathbf{g}}_2) \cdot \bar{\mathbf{g}}_3 d\xi d\eta d\zeta = \sqrt{\bar{g}} d\xi d\eta d\zeta = g_0 \sqrt{g} d\xi d\eta d\zeta = (g_0 d\zeta) dA \quad (91)$$

где је $dA = \sqrt{g} d\xi d\eta$.

Интеграције једначине (90) по дебљини љуске горњи израз постаје интеграл по површини елемента A , тј.

$$\delta R_u = \int_{A-h/2}^{h/2} \int_A [\bar{\sigma}^{\alpha\beta} (\delta \varepsilon_{\beta\alpha} - \zeta \delta \kappa_{\beta\alpha})] g_0 d\zeta dA \quad (92)$$

односно

$$\delta R_u = \int_A (N^{\alpha\beta} \delta \varepsilon_{\beta\alpha} - \bar{M}^{\alpha\beta} \delta \kappa_{\beta\alpha}) dA \quad (93)$$

Из претходне једначине произилази веома важан закључак да мембранске силе $R^{\alpha\beta}$ и моменти савијања S_β^α нису енергетски коњуговане величине са мембранском деформацијом $\varepsilon_{\alpha\beta}$ и деформацијом савијања $\kappa_{\alpha\beta}$ средње површи љуске већ да су то њихове упрошћене форме, односно поједини њихови делови $N^{\alpha\beta}$ и $\bar{M}^{\alpha\beta}$, респективно. Другим речима виртуални рад на коначном елементу љуске последица је рада мембранских сила $N^{\alpha\beta}$ на мембранској деформацији $\varepsilon_{\alpha\beta}$ и момената савијања $\bar{M}^{\alpha\beta}$ на промени кривине средње површи.

Коришћењем ознака (88) унутрашњи виртуални рад елемента љуске у условима инфинитезималних деформација написаћемо у облику

$$\delta R_u = \int_A \mathbf{R}^T \delta \mathbf{E} dA = \int_A \mathbf{E}^T \mathbf{D} \delta \mathbf{E} dA \quad (94)$$

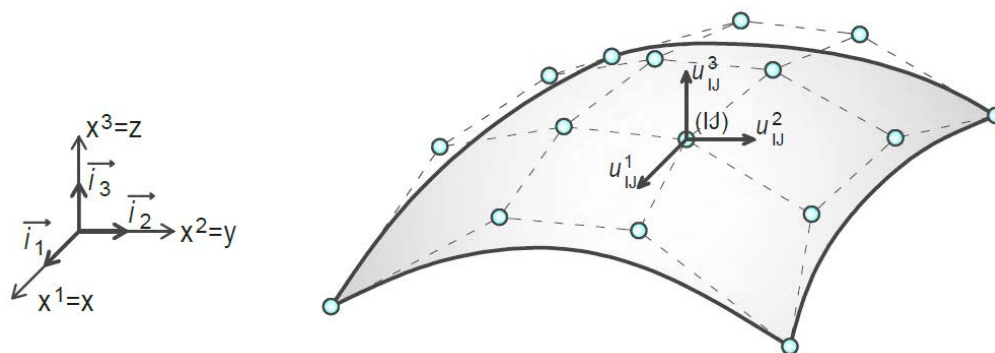
одакле стандардном процедуром методе коначних елементата, односно

$$\delta R_u = \int_A \mathbf{E}^T \mathbf{D} \delta \mathbf{E} dA = \mathbf{q}^T \left(\int_A \mathbf{B}_L^T \mathbf{D} \mathbf{B}_L dA \right) \delta \mathbf{q} = \mathbf{q}^T \mathbf{K}_L \delta \mathbf{q} \quad (95)$$

резултира матрица крутости изогеометријског коначног елемента, тј

$$\mathbf{K}_L = \int_A \mathbf{B}_L^T \mathbf{D} \mathbf{B}_L dA \quad (96)$$

где је \mathbf{B}_L NURBS матрица трансформације линеарне деформације средње површи љуске.



Слика 4.19 Кирховљев коначни елемент љуске

Вектор генерализаних померања коначног елемента љуске \mathbf{q} приказаћемо у облику

$$\mathbf{q}^T = [\mathbf{q}_{11}^T \quad \mathbf{q}_{12}^T \quad \dots \quad \mathbf{q}_{IJ}^T \quad \dots \quad \mathbf{q}_{NM}^T] \quad (97)$$

чији ма који субвектор \mathbf{q}_{IJ} садржи генерализана померања, односно степене слободе IJ –те контролне тачке, Сл.4.19.

$$\mathbf{q}_{IJ}^T = [u_{IJ}^1 \quad u_{IJ}^2 \quad u_{IJ}^3] \quad (98)$$

4.3.4 Оператори трансформације деформација

Матрица трансформације \mathbf{V}_L NURBS базним функцијама трансформише компоненте мембранске деформације и деформације савијања на глобалне степене слободе контролних тачака. Вектор деформације средње површи љуске приказаћемо као

$$\mathbf{E} = \sum_{m=1}^3 \mathbf{L}_m \mathbf{u}_{12}^m \quad (99)$$

где је оператор деформације \mathbf{L}_m облика

$$\mathbf{L}_m = \begin{bmatrix} x_{,1}^m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_{,2}^m & 0 & 0 & 0 \\ x_{,2}^m & x_{,1}^m & 0 & 0 & 0 \\ x_{,11}^k x_k^1 x_{m,3} & x_{,11}^k x_k^2 x_{m,3} & -x_{,3}^m & 0 & 0 \\ x_{,22}^k x_k^1 x_{m,3} & x_{,22}^k x_k^2 x_{m,3} & 0 & -x_{,3}^m & 0 \\ x_{,12}^k x_k^1 x_{m,3} & x_{,12}^k x_k^2 x_{m,3} & 0 & 0 & -x_{,3}^m \end{bmatrix} \quad (100)$$

док је

$$(\mathbf{u}_{12}^m)^T = [u_{,1}^m \quad u_{,2}^m \quad u_{,11}^m \quad u_{,22}^m \quad u_{,12}^m]$$

Укупни вектор \mathbf{u}_{12} изразићемо преко генерализаних померања елемента љуске, тј

$$\mathbf{u}_{12} = \mathbf{B}_{u\varphi} \mathbf{q} \quad (101)$$

где је

$$\mathbf{u}_{12} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{12}^1 \\ \mathbf{u}_{12}^2 \\ \mathbf{u}_{12}^3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_{u\varphi} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1^1 & \dots & \mathbf{B}_{IJ}^1 & \dots & \mathbf{B}_{NM}^1 \\ \mathbf{B}_1^2 & \dots & \mathbf{B}_{IJ}^2 & \dots & \mathbf{B}_{NM}^2 \\ \mathbf{B}_1^3 & \dots & \mathbf{B}_{IJ}^3 & \dots & \mathbf{B}_{NM}^3 \end{bmatrix} \quad (102)$$

при чему субматрице произвољне контролне тачке \mathbf{B}_{IJ}^m садрже следеће елементе

$$\mathbf{B}_{IJ}^1 = \begin{bmatrix} R_{IJ,1} & 0 & 0 \\ R_{IJ,2} & 0 & 0 \\ R_{IJ,11} & 0 & 0 \\ R_{IJ,22} & 0 & 0 \\ R_{IJ,12} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_{IJ}^2 = \begin{bmatrix} 0 & R_{IJ,1} & 0 \\ 0 & R_{IJ,2} & 0 \\ 0 & R_{IJ,11} & 0 \\ 0 & R_{IJ,22} & 0 \\ 0 & R_{IJ,12} & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_{IJ}^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & R_{IJ,1} \\ 0 & 0 & R_{IJ,2} \\ 0 & 0 & R_{IJ,11} \\ 0 & 0 & R_{IJ,22} \\ 0 & 0 & R_{IJ,12} \end{bmatrix} \quad (103)$$

Увођењем оператора укупне деформације, тј

$$\mathbf{L} = [\mathbf{L}_1 \quad \mathbf{L}_2 \quad \mathbf{L}_3] \quad (104)$$

релацију (99) коначно можемо представити у облику

$$\mathbf{E} = \mathbf{L} \mathbf{u}_{12} = \mathbf{L} \mathbf{B}_{u\varphi} \mathbf{q} = \mathbf{B}_L \mathbf{q} \quad (105)$$

где је

$$\mathbf{B}_L = \mathbf{L} \mathbf{B}_{u\varphi} \quad (106)$$

тражена матрица трансформације деформација.

4.3.5 Еквивалентне контролне силе

Рад спољашњих сила на виртуалним померањима и обртањима средње површи љуске изразићемо као

$$\delta R_s = - \int_A \vec{p}(\theta^\alpha) \delta \vec{u}(\theta^\alpha) dA \quad (107)$$

при чему вектор

$$\vec{p} = p^k \vec{i}_k \quad (108)$$

репрезентује расподељена спољашња оптерећења.

Коришћењем изогеометријског описа кинематичког поља љуске једначина (114) постаје

$$\delta R_s = - \int_A [\vec{p}(\theta^\alpha) (\sum_{I,J}^{N,M} R_{IJ}(\theta^\alpha) \delta \vec{u}_{IJ})] dA \quad (109)$$

односно

$$\delta R_s = - \sum_{I,J}^{N,M} \int_A R_{IJ}(\theta^\alpha) \vec{p}(\theta^\alpha) \delta \vec{u}_{IJ} dA \quad (110)$$

Заменом расподељених терета и момената генералисаним вектором расподељених оптерећења, тј.

$$\mathbf{p}^T = [p^1 \quad p^2 \quad p^3] \quad (111)$$

претходни израз можемо представити и у облику

$$\delta R_s = - \sum_{I,J}^{N,M} [\int_A R_{IJ}(\theta^\alpha) \mathbf{p}^T(\theta^\alpha) dA] \delta \mathbf{q}_{IJ} \quad (112)$$

или

$$\delta R_s = - \sum_{I,J}^{N,M} \mathbf{Q}_{IJ}^T \delta \mathbf{q}_{IJ} \quad (113)$$

где је

$$\mathbf{Q}_{IJ} = \int_A R_{IJ}(\theta^\alpha) \mathbf{p}(\theta^\alpha) dA \quad (114)$$

вектор еквивалентних сила IJ -те контролне тачке елемента љуске.

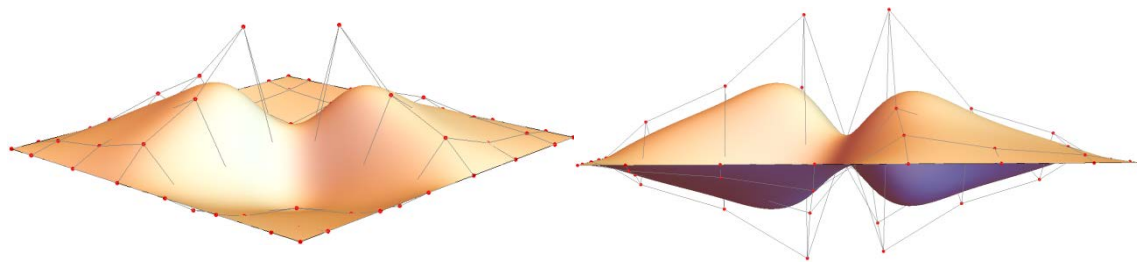
4.4 Нумерички пример са изогеометријским Кирховљевим елементом љуске

4.4.1 Бирационални Кирховљеви елементи љуске

На основу изложеног теоријског концепта коришћењем програмског пакета *Wolfram Mathematica* формулисан је Кирховљев изогеометријски коначни елемент љуске. Формулисаним елементом спровешћемо нумеричку анализу експериментално посматраних *rapid prototyping* – физичких модела и извршити поређење добијених експерименталних и нумеричких резултата.

Верификација модела љуске слободне форме обухвата један пример. Геометрија љуске са положајем контролних тачака је приказана на Сл.4.20. Комплетна нумеричка анализа и улазни подаци везани за геометрију су спроведени користећи сопствени код написан у наведеном софтверском пакету, Прилог 1.

На основу експерименталних истраживања на усвојеном материјалу добијене су следеће материјалне карактеристике, које су имплементиране у нумеричку анализу: модул еластичности $E=10$ GPa и Поасонов коефицијент $\nu=0.30$.



Слика 4.20. Почетна геометрија љуске са контролним тачкама

С обзиром да изложена теорија Кирховљеве љуске важи само за статички линеарну анализу, као и због тога што је структура у експерименту показала одређену нелинеарност при већим оптерећењима, поређење резултата ће се вршити само за први нанесени инкремент оптерећења. Наведени инкремент одговара вредности из експеримента и означен је као *Loadstep-stage 1*. Експериментално истраживање на датој структури је обухватало праћење померања три карактеристичне тачке. Резултати експеримента и нумеричке симулације су приказани у Табели 4.1 као и релативно одступање резултата. Закључује се да је максимално одступање између два померања 19%. Међутим, у нумеричкој анализи коришћено је само 8 контролних тачака у ξ , односно у η правцу и полиноми квадратног степена. Повећавањем броја елемената или подизањем степена полинома, може се утицати на саму тачност резултата.

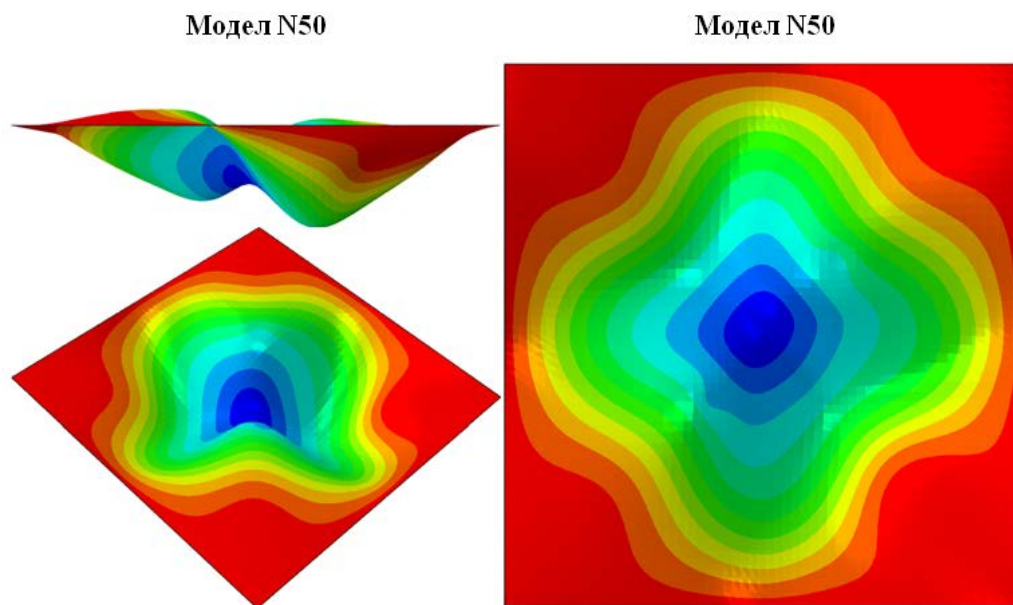
Табела 4.1 Резултати експеримента и нумеричке симулације

Експериментално испитивање	Тачка 1 0.919 mm	Тачка 2 0.838 mm	Тачка 3 0.640 mm
Нумеричка анализа	1.099mm	0.766mm	0.693mm
Релативна разлика [%]	19	9	8

Поред наведене изогеометријске анализе, може се лако показати кључна чињеница у изогеометријском приступу. Наиме, користећи приложени код могу се издвојити базне функције по елементима и доказати да је њихова сума једнака 1, за све вредности параметра ξ односно η . Матрице у којима су смештене базне функције по елементима су означене са $b\xi$ и $b\eta$ (видети Прилог 1.). Табелом 4.2 се даје табеларни приказ наведених функција за горе описани пример и за ξ правац. Исте базне функције су присутне и у другом правцу η с обзиром, на усвојену геометрију и број елемената. Поред тога, иста табела даје информацију и о контролним тачкама. Пошто сваки елемент обухвата три контролне тачке, у табели су дати редни бројеви истих за сваки елемент.

Табела 4.2 Базне функције по елементима

Број елемента	Базне функције по елементима			Сума	Редни број контролне тачке
1	$1 - 12\xi + 36\xi^2$	$-6(-2\xi + 9\xi^2)$	$18\xi^2$	1	1,2,3
2	$2(1 - 6\xi + 9\xi^2)$	$-\frac{3}{2}(1 - 12\xi + 24\xi^2)$	$\frac{1}{2}(1 - 12\xi + 36\xi^2)$	1	2,3,4
3	$\frac{9}{2}(1 - 4\xi + 4\xi^2)$	$\frac{1}{2}(-11 + 60\xi - 72\xi^2)$	$2(1 - 6\xi + 9\xi^2)$	1	3,4,5
4	$2(4 - 12\xi + 9\xi^2)$	$\frac{1}{2}(-23 + 84\xi - 72\xi^2)$	$\frac{9}{2}(1 - 4\xi + 4\xi^2)$	1	4,5,6
5	$\frac{1}{2}(25 - 60\xi + 36\xi^2)$	$-\frac{3}{2}(13 - 36\xi + 24\xi^2)$	$2(4 - 12\xi + 9\xi^2)$	1	5,6,7
6	$18(1 - 2\xi + \xi^2)$	$-6(7 - 16\xi + 9\xi^2)$	$25 - 60\xi + 36\xi^2$	1	6,7,8



Максимално померање $s_{\max} = 1.099 \text{ mm}$

Слика 4.21. Нумеричка симулација љуске модела N50

4.5 Основи Бернули-Ојлерове гредне теорије у Spline параметарској координати

Теорија штапа у сплајн параметарској координати изложена је у књизи [Rad14]. Не улазећи у детаљна извођења на овом месту приказаћемо само неопходне изразе који су потребни за формулацију изогеометријског Бернули-Ојлеровог гредног елемента.

Хипотеза о равним и недеформабилним попречним пресецима чини основу Бернули-Ојлерове гредне теорије. Наиме, пресек управан на недеформисану осу штапа и после деформације остаје раван, непромењеног облика и управан на деформисану осу штапа. Из услова управности попречног пресека и после деформације нужно следи да он лежи у нормалној равни линије деформисане осе штапа. Сходно томе можемо формулисати Бернули-Ојлеров гредни коначни елемент без увођења ротација као генералисаних координата [Cot09] [Rad14].

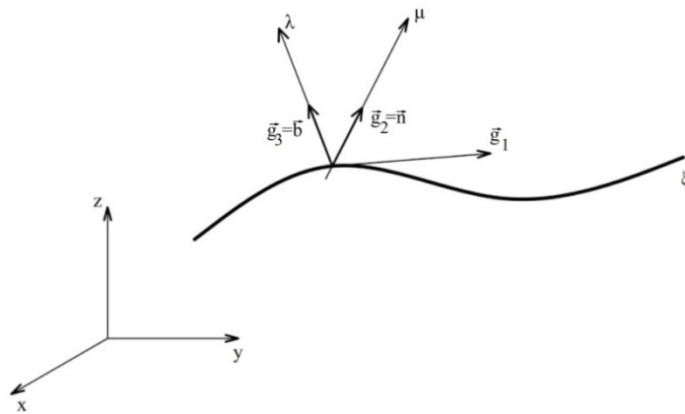
4.5.1 Геометрија осе штапа у NURBS параметарској координати

У овом поглављу разматраћемо изогеометријски приступ за случај Бернулијеве теорије штапа. Нека је геометрија осе штапа дата произвољном NURBS линијом, односно

$$\vec{r} = \sum_{I=1}^N R_I(\xi) \vec{r}_I \quad (1)$$

при чему величине $R_I(\xi)$ представљају базне функције NURBS-а а \vec{r}_I координате контролних тачака у односу на усвојени Декартов координатни систем.

Као и у случају материјалне површи ξ параметар није ништа друго до криволинијска координата којом је описана посматрана линија. Еуклидски тродимензионални простор E_3 чија је једна координатна линија посматрана крива употпуњен је постављањем нормале и бинормале у свакој тачки криве, Сл.4.21.



Слика 4.22 Произвольна крива линија

Са Сл.4.22 је јасно да су координатне линије у правцу нормале и бинормале праволиниског карактера. Усвајање праволинијских координата μ и λ није учињено ради једноставности већ из захтева техничке теорије штапа која претпоставља равне и недеформабилне попречне пресеке.

Квадрат дужине диференцијалног елемента линије одређен је као

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = (dx^m)^2 \quad (2)$$

Како је

$$dx^m = \frac{dx^m}{d\xi} d\xi = x_{,1}^m d\xi \quad \left(\frac{dx^m}{d\xi} = x_{,1}^m \right) \quad (3)$$

где је

$$x_{,1}^m = \sum_{I=1}^N R_{I,1}(\xi) x_I^m \quad (4)$$

следи да је

$$ds^2 = (x_{,1}^m)^2 d\xi^2 \Rightarrow ds = \sqrt{(x_{,1}^m)^2} d\xi \quad (5)$$

4.5.2 Метрика осе штапа

Базни вектор у правцу посматране линије одређен је изводом вектора положаја по ξ координати, тј.

$$\vec{g}_1 = \frac{d\vec{r}}{d\xi} = x_{,1}^m \vec{i}_m = \left(\sum_{l=1}^N R_{l,1}(\xi) x_l^m \right) \vec{i}_m \quad (6)$$

Значајно је приметити да \vec{g}_1 није јединичног интензитета, односно

$$g_{(1)} = \sqrt{\vec{g}_1 \cdot \vec{g}_1} = \sqrt{x_{,1}^m x_{m,1}} = \sqrt{(x_{,1}^m)^2} \neq 1 \quad (7)$$

Орт базног вектора \vec{g}_1 одредићемо као

$$\frac{\vec{g}_1}{g_{(1)}} = \frac{d\vec{r}}{d\xi} \frac{1}{\sqrt{(x_{,1}^m)^2}} = \frac{d\vec{r}}{d\xi} \frac{d\xi}{ds} = \frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{t} \quad (8)$$

одакле закључујемо да он није ништа друго до вектор тангенте.

Из израза (8) непосредно следи да је

$$\vec{g}_1 = g_{(1)} \vec{t} = \sqrt{(x_{,1}^m)^2} \vec{t} \quad (9)$$

Метрички тензор ортогоналног криволинијског координатног система који поред ξ координате укључује и праволинијске μ, λ у правцу јединичних базиса нормале \vec{g}_2 и бинормале \vec{g}_3 има облик

$$g_{ij} = \begin{bmatrix} g_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det g_{ij} = g_{11} = g \quad (10)$$

одакле уочавамо да је само компонента g_{11} променљива и једнака

$$g_{11} = \vec{g}_1 \cdot \vec{g}_1 = x_{,1}^m x_{m,1} \quad (11)$$

Детерминанту метричког тензора, односно компоненту g_{11} [Rad14] изразићемо и у NURBS опису као

$$g = \sum_{I=1}^N R_{I,1}(\xi) x_I^m \sum_{J=1}^N R_{J,1}(\xi) x_J^m = \sum_{I,J=1}^{N,N} R_{I,1}(\xi) R_{J,1}(\xi) x_I^m x_J^m \quad (12)$$

при чему у претходном изразу само индекс m има тензорски карактер и означава сумирање од 1 до 3.

Користећи изразе (10) и (11), релацију (5) и (9) написаћемо у облику

$$ds = \sqrt{g} d\xi \quad \vec{g}_1 = \sqrt{g} \vec{t} \quad (13)$$

Вектор нормале, односно базни вектор \vec{g}_2 представља орт вектора прве кривине (флексије) и једнак је

$$\vec{g}_2 = \frac{1}{K} \vec{K} = \vec{n} \quad (14)$$

где је

$$\vec{K} = \frac{d\vec{t}}{ds} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{d\vec{t}}{d\xi} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{d}{d\xi} \left(\frac{\vec{g}_1}{\sqrt{g}} \right) \quad (15)$$

односно

$$\vec{K} = K^m \vec{i}_m \quad (16)$$

при чему за компоненте вектора кривине K^m у односу на Декартове координате, сагласно изразу (15) добијамо

$$K^m = \frac{1}{g} \left(x_{,11}^m - \frac{1}{2} \frac{g_{,1}}{g} x_{,1}^m \right) \quad (17)$$

Коришћењем израза (14) и (17) вектор нормале \vec{g}_2 написаћемо у облику

$$\vec{g}_2 = \frac{1}{gK} \left(x_{,11}^m - \frac{1}{2} \frac{g_{,1}}{g} x_{,1}^m \right) \vec{i}_m \quad (18)$$

где је

$$K = \sqrt{K^m K_m} \quad (19)$$

модул вектора прве кривине (флексије) $\vec{\kappa}$, док је

$$x_{,11}^m = \sum_{l=1}^N R_{l,11}(\xi) x_l^m \quad (20)$$

$$g_{,1} = g_{11,1} = 2x_{,1}^m x_{m,11} \quad (21)$$

Вектор бинормале, односно вектор \vec{g}_3 одредићемо векторским производом тангенте и нормале, тј

$$\vec{g}_3 = \frac{1}{\sqrt{g}} (\vec{g}_1 \times \vec{g}_2) = \vec{b} \quad (22)$$

Сагласно изразима (6) и (18) релација (22) постаје

$$\vec{g}_3 = \frac{1}{g\sqrt{g}K} x_{,1}^m x_{,11}^k e_{mkl} \vec{i}^l \quad (23)$$

обзиром да је

$$\frac{1}{2} \frac{g_{,1}}{g} x_{,1}^m x_{,1}^k e_{mkl} = 0 \quad (24)$$

Надаље, инверзијом матрице (10) резултирају компоненте реципрочног метричког тензора у тачкама осе штапа, односно

$$g^{ij} = \begin{bmatrix} 1/g_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (25)$$

одакле следи да је

$$\vec{g}^1 = \frac{1}{g} x_{,1}^m \vec{i}_m \quad \vec{g}^2 = \vec{g}_2 \quad \vec{g}^3 = \vec{g}_3 \quad (26)$$

Кристофелове симболе друге врсте у тачкама посматране линије одредићемо диференцирањем базних вектора по ξ координати. Диференцирањем вектора \vec{g}_1 , односно

$$\vec{g}_{1,1} = x_{,11}^m \vec{l}_m = \Gamma_{11}^k \vec{g}_k \quad (27)$$

за Кристофелове симболе Γ_{11}^k добијамо

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{g} x_{,11}^m x_{m,1} = \frac{1}{2} \frac{g_{,1}}{g} & \Gamma_{11}^2 &= \frac{1}{gK} (x_{,11}^m - \Gamma_{11}^1 x_{,1}^m) \\ \Gamma_{11}^3 &= \frac{1}{g\sqrt{g} K} x_{,11}^r x_{,1}^m x_{,11}^m e_{mkr} = 0 \end{aligned} \quad (28)$$

Други извод вектора положаја по природној координати s , сагласно изразу (15) можемо изразити диференцирањем по ξ координати као

$$\frac{d^2 \vec{r}}{ds^2} = \frac{1}{g} (\vec{r}_{,11} - \Gamma_{11}^1 \vec{r}_{,1}) \quad (29)$$

па величину Γ_{11}^2 можемо написати

$$\Gamma_{11}^2 = \frac{1}{K} \frac{d^2 x^m}{d\xi^2} \frac{d^2 x^m}{ds^2} \quad (30)$$

С обзиром да је

$$x_{,11}^m = \sqrt{g} \left(\frac{g_{,1}}{g} \frac{dx^m}{ds} + \sqrt{g} \frac{d^2 x^m}{ds^2} \right) \quad (31)$$

симбол Γ_{11}^2 постаје

$$\Gamma_{11}^2 = \frac{1}{K} \left(\frac{g_{,1}}{\sqrt{g}} \frac{dx^m}{ds} + g \frac{d^2 x^m}{ds^2} \right) \frac{d^2 x^m}{ds^2} \quad (32)$$

односно

$$\Gamma_{11}^2 = g K \quad (33)$$

Промену вектора нормале по ξ координати одредићемо као

$$\vec{g}_{2,1} = \sqrt{g} \frac{d\vec{n}}{ds} = \sqrt{g} (\tau \vec{b} - K \vec{t}) = -K \vec{g}_1 + \sqrt{g} \tau \vec{g}_3 = \Gamma_{21}^m \vec{g}_m \quad (34)$$

одакле следи да је

$$\Gamma_{21}^1 = -K \quad \Gamma_{21}^2 = 0 \quad \Gamma_{21}^3 = \sqrt{g} \tau \quad (35)$$

где је τ модул друге кривине или торзије $\bar{\tau}$. На сличан начин диференцирањем вектора бинормале \vec{g}_3 по ξ координати добијамо

$$\vec{g}_{3,1} = \sqrt{g} \frac{d\vec{b}}{ds} = \sqrt{g} \bar{\tau} = -\sqrt{g} \tau \vec{g}_2 = \Gamma_{31}^m \vec{g}_m \Rightarrow \Gamma_{31}^1 = 0 \quad \Gamma_{31}^2 = -\sqrt{g} \tau \quad \Gamma_{31}^3 = 0 \quad (36)$$

при чему

$$\vec{\tau} = -\tau \vec{n} = -\tau \vec{g}_2 \quad (37)$$

представља вектор друге кривине (торзије) линије.

Увођењем ознака

$$\bar{K} = g K \quad \bar{\tau} = \sqrt{g} \tau \quad x_{,2}^m = \frac{1}{\bar{K}} (x_{,11}^m - \Gamma_{11}^1 x_{,1}^m) \quad x_{,3}^m = \frac{1}{\sqrt{g} \bar{K}} x_{k,1} x_{l,11} e^{klm} \quad (38)$$

векторе \vec{g}_2 и \vec{g}_3 као и Кристофелове симболе (33), (35)₃ и (37)₂ записаћемо у облику

$$\vec{g}_2 = x_{,2}^m \vec{i}_m \quad \vec{g}_3 = x_{,3}^m \vec{i}_m \quad \Gamma_{11}^2 = \bar{K} \quad \Gamma_{21}^3 = \bar{\tau} \quad \Gamma_{31}^2 = -\bar{\tau} \quad (39)$$

Величине \bar{K} и $\bar{\tau}$ сагласно ознакама (38) изразићемо као

$$\bar{K} = \frac{1}{\bar{K}} x_{,11}^m (x_{m,11} - \Gamma_{11}^1 x_{,1}^m) = x_{,11}^m x_{m,2} \quad \bar{\tau} = \frac{1}{\sqrt{g} \bar{K}^2} x_{,11}^k x_{,111}^m x_{,1}^n e_{kmn} = \frac{1}{\bar{K}} x_{m,3} x_{,111}^m \quad (40)$$

Кристофелов симбол Γ_{11}^1 и величину \bar{K} , обзиром да ће се најчешће појављивати у даљим разматрањима, можемо изразити у свакој тачки осе штапа и преко базних функција NURBS-а линије, тј.

$$\Gamma_{11}^1(\xi) = \frac{\sum_{I,J}^{N,N} R_{I,1}(\xi)R_{J,11}(\xi)x_I^m x_J^m}{\sum_{I,J}^{N,N} R_{I,1}(\xi)R_{J,1}(\xi)x_I^m x_J^m} \quad \bar{K}(\xi) = \left[\sum_{I,J}^{N,N} R_{I,11}(\xi)[R_{J,11}(\xi) - \Gamma_{11}^1 R_{J,1}]x_I^m x_J^m \right]^{\frac{1}{2}} \quad (41)$$

На исти начин записаћемо и компоненту $x_{,2}^m$, односно

$$x_{,2}^m = \frac{1}{\bar{K}(\xi)} \sum_{I=1}^N [R_{I,11}(\xi) - \Gamma_{11}^1(\xi)R_{I,1}(\xi)]x_I^m \quad (42)$$

4.5.2.1 Вектор кривине осе штапа

У изразима (34) и (36) коришћене су релације у диференцијалној геометрији познате као Френеови обрасци [Rad10] [Rad14] [Sti79] [Kor77], које у систему природних координата имају облик

$$\begin{bmatrix} \vec{t}_{,s} \\ \vec{n}_{,s} \\ \vec{b}_{,s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & K & 0 \\ -K & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{t} \\ \vec{n} \\ \vec{b} \end{bmatrix} \quad (43)$$

Обележавањем вектора тангенте, нормале и бинормале заједничким симболом \vec{t}_i претходне изразе записаћемо као

$$\vec{t}_{i,s} = K_{,i}^j \vec{t}_j = K_{,ji} \vec{t}_j \quad (44)$$

при чему K_{ij} представља кососиметричан тензор другог реда у литератури познат као Дарбуов тензор [Kor77] [Rad14]. Имајући на уму векторско својство косо симетричног тензора другог реда, односно

$$K^i = \frac{1}{2} e^{ijl} K_{lj} \quad \vec{K} = K^i \vec{t}_i \quad (45)$$

дефинисаћемо укупни вектор кривине чије су компоненте мерене у односу на базне векторе природног триједра. За случај ξ, μ, λ координата његове компоненте постају

$$K^1 = \frac{1}{\sqrt{g}} \tau \quad K^2 = 0 \quad K^3 = K \quad (46)$$

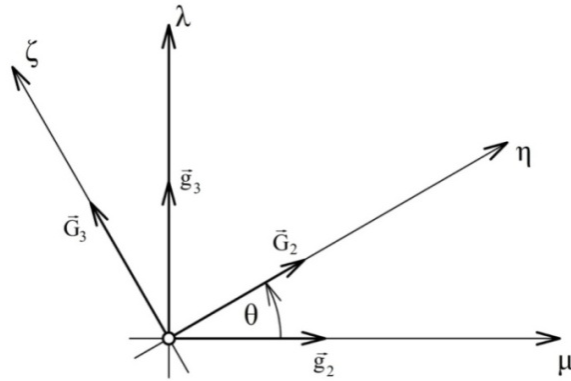
Релације (43) сагласне претходном изразу можемо написати и у облику

$$\vec{K} \times \begin{pmatrix} \vec{g}_i \\ g_{(i)} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{g}} \begin{pmatrix} \vec{g}_i \\ g_{(i)} \end{pmatrix},_1 \quad (47)$$

Координатом ξ описана је линија, односно њен положај у простору (1), док су координатама η и ζ дефинисни правци вектора нормале и бинормале, респективно. Имајући на уму да наша анализа посматра материјалну линију која представља реални континуум, односно греду, за линије μ и λ неопходно је усвојити координате које имају физички карактер а у том смислу најподесније су главне осе инерције попречног пресека штапа. Како је попречни пресек у оригиналној геометрији греде управан на осу штапа јасно је да он лежи у нормалној равни посматране линије. Обзиром да су главне осе инерције међусобно управне њихов положај као и положај њихових базних вектора одређен је релацијама

$$\begin{bmatrix} \eta \\ \zeta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu \\ \lambda \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \vec{G}_2 \\ \vec{G}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{g}_2 \\ \vec{g}_3 \end{bmatrix} \quad (48)$$

док координата ξ као и њен базни вектор остају непромењени и надаље ћемо га обележавати симболом \vec{G}_1 . Симболом θ обележен је угао који главне осе инерције заклапају са нормалом и бинормалом, Сл.4.23.



Слика 4.23 Угао између главних оса инерције, нормале и бинормале

Компоненте метричког тензора G_{ij} једнаке су компонентама g_{ij} с обзиром да су базиси \vec{G}_2 и \vec{G}_3 јединичног интензитета и заједно са вектором \vec{G}_1 дефинишу ортогонални триједар. Сходно томе компоненте вектора кривине у систему ξ, η, ζ координата постају

$$K^1 = \frac{1}{\sqrt{G}} \tau \Rightarrow K_1 = \sqrt{G} \tau = \bar{\tau} \quad K^2 = K_2 = K \sin \theta \quad K^3 = K_3 = K \cos \theta \quad (49)$$

и задовољавају релацију (47), односно

$$\vec{K} \times \left(\frac{\vec{G}_i}{G_{(i)}} \right) = \left(\frac{\vec{G}_i}{G_{(i)}} \right)_{,1} \quad (50)$$

Коришћењем инверзне релације (51)₂, израз \vec{g}_1 написаћемо као

$$\vec{G}_{1,1} = \Gamma_{11}^1 \vec{G}_1 + GK \cos \theta \vec{G}_2 - GK \sin \theta \vec{G}_3 \quad (51)$$

одакле закључујемо да је

$$\Gamma_{11}^2 = GK_3 = \bar{K}_3 \quad \Gamma_{11}^3 = -GK_2 = -\bar{K}_2 \quad (52)$$

Диференцирањем вектора \vec{G}_2 и \vec{G}_3 по ξ координати, тј

$$\vec{G}_{2,1} = -K \cos \theta \vec{G}_1 + \bar{\tau} \vec{G}_3 \quad \vec{G}_{3,1} = K \sin \theta \vec{G}_1 - \bar{\tau} \vec{G}_2 \quad (53)$$

добијамо и преостале Кристофелове симболе повезаности друге врсте у тачкама осе штапа за ξ, η, ζ координате, односно

$$\begin{aligned} \Gamma_{21}^1 &= -K_3 & \Gamma_{21}^2 &= 0 & \Gamma_{21}^3 &= K_1 \\ \Gamma_{31}^1 &= K_2 & \Gamma_{31}^2 &= -K_1 & \Gamma_{31}^3 &= 0 \end{aligned} \quad (54)$$

4.5.3 Метрика произвољне тачке попречног пресека штапа

Вектор положаја произвољне тачке попречног пресека на η, ζ одстојању од осе штапа једнак је

$$\vec{r} = \vec{r} + \eta \vec{G}_2 + \zeta \vec{G}_3 \quad (55)$$

одакле диференцирањем по ξ координати добијамо

$$\vec{G}_1 = \vec{r}_{,1} = \vec{G}_1 + \eta \vec{G}_{2,1} + \zeta \vec{G}_{3,1} \quad (56)$$

односно

$$\vec{G}_1 = (1 - \eta K_3 + \zeta K_2) \vec{G}_1 - \zeta K_1 \vec{G}_2 + \eta K_1 \vec{G}_3 \quad (57)$$

или

$$\vec{G}_1 = G_0 \vec{G}_1 - \zeta K_1 \vec{G}_2 + \eta K_1 \vec{G}_3 \quad \text{где је} \quad (58)$$

$$G_0 = 1 - \eta K_3 + \zeta K_2 \quad (59)$$

Метрички тензор у произвољној тачки попречног пресека једнак је

$$\vec{G}_{ij} = \begin{bmatrix} \vec{G}_{11} & -\zeta K_1 & \eta K_1 \\ -\zeta K_1 & 1 & 0 \\ \eta K_1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} \vec{G}_{11} &= G_0^2 G_{11} + (\zeta^2 + \eta^2) K_1^2 \\ \vec{G} &= \det \vec{G}_{ij} = G_0^2 G_{11} \Rightarrow \sqrt{\vec{G}} = G_0 \sqrt{G} \end{aligned} \quad (60)$$

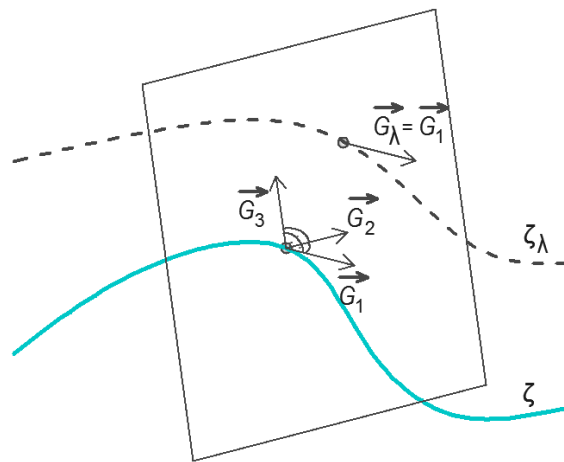
Није тешко приметити да базни вектор \vec{G}_1 није управан на преостала два базиса одакле закључујемо да координате ξ, η, ζ не чине ортогонални координатни систем изузев у оси штапа. Потражимо сада нову ζ_λ координатну линију тако да

је њен базни вектор дефинисан парцијалним изводом вектора положаја \vec{r} по ζ_λ координати, тј.

$$\vec{G}_\lambda = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi_\lambda} = \vec{G}_1 \frac{\partial \xi}{\partial \xi_\lambda} + \vec{G}_2 \frac{\partial \eta}{\partial \xi_\lambda} + \vec{G}_3 \frac{\partial \zeta}{\partial \xi_\lambda} = \vec{G}_1 \quad (61)$$

Координату ζ_λ одредићемо из услова да је њен базни вектор управан на \vec{G}_2 и \vec{G}_3 и да је једнак вектору \vec{G}_1 у оси штапа [Rad14] [Sek72], што имплицира следеће зависности

$$\frac{\partial \xi}{\partial \xi_\lambda} = \frac{1}{G_0} \quad \frac{\partial \eta}{\partial \xi_\lambda} = \zeta K_1 \frac{\partial \xi}{\partial \xi_\lambda} \quad \frac{\partial \zeta}{\partial \xi_\lambda} = -\eta K_1 \frac{\partial \xi}{\partial \xi_\lambda} \quad (62)$$



Слика 4.24 ξ_λ линија

ξ_λ параметар у оси штапа поклапа се са ξ координатном линијом и генерише непроменљиву вредност њеног базног вектора $\vec{G}_\lambda = \vec{G}_1$ за ма коју тачку попречног пресека, Сл.4.24. Из израза (62) следи да је ξ_λ нека функција од ξ, η, ζ координате, тј. $\xi_\lambda = \xi_\lambda(\xi, \eta, \zeta)$.

Такође можемо уочити да за фиксиране вредности η и ζ координата ξ_λ представља неку аналогну линију оси штапа која је уз то и ортогонална на базисе

\vec{G}_2 и \vec{G}_3 . Кристофелове симболе повезаности у тачкама ξ_λ линије, на основу израза (65) одредићемо као

$$\bar{\Gamma}_{11}^m = \frac{\partial \vec{G}_1}{\partial \xi_\lambda} = \frac{1}{G_0} \vec{G}_{1,1} = \frac{1}{G_0} \Gamma_{11}^m \quad \bar{\Gamma}_{21}^m = \frac{1}{G_0} \Gamma_{21}^m \quad \bar{\Gamma}_{31}^m = \frac{1}{G_0} \Gamma_{31}^m \quad (63)$$

4.5.4 Деформација осе штапа

Положај ма које тачке осе штапа после деформације одређен је као

$$\vec{r}^* = \vec{r} + \vec{u} \quad (64)$$

где је \vec{u} вектор померања чија је промена унутар елемента описана истим базним функцијама као и геометрија осе штапа, тј.

$$\vec{u} = \sum_{I=1}^N R_I(\xi) \vec{u}_I \quad (65)$$

при чему вектор

$$\vec{u} = u^m \vec{i}_m = u_m \vec{i}^m \quad (66)$$

садржи померања чије су компоненте мерене у односу на Декартове координате а \vec{u}_I померања контролних тачака усвојене NURBS криве, такође реферисан у односу на Декартов координатни систем. Заменом израза (1) и (65) у (64) добијамо

$$\vec{r}^* = \sum_{I=1}^N R_I(\xi) (\vec{r}_I + \vec{u}_I) = \sum_{I=1}^N R_I(\xi) \vec{r}_I^* \quad (67)$$

деформисану геометрију осе штапа изражене преко положаја контролних тачака после деформације \vec{r}_I^* . На основу израза (1) и (67) уочавамо да је геометрија осе штапа у почетном и деформисаном положају описана истим базним функцијама што је и основни захтев изогеометријског приступа. Тангентни базни вектор

деформисане осе штапа одређен је диференцирањем вектора \vec{r}^* по ξ координати, тј.

$$\vec{G}_1^* = \vec{r}_{,1}^* = \vec{G}_1 + \vec{u}_{,1} = (x_{,1}^m + u_{,1}^m) \vec{i}_m = x_{,1}^{*m} \vec{i}_m \quad (x^{*m} = x^m + u^m) \quad (68)$$

Нормалну компоненту тензора деформације одредићемо као полуразлику компоненте метричког тензора G_{11} после и пре деформације [Gre60], [Gre68] [Vuk95] [Rad14] [Rad96], односно

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{2}(G_{11}^* - G_{11}). \quad (69)$$

Како је

$$G_{11}^* = x_{,1}^{*m} x_{,1}^{*m} = x_{,1}^m x_{,1}^m + 2x_{,1}^m u_{,1}^m + u_{,1}^m u_{,1}^m \quad (70)$$

следи да је

$$\varepsilon_{11} = x_{,1}^m u_{,1}^m + \frac{1}{2} u_{,1}^m u_{,1}^m \quad (71)$$

Израз (71) представља компоненту Лагранжовог тензора деформације у правцу осе штапа [Rad14], [Rad96]. С обзиром да наше анализе подразумевају само линеарни третман посматране греде за формулацију коначног елемента користићемо следећи израз

$$\varepsilon_{11} = x_{,1}^m u_{,1}^m \quad (72)$$

4.5.5 Деформација у произвољној тачки попречног пресека - промена кривине осе штапа

У складу са конвективним карактером ξ, η, ζ координате вектора положаја тачке на произвољном одстојању од осе штапа у деформисаном положају написаћемо као

$$\vec{r}^* = \bar{r}^* + \eta \vec{G}_2^* + \zeta \vec{G}_3^* \quad (73)$$

Диференцирањем претходне релације по ξ координати за деформисани тангентни базни вектор произвољне тачке, аналогно изразу (57), налазимо

$$\vec{G}_1^* = \bar{G}_1^* + \eta \vec{G}_{2,1}^* + \zeta \vec{G}_{3,1}^* \quad (74)$$

односно

$$\vec{G}_1^* = (1 - \eta K_3^* + \zeta K_2^*) \bar{G}_1^* - \zeta K_1^* \bar{G}_2^* + \eta K_1^* \bar{G}_3^* \quad (75)$$

K_1^*, K_2^* и K_3^* представљају компоненте вектора кривине осе штапа у деформисаном положају и једнаке су

$$K_1^* = \sqrt{G^*} \tau^* = \bar{\tau}^* \quad K_2^* = K^* \sin \theta^* \quad K_3^* = K^* \cos \theta^* \quad (76)$$

при чему су K^*, τ^* и G^* флексија, торзија и детерминанта метричког тензора деформисане осе штапа, респективно, док је θ^* угао који базни вектори \vec{G}_2^* и \vec{G}_3^* заклапају са нормалом и бинормалом деформисане линије.

Компонента $x_{,2}^{*n}$ дефинисана је аналогним изразом $(38)_3$ у деформисаном положају, односно

$$x_{,2}^{*n} = \frac{1}{\bar{K}^*} (x_{,11}^{*n} - \Gamma_{11}^{*1} x_{,1}^{*n}) \quad (77)$$

У претходној једначини фигуришу тренутне вредности функција флексије \bar{K}^* и Кристофеловог симбола Γ_{11}^{*1} па се захтева и њихова линеаризација. Линеаризацију

свих тренутних функција извршићемо Тејлоровим развојем у околини оригиналног положаја задржавајући при томе само линеарне чланове. С обзиром да је оригинални (почетни) положај линије познат, величине $\bar{K}, \Gamma_{11}^1, x_{,2}^n, G$ у тренутним функцијама имају карактер константи док су променљиве померања и градијенти померања као и њихови изводи [Rad14]. Сагласно томе Тејлоров развој ма које тренутне функције има облик

$$F^* \approx (F^*)_{u^m=0} + \left(\frac{\partial F^*}{\partial u_{,i}^m}\right)_{u^m=0} \cdot u_{,i}^m = F + \left(\frac{\partial F^*}{\partial u_{,i}^m}\right)_{u^m=0} \cdot u_{,i}^m \quad (78)$$

Коришћењем претходног израза за линеаризоване вредности детерминанте метричког тензора, квадратног корена детерминанте, симбола Γ_{11}^{*1} и флексије \bar{K}^* тренутног положаја добијамо

$$G^* = x_{,1}^{*m} x_{m,1}^* \approx G + 2x_{,1}^m u_{m,1} \quad \sqrt{G^*} = \sqrt{x_{,1}^{*m} x_{m,1}^*} \approx \sqrt{G} + \frac{1}{\sqrt{G}} x_{,1}^m u_{m,1} \quad (79)$$

$$\Gamma_{11}^{*1} \approx \Gamma_{11}^1 + b^m u_{m,1} + a^m u_{m,11} \quad \bar{K}^* \approx \bar{K} + x_{,2}^m (u_{m,11} - \Gamma_{11}^1 u_{m,1})$$

где је

$$a^m = \frac{x_{,1}^m}{G} \quad b^m = \frac{1}{G} (x_{,11}^m - 2\Gamma_{11}^1 x_{,1}^m) \quad (80)$$

Уважавајући претходне изразе, функција $x_{,2}^{*m}$ (77) [Rad14] постаје

$$x_{m,2}^* \approx x_{m,2} + u_{m,2} = x_{m,2} + A_m^n u_{n,11} - B_m^n u_{n,1} \quad (81)$$

$$A_m^n = \frac{1}{\bar{K}} (\delta_m^n - a^n x_{m,1} - x_{,2}^n x_{m,2}) \quad B_m^n = \frac{1}{\bar{K}} (b^n x_{m,1} + \delta_m^n \Gamma_{11}^1 - \Gamma_{11}^1 x_{,2}^n x_{m,2})$$

одакле следи да је

$$u_{m,2} = A_m^n u_{n,11} - B_m^n u_{n,1} \quad (82)$$

При извођењу претходних израза није стриктно вођено рачуна о коваријантним и контраваријантним компонентама с обзиром да су све величине изражене у односу на Декартов систем координата. Из тих разлога мењање места не само њеним већ и осталим индексима нема утицаја на добијене једначине.

Надаље, одредићемо прираштај компоненте бинормале као градијент $u_{m,3}$ из развоја функције $x_{m,3}^*$ [Rad14], тј.

$$x_{m,3}^* = \frac{1}{\sqrt{G^*}} x_{,1}^{*n} x_{,2}^{*k} e_{nkm} \quad (83)$$

односно

$$x_{m,3}^* = x_{m,3} + u_{m,3} \quad (84)$$

при чему је

$$u_{m,3} = C_{mk} u_{,2}^k - D_{km} u_{,1}^k \quad (85)$$

док је

$$\begin{aligned} \bar{C}_{mn} &= C_{mk} A_n^k & \bar{D}_{mn} &= C_{mk} B_n^k + D_{mn} \\ C_{mk} &= \frac{1}{\sqrt{G}} e_{nkm} x_{,1}^n & D_{km} &= \frac{1}{G} x_{,3} x_{m,1} \end{aligned} \quad (86)$$

4.5.6 Деформација промене кривина

Компонента метричког тензора у произвољној тачки попречног пресека \bar{G}_{11} у почетном и деформисаном положају једнака је

$$\bar{G}_{11} = G_0^2 G_{11} + (\zeta^2 + \eta^2) K_1^2 \quad \bar{G}_{11}^* = G_0^{*2} G_{11}^* + (\zeta^2 + \eta^2) K_1^{*2} \quad (87)$$

што резултира да је компонента тензора деформације ε_{11} једнака

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11}(\eta, \zeta) &= \frac{1}{2}(\bar{G}_{11}^* - \bar{G}_{11}) = \frac{1}{2}[(1 - \eta K_3^* + \zeta K_2^*)^2 G_{11}^* - (1 - \eta K_3 + \zeta K_2)^2 G_{11}] + \\ &+ \frac{1}{2}(\eta^2 + \zeta^2)(K_1^{*2} - K_1^2) = \varepsilon_{11} - \eta(\bar{K}_3^* - \bar{K}_3) + \zeta(\bar{K}_2^* - \bar{K}_2) - \eta\zeta(\bar{K}_3^* K_2^* - \bar{K}_3 K_2) \\ &+ \frac{1}{2}[\eta^2(\bar{K}_3^* K_3^* - \bar{K}_3 K_3) + \zeta^2(\bar{K}_2^* K_2^* - \bar{K}_2 K_2)] + \frac{1}{2}(\eta^2 + \zeta^2)(K_1^{*2} - K_1^2) \end{aligned} \quad (88)$$

где је

$$\bar{K}_2^* = G_{11}^* K_2^* \quad \bar{K}_3^* = G_{11}^* K_3^* \quad (89)$$

Разлике кривина деформисаног и почетног положаја, односно

$$\kappa_1 = K_1^* - K_1 \quad \kappa_2 = \bar{K}_2^* - \bar{K}_2 \quad \kappa_3 = \bar{K}_3^* - \bar{K}_3 \quad (90)$$

дефинишу деформације торзије и савијања у равнима $I3$ и $I2$, респективно.

Занемарујући производе деформација као мале величине вишег реда, изрази у заградама једначине (87) постају

$$\begin{aligned} \bar{K}_3^* K_3^* - \bar{K}_3 K_3 &= 2(K_3 \kappa_3 - \varepsilon_{11} K_3^2) & \bar{K}_2^* K_2^* - \bar{K}_2 K_2 &= 2(K_2 \kappa_2 - \varepsilon_{11} K_2^2) \\ \bar{K}_3^* K_2^* - \bar{K}_3 K_2 &= K_2 \kappa_3 + K_3 \kappa_2 - 2\varepsilon_{11} K_2 K_3 & K_1^{*2} - K_1^2 &= 2K_1 \kappa_1 \end{aligned} \quad (91)$$

одакле следи да је

$$\varepsilon_{11}(\eta, \zeta) = G_0[(1 + \eta K_3 - \zeta K_2)\varepsilon_{11} - \eta \kappa_3 + \zeta \kappa_2] + (\eta^2 + \zeta^2)K_1 \kappa_1 \quad (92)$$

На основу претходних релација, једначине (90)_{2,3} [Rad14] написаћемо у облику

$$\kappa_2 = -x_{\bar{3}}^m u_{m,11} + x_{\bar{3}}^m \Gamma_{11}^1 u_{m,1} = -x_{\bar{3}}^m (u_{m,11} - \Gamma_{11}^1 u_{m,1}) \quad (93)$$

$$\kappa_3 = x_{\bar{2}}^m u_{m,11} - \Gamma_{11}^1 x_{\bar{2}}^m u_{m,1} = x_{\bar{2}}^m (u_{m,11} - \Gamma_{11}^1 u_{m,1}) \quad (94)$$

Смичуће деформације услед торзионог напрезања у произвољној тачи попречног пресека сагласно изразима (60) и (85) једнаке су

$$\gamma_{12}(\eta, \zeta) = \bar{G}_{12}^* - \bar{G}_{12} = -\zeta \kappa_1 \quad \gamma_{13}(\eta, \zeta) = \bar{G}_{13}^* - \bar{G}_{13} = \eta \kappa_1 \quad (95)$$

Компоненталну деформацију $\varepsilon_{11}(\eta, \zeta)$, у складу са њеним тензорским својством, можемо изразити и у односу на ξ_λ, η, ζ координате на следећи начин

$$\varepsilon_{11}(\xi_\lambda) = \frac{1}{G_0} [(1 + \eta K_3 - \zeta K_2)\varepsilon_{11} - \eta \kappa_3 + \zeta \kappa_2] \quad (96)$$

За разлику од $\varepsilon_{11}(\eta, \zeta)$, деформација $\varepsilon_{11}(\xi_\lambda)$ изражена је у односу на исте базисе унутар целокупног попречног пресека ($\vec{G}_\lambda = \vec{G}_1$) и представљаће свакако погодност при формулацији коначног елемента.

4.5.7 Торзиона промена кривине

Промену кривине торзије одредићемо као и деформације савијања линеаризацијом функције торзије [Rad14] $\bar{\tau}$, која је у тренутној конфигурацији дата аналогним изразом (40)₂, тј.

$$\bar{\tau}^* = \frac{1}{\sqrt{G^* \bar{K}^{*2}}} x_{,11}^{*k} x_{,111}^{*m} x_{,1}^{*n} e_{kmn} \quad (97)$$

Из Тејлоровог развоја следи да је

$$\begin{aligned} \bar{\tau}^* \approx \bar{\tau} + \frac{1}{\bar{K}} x_{,3}^m u_{m,111} - \frac{1}{\bar{K}} [(\Gamma_{11}^1 + \frac{\bar{K}_{,1}}{\bar{K}}) x_{,3}^m + \tau x_{,2}^m] u_{m,11} + \\ + \frac{1}{\bar{K}} [(\Gamma_{11}^1 \frac{1}{\bar{K}} - \Gamma_{11,1}^1 + K\bar{K}) x_{,3}^m + \Gamma_{11}^1 \tau x_{,2}^m] u_{m,1} \end{aligned} \quad (98)$$

или сажетије

$$\bar{\tau}^* \approx \bar{\tau} + T_3^m u_{m,111} - T_2^m u_{m,11} + T_1^m u_{m,1} \quad \text{где је} \quad (99)$$

$$\begin{aligned} T_3^m &= \frac{1}{\bar{K}} x_{,3}^m & T_2^m &= \frac{1}{\bar{K}} [(\Gamma_{11}^1 + \frac{\bar{K}_{,1}}{\bar{K}}) x_{,3}^m + \bar{\tau} x_{,2}^m] \\ T_1^m &= \frac{1}{\bar{K}} [(\Gamma_{11}^1 \frac{\bar{K}_{,1}}{\bar{K}} - \Gamma_{11,1}^1 + K\bar{K}) x_{,3}^m + \Gamma_{11}^1 \bar{\tau} x_{,2}^m] \end{aligned} \quad (100)$$

при чему је

$$\Gamma_{11,1}^1 = \frac{x_{,111}^k x_{k,1} + x_{,11}^k x_{k,11}}{G} - 2(\Gamma_{11}^1)^2 \quad \bar{K}_{,1} = x_{,2}^m (x_{m,111} - \Gamma_{11}^1 x_{m,11}) \quad (101)$$

На основу израза (90)₁ за деформацију торзије добијамо

$$\kappa_1 = \bar{\tau}^* - \bar{\tau} = T_3^m u_{m,111} + T_2^m u_{m,11} + T_1^m u_{m,1} \quad (102)$$

4.6 Формулација изогеометријског Бернули - Ојлеровог гредног коначног елемента

4.6.1 Напонско деформацијске релације

Ако претпоставимо да је наш линијски елемент у материјалном погледу линеарно еластичног карактера онда су везе између напонских и деформацијских величина дате генерализаним Хуковим законом, који за опште просторно стање напона и деформације можемо записати као

$$\sigma_j^i = 2\mu\varepsilon_j^i + \lambda\delta_j^i\varepsilon_m^m \quad (103)$$

при чему μ и λ представљају Ламеове параметре и једнаки су

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (104)$$

док су E и ν Јангов модул еластичности и Поасонов коефицијент, респективно. Величине σ_j^i су мешовите компоненте Пиолиног тензора напона друге врсте и мерене су по површини и метрици недеформисаног положаја посматраног гредног елемента.

Услови да су компоненте напона σ_2^2 и σ_3^3 једнаке нули имају за последицу елиминацију деформација ε_2^2 и ε_3^3 , односно

$$\varepsilon_2^2 = \varepsilon_3^3 = -\frac{\lambda}{2(\mu + \lambda)} = -\nu\varepsilon_1^1 \quad (105)$$

па се релација (103) трансформише на облик

$$\sigma_j^i = 2\mu(\varepsilon_j^i + \nu\delta_j^i\varepsilon_1^1) \quad (106)$$

Сагласно претходном изразу контраваријантне компоненте напона можемо изразити у функцији од коваријантних компоненти деформација као

$$\sigma^{ij} = 2\mu(G^{ik}G^{jl}\varepsilon_{kl} + \nu G^{ij}\varepsilon_1^1) \quad (107)$$

Релација (107) важи за ма који гредни елемент и независна је од усвојених координата. У случају ξ_λ, η, ζ координата и Бернулијевог штапа из претходног израза резултира следећа зависност

$$\begin{aligned} \sigma^{11} = EG^{11}G^{11}\varepsilon_{11} \quad \sigma^{12} = \mu G^{11}\gamma_{12} = -\zeta\mu G^{11}\kappa_1 \quad \sigma^{13} = \mu G^{11}\gamma_{13} = \eta\mu G^{11}\kappa_1 \\ (\sigma^{22} = \sigma^{33} = \sigma^{23} = 0) \end{aligned} \quad (108)$$

4.6.1.1 Пресечне силе

Вектор пресечних сила \bar{R} са компонентом

$$\bar{R} = R^1\bar{G}_1 \quad (109)$$

која представља аксијалну силу одредићемо као главни вектор сила свих вектора напона унутар попречног пресека. Како је диференцијални елемент површине попречног пресека у оба система координата једнак

$$d\bar{a} = \sqrt{\bar{G}} d\eta d\zeta \quad da(\xi_\lambda) = \sqrt{G} d\eta d\zeta \quad (110)$$

вектор пресечних сила изразићемо као

$$\bar{R} = \int_A \bar{\sigma}^1 \sqrt{\bar{G}} d\eta d\zeta = \int_A \bar{\sigma}^1 \sqrt{G} d\eta d\zeta \quad (111)$$

одакле следи да је

$$R^1 = \int_A \bar{\sigma}^{11} G_0 \sqrt{\bar{G}} d\eta d\zeta = \int_A \sigma^{11} \sqrt{G} d\eta d\zeta \quad (112)$$

У претходним изразима величине у систему ξ, η, ζ координата су надвучене у циљу сажетијег писања. Уважавајући тензорско својство компонената напона лако се да закључити да је

$$\begin{aligned}
\bar{\sigma}^{11} &= \left(\frac{\partial \xi}{\partial \xi_\lambda}\right)^2 \sigma^{11} = \frac{1}{G_0^2} \sigma^{11} \Rightarrow \sigma^{11} = G_0^2 \bar{\sigma}^{11} \\
\bar{\sigma}^{12} &= \frac{\partial \xi}{\partial \xi_\lambda} \frac{\partial \eta}{\partial \xi_\lambda} \sigma^{11} + \frac{\partial \xi}{\partial \xi_\lambda} \frac{\partial \eta}{\partial \eta} \sigma^{12} = \frac{\zeta K_1}{G_0^2} \sigma^{11} + \frac{1}{G_0} \sigma^{12} \Rightarrow \\
&\sigma^{12} = G_0 (\bar{\sigma}^{12} - \zeta K_1 \bar{\sigma}^{11}) \\
\bar{\sigma}^{13} &= \frac{\partial \xi}{\partial \xi_\lambda} \frac{\partial \zeta}{\partial \xi_\lambda} \sigma^{11} + \frac{\partial \xi}{\partial \xi_\lambda} \frac{\partial \zeta}{\partial \zeta} \sigma^{13} = -\frac{\eta K_1}{G_0^2} \sigma^{11} + \frac{1}{G_0} \sigma^{13} \Rightarrow \\
&\sigma^{13} = G_0 (\bar{\sigma}^{13} + \eta K_1 \bar{\sigma}^{11})
\end{aligned} \tag{113}$$

одакле следи да је нормална сила у оба система координата иста а што је и очекивано обзиром да се ξ_λ и ξ координата поклапају у оси штапа.

Зависност између нормалне силе и деформација осе штапа успоставићемо коришћењем ξ_λ координате као погоднијег случаја напонско деформацијских релација (107). На основу израза (96), (108) и (111) следи да је

$$\vec{R} = E(G^{11})^2 \int_A \frac{1}{G_0} [(1 + \eta K_3 - \zeta K_2) \varepsilon_{11} - \eta \kappa_3 + \zeta \kappa_2] \sqrt{G} d\eta d\zeta \vec{G}_1 \tag{114}$$

У подинтегралним функцијама једначине (114) фигурише величина $1/G_0$ која је функција η и ζ координате.

Из једначине (114) нормалну силу одредићемо као

$$R^1 = E(G^{11})^2 \int_A \frac{1}{G_0} (1 + \eta K_3 - \zeta K_2) (\varepsilon_{11} - \eta \kappa_3 + \zeta \kappa_2) \sqrt{G} d\eta d\zeta \tag{115}$$

односно

$$R^1 = E(G^{11})^2 A_1 \varepsilon_{11} + E(G^{11})^2 \bar{I}_2 \kappa_2 - E(G^{11})^2 \bar{I}_3 \kappa_3 \tag{116}$$

при чему су уведене следеће ознаке

$$\begin{aligned}
A_1 &= \int_A \frac{1 + \eta K_3 - \zeta K_2}{G_0} \sqrt{G} d\eta d\zeta \\
\bar{I}_2 &= \int_A \frac{\zeta}{G_0} \sqrt{G} d\eta d\zeta \quad \bar{I}_3 = \int_A \frac{\eta}{G_0} \sqrt{G} d\eta d\zeta
\end{aligned} \tag{117}$$

На основу једначине (116) лако се да закључити да је аксијална сила резултат не само мембранске (аксијалне) већ и деформације савијања што има за последицу да су аксијално напрезање и савијање спрегнути и није их могуће декомпоновати.

Главни момент свих вектора напона унутар попречног пресека у односу на његово тежиште као редукционе тачке, односно

$$\vec{M} = \int_A \vec{\rho} \times \vec{\sigma}^1 \sqrt{G} d\eta d\zeta = \int_A \vec{\rho} \times \vec{\sigma}^1 \sqrt{G} d\eta d\zeta \quad (118)$$

где је

$$\vec{\rho} = \eta \vec{G}_2 + \zeta \vec{G}_3 \quad (119)$$

дефинише вектор момената, тј.

$$\vec{M} = M_i G^i \quad (120)$$

чије компоненте представљају момент торзије и моменте савијања око главних оса инерције и једнаки су

$$\begin{aligned} M_1 &= \sqrt{G} \int_A (\eta \sigma^{13} - \zeta \sigma^{12}) \sqrt{G} d\eta d\zeta = \sqrt{G} \int_A (\eta \sigma^{13} - \zeta \sigma^{12}) \sqrt{G} d\eta d\zeta \\ M_2 &= \sqrt{G} \int_A \zeta \sigma^{11} G_0 \sqrt{G} d\eta d\zeta = \sqrt{G} \int_A \zeta \sigma^{11} \sqrt{G} d\eta d\zeta \\ M_3 &= -\sqrt{G} \int_A \eta \sigma^{11} G_0 \sqrt{G} d\eta d\zeta = -\sqrt{G} \int_A \eta \sigma^{11} \sqrt{G} d\eta d\zeta \end{aligned} \quad (121)$$

Заменом компоненталних напона у једначине (121) успоставићемо зависност између момената савијања и торзије и одговарајућих деформација осе штапа као

$$\begin{aligned} M_1 &= \mu \sqrt{G^{11}} \int_A \frac{1}{G_0} [\eta (\gamma_{13} + \eta \kappa_1) - \zeta (\gamma_{12} - \zeta \kappa_1)] \sqrt{G} d\eta d\zeta \\ M_2 &= E (G^{11})^{3/2} \int_A \frac{\zeta}{G_0} (1 + \eta K_3 - \zeta K_2) (\varepsilon_{11} - \eta \kappa_3 + \zeta \kappa_2) \sqrt{G} d\eta d\zeta \\ M_3 &= -E (G^{11})^{3/2} \int_A \frac{\eta}{G_0} (1 + \eta K_3 - \zeta K_2) (\varepsilon_{11} - \eta \kappa_3 + \zeta \kappa_2) \sqrt{G} d\eta d\zeta \end{aligned} \quad (122)$$

ОДНОСНО

$$\begin{aligned}
M_1 &= \mu\sqrt{G^{11}}(\bar{I}_3\gamma_{13} - \bar{I}_2\gamma_{12} + I_{11}\kappa_1) \\
M_2 &= E(G^{11})^{3/2}(I_2\varepsilon_{11} + I_{22}\kappa_2 - I_{23}\kappa_3) \\
M_3 &= E(G^{11})^{3/2}(I_3\varepsilon_{11} - I_{32}\kappa_2 + I_{33}\kappa_3)
\end{aligned} \tag{123}$$

Уведене ознаке у претходним једначинама једнаке су

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_A \frac{(1 + \eta K_3 - \zeta K_2)}{G_0} \zeta \sqrt{G} d\eta d\zeta & I_3 &= \int_A \frac{(1 + \eta K_3 - \zeta K_2)}{G_0} \eta \sqrt{G} d\eta d\zeta \\
I_{22} &= \int_A \frac{\zeta^2}{G_0} \sqrt{G} d\eta d\zeta & I_{23} &= \int_A \frac{\eta\zeta}{G_0} \sqrt{G} d\eta d\zeta = I_{32} \\
I_{33} &= \int_A \frac{\eta^2}{G_0} \sqrt{G} d\eta d\zeta & I_{11} &= \int_A \frac{1}{G_0} (\eta^2 + \zeta^2) \sqrt{G} d\eta d\zeta
\end{aligned} \tag{124}$$

при чему величине I_{22} и I_{33} представљају аксијалне моменте инерције у односу на ζ и η координату док су I_{23} и I_{32} њихови производи инерције. I_{11} је поларни момент инерције и реферисан је у односу на ξ_λ координату. Такође и I_2 и I_3 су статички momenti у односу на ζ и η координату. У случају праволинијског штапа и Декартових координата аксијални momenti инерције постају

$$I_{22} = \int_A \zeta^2 dA \quad I_{33} = \int_A \eta^2 dA \tag{125}$$

док је

$$I_2 = I_3 = I_{23} = I_{32} = 0 \quad I_{11} = \int_A (\eta^2 + \zeta^2) dA \tag{126}$$

Ако уведемо вектор генералисаних сила и генералисаних деформација штапа, тј.

$$\mathbf{R}^T = [R^1, M_1, M_2, M_3] \quad \boldsymbol{\varepsilon}^T = [\varepsilon_{11}, \kappa_1, \kappa_2, \kappa_3] \tag{127}$$

релације (116) и (123) можемо написати у матричној форми као

$$\mathbf{R} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} \tag{128}$$

где је

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} E(G^{11})^2 A_1 & 0 & E(G^{11})^2 \bar{I}_2 & -E(G^{11})^2 \bar{I}_3 \\ 0 & \mu\sqrt{G^{11}} I_{11} & 0 & 0 \\ E(G^{11})^{3/2} I_2 & 0 & E(G^{11})^{3/2} I_{22} & -E(G^{11})^{3/2} I_{23} \\ -E(G^{11})^{3/2} I_3 & 0 & -E(G^{11})^{3/2} I_{32} & E(G^{11})^{3/2} I_{33} \end{bmatrix} \quad (129)$$

матрица еластичности Бернули - Ојлерове греде.

На основу израза (129) лако се да уочити да матрица еластичности Бернулијевог штапа, којом је успостављена зависност између вектора пресечних сила и деформација осе, није симетричног карактера. Несиметрија је последица закривљене геометрије осе штапа, односно ξ, η, ζ координатног система.

4.6.2 Принцип виртуалних померања

Матрицу крутости коначног елемента извешћемо применом принципа виртуалног рада [Rad14]. Унутрашњи виртуални рад линијског елемента у систему ξ_λ, η, ζ координата изразићемо као

$$\delta R_u(\xi_\lambda, \eta, \zeta) = \int_V \sigma^{11} \delta \varepsilon_{11}(\xi_\lambda) dV \quad (130)$$

Како је елемент диференцијалне запремине у поменутиим координатама једнак

$$dV(\xi_\lambda, \eta, \zeta) = \varepsilon_{123} d\xi_\lambda d\eta d\zeta = \sqrt{G} d\xi_\lambda d\eta d\zeta \quad (131)$$

једначину (130) написаћемо у облику

$$\delta R_u(\xi_\lambda, \eta, \zeta) = \int_V \sigma^{11} \delta \varepsilon_{11}(\xi_\lambda) \sqrt{G} d\xi_\lambda d\eta d\zeta \quad (132)$$

Интеграцијом по површини попречног пресека претходни интеграл постаје линијски. На тај начин за систем ξ_λ, η, ζ координата добијамо

$$\delta R_u(\xi, \eta, \zeta) = \int_s (N \delta \varepsilon_{11} + \bar{M}_1 \delta \kappa_1 + \bar{M}_2 \delta \kappa_2 + \bar{M}_3 \delta \kappa_3) d\xi \quad (133)$$

где је

$$\begin{aligned} N &= \int_A (1 + \eta K_3 - \zeta K_2) \sigma^{11} \sqrt{G} d\eta d\zeta & \bar{M}_1 &= \int_A (\eta \sigma^{13} - \zeta \sigma^{12}) \sqrt{G} d\eta d\zeta \\ \bar{M}_2 &= \int_A \zeta \sigma^{11} \sqrt{G} d\eta d\zeta & \bar{M}_3 &= -\int_A \eta \sigma^{11} \sqrt{G} d\eta d\zeta \end{aligned} \quad (134)$$

користећи при томе чињеницу да је

$$d\xi = \frac{\partial \xi}{\partial \xi_\lambda} d\xi_\lambda = \frac{1}{G_0} d\xi_\lambda \Rightarrow d\xi_\lambda = G_0 d\xi \quad (135)$$

\bar{M}_1 и \bar{M}_2, \bar{M}_3 су упрошћене форме момента торзије и момената савијања настале занемаривањем утицаја кривине осе штапа. Такође N представља упрошћену варијанту аксијалне силе коју сагласно једначинама (112) и (134)₁ можемо изразити као

$$N = R^1 - K_2 \bar{M}_2 - K_3 \bar{M}_3 \quad (136)$$

Из претходног разматрања можемо закључити да аксијална сила R^1 , моменти савијања M_2, M_3 и момент торзије M_1 нису енергетски коњуговани са одговарајућим деформацијама осе штапа. Енергетски коњуговане парове са овим величинама формирају упрошћене форме кореспондентних пресечних сила.

Заменом компонената напона (113) у једначину (132) добијамо да је

$$\begin{aligned} N &= E(G^{11})^2 \int_A (1 + \eta K_3 - \zeta K_2) \varepsilon_{11}(\xi_\lambda) \sqrt{G} d\eta d\zeta \\ \bar{M}_1 &= \mu G^{11} \int_A [\eta \gamma_{13}(\xi_\lambda) - \zeta \gamma_{12}(\xi_\lambda)] \sqrt{G} d\eta d\zeta \\ \bar{M}_2 &= E(G^{11})^2 \int_A \zeta \varepsilon_{11}(\xi_\lambda) \sqrt{G} d\eta d\zeta & \bar{M}_3 &= -E(G^{11})^2 \int_A \eta \varepsilon_{11}(\xi_\lambda) \sqrt{G} d\eta d\zeta \end{aligned} \quad (137)$$

Коначно вектор пресечних сила

$$\bar{\mathbf{R}}^r = [N \quad \bar{M}_1 \quad \bar{M}_2 \quad \bar{M}_3] \quad (138)$$

изразићемо преко деформација осе штапа, односно

$$\bar{\mathbf{R}} = \bar{\mathbf{D}}\boldsymbol{\varepsilon} \quad (139)$$

где је

$$\bar{\mathbf{D}} = \begin{bmatrix} E(G^{11})^2 A & 0 & E(G^{11})^2 I_2 & -E(G^{11})^2 I_3 \\ 0 & \mu G^{11} I_{11} & 0 & 0 \\ E(G^{11})^2 I_2 & 0 & E(G^{11})^2 I_{22} & -E(G^{11})^2 I_{23} \\ -E(G^{11})^2 I_3 & 0 & -E(G^{11})^2 I_{23} & E(G^{11})^2 I_{33} \end{bmatrix} \quad (140)$$

његова енергетски коњугована матрица еластичности при чему површина A има вредност

$$A = \int_A \frac{(1 + \eta K_3 - \zeta K_2)^2}{G_0} \sqrt{G} d\eta d\zeta \quad (141)$$

Матрица еластичности (140) је симетричног карактера с обзиром да је њоме извршено спрезање енергетски коњугованих величина $\bar{\mathbf{R}}$ и $\boldsymbol{\varepsilon}$.

4.6.3 Матрица крутости изогеометријског гредног елемента

Успоставимо надаље везу између деформација осе штапа и његових градијената померања

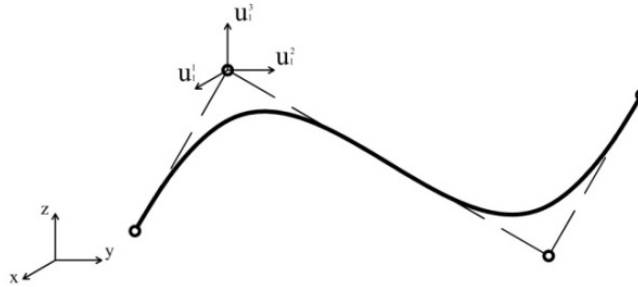
$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L}_m \mathbf{u}_{,1}^m \quad (142)$$

где је

$$\mathbf{L}_m = \begin{bmatrix} x_{,1}^m & 0 & 0 \\ T_3^m & T_2^m & T_1^m \\ \Gamma_{11}^1 x_{,3}^m & -x_{,3}^m & 0 \\ -\Gamma_{11}^1 x_{,2}^m & x_{,2}^m & 0 \end{bmatrix} \quad (\mathbf{u}_{,1}^m)^T = [u_{m,1} \quad u_{m,11} \quad u_{m,111}] \quad (143)$$

Увођењем вектора генерализаних координата који садржи све контролне степене слободе коначног елемента, Сл.4.25, тј.

$$\mathbf{q}^T = [\mathbf{q}_1^T \quad \mathbf{q}_2^T \quad \dots \quad \mathbf{q}_I^T \quad \dots \quad \mathbf{q}_N^T] \quad \mathbf{q}_I^T = [u_I^1 \quad u_I^2 \quad u_I^3] \quad (144)$$



Слика 4.25 Контролни степени слободе Бернули-Ојлерове греде

успоставићемо зависност између вектора $\mathbf{u}_{,1}$ и степени слободе линијског елемента \mathbf{q} на следећи начин

$$\mathbf{u}_{,1} = \mathbf{B}_{u\varphi} \mathbf{q} \quad (145)$$

где је

$$\mathbf{u}_{,1} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{,1}^1 \\ \mathbf{u}_{,1}^2 \\ \mathbf{u}_{,1}^3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_{u\varphi} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{u1}^1 & \mathbf{B}_{u2}^1 & \dots & \mathbf{B}_{ul}^1 & \dots & \mathbf{B}_{uN}^1 \\ \mathbf{B}_{u1}^2 & \mathbf{B}_{u2}^2 & \dots & \mathbf{B}_{ul}^2 & \dots & \mathbf{B}_{uN}^2 \\ \mathbf{B}_{u1}^3 & \mathbf{B}_{u2}^3 & \dots & \mathbf{B}_{ul}^3 & \dots & \mathbf{B}_{uN}^3 \end{bmatrix} \quad (146)$$

ОДНОСНО

$$\mathbf{B}_{ul}^1 = \begin{bmatrix} R_{l,1} & 0 & 0 \\ R_{l,1} & 0 & 0 \\ R_{l,111} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_{ul}^2 = \begin{bmatrix} 0 & R_{l,1} & 0 \\ 0 & R_{l,11} & 0 \\ 0 & R_{l,111} & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_{ul}^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & R_{l,1} \\ 0 & 0 & R_{l,11} \\ 0 & 0 & R_{l,111} \end{bmatrix} \quad (147)$$

На основу претходних израза деформацију осе штапа изразићемо у функцији од генерализаних координата коначног елемента као

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L} \mathbf{u}_{,1} = \mathbf{L} \mathbf{B}_{u\varphi} \mathbf{q} = \mathbf{B}_L \mathbf{q} \quad (148)$$

при чему је

$$\mathbf{L} = [\mathbf{L}_1 \quad \mathbf{L}_2 \quad \mathbf{L}_3] \quad \mathbf{B}_L = \mathbf{L}\mathbf{B}_{u\varphi} \quad (149)$$

Уважавајући претходне изразе унутрашњи виртуални рад линијског елемента можемо изразити и у функцији од контролних степени слободе, односно

$$\delta R_u = \int_s \bar{\mathbf{R}}^T \delta \boldsymbol{\varepsilon} d\xi = \int_s \boldsymbol{\varepsilon}^T \bar{\mathbf{D}} \delta \boldsymbol{\varepsilon} d\xi = \mathbf{q}^T \left(\int_s \mathbf{B}_L^T \bar{\mathbf{D}} \mathbf{B}_L d\xi \right) \delta \mathbf{q} \quad (150)$$

или

$$\delta R_u = \mathbf{q}^T \mathbf{K}_L \delta \mathbf{q} \quad (151)$$

где је

$$\mathbf{K}_L = \int_s \mathbf{B}_L^T \bar{\mathbf{D}} \mathbf{B}_L d\xi \quad (152)$$

матрица крутости изогеометријског коначног елемента.

4.6.4 Вектор еквивалентних контролних сила

Еквивалентно контролно оптерећење одредићемо из анализе спољашњег виртуалног рада гредног елемента [Rad14], односно

$$\delta R_s = - \int_s \vec{p}(\xi) \delta \vec{u}(\xi) d\xi \quad (153)$$

при чему вектори

$$\vec{p} = p^k \vec{i}_k \quad (154)$$

садрже Декартове компоненте расподељених оптерећења.

Заменом израза (65) у једначину (153) следи да је

$$\delta R_s = - \int_s \vec{p}(\xi) \left(\sum_{I=1}^N R_I(\xi) \delta \vec{u}_I \right) d\xi \quad (155)$$

односно

$$\delta R_s = - \sum_{I=1}^N \int_s R_I(\xi) \vec{p}(\xi) \delta \vec{u}_I d\xi \quad (156)$$

Увођењем генералисаног вектора расподељених терета који садржи компоненте и оптерећења и момената, тј

$$\mathbf{p}^T = [p^1 \quad p^2 \quad p^3] \quad (157)$$

претходни израз можемо написати као

$$\delta R_s = - \sum_{I=1}^N [\int_s R_I(\xi) \mathbf{p}^T(\xi) d\xi] \delta \mathbf{q}_I \quad (158)$$

или

$$\delta R_s = - \sum_{I=1}^N \mathbf{Q}_I^T \delta \mathbf{q}_I \quad (159)$$

при чему величине

$$\mathbf{Q}_I = \int_s R_I(\xi) \mathbf{p}(\xi) d\xi \quad (160)$$

представљају еквивалентне контролне силе.

4.7 Нумерички примери са изогеометријским Бернули-Ојлеровим гредним коначним елементом

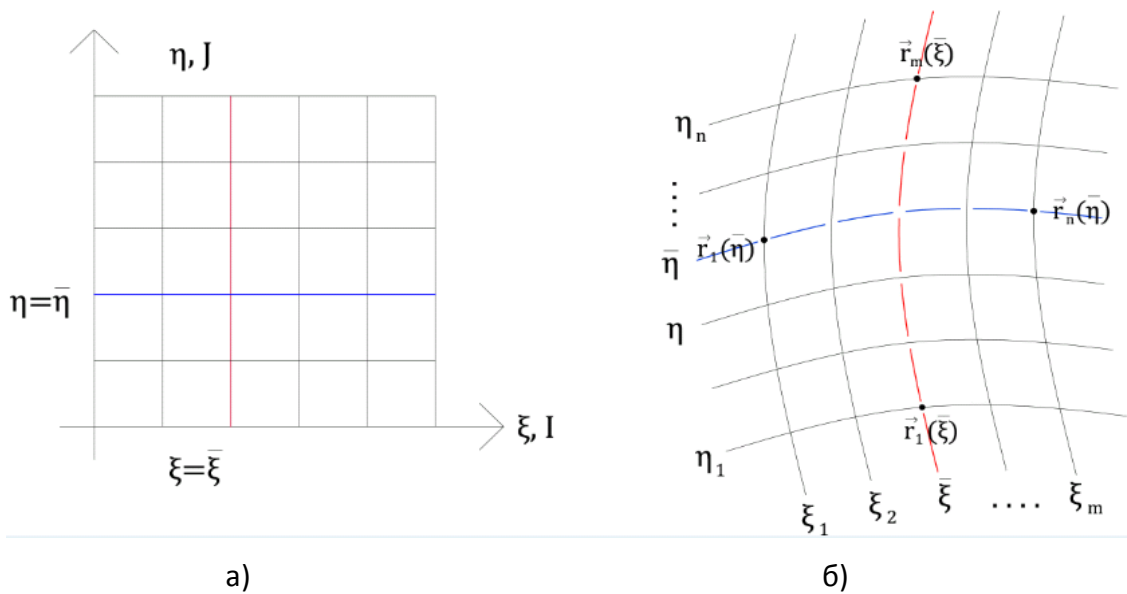
У складу са изложеним теоријским концептом теорије штапа у сплајн параметарској координати, у овом раду су формулисани изогеометријски Бернули Ојлерови гредни коначни елементи произвољног континуитета. Формулисаним елементима извршена је напонско деформацијаска анализа гредних структура произвољног облика.

Структуре посматране у овом раду могу се моделовати мрежом гредних елемената у два независна правца, формирајући на тај начин системе у инжењерској пракси познате под називом гредни роштиљи. Полазећи од NURBS описа љуске, гредни роштиљ формираћемо на следећи начин:

Из израза

$$\vec{r}(\xi, \eta) = \sum_{I,J=1}^{N,M} R_{IJ}(\xi, \eta) \vec{r}_{IJ}$$

линију (греду) у ξ правцу формираћемо фиксираност вредности η параметра Сл. 4.26 а и б.



Слика 4.26 Гредни роштиљ - а) параметарски простор, б) реални простор

$$\vec{r}(\xi, \bar{\eta}) = \sum_{I=1}^N R_{IJ}(\xi, \bar{\eta}) \vec{r}_I(\bar{\eta}) \quad (A1)$$

где је

$$\vec{r}_I(\bar{\eta}) = \sum_{J=1}^M R_{IJ}(\bar{\eta}) \vec{r}_{IJ}(\bar{\eta}) \quad (A2)$$

На исти начин одредићемо и η линију за вредности ξ параметра $\xi = \bar{\xi}$, односно

$$\vec{r}(\bar{\xi}, \eta) = \vec{r}(\eta) = \sum_{I,J=1}^{N,M} R_{IJ}(\bar{\xi}, \eta) \vec{r}_{IJ} = \sum_{J=1}^M R_J(\eta) \vec{r}_J(\bar{\xi}) \quad (B1)$$

где је

$$\vec{r}_j = \vec{r}_j(\vec{\xi}) = \sum_{I=1}^N R_{IJ}(\vec{\xi}) \vec{r}_{IJ} \quad (\text{B2})$$

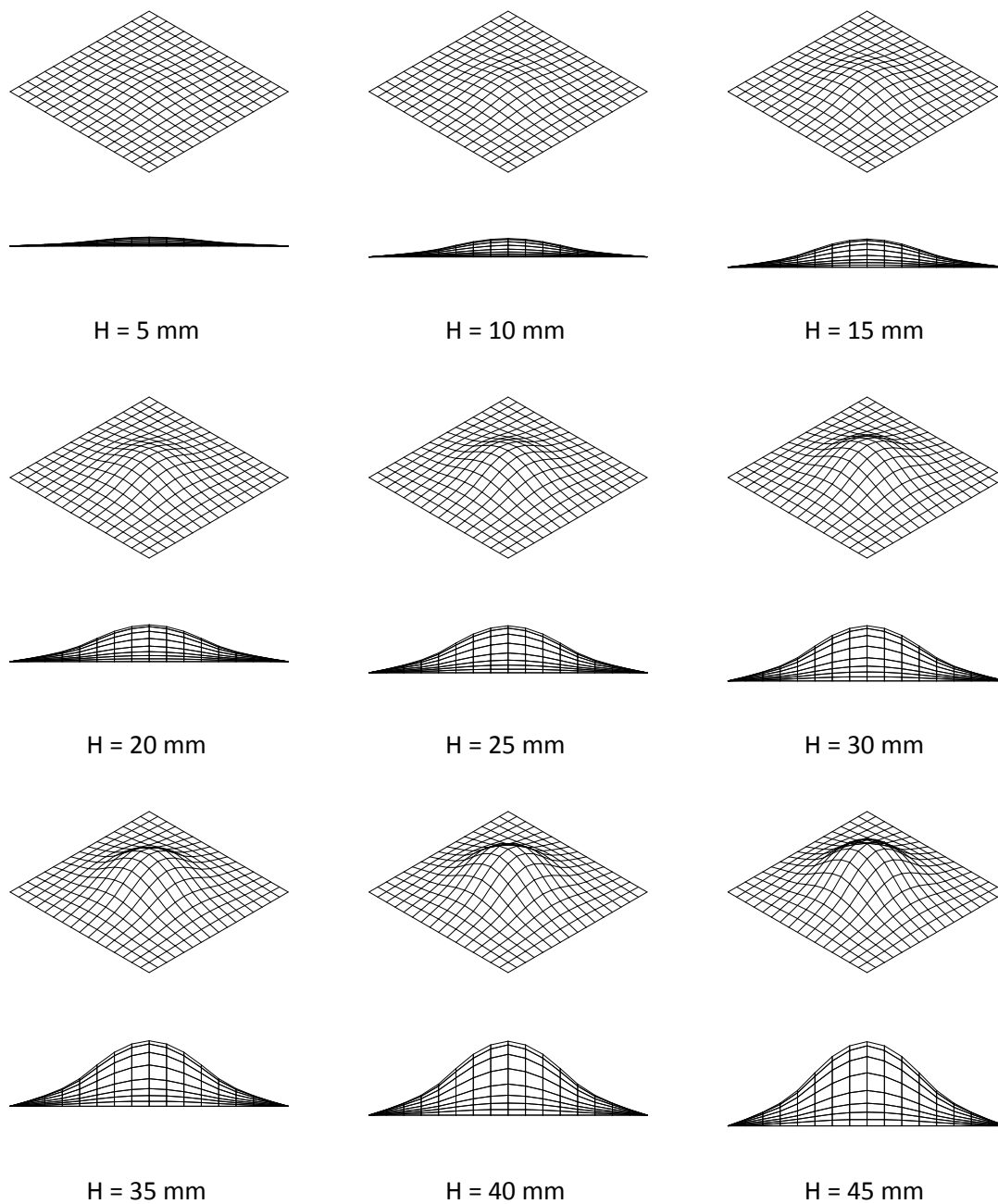
На тај начин контролним тачкама за систем вредности сплајн параметара

$$\tilde{\eta}^T = [\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n] \tilde{\xi}^T = [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m]$$

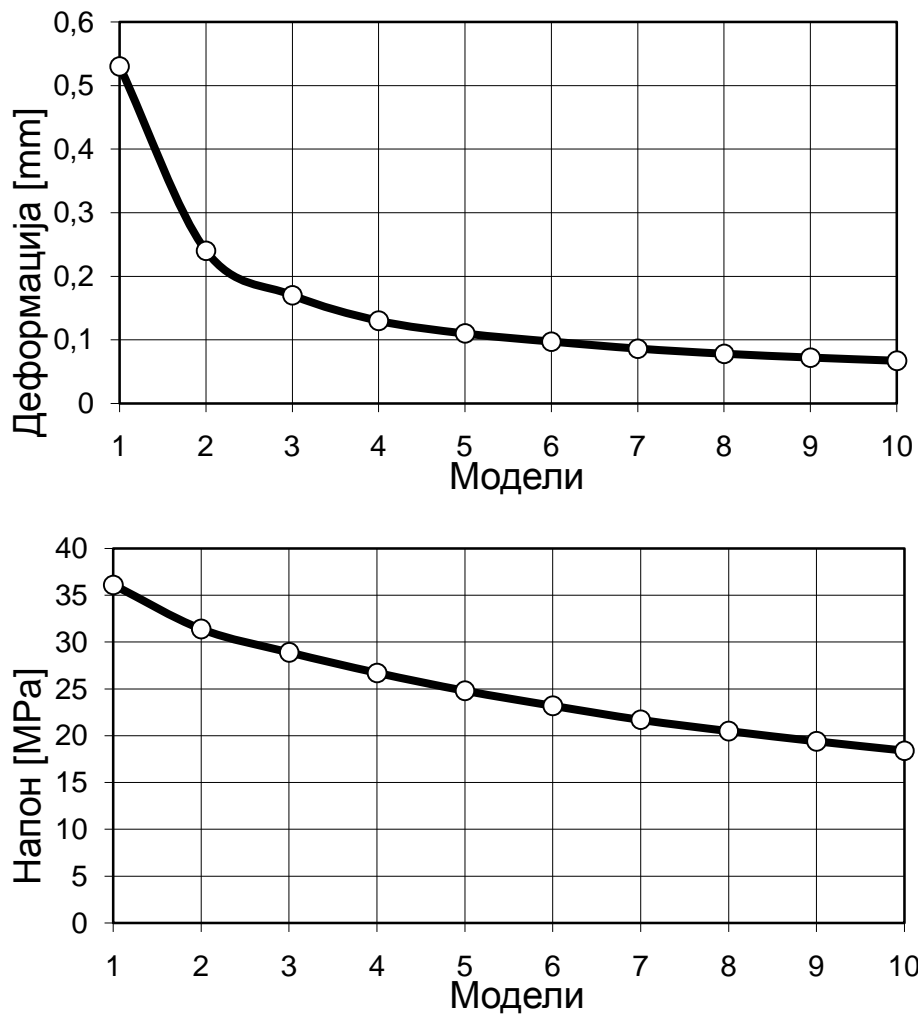
формирамо гредни роштиљ $n \times m$.

Изогеометријски гредни елементи који се формулишу на начин приказан у овом раду, употпуности се могу применити и на анализу модела гредног роштиља формираног изразима (A1: A2) и (B1: B2).

4.8 Прорачун љуски и греда NURBS површи класичном методом коначних елемената



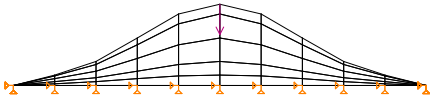
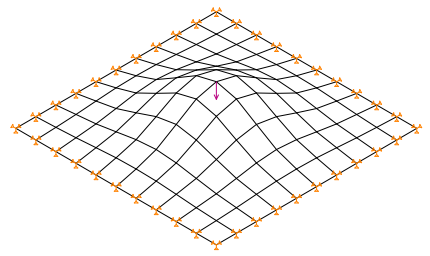
Слика 4.27 Анализа утицаја висине куполе $H = 5 - 50$ mm



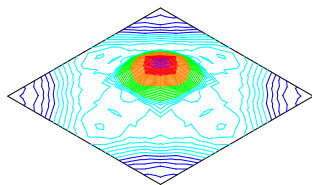
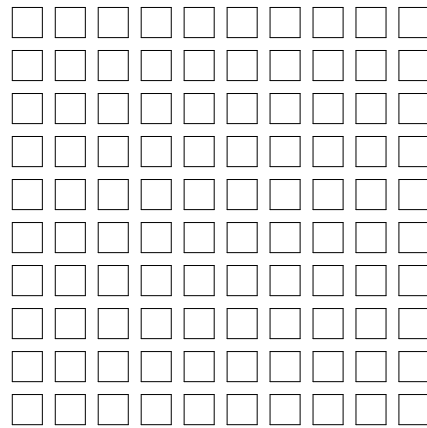
Слика 4.28 Дијаграми деформација и напона резматраних модела

Гранични услови (ослонци и оптерећења) су исти као код предходних модела. На основу изведене анализе можемо закључити да моде P2B.6 са висином $H=30$ mm има најоптималније понашање.

4.8.1 Двоструко симетрична купола типа љуске – моделовање геометрије куполе извршено је са три густине мреже KE љуске (10x10, 16x16 и 20x20 подела)

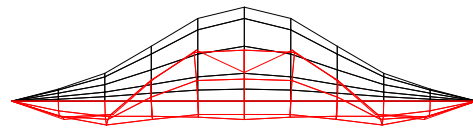


Оптерећење $P = 15$ [N]

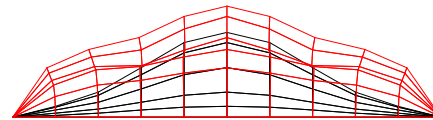


5.68E-01	...	6.82E-01
4.55E-01	...	5.68E-01
3.41E-01	...	4.55E-01
2.27E-01	...	3.41E-01
1.14E-01	...	2.27E-01
0.00E+00	...	1.14E-01

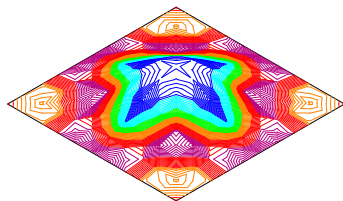
Еквивалентни напон [MPa]



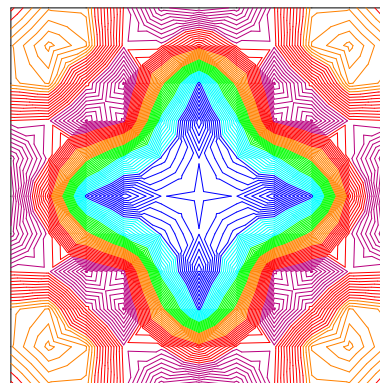
Деформација, $f_{\max} = 0,0079$ mm



Прва сопствена осцилација, $f_{01} = 1741$ Hz

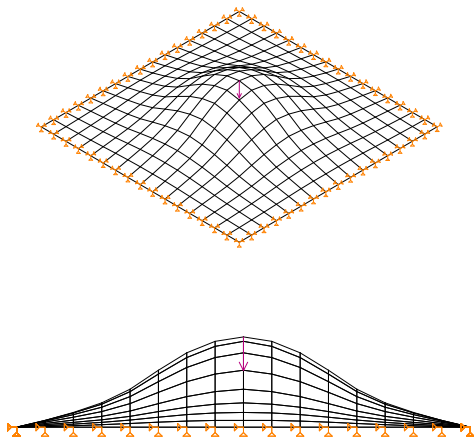


5.53E+07	...	9.60E+07
1.46E+07	...	5.53E+07
-2.61E+07	...	1.46E+07
-6.69E+07	...	-2.61E+07
-1.08E+08	...	-6.69E+07
-1.48E+08	...	-1.08E+08

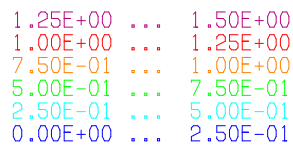
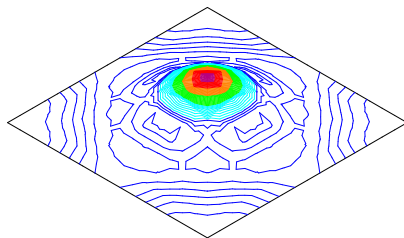
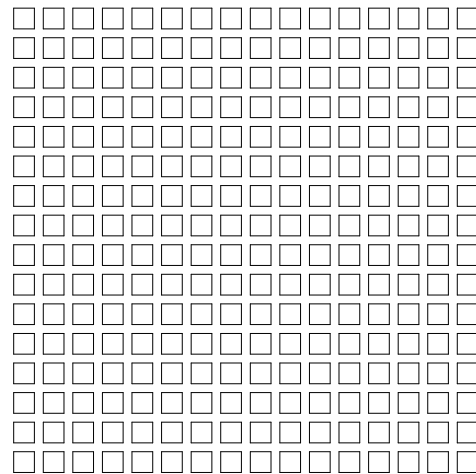


Густина енергије деформације [Nmm/mm³]

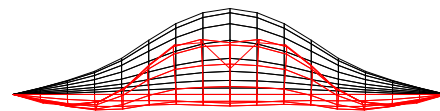
P2A.1 Модел 150x150 mm и резултати статичког и динамичког прорачуна љуске



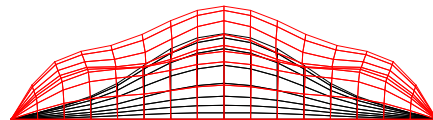
Оптерећење $P = 15 \text{ [N]}$



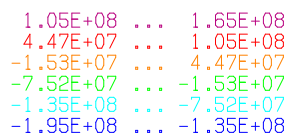
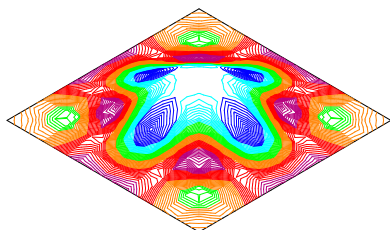
Еквивалентни напон $[\text{MPa}]$



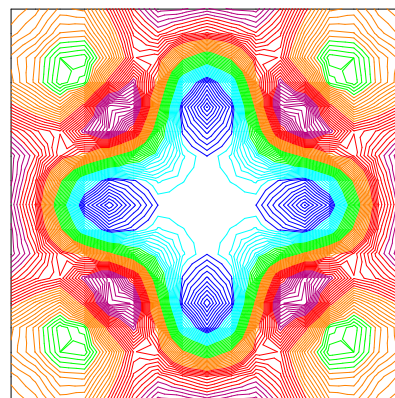
Деформација, $f_{\max} = 0,01 \text{ mm}$



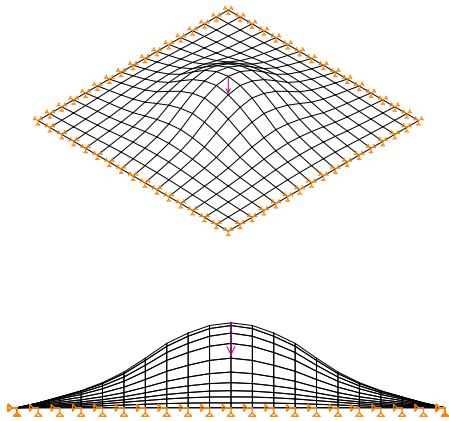
Прва сопствена осцилација, $f_{o1} = 1780 \text{ Hz}$



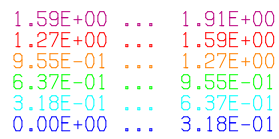
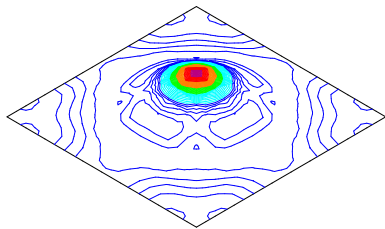
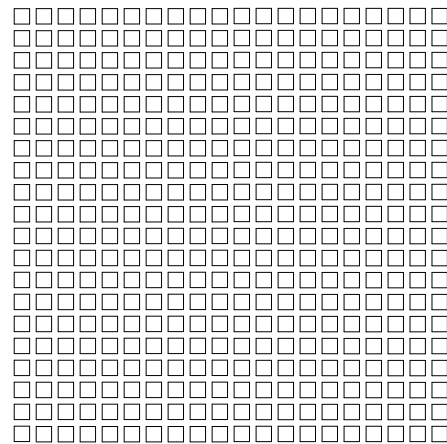
Густина енергије деформације $[\text{Nmm/mm}^3]$



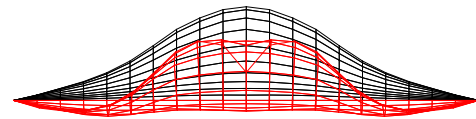
P2B.2 Модел $150 \times 150 \text{ mm}$ и резултати статичког и динамичког прорачуна љуске



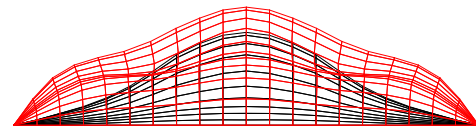
Оптерећење $P = 15 \text{ [N]}$



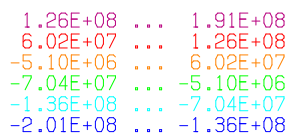
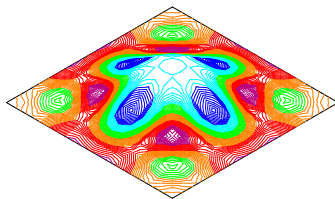
Еквивалентни напон $[\text{MPa}]$



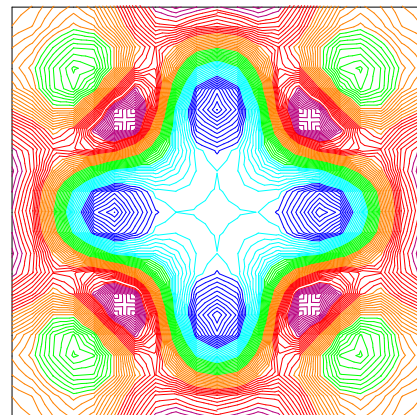
Деформација, $f_{\text{max}} = 0,011 \text{ mm}$

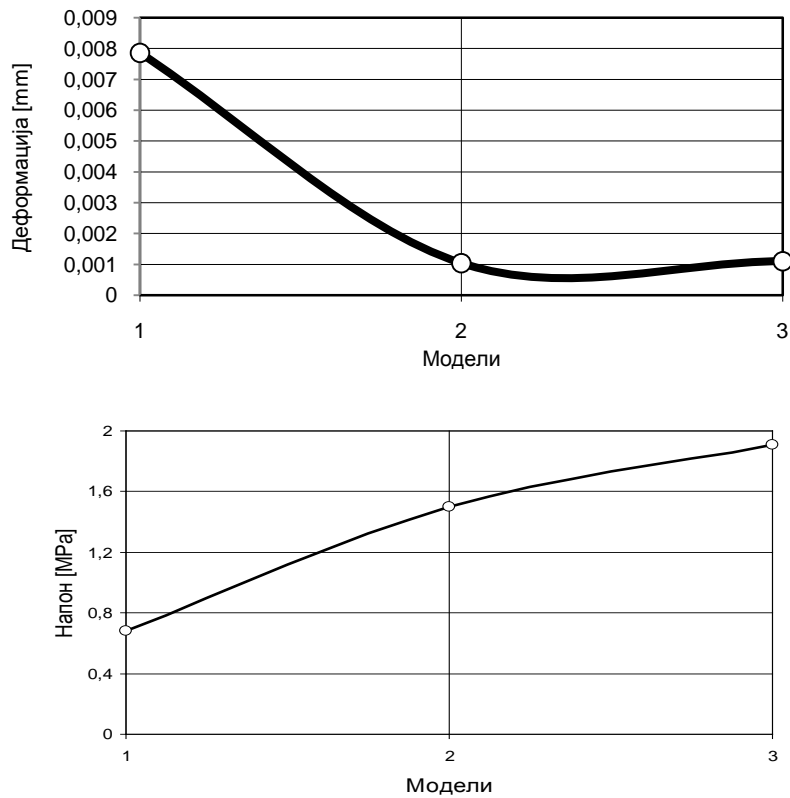


Прва сопствена осцилација, $f_{o1} = 1768 \text{ Hz}$



Густина енергије деформације $[\text{Nmm/mm}^3]$



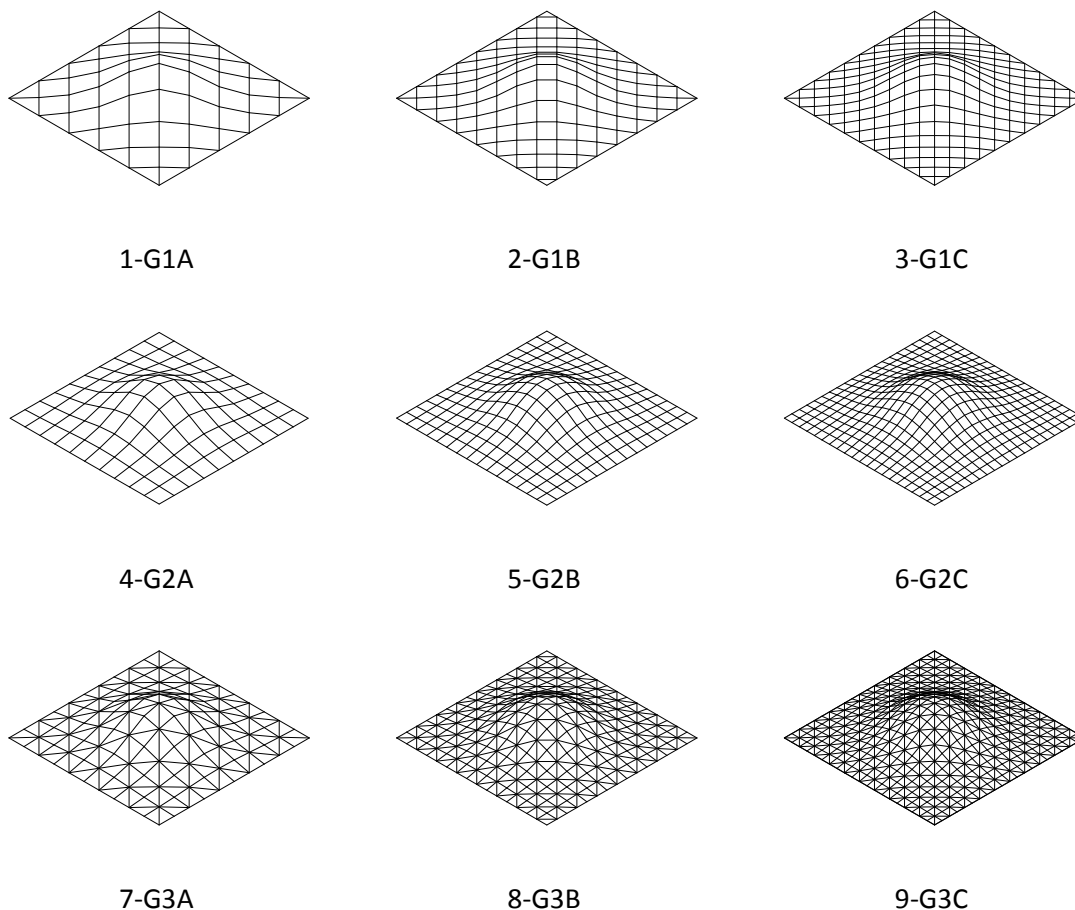


Слика 4.29 Утицај густине мреже КЕ на деформацију и напон

Утврдили смо да је модел P2B.2 (фина мрежа) довољан и репрезентативан за закључак конвергенције деформације и напона. Можемо закључити за ову врсту купола да је довољна мрежа густине 1/15 дужине куполе.

Следи утврђивање висине куполе на моделу P2B.2 (фина мрежа – репрезентативна густина мреже). Варирање висина је изведено у распону 5 до 50 mm, са кораком од 5 mm, односно до висине куполе у износу 1/3 њене дужине.

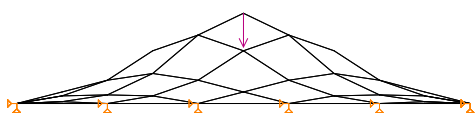
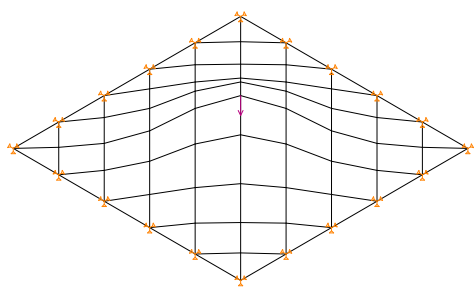
4.8.2 Двоструко симетрична купола типа гредног роштиља



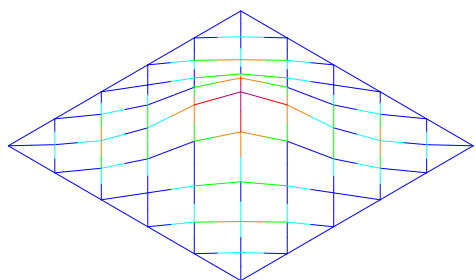
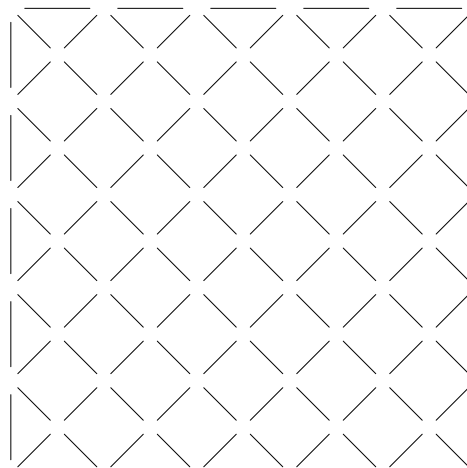
Слика 4.30 Дати су модели разматраних купола типа гредног роштиља

Потребно је утврдити утицај три густине гредног роштиља куполе за три врсте матрица од 45^0 , 90^0 и $45^0 + 90^0$.

У наставку ове анализе дат је приказ разматраних појединачних модела димензија основе $150 \times 150 \text{ mm}$ и висине $H=30 \text{ mm}$. Следи приказ резултат статичког и динамичког прорачуна за свих девет модела.

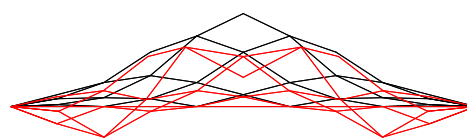


Оптерећење $P = 15$ [N]

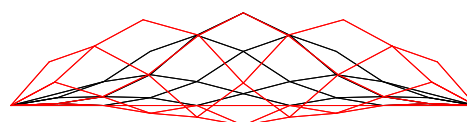


1.73E+01	...	2.07E+01
1.38E+01	...	1.73E+01
1.04E+01	...	1.38E+01
6.90E+00	...	1.04E+01
3.45E+00	...	6.90E+00
0.00E+00	...	3.45E+00

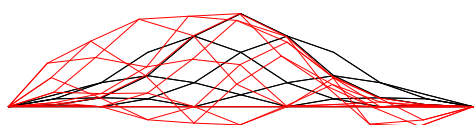
Еквивалентни напон [MPa]



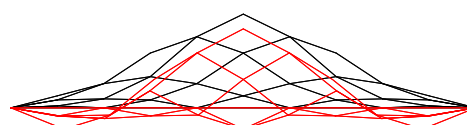
Деформација, $f_{\max} = 0,27$ mm



Прва сопствена осцилација, $f_{01} = 736$ Hz

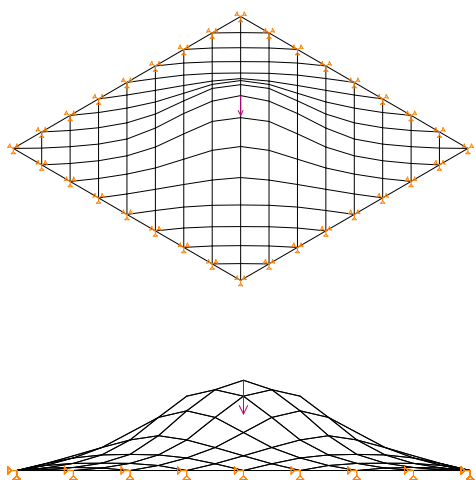


Друга сопствена осцилација, $f_{02} = 859$ Hz

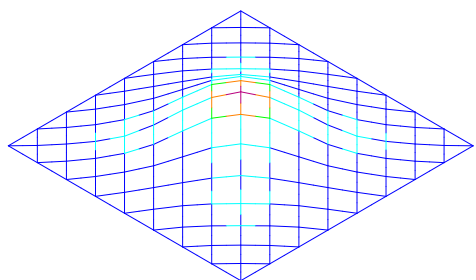
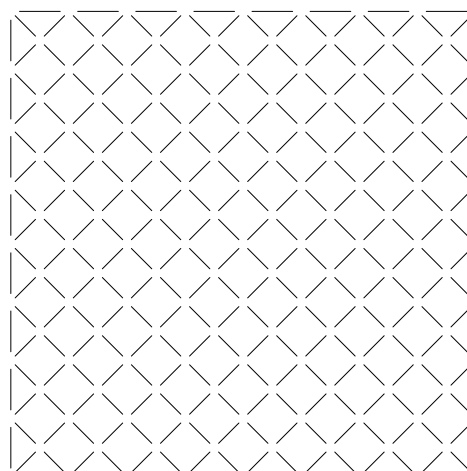


Трећа сопствена осцилација, $f_{03} = 1569$ Hz

1-G1A Модел са грубом матрицом од 45^0 и резултатима стат. и динам. прорачуна

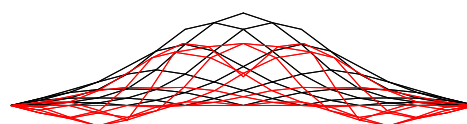


Оптерећење $P = 15 \text{ [N]}$

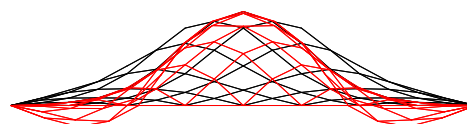


1.96E+01	...	2.35E+01
1.57E+01	...	1.96E+01
1.18E+01	...	1.57E+01
7.83E+00	...	1.18E+01
3.92E+00	...	7.83E+00
0.00E+00	...	3.92E+00

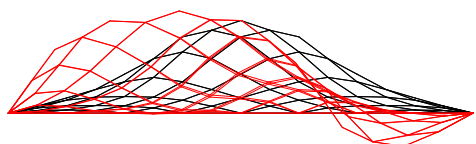
Еквивалентни напон [MPa]



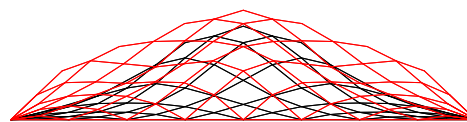
Деформација, $f_{\max} = 0,148\text{mm}$



Прва сопствена осцилација, $f_{01} = 804\text{Hz}$

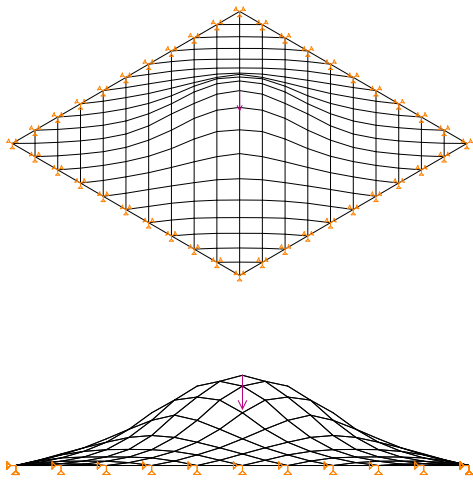


Друга сопствена осцилација, $f_{02} = 906\text{Hz}$

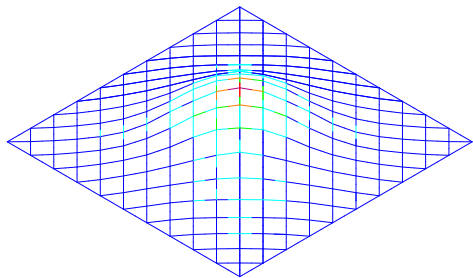
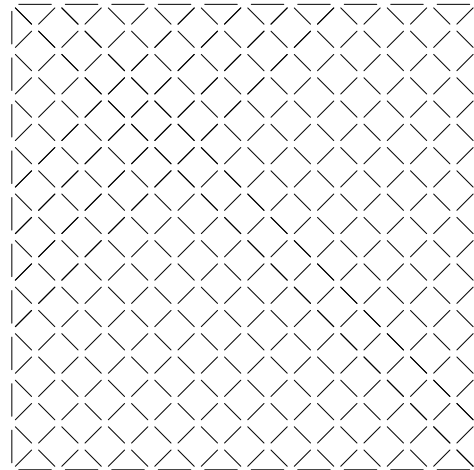


Трећа сопствена осцилација, $f_{03} = 1050\text{Hz}$

2-G1B Модел са фином матрицом од 45^0 и резултатима стат. и динам. прорачуна

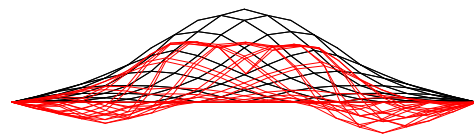


Оптерећење $P = 15 \text{ [N]}$

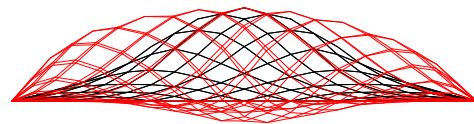


Еквивалентни напон [MPa]

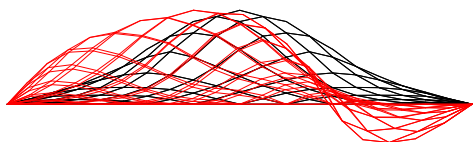
1.55E+01	...	1.86E+01
1.24E+01	...	1.55E+01
9.30E+00	...	1.24E+01
6.20E+00	...	9.30E+00
3.10E+00	...	6.20E+00
0.00E+00	...	3.10E+00



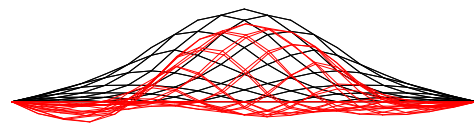
Деформација, $f_{\max} = 0,09 \text{ mm}$



Прва сопствена осцилација, $f_{01} = 854 \text{ Hz}$

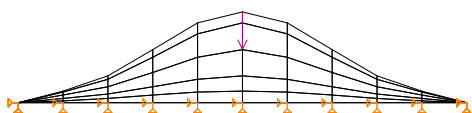
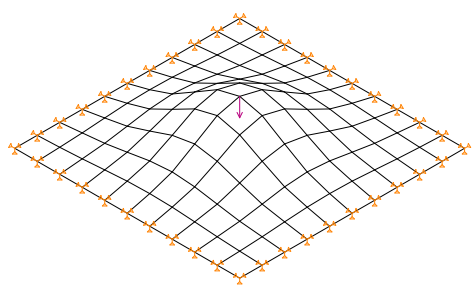


Друга сопствена осцилација, $f_{02} = 932 \text{ Hz}$

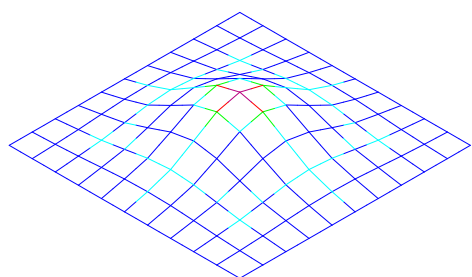
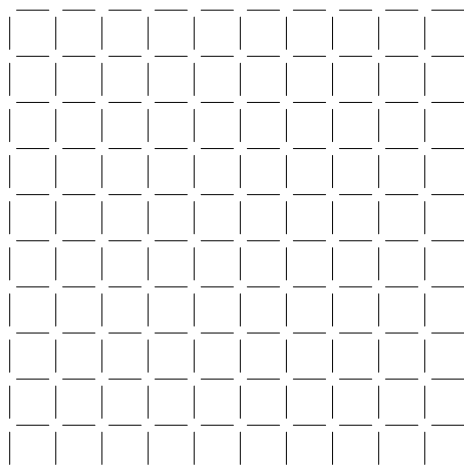


Трећа сопствена осцилација, $f_{03} = 1046 \text{ Hz}$

3-G1C Модел са врло фином матрицом од 45^0 и резултатима ста. и дин. прорачуна

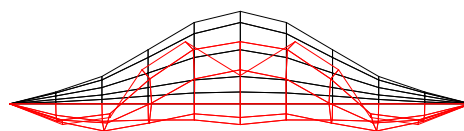


Оптерећење $P = 15$ [N]

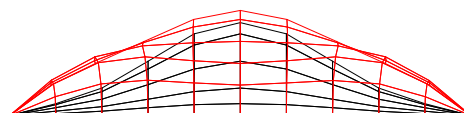


1.90E+01	...	2.28E+01
1.52E+01	...	1.90E+01
1.14E+01	...	1.52E+01
7.60E+00	...	1.14E+01
3.80E+00	...	7.60E+00
0.00E+00	...	3.80E+00

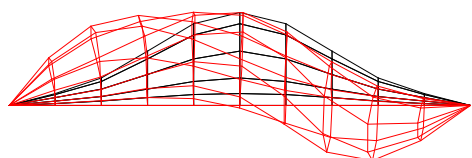
Еквивалентни напон [MPa]



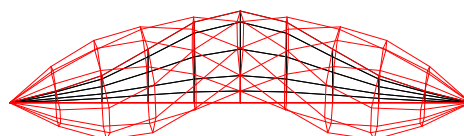
Деформација, $f_{\max} = 0,15$ mm



Прва сопствена осцилација, $f_{01} = 576$ Hz

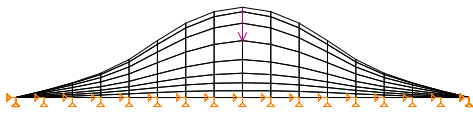
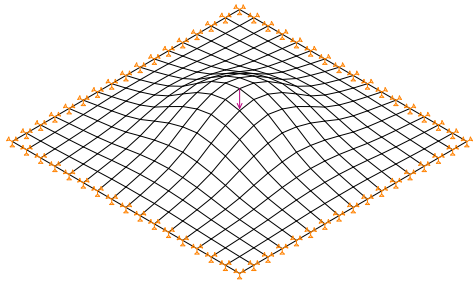


Друга сопствена осцилација, $f_{02} = 618$ Hz

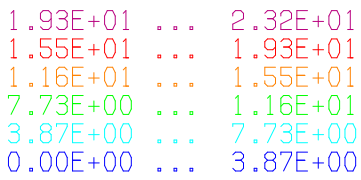
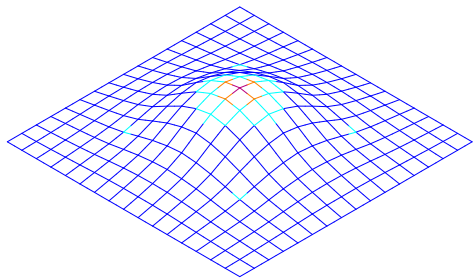
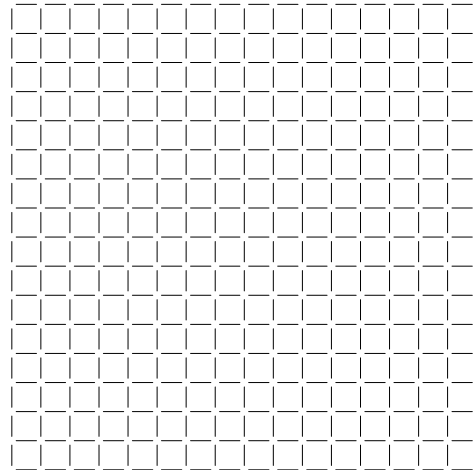


Трећа сопствена осцилација, $f_{03} = 676$ Hz

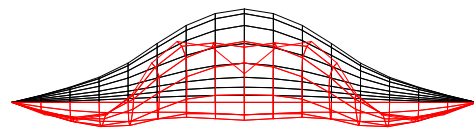
4-G2A Модел са грубом матрицом од 90^0 и резултатима стат. и динам. прорачуна



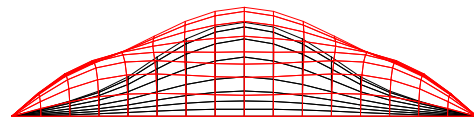
Оптерећење $P = 15 \text{ [N]}$



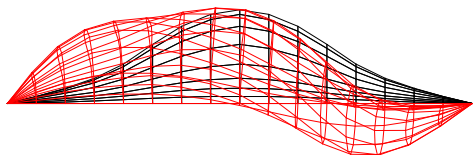
Еквивалентни напон [MPa]



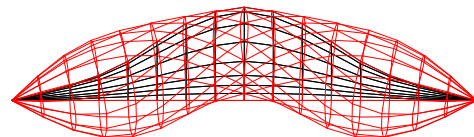
Деформација, $f_{\max} = 0,097\text{mm}$



Прва сопствена осцилација, $f_{01} = 633\text{Hz}$

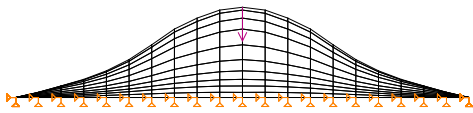
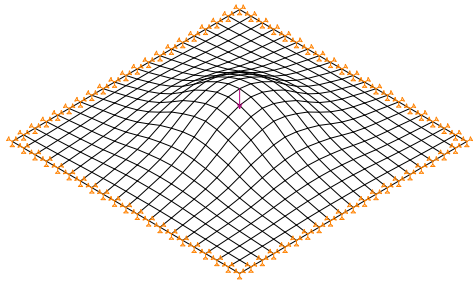


Друга сопствена осцилација, $f_{02} = 699\text{Hz}$

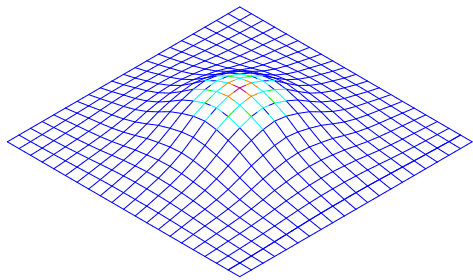
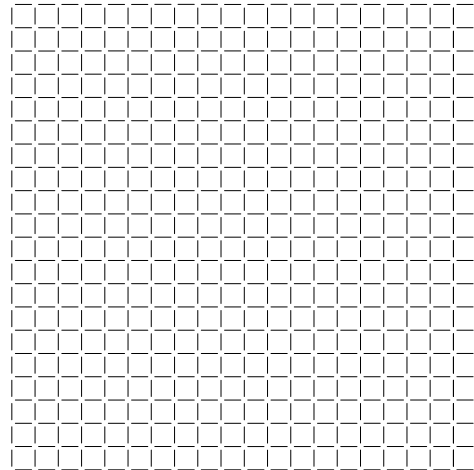


Трећа сопствена осцилација, $f_{03} = 814\text{Hz}$

5-G2B Модел са фином матрицом од 90^0 и резултатима стат. и динам. прорачуна

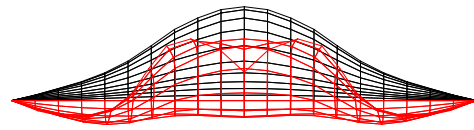


Оптерећење $P = 15 \text{ [N]}$

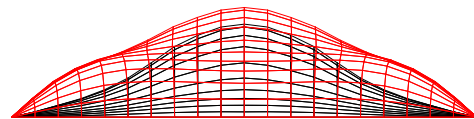


1.80E+01	...	2.16E+01
1.44E+01	...	1.80E+01
1.08E+01	...	1.44E+01
7.20E+00	...	1.08E+01
3.60E+00	...	7.20E+00
0.00E+00	...	3.60E+00

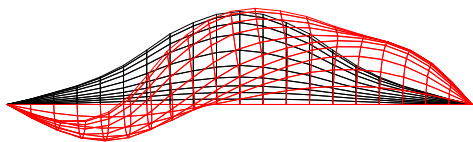
Еквивалентни напон [MPa]



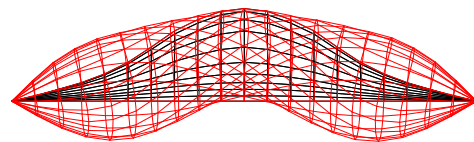
Деформација, $f_{\max} = 0,074\text{mm}$



Прва сопствена осцилација, $f_{01} = 682\text{Hz}$

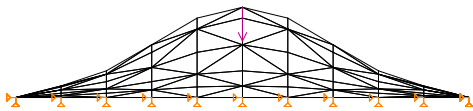
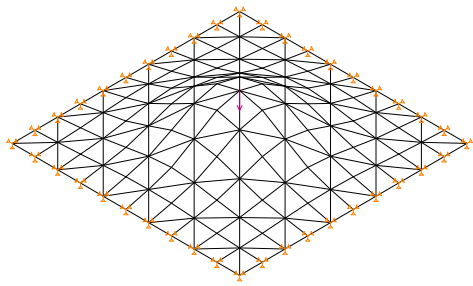


Друга сопствена осцилација, $f_{02} = 756\text{Hz}$

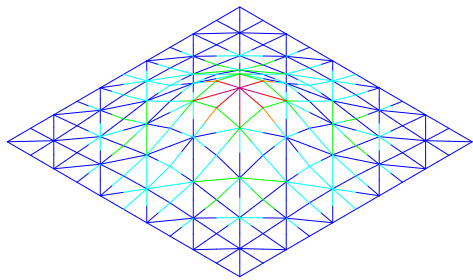
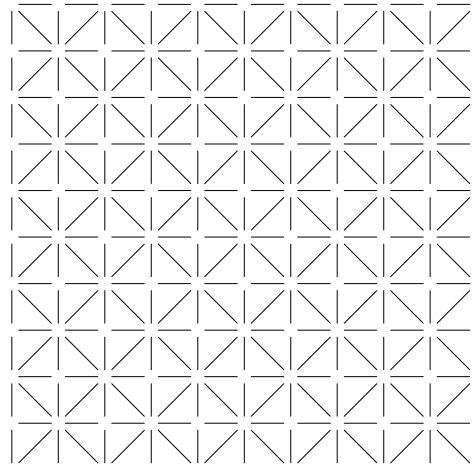


Трећа сопствена осцилација, $f_{03} = 918\text{Hz}$

6-G2C Модел са врло фином матрицом од 45^0 и резултатима стат.и динам. прорач.

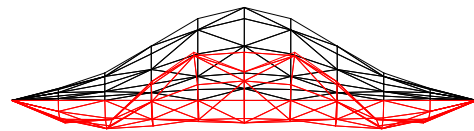


Оптерећење $P = 15 \text{ [N]}$

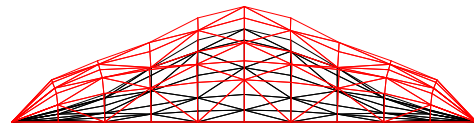


4.45E+00	...	5.34E+00
3.56E+00	...	4.45E+00
2.67E+00	...	3.56E+00
1.78E+00	...	2.67E+00
8.90E-01	...	1.78E+00
0.00E+00	...	8.90E-01

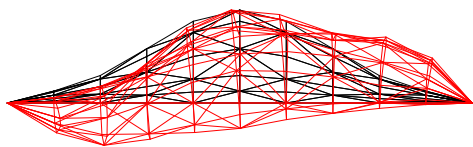
Еквивалентни напон [MPa]



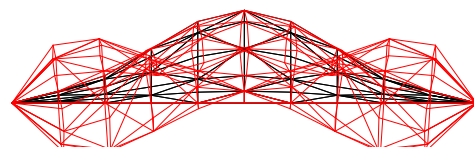
Деформација, $f_{\max} = 0,043\text{mm}$



Прва сопствена осцилација, $f_{01} = 1006\text{Hz}$

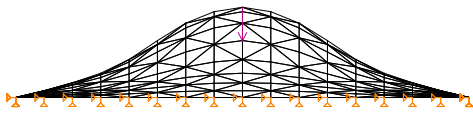
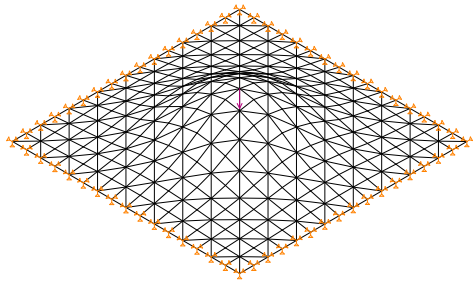


Друга сопствена осцилација, $f_{02} = 1064\text{Hz}$

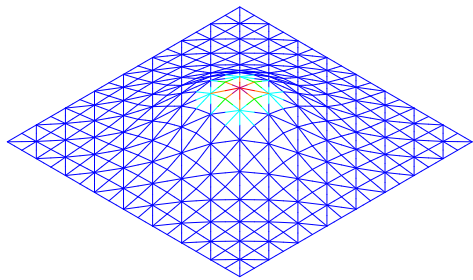
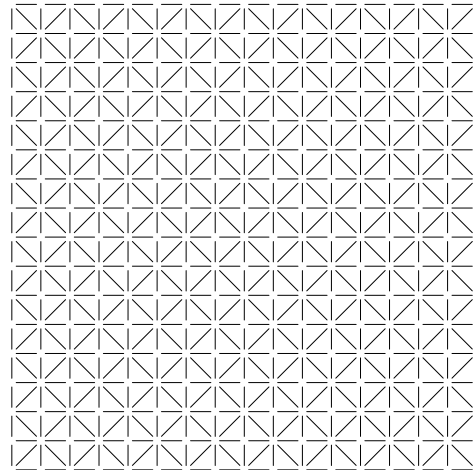


Трећа сопствена осцилација, $f_{03} = 1628\text{Hz}$

7-G3A Модел са грубом матрицом од $45^0 + 90^0$ и стати.и динами. прорачуном

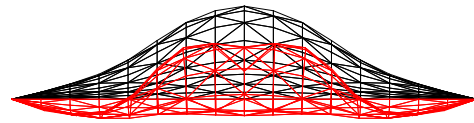


Оптерећење $P = 15 \text{ [N]}$

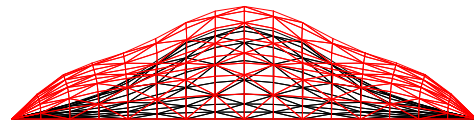


7.23E+00	...	8.68E+00
5.79E+00	...	7.23E+00
4.34E+00	...	5.79E+00
2.89E+00	...	4.34E+00
1.45E+00	...	2.89E+00
0.00E+00	...	1.45E+00

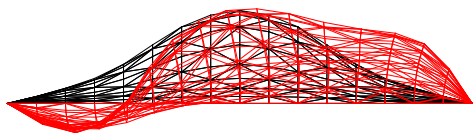
Еквивалентни напон [MPa]



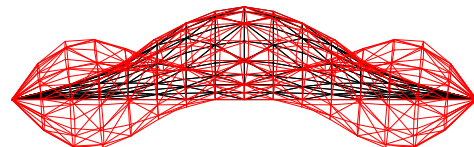
Деформација, $f_{\max} = 0,035\text{mm}$



Прва сопствена осцилација, $f_{01} = 1016\text{Hz}$

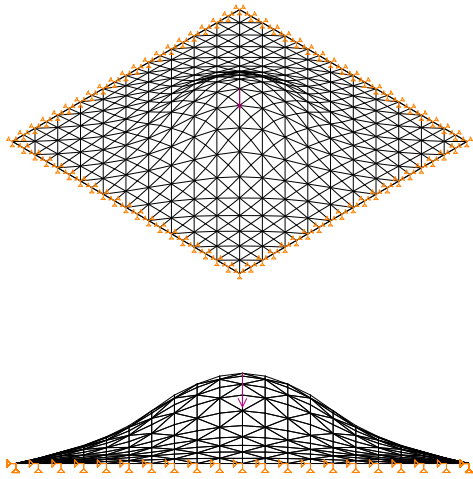


Друга сопствена осцилација, $f_{02} = 1084\text{Hz}$

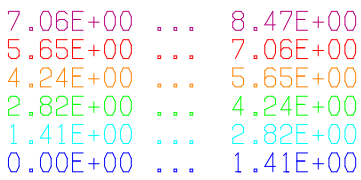
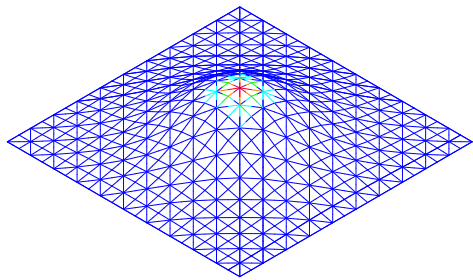
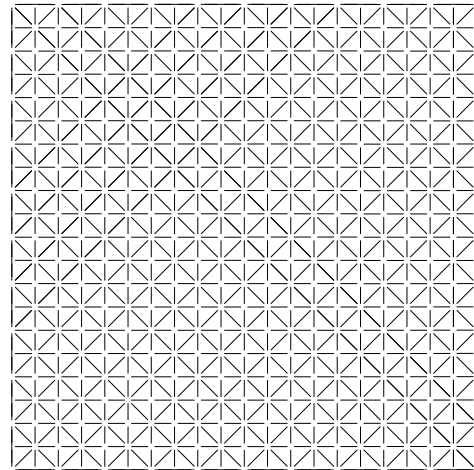


Трећа сопствена осцилација, $f_{03} = 1711\text{Hz}$

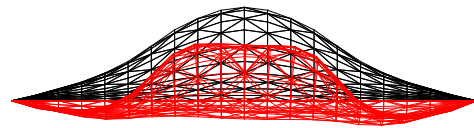
8-G3B Модел са фином матрицом од $45^0 + 90^0$ и стати. и динам. прорачуном



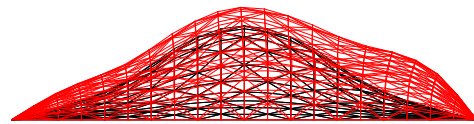
Оптерећење $P = 15 \text{ [N]}$



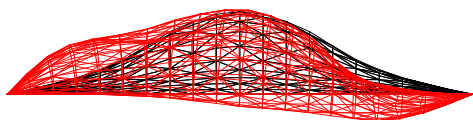
Еквивалентни напон [MPa]



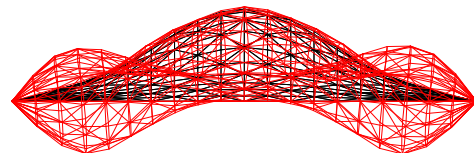
Деформација, $f_{\max} = 0,026\text{mm}$



Прва сопствена осцилација, $f_{o1} = 1023\text{Hz}$

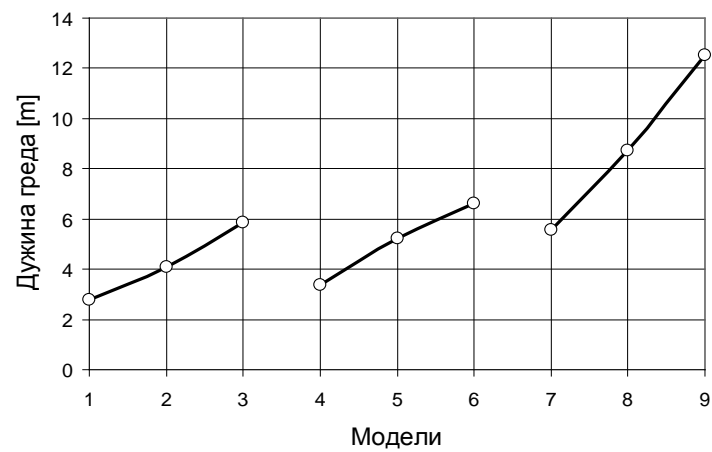
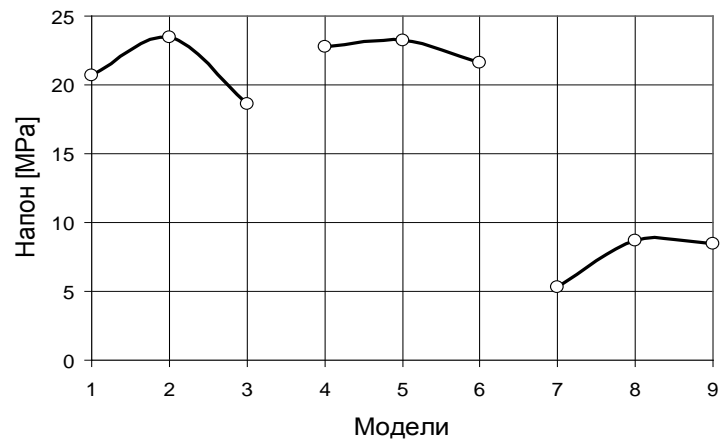
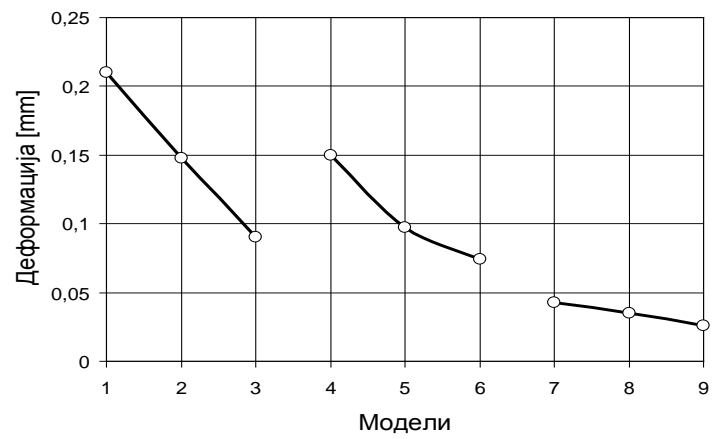


Друга сопствена осцилација, $f_{o2} = 1086\text{Hz}$

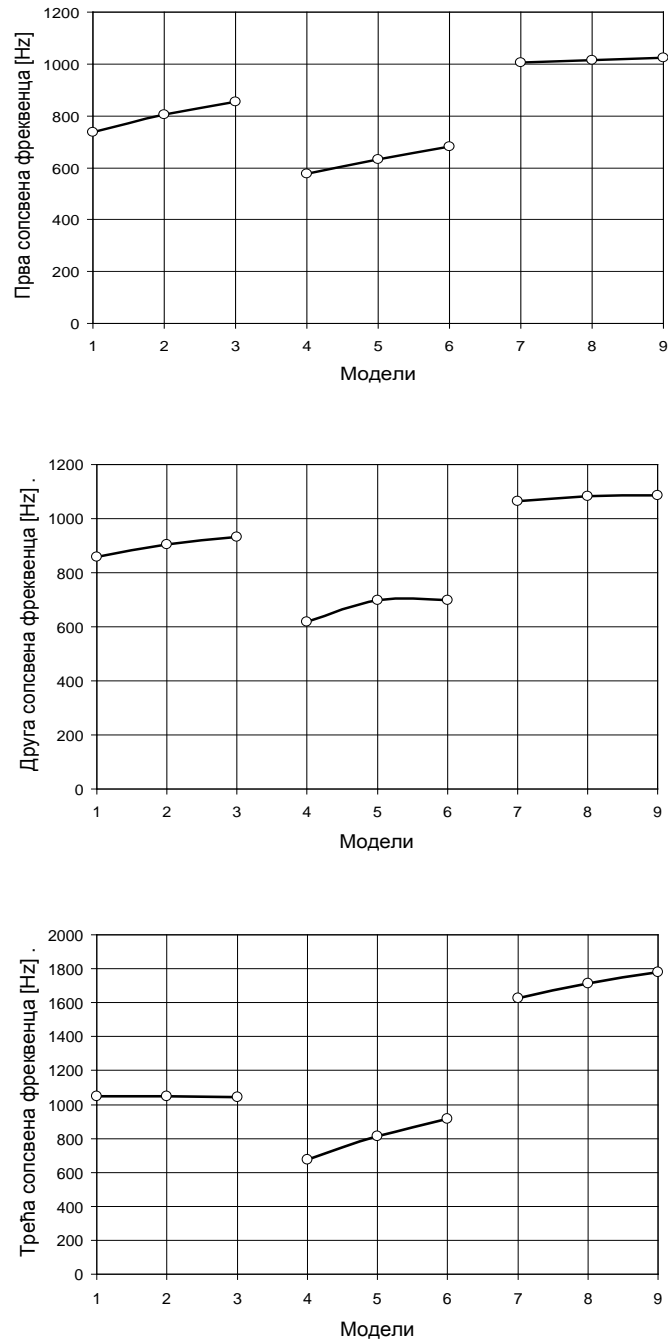


Трећа сопствена осцилација, $f_{o3} = 1778\text{Hz}$

9-G3C Модел са врло фином матрицом од $45^0 + 90^0$ и стати. и динам. прорачуном

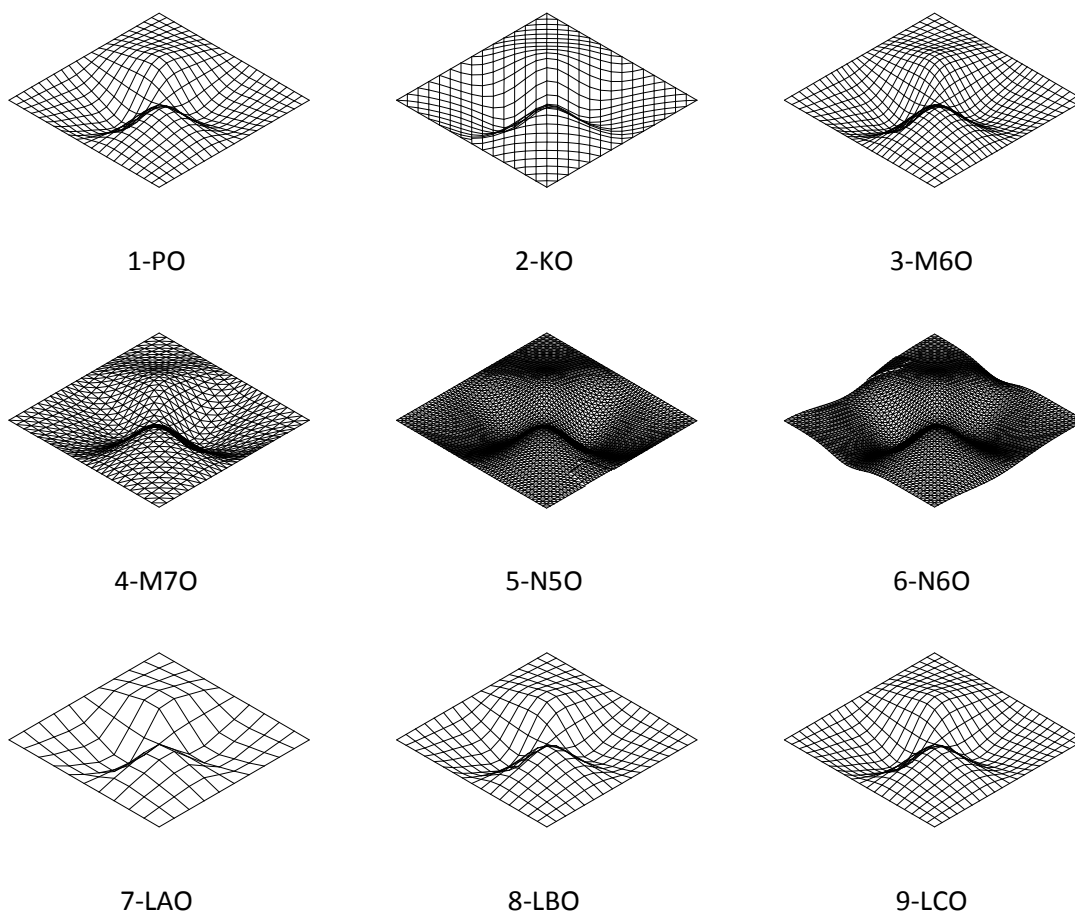


Слика 4.31 Анализа резултата за деформацију, напон и дужину греда куполе



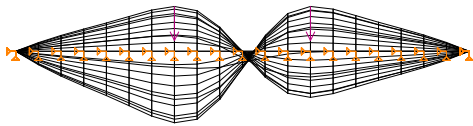
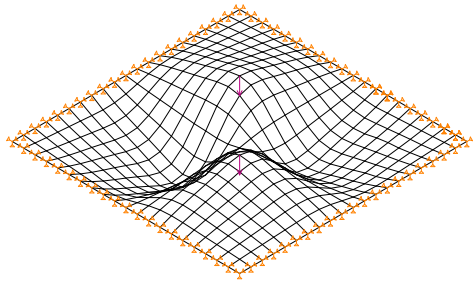
Слика 4.32 Анализа резултата за прву, другу и трећу сопствену фреквенцу
 Можемо констатовати да за моделе под 45^0 густина греда има велики утицај док је код другог и трећег модела матрица гредног роштиља од незнатног утицаја.
 Наведене густине мрежа имају мали динамички утицај на прве три сопствене фреквенце за све моделе матрица гредног роштиља Сл.4.32.

4.8.3. Двоструко закривљена купола слободне форме типа гредног роштиља и љуске

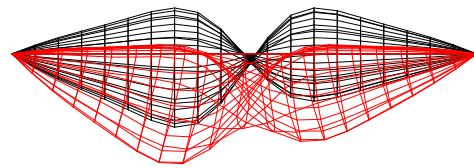
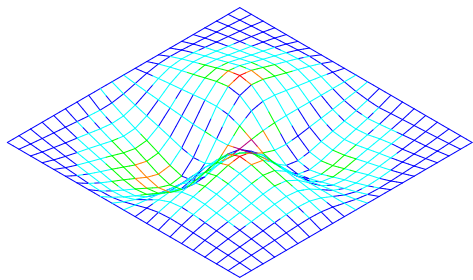
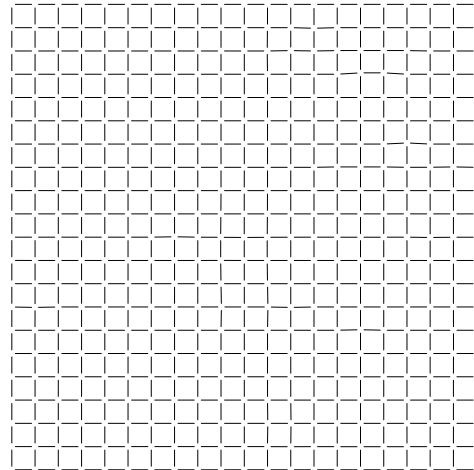


Слика 4.33 Дати су модели разматраних двоструко закривљених купола типа гредног роштиља и љуске

Ова анализа је спроведена на четири модела типа гредног роштиља са променом густине и матрицом (модели од 1-4). Пет осталих модела чине модели типа љуске са утицајем густине мреже и облика ивичне контуре (модели 5-9).



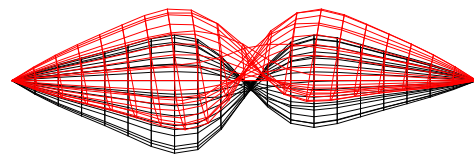
Оптерећење $P = 2 \times 7,5$ [N]



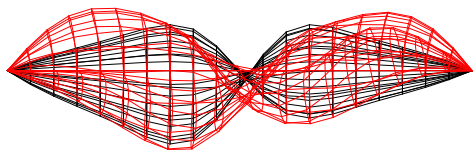
Деформација, $f_{\max} = 0,35$ mm

1.48E+01	...	1.78E+01
1.19E+01	...	1.48E+01
8.90E+00	...	1.19E+01
5.93E+00	...	8.90E+00
2.97E+00	...	5.93E+00
0.00E+00	...	2.97E+00

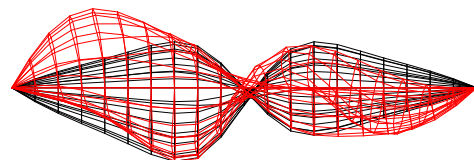
Еквивалентни напон [MPa]



Прва сопствена осцилација, $f_{01} = 433$ Hz

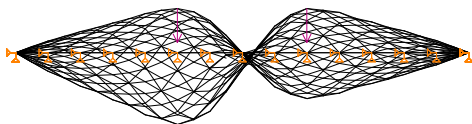
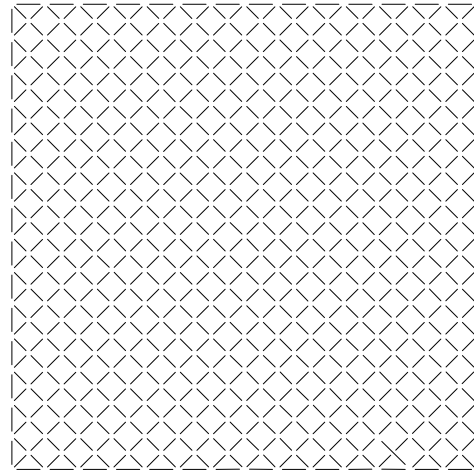
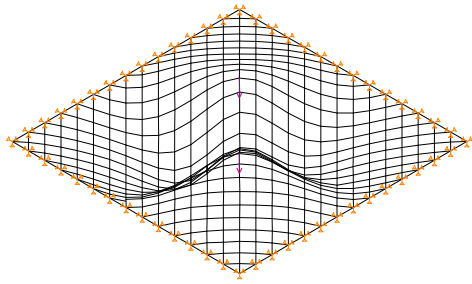


Друга сопствена осцилација, $f_{02} = 1256$ Hz

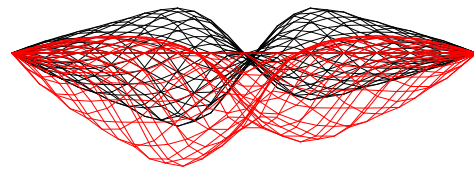
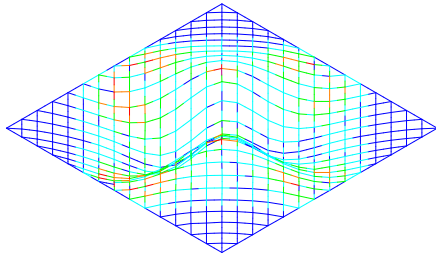


Трећа сопствена осцилација, $f_{03} = 1314$ Hz

1-PO Модел типа гредног роштиља, матрице 90^0 и густоће мреже 20×20



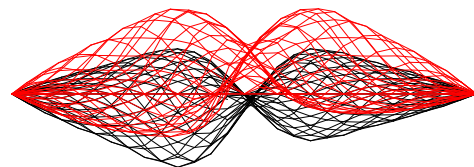
Оптерећење $P = 2 \times 7,5$ [N]



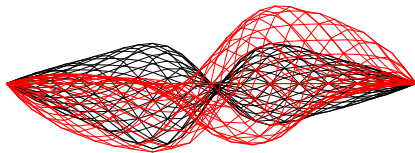
Деформација, $f_{\max} = 0,25$ mm

1.05E+01	...	1.26E+01
8.40E+00	...	1.05E+01
6.30E+00	...	8.40E+00
4.20E+00	...	6.30E+00
2.10E+00	...	4.20E+00
0.00E+00	...	2.10E+00

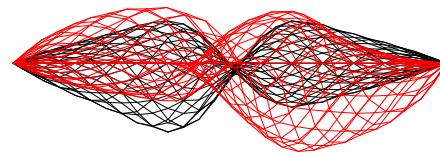
Еквивалентни напон [MPa]



Прва сопствена осцилација, $f_{o1} = 510$ Hz

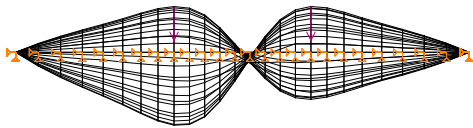
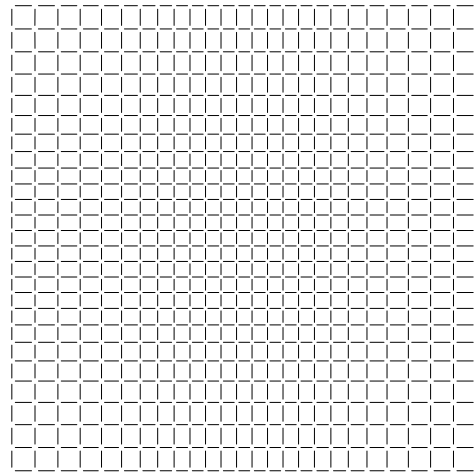
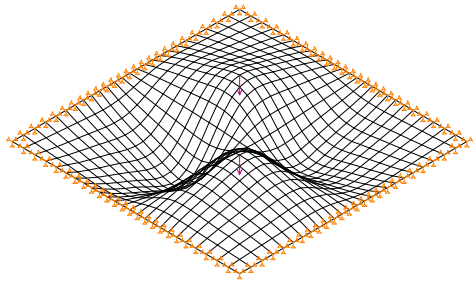


Друга сопствена осцилација, $f_{o2} = 1280$ Hz

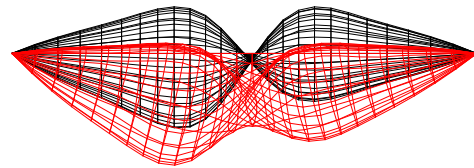
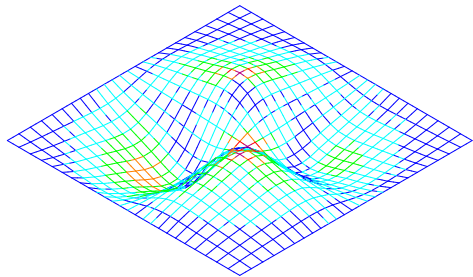


Трећа сопствена осцилација, $f_{o3} = 1320$ Hz

2-КО Модел типа гредног роштиља, матрице 45^0 и густоће мреже 28×28

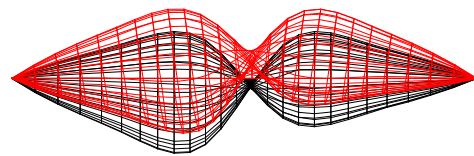


Оптерећење $P = 2 \times 7,5$ [N]



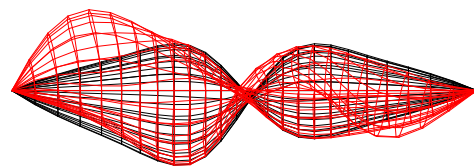
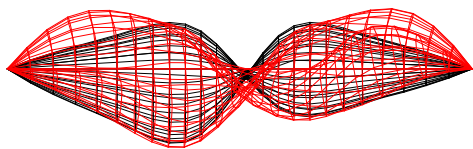
Деформација, $f_{\max} = 0,20$ mm

9.42E+00	...	1.13E+01
7.53E+00	...	9.42E+00
5.65E+00	...	7.53E+00
3.77E+00	...	5.65E+00
1.88E+00	...	3.77E+00
0.00E+00	...	1.88E+00



Еквивалентни напон [MPa]

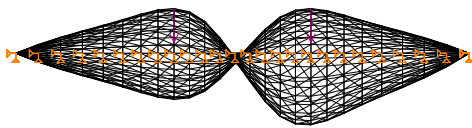
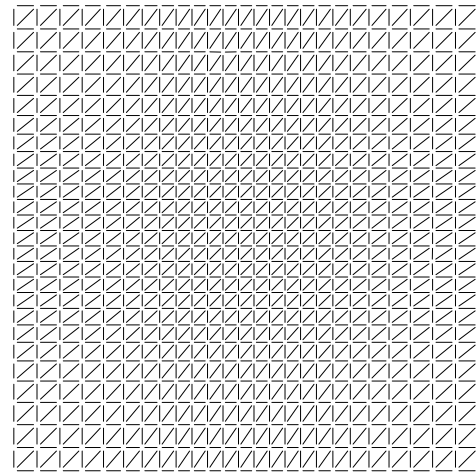
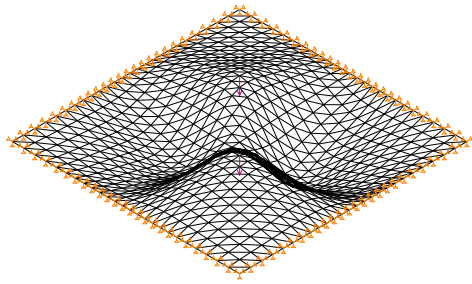
Прва сопствена осцилација, $f_{o1} = 484$ Hz



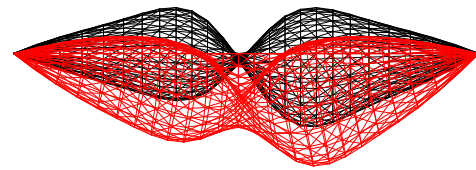
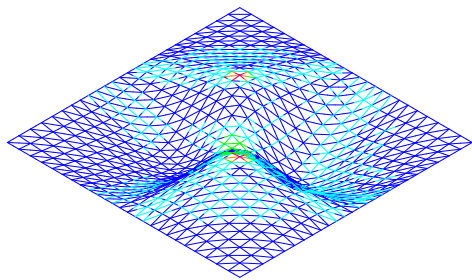
Друга сопствена осцилација, $f_{o2} = 1361$ Hz

Трећа сопствена осцилација, $f_{o3} = 1413$ Hz

3-M60 Модел типа гредног роштиља, матрице 90^0 и густоће мреже 26×26



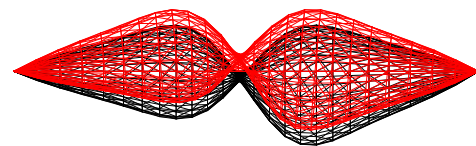
Оптерећење $P = 2 \times 7,5$ [N]



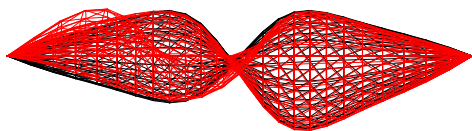
Деформација, $f_{\max} = 0,073$ mm

4.92E+00	...	5.91E+00
3.94E+00	...	4.92E+00
2.95E+00	...	3.94E+00
1.97E+00	...	2.95E+00
9.85E-01	...	1.97E+00
0.00E+00	...	9.85E-01

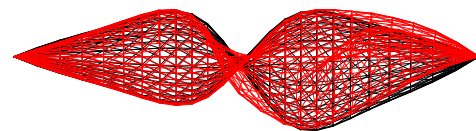
Еквивалентни напон [MPa]



Прва сопствена осцилација, $f_{o1} = 603$ Hz

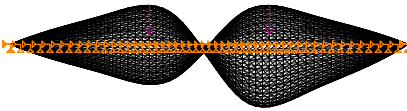
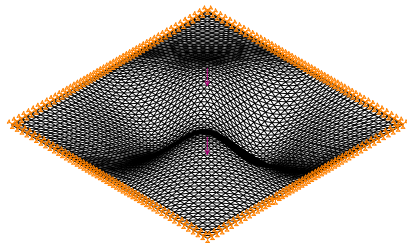


Друга сопствена осцилација, $f_{o2} = 1611$ Hz

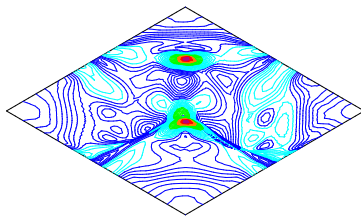
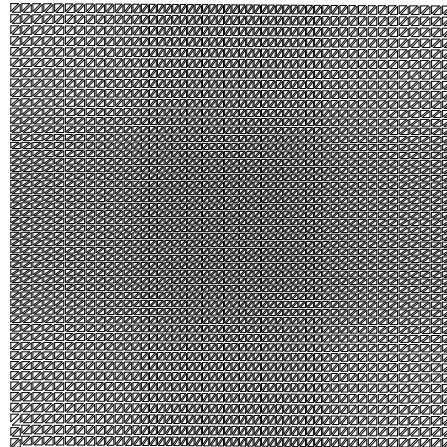


Трећа сопствена осцилација, $f_{o3} = 1871$ Hz

4-M70 Модел типа гредног роштиља, триангулисана матрице и густоће мреже 26x26

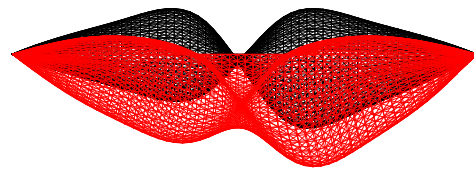


Оптерећење $P = 2 \times 7,5$ [N]

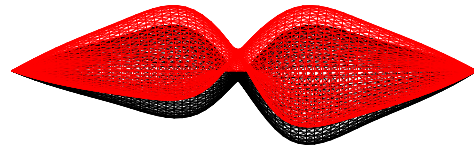


2.04E+00	...	2.45E+00
1.63E+00	...	2.04E+00
1.23E+00	...	1.63E+00
8.17E-01	...	1.23E+00
4.08E-01	...	8.17E-01
0.00E+00	...	4.08E-01

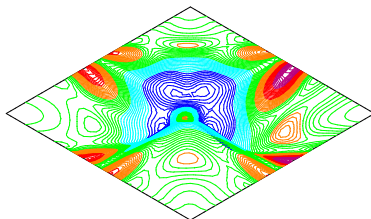
Еквивалентни напон [MPa]



Деформација, $f_{\max} = 0,03$ mm

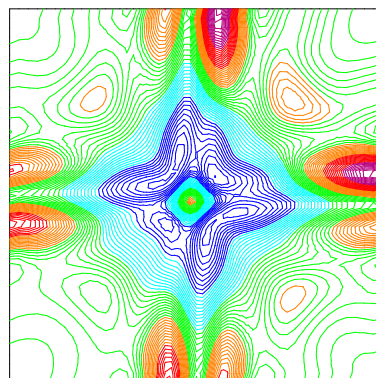


Прва сопствена осцилација, $f_{01} = 1024$ Hz

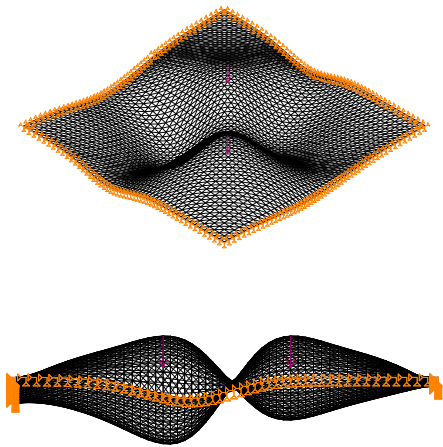


2.06E+12	...	2.86E+12
1.26E+12	...	2.06E+12
4.54E+11	...	1.26E+12
-3.49E+11	...	4.54E+11
-1.15E+12	...	-3.49E+11
-1.96E+12	...	-1.15E+12

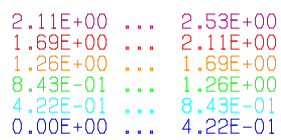
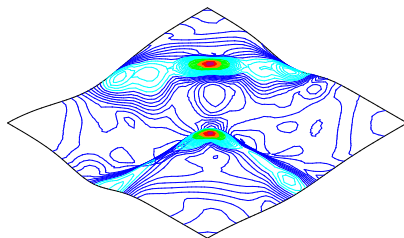
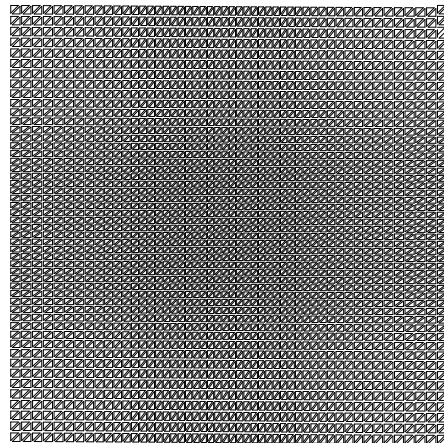
Густина енергије деформације [Nmm/mm³]



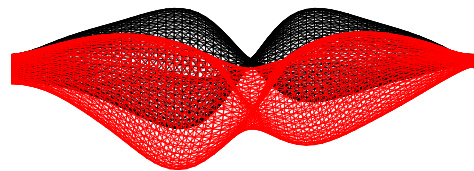
5-N50 Модел типа љуске слободне форме, мреже 50x50, са правом контуром



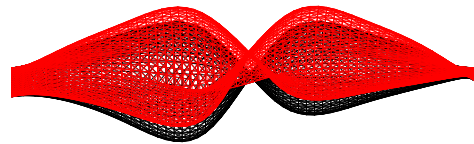
Оптерећење $P = 2 \times 7,5$ [N]



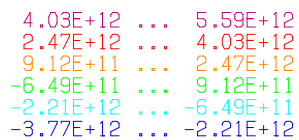
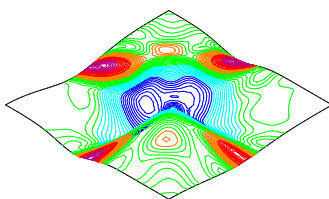
Еквивалентни напон [MPa]



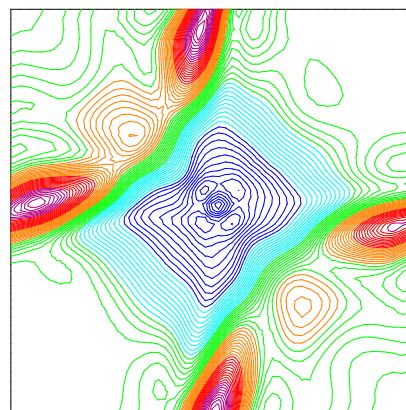
Деформација, $f_{\max} = 0,017$ mm



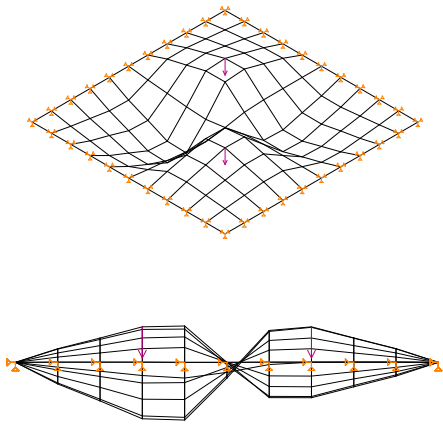
Прва сопствена осцилација, $f_{o1} = 1314$ Hz



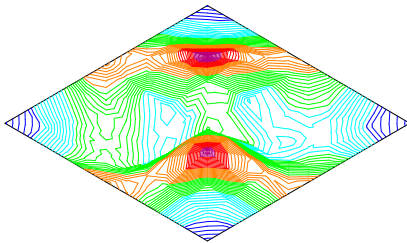
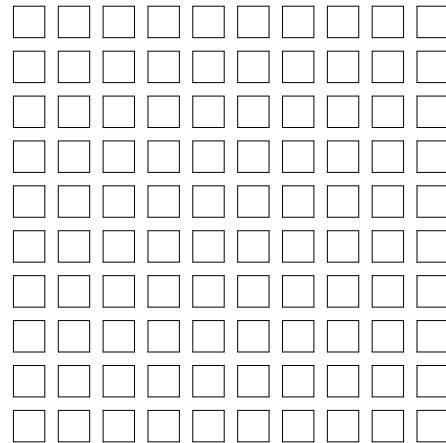
Густина енергије деформације [Nmm/mm³]



6-N60 Модел типа љуске слободне форме, мреже 50x50 са кривом контуром

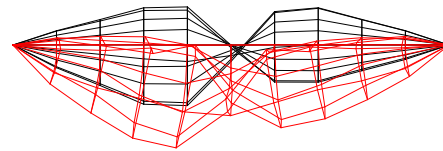


Оптерећење $P = 2 \times 7,5$ [N]

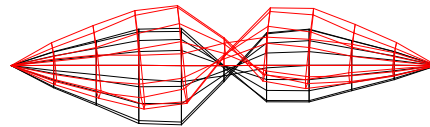


Еквивалентни напон [MPa]

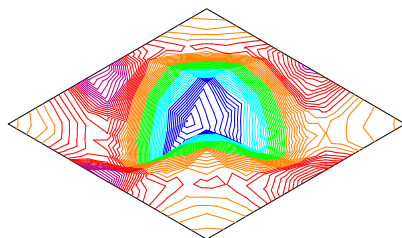
5.89E-01	...	7.07E-01
4.71E-01	...	5.89E-01
3.54E-01	...	4.71E-01
2.36E-01	...	3.54E-01
1.18E-01	...	2.36E-01
0.00E+00	...	1.18E-01



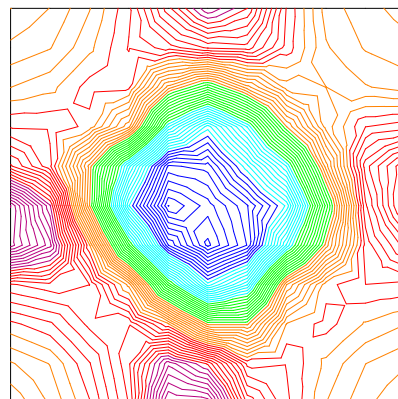
Деформација, $f_{\max} = 0,019$ mm



Прва сопствена осцилација, $f_{o1} = 1058$ Hz

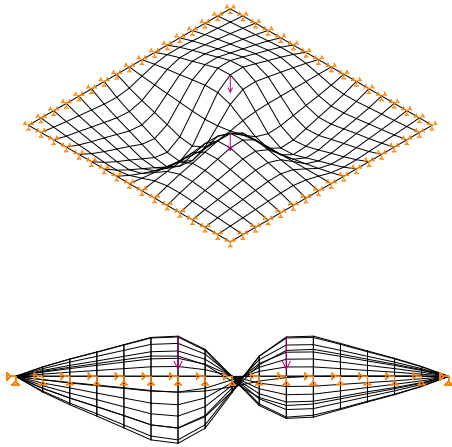


9.62E+11	...	1.47E+12
4.56E+11	...	9.62E+11
-4.95E+10	...	4.56E+11
-5.55E+11	...	-4.95E+10
-1.06E+12	...	-5.55E+11
-1.57E+12	...	-1.06E+12

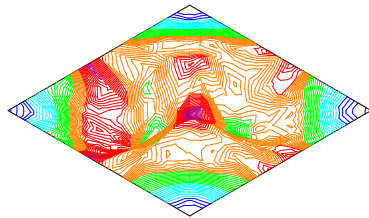
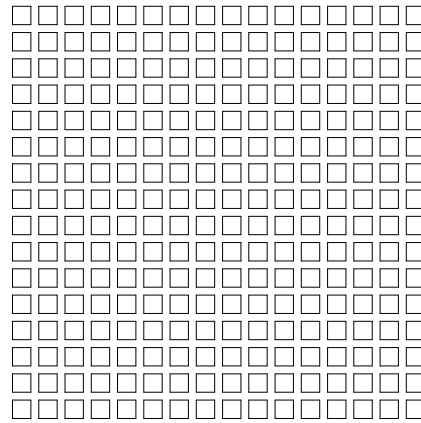


Густина енергије деформације [Nmm/mm³]

7-LAO Модел типа љуске слободне форме, матрице 90^0 и густоће мреже 10×10

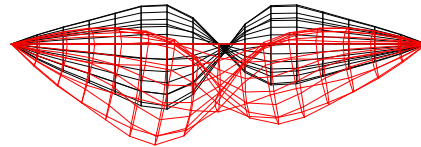


Оптерећење $P = 2 \times 7,5$ [N]

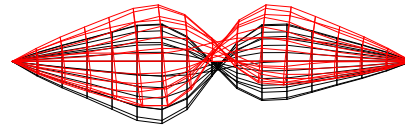


6.13E-01	...	7.35E-01
4.90E-01	...	6.13E-01
3.68E-01	...	4.90E-01
2.45E-01	...	3.68E-01
1.23E-01	...	2.45E-01
0.00E+00	...	1.23E-01

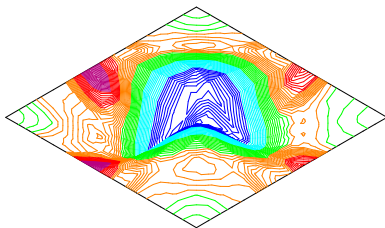
Еквивалентни напон [MPa]



Деформација, $f_{\max} = 0,03$ mm

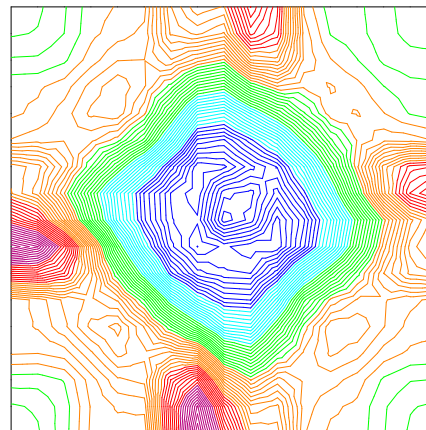


Прва сопствена осцилација, $f_{o1} = 1038$ Hz

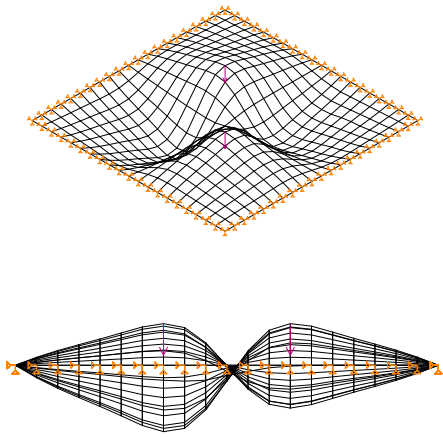


1.47E+12	...	2.08E+12
8.56E+11	...	1.47E+12
2.43E+11	...	8.56E+11
-3.69E+11	...	2.43E+11
-9.82E+11	...	-3.69E+11
-1.59E+12	...	-9.82E+11

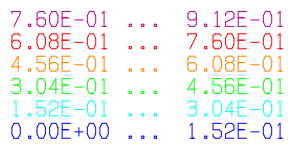
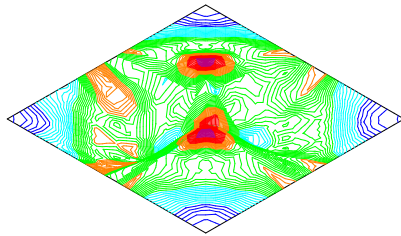
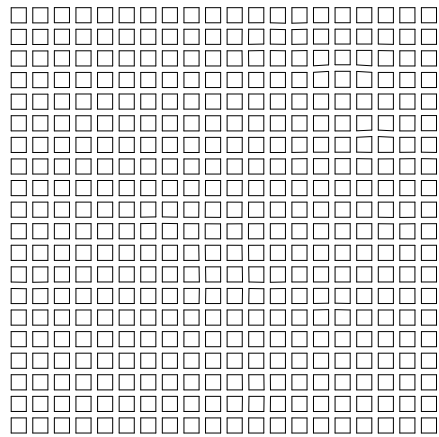
Густина енергије деформације [Nmm/mm³]



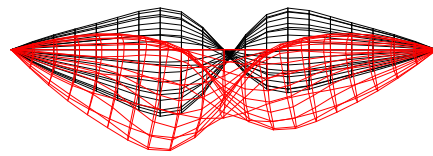
8-LBO Модел типа љуске слободне форме, матрице 90^0 и густоће мреже 16×16



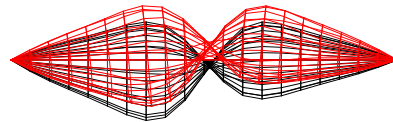
Оптерећење $P = 2 \times 7,5$ [N]



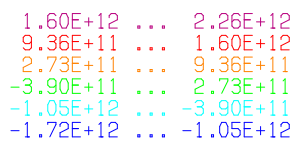
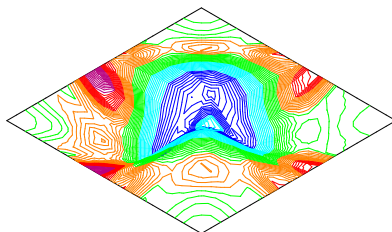
Еквивалентни напон [MPa]



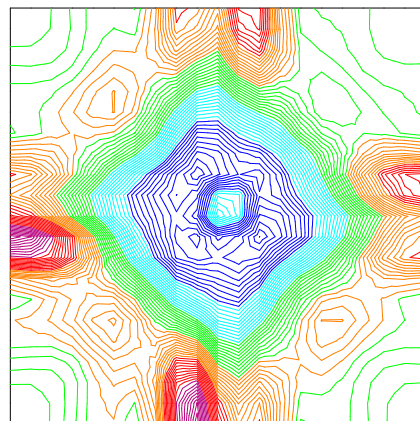
Деформација, $f_{\max} = 0,03$ mm



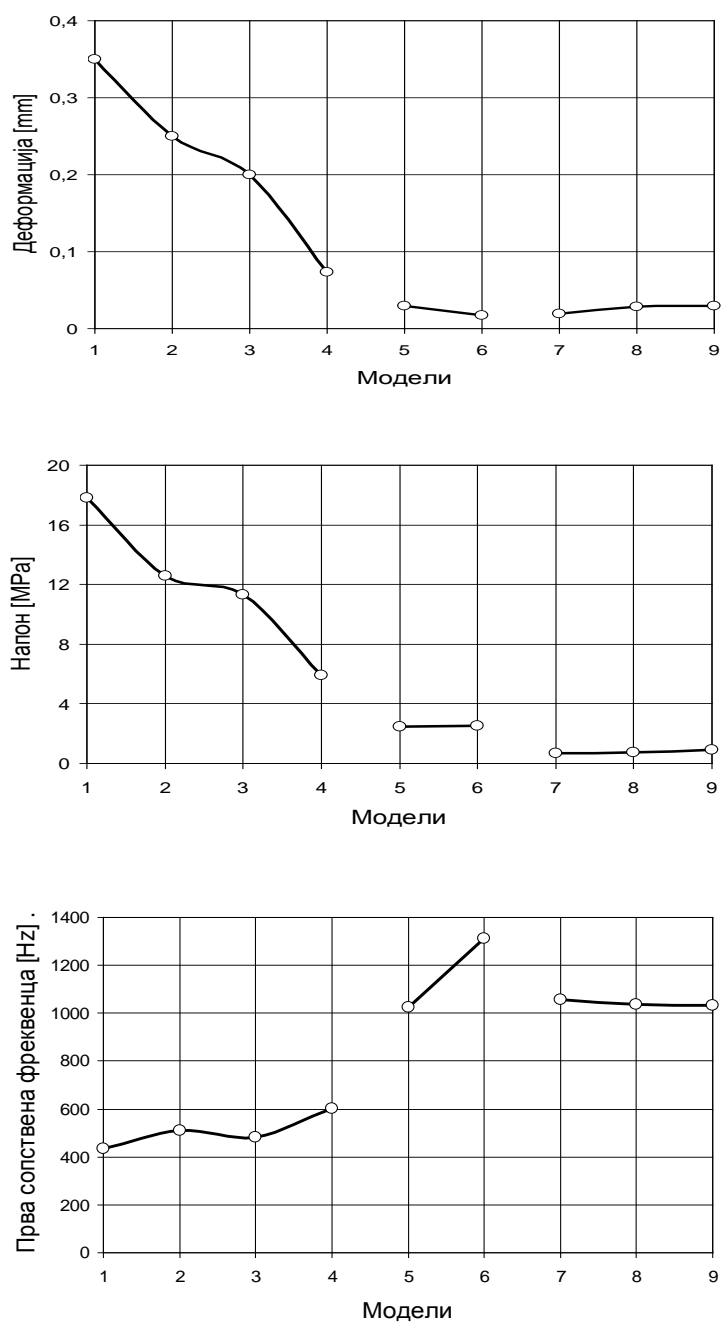
Прва сопствена осцилација, $f_{o1} = 1033$ Hz



Густина енергије деформације [Nmm/mm³]



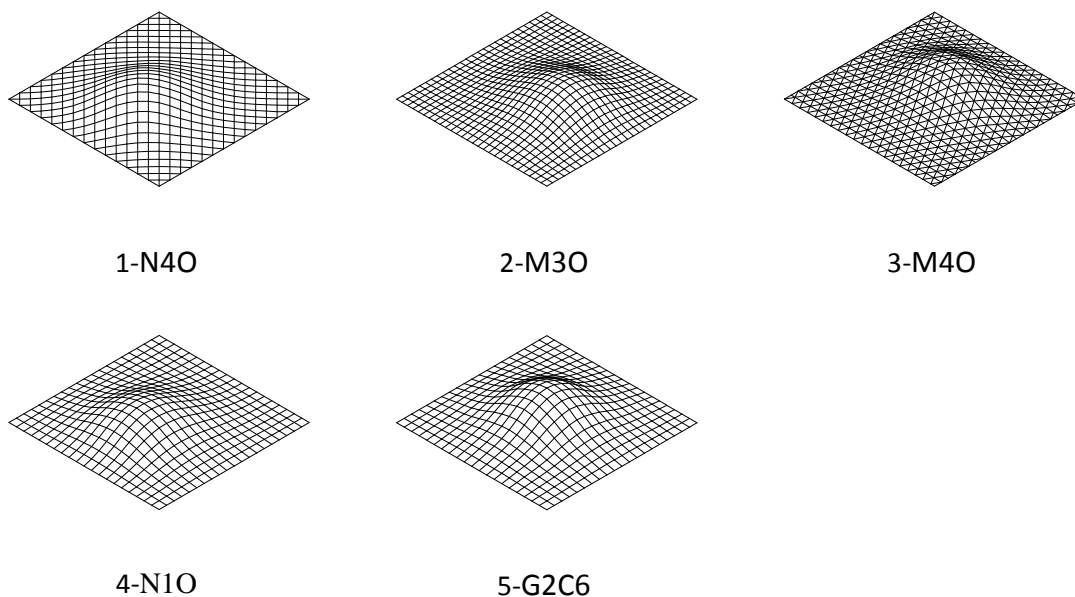
9-LCO Модел типа љуске слободне форме, матрице 90^0 и густоће мреже 20×20



Слика 4.34 Анализа резултата деформације, напона и прве сопствене фреквенце

Потврђен је знатан утицај густине и матрице гредног роштиља као што је изречено претходном анализом. Утицај густине мреже КЕ код модела типа љуске је незнатан Сл. 4.34.

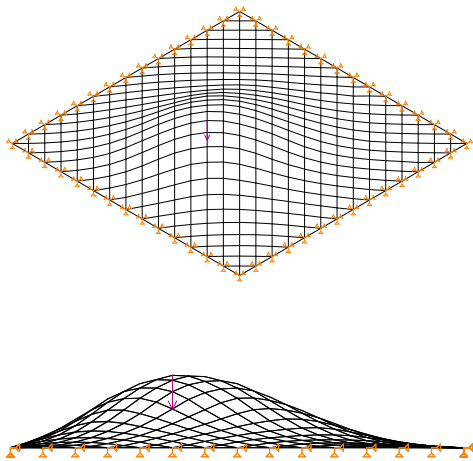
4.8.4 Двоструко закривљена једноосно симетрична купола типа гредног роштиља



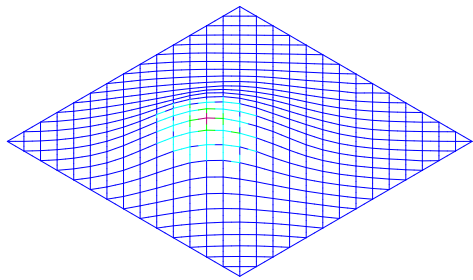
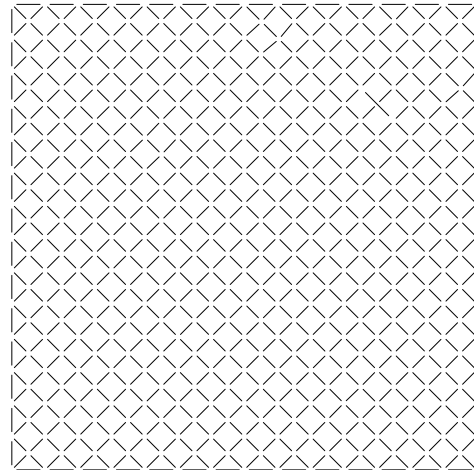
(двоосно симетрична за
поређење)

Слика 4.35 Дати су модели разматраних двоструко закривљених једноосно симетричних купола типа гредног роштиља

Прво су анализирана три модела са три различите врсте матрица типа гредног роштиља. У оквиру ове анализе узета су два модела исте густине мреже греда за случај симетричног и асиметричног типа куполе Сл. 4.35.

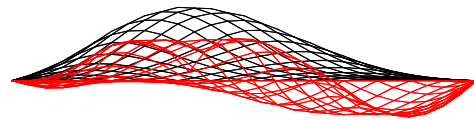


Оптерећење $P = 15 \text{ [N]}$

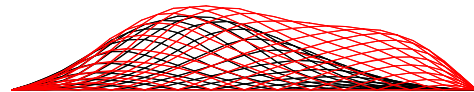


2.03E+01	...	2.44E+01
1.63E+01	...	2.03E+01
1.22E+01	...	1.63E+01
8.13E+00	...	1.22E+01
4.07E+00	...	8.13E+00
0.00E+00	...	4.07E+00

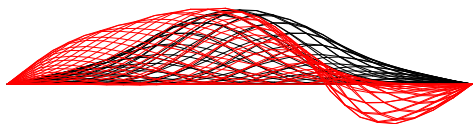
Еквивалентни напон [MPa]



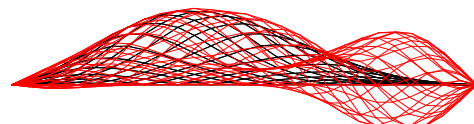
Деформација, $f_{\max} = 0,095 \text{ mm}$



Прва сопствена осцилација, $f_{01} = 546 \text{ Hz}$

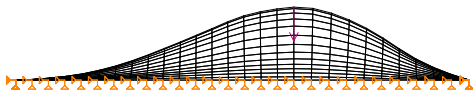
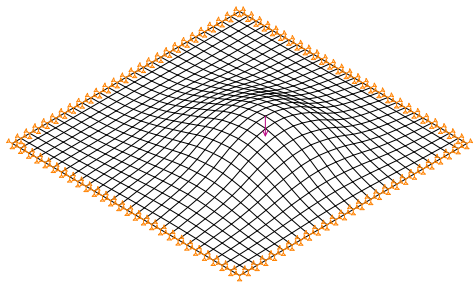


Друга сопствена осцилација, $f_{02} = 913 \text{ Hz}$

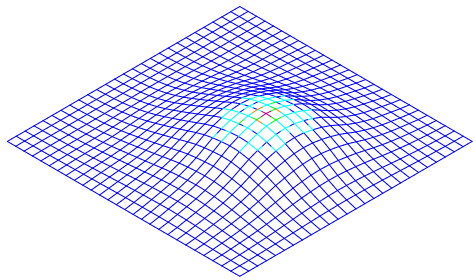
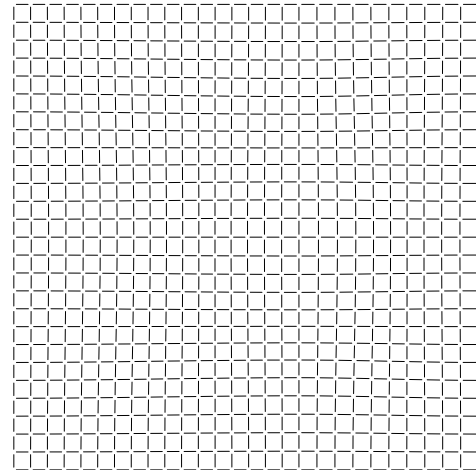


Трећа сопствена осцилација, $f_{03} = 1230 \text{ Hz}$

1-N40 Модел двоструко закривљене једноосно симетричне куполе г.р. 45°

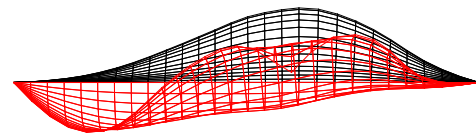


Оптерећење $P = 15 \text{ [N]}$

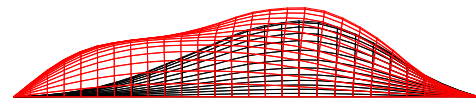


1.77E+01	...	2.12E+01
1.41E+01	...	1.77E+01
1.06E+01	...	1.41E+01
7.07E+00	...	1.06E+01
3.53E+00	...	7.07E+00
0.00E+00	...	3.53E+00

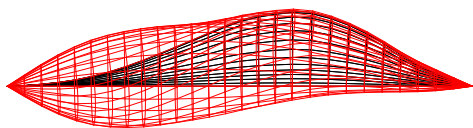
Еквивалентни напон [MPa]



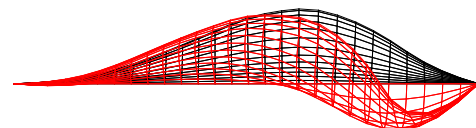
Деформација, $f_{\max} = 0,074\text{mm}$



Прва сопствена осцилација, $f_{01} = 511\text{Hz}$

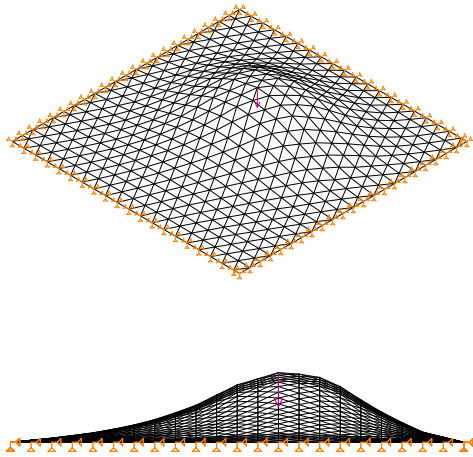


Друга сопствена осцилација, $f_{02} = 747\text{Hz}$

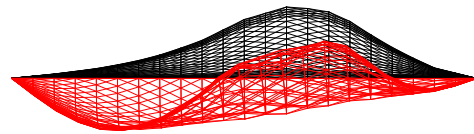
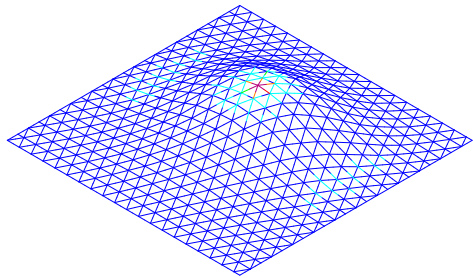
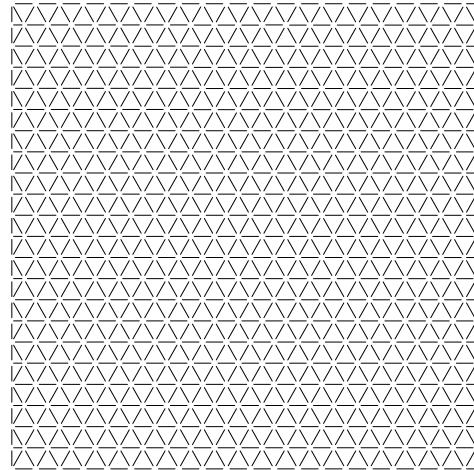


Трећа сопствена осцилација, $f_{03} = 1100\text{Hz}$

2-МЗО Модел двоструко закривљене једноосно симетричне куполе г.р. 90^0



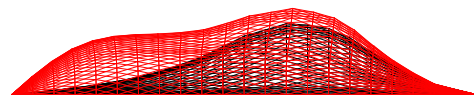
Оптерећење $P = 15$ [N]



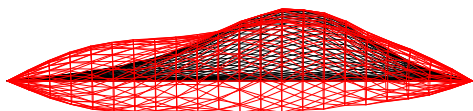
Деформација, $f_{\max} = 0,035\text{mm}$

6.06E+00	...	7.27E+00
4.85E+00	...	6.06E+00
3.63E+00	...	4.85E+00
2.42E+00	...	3.63E+00
1.21E+00	...	2.42E+00
0.00E+00	...	1.21E+00

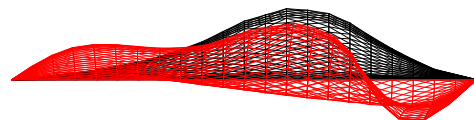
Еквивалентни напон [MPa]



Прва сопствена осцилација, $f_{01} = 578\text{Hz}$

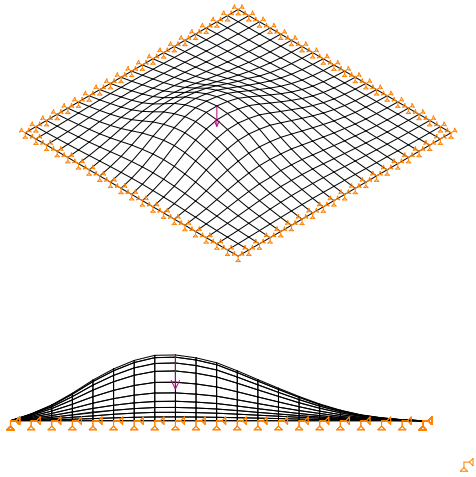


Друга сопствена осцилација, $f_{02} = 894\text{Hz}$

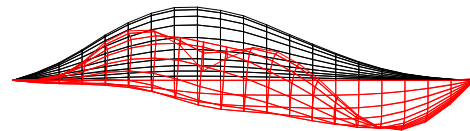
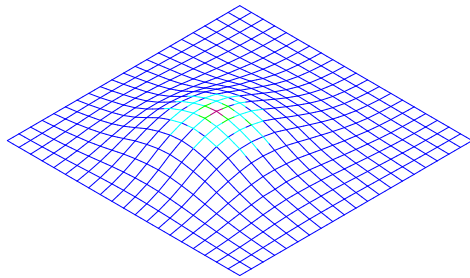
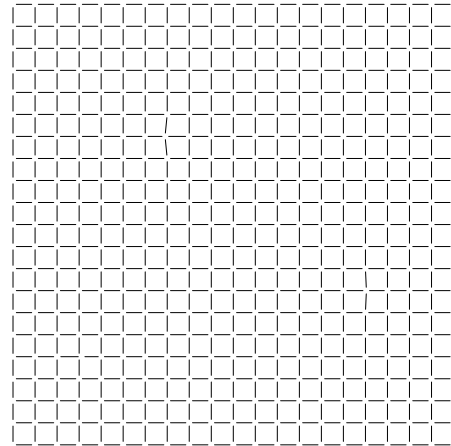


Трећа сопствена осцилација, $f_{03} = 1063\text{Hz}$

3-M40 Модел двоструко закривљене једно. симетричне триангулисане куполе г.р.



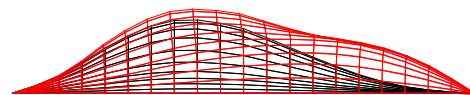
Оптерећење $P = 15 \text{ [N]}$



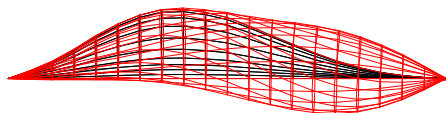
Деформација, $f_{\max} = 0,1\text{mm}$

2.07E+01	...	2.48E+01
1.65E+01	...	2.07E+01
1.24E+01	...	1.65E+01
8.27E+00	...	1.24E+01
4.13E+00	...	8.27E+00
0.00E+00	...	4.13E+00

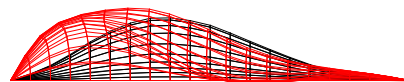
Еквивалентни напон [MPa]



Прва сопствена осцилација, $f_{01} = 484\text{Hz}$

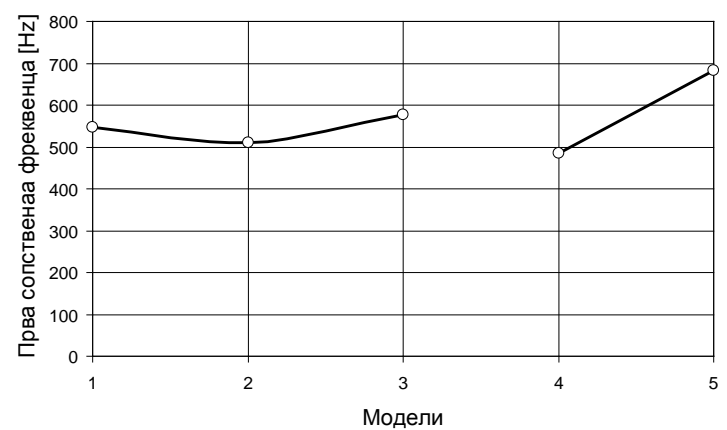
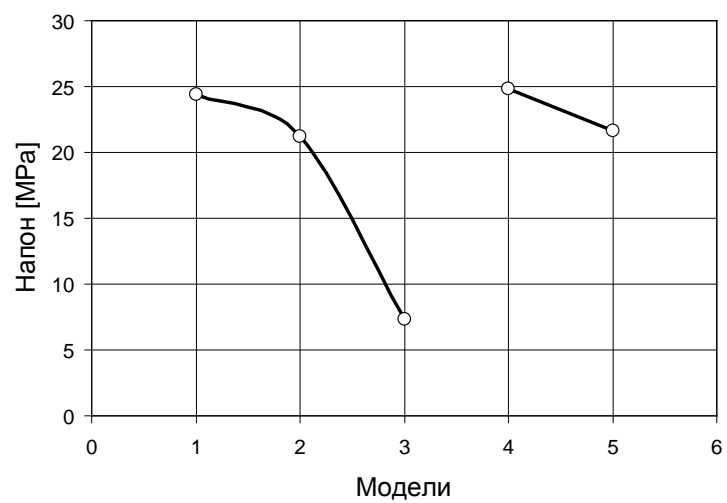
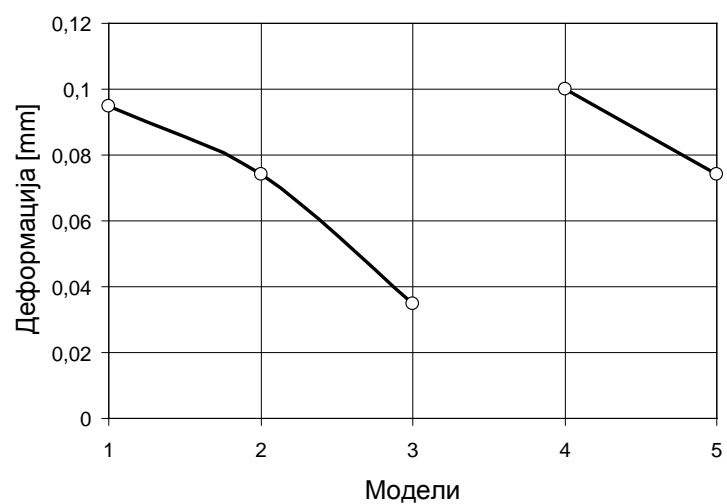


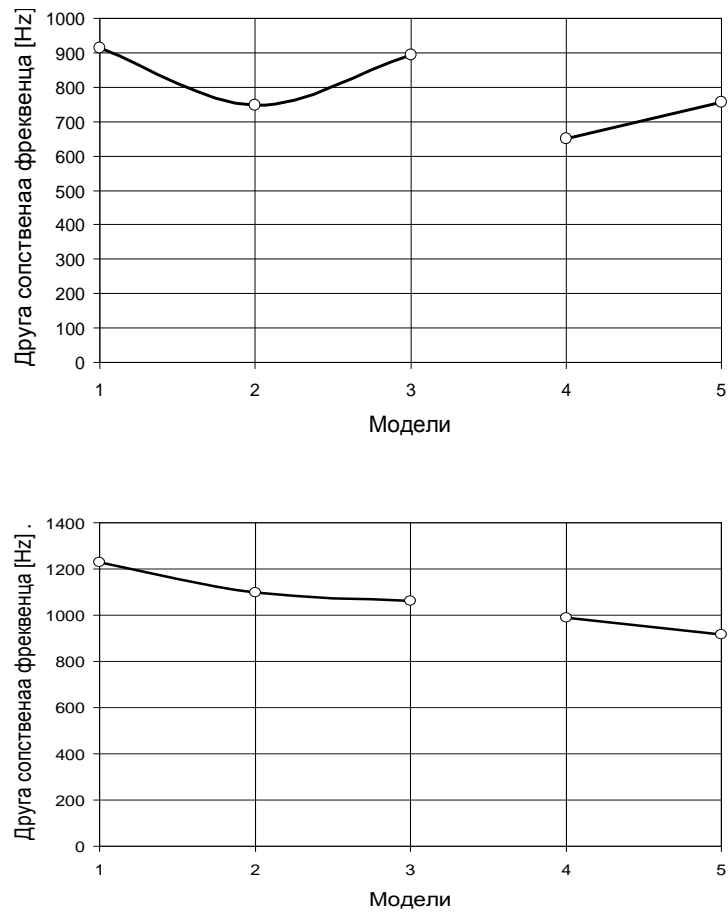
Друга сопствена осцилација, $f_{02} = 651\text{Hz}$



Трећа сопствена осцилација, $f_{03} = 990\text{Hz}$

4-N10 Модел двоструко закривљене једноосно симетричне куполе г.р. 90°





Слика 4.36 Анализа резултата деформације, напона, прве, друге и треће сопствене фреквенце

4.9 Анализа резултата пројектовања

Истраживањем су приказане актуелне теме развоја и примене савремених дигиталних технологија и научних метода у области пројектовања конструктивних система. Предности оваквог приступа и доступност напредних технологија отварају могућност реализације неконвенционалних слободних форми. Дисертацијом је предложен и тестиран приступ пројектовању NURBS структура заснован на савременом концепту пројектовања орјентисаног на перформансе и примену технологија брзе израде прототипова, 3D оптичко деформацијско-напонске анализе и нумеричке анализе. Моделовање перформанси

засновано је на класичном изопараметарском концепту као и актуелном изогео-метријском концепту [Nes12] који је у правцу интеграције пројектовања и анализе.

Примена резултата у процесу пројектовања посебно је акцентована истраживањем. Истраживање је прилог примени дигиталих метода и алата у архитектонској пракси, чија заступљеност још увек није довољна и адекватна. Иако је истраживање фокусирано на област архитектонског инжењерства, искуства и предложени приступ могу наћи примену у различим областима инжењерског пројектовања.

5.0 Закључна разматрања и правци даљег истраживања

Истраживањем су тестирани потенцијали употребе техника за брзу израду прототипова у процесу конструкције моделских NURBS структура као и 3D оптичке деформацијско-наспонске анализе у процесу дијагностике њихових структуралних перформанси. Процес који има потенцијала да нађе примену у пројектовању просторних структура комплексних форми подразумева генерисање дигиталних модела, њихову израду коришћењем уређаја за 3D штампу, експериментално тестирање конструисаних физичких модела и верификацију резултата применом нумеричких метода - изогеометријске анализе и класичне методе коначних елемента. Дакле, процес пројектовања заснован на структуралним перформансама разматран овим радом заснован је на употреби експериментално нумеричког приступа у анализи физичких модела и подразумева укључивање структуралних перформанси у иницијалну фазу процеса пројектовања, што је од посебног значаја за структуре произвољне комплексне форме.

Предложени приступ подразумева смештање процеса пројектовања у конвергентно дигитално окружење. Реализација истраживања захтевала је дефинисање и примену различитих стратегија, поступака и технологија за сваку од појединачних фаза процеса као и њихово прилагођавање специфичним карактеристикама разматраних NURBS структура. Увођење физичког аспекта у

процес пројектовања кроз израду физичких модела и симулацију механичких утицаја омогућава проверу перформанси предложених форми и увођење ограничења реалних структура. Критично за примену оваквог приступа је развој технологија моделовања и симулације. Напредак RP технологија последњих година реактуализовао је тему експеримената са физичким моделима, а даљи развој ове технологије отвориће нове и изузетне могућности.

Технике за брзу производњу прототипова (*rapid prototyping* - RP) омогућавају производњу компликованих типологија директно из компјутерских модела. Од увођења ове технологије последњих деценија 20. века RP је постала једна од технологија која бележи најбржи развој. Иако није иницијално намењена области архитектонског пројектовања RP представља корисан алат, који омогућава архитектама визуализацију комплексних облика и проверу идеја. Подејднако проналази примену у раној фази процеса пројектовања за креирање концептуалних модела, као и у каснијим фазама за израду детаља. Смањење цене уређаја ће утицати да RP системи постану доступнији већем броју корисника. Очекивање је да ће у кратком периоду коришћење ове технологије постати уобичајена пракса у области архитектуре, и да ће се примењивати самостално или у комбинацији са традиционалним начинима израде макета. Могућност тродимензионалне штампе ће у великој мери утицати на процес пројектовања и омогућити креацију високо координираних финалних производа.

Примена техника за дигиталну производњу све више ослобађа процес пројектовања ограничења наметнутих захтевима изградње. Релација између фаза концепције и продукције редефинисана је успостављањем директне везе, увођењем тзв. *file-to-factory* процедура и аутоматизованих производних технологија. Реализација обликовно комплексних пројектних решења постаје све мање питање изводљивости, а све је више у функцији могућности њиховог компјутерског генерисања и нових алата потребних за дигиталну производњу. Може се рећи да је RP корак који претходи дигиталној производњи реалних архитектонских објеката. Претпоставка је да ће у будућности дигиталне технологије производње имати далеко ширу примену у грађевинској индустрији, што ће имплицирати бројне позитивне консеквенце. Техника слична 3D штампи *CounterCrafting* развијена је за потребе аутоматизоване конструкције читавог

објекта. Ова или сличне врсте производних техника могле би у будућности наћи примену у реализацији неконвенционалних геометријски комплексних архитектонских пројеката. С друге стране развој нових материјала (композитних, рециклираних, паметних, итд.) и техника произвође заснованих на примени аутоматизованих дигиталних алата утиче на то да тема изградње структура слободне форме добије на актуелности, као и на преиспитивање конвенционалних приступа и размишљања о потреби да се различите технике генерисања структуралних форми укључе у иницијалну фазу пројектовања.

Сумирање резултата

Процес пројектовања заснован на структуралним перформансама разматран овим радом унепређује се кроз три аспекта:

- употребу технологија брзе израде прототипа,
- укључивање метода 3D оптичког мерења и
- нумеричку верификацију резултата.

Употреба технологија брзе израде прототипа све је актуелнија тема у области архитектуре. Могућност визуализације пројектних решења посебно у случају комплексних форми као и несумљиве предности ових технологија у односу на традиционалне технике израде архитектонских модела мотивише све већи број архитеката да користе штампане прототипове за комуникацију својих идеја. У том смислу, у оквиру овог рада дат је сажет преглед тренутно доступних технологија и тестиране су њихове предности.

Потребно је нагласити да је тежиште рада на употреби метода брзе израде прототипова у изради функционалних модела. У том смислу ово истраживање представља континуитет експеримента са физичким моделима присутним у области инжењерства, посебно с почетка 20. века, тј. периода развоја лаких просторних структура. Технологије рачунарске симулације временом су потиснуле експерименте са физичким моделима захваљујући својим предностима. Овим радом се тема израде физичких модела реактуелизује у светлу могућности

нових технологија које обезбеђују комфорнији рад, једноставнију производњу варијантних форми и израду прецизнијих модела.

Укључивање метода 3D оптичког мерења обезбедило је прецизно и поуздано снимање деформације NURBS структура узроковано дејством аплицираних утицаја. Ова технологија обезбеђује спровођење процеса дијагностике у дигиталном окружењу.

NURBS структуре представљају физичке модела добијене дигиталном 3D штампом NURBS геометријских модела. За разлику од абстрактних геометријских модела генерисаних у виртуелном CAD окружењу оне представљају физичке моделе, начин увођења физичког аспекта у процес пројектовања и провере визуелних, а донекле и структуралних и тектоничних капацитета произвољне форме. Примена технологије 3D оптичког безконтактног мерења представља поуздани начин за одређивање (снимање) деформације структура услед уношења утицаја.

Нумеричка верификација резултата реализована је применом класичне методе коначних елемената и изогеометријске анализе. У циљу реализације овог дела истраживања развијени су изогеометријски елементи Бернули-Ојлерове греде као и изогеометријски елементи Кирховљеве љуске.

Наиме, класичан изопараметарски концепт није у могућности да формулише поменуте елементе из једноставног разлога што полиноми као функције облика на границама елемената поседују само континуитет C^0 . Из тих разлога нужно је увести ротације као генералисане координате за испуњење континуитета C^1 , што има за последицу да такви елементи једино могу бити типа Тимошенкове греде и Миндлин Рајснерове љуске. За разлику од тога, изогеометријски приступ с обзиром на егзактан начин описивања геометрије омогућава формулацију Бернулијевих гредних и Кирховљевих елемената љуски произвољног облика и континуитета без увођења ротација као генералисаних координата.

Резултати добијени формулисаним елементима у овом раду упоређени су са резултатима заснованим на класичним изопараметарским елементима греде и љуске, и показали су веома добро слагање чиме је потврђена тачност предложеног изогеометријског концепта.

Нумеричке анализе спроведене како коришћењем изогеометријских тако и класичних коначних елемената сагласне су са експериментално добијеним резултатима чиме је потврђена заснованост и оправданост предложеног приступа.

Приступ приказан овим истраживањем проширује концепт пројектовања заснованог на перформансама, а примена наведених технологија чини овај приступ довољно флексибилним за коришћење у контексту архитектонског пројектовања.

Смернице за будућа истраживања

Могући правци даљег развоја истраживања су:

- примена приступа на друге структуралне типологије,
- унапређење у складу са развојем метода нумеричке анализе,
- имплементација приступа у унапређењу окружења симулације.

Примена приступа на друге технологије. Истраживање је ограничено на NURBS структуре имајући у виду да NURBS у овом тренутку представља доминантну технологију приказивања геометрије у области инжењерства, међутим постоји одређени број већ развијених технологија (попут *T-Spline*, *Subdivinosurfaces*, *Coonspatch*, итд.) које имају потенцијала да опишу структуре произвљних форми и буду искоришћене у циљу спровођења истраживања сличних предметном.

Унапређење у складу са развојем метода нумеричке анализе. Од класичне формулације коначних елемената средином прошлог века до данас развијен је већи број метода. Изогеометријска анализа је новија метода, а концепт примене геометријске репрезентације у структуралној анализи, који је у њеној основи оставља приступ за константна унапређења ове анализе у светлу развоја у области CAGD. У том смислу је и приступ предложен овим радом могуће унапредити укључивањем нових метода нумеричке анализе.

Имплементација приступа у унапређена окружења симулације у релацији је са развојем технологија брзе израде прототипова (RP). Као што је потврђено овим

истраживањем превођењем симулација/експеримената из виртуалног у реалан физички контекст повећава веродостојност истраживања и валидацију решења. RP технологије већ нуде различите могућности продукције 3D физичких модела/прототипова у смислу тачности, квалитета материјализације и брзине продукције. Развој ових технологија је у експанзији, а модели који се производе могу се користити за визуелизацију, затим естетске, просторне и структуралне евалуације, као и у различитим врстама функционалних тестова који у случају неконвенционалних NURBS структура могу представљати неопходан корак који предходи њиховој реализацији. Могућност да се пројектна решења комплексних топологија производе директно из дигиталних модела коришћењем 3D штампача свакако ће утицати на процес пројектовања у смислу креирања високо координираних финалних решења.

Претпоставка је да ће у будућности дигиталне производне технологије имати далеко ширу примену у архитектури, што ће имплицирати бројне позитивне консеквенце попут превазилажења потребе за ригидном стандардизованом производњом у корист масовног прилагођавања (*mass-customization*) које неће утицати на економичност и ефикасност производње. За сада је извесно да унапређене могућности разматраних технологија, које превазилазе њихове иницијалне намене, могу наћи примену као алати за проналажење форме у концептуалној фази архитектонског пројектовања. Такође, константан развој дигиталних технологија поставља изазов архитектури да перманентно унапређује методе и алате продукције у технолошком смислу.

6.0 Референце

- [Abe96] Abelson, Harold, and Sussman, Gerald Jay. (1996). *Structure and Interpretation of Computer Programs*. Cambridge, MA: MIT Press.
- [And52] Anđelić T. (1952). *Tenzorski račun*. Научна књига. Београд.
- [Ant01] Antonsson, E.K., and Cagan, J. (eds.) (2001). *Formal Engineering Design Synthesis*, Cambridge University Press, Cambridge, UK.
- [Atl01] Atluri S. N., Iura M., Vasudevan S. (2001). *A Consistent Theory of Finite Stretches and Finite Rotations, in Space-Curved Beams of Arbitrary Cross-Section*, Computational Mechanics, 27, pp 271-281, Spriger-Verlag.
- [Bat82] Bathe K. J. (1982). *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*. Prentice - Hall, Inc.
- [Bec08] Bechthold, M. (2008). *Innovative Surface Structures: Technologies and Applications*. New York & Oxon: Taylor & Francis.
- [Ben09] Benros, D. and Duarte, J.P. (2009). *An integrated system for providing mass customized housing*. Automation in Construction, 18(2), pp 310-320.
- [Ben99] Bentley, PJ. (1999). *An introduction to evolutionary design by computers*, in PJ Bentley(ed.) *Evolutionary Design by Computers*. Morgan Kaufmann Publishers, San Francisco.
- [Bez66] Bezier P. (1966). *Definition numerique des courbes et surfaces I*, Automatisme, XI, pp 625-632.
- [Bez67] Bezier P. (1967). *Definition numerique des courbes et surfaces II*, Automatisme, XII, pp 17-21.
- [Bez72] Bezier P. (1972). *Numerical Control: Mathematics and Applications*, Wiley.
- [Bil80] Billington, D. P. (1980). *Heinz Isler as Structural Artist*. Princeton: The Art Museum, Princeton University.

- [Bob95] Bobola, R. (1995). *Non-Euclidean geometry: A Critical and Historical Study of its Development* (translated by H.S. Carslaw), Dover Publications, New York.
- [Cag05] Cagan, J., Campbell, M.I., Finger, S., and Tomiyama, T. (2005). *A framework for computational design synthesis: model and applications*. *Journal of Computing and Information Science in Engineering*, 5(3), pp 171.181.
- [Cha98] Chawla, K. K. (1998). *Composite materials: Science and Engineering*, 2nd Edition, Springer, New York.
- [Chi00] Chilton, J. (2000). *Heinz Isler. The Engineer's Contribution to Contemporary Architecture*. London: Thomas Telford Publishing.
- [Cot09] Cottrell J. A., Hughes T. J. R., Bazilevs Y. (2009). *Isogeometric Analysis: Toward Integration of CAD and FEA*, Wiley.
- [Cox71] Cox M. G. (1971). *The numerical evaluation of B-splines, Technical report*, National Physics Laboratory DNAC 4.
- [DeB72] De Boor C. (1972). On calculation with B-splines, *Journal of Approximation Theory*, 6, pp 50-62.
- [DeB78] De Boor C. (1978). *A Practical Guide to Splines*, Springer-Verlag.
- [DeC59] De Casteljaou P. (1959). *Outilages methodes calcul.*, Technical report, A. Citroen, Paris.
- [Eri67] Eringen A. C. (1967). *Mechanics of Continua*, John Wiley and Sons, New York.
- [Eva09] Evans J. A., Bazilevs Y., Babuska I., Hughes T. J. R. (2009). *n-widths, sup-infs, and optimality ratios for the k-cersion of the isogeometric finite element methid*, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 198, pp 1726-1741.
- [Far99] FarinG. E. (1999). *NURBS Curves and Surfaces: From Projective Geometry to Practical Use*, A. K. Peters, Ltd.
- [Fun65] Fung Y. C. (1965). *Foundations of Solid Mechanics*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- [Geb03] Gebhardt, A. (2003). *Rapid Prototyping*, Carl Hanser Verlag, Munich.

- [Gol61] Goldenveizer L. A. (1961). *Theory of Elastic Thin Shells*, Pergamon Press, London.
- [Gom]***: www.gom.com
- [Gre60] Green E. A., Adkins J. E. (1960). *Large Elastic Deformations and Nonlinear Continuum Mechanics*, Clarendon Press, Oxford.
- [Gre68] Green E. A., Zerna W. (1968). *Theoretical Elasticity, 2nd ed.*, Oxford University Press, Oxford.
- [Hag08] Hagiwara, I. (2008). *From Origami to Origamics*, Science Japan Journal (July 2008) 22-5.
- [Hen74] Henniske, J. e. (1974). *IL 10. Grid Shells*. Stuttgart: Institute for Lightweight Structures (IL).
- [Hug05] Hughes T. J. R., Cottrell J. A., Bazilevs Y. (2005). *Isogeometric Analysis: CAD, Finite Elements, NURBS, Exact Geometry and Mesh Refinement, Comp.Meth. Appl. Mech. Eng.*, 194, pp 4135-4195.
- [Hug10] Hughes T. J. R., Evans J. A. (2010). *Isogeometric Analysis*, Ices Report 10-18, The University of Texas, Austin.
- [Hug87] Hughes T. J. R. (1978). *The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*, Prentice - Hall, New Jersey.
- [Hul06] Hull, T. (2006). *Project Origami: Activities for Exploring Mathematics*, A. K. Peters Ltd., Massachusetts.
- [Hul95] Hull, T. (1995). *Geometric Construction via Origami*, Proceedings of the Second International Conference on Origami in Education and Therapy (COET 95), V'Ann Cornelius, ed., Origami, USA.
- [Hul96] Hull, D. and Clyne, T. W (1996). *An Introduction to Composite Materials*, 2nd Edition, Cambridge University Press, Cambridge.
- [ILE06] *ILEK, Stuttgart*. Preuzeto 07.11.2006. sa <http://www.uni-stuttgart.de/ilek/Fotoarchiv/Fotoarchiv.html>

- [Iro96] Irons B. M. (1996). *Engineering Application of Numerical Integration in Stiffness Method*, Journal of the American Institute of Aeronautics and Astronautics, 14, pp 2035-2037.
- [Isl59] Isler, H. (1959). *New Shapes for Shells*, IASS Colloquium on Non-traditional Construction Processes of Shell Structures. Bulletin of the International Association for Shell Structures, n. 8, 1961, (p. 5+5 pages). Madrid.
- [Isl80] Isler, H. (1980). *New Shapes for Shells – Twenty Years After*, World Congress on Shell and Spatial Structures: 20th Anniversary of IASS. Bulletin of the IASS (71/72), pp.9-26.
- [Iur88] Iura M., Atluri S. N. (1988). *Dynamic Analysis of Finitely Stretched and Rotated Three-Dimensional Space-Curved Beams*, Comp. Struct., 29,5, pp 875-889.
- [Jac11] Jackson, P. (2011). *Folding Techniques for Designers: From Sheet to Form*, Laurence King Publishers, UK.
- [Jar88] Jarić J. (1988). *Mehanika kontinuma*, Građevinska knjiga, Beograd.
- [Kar98] Karapatis, N.P. van Griethuysen, J.-P.S Glardon, R. (1998). *Direct rapid tooling: a review of current research*, Rapid Prototyping Journal 4 (2). pp77–89.
- [Kho98] Khoshnevis, B. (1998). *Innovative Rapid Prototyping in Material Technology*, vol. 13(2), pp 53-56.
- [Kol03] Kolarevic, B. (2003). *Architecture in Digital Age – Design and Manufacturing*. Spon Press. New York and London.
- [Kor77] Korn G., Korn T. (1977). *Mathematical Handbook for Scientists and Engineers, second enlarged and revised ed.*, McGraw-Hill Book Company, ruski prevod, Moskva.
- [Kru98] Kruth, J.P. Leu, M.C. Nakagawa, T. (1998). *Progress in additive manufacturing and rapid prototyping*. CIRP Annals-ManufacturingTechnology 47 (2). pp525–540.
- [Lou04] Loukissas, Y. Sass, L. (2004). *Rulebuilding: a generative approach to architecture using 3D printers*. ACADIA: Surface and form generation.
- [Mak10] MakerBot® Replicator™ 2 Desktop 3D Printer, Single Extruder,

Brochure, , MakerBot®, NY, USA. MakerBot.com/Replicator2.

[Man98] Maneski, T. (1998). *Kompjutersko modeliranje i proračun struktura*. Mašinski fakultet Univerziteta u Beogradu. Beograd.

[Mić90] Mićunović M. (1990). *Primenjena mehanika kontinuma*. Drugo izdanje, Građevinska knjiga, Beograd.

[Mit90] Mitchell, William J. (1990). *The Logic of Architecture Design, Computation, and Cognition*. Cambridge, MA: MIT Press.

[Mit95] Mitchell, W. and McCuillough, W. (1995). Prototyping (chapter 18) in *Digital Design Media 2nd edition*, Van Nostrand Reinhold, New York, pp 417-440.

[Miu97] Miura, K. (1997). *Folds: Its Physical and Mathematical Principles*, Origami Science and Art, Otsu, Tokyo.

[Nag72] Naghdi P. M. (1972). *The Theory of Plates and Shells*, in Encyclopedia of Physics, 2nd ed., Vol. 2, editors S. Flügge, C. Truesdell, pp 425-460, Springer-Verlag.

[Nes00] Nestorović, M. (2000). *Konstruktivni sistemi - principi oblikovanja i konstruisanja*. Beograd: Arhitektonski fakultet Univerziteta u Beogradu.

[Nes00] Nestorovic, M. (2000). *Konstruktivni sistemi – principi konstruisanja i oblikovanja*. Arhitektonski fakultet Univerziteta u Beogradu. Beograd.

[Nis01] Nishino, H. Takagi, H. Cho, S. Utsumiya, K. (2001). *3D modeling system for creative design*. ICOIN 15, Japan.

[Ott90] Otto, F. (1990). *Bulletin of the Institut für leichte Flächentragwerke: Experimente*. Stuttgart (No. 25).

[Ott94] Otto, F., & Rasch, B. (1995). *Finding Form: Towards an Architecture of the Minimal*. Stuttgart.

[Pha98] Pham, D.T. Gault, R.S. (1998). *A comparison of rapid prototyping technologies*. International Journal of Machine Tools and Manufacture 38. pp 1257– 1287.

[Pie97] Piegel L., Tiller W. (1997). *The NURBS Book, 2nd ed.*, Springer-Verlag.

[Pot07] Pottman, H., Asperi, A., Hofer, M., Kilian. A. (2007). *Architectural*

Geometry. Bentley Institute Press, Springer, Wien-New York.

[Rad10] Radenkovic, S. G. (2010). *Statika linijskih nosača, II. Deo odabrana poglavlja*. Građevinski fakultet Univerziteta u Beogradu. Beograd.

[Rad14] Раденковић, Г. (2014). *Изогеометријска теорија носача*. Архитектонски факултет Универзитета у Београду. Београд.

[Rad96] Radenković G. (1996). *Konačne elastoplastične deformacije*, Građevinski fakultet Univerziteta u Beogradu, Beograd.

[Ram11] Ramm, E. (2011). *Heinz Isler Shells – The Priority of Form*. Journal of the IASS (52), pp.143-154.

[Rei74] Reissner E. (1974). *Linear and Nonlinear Theory of Shells, Thin Shells Structures*, Ed. Y. C. Fung and E. E. Sechler, pp 29-44, Prentice-Hall.

[Rei81] Reissner E. (1981). *On Finite Deformations of Space-Curved Beams*. J. Appl. Math. Phy., 32, pp 734-744.

[Rog01] Rogers D. F. (2001). *An Introduction to NURBS with Historical Perspective*, Academic Press.

[Ros97] Rosenman, M. A. (1997). *An exploration into evolutionary models for non-routine design*. Artificial Intelligence in Engineering, 11(3). pp 287-293.

[Ryd98] Ryder, G.J. McGown, A. Ion, W. Green, G. Harrison, D. Wood, B. (1998). *Rapid Prototyping Feasibility Report*. Rapid Prototyping Group. Glasgow School of Art.

[Saj06] Sajid, A. Marasini, R. and Ahmad, M. (2006). *An Analysis of the Applications of Rapid Prototyping in Architecture*. In the Proceedings of Computing in Architecture / Re-Thinking the Discourse: The Second International Conference of the Arab Society for Computer Aided Architectural Design (ASCAAD 2006), 25-27 April 2006, Sharjah, United Arab Emirates.

[Sas05] Sass, L. Shea, K. Powell, M. (2005). *Design Production: Constructing free form designs with rapid prototyping*. In: The International Conference on Digital Design: *The Quest for New Paradigms* (ECAADE 2005), pp 21.24.

- [Sas06] Sass, L. and Oxman, R. (2006). *Materializing design: the implications of rapid prototyping indigital design*. Design Studies, 27(3), pp 325.355.
- [Sas08] Sass, L. (2008). *A physical design grammar: a production system for layered manufacturing machines*. Automation in Construction, 17(6), pp 691.704.
- [Sek72] Sekulović, M. (1972). *Tankozidni prostorni štap*, Doktorska disertacija, Građevinski fakultet univerziteta u Beogradu, Beograd.
- [Ser06] Serebryakova, Y. (2006). *Von der natur gefangen. Frei Otto, Architekt*. Preuzeto 24.07.2013. sa <http://www.uni-stuttgart.de/impulse/imp/alles.php?id=6>.
- [She02] Shelden, D. (2002). *Digital Surface Representation and the Constructability of Gehry's Architecture, PhD Thesis*. Cambridge, Massachusetts: MIT.
- [She05] Shea, K. Aish, R. and Gourtovaia, M. (2005). *Towards integrated performance-driven generative design tools*. Automation in Construction, 14(2), pp 253.264.
- [Ste04] Stephan, S., Sanchez-Alvarez, J., and Knebel, K. (2004). *Reticulated Structures on Free-Form Surfaces*. Shell and Spatial Structures from models to Realization, Montpellier (France). International Association of Shell and Spatial Structures (IASS).
- [Sti79] Stipanić E., Trifunović M. (1979). *Matematika II*, Građevinski fakultet univerziteta u Beogradu, Beograd.
- [Sto65] Stojanović R. (1965). *Uvod u nelinernu mehaniku kontinuuma*, Univerzitet u Beogradu, Beograd.
- [Str92] Streich, B. (1992). *Creating architecture models by computer aided prototyping*. CAAD Futures '91, Vieweg, Wiesbaden.
- [Str96] B. Striech (1996). *3D scanning and 3D-printing for media experimental design work in architecture*. ACADIA '96: Design Computation: Collaboration, Reasoning, Pedagogy.
- [Tim62] Timošenko S. Vojinovski-Kruger S. (1962). *Teorija ploča i ljuski*, Građevinska knjiga, Beograd.

- [Tim62a] Timošenko S., Gudier J. N. (1962). *Teorija elastičnosti*, Građevinska knjiga, Beograd.
- [Vel07] Veltkam M. (2007). *Free Form Structural Design: Schemes, Systems & Prototypes of Structures for Irregular Shaped Buildings*, Thesis, Delft University Press.
- [Vuk95] Vukelić S., Radenković G. (1995). *Tanke elastične ljuske: Teorija i specijalna poglavlja*. Gros knjiga, Beograd.
- [Wan98] Wang, Y.F. Roome, R.L. Benhadj-Djilali, R. (1998). *Selection of rapid prototyping manufacturing processes*. Advances in Manufacturing Technology XII. pp 679– 684. Chap. 114.
- [Zin77] Zinkiewicz O. C. (1977). *The Finite Element Method*, 3rded., McGraw-Hill.
- [Zlo06] Zlokovic, G. (2006). *Group Supermatrix Modular Structure Developed on Properties and Relations of Symetry Groups C_2, D_2, D_{2h}* . Extrait du Bulletin T. CXXXII de l'Académie serbe des sciences et des arts, Classe des Sciences №30. Beograd.

радови аутора:

- [Nes16] Nestorović, B., Grbac, I.; Nestorović, P., Milošević, J. (2015). *Application of reduced stiffness of complex laminate in finite elements for chair analysis*, Drvna industrija (Wood industry), Šumarski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, vol. 66(4), pp. 339-346.
- [Nes16a] Miodrag Nestorović, Jelena Milošević, Predrag Nestorović, Miloš Maneski (2016). *Instrumentalization of origami in construction of folded plate structures – design, research and education*. SPATIUM, Institute of Architecture and Urban & Spatial Planning of Serbia, Issue 35, pp. 22-29.
- [Nes11] Nestorović, P., Milošević, J. (2011). *An Implementation of Isogeometric Analysis Concept in Free-form Architectural Roof Design*, Applied Geometry and Graphics Issue No 88. The Interdepartmental Collection of Proceedings of SED-11, Ukraine Association for Applied Geometry, Kyiv, Ukraine, pp. 229-233.

[Nes12] Nestorovic, M., Nestorovic, P., Milosevic, J. (2012). *Instrumental Role of Geometry in Design Process of Folded Architectural Structures - Research and Education*, Applied Geometry and Graphics Issue No 90. The Interdepartmental Collection of Proceedings of SED-12, Ukraine Association for Applied Geometry, Kyiv, Ukraine, pp. 397-402

[Nes13] Nestorović, M., Nestorović, P., Milošević, J. (2013). *Rapid Prototyping: Constructing Physical Models of Architectural Geometry*, Applied Geometry and Graphics Issue No 91. The Interdepartmental Collection of Proceedings of SED-13, Ukraine Association for Applied Geometry. Kyiv, Ukraine, pp. 187-192.

[Nes12] Nestorovic, B., Grbac, I., Nestorovic, P. (2012). *Experimental Determination of Elastic Constants of Veneer Composite*. Proceedings of the 23th International Scientific Conference – Wood is Good – With Knowledge and Technology to a Competitive Forestry and Wood Technology Sector. Zagreb, 12th October 2012. Ambienta, pp. 127-138.

[Nes12a] Nestorovic, B., Nestorovic, P., Milosevic, J. (2012). *Sitting Furniture of Wood Laminates: Material and Design Synthesis*. ALICE. (Architecture, Landscape, Interior, Culture, Emotion) Book of Abstracts of 2nd International Scientific Conference on the Importance of Design. Academy of Design Associated Member of University of Primorska. Ljubljana, Slovenia. November, 13, 2012. pp.12.

[Nes13] Nestorovic, B., Grbac, I., Nestorovic, P. (2013). *Numerical Analysis of Laminated Wood Structures - Chairs by Application of FEA*. Proceedings of the 24th International Scientific Conference – Wood is Good – User Oriented Material, Technology and Design. Zagreb, 18th October 2013. Ambienta, pp.101-109.

[Nes13a] Nestorović, P. (2013). *Projekat istraživanja: 3D optička deformacijsko-naponska analiza modelskih NURBS struktura konstruisanih Rapid Prototyping-om*, u katalogu Zloković, Đ. и Nestorović, M. (ed.), U korak sa vremenom – 50 godina predmeta Konstruktivni sistemi i Prostorne strukture 1963-2013. Univerzitet u Beogradu, Arhitektonski fakultet. pp.39-40.

7.0 Прилози :

Прилог 1. WolframMatematica 10 (софтверски код за љуску)

Прилог 2. 3D оптичко безконтактно мерење - ARAMIS

Прилог 3. Изјава о ауторству

Изјава о истоветности штампане и електронске
верзије докторског рада

Изјава о коришћењу

In[1]:=

```
(* POCETAK PROGRAMA *)

Off[NIntegrate::"slwcon"];
Off[NIntegrate::"ncvb"];
Off[General::stop];
Off[NIntegrate::eincr];
Clear["Global`*"];

a = .15; (* dimenzije strukture *)
p = 1; (* stepen funkcije *)

KolikoElemenata = 6;
DoKojegIdemo = 2; (* zeljeni stepen funkcije *)
KolikoBrisemo = 1; (* brisanje unutrašnjih cvorova *)
KolikoInsertujemo = KolikoElemenata - 1;
 $\xi$  = Table[0, {1}, {2 * p + KolikoElemenata + 1}];
 $\xi$ [[1, p + 1 + KolikoElemenata ;;]] = 1;
For[i = 1, i < KolikoElemenata, i++,
   $\xi$ [[1, p + 1 + i]] = i / KolikoElemenata];
ostaloBrisanja = DoKojegIdemo - KolikoBrisemo - 1;
br = 0;
BrojKontrolnihTacaka = Dimensions[ $\xi$ ][[2]] - 2 - (p - 1);
p = 2; pp = 2; br = 0;
For[i = 1, i < Dimensions[ $\xi$ ][[2]], i++,
  If[ $\frac{br}{KolikoElemenata} \xi$ [[1, i]],
    i = Insert[i,  $\frac{br}{KolikoElemenata}$ , {1, i + 1}]; br = br + 1;
  ];
br = 0;
BrojKontrolnihTacaka = Dimensions[ $\xi$ ][[2]] - 2 - (p - 1);
PoKoor = Table[0, {BrojKontrolnihTacaka}, {p}];
(* polarne koordinate *)
Pw = Table[0, {BrojKontrolnihTacaka}, {3}];
(* tezinske koordinate 3D *)
P = Table[0, {BrojKontrolnihTacaka}, {2}]; (* koordinate u 2D *)
For[i = 1, i < BrojKontrolnihTacaka + 1, i++,
  br = br + 1;
  For[j = 1, j < p + 1, j++,
    PoKoor[[i, j]] =  $\xi$ [[1, br + j]]];
Gw = Table[0, {3}, {3}];
Gw[[1, 1]] = 0; Gw[[1, 2]] = 0; Gw[[1, 3]] = 1;
Gw[[2, 1]] = a / 2; Gw[[2, 2]] = 0; Gw[[2, 3]] = 1;
Gw[[3, 1]] = a; Gw[[3, 2]] = 0; Gw[[3, 3]] = 1;
br = 0;
PoKoor = Table[0, {BrojKontrolnihTacaka}, {p}];
(* polarne koordinate *)
Pw = Table[0, {BrojKontrolnihTacaka}, {3}];
(* tezinske koordinate 3D *)
```

```

P = Table[0, {BrojKontrolnihTacaka}, {2}]; (*koordinate u 2D*)
For[i = 1, i < BrojKontrolnihTacaka + 1, i++,
  br = br + 1;
  For[j = 1, j < p + 1, j++,
    PoKoor[[i, j]] = ξ[[1, br + j]]];
For[i = 1, i < BrojKontrolnihTacaka + 1, i++,
  If[i == 1, Pw[[i]] = Gw[[1]]];
  If[i == BrojKontrolnihTacaka, Pw[[i]] = Gw[[3]]];
  If[i > 1 && i < BrojKontrolnihTacaka, If[PoKoor[[i, 1]] ≠ PoKoor[[i, 2]],
    Pw[[i]] = FullSimplify[
$$\frac{1 - \text{PoKoor}[[i, 2]]}{1 - \text{PoKoor}[[i, 1]]} * \text{Pw}[[i - 1]] +$$

    ((PoKoor[[i, 2]] - PoKoor[[i, 1]]) / (1 - PoKoor[[i, 1]])) *
    ((1 - PoKoor[[i, 1]]) * Gw[[2]] + PoKoor[[i, 1]] * Gw[[3]])];
    Pw[[i]] = FullSimplify[
$$\frac{1 - \text{PoKoor}[[i, 1]]}{1 - \text{PoKoor}[[i - 1, 1]]} * \text{Pw}[[i - 1]] +$$

    ((PoKoor[[i, 1]] - PoKoor[[i - 1, 1]]) / (1 - PoKoor[[i - 1, 1]])) *
    ((1 - PoKoor[[i, 1]]) * Gw[[2]] + PoKoor[[i, 1]] * Gw[[3]])];
  StariBrojKonacnihTacakaa = Table[0, {KolikoBrisemo}, {1}];
  StareKoordinatePww = Table[0, {KolikoBrisemo}, {1}];
  StareKoordinatePoKoorr = Table[0, {KolikoBrisemo}, {1}];
  (*brisanje unutrasnjih cvorova*)
  For[brisanje = 1, brisanje < KolikoBrisemo + 1, brisanje++,
    ξ = Drop[ξ, None, {p + 2, Dimensions[ξ][[2]] - p - 1, p - brisanje + 1}];
    StariBrojKonacnihTacaka = BrojKontrolnihTacaka;
    StariBrojKonacnihTacakaa[[brisanje]] = BrojKontrolnihTacaka;
    BrojKontrolnihTacaka = Dimensions[ξ][[2]] - p - 1;
    StareKoordinatePww[[brisanje]] = Pw;
    StareKoordinatePw = Pw;
    StareKoordinatePoKoor = PoKoor;
    StareKoordinatePoKoorr[[brisanje]] = PoKoor;
    PoKoor = Table[0, {BrojKontrolnihTacaka}, {p}];
    br = 0;
  For[i = 1, i < BrojKontrolnihTacaka + 1, i++,
    br = br + 1;
    For[j = 1, j < p + 1, j++,
      PoKoor[[i, j]] = ξ[[1, br + j]]];
  br = 1;
  Pw = Table[0, {BrojKontrolnihTacaka}, {3}];
  (*tezinske koordinate 3D*)
  For[i = 1, i < BrojKontrolnihTacaka + 1, i++,
    For[j = 1, j < StariBrojKonacnihTacaka + 1, j++,
      If[StareKoordinatePoKoor[[j, All]] == PoKoor[[i, All]],
        {Pw[[i]] = StareKoordinatePw[[j]], nisuiste[i] = 1,
          j = StariBrojKonacnihTacaka}, nisuiste[i] = 0];
      koliko = 0; brr = 0;

```



```

For[i = 1, i < BrojKontrolnihTacaka + 1, i++,
koliko = 0; If[!isuiste[i] == 0,
  koji = 0, For[j = i, j < StariBrojKonacnihTacaka + 1, j++,
    kk = 1; pod = 0;
    For[k = 1, k < p + 1, k++,
      br = PoKoor[[i, kk]];
      If[br == StareKoordinatePoKoor[[j, k]],
        {kk = kk + 1, pod = pod + 1}, {ξm = StareKoordinatePoKoor[[j, k]],
          If[pod == p - 1, ξm = StareKoordinatePoKoor[[j, k]],
            If[kk == 1 || k == p || pod == 0, kk = p], If[kk < p || k == p,
              {kk = kk + 1, k = pod}], If[kk == p || pod == 0, {k = p}]}]; If[kk
            > p, k = p]];
      ξi = PoKoor[[i - 1, 1]];
      ξip = PoKoor[[i, p]];
      If[pod == p - 1 || ξm > ξi || ξm < ξip,
        {koji = j, j = StariBrojKonacnihTacaka}];
      If[koji == 0 || j == StariBrojKonacnihTacaka, {koliko = koliko + 1}];
      If[koliko == 1,
        {For[j = i, j < StariBrojKonacnihTacaka + 1, j++,
          kk = 1; pod = 0;
          Print["j= ", j];
          For[k = 1, k < p, k++,
            br = PoKoor[[i, kk]];
            If[br == StareKoordinatePoKoor[[j, k]],
              {kk = kk + 1, pod = pod + 1}, {ξm = StareKoordinatePoKoor[[j, k]],
                If[kk == 1 || k == p || pod == 0, kk = p], If[kk < p || k == p,
                  {kk = kk + 1, k = pod}], If[kk == p || pod == 0, {k = p}]}];
                If[kk > p, k = p]];
              ξi = PoKoor[[i - 1, 1]];
              ξip = PoKoor[[i, p]];
              If[pod == p - 2 || ξm > ξi || ξm < ξip,
                {koji = j, Print["ξm =", ξm], Print["koji= ", koji],
                  j = StariBrojKonacnihTacaka}]];
              For[j = koji, j < StariBrojKonacnihTacaka + 1, j++,
                kk = 1; pod = 0;
                For[k = 1, k < p + 1, k++,
                  br = StareKoordinatePoKoorr[[brisanje, koji, kk]];
                  If[br == StareKoordinatePoKoorr[[brisanje - 1, j, k]], {kk = kk + 1,
                    pod = pod + 1}, {ξmm = StareKoordinatePoKoorr[[brisanje - 1, j, k]],
                      If[kk == 1 || k == p || pod == 0, kk = p], If[kk < p || k == p, {kk = kk + 1, k = pod}], If[kk ==
                      p || pod == 0, {k = p}]}];
                      If[kk > p, k = p]];
                      StareKoordinatePoKoorr[[brisanje, koji, p]] = PoKoor[[i, p - 1]];
                      ξii = StareKoordinatePoKoorr[[brisanje, koji - 1, 1]];
                      ξipp = StareKoordinatePoKoorr[[brisanje, koji, p]];
                      If[pod == p - 1 || ξmm > ξii || ξmm < ξipp,
                        {kojii = j, Print["ξmm =", ξmm],
                          j = StariBrojKonacnihTacaka + 1}]]];
                }];
          }];
        }];
      }];
    }];
  }];
];

```

```

Pmm = StareKoordinatePww[[brisanje - 1, kojii]]];
If[Koliko[0], Pm = StareKoordinatePw[[koji]],

Pm = FullSimplify[
$$\frac{1}{\xi_{mm} - \xi_{ii}} * ((\xi_{ipp} - \xi_{ii}) * Pmm -$$

(\xi_{ipp} - \xi_{mm}) * StareKoordinatePww[[brisanje, koji - 1]])];

Print["", brisanje, " ", koji - 1];

Pw[[i]] = FullSimplify[
$$\frac{1}{\xi_m - \xi_i} * ((\xi_{ip} - \xi_i) * Pm -$$

(\xi_{ip} - \xi_m) * Pw[[i - 1]])];

w = Table[Pw[[i, 3]], {i, BrojKontrolnihTacaka}];
For[i = 1, i < BrojKontrolnihTacaka + 1, i++,
KontrolnaTacka[i] = {FullSimplify[Pw[[i, 1]] / Pw[[i, 3]],
FullSimplify[Pw[[i, 2]] / Pw[[i, 3]]]};
pts = Table[KontrolnaTacka[i], {i, BrojKontrolnihTacaka}];
η = ξ;
bazeξ = Table[PiecewiseExpand[BSplineBasis[{p, ξ[[1]]}, i, t]],
{i, 0, BrojKontrolnihTacaka - 1}];
bazeη = Table[PiecewiseExpand[BSplineBasis[{p, η[[1]]}, i, s]],
{i, 0, BrojKontrolnihTacaka - 1}];
(*matrica za bazne funkcije*)
bξ = Table[0, {KolikoElementata}, {p + 1}];
bη = Table[0, {KolikoElementata}, {p + 1}];
For[i = 1, i < KolikoElementata + 1, i++,
br = 0;
For[j = 1, j < BrojKontrolnihTacaka + 1, j++,
For[k = 1, k < Dimensions[bazeξ[[j, 1]]][[1]] + 1, k++,
If[bazeξ[[j, 1, k, 2, 1]] <  $\left(\frac{i - 1}{\text{KolikoElementata}}\right)$ , {br = br + 1,
kojeKontrolne[i, br] = j, bξ[[i, br]] = bazeξ[[j, 1, k, 1]]}];
For[i = 1, i < KolikoElementata + 1, i++,
br = 0;
For[j = 1, j < BrojKontrolnihTacaka + 1, j++,
For[k = 1, k < Dimensions[bazeη[[j, 1]]][[1]] + 1, k++,
If[bazeη[[j, 1, k, 2, 1]] <  $\left(\frac{i - 1}{\text{KolikoElementata}}\right)$ , {br = br + 1,
kojeKontrolne[i, br] = j, bη[[i, br]] = bazeη[[j, 1, k, 1]]}];
ptsξη = Table[0, {BrojKontrolnihTacaka}, {BrojKontrolnihTacaka}, {3}];
br = 0;
Grafikptsξη =
Table[0, {BrojKontrolnihTacaka}, {BrojKontrolnihTacaka}, {3}];
For[i = 1, i < BrojKontrolnihTacaka + 1, i++,

```

```

br = br + 1;
For[j = 1, j < BrojKontrolnihTacaka + 1, j++,
  ptsξη[[i, j, 2]] = pts[[br, 1]];
  Grafikapsξη[[i, j, 2]] = pts[[br, 1]];
  ptsξη[[i, j, 1]] = pts[[j, 1]];
  Grafikapsξη[[i, j, 1]] = pts[[j, 1]]];
(*DEFINISANJE GEOMETRIJE ZA SLOBODNU FORMU, DEFINISANJE Z KOORDINATE*)
(*parametri kojim uticemo na vrednost Z koordinate*)
a1 = 3 / 100; b1 = 2 / 100; c1 = 2 / 100;
ptsξη[[1, 1, 3]] = 0;
ptsξη[[1, 2, 3]] = 0;
ptsξη[[1, 3, 3]] = 0;
ptsξη[[1, 4, 3]] = 0;
ptsξη[[1, 5, 3]] = 0;
ptsξη[[1, 6, 3]] = 0;
ptsξη[[1, 7, 3]] = 0;
ptsξη[[1, 8, 3]] = 0;

ptsξη[[2, 1, 3]] = 0;
ptsξη[[2, 2, 3]] = a1 * 1 / 16;
ptsξη[[2, 3, 3]] = a1 * 1 / 8;
ptsξη[[2, 4, 3]] = a1 * 1 / 4;
ptsξη[[2, 5, 3]] = -b1 * 1 / 4;
ptsξη[[2, 6, 3]] = -b1 * 1 / 8;
ptsξη[[2, 7, 3]] = -b1 * 1 / 16;
ptsξη[[2, 8, 3]] = 0;

ptsξη[[3, 1, 3]] = 0;
ptsξη[[3, 2, 3]] = a1 * 1 / 8;
ptsξη[[3, 3, 3]] = a1 * 1 / 4;
ptsξη[[3, 4, 3]] = a1 * 1 / 2;
ptsξη[[3, 5, 3]] = b1 * -1 / 2;
ptsξη[[3, 6, 3]] = b1 * -1 / 4;
ptsξη[[3, 7, 3]] = b1 * -1 / 8;
ptsξη[[3, 8, 3]] = 0;

ptsξη[[4, 1, 3]] = 0;
ptsξη[[4, 2, 3]] = a1 * 1 / 4;
ptsξη[[4, 3, 3]] = a1 * 1 / 2;
ptsξη[[4, 4, 3]] = a1 * 1;
ptsξη[[4, 5, 3]] = -b1 * 1;
ptsξη[[4, 6, 3]] = b1 * -1 / 2;
ptsξη[[4, 7, 3]] = b1 * -1 / 4;
ptsξη[[4, 8, 3]] = 0;

ptsξη[[5, 1, 3]] = 0;
ptsξη[[5, 2, 3]] = -a1 * 1 / 4;
ptsξη[[5, 3, 3]] = -a1 * 1 / 2;
ptsξη[[5, 4, 3]] = -b1 * 1;

```

```

ptsξη[[5, 5, 3]] = a1 * 1;
ptsξη[[5, 6, 3]] = b1 * 1 / 2;
ptsξη[[5, 7, 3]] = b1 * 1 / 4;
ptsξη[[5, 8, 3]] = 0;

ptsξη[[6, 1, 3]] = 0;
ptsξη[[6, 2, 3]] = -b1 * 1 / 8;
ptsξη[[6, 3, 3]] = -b1 * 1 / 4;
ptsξη[[6, 4, 3]] = b1 * -1 / 2;
ptsξη[[6, 5, 3]] = c1 * 1 / 2;
ptsξη[[6, 6, 3]] = c1 * 1 / 4;
ptsξη[[6, 7, 3]] = c1 * 1 / 8;
ptsξη[[6, 8, 3]] = 0;

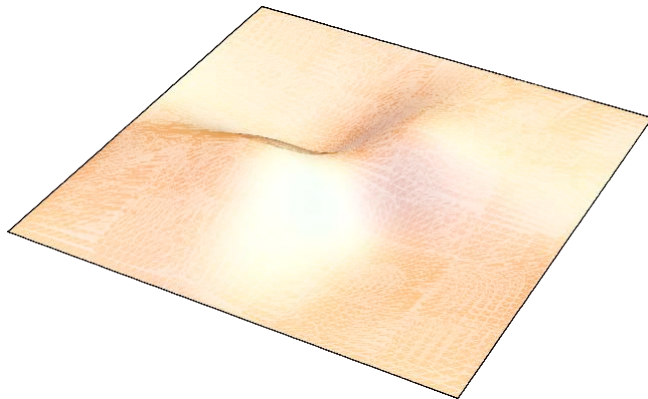
ptsξη[[7, 1, 3]] = 0;
ptsξη[[7, 2, 3]] = -b1 * 1 / 16;
ptsξη[[7, 3, 3]] = -b1 * 1 / 8;
ptsξη[[7, 4, 3]] = -b1 * 1 / 4;
ptsξη[[7, 5, 3]] = c1 * 1 / 4;
ptsξη[[7, 6, 3]] = c1 * 1 / 8;
ptsξη[[7, 7, 3]] = c1 * 1 / 16;
ptsξη[[7, 8, 3]] = 0;

ptsξη[[8, 1, 3]] = 0;
ptsξη[[8, 2, 3]] = 0;
ptsξη[[8, 3, 3]] = 0;
ptsξη[[8, 4, 3]] = 0;
ptsξη[[8, 5, 3]] = 0;
ptsξη[[8, 6, 3]] = 0;
ptsξη[[8, 7, 3]] = 0;
ptsξη[[8, 8, 3]] = 0;

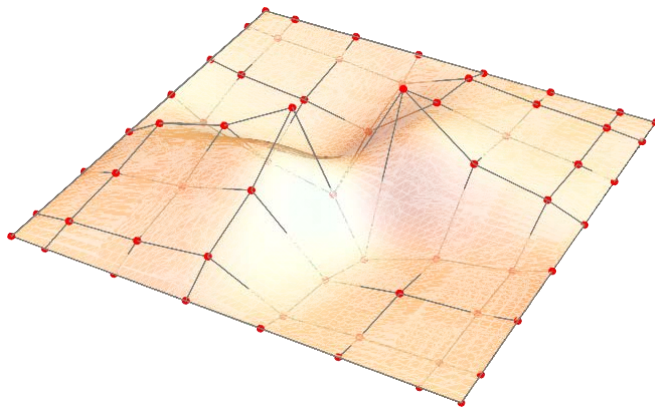
Print["Koordinate kontrolnih tacaka = ", MatrixForm[ptsξη]];
(*crtanje nosaca, poligona i kontrolnih tacaka*)
Grafik1 = Graphics3D[{BSplineSurface[ptsξη], Mesh 6, Boxed False}];
Show[Grafik1, Boxed False]
Show[Graphics3D[{PointSize[Medium], Red, Map[Point, ptsξη], Gray,
  Line[ptsξη], Line[Transpose[ptsξη]], Mesh 8}], Grafik1, Boxed False]
B=Table[0, {3}, p+1)^2
KR=Table[10^5, 3*(p+1)^2 3*(p+1)^2
SK = Table[0, {BrojKontrolnihTacaka * BrojKontrolnihTacaka * 3},
  {BrojKontrolnihTacaka * BrojKontrolnihTacaka * 3}];
KS = Table[0, {BrojKontrolnihTacaka * BrojKontrolnihTacaka * 3},
  {BrojKontrolnihTacaka * BrojKontrolnihTacaka * 3}];
KC = Table[0, {KolikoElemenata * KolikoElemenata}, {p+1}];
QL = Table[0, {BrojKontrolnihTacaka * BrojKontrolnihTacaka * 3}];
QM = Table[0, {BrojKontrolnihTacaka * BrojKontrolnihTacaka * 3}];
RK = Table[0, p+1)^2

```

Out[74]=



Out[75]=



```
OptereceniElement = 15; OptereceniElementPoX = 3; OptereceniElementPoY = 3;
Buφ = Table[0, {3 * 5}, {3 * (p + 1)^2}];
L = Table[0, {6}, {3 * 5}]; DD = Table[0, {6}, {6}];
For[j = 1, j < KolikoElementa + 1, j++,
  For[i = 1, i < KolikoElementa + 1, i++,
    k1 = KolikoElementa * (j - 1) + i;
    kn = BrojKontrolnihTacaka * (j - 1) + (j - 1) * ostaloBrisanja *
      BrojKontrolnihTacaka + (i - 1) + (i - 1) * ostaloBrisanja;
    Y1 = 0; Y2 = 0; Y3 = 0; g1 = {0, 0, 0}; g2 = {0, 0, 0};
    For[m = 1, m < p + 2, m++,
      For[k = 1, k < p + 2, k++,
        n1 = (p + 1) * (m - 1) + k;
        bazneFunkcije = Simplify[bξ[[i, k]] * bη[[j, m]]];
        Y1 = Y1 + ptsξη[[kojeKontrolne[j, m], kojeKontrolne[i, k]]][[1]] *
          bazneFunkcije;
```

```

Y2 = Y2 + ptsξη[[kojeKontrolne[j, m], kojeKontrolne[i, k]]][[2]] *
    bazneFunkcije;
Y3 = Y3 + ptsξη[[kojeKontrolne[j, m], kojeKontrolne[i, k]]][[3]] *
    bazneFunkcije;
Da1 = Simplify[D[bazneFunkcije, t]];
Da2 = Simplify[D[bazneFunkcije, s]];
g1 = g1 + {Da1 * ptsξη[[kojeKontrolne[j, m], kojeKontrolne[i, k]]][[1]],
    Da1 * ptsξη[[kojeKontrolne[j, m], kojeKontrolne[i, k]]][[2]],
    Da1 * ptsξη[[kojeKontrolne[j, m], kojeKontrolne[i, k]]][[3]]};
g2 = g2 + {Da2 * ptsξη[[kojeKontrolne[j, m], kojeKontrolne[i, k]]][[1]],
    Da2 * ptsξη[[kojeKontrolne[j, m], kojeKontrolne[i, k]]][[2]],
    Da2 * ptsξη[[kojeKontrolne[j, m], kojeKontrolne[i, k]]][[3]]};
DDa1 = D[Da1, t]; DDa2 = D[Da2, s]; DDa12 = D[Da1, s];
Buφ[[1, n1]] = Da1; Buφ[[2, n1]] = Da2;
Buφ[[3, n1]] = DDa1; Buφ[[4, n1]] = DDa2;
Buφ[[5, n1]] = DDa12; Buφ[[6, n1 + 1]] = Da1;
Buφ[[7, n1 + 1]] = Da2; Buφ[[8, n1 + 1]] = DDa1;
Buφ[[9, n1 + 1]] = DDa2; Buφ[[10, n1 + 1]] = DDa12;
Buφ[[11, n1 + 2]] = Da1; Buφ[[12, n1 + 2]] = Da2;
Buφ[[13, n1 + 2]] = DDa1; Buφ[[14, n1 + 2]] = DDa2;
Buφ[[15, n1 + 2]] = DDa12;
qk = If[31 < OptereceniElement, 25 * 10-3 * bazneFunkcije, 0] n2
    = BrojKontrolnihTacaka * (m - 1) + k;
QL[[3 * (kn + n2)]] = QL[[3 * (kn + n2)]] + qk;
QL[[3 * (kn + n2) - 1]] = QL[[3 * (kn + n2) - 1]] + qk;
QL[[3 * (kn + n2) - 2]] = QL[[3 * (kn + n2) - 2]] + qk;
g11 = Simplify[g12];
g22 = Simplify[g22];
g12 = Simplify[g1 g2];
g21 = Simplify[g12];
g = Simplify[g11 * g22 - g122];
g3 = Simplify[ $\frac{1}{g^{1/2}}$  * (g1 g2)];
Dg1 = Simplify[D[g1, t]];
Dg2 = Simplify[D[g2, s]];
Dg12 = Simplify[D[g1, s]];
gg1 = Simplify[ $\frac{1}{g^{1/2}}$  * (g2 g3)];
gg2 = Simplify[ $\frac{1}{g^{1/2}}$  * (g3 g1)];
G111 = Simplify[Dg1.gg1]; G211 = Simplify[Dg1.gg2];
G122 = Simplify[Dg2.gg1];
G222 = Simplify[Dg2.gg2]; G112 = Simplify[Dg12.gg1];
G212 = Simplify[Dg12.gg2];
L[[1 ;; 6, 1 ;; 5]] = Simplify[Chop]

```

$$\begin{pmatrix} g1[[1]] & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g2[[1]] & 0 & 0 & 0 \\ g2[[1]] & g1[[1]] & 0 & 0 & 0 \\ G111 * g3[[1]] & G211 * g3[[1]] & -g3[[1]] & 0 & 0 \\ G122 * g3[[1]] & G222 * g3[[1]] & 0 & -g3[[1]] & 0 \\ 2 * G112 * g3[[1]] & 2 * G212 * g3[[1]] & 0 & 0 & -2 * -g3[[1]] \end{pmatrix} \quad \square$$

L[[1 ;; 6, 6 ;; 10]] = Simplify[Chop[

$$\begin{pmatrix} g1[[2]] & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g2[[2]] & 0 & 0 & 0 \\ g2[[2]] & g1[[2]] & 0 & 0 & 0 \\ G111 * g3[[2]] & G211 * g3[[2]] & -g3[[2]] & 0 & 0 \\ G122 * g3[[2]] & G222 * g3[[2]] & 0 & -g3[[2]] & 0 \\ 2 * G112 * g3[[2]] & 2 * G212 * g3[[2]] & 0 & 0 & -2 * -g3[[2]] \end{pmatrix} \quad \square$$

L[[1 ;; 6, 11 ;; 15]] = Simplify[Chop[

$$\begin{pmatrix} g1[[3]] & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g2[[3]] & 0 & 0 & 0 \\ g2[[3]] & g1[[3]] & 0 & 0 & 0 \\ G111 * g3[[3]] & G211 * g3[[3]] & -g3[[3]] & 0 & 0 \\ G122 * g3[[3]] & G222 * g3[[3]] & 0 & -g3[[3]] & 0 \\ 2 * G112 * g3[[3]] & 2 * G212 * g3[[3]] & 0 & 0 & -2 * -g3[[3]] \end{pmatrix} \quad \square$$

B = Chop[L.Buφ];

(* Geometrijske karakteristike preseka *)

h = 1.5 * 10⁻³; v = 0.3; EE = 10 * 10³;

$\mu = \frac{EE}{2.0 * (1 + v)}$; G = μ; $\lambda = \frac{EE * v}{(1 + v) * (1 - 2 * v)}$;

b11 = Simplify[Chop[Dg1 * D[g3, t]]];

b21 = Simplify[Chop[D[g2, t] * D[g3, s]]];

b12 = Simplify[Chop[D[g1, s] * D[g3, t]]];

b22 = Simplify[Chop[Dg2 * D[g3, s]]];

B11 = Simplify[Chop[g11.b11 + g12.b21]];

B21 = Simplify[Chop[g21.b11 + g22.b21]];

B12 = Simplify[Chop[g11.b12 + g12.b22]];

B22 = Simplify[Chop[g21.b12 + g22.b22]];

b = Simplify[Chop[B11 * B22 - B12 * B21]];

D1111 = Chop[μ * (g11.g11 + $\frac{v}{1 - v}$ * g11.g11)]

D1112 = Chop[μ * (g11.g12 + $\frac{v}{1 - v}$ * g11.g12)]

D1211 = Chop[μ * (g12.g11 + $\frac{v}{1 - v}$ * g11.g21)]

D1212 = Chop[μ * (g12.g12 + $\frac{v}{1 - v}$ * g11.g22)]

D1121 = Chop[μ * (g11.g21 + $\frac{v}{1 - v}$ * g12.g11)]

D1122 = Chop[μ * (g11.g22 + $\frac{v}{1 - v}$ * g12.g12)]

$$D1221 = \text{Chop}[\mu] * \left(g12.g21 + \frac{v}{1-v} * g12.g21 \right)$$

$$D1222 = \text{Chop}[\mu] * \left(g12.g22 + \frac{v}{1-v} * g12.g22 \right)$$

$$D2121 = \text{Chop}[\mu] * \left(g21.g21 + \frac{v}{1-v} * g22.g11 \right)$$

$$D2122 = \text{Chop}[\mu] * \left(g21.g22 + \frac{v}{1-v} * g22.g12 \right)$$

$$D2221 = \text{Chop}[\mu] * \left(g22.g21 + \frac{v}{1-v} * g22.g21 \right)$$

$$D2222 = \text{Chop}[\mu] * \left(g22.g22 + \frac{v}{1-v} * g22.g22 \right)$$

$$D1 = \text{Simplify}[\text{Chop} \left(\begin{array}{ccc} D1111 & D1112 + D1211 & D1212 \\ D1121 & D1122 + D1221 & D1222 \\ D2121 & D2122 + D2221 & D2222 \end{array} \right)]$$

$$D1111 = \text{Chop}[\mu] * \left((g11.b11 + b11.g11) + \frac{v}{1-v} * (g11.b11 + b11.g11) \right)$$

$$D1112 = \text{Chop}[\mu] * \left((g11.b12 + b11.g12) + \frac{v}{1-v} * (g11.b12 + b11.g12) \right)$$

$$D1211 = \text{Chop}[\mu] * \left((g12.b11 + b12.g11) + \frac{v}{1-v} * (g11.b21 + b11.g21) \right)$$

$$D1212 = \text{Chop}[\mu] * \left((g12.b12 + b12.g12) + \frac{v}{1-v} * (g11.b22 + b11.g22) \right)$$

$$D1121 = \text{Chop}[\mu] * \left((g11.b21 + b11.g21) + \frac{v}{1-v} * (g12.b11 + b12.g11) \right)$$

$$D1122 = \text{Chop}[\mu] * \left((g11.b22 + b11.g22) + \frac{v}{1-v} * (g12.b12 + b12.g12) \right)$$

$$D1221 = \text{Chop}[\mu] * \left((g12.b21 + b12.g21) + \frac{v}{1-v} * (g12.b21 + b12.g21) \right)$$

$$D1222 = \text{Chop}[\mu] * \left((g12.b22 + b12.g22) + \frac{v}{1-v} * (g12.b22 + b12.g22) \right)$$

$$D2121 = \text{Chop}[\mu] * \left((g21.b21 + b21.g21) + \frac{v}{1-v} * (g22.b11 + b22.g11) \right)$$

$$D2122 = \text{Chop}[\mu] * \left((g21.b22 + b21.g22) + \frac{v}{1-v} * (g22.b12 + b22.g12) \right)$$

$$D2221 = \text{Chop}[\mu] * \left((g22.b21 + b22.g21) + \frac{v}{1-v} * (g22.b21 + b22.g21) \right)$$

$$D2222 = \text{Chop}[\mu] * \left((g22.b22 + b22.g22) + \frac{v}{1-v} * (g22.b22 + b22.g22) \right)$$

$$D2 = \text{Simplify}[\text{Chop} \left(\begin{array}{ccc} D1111 & D1112 + D1211 & D1212 \\ D1121 & D1122 + D1221 & D1222 \\ D2121 & D2122 + D2221 & D2222 \end{array} \right)]$$

$$D1111 = \text{Chop}[\mu] * \left(b11.b11 + \frac{v}{1-v} * b11.b11 \right)$$

$$D1112 = \text{Chop}[\mu] * \left(b11.b12 + \frac{v}{1-v} * b11.b12 \right)$$

$$D1211 = \text{Chop}[\mu] * \left(b12.b11 + \frac{v}{1-v} * b11.b21 \right)$$


```

D1212 = Chop[2] * μ * (b12.b12 +  $\frac{\nu}{1-\nu}$  * b11.b22)
D1121 = Chop[2] * μ * (b11.b21 +  $\frac{\nu}{1-\nu}$  * b12.b11)
D1122 = Chop[2] * μ * (b11.b22 +  $\frac{\nu}{1-\nu}$  * b12.b12)
D1221 = Chop[2] * μ * (b12.b21 +  $\frac{\nu}{1-\nu}$  * b12.b21)
D1222 = Chop[2] * μ * (b12.b22 +  $\frac{\nu}{1-\nu}$  * b12.b22)
D2121 = Chop[2] * μ * (b21.b21 +  $\frac{\nu}{1-\nu}$  * b22.b11)
D2122 = Chop[2] * μ * (b21.b22 +  $\frac{\nu}{1-\nu}$  * b22.b12)
D2221 = Chop[2] * μ * (b22.b21 +  $\frac{\nu}{1-\nu}$  * b22.b21)
D2222 = Chop[2] * μ * (b22.b22 +  $\frac{\nu}{1-\nu}$  * b22.b22)

D3 = Simplify[Chop[ $\begin{pmatrix} D1111 & D1112 + D1211 & D1212 \\ D1121 & D1122 + D1221 & D1222 \\ D2121 & D2122 + D2221 & D2222 \end{pmatrix}$ ]]];

bλλ = Chop[B11 + B22];

DM = Chop[h +  $\frac{h^3}{12}$  * b] * D1 -  $\frac{h^3}{6}$  * bλλ * D2 + ( $\frac{h^3}{3}$  +  $\frac{h^5}{20}$  * b) * D3

DMB = Chop[ $\left(\frac{h^3}{6} + \frac{h^5}{40} * b\right)$ ] * D2 - bλλ * ( $\frac{h^3}{12}$  * D1 +  $\frac{h^5}{20}$  * D3)

DB = Chop[ $\left(\frac{h^3}{12} + \frac{h^5}{80} * b\right)$ ] * D1 +  $\frac{h^5}{20}$  * D3 -  $\frac{h^5}{40}$  * bλλ * D2

DD[[1 ;; 3, 1 ;; 3]] = DM;
DD[[1 ;; 3, 4 ;; 6]] = DMB;
DD[[4 ;; 6, 1 ;; 3]] = Transpose[DMB];
DD[[4 ;; 6, 4 ;; 6]] = DB;

If[i [1] j [1], Print[Dimensions[Transpose[B].DD.B]];
Print["Krutost ", i,
". elementa u ξ pravcu i krutost ", j, ". elementa u η pravcu"];
KR = NIntegrate[Chop[Transpose[B].DD.B],
{t, i / KolikoElementata - 1 / KolikoElementata, i / KolikoElementata},
{s, j / KolikoElementata - 1 / KolikoElementata, j / KolikoElementata},
WorkingPrecision [MachinePrecision, AccuracyGoal [6,
PrecisionGoal [8, Method -> "GaussKronrodRule"]];
For[k = 1, k < p + 2, k++,
For[kk = 1, kk < 3 * (p + 1) + 1, kk++,
kn1 = kn + (BrojKontrolnihTacaka + 1) * (k - 1) + kk;
kn2 = 3 * (p + 1) * (k - 1) + kk;
For[m = 1, m < p + 2, m++,
For[n = 1, n < 3 * (p + 1) + 1, n++,
kpl = kn + (BrojKontrolnihTacaka + 1) * (m - 1) + n;

```

```

    kp2 = 3 * (p + 1) * (m - 1) + n;
    SK[[kn1, kp1]] = SK[[kn1, kp1]] + KR[[kn2, kp2]]];];];
KS[[All, All]] = SK[[All, All]];
For[i = 1, i < BrojKontrolnihTacaka + 2, i++,
  For[j = 1, j ≤ BrojKontrolnihTacaka * BrojKontrolnihTacaka, j++,
    QL[[3 * i]] = drop;
    QL[[3 * i - 2]] = drop; QL[[3 * i - 1]] = drop;
    KS[[3 * i, 3 * j]] = drop;
    KS[[3 * i - 2, 3 * j - 2]] = drop;
    KS[[3 * i - 1, 3 * j - 1]] = drop;
    KS[[3 * j, 3 * i]] = drop;
    KS[[3 * j - 1, 3 * i - 1]] = drop;
    KS[[3 * j - 2, 3 * i - 2]] = drop;
    KS[[3 * (BrojKontrolnihTacaka * BrojKontrolnihTacaka -
      BrojKontrolnihTacaka - 1 + i), 3 * j]] = drop;
    KS[[3 * (BrojKontrolnihTacaka * BrojKontrolnihTacaka -
      BrojKontrolnihTacaka - 1 + i) - 1, 3 * j - 1]] = drop;
    KS[[3 * (BrojKontrolnihTacaka * BrojKontrolnihTacaka -
      BrojKontrolnihTacaka - 1 + i) - 2, 3 * j - 2]] = drop;
    KS[[3 * j, 3 * (BrojKontrolnihTacaka * BrojKontrolnihTacaka -
      BrojKontrolnihTacaka - 1 + i)]] = drop;
    KS[[3 * j - 1, 3 * (BrojKontrolnihTacaka * BrojKontrolnihTacaka -
      BrojKontrolnihTacaka - 1 + i) - 1]] = drop;
    KS[[3 * j - 2, 3 * (BrojKontrolnihTacaka * BrojKontrolnihTacaka -
      BrojKontrolnihTacaka - 1 + i) - 2]] = drop;
    QL[[ (BrojKontrolnihTacaka * BrojKontrolnihTacaka -
      BrojKontrolnihTacaka - 1 + i) * 3]] = drop;
    QL[[ (BrojKontrolnihTacaka * BrojKontrolnihTacaka -
      BrojKontrolnihTacaka - 1 + i) * 3 - 1]] = drop;
    QL[[ (BrojKontrolnihTacaka * BrojKontrolnihTacaka -
      BrojKontrolnihTacaka - 1 + i) * 3 - 2]] = drop]];
For[k = 1, k < BrojKontrolnihTacaka - 2, k++,
  For[j = 1, j ≤ BrojKontrolnihTacaka * BrojKontrolnihTacaka, j++,
    QL[[3 * BrojKontrolnihTacaka * (k + 1)]] = drop;
    QL[[3 * BrojKontrolnihTacaka * (k + 1) - 1]] = drop;
    QL[[3 * BrojKontrolnihTacaka * (k + 1) - 2]] = drop;
    QL[[3 * (BrojKontrolnihTacaka * (k + 1) + 1)]] = drop;
    QL[[3 * (BrojKontrolnihTacaka * (k + 1) + 1) - 1]] = drop;
    QL[[3 * (BrojKontrolnihTacaka * (k + 1) + 1) - 2]] = drop;
    KS[[3 * BrojKontrolnihTacaka * (k + 1), 3 * j]] = drop;
    KS[[3 * BrojKontrolnihTacaka * (k + 1) - 1, 3 * j - 1]] = drop;
    KS[[3 * BrojKontrolnihTacaka * (k + 1) - 2, 3 * j - 2]] = drop;
    KS[[3 * j, 3 * BrojKontrolnihTacaka * (k + 1)]] = drop;
    KS[[3 * j - 1, 3 * BrojKontrolnihTacaka * (k + 1) - 1]] = drop;
    KS[[3 * j - 2, 3 * BrojKontrolnihTacaka * (k + 1) - 2]] = drop;
    KS[[3 * (BrojKontrolnihTacaka * (k + 1) + 1), 3 * j]] = drop;
    KS[[3 * (BrojKontrolnihTacaka * (k + 1) + 1) - 1, 3 * j - 1]] = drop;
    KS[[3 * (BrojKontrolnihTacaka * (k + 1) + 1) - 2, 3 * j - 2]] = drop;
    KS[[3 * j, 3 * (BrojKontrolnihTacaka * (k + 1) + 1)]] = drop;

```

```

KS[[3*j-1, 3*(BrojKontrolnihTacaka*(k+1)+1)-1]] = drop;
KS[[3*j-2, 3*(BrojKontrolnihTacaka*(k+1)+1)-2]] = drop]];
t = 1/3; s = 1/3;
For[i = 1, i < p+2, i++,
  For[j = 1, j < p+2, j++,
    k1 = (p+1)*(i-1)+j;
    RK[[k1]] =
      bξ[[OptereceniElementPoX, j]]*bη[[OptereceniElementPoY, i]]]];
QM[[All]] = QL[[All]];
(*dropovanje-izbacivanje kolona i vrsta na mestima sprecenih pomeranja*)
KSDrop = KS; QMDrop = QM;
For[i = 3*BrojKontrolnihTacaka*BrojKontrolnihTacaka, i > 0, i--,
  If[KSDrop[[i, 1]] < drop && KSDrop[[i, Dimensions[KSDrop][[2]]]] < drop,
    {KSDrop = Drop[KSDrop, {i, i}, {i, i}], QMDrop = Drop[QMDrop, {i, i}]}]];
q = LinearSolve[KSDrop, QMDrop];
Print["Vektor pomeranja kontrolnih tacaka u GKS q=", MatrixForm[q]];
Clear[s]; Clear[t]; br = 0; Clear[koji];

For[i = 1, i < KolikoElementata + 1, i++,
  If[i < OptereceniElementPoX,
    For[j = 1, j < BrojKontrolnihTacaka + 1, j++,
      For[k = 1, k < Dimensions[bazeξ[[j, 1]]][[1]] + 1, k++,
        If[bazeξ[[j, 1, k, 2, 1]] <  $\left(\frac{i-1}{\text{KolikoElementata}}\right)$ ,
          {br = br + 1, koji[br] = j}]]]]];

t = 1/3; s = 1/3; br = 0;
For[i = 1, i < BrojKontrolnihTacaka*BrojKontrolnihTacaka + 1, i++,
  If[QL[[i]] < drop, {}, {br = br + 1, kojii[i] = br}]];
qm = Table[0, {(p+1)*(p+1)}]; br = 0;
For[k = 1, k < p+2, k++,
  For[kk = 1, kk < p+2, kk++,
    br = br + 1; m = (koji[k] - 1)*BrojKontrolnihTacaka + koji[kk];
    If[QL[[m]] < drop, {qm[[br]] = 0}, {qm[[br]] = q[[kojii[m]]}]];
(*crtanje deformisanog nosaca, poligona i kontrolnih tacaka*)
razmjera = 60;
GrafikptsξηDef =
  Table[0, {BrojKontrolnihTacaka}, {BrojKontrolnihTacaka}, {3}];
br = 0; brr = 0; m = 0;
For[i = 1, i < BrojKontrolnihTacaka + 1, i++,
  br = br + 1;
  For[j = 1, j < BrojKontrolnihTacaka + 1, j++,
    m = m + 1;
    If[QL[[m]] < drop, {GrafikptsξηDef[[i, j, 3]] = 0}];
    If[QL[[m]] < drop, {GrafikptsξηDef[[i, j, 3]] = 0},
      {brr = brr + 1, GrafikptsξηDef[[i, j, 3]] = razmjera * q[[brr]]}];
    ptsξη[[i, j, 2]] = pts[[br, 1]];

```

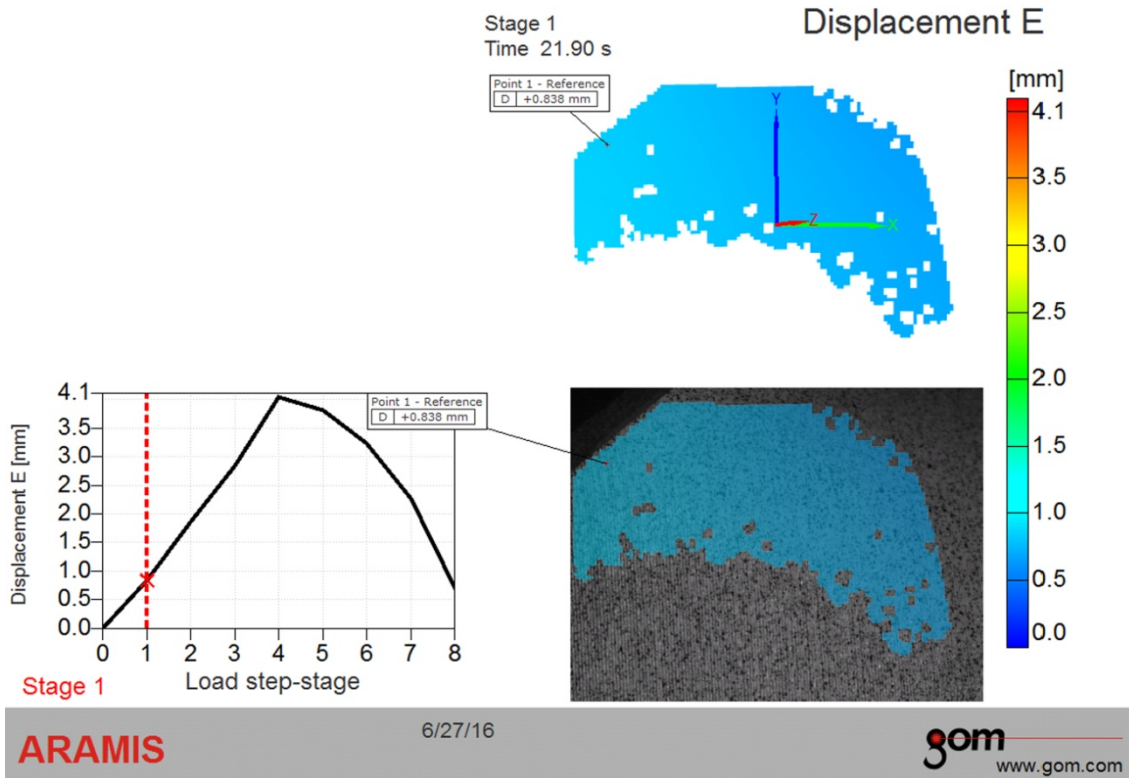
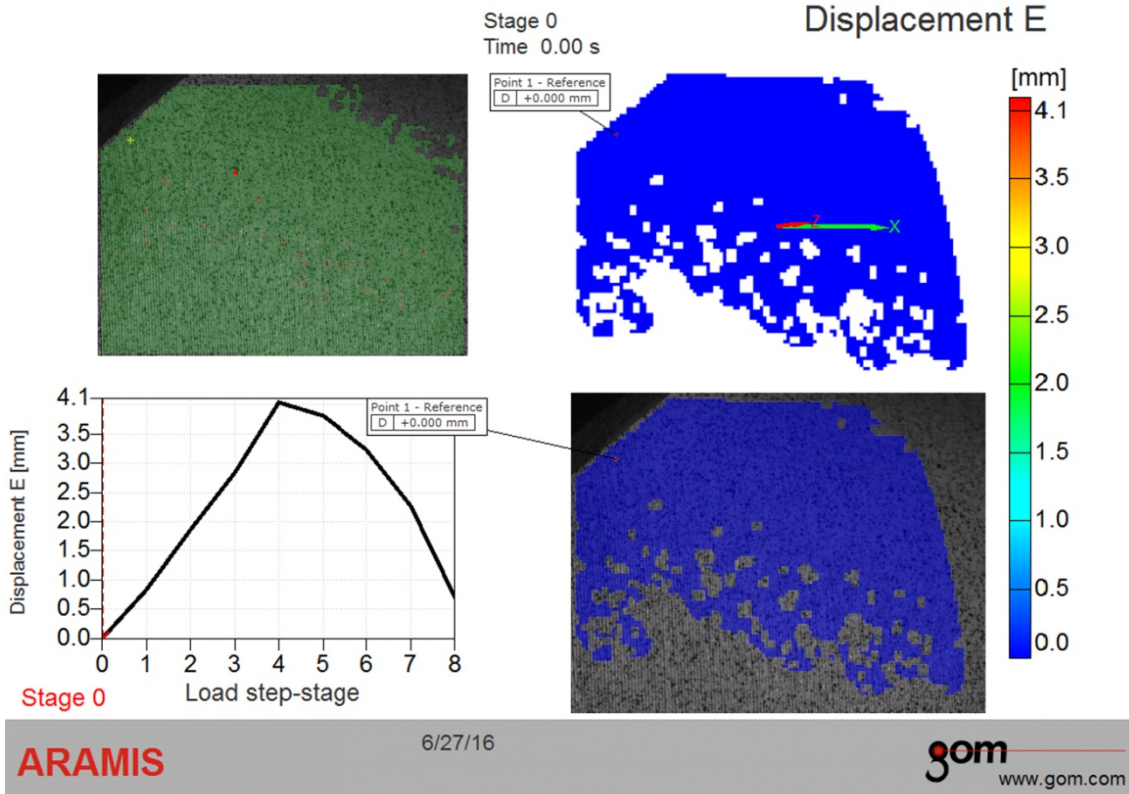
```

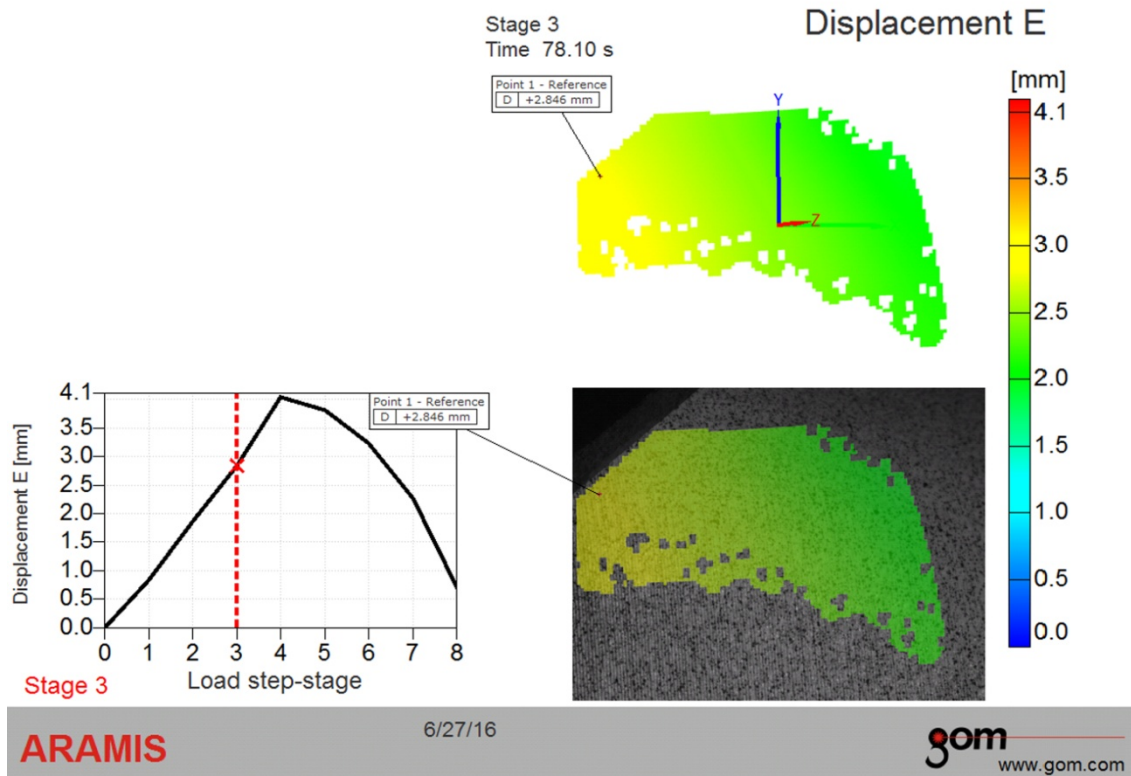
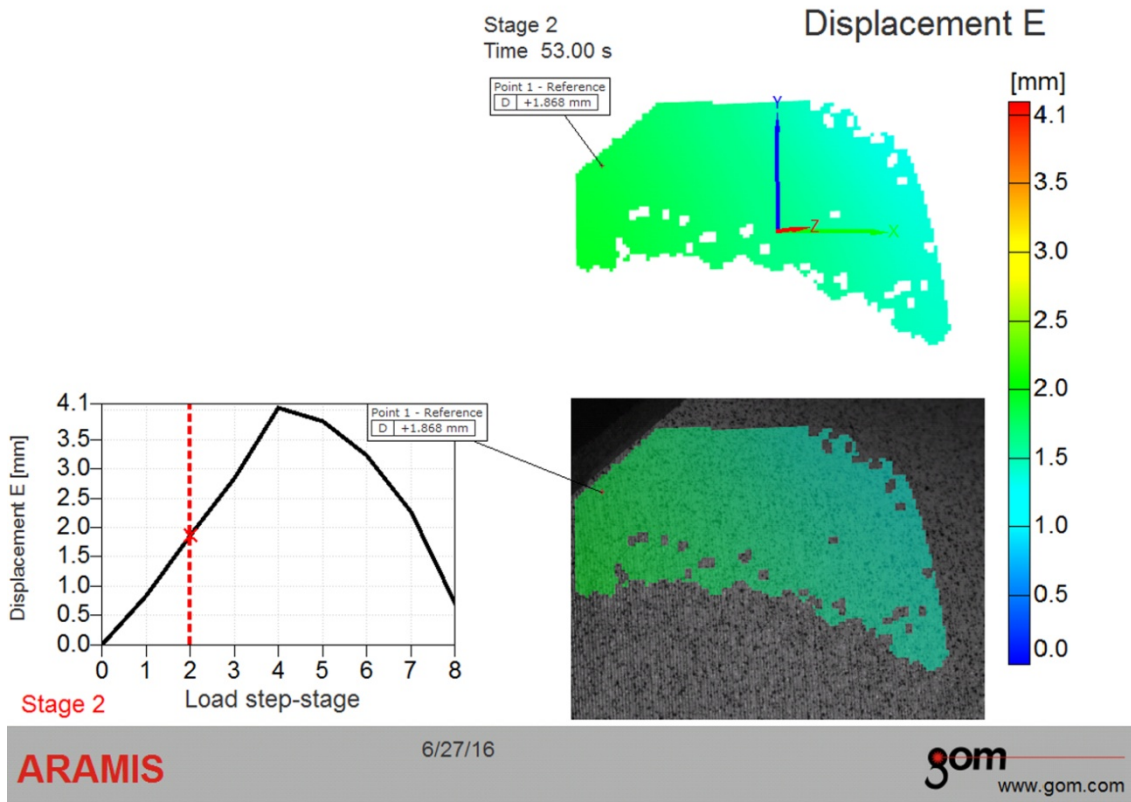
    Grafikpts{ηDef[[i, j, 2]] = pts[[br, 1]];
    pts{η[[i, j, 1]] = pts[[j, 1]];
    Grafikpts{ηDef[[i, j, 1]] = pts[[j, 1]]];
Clear[s]; Clear[t];
Show[Graphics3D[{FaceForm[LightBlue, LightRed],
    BSplineSurface[Grafikpts{ηDef], SplineDegree [p]}, Boxed [False]
Show[Graphics3D[{PointSize[Medium], Red, Map[Point, Grafikpts{ηDef],
    Gray, Line[Grafikpts{ηDef], Line[Transpose[Grafikpts{ηDef}]}],
Graphics3D[{LightBlue, BSplineSurface[Grafikpts{ηDef], SplineDegree [p]}],
Boxed [False]

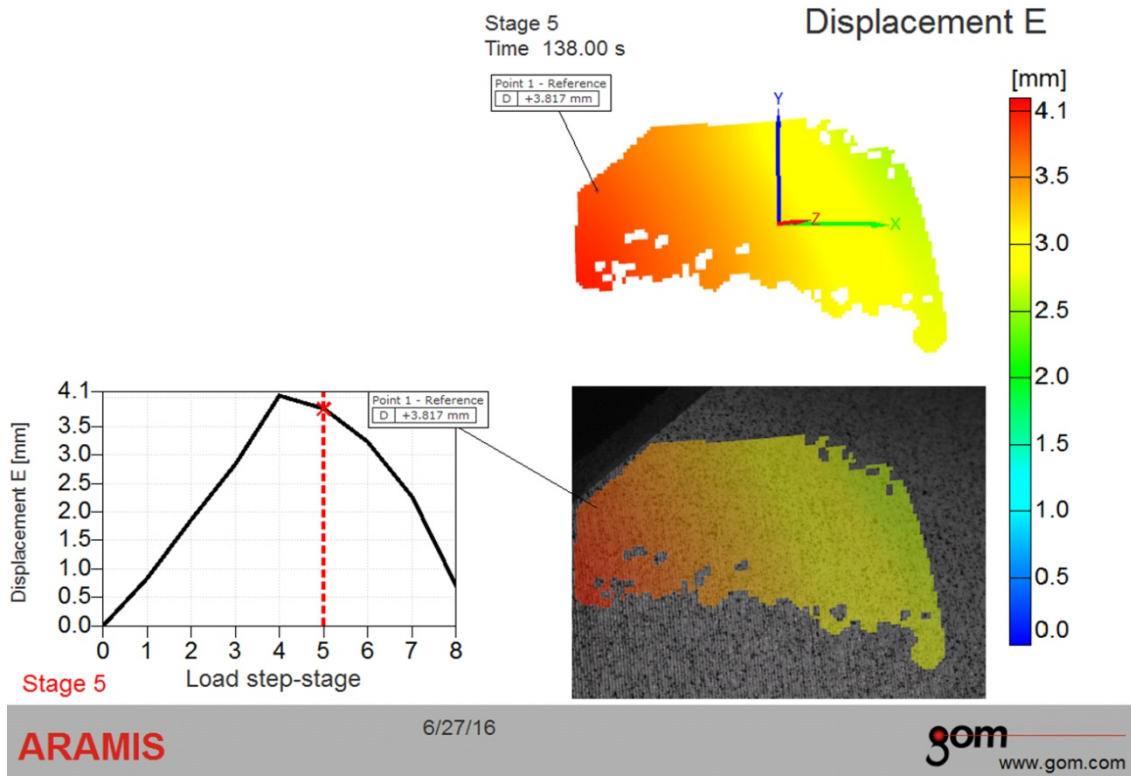
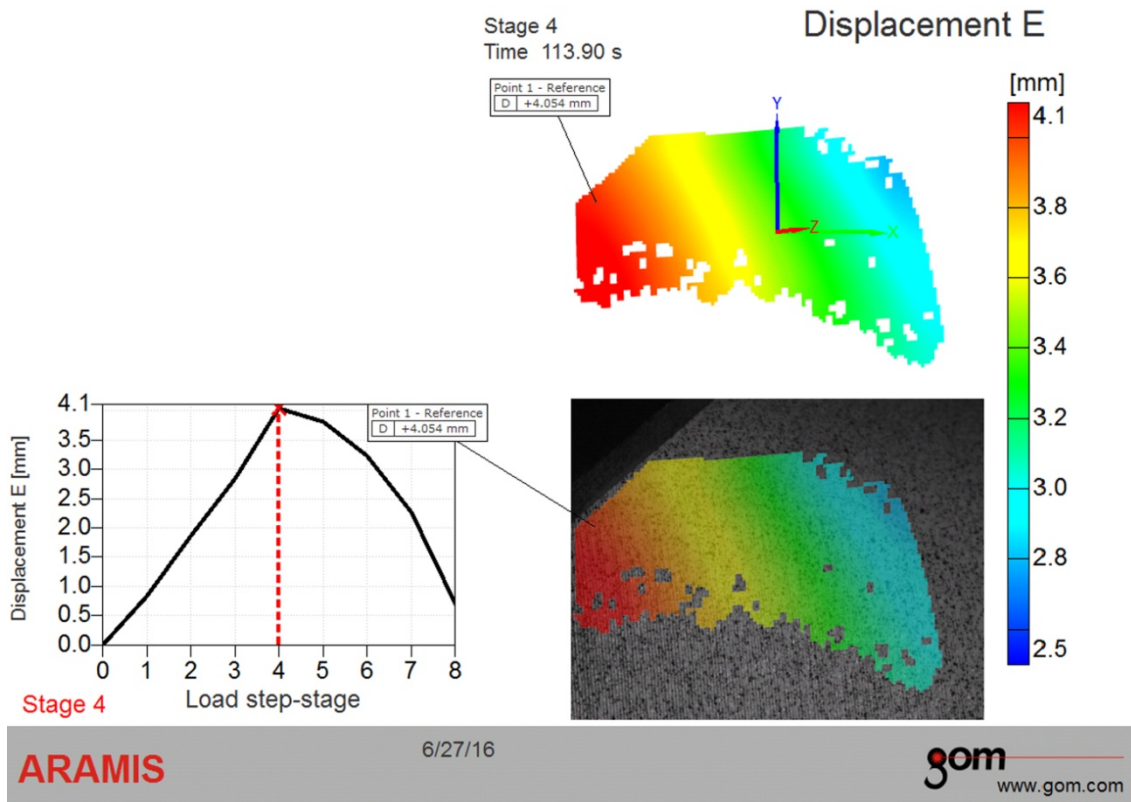
```

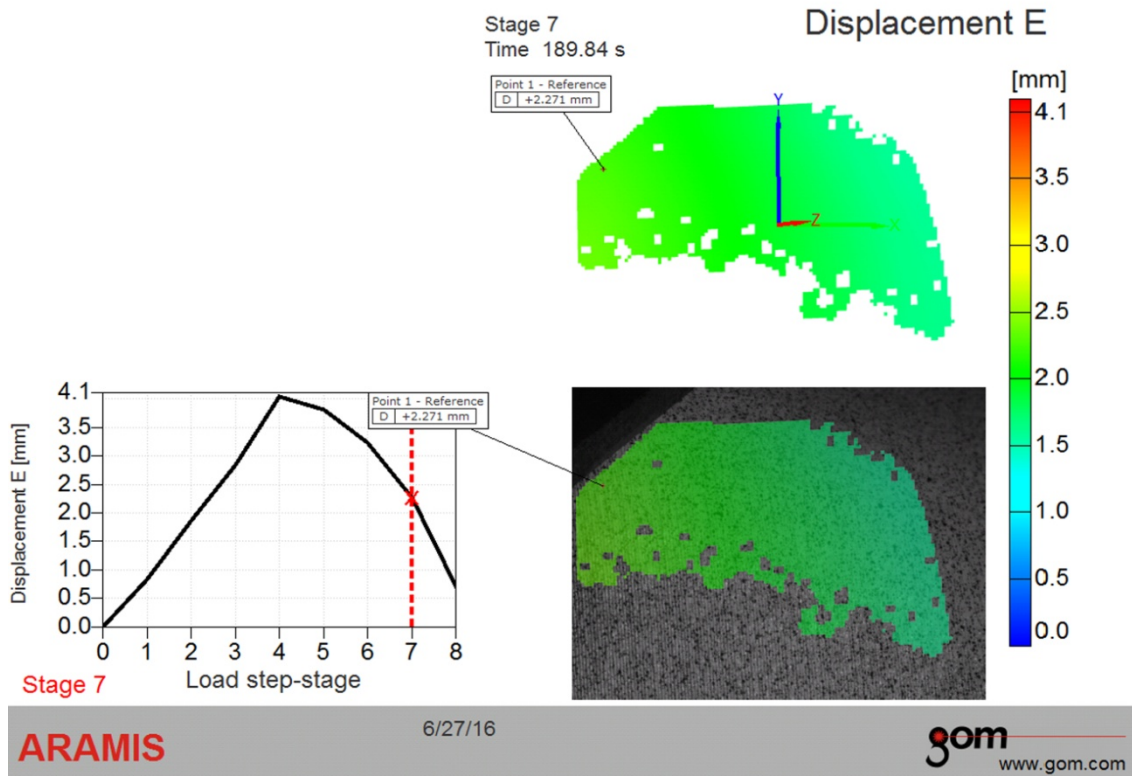
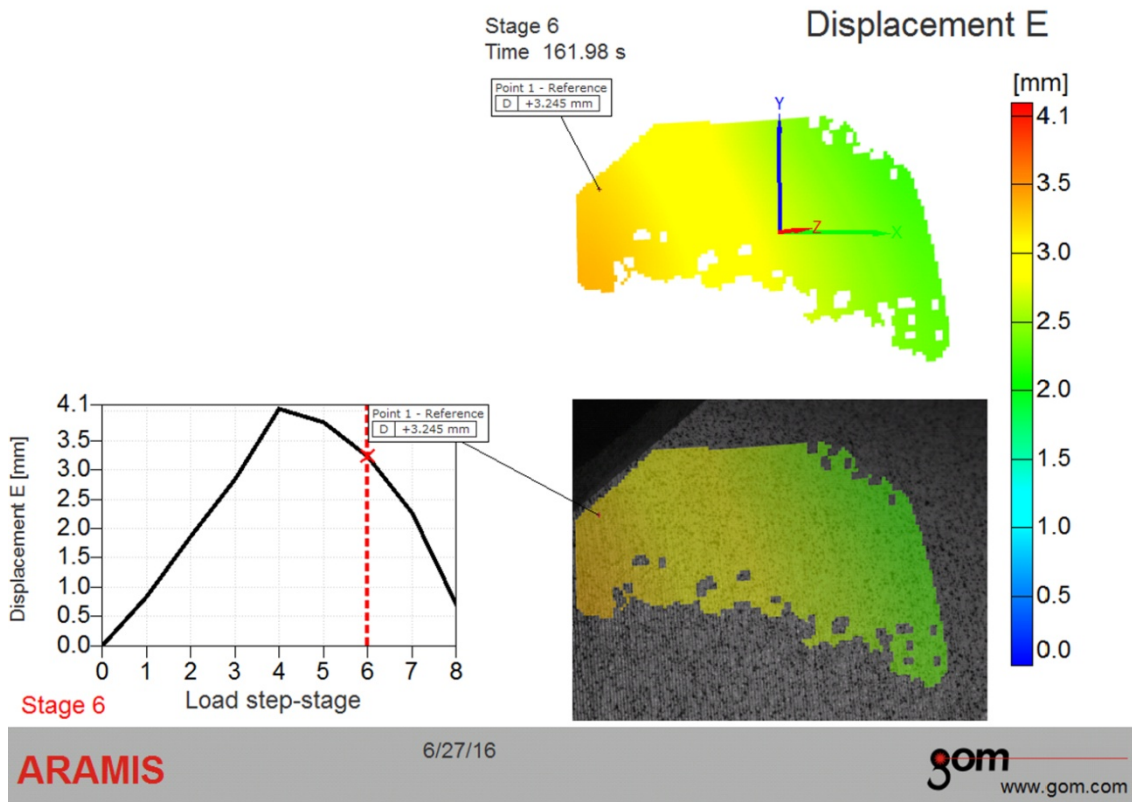
(* KRAJ PROGRAMAMA *)

7.2 Прилог 2. 3D оптичко безконтактно мерење - ARAMIS





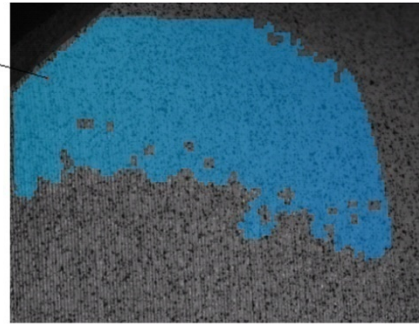
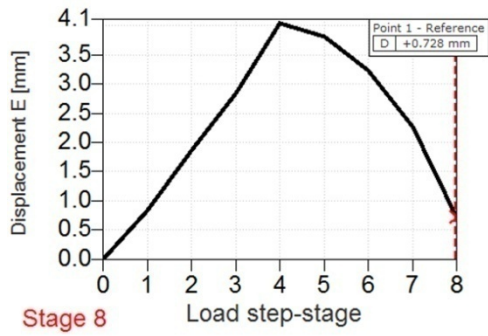
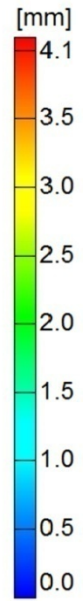
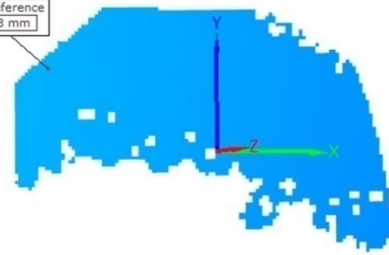




Stage 8
Time 222.94 s

Displacement E

Point 1 - Reference
D | +0.728 mm



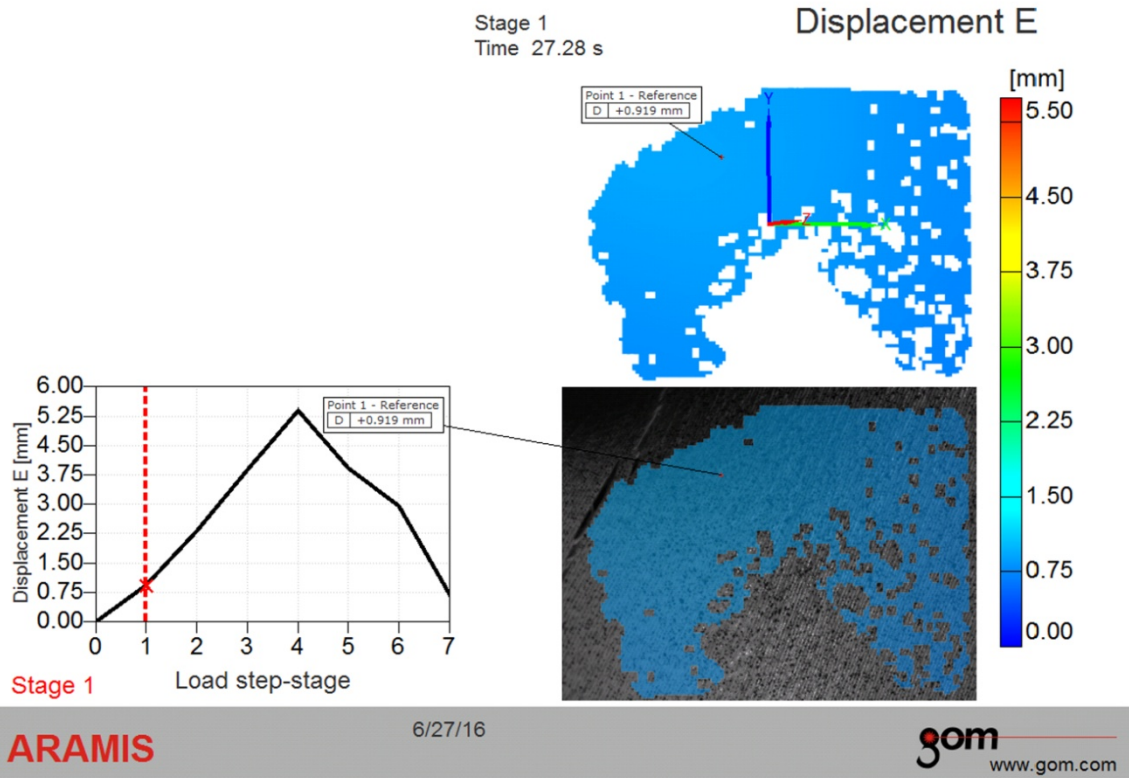
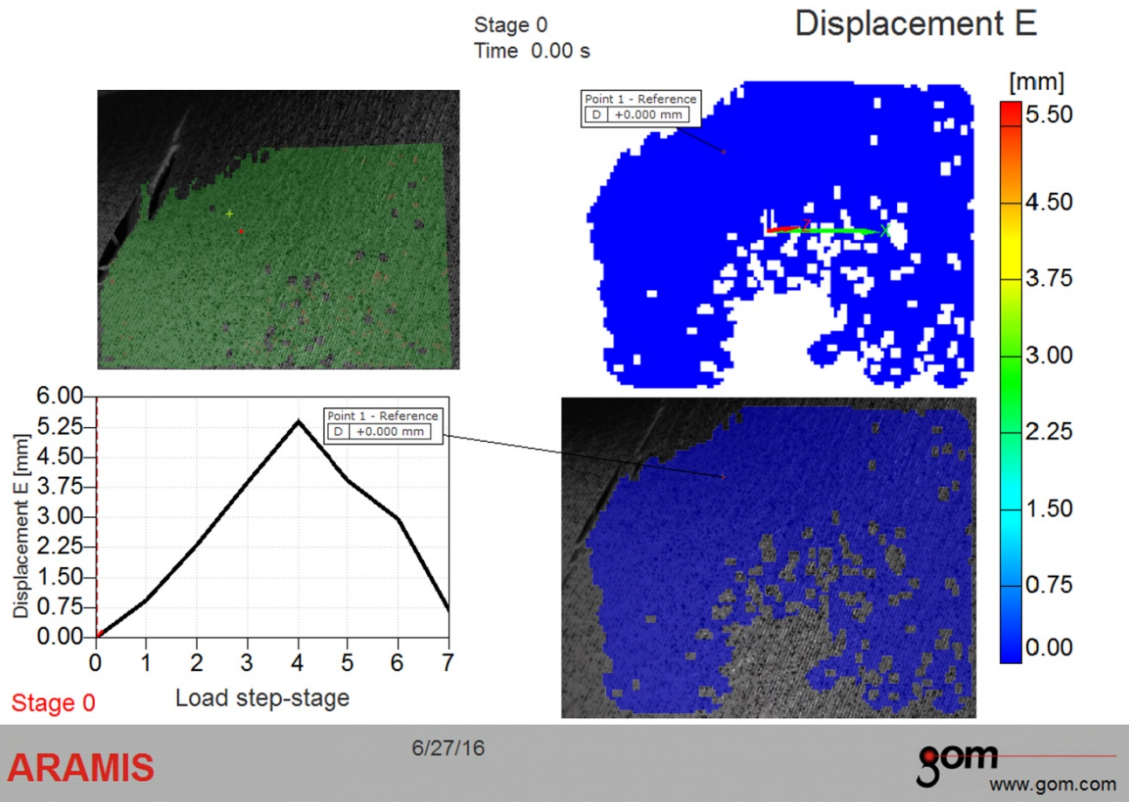
Stage 8

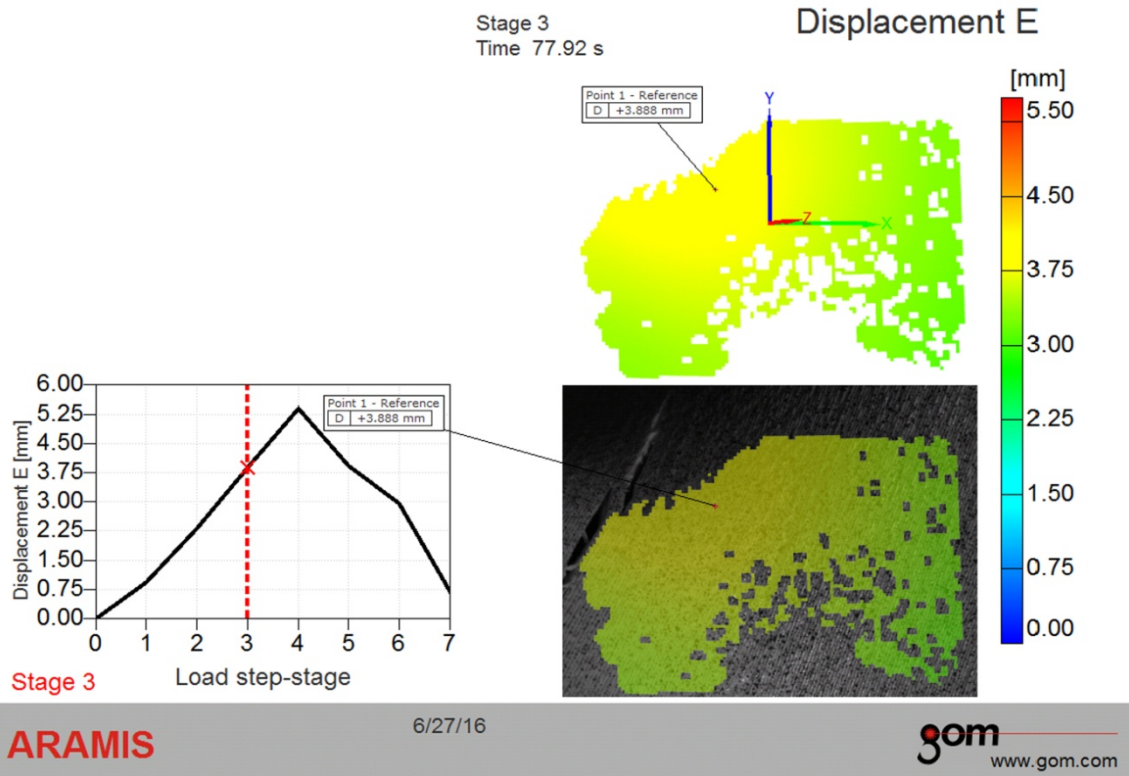
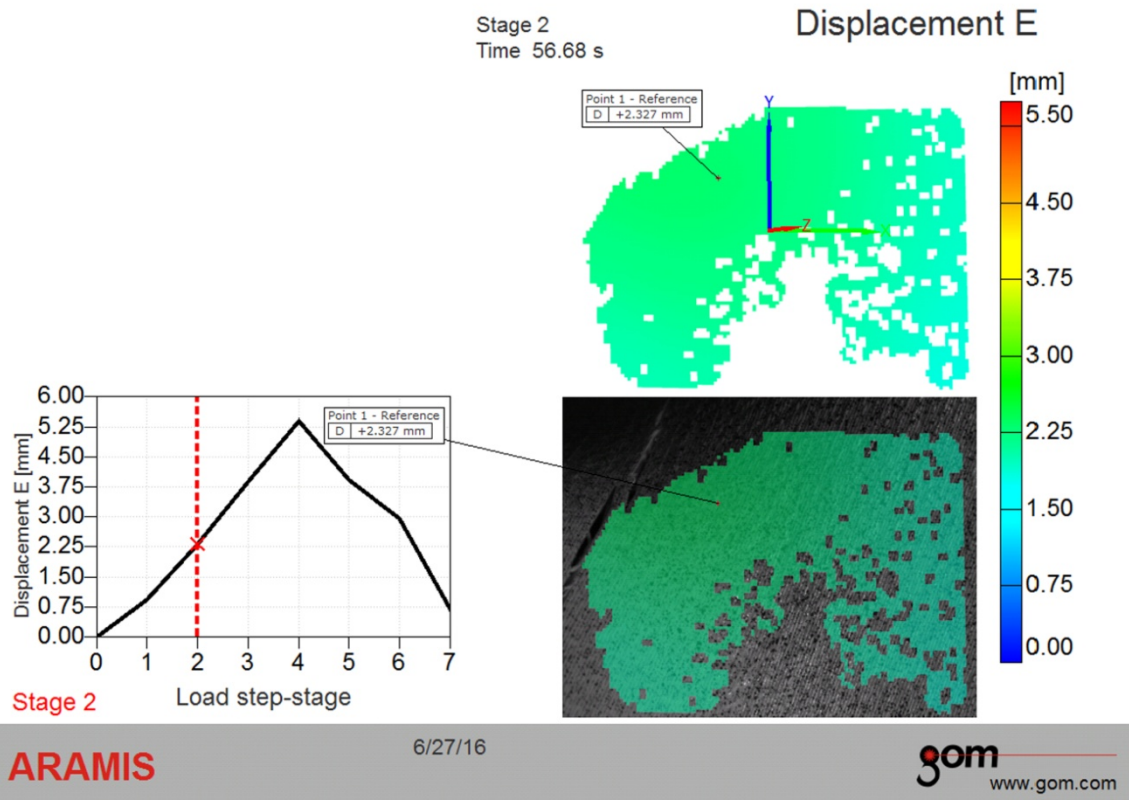
Load step-stage

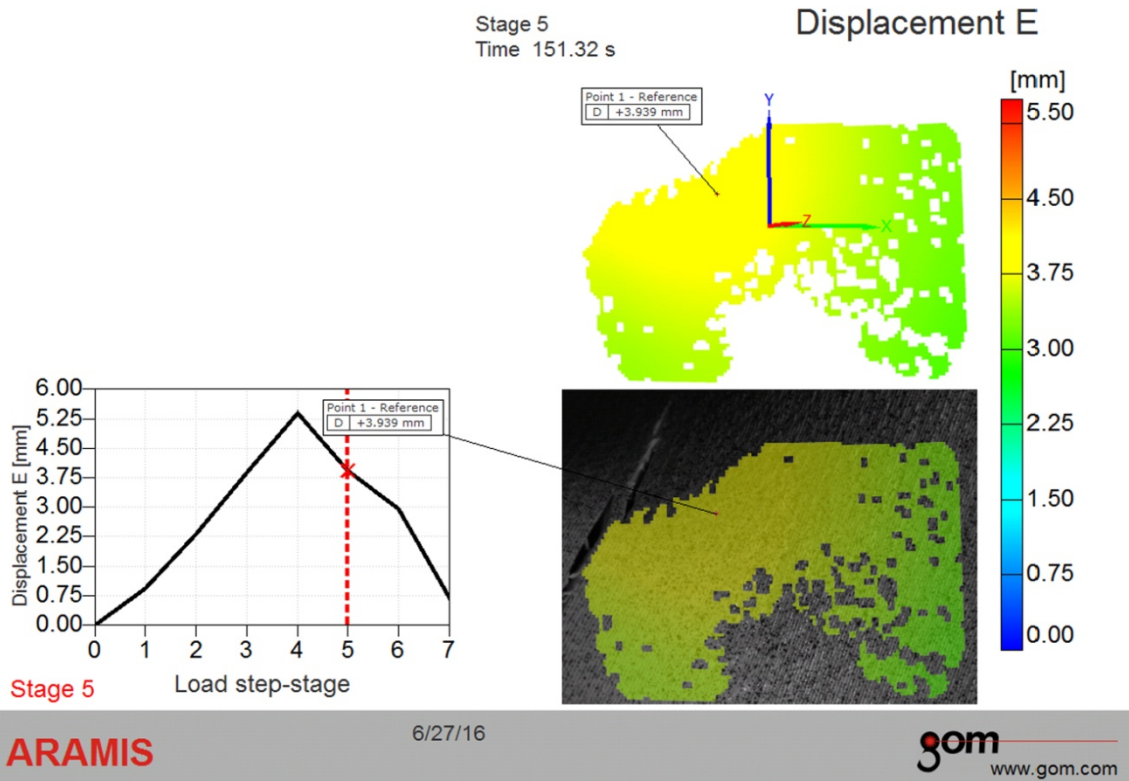
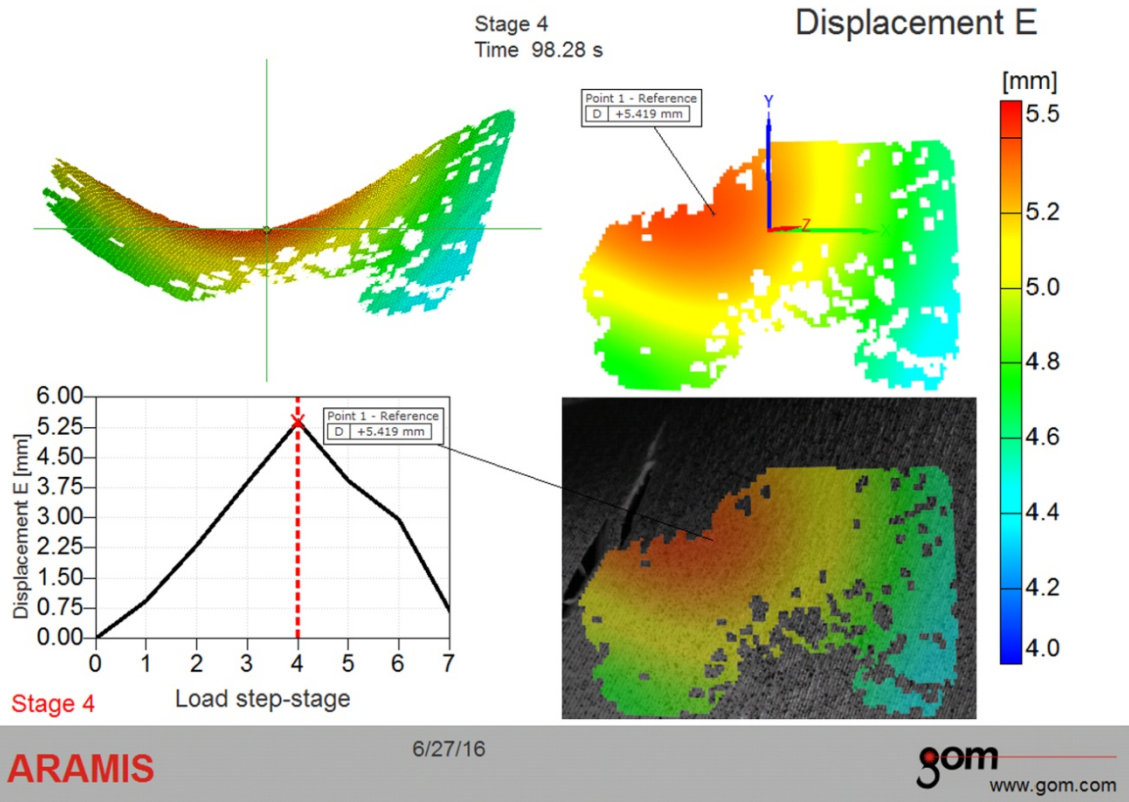
ARAMIS

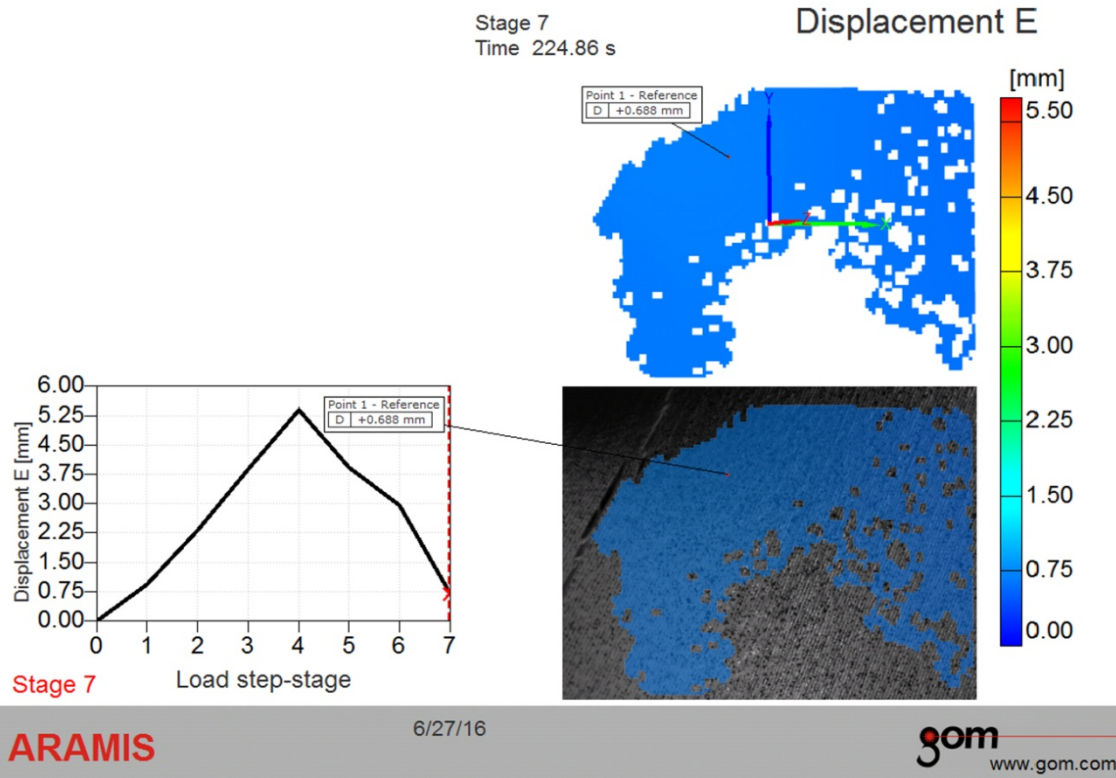
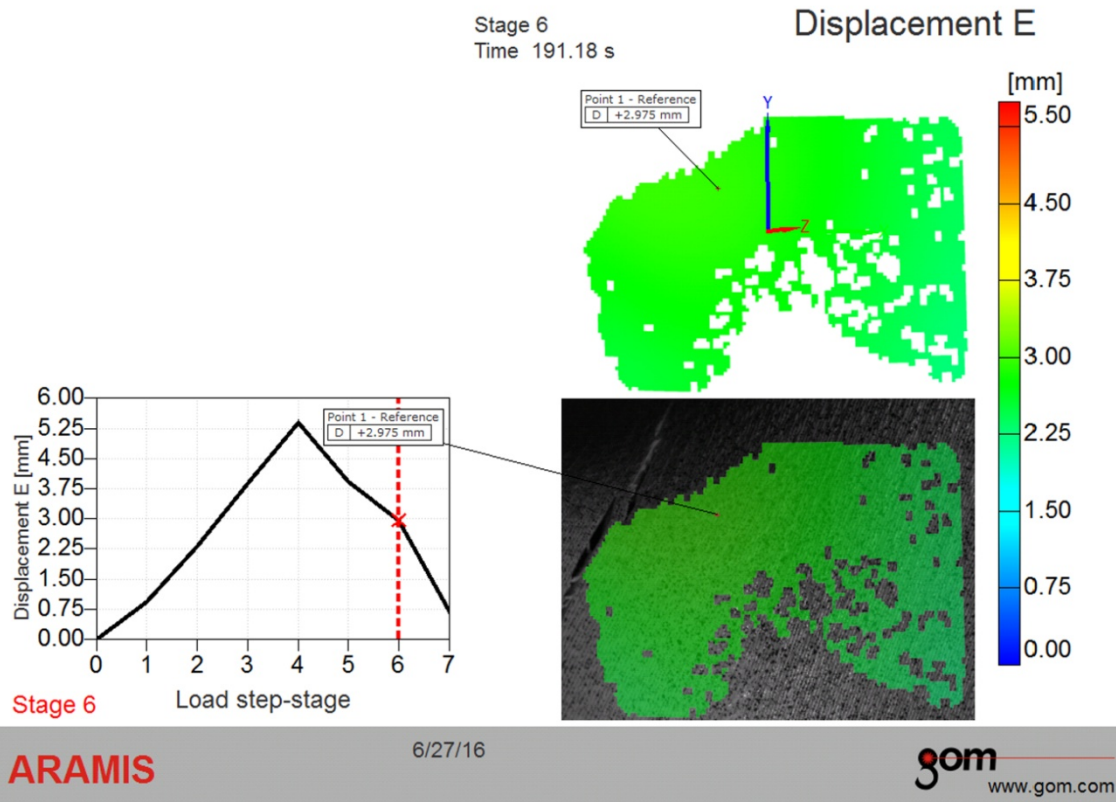
6/27/16

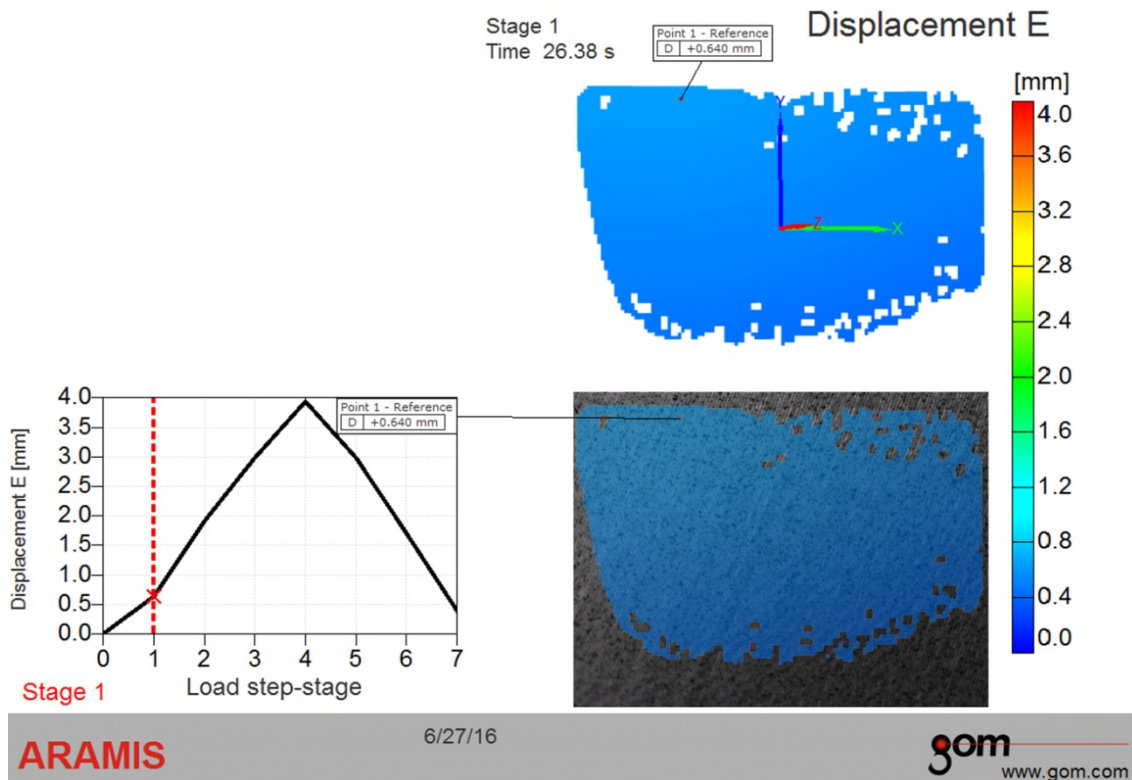
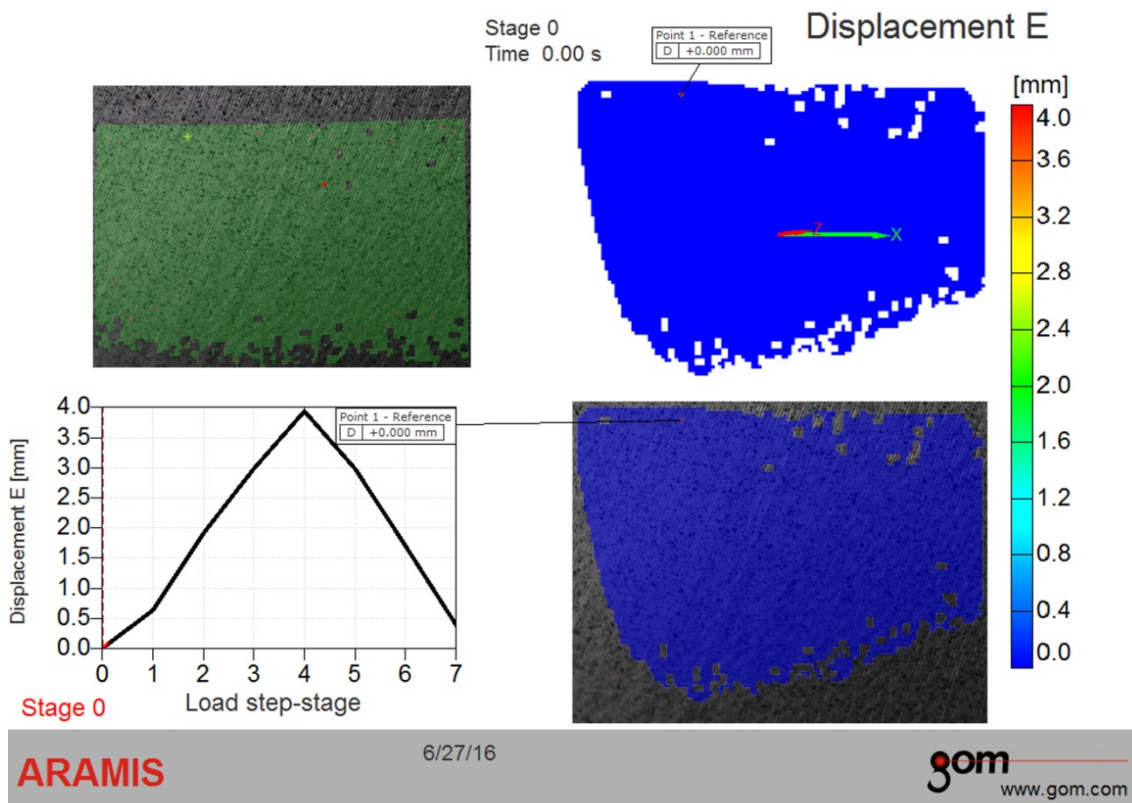
gom
www.gom.com

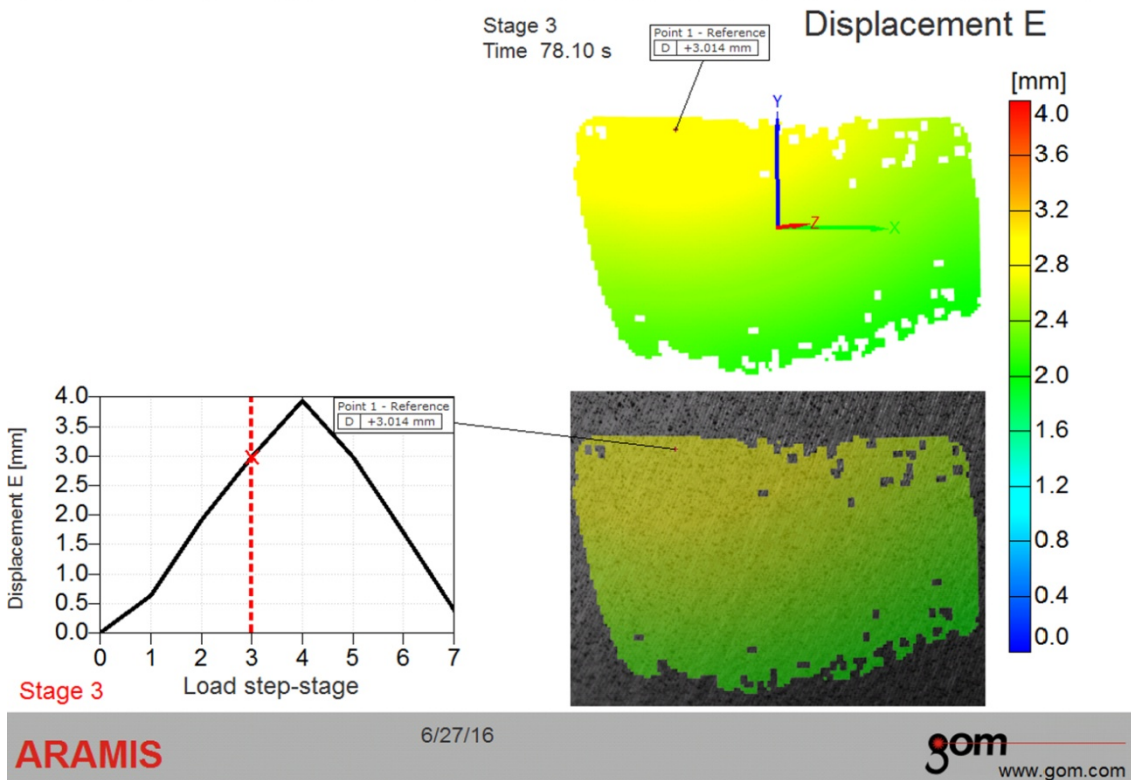
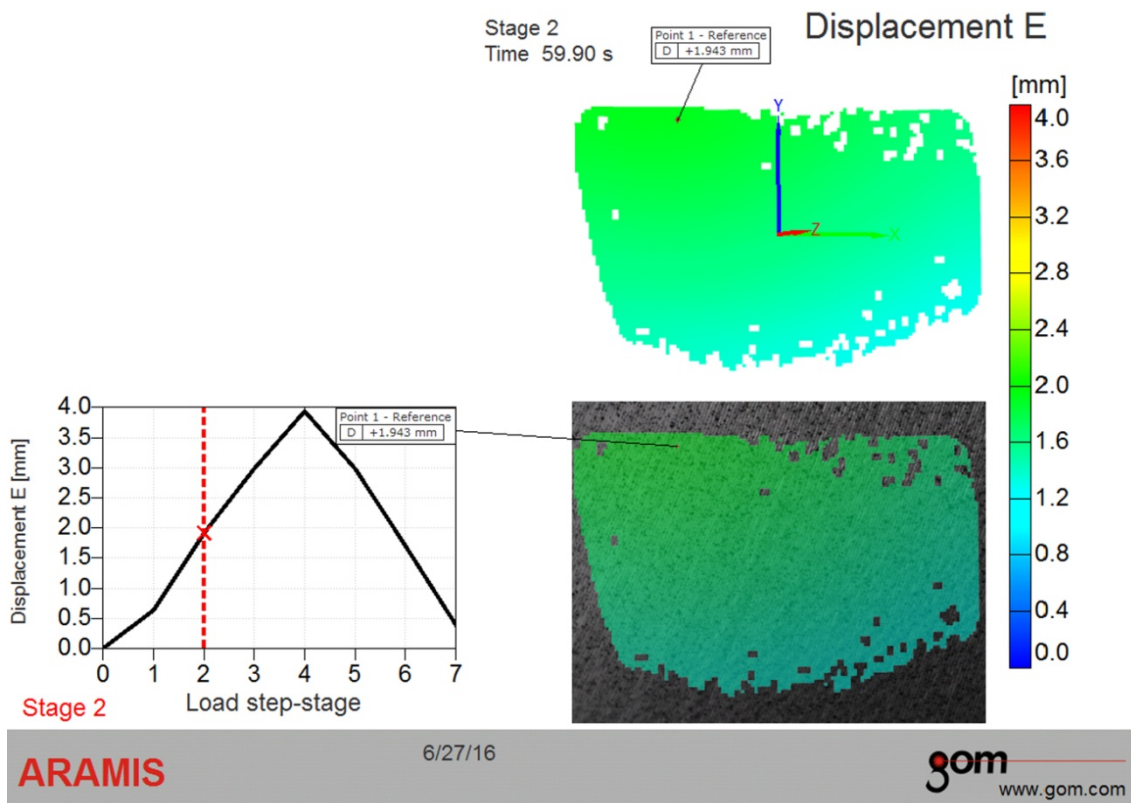


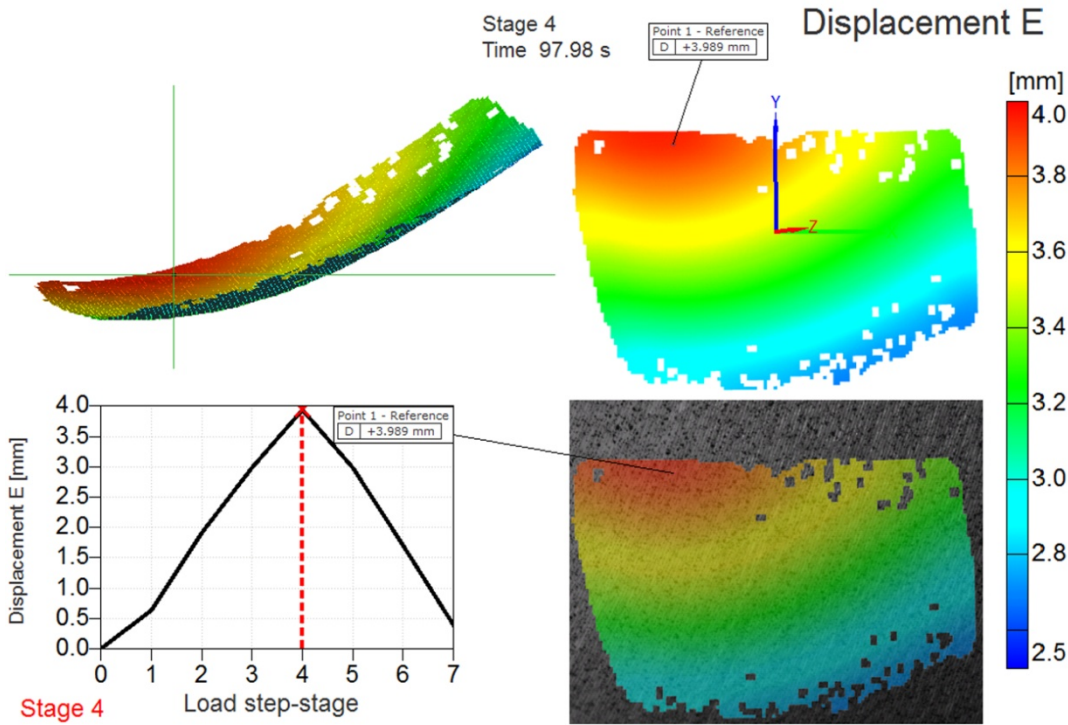








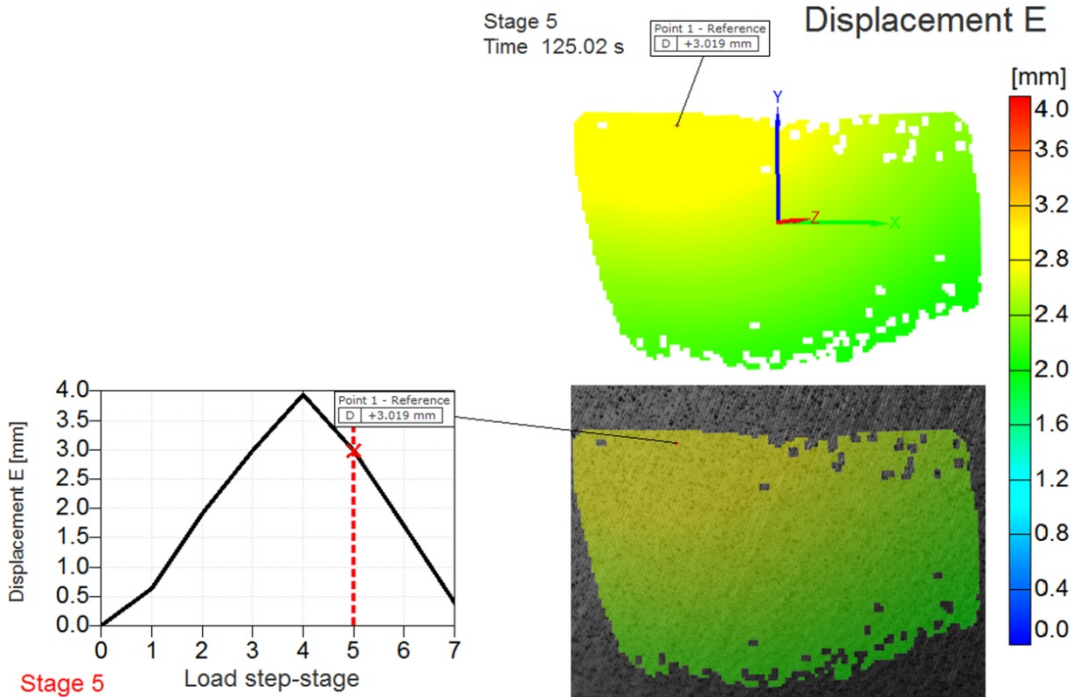




ARAMIS

6/27/16

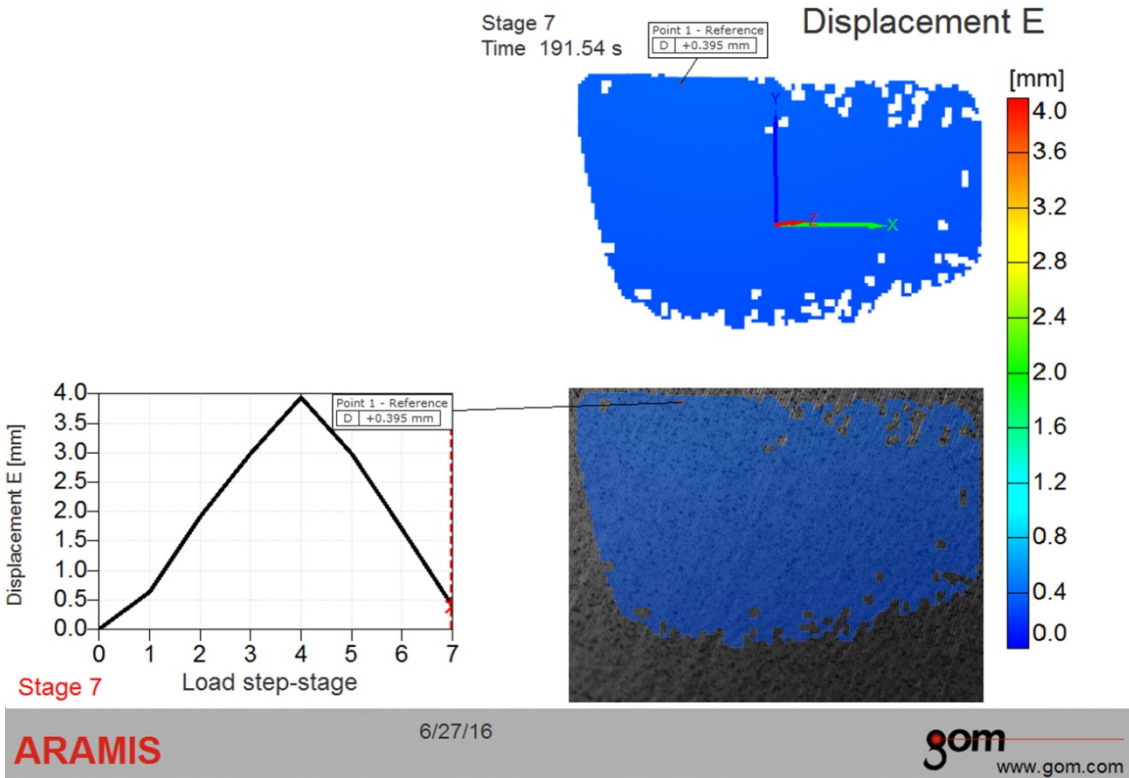
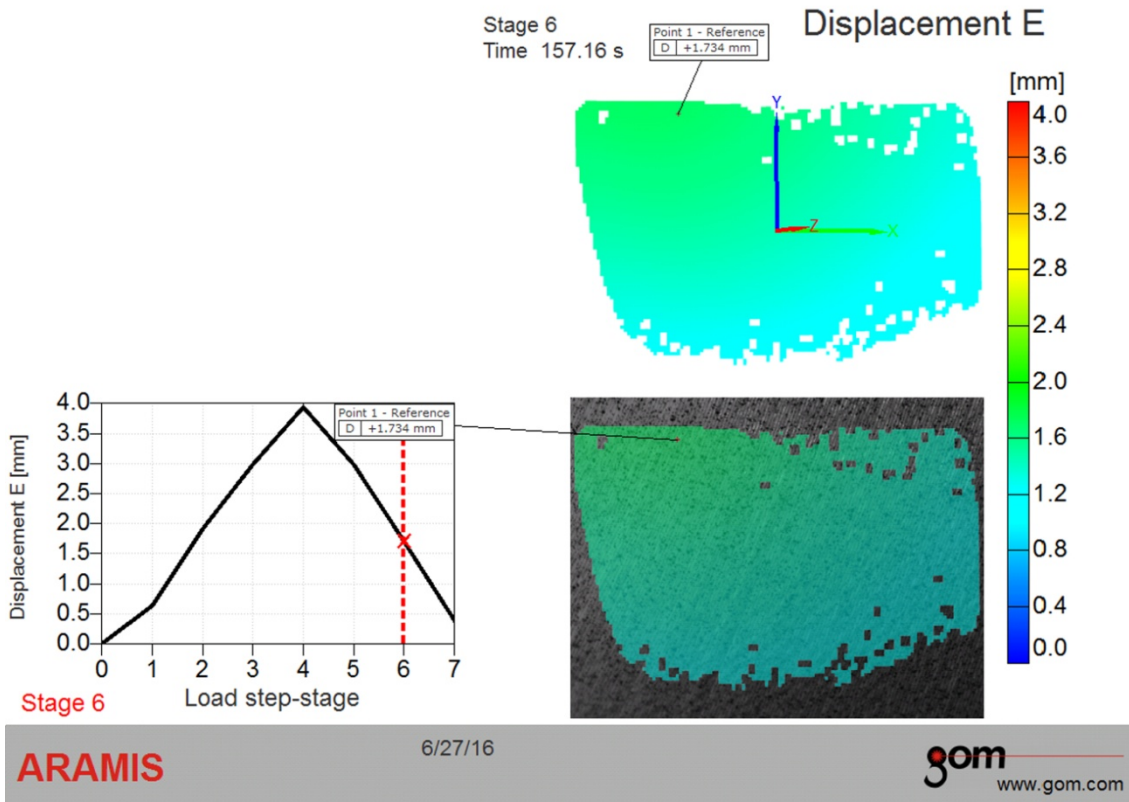
gom
www.gom.com

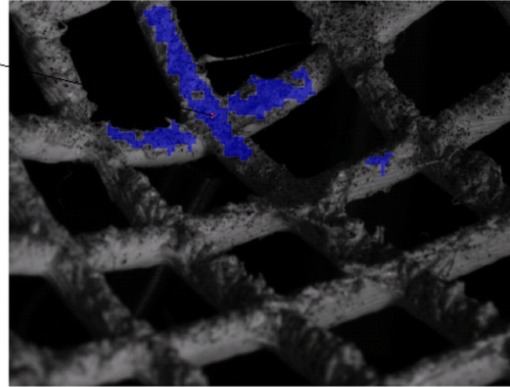
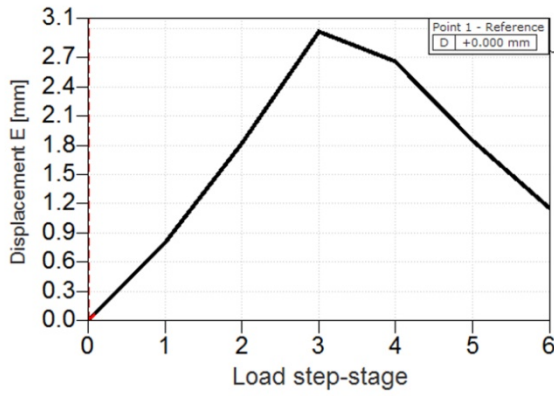
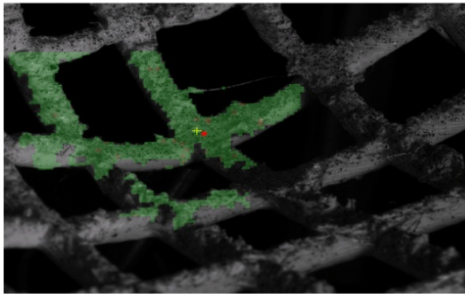


ARAMIS

6/27/16

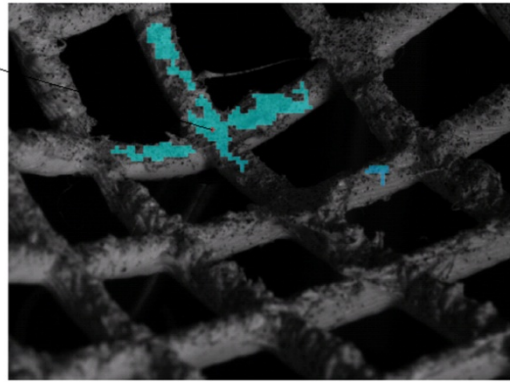
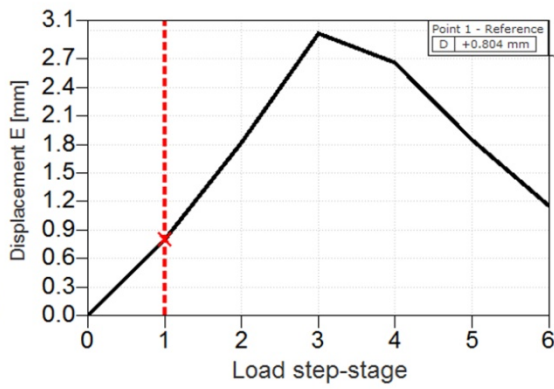
gom
www.gom.com





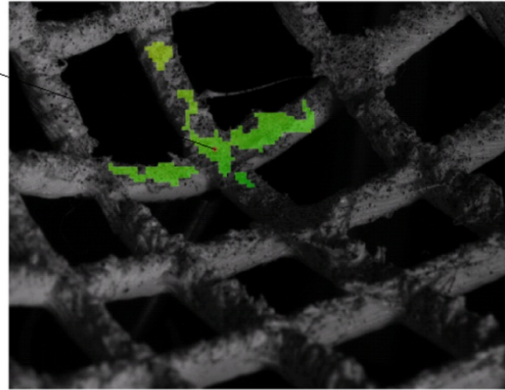
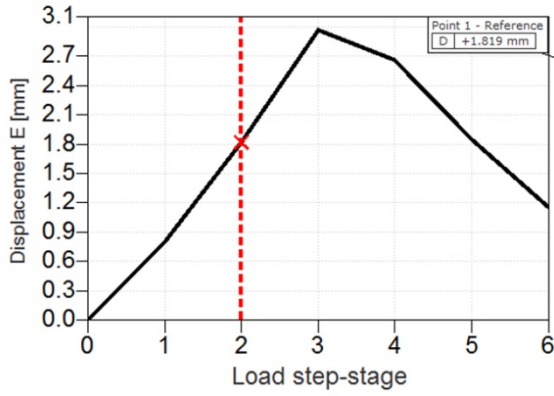
Stage 1
Time 82.78 s

Displacement E



Stage 2
Time 114.58 s

Displacement E



Stage 2

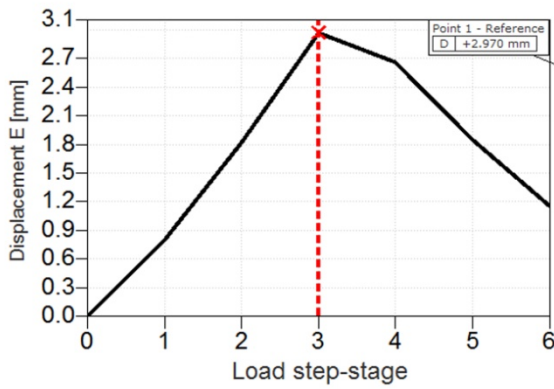
ARAMIS

6/27/16

gom
www.gom.com

Stage 3
Time 147.38 s

Displacement E



Stage 3

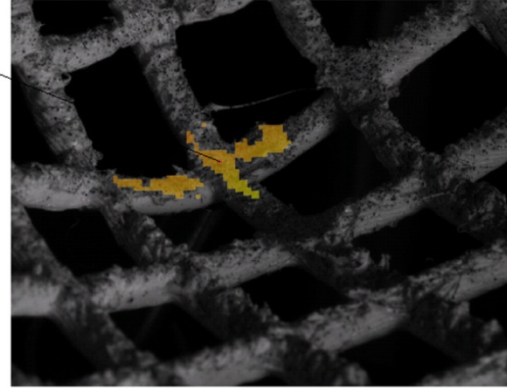
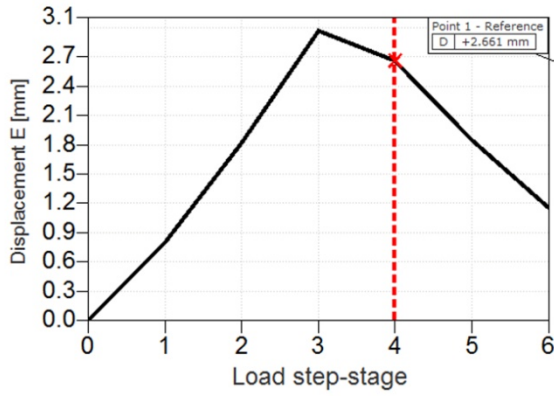
ARAMIS

6/27/16

gom
www.gom.com

Stage 4
Time 169.32 s

Displacement E



Stage 4

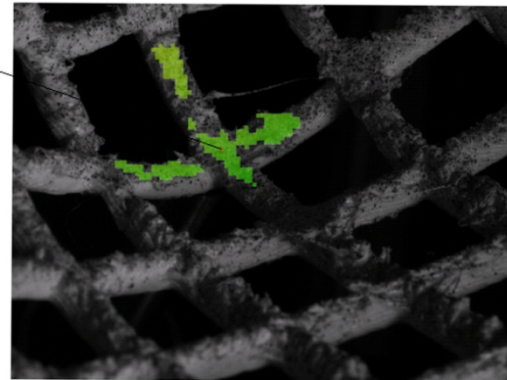
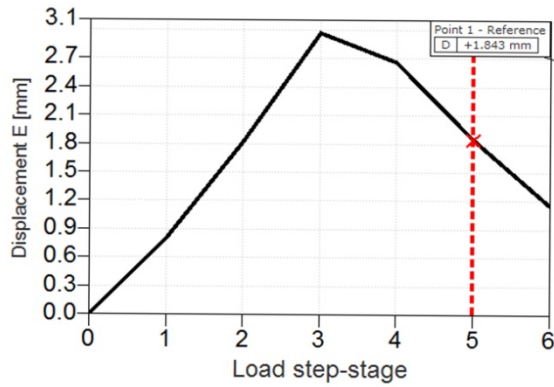
ARAMIS

6/27/16

gom
www.gom.com

Stage 5
Time 211.90 s

Displacement E



Stage 5

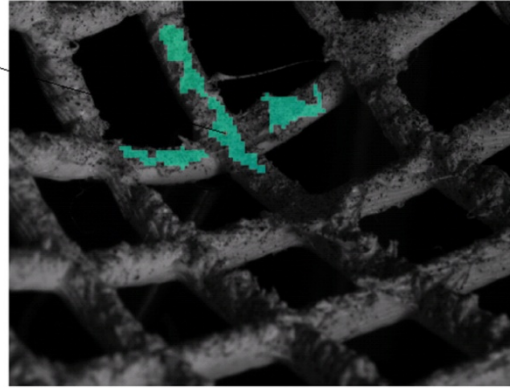
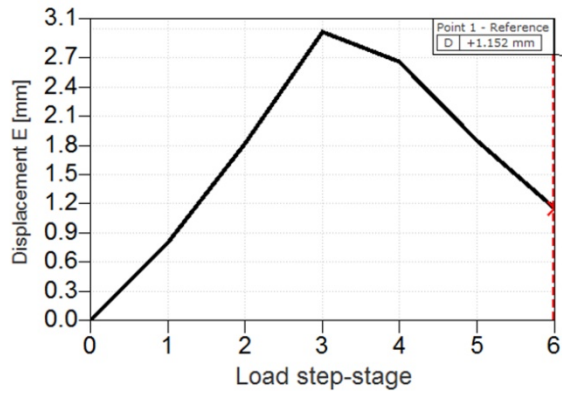
ARAMIS

6/27/16

gom
www.gom.com

Stage 6
Time 232.74 s

Displacement E

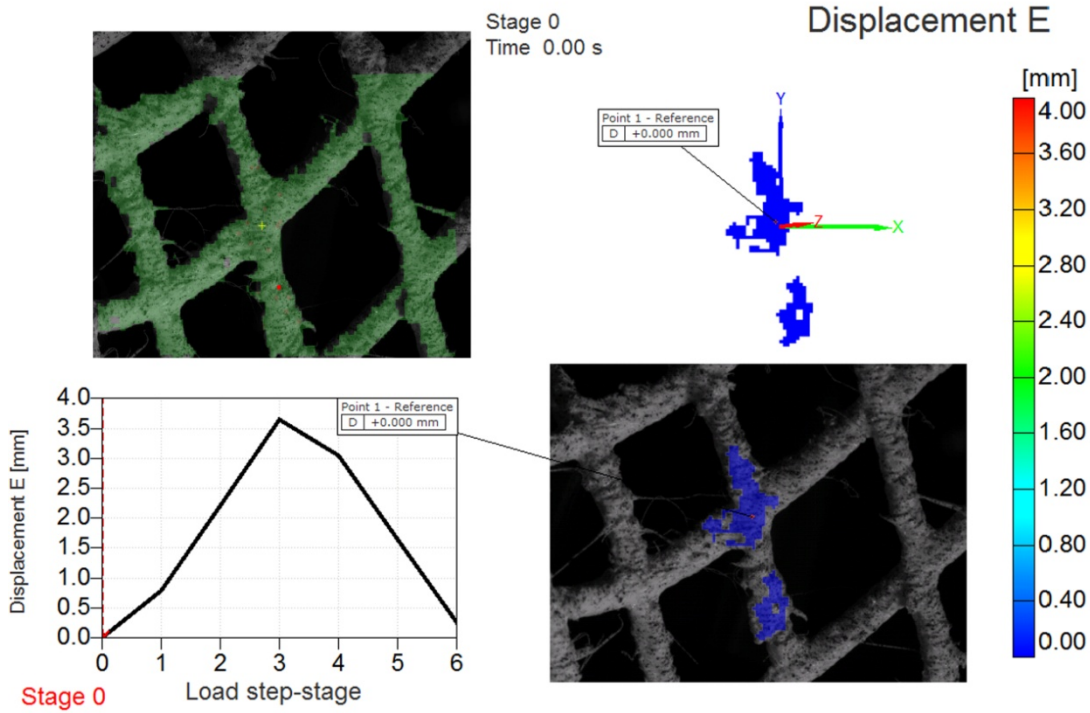


Stage 6

ARAMIS

6/27/16

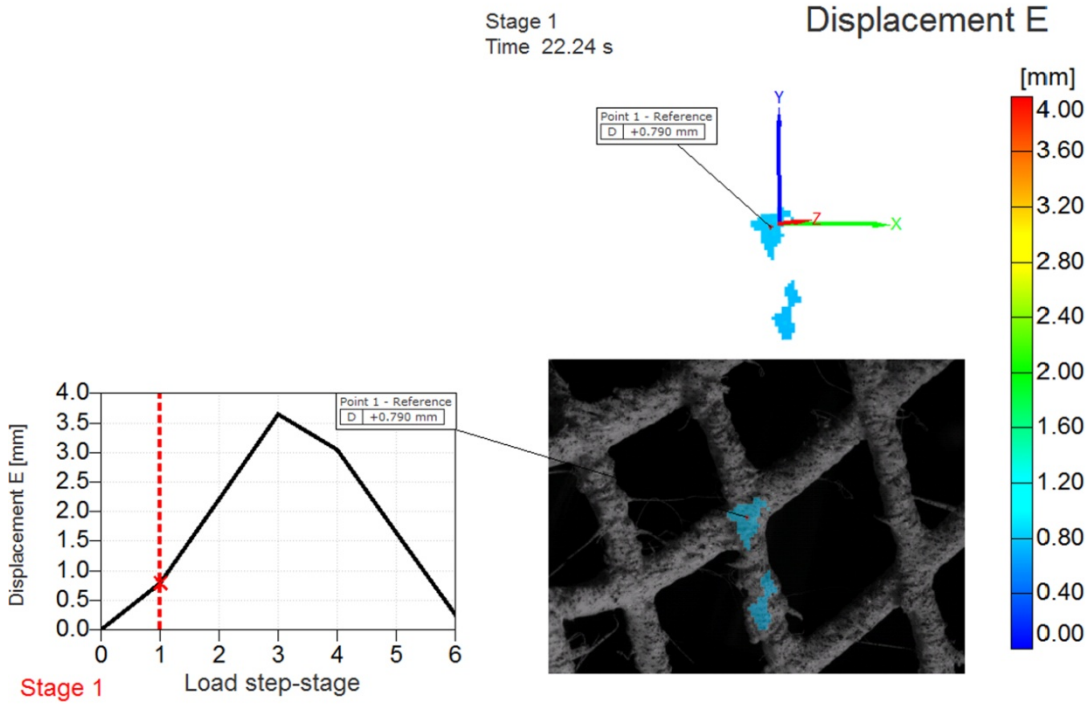
gom
www.gom.com



ARAMIS

6/27/16

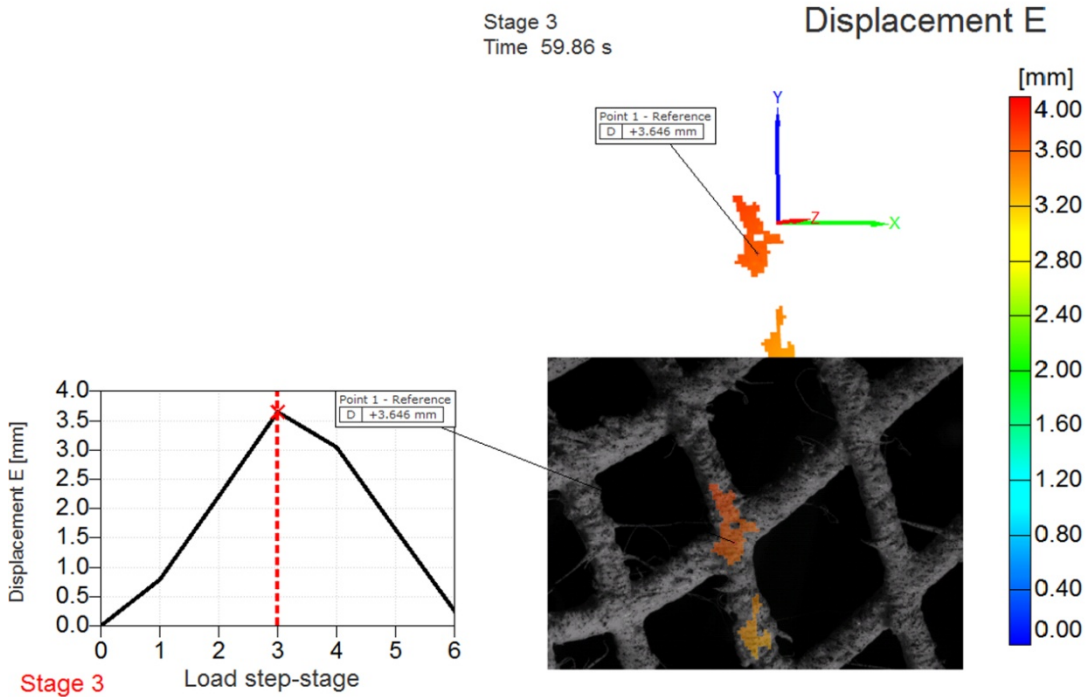
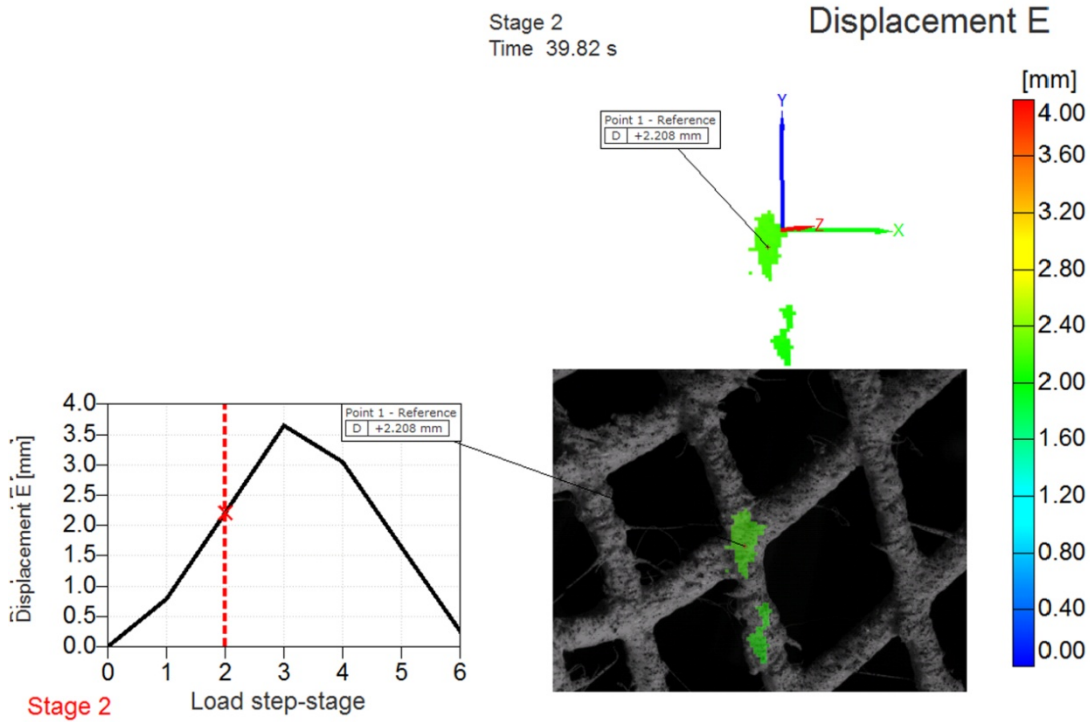
gom
www.gom.com



ARAMIS

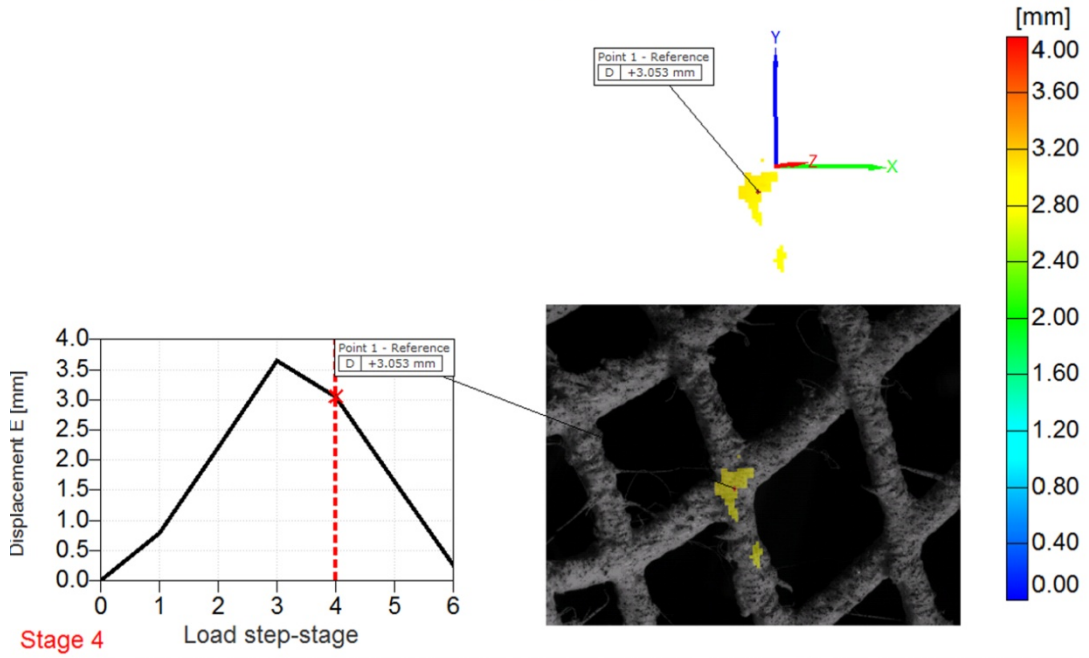
6/27/16

gom
www.gom.com



Stage 4
Time 91.58 s

Displacement E



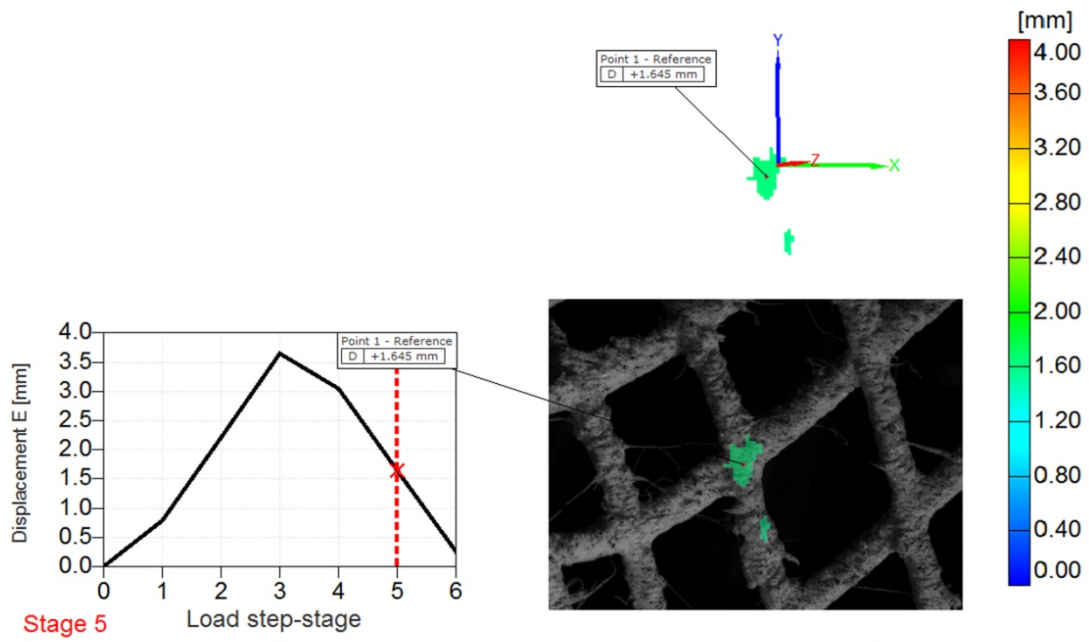
ARAMIS

6/27/16

gom
www.gom.com

Stage 5
Time 119.38 s

Displacement E



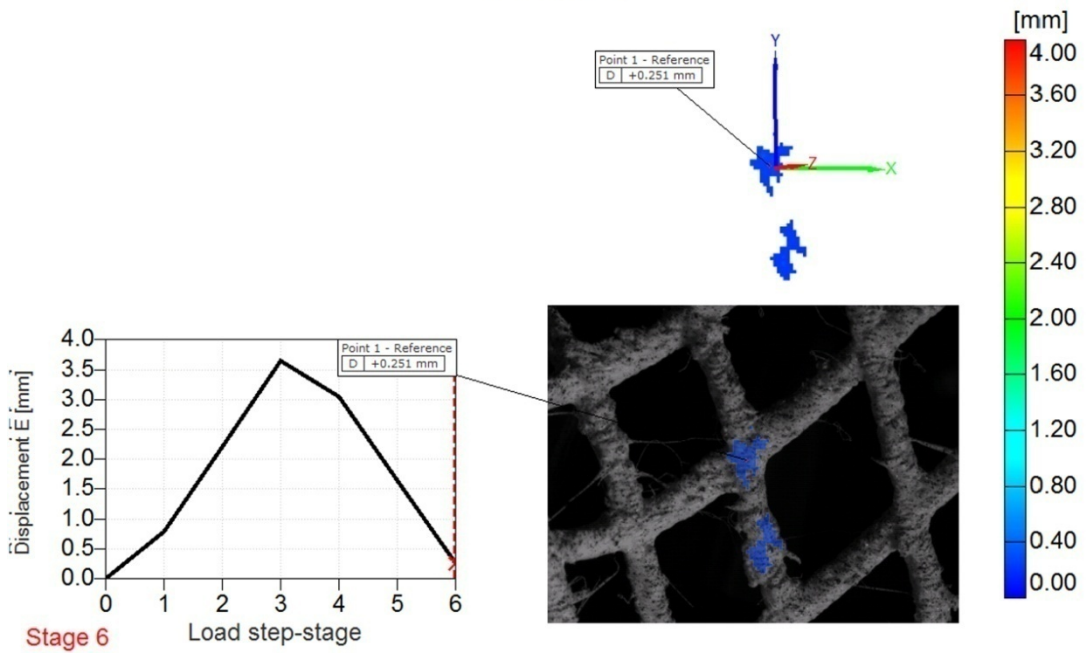
ARAMIS

6/27/16

gom
www.gom.com

Stage 6
Time 150.86 s

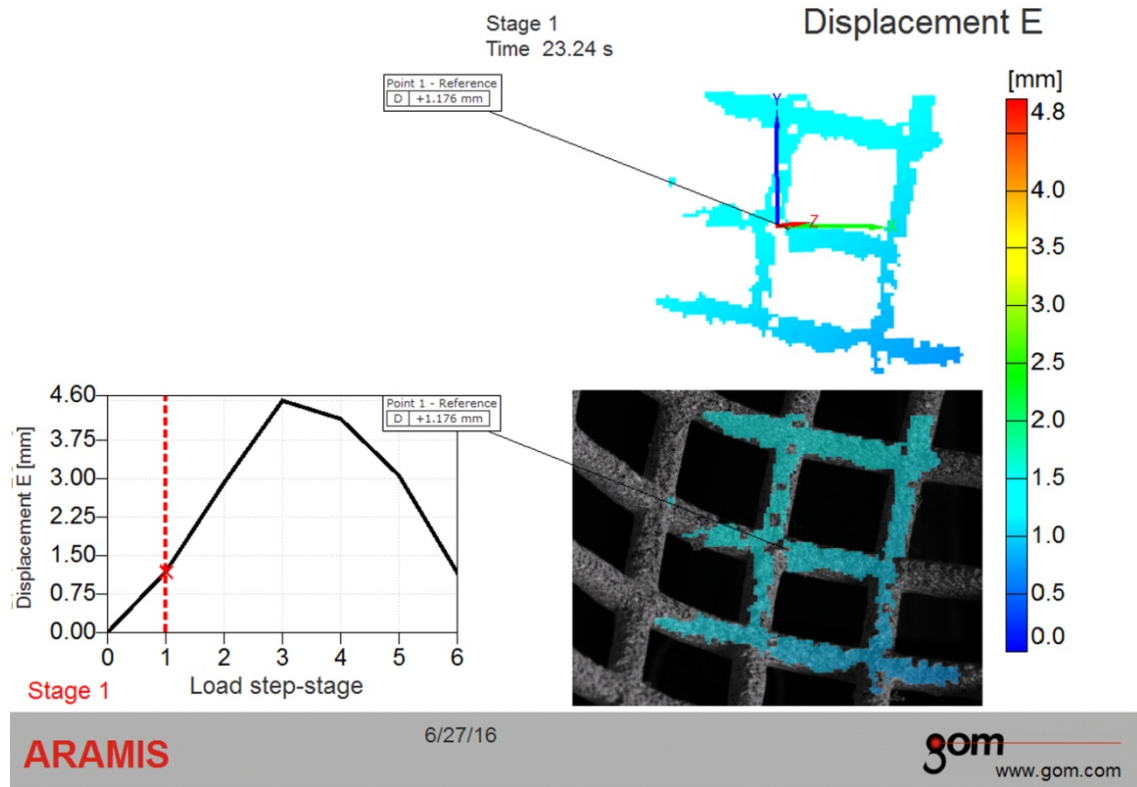
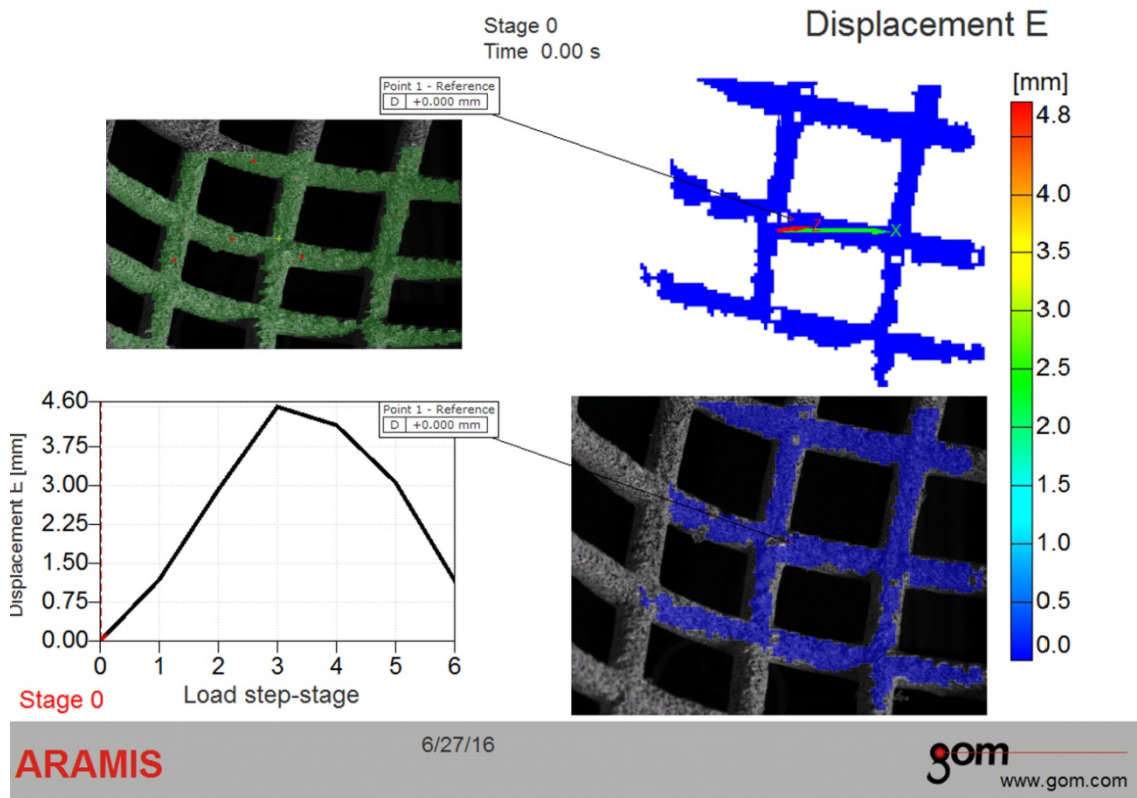
Displacement E

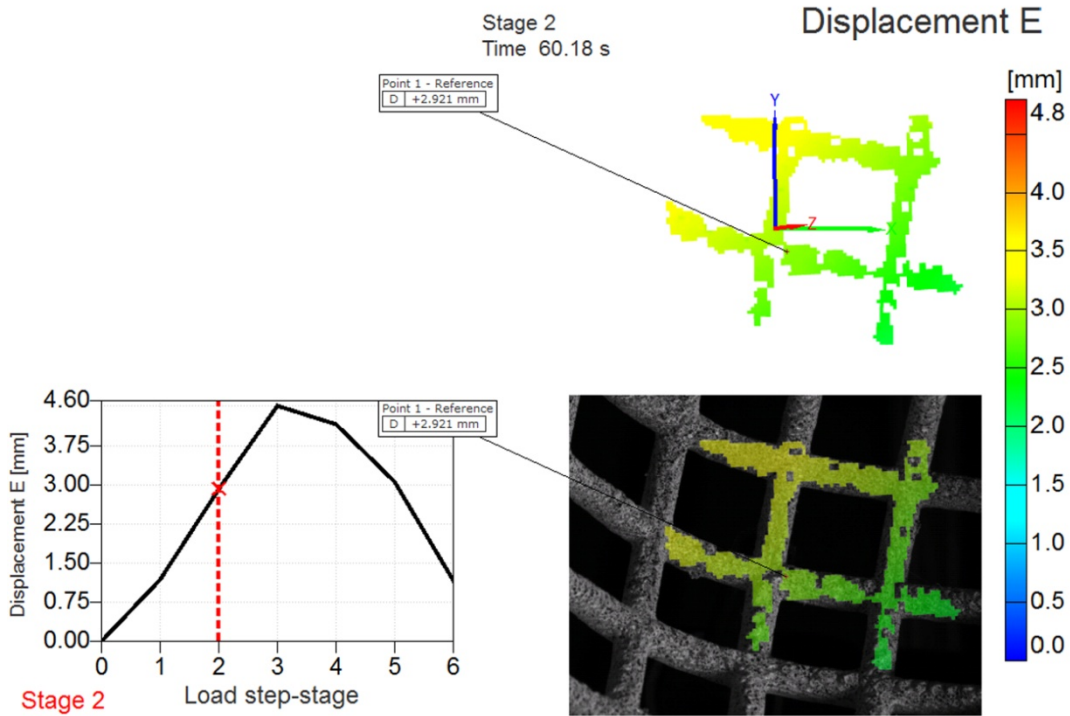


ARAMIS

6/27/16

gom
www.gom.com

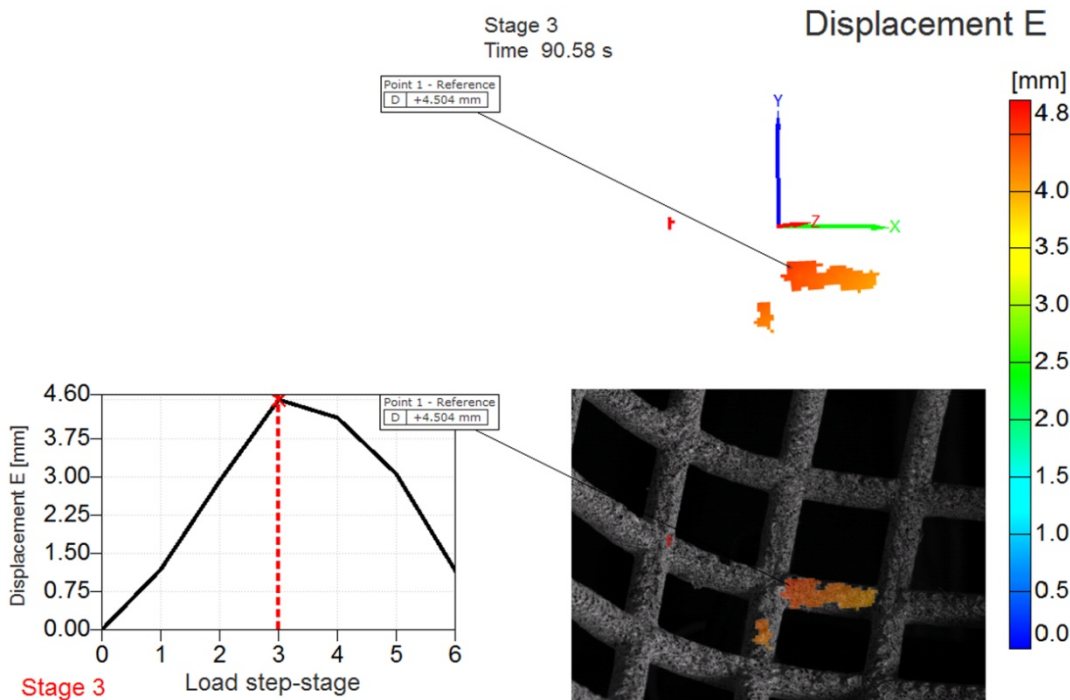




ARAMIS

6/27/16

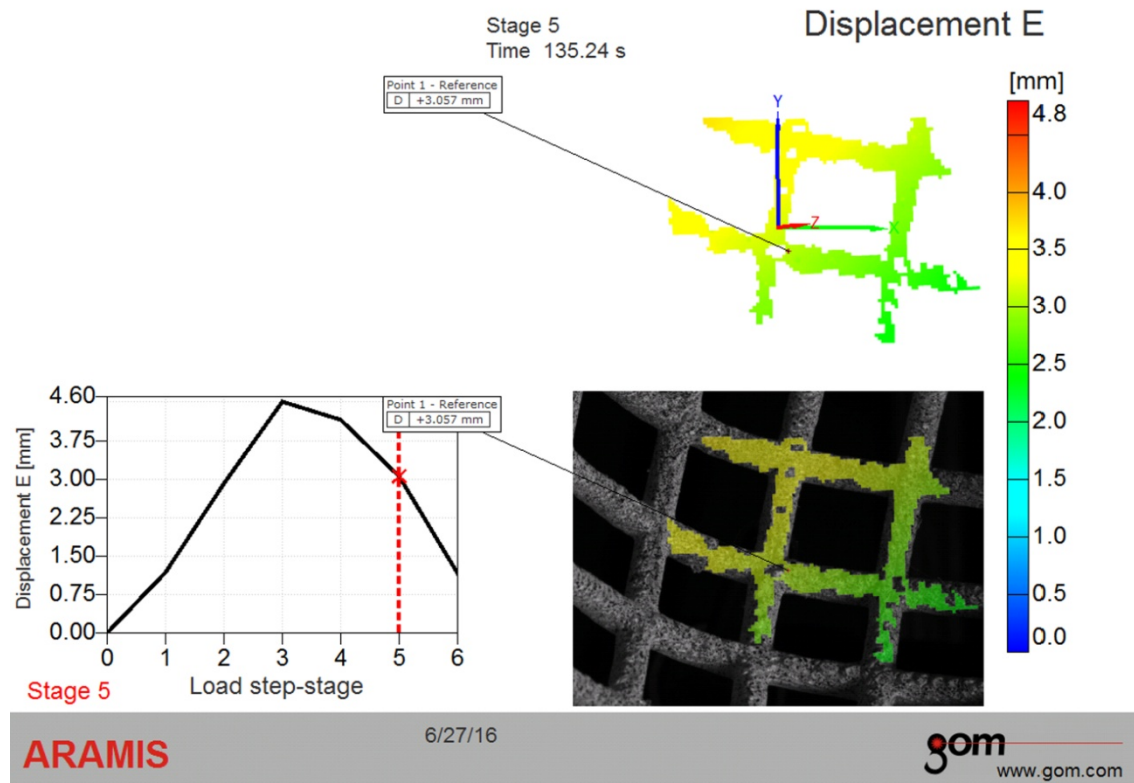
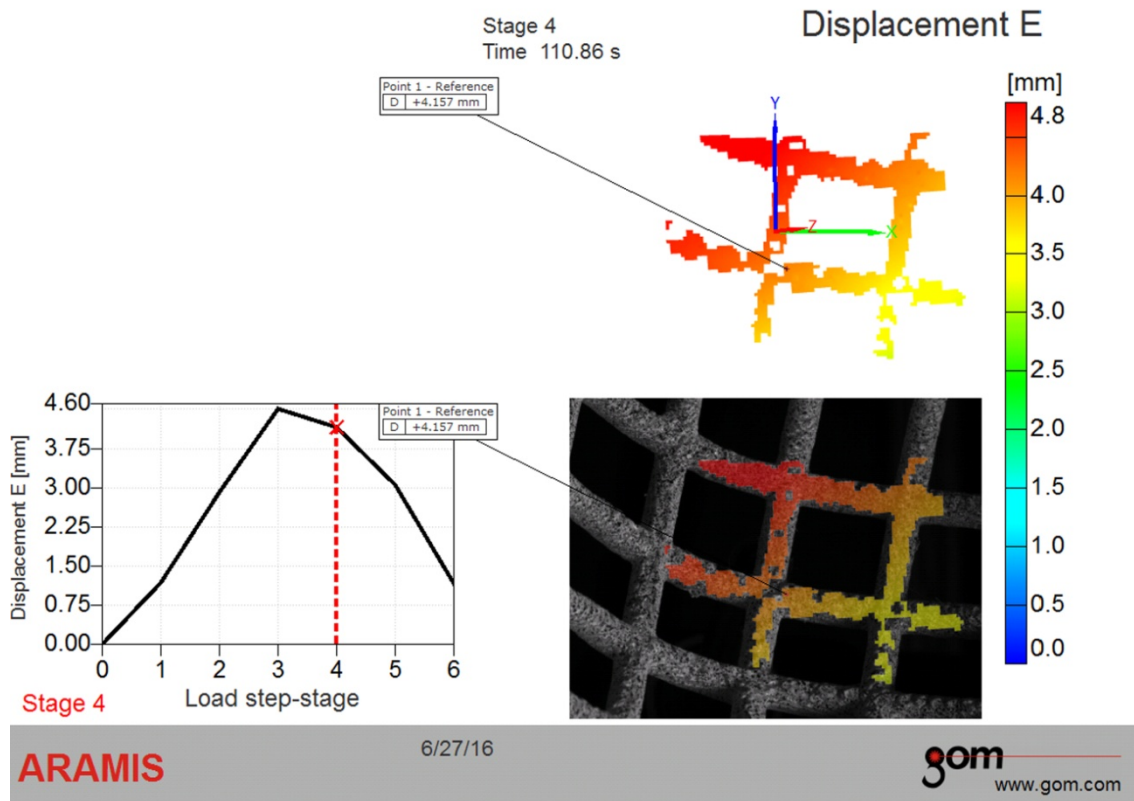
gom
www.gom.com



ARAMIS

6/27/16

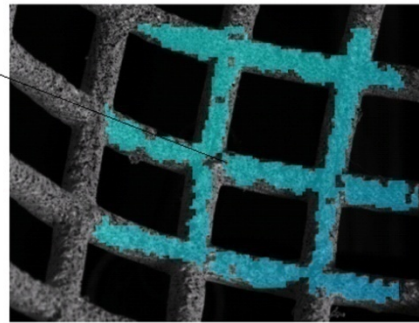
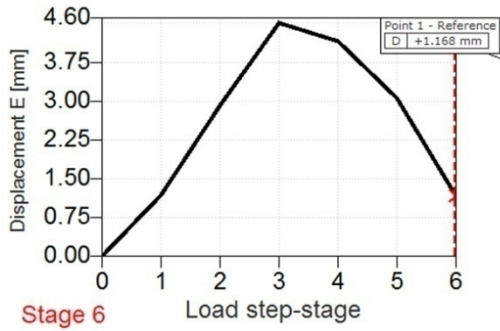
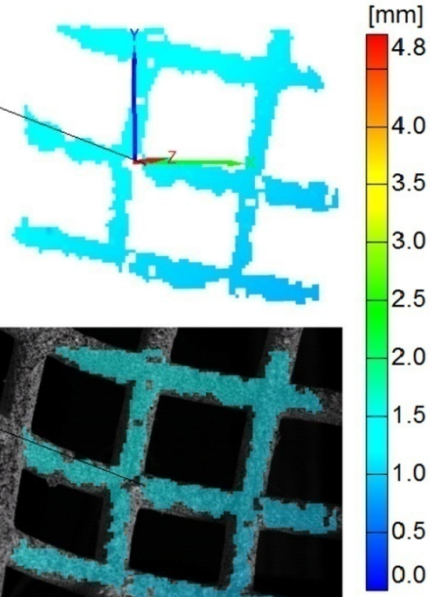
gom
www.gom.com



Stage 6
Time 176.04 s

Displacement E

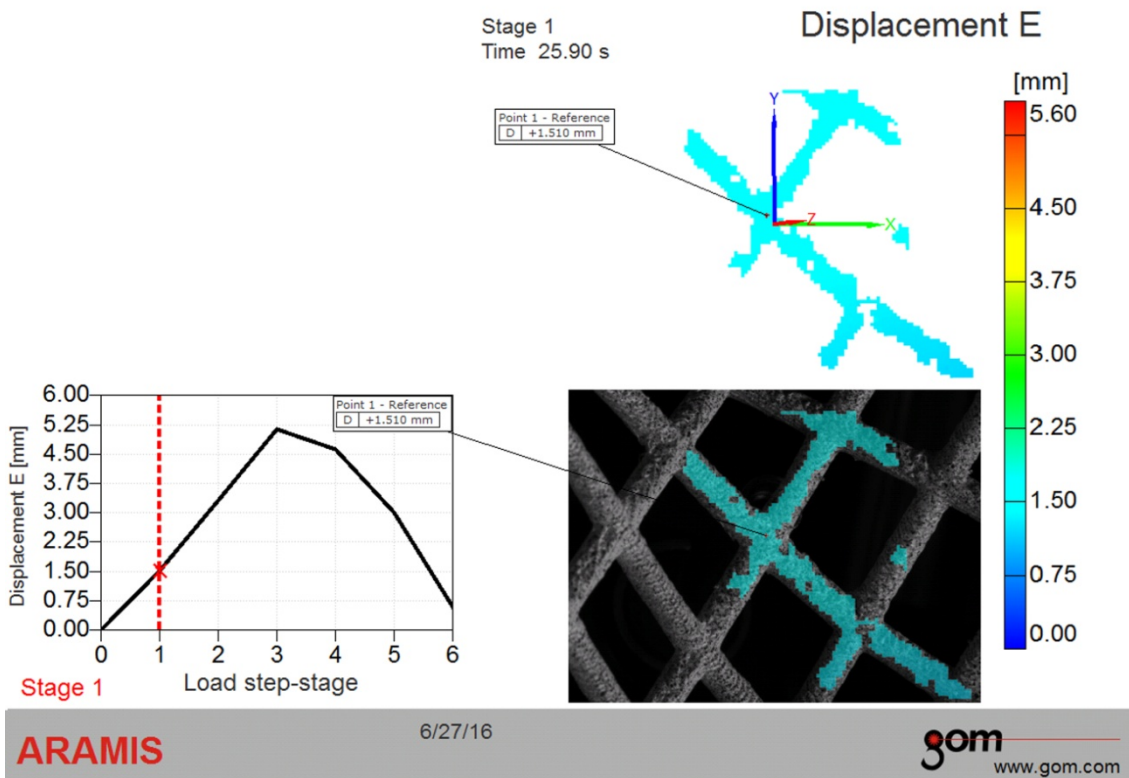
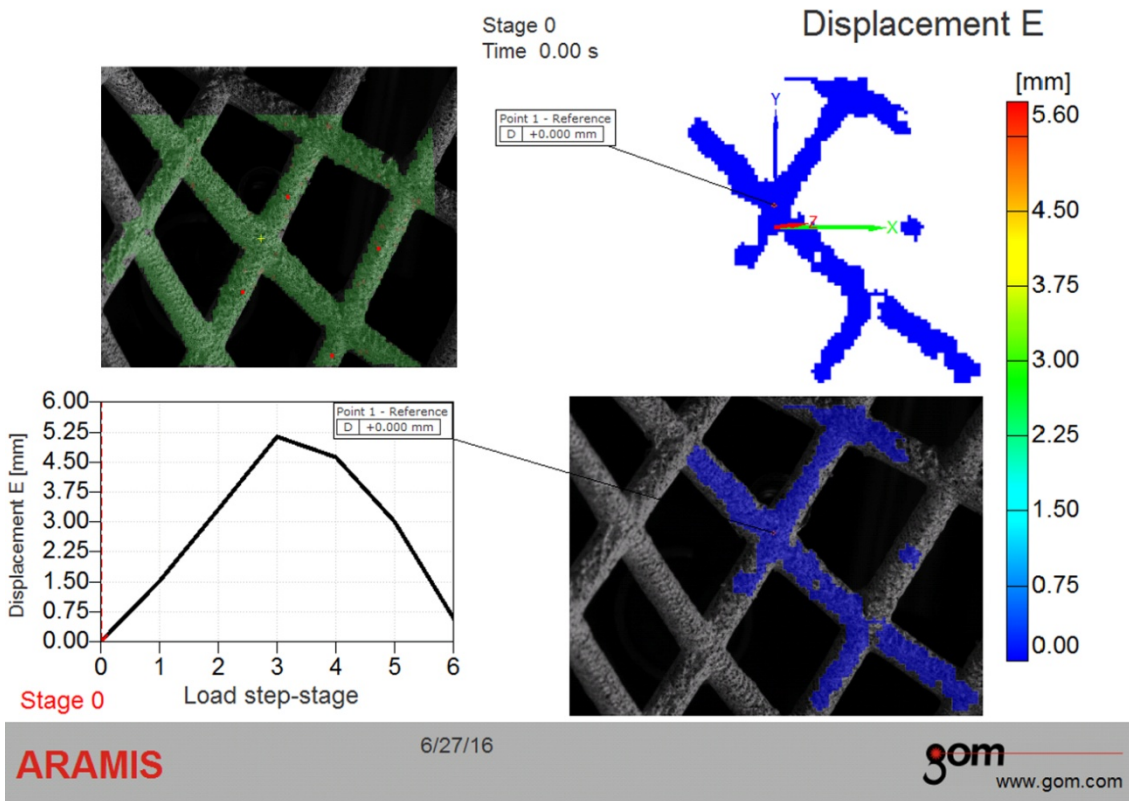
Point 1 - Reference
D | +1.168 mm

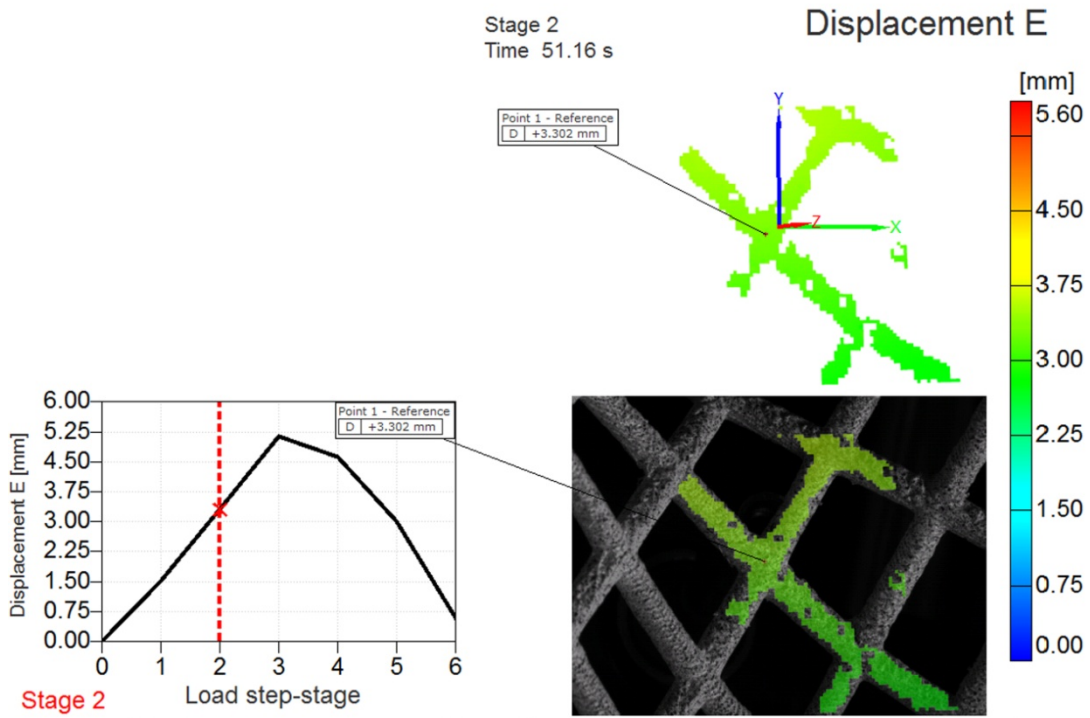


ARAMIS

6/27/16

gom
www.gom.com

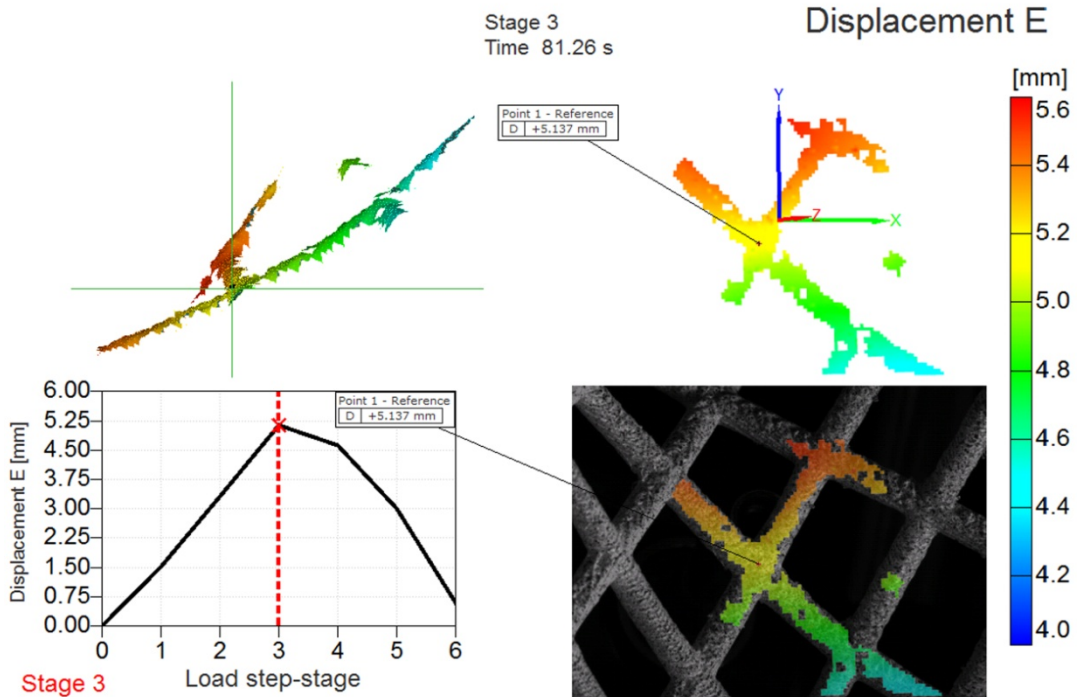




ARAMIS

6/27/16

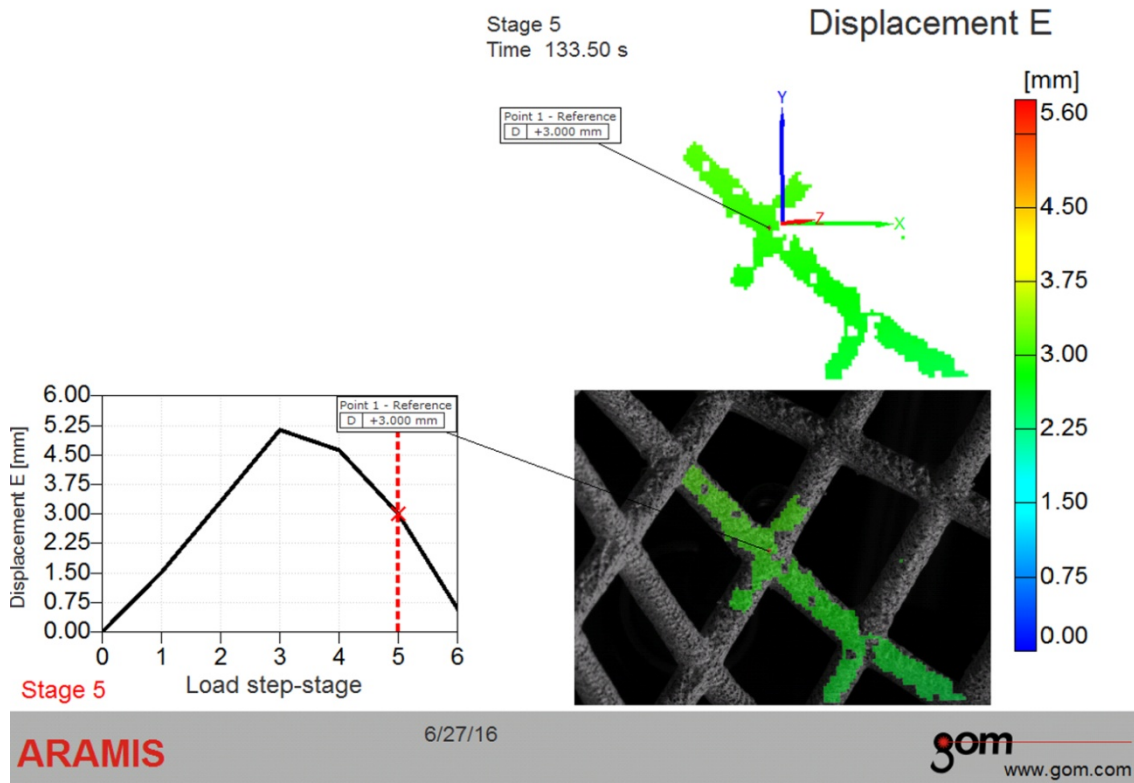
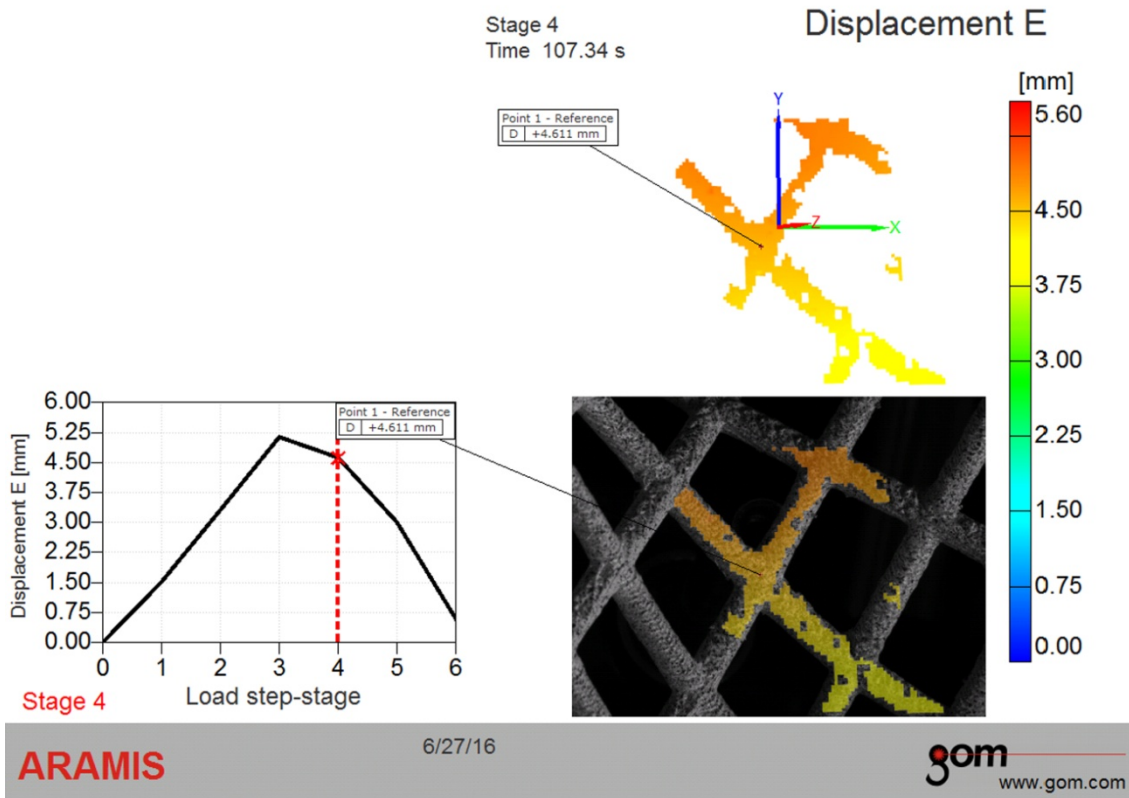
gom
www.gom.com



ARAMIS

6/27/16

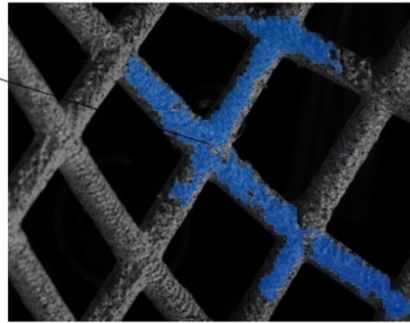
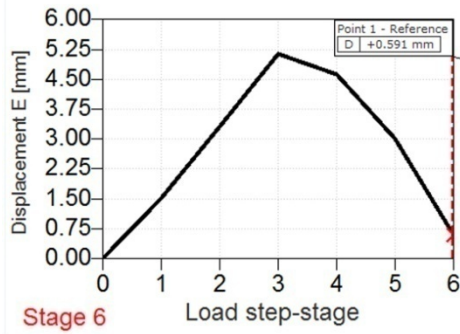
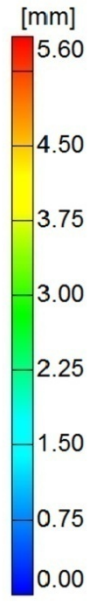
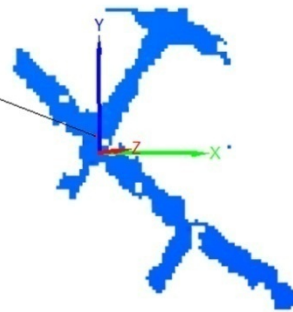
gom
www.gom.com



Stage 6
Time 163.94 s

Displacement E

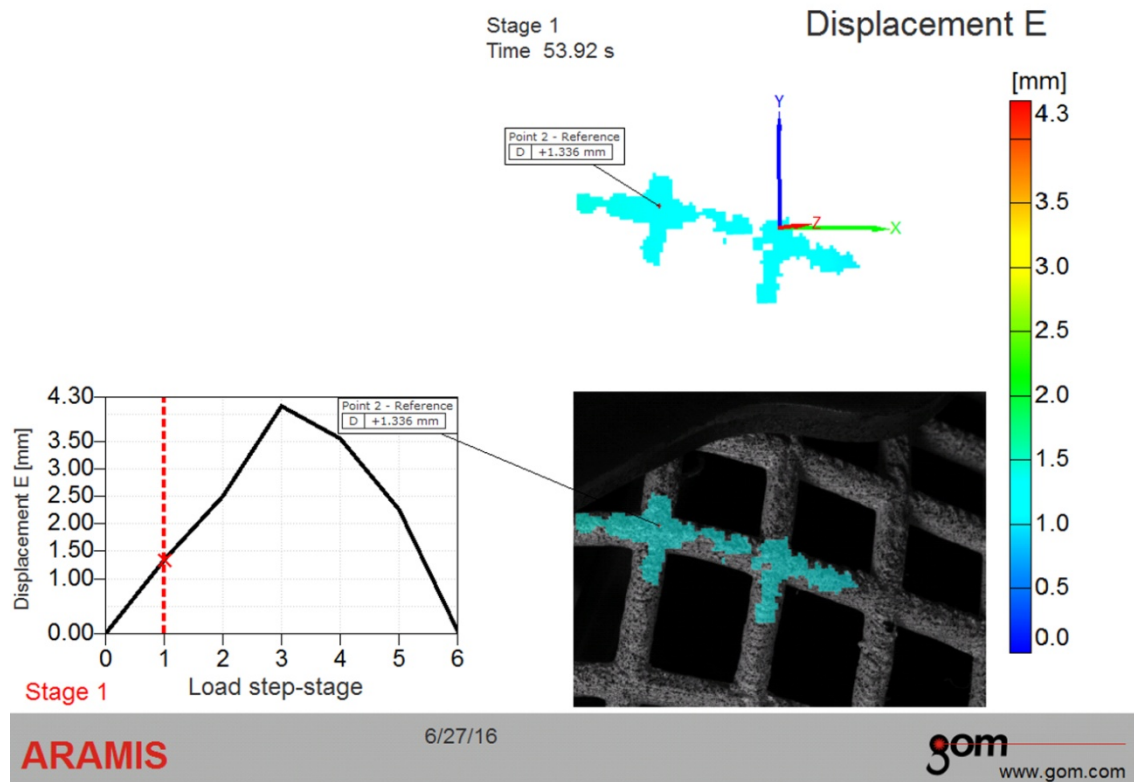
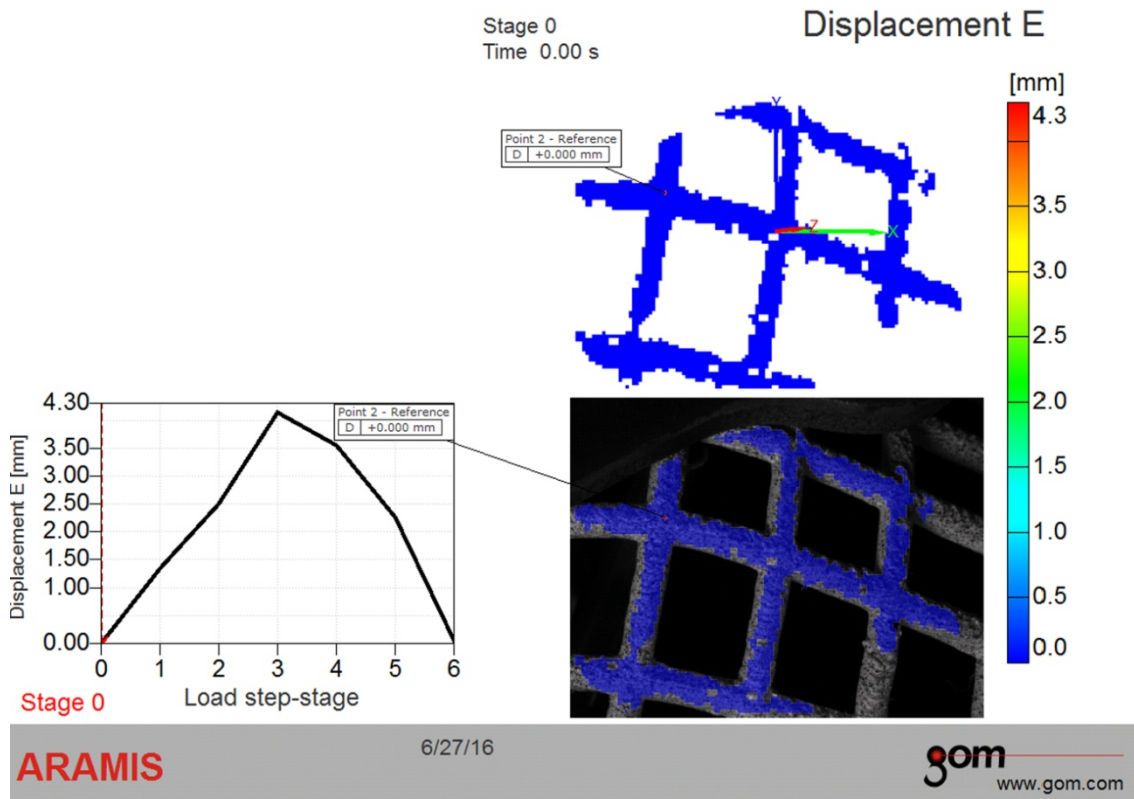
Point 1 - Reference
[D] +0.591 mm

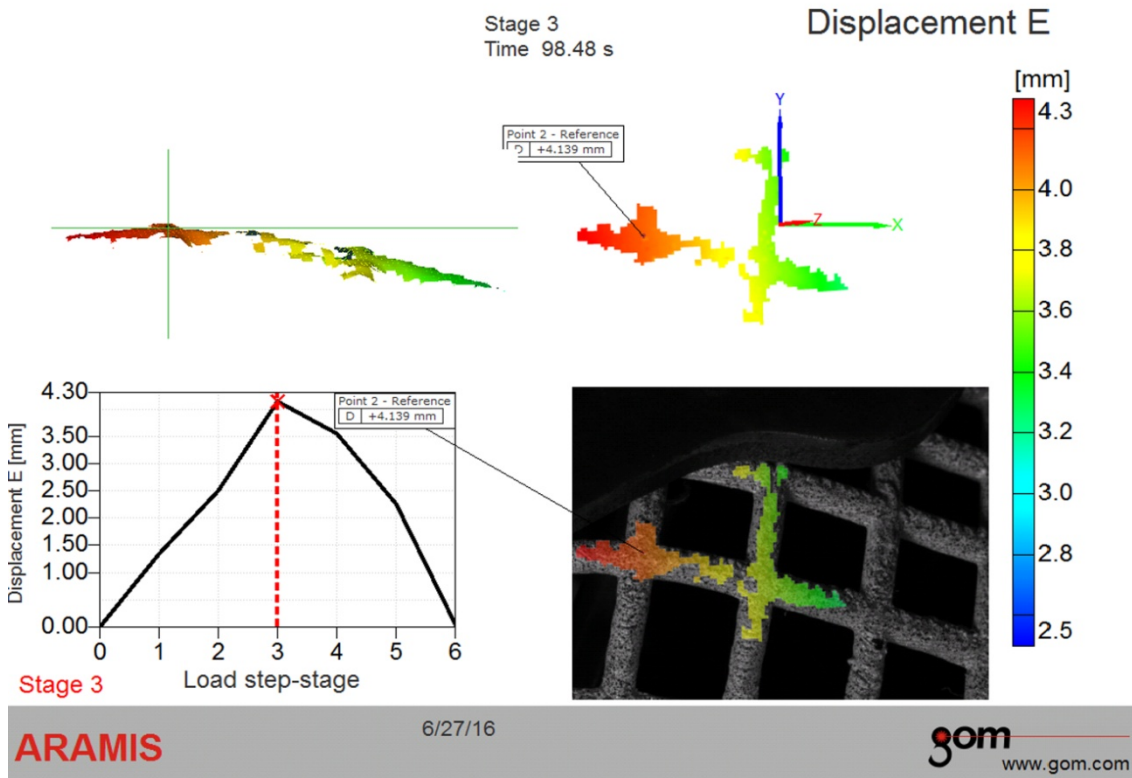
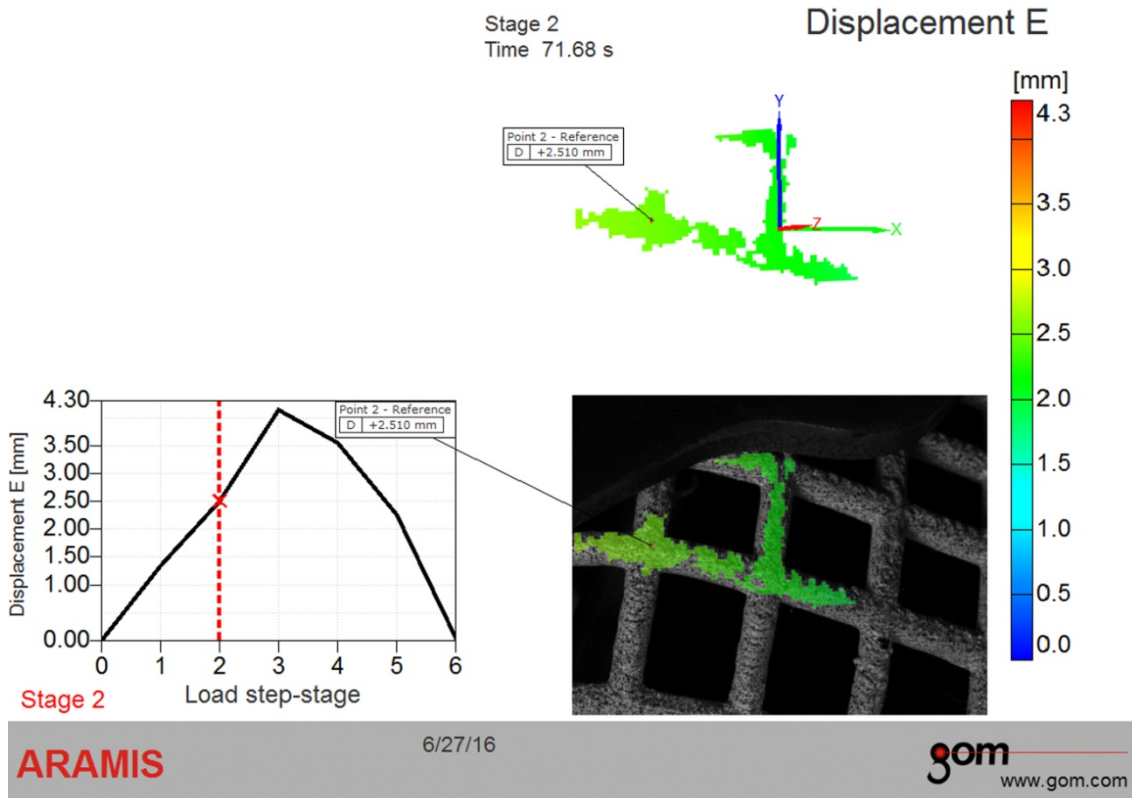


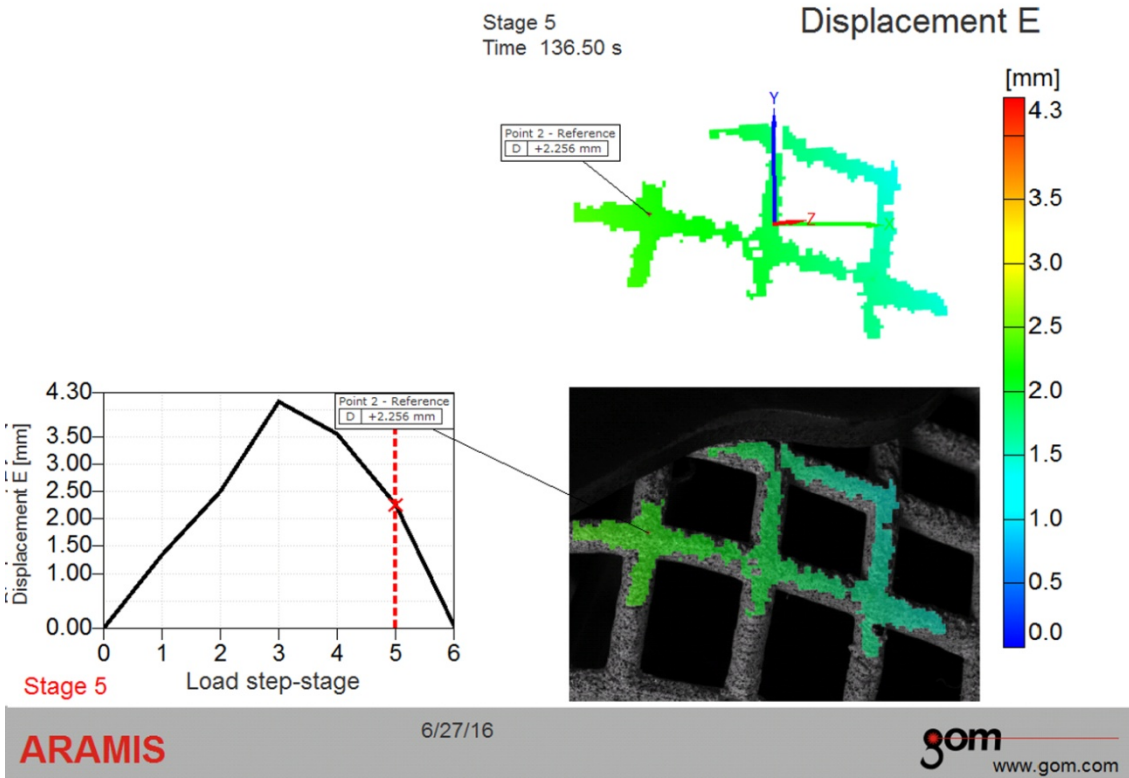
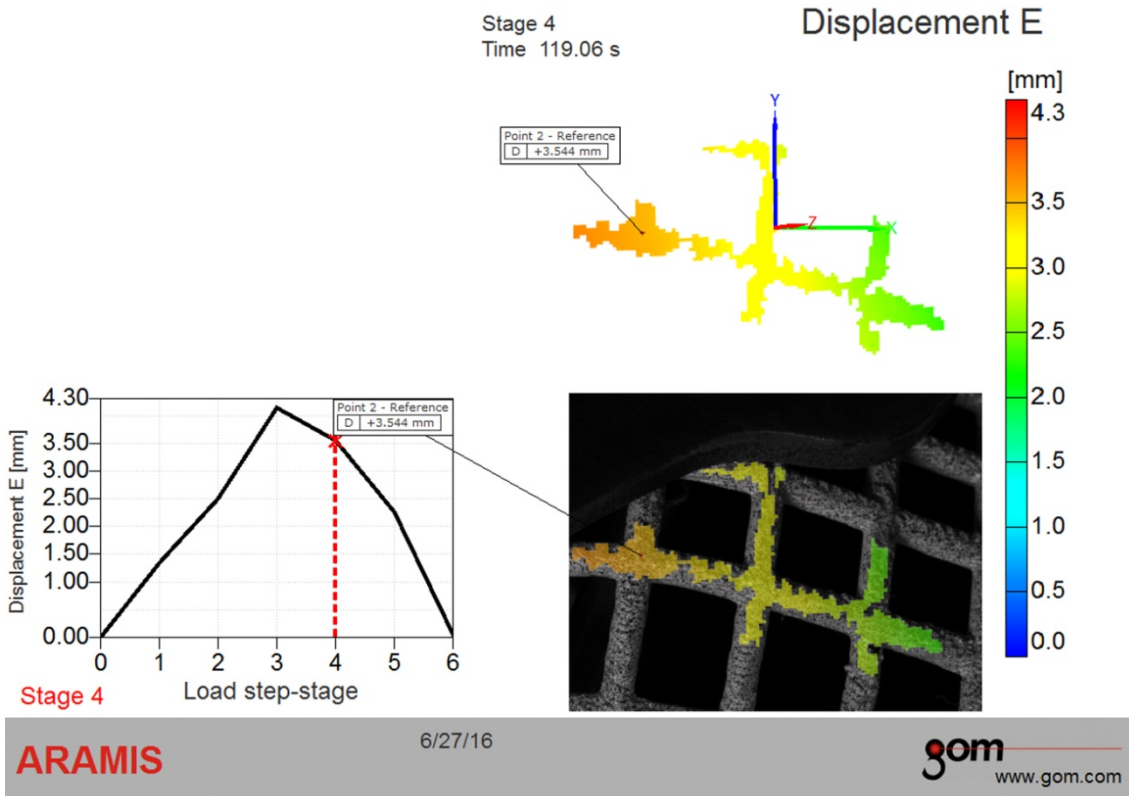
ARAMIS

6/27/16

gom
www.gom.com

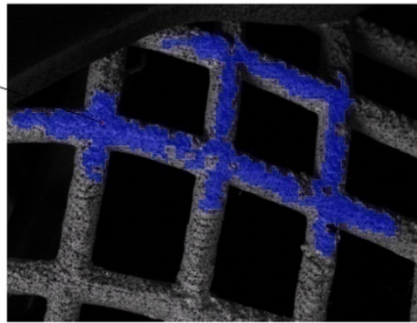
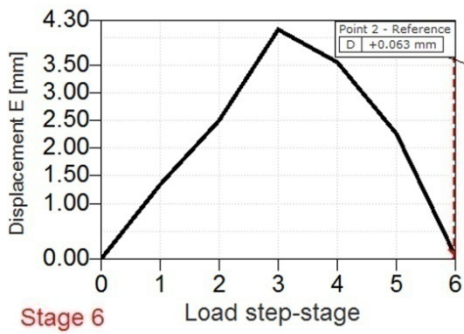
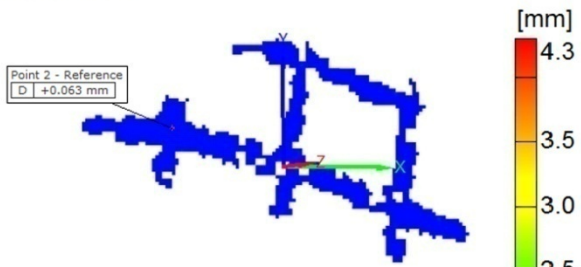






Stage 6
Time 165.64 s

Displacement E



ARAMIS

6/27/16

gom
www.gom.com

Биографија

Предраг Несторовић, дипл. инж. арх. рођен је 27. маја 1980. г. у Београду. Након завршене III београдске гимназије, уписао је 1999. г. Архитектонски факултет Универзитета у Београду на коме је дипломирао 2006. г. Докторске студије на Архитектонском факултету уписао је 2009. г. Као усмерење докторских студија одабрао је студије научног карактера, област истраживања архитектура, ужа научна област конструктивни системи. Стручни испит је положио 2008. г., а члан је ИКС са лиценцама бр. 300 1091 09 за одговорног пројектанта из новембра 2009 год. и бр. 400 F 0 98 10 за одговорног извођача радова из септембра 2010 године. Кандидат поседује знање енглеског и руског језика.

Досадашњи професионални рад кандидата карактерише разноврсно искуство у различитим сегментима струке. Може се рећи да се у највећој мери бавио пословима архитектонског и урбанистичког пројектовања, посебно од 2006-2009. г. док је радио у фирми за инжењеринг, пројектовање и извођење радова "Fering Group" д.о.о., у "Default" д.о.о. у периоду од 2009-2012. г. и од 2010-2013.г. запослен је на Архитектонском факултету у звању сарадника на реализацији Модула - Апликативна перманентна едукација у дигиталним технологијама. Тренутно је запослен у фирми EnergyNetd.о.о. у Београду.

Као део тима у периоду од 2006-2012. г. учествовао је у изради 2 конкурсна решења, 6 идејних и 3 главна архитектонска пројекта, а има и 3 реализована објекта. Поред рада у пракси кандидат је учествовао као студент докторских студија у настави на Архитектонском факултету на следећим предметима: Конструктивни системи ш. г. 2010/2011, 2011/2012 и Студио пројекат М5.1. Метаморфоза простора - објекти великог распона, којим руководи проф. др Миодрага Несторовића - ш. г. 2011/2012.

Изјава о ауторству

Име и презиме аутора Предраг Несторовић

Број индекса Д2009/83

Изјављујем

да је докторска дисертација под насловом

3D ОПТИЧКА ДЕФОРМАЦИЈСКО-НАПОНСКА АНАЛИЗА МОДЕЛСКИХ NURBS

СТРУКТУРА КОНСТРУИСАНИХ БРЗОМ ИЗРАДОМ ПРОТОТИПА

- резултат сопственог истраживачког рада;
- да дисертација у целини ни у деловима није била предложена за стицање друге дипломе према студијским програмима других високошколских установа;
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио ауторска права и користио интелектуалну својину других лица.

Потпис аутора

У Београду, јули 2016.

Изјава о истоветности штампане и електронске верзије докторског рада

Име и презиме аутора **Предраг Несторовић**

Број индекса **Д2009/83**

Студијски програм **Конструктивни системи**

Наслов рада **3D ОПТИЧКА ДЕФОРМАЦИЈСКО-НАПОНСКА АНАЛИЗА МОДЕЛСКИХ NURBS
СТРУКТУРА КОНСТРУИСАНИХ БРЗОМ ИЗРАДОМ ПРОТОТИПА**

Ментор **Академик Ђорђе Злоковић, редовни члан САНУ-а**

Изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предао ради похрањења у **Дигиталном репозиторијуму Универзитета у Београду**.

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског назива доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Београду.

Потпис аутора

У Београду, јули 2016.

Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом:

3D ОПТИЧКА ДЕФОРМАЦИЈСКО-НАПОНСКА АНАЛИЗА МОДЕЛСКИХ NURBS

СТРУКТУРА КОНСТРУИСАНИХ БРЗОМ ИЗРАДОМ ПРОТОТИПА

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у Дигиталном репозиторијуму Универзитета у Београду и доступну у отвореном приступу могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио.

1. Ауторство (CCBY)
2. Ауторство – некомерцијално (CCBY-NC)
3. Ауторство – некомерцијално – без прерада (CCBY-NC-ND)
4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима (CCBY-NC-SA)
5. Ауторство – без прерада (CCBY-ND)
6. Ауторство – делити под истим условима (CCBY-SA)

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци.
Кратак опис лиценци је саставни део ове изјаве).

Потпис аутора

У Београду, јули 2016.

1. **Ауторство.**Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце, чак и у комерцијалне сврхе. Ово је најслободнија од свих лиценци.

2. **Ауторство – некомерцијално.** Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела.

3. **Ауторство – некомерцијално – без прерада.** Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела. У односу на све остале лиценце, овом лиценцом се ограничава највећи обим права коришћења дела.

4. **Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима.** Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада.

5. **Ауторство – без прерада.** Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела.

6. **Ауторство – делити под истим условима.** Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада. Слична је софтверским лиценцама, односно лиценцама отвореног кода.