

UNIVERZITET U BEOGRADU

MAŠINSKI FAKULTET

Ivana S. Todić

**OPTIMALNO VOĐENJE U USLOVIMA
VELIKIH POREMEĆAJA I
OGRANIČENIH PERFORMANSI LETA
RAKETE**

doktorska disertacija

Beograd, 2013

Komisija za pregled i odbranu:

Mentor: Prof. dr. Slobodan Jaramaz
Mašinski fakultet u Beogradu

Članovi Komisije: Prof. dr. Dejan Micković
Mašinski fakultet u Beogradu
Prof. dr. Branislav Jojić
Mašinski fakultet u Beogradu
Prof. dr. Dragan Lazić
Mašinski fakultet u Beogradu
dr. Darko Vasiljević
Institut za Fiziku Beograd

Datum odbrane: __.__.2013

Predgovor

Ovaj rad je posledica višegodišnjeg rada na razvoju rakete LORANA pri čemu je težišni zadatak stavljen na jedno od idejnih rešenja rakete sa ležajem odvojenom sekcijom upravljanja od krilnog odseka. Sva istraživanja koja su obuhvaćena doktorskim radom potiču od realnih problema koji su ustanovljeni tokom ispitivanja u funkciji od razvoja savremenih raketnih sistema.

Ovde bih se posebno zahvalila na sveobuhvatnoj podršci firmi „EDePro“ i timu ljudi koji rade na razvoju rakete LORANA.

Posebno se zahvaljujem profesoru dr. Danilu Ćuk na smernicama tokom rada i na svim dobronamernim komentarima i ispravkama.

Konačno zahvaljujem se profesoru dr. Đorđu Blagojeviću koji je deo svoje opsesije prema raketama uspešno preneo na mene.

Beograd, Mart, 2013

Ivana S. Todić

SADRŽAJ

NOMENKLATURA.....	9
Upotrebljene skraćenice:.....	13
Uvod.....	14
1 Matematički model kretanja rakete i poremećaja koji na nju deluju	17
1.1 Konceptualni dizajn rakete	17
1.2 Jednačine kretanja rakete.....	26
1.3 Matematički model potiska buster motora i poremećajnih momenata.....	30
1.4 Matematički model potiska marš motora i poremećajnih momenata	31
1.5 Matematički model aerodinamičkih sila i momenata.....	33
1.6 Matematički model gravitacione sile	36
1.7 Matematički model sila i momenata pri kretanju rakete na lanseru.....	37
1.8 Matematički model uticaja viskoznog trenja u ležaju	39
1.9 Matematički model poremećaja usled otvaranja krila.....	39
1.10 Matematički model poremećaja usled vetra	41
2 Analiza dinamičkih osobina rakete.....	43
2.1 Linearizacija jednačina kretanja.....	43
2.2 Analiza kretanja oko Ox i Ox_1 ose – valjanje rakete	49
2.3 Analiza kretanja u vertikalnoj ravni	56
3 Sinteza autopilota.....	62
3.1 Autopilot propinjanja sa zanemarenom dinamikom aktuatora	62
3.2 Uticaj dinamike aktuatora na ponašanje autopilota propinjanja	68
3.3 Autopilot valjanja sa zanemarenom dinamikom aktuatora	71
3.4 Uticaj dinamike aktuatora na autopilot valjanja	74
4 Navigacioni algoritam.....	77
4.1 Osnovi inercione navigacije.....	77
4.2 Određivanje inkremenata uglova i matrice transformacije.....	80
4.3 Određivanje brzine i položaja u prostoru	83
5 Faze vođenja rakete i izbor osnovnih algoritama vođenja	88
5.1 Vođenje po trajektoriji.....	88

5.2	Manuelno vođenje	96
5.3	Proporcionalna navigacija	100
5.3.1	Kompenzacija sistematskog poremećaja kod samonaviđenih raketa ..	102
6	Optimizacija vođenja i autopilota	107
6.1	Adaptivno upravljanje sa referentnim modelom.....	107
6.1.1	Uprošćen direktan MRAC algoritam: Adaptivno praćenje	109
6.1.2	Direktan MRAC sa nenormalizovanim adaptivnim zakonom za sisteme relativnog reda $n^* = 1$	111
6.1.3	Direktan MRAC sa nenormalizovanim adaptivnim zakonom za sisteme relativnog reda $n^* = 2$	113
6.1.4	Modifikacije MRAC algoritma	115
6.2	Adaptivno upravljanje sa referentnim modelom primenjeno na autopilot valjanja	117
6.3	Adaptivno upravljanje sa referentnim modelom primenjeno na autopilot propinjanja/skretanja.....	134
7	Statistička analiza uticaja poremećaja na sistem	151
7.1	Analiza uticaja poremećaja potiska	151
7.2	Analiza uticaja poremećaja po valjanju	156
7.3	Analiza uticaja poremećaja <i>SINS</i> -a.....	160
7.4	Analiza uticaja vetra	164
	Zaključak.....	169
	Prilog 1. Definicije koordinatnih sistema	172
	Vezani koordinatni sistem.....	172
	Navigacioni koordinatni sistem, NED	173
	Azimutni koordinatni sistem	174
	Geocentrični koordinatni sistem vezan za Zemlju, ECEF	174
	Prilog 2. Standardna atmosfera COESA	175
	Prilog 3. Geografski standard Zemlje WGS84	176
	Prilog 4. Matematički model glave za samonaviđenje	179
	Prilog 5. IMU senzor	180
	Prilog 6. Teorija pasivnosti	181
	Pozitivno realne funkcije prenosa - kontinualni sistemi	181

Pozitivni sistemi – kontinualni sistemi	181
Teorema pasivnosti.....	182
Literatura.....	183

Optimalno vođenje u uslovima velikih poremećaja i ograničenih performansi leta rakete

Apstrakt: U doktorskoj tezi je urađena analiza kretanja, vođenja i upravljanja za koncept rakete sa ležajem odvojenim sekcijama. Ovaj koncept povećava efikasnost stabilizacije rakete po valjanju, obzirom da se time omogućuje slobodno rotiranje krilne sekcije a time poništava efekat povijanja struje usled komandi propinjanja i skretanja. Kako bi se analizirao međusobni uticaj sekcija koje rotiraju oko uzdužne ose rakete urađena je analiza sa sedam stepeni slobode *7DOF*. Na osnovu kretanja opisanog sa sedam stepeni slobode izvedene su i funkcije prenosa valjanja koje uzimaju u obzir viskozno trenje u ležaju između razdvojenih sekcija.

Kako je raketa za koju je rađena analiza, raketa sa kombinovanim zakonima vođenja i to: vođenjem po trajektoriji, manuelnim vođenjem i samonavođenjem putem slike iz televizijske glave, razvijeni su i zakoni vođenja za svaku od navedenih faza. Posebno treba istaći modifikaciju zakona vođenja po trajektoriji koja je u disertaciji izvršena.

Za potrebe vođenja po trajektoriji bilo je neophodno uraditi i navigacioni algoritam. Kako je koncept rakete takav da se koriste *MEMS* senzori u skladu s tim je i razvijen inerciono navigacioni algoritam za fiksnu platformu odnosno *SINS*.

U radu je razmatran uticaj spoljnih i unutrašnjih poremećaja u sistemu i spram toga je urađena modifikacija autopilota uvođenjem adaptivnog algoritma u osnovne povratne sprege autopilota kako bi se povećala robusnost sistema. Adaptivni algoritam primenjen u autopilotima je uključio i modifikacije usled ograničenja u aktuatorskom sistemu.

Ključne reči: zakoni vođenja, adaptivno upravljanje, autopilot, inercijalna navigacija, 6-DOF, 7-DOF numerička simulacija leta rakete

Naučna oblast: Mašinstvo

Uža naučna oblast: Vojno mašinstvo - Sistemi naoružanja

UDK 623.465:519.87(043.3)

Optimal guidance in presence of high disturbances and limited performances of missile

Abstract: This PhD thesis provides analyses of flight, guidance and control for dual spin missile. Dual spin concept is used to increase efficiency of roll stabilization and to reduce induced roll from lateral control. Flight analysis with seven degree of freedom (*7DOF*) is performed in order to analyze interaction between sections that rotate around missile longitudinal axis. Transfer functions for roll that include viscous friction between separated sections are derived from flight analyses with seven degree of freedom.

Characteristic of the missile that it has combined guidance laws: flight path guidance, manual guidance and homing. Synthesis of individual guidance laws is performed for every phase. One of the goals of dissertation is modification of guidance law for flight path guidance.

It was necessary to develop the navigation algorithm for the purpose of flight path guidance. The navigation algorithm is strapdown inertial navigation algorithm based on usage of *MEMS* sensors.

In this thesis, effects of external and internal disturbances on system were investigated which led to modification in autopilot by introducing an adaptive control on already synthesized autopilot loop to increase the robustness of the system. An adaptive algorithm applied to autopilots also included modifications due to limitations in the actuator system.

Key words: guidance laws, adaptive control, autopilot, inertial navigation, *6DOF* , *7DOF* , numerical simulation of flight

Scientific discipline: Mechanical engineering

Scientific subdiscipline: Military engineering - Weapon systems

UDK 623.465:519.87(043.3)

NOMENKLATURA

A_{eb} - efektivni poprečni presek mlaznika buster motora

A_{em} - efektivni poprečni presek mlaznika marš motora

a - apsolutno ubrzanje, ubrzanje u odnosu na inercioni koordinatni sistem

a_{x_b, y_b, z_b} - signali sa akcelerometra u vezanom koordinatnom sistemu

b_k - tetiva krila

$C_n^b \omega_{en}^n$ - vektor ugaonih brzina navigacionog koordinatnog sistema u vezanom koordinatnom sistemu

$[C_x \ C_y \ C_z]^T$ - aerodinamički koeficijenti sila po osama Ox, Oy i Oz

$[C_{l_1} \ C_l \ C_m \ C_n]^T$ - aerodinamički koeficijenti momenata po osama Ox_1, Ox, Oy, Oz

$C_{l_{\xi}}$ - derivativ valjanja prednje sekcije od efektivnog otklona valjanja

C_{l_p} - prigušni derivativ valjanja prednje sekcije

C_{l_0} - derivativ valjanja zadnje sekcije od uticaja ugradnje stabilizatora

C_{l_p} - prigušni derivativ valjanja zadnje sekcije

$C_{l_{\alpha\zeta}}$ - derivativ valjanja od skretanja ili propinjanja za zadnju sekciju

$C_{m\alpha}$ - derivativ statičke stabilnosti

$C_{m\eta}$ - derivativ upravljivosti

C_{mq} - prigušni derivativ momenta skretanja ili propinjanja

$C_{mp\alpha}$ - derivativ Magnusovog momenta

$C_{z\alpha}$ - derivativ normalne sile u funkciji napadnog ugla

$C_{z\eta}$ - derivativ normalne sile u funkciji efektivnog otklona upravljačkih površina po propinjanju ili skretanju

C_{zq} - derivativ normalne sile kao posledica ugaone brzine propinjanja ili skretanja

d - referentna dužina, kalibar rakete

F_b - vektor sile potiska buster motora

F_{bx0} - intenzitet sile potiska bustera, teorijska kriva potiska u vremenu,

F_i - sila udara krila i u trenutku završetka zibravljanja
 $\mathbf{F}^L$ - vektor otpora oslonaca pri kretanju na lanseru
 $\mathbf{F}_m$ - vektor sile potiska marš motora
 F_{mx0} - intenzitet sile potiska marš motora, teorijska kriva potiska u vremenu,
 $\mathbf{G}$ - vektor gravitacione sile
 $\mathbf{g}$ - gravitaciono ubrzanje
 h - visina u odnosu na referentni Zemljin elipsoid
 $\mathbf{I}$ - tenzor momenata inercije
 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ - jedinični vektori vezanog koordinatnog sistema
 $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ - jedinični vektori proširenog vezanog koordinatnog sistema
 K_q - faktor manevarske sposobnosti rakete
 K_α - faktor pojačanja napadnog ugla
 K_ϕ - faktor pojačanja po ugaonoj brzini valjanja
 L_l - dužina lansera od baze rakete
 L_r - dužina rakete
 l_k - dužina pojedinačnog krila
 l_p - prigušni dinamički derivativ valjanja zadnje sekcije
 l_{p_1} - prigušni dinamički derivativ valjanja prednje sekcije
 l_{δ_0} - poremećajni dinamički derivativ usled greške ugradnje stabilizatora
 l_v - prigušni dinamički derivativ valjanja zadnje sekcije od viskoznosti u ležaju
 l_{v_1} - prigušni dinamički derivativ valjanja prednje sekcije od viskoznosti u ležaju
 l_ξ - dinamički derivativ valjanja krilne sekcije po komandi valjanja
 l_{ξ_1} - dinamički derivativ valjanja prednje sekcije po komandi valjanja
 M, N - radijusi meridijana i osnovne paralele
 $\mathbf{M}^{F_b}$ - poremećajni moment od buster motora
 $\mathbf{M}^{F_L}$ - moment otpora oslonaca pri kretanju na lanseru
 $\mathbf{M}^{F_m}$ - poremećajni moment od marš motora
 $\mathbf{M}^{R_A}$ - aerodinamički moment

M^v - prigušni moment usled viskoznog trenja u ležaju
 m_p - dinamički derivativ propinjanja od ugaone brzine valjanja zadnje sekcije
 m_{p_1} - dinamički derivativ propinjanja od ugaone brzine valjanja prednje sekcije
 m_q - prigušni dinamički derivativ propinjanja
 m_w - dinamički derivativ propinjanja od promene napadnog ugla
 m_η - dinamički derivativ propinjanja od komande propinjanja
 $[p \ q \ r]^T$ - vektor ugaonih brzina vezanog koordinatnog sistema
 p_{atm} - atmosferski pritisak
 p_{iz} - izlazni pritisak
 q - dinamički pritisak
 $\mathbf{q}$ - kvaternion rotacije iz vezanog u navigacioni koordinatni sistem
 $\Delta \mathbf{q}_f$ - priraštaj kvaterniona brze rotacije
 $\mathbf{q}^I$ - kvaternion rotacije iz vezanog u inercioni koordinatni sistem
 $\Delta \mathbf{q}_s$ - priraštaj kvaterniona spore rotacije
 $\mathbf{R}^A$ - vektor aerodinamičke sile
 R_e - ekvatorijalni radijus Zemlje
 R_φ, R_λ - radijusi krivine referentnog elipsoida u pravcu sever-jug i istok-zapad, respektivno
 S_r - referentna površina
 s - pređeni put rakete
 s_k - zaustavni hod krila pri zabavljanju
 T_D - transportno kašnjenje
 T_N - fazno kašnjenje
 T_q - vremenska konstanta kašnjenja ugla putanje u odnosu na ugao propinjanja
 T_{sap} - vremenski korak rada autopilota
 T_{sact} - širina impulsa signala upravljanja aktuatorom
 T_α - vremenska konstanta napadnog ugla

T_ϕ - vremenska konstanta valjanja

V - intenzitet vektora brzine rakete

$V_b = [U \quad v \quad w]^T$ - vektor brzine u vezanom koordinatnom sistemu

V_d, V_p - verovatno rasturanje po dometu i pravcu respektivno

V_E, V_N - brzine rakete u navigacionom koordinatnom sistemu u smeru istoka i severa, respektivno

W_x, W_y, W_z - sume priraštaja projekcija brzina u navigacionom koordinatnom sistemu

x_A - položaj prednjeg klizača meren od nosa rakete

x_B - položaj zadnjeg klizača meren od nosa rakete

z_q - dinamički derivativ normalnog ubrzanja od ugaone brzine propinjanja

z_w - dinamički derivativ normalnog ubrzanja po napadnom uglu

z_η - dinamički derivativ normalnog ubrzanja od komande propinjanja

α - napadni ugao

β - ugao klizanja

ε - azimut pravca

ζ_n - faktor relativnog prigušenja

ζ_{np} - faktor relativnog prigušenja valjanja

λ - geografska dužina

σ_d, σ_p - standardna devijacija padnih tačaka po dometu i pravcu respektivno

ν - koeficijent viskoznog prigušenja u ležaju

φ - geografska širina

$\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z$ - projekcije apsolutne ugaone brzine navigacionog koordinatnog sistema na njegove ose

ω_b - apsolutna ugaona brzina vezanog koordinatnog sistema

ω_N - apsolutna ugaona brzina navigacionog koordinatnog sistema

ω_n - sopstvena učestanost

ω_{np} - sopstvena učestanost valjanja

ω_{x_b, y_b, z_b} - signali sa žiroskopa u vezanom koordinatnom sistemu

Upotrebljene skraćenice:

7DOF - 7 Degrees Of Freedom , 7 stepeni slobode

BIBO - Bounded - Input Bounded - Output

COESA 1976 - 1976 Committee on Extension to the Standard Atmosphere

ECEF - Earth Centered Earth Fixed , Geocentričan koordinatni sistem

ENUp - East, North, Up

IMU - Inertial Measurement Unit , Inercijalna merna jedinica

MEMS - Micro - electromechanical systems

MRAC - Model Reference Adaptive Control, Adaptivno upravljanje sa referentnim modelom

NED - North East Down , Normalni Koordinatni sistem vezan za Zemlju

NV - Nominalne Vrednosti

PN - Proporcionalna Navigacija

PN – SP - Proporcijalna Navigacija sa kompenzacijom Sistematskog poremećaja

PR - Pozitivno Realna

PT - Protiv Tenkovski

SINS - Strapdown Inertial Navigation System

SPR - Striktno Pozitivno Realna

TV - Televizijska

WGS84 - World Geodetic System

Uvod

Poremećaji koji utiču na let rakete se javljaju od momenta napuštanja lansera pa do kraja leta. Određene kritične faze u letu rakete se mogu posebno razmatrati.

Faza kretanja po lanseru i napuštanja lansera, koja u zavisnosti od same geometrije lansirne šine i klizača, unosi inicijalni poremećaj već pri izlasku prvog klizača iz lansirne šine. U ovoj fazi jedan od važnih parametara je upravo i izlazna brzina rakete od koje najviše zavisi efekat koji inicijalni poremećaji imaju na kasniji let rakete. Rakete kod kojih je izlazna brzina mala su veoma osetljive na vetar odmah nakon napuštanja lansera, a obzirom na malu početnu brzinu otežano je i aerodinamičko upravljanje pa je moguće nagomilati grešku koja kasnije ne može da se ispravi.

Sledeća faza, odnosno kritična tačka, je promena geometrije rakete, bilo kontinualna bilo kratkoročne promene geometrije. Tu se posebno mogu razmatrati pojedinačni uticaji otvaranja krila ili uticaji odbacivanja „buster“ motora kao primeri kratkoročnih poremećaja ili slobodno rotiranje stabilizatora kao primer kontinualne promene geometrije. Pri kratkoročnim poremećajima treba razmotriti i uticaj poremećaja na senzore inercijalnog mernog uređaja (*IMU*) koji se koriste za navigaciju i upravljanje autopilotom. U zavisnosti od same ugradnje senzora i tipa kratkoročnog poremećaja moguće je stvaranje velikih signala koji mogu izaći iz opsega merenja, i posebno u slučaju kad se inercijalni senzori koriste i za navigaciju mogu napraviti ozbiljne greške čiji se efekat povećava sa vremenom. Primer za kontinualnu promenu geometrije bilo bi slobodno valjanje stabilizatora ili sekcije na koju su ugrađeni. Ovakva promena utiče pre svega na aerodinamiku obzirom da se upravljačka konfiguracija menja tokom vremena, odnosno međusoban uticaj upravljačkih površina i stabilizatora je promenljiv u vremenu.

Prestanak rada raketnog motora ili prelazak iz „buster“ faze na marševsku fazu, i poremećaji koje unose nesavršenosti izrade raketnog motora se takođe trebaju razmotriti.

Prelazak sa jednog tipa vođenja na drugi kod raketa sa kombinovanim tipom vođenja i promene u samoj dinamici objekta usled promena dinamičkog pritiska ili geometrije predstavljaju problem takođe. Promena dinamike objekta može se rešavati na više načina, bilo sintezom autopilota i vođenja na osnovu dominantno promenljivog parametra ili uvođenjem adaptacija. S druge strane pri prelasku s jednog zakona vođenja

na drugi postoji dilema oko resetovanja stanja (integratora) u povratnim spregama autopilota ili uvođenje „filtra“ na same prelaske.

Ograničenje performansi leta rakete uglavnom se ogleda u samom upravljačkom sistemu odnosno aktuatorima i u maksimalnim dozvoljenim normalnim ubrzanjima, što su ograničenja kao posledica konstrukcije. Aktuatori su najčešće osim po otklonu ograničeni i brzinom dostizanja zadatog ugla. Ostala ograničenja koja takođe značajno utiču na stabilnost i performanse sistema su realna kašnjenja koja se u sistemu javljaju a posledica su same komunikacije među elementima sistema, od momenta čitanja informacija sa senzora do konačnog zauzimanja odgovarajućih otklona kao posledica vođenja i/ili stabilizacije rakete.

Kao primer na kome je izvršena analiza u ovom radu, korišćena je raketa sa kombinovanim tipom vođenja kod koje postoji više nezavisnih poremećaja različitog tipa: momenat napuštanja lansera, zatim promena geometrije koja se ogleda u otvaranju stabilizatora (krila), zatim prestanak rada buster motora i prelazak na marševsku fazu leta. Ono što takođe karakteriše ovaj primer je to da je raketa koncipirana tako da je prednja upravljačka sekcija odvojena od zadnje korišćenjem radijalno aksijalnog ležaja, kako bi se smanjio odnosno neutralisao efekat indukovano valjanja pri skretanju/propinjanju.

Tipični ciljevi za koje bi rakete na osnovu manevarskih sposobnosti mogla biti primenjena su:

- kopneni ciljevi, pokretni i nepokretni, dimenzija ne manjih od $3 \times 2 \times 2[m]$ i brzine ne veće od $80km/h$

-plovni ciljevi tipa:

- Ojačani desantni čamci na naduvavanje, $7 \times 2 \times 1[m]$, $50km/h$
- Laki kompozitni patrolni čamci, $15 \times 5 \times 2[m]$, $80km/h$
- Patrolni (primorski) brodovi, $29 \times 6 \times 2[m]$, $40km/h$

Misija rakete je koncipirana tako da se raketa nakon lansiranja metodom vođenja po trajektoriji prevodi u horizontalni let i održava na željenom pravcu. Tokom horizontalnog leta postoji mogućnost prelaska na manuelni let od strane operatera. Kada raketa dođe u zonu uočavanja cilja $1-3km$ operater korišćenjem slike treba da zaključa cilj nakon čega se raketa na cilj vodi metodom proporcionalne navigacije. Na osnovu

prethodnog objašnjenja misije može se zaključiti da je raketa veoma dobar primer za analizu.

U skladu sa prethodno navedenim može se zaključiti da postoji nekoliko kritičnih analiza kojima se treba pozabaviti.

Analiza kretanja rakete ležajem odvojenih sekcija je veoma značajno. Obzirom na odvajanje sekcija ležajem potrebno je analizirati uticaj koji se prenosi usled nesavršenosti spoja, odnosno usled trenja ili nesaosnosti sekcija. Ovim problemima su se bavili pre svega autori koji su kao objekat razmatrali rakete nosače satelita ili same satelite i ređe autori koji su se bavili baš raketama [1],[2],[3],[4]. U radu će biti predstavljena analiza kretanja rakete sa 7 stepeni slobode, 4 rotacije i 3 translacije i linearizacija takvog kretanja.

Drugi deo analize odnosi se na zakone vođenja po fazama i njihovu optimizaciju. Posebno se razmatra zakon vođenja po trajektoriji, obzirom na prvu fazu putanje rakete. Zatim se razmatra efekat operatera u slučaju manuelnog vođenja. Na kraju se vrši optimizacija proporcionalne navigacija tako da zadovolji uslove leta.

Treći deo analize obuhvata modifikaciju autopilota. Obzirom na nabrojane poremećaje čiji se efekat razmatra i ograničenja upravljačkog sistema, na osnovne povratne sprege autopilota se uvodi spoljna povratna sprega adaptacije primenom principa adaptacije sa referentnim modelom, [5],[6],[7]. Adaptivno upravljanje samo po sebi nije najbolje rešenje u slučajevima kratkog vremena adaptacije, kako se može posmatrati vreme leta rakete, zato je u radu primenjen modifikovano adaptivno upravljanje sa referentnim modelom (*MRAC*) kao spoljna povratna sprega već sintetisanog autopilota kako bi se iskoristile prednosti oba tipa autopilota.

1 Matematički model kretanja rakete i poremećaja koji na nju deluju

Osnova za kvalitetno upravljanje objektom je poznavanje objekta, pa je tako ovo poglavlje posvećeno matematičkom modelovanju leta rakete i poremećaja koji na nju deluju od momenta napuštanja lansera do kraja leta. U nastavku rada biće predstavljen koncept rakete koja je uzeta kao primer objekta upravljanja. Zatim će se postaviti matematički modeli pojedinačnih podsistema rakete i poremećaja koji uvode svaki pojedinačno. Matematički model kretanja će poslužiti kao osnova za kreiranje SIMULINK simulacije leta rakete kao modela kretanja krutog tela sa 7 stepeni slobode (7DOF), koji će se kasnije koristiti kao verifikacioni model upravljanja objektom.

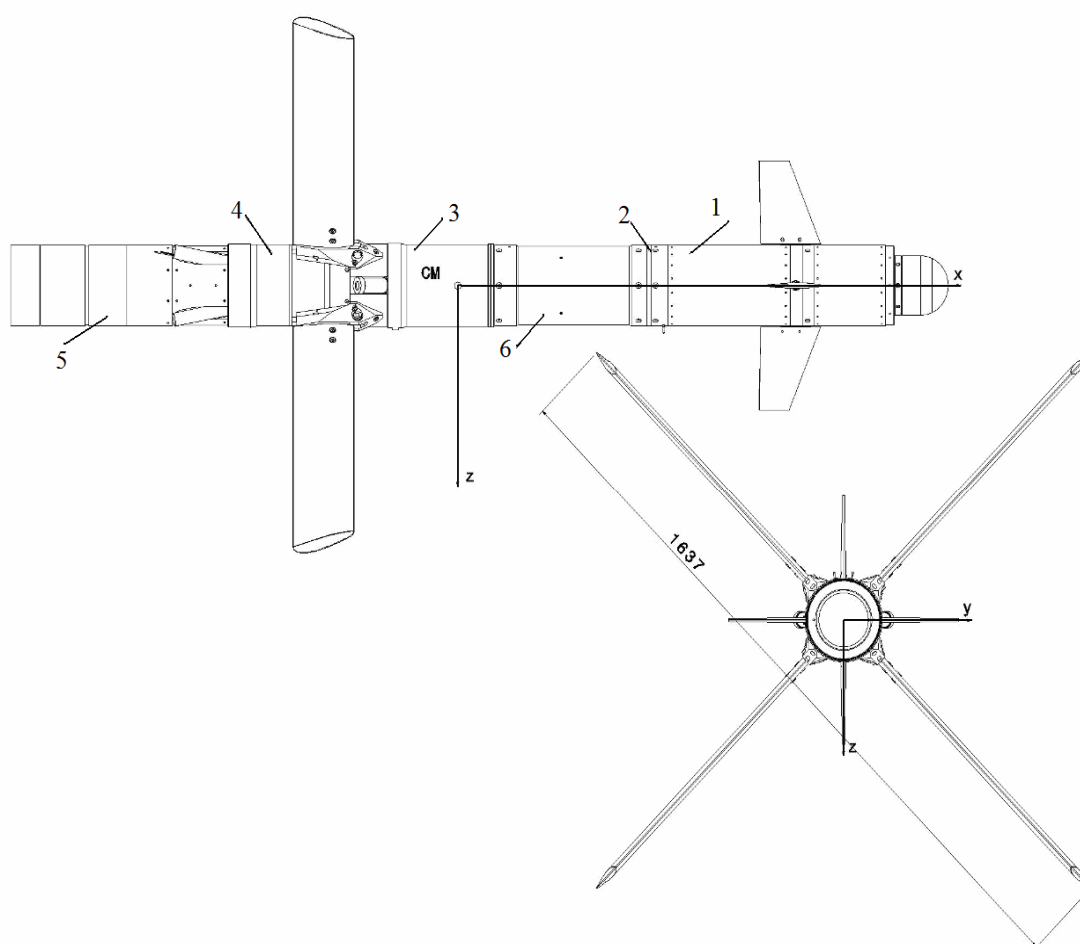
U cilju razumevanja prikazanog matematičkog modela leta rakete, prilog rada sadrži definicije koordinatnih sistema i matrica transformacije između pojedinih koordinatnih sistema, definiciju standardne atmosfere kao i definiciju geografskog standarda Zemlje.

1.1 Konceptualni dizajn rakete

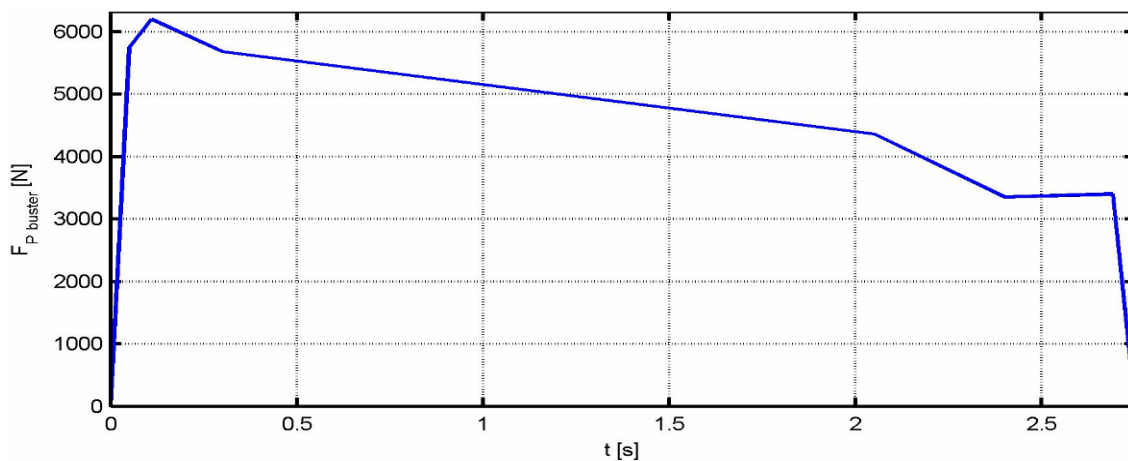
U cilju sveobuhvatnijeg istraživanja kao objekat upravljanja usvojen je primer rakete sa kombinovanim vođenjem. Kombinovano vođenje u ovom slučaju konkretno podrazumeva tri tipa vođenja: vođenje po zadatoj trajektoriji u početnoj fazi leta na osnovu inercijalne navigacije, manuelno vođenje zadavanjem komandi sa palice od strane operatera putem optičkog kabla i terminalno samonavođenje posredstvom TV glave. Primer uzet u razmatranje je takođe dobar primer kompleksnosti jednog mehaničkog sistema i poremećaja koji unose njegovi podsistemi. Na prikazu Slika 1-1 dat je crtež rakete sa označenim podsistemima.

Raketa je podzvučna i aerodinamičke konfiguracije tipa „patka“ koja leti brzinom oko $180 \frac{m}{s}$ i ima maksimalan domet od $9km$.

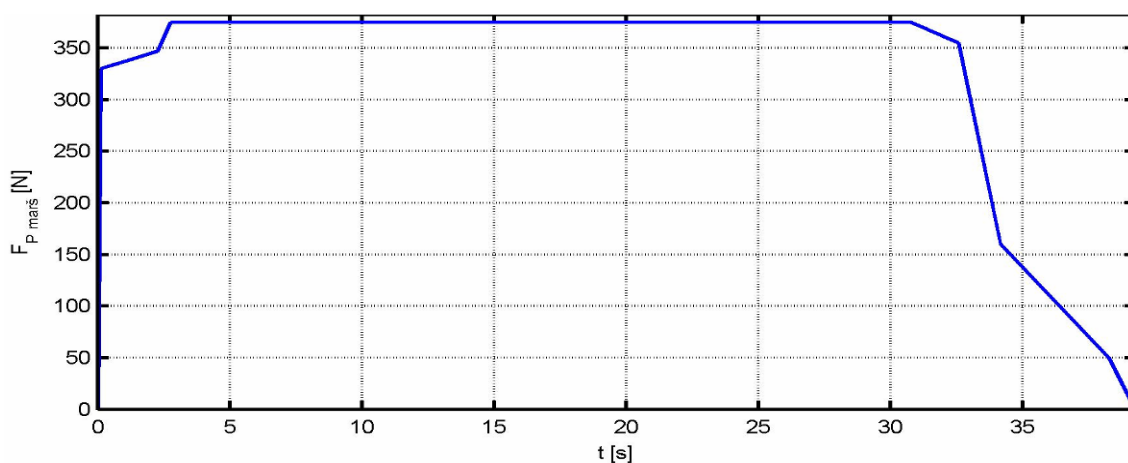
Pogon rakete obezbeđuju dva raketna motora sa čvrstom pogonskom materijom: buster motor koji radi manje od 3s i ima ulogu da obezbedi željenu brzinu rakete $180 \frac{m}{s}$, dok marševski motor održava postignutu brzinu i radi sve vreme leta. Zbog same konstrukcije rakete oba motora su izvedena sa kosim mlaznicima čiji će doprinos poremećajima takođe biti razmotren. Slika 1-2 i Slika 1-3 predstavljaju teorijske krive potiska buster i marš motora u funkciji vremena.



Slika 1-1 Konceptualni dizajn rakete sa podsystemima: 1. sekcija vođenja i upravljanja, 2. radijalno aksijalni ležaj, 3. marš motor, 4. buster motor, 5. sekcija optičkog kabla i 6. sekcija bojeve glave

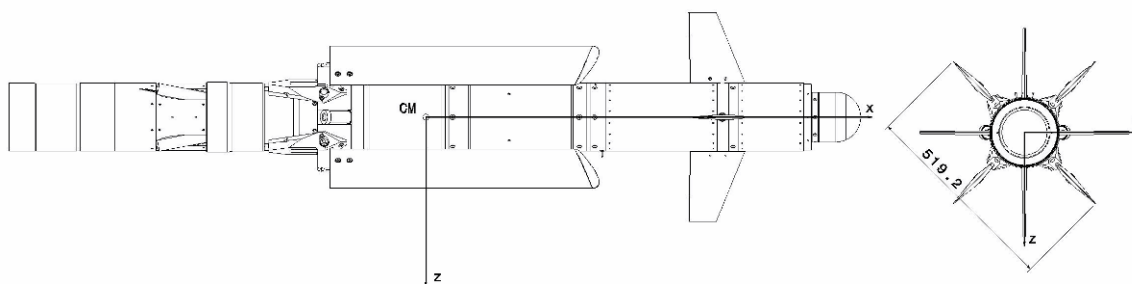


Slika 1-2 Sila potiska buster motora u funkciji vremena



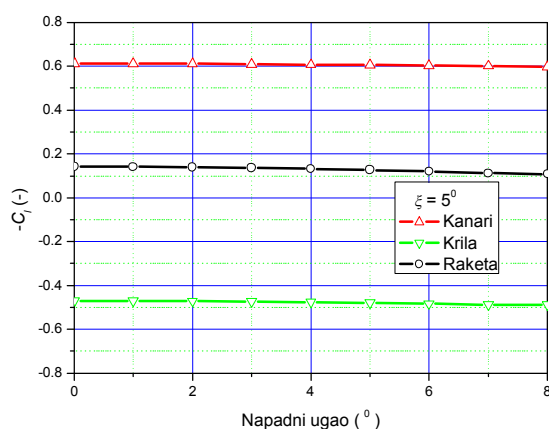
Slika 1-3 Sila potiska marš motora u funkciji vremena

Obzirom na idejno rešenje rakete da se lansira iz kontejnera sa vozila, sa prikaza Slika 1-4 se vidi da se raketa lansira sa sklopljenim krilima koji se pod dejstvom inercijalnih sila otvaraju nakon napuštanja lansera i zabravljaju u željenom položaju. Ovaj efekat udara krila o telo rakete i njihovo nejednovremeno zabravljivanje će takođe biti razmotren kao jedan od tipova poremećaja koji utiču na let rakete.

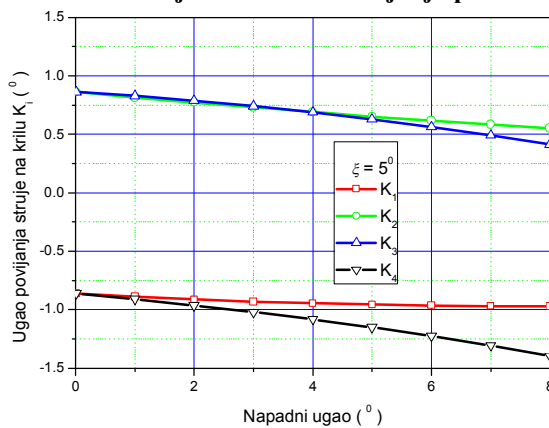


Slika 1-4 Raketa u položaju lansiranja, sa sklopljenim krilima

Kao što je prethodno napomenuto aerodinamička šema upravljanja je „patka“ konfiguracija. Poznato je da se u slučaju „patka“ šeme indukuju nepovoljni međusobni uticaji krmila i stabilizatora koji otežavaju stabilizaciju valjanja. Ovi uticaji povijanja struje i efektivnosti kanara kao elerona prikazani su na dijagramima: Slika 1-5 Odnos komponenata koeficijenta momenta valjanja pri otklonu kanara kao elerona, Slika 1-6 Uglovi povijanja struje na krilima pri otklonu kanara kao elerona ($\xi = 5^\circ$), Slika 1-7 Koeficijent momenta valjanja konfiguracije pri otklonu kanara kao upravljačkih površina skretanja – efekat kosog opstrujavanja krila ($\zeta = 5^\circ$) i Slika 1-8 Uglovi povijanja struje na krilima pri otklonu kanara kao upravljačkih površina skretanja – efekat kosog opstrujavanja krila ($\zeta = 5^\circ$).

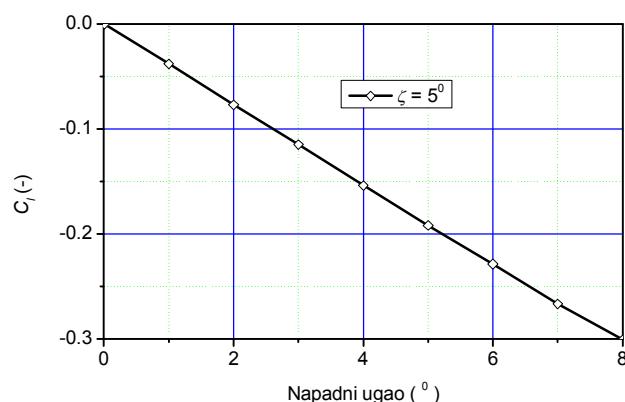


Slika 1-5 Odnos komponenata koeficijenta momenta valjanja pri otklonu kanara kao elerona

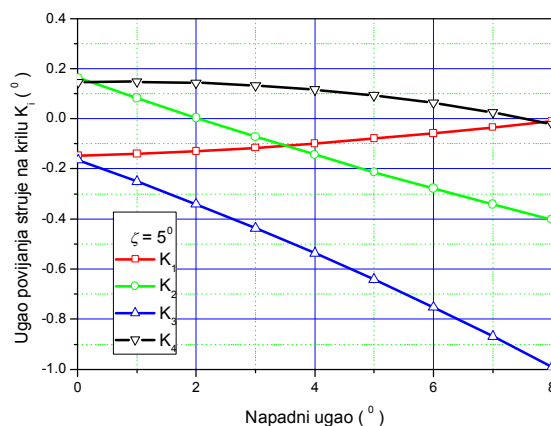


Slika 1-6 Uglovi povijanja struje na krilima pri otklonu kanara kao elerona ($\xi = 5^\circ$)

Ako se uporedi odnos koeficijenata momenta valjanja pri otklonu kanara kao elerona vidi se da je parazitni moment usled povijanja struje na krilima veoma blizak efikasnom momentu upravljanja po valjanju.



Slika 1-7 Koefficient momenta valjanja konfiguracije pri otklonu kanara kao upravljačkih površina skretanja – efekat kosog opstrujavanja krila ($\zeta = 5^\circ$)

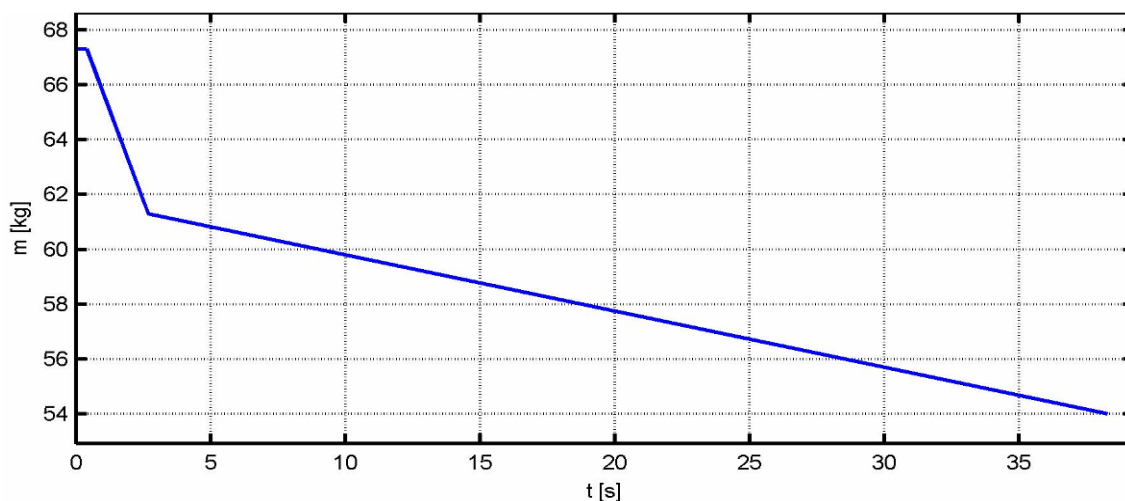


Slika 1-8 Uglovi povijanja struje na krilima pri otklonu kanara kao upravljačkih površina skretanja – efekat kosog opstrujavanja krila ($\zeta = 5^\circ$)

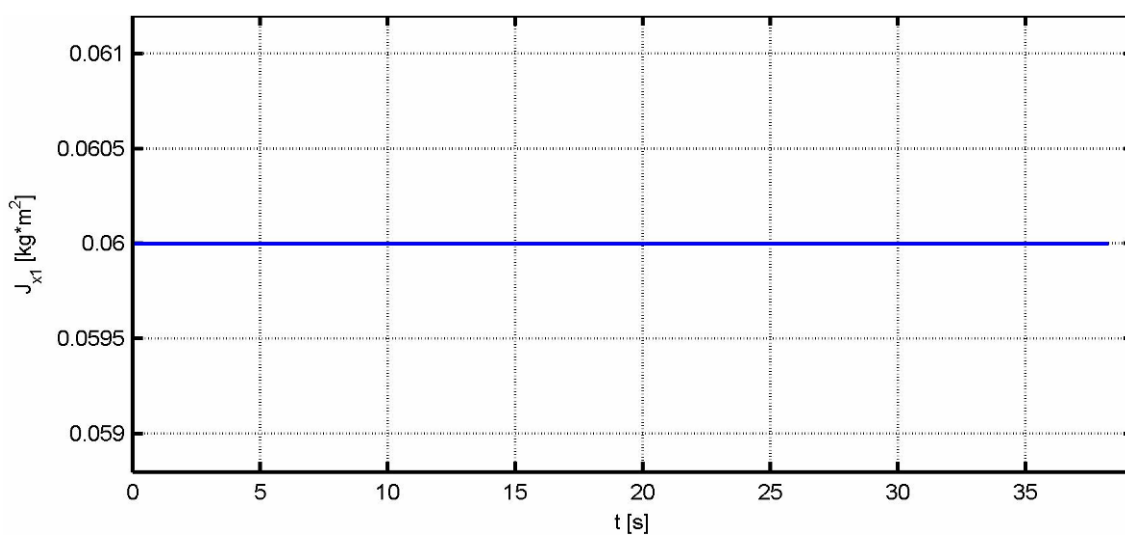
Obzirom da jedan od podсистema rakete čini TV glava neophodno je da se obezbedi stabilizacija ugla valjanja. Kako bi efekat povijanja struje na krilima minimizovao, idejno rešenje predviđa odvajanje cele upravljačke i sekcije vođenja od ostatka rakete putem radijalno aksijalnog ležaja, kao što je ranije prikazano (Slika 1-1). Na ovaj način organi upravljanja treba da obezbede stabilan ugao valjanja samo za upravljačku sekciju dok se ostatak rakete lagano rotira kao posledica otklona upravljačkih površina i/ili nesavršenosti u izradi.

Ovakvo rešenje zahteva model kretanja rakete koji obuhvata i relativno kretanje oko Ox ose, ležajem odvojenih sekcija. Kretanje se može razmatrati na dva načina, bilo uvođenjem još jednog stepena slobode bilo uvođenjem ekvivalentnih poremećaja koji se javljaju usled relativnog kretanja.

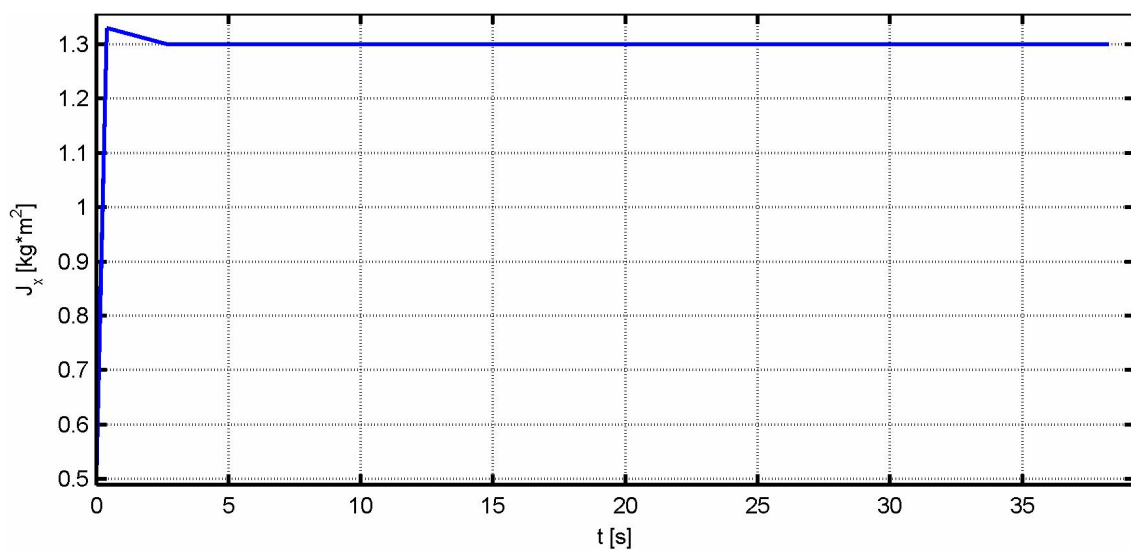
Na dijagramima: Slika 1-9 Masa rakete u funkciji vremena, Slika 1-10 Uzdužni moment inercije upravljačke sekcije, Slika 1-11 Uzdužni moment inercije zadnje sekcije, Slika 1-12 Poprečni moment inercije rakete i Slika 1-13 Položaj centra mase u funkciji vremena, dat je prikaz mehaničkih karakteristika rakete u vremenu, gde treba napomenuti da je u uticaj smanjenja mase u vremenu osim sagorevanja raketnog motora uključen i uticaj odbacivanja mase optičkog kabla koji se odmotava u toku leta.



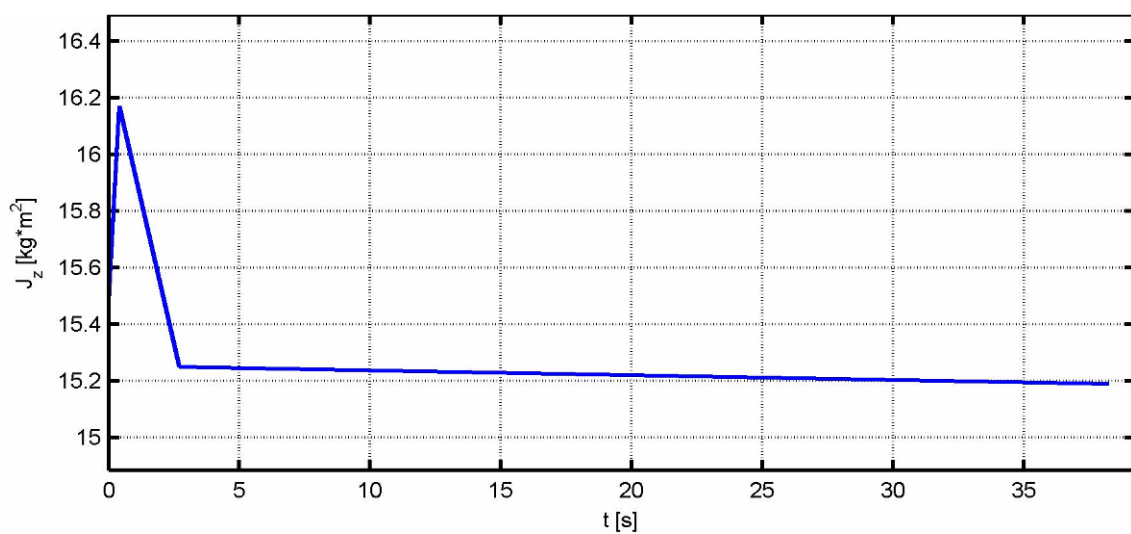
Slika 1-9 Masa rakete u funkciji vremena



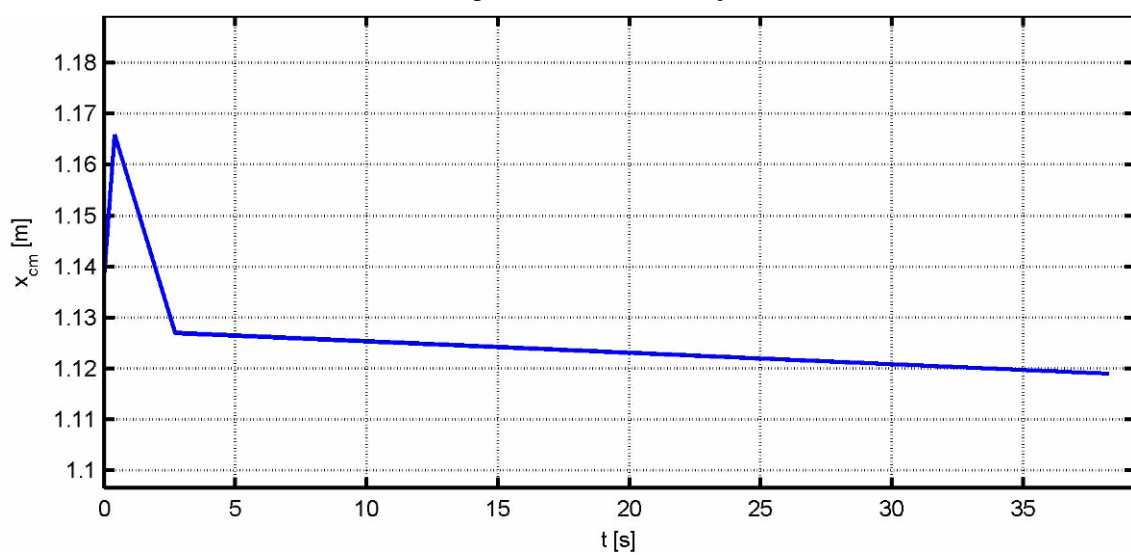
Slika 1-10 Uzdužni moment inercije upravljačke sekcije



Slika 1-11 Uzdužni moment inercije zadnje sekcije



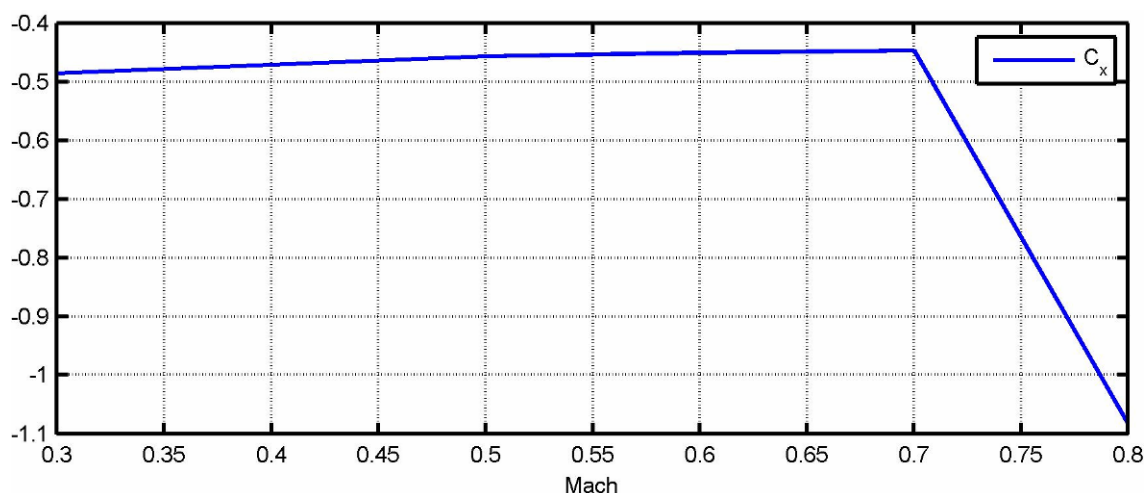
Slika 1-12 Poprečni moment inercije rakete



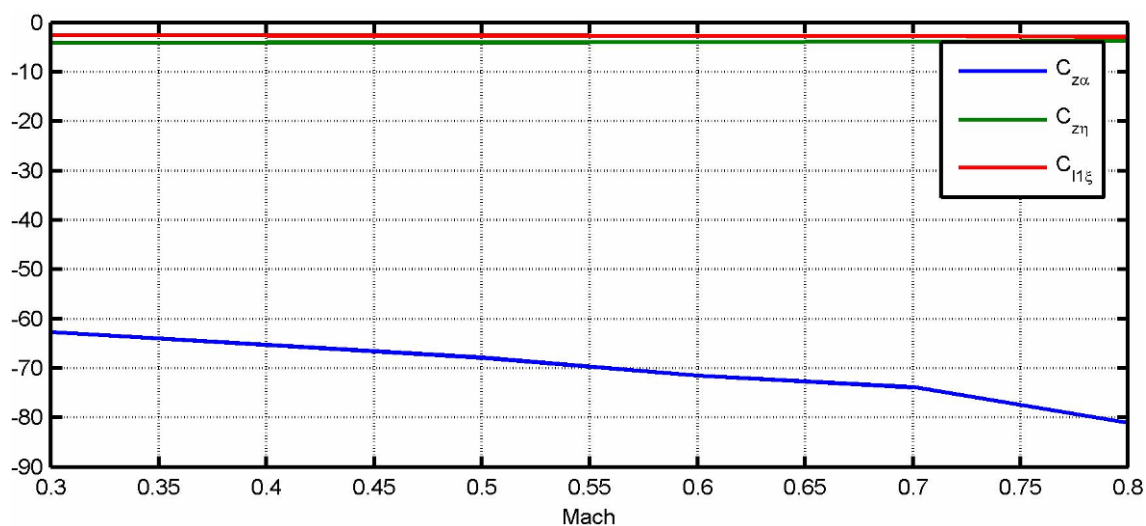
Slika 1-13 Položaj centra mase u funkciji vremena

Na dijagramima Slika 1-11, Slika 1-12 i Slika 1-13, promene inercije i centra mase u vremenu jasno se uočava momenat otvaranja krila – stabilizatora.

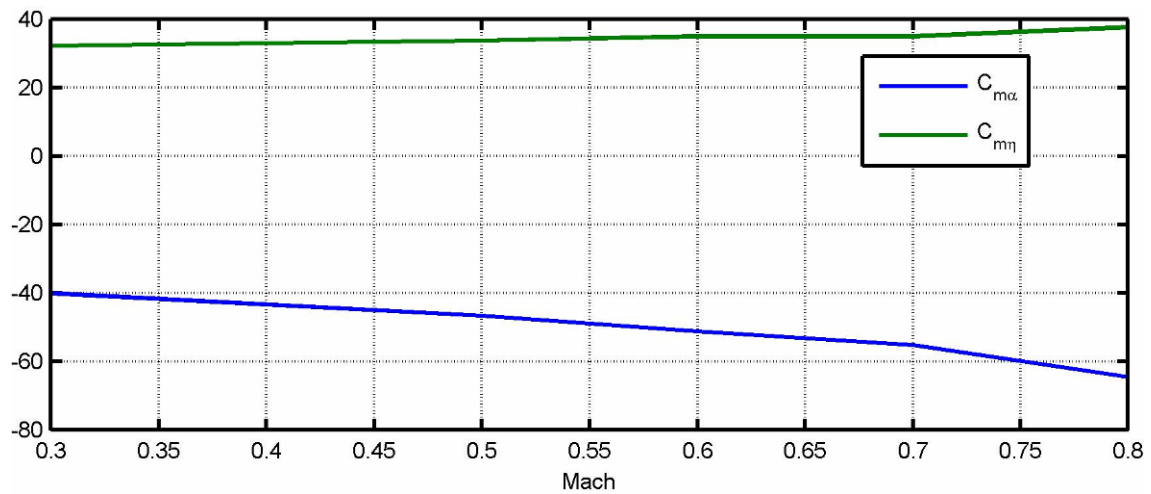
Za model leta rakete potrebno je poznavati aerodinamičke osobine rakete, u skladu s tim na dijagramima: Slika 1-14 Koeficijent aksijalne sile C_x u funkciji od Mahovog broja, Slika 1-15 Aerodinamički derivativi normalne sile po napadnom uglu i otklonu krmila, i aerodinamički derivativ momenta valjanja po otklonu elerona, Slika 1-16 Aerodinamički derivativi momenta propinjanja po napadnom uglu i otklonu upravljačkih površina, Slika 1-17 Prigušni aerodinamički derivativi, je dat prikaz proračunskih aerodinamičkih derivativa u funkciji od Mahovog broja.



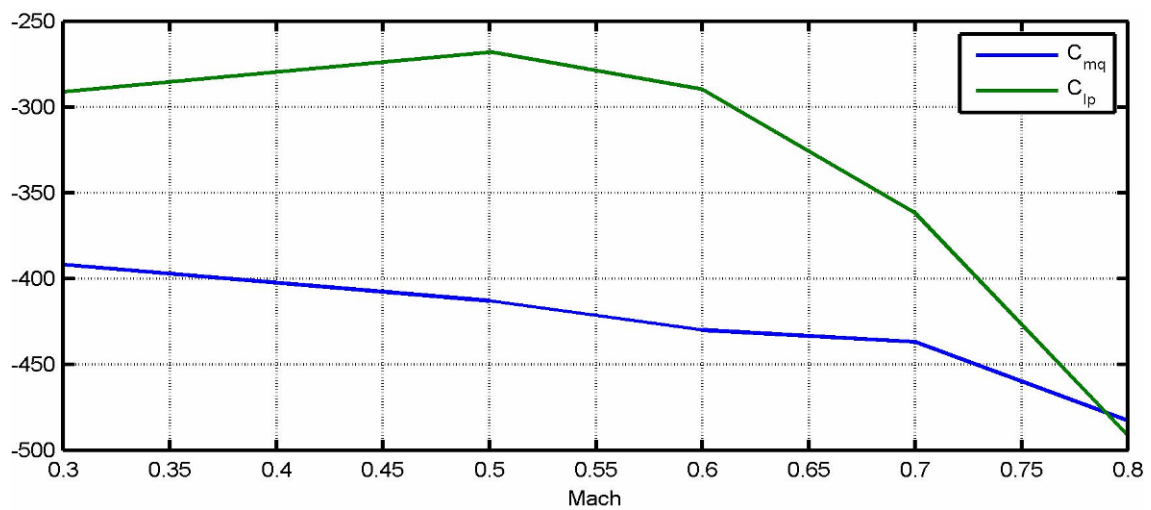
Slika 1-14 Koeficijent aksijalne sile C_x u funkciji od Mahovog broja



Slika 1-15 Aerodinamički derivativi normalne sile po napadnom uglu i otklonu krmila, i aerodinamički derivativ momenta valjanja po otklonu elerona



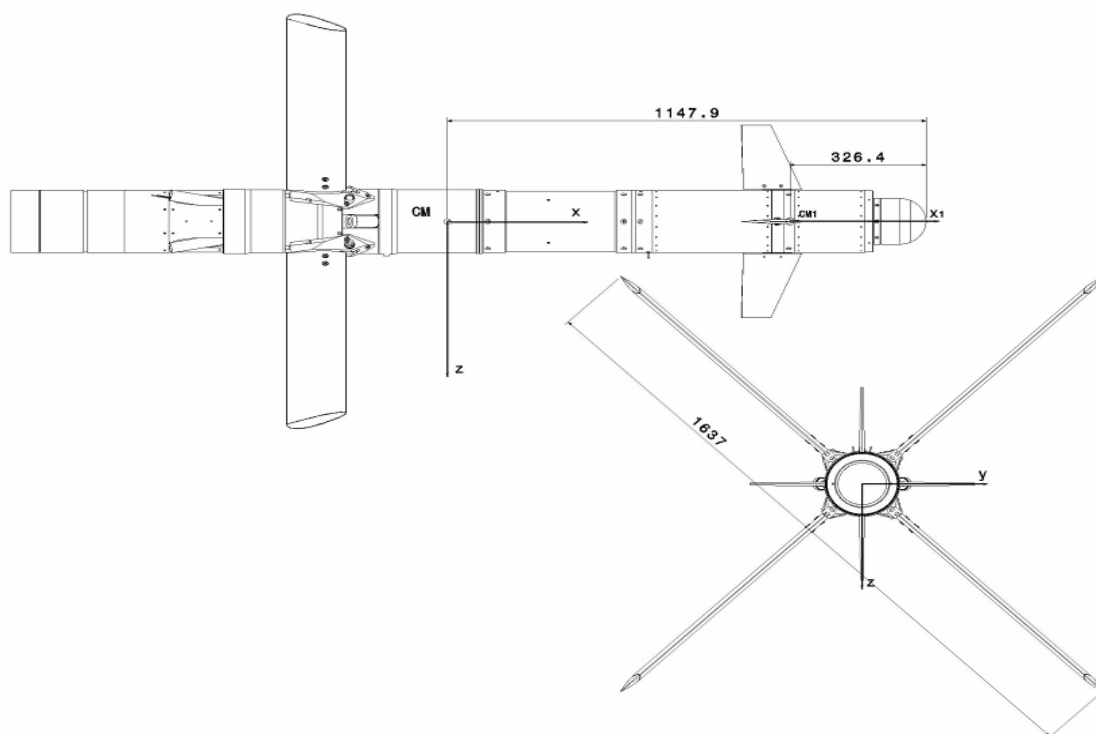
Slika 1-16 Aerodinamički derivativi momenta propinjanja po napadnom uglu i otklonu upravljačkih površina



Slika 1-17 Prigušni aerodinamički derivativi

1.2 Jednačine kretanja rakete

Kretanje rakete će biti razmatrano kao model kretanja krutog tela sa 7 stepeni slobode, 3 translacije i 4 rotacije od toga dve oko Ox ose, obzirom na sekcije odvojene ležajem, [7]. Jednačine kretanja biće predstavljene u vezanom koordinatnom sistemu proširenom za još jednu Ox_1 osu, koja se koristi za opisivanje valjanja prednje sekcije (Slika 1-18).



Slika 1-18 Raketa sa usvojenim koordinatnim sistemom

Pretpostavka pod kojom su jednačine izvedene podrazumeva da asimetrija tela rakete, u smislu valjanja, utiče na ugaonu brzinu valjanja p a efekat se prenosi na prednju sekciju putem viskoznog trenja u ležaju. Matematički rečeno, usvojeno je da važe sledeće relacije:

$$\begin{aligned} i \times j &= k & i_1 \times j &= k \\ k \times i &= j & k \times i_1 &= j \\ j \times k &= i & i \times i_1 &= 0 \end{aligned} \quad 1-1$$

Takođe treba naglasiti da se obzirom na vreme trajanja leta i maksimalan domet rakete zanemaruje uticaj rotacije Zemlje.

Za opisivanje translatornog kretanja se koristi II Njutnov zakon:

$$m \left(\frac{d\mathbf{V}_b}{dt} + \boldsymbol{\omega}_b \times \mathbf{V}_b \right) = \mathbf{F}_b + \mathbf{F}_m + \mathbf{R}^A + \mathbf{G} + \mathbf{F}^L \quad 1-2$$

gde su:

$$\mathbf{V}_b = \begin{bmatrix} U \\ v \\ w \end{bmatrix} \text{ - vektor brzine u vezanom koordinatnom sistemu}$$

$$\boldsymbol{\omega}_b = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \text{ - vektor ugaonih brzina vezanog koordinatnog sistema}$$

$\mathbf{F}_b$ - sila potiska buster motora

$\mathbf{F}_m$ - sila potiska marš motora

$\mathbf{R}^A$ - vektor aerodinamičke sile

$\mathbf{G}$ - vektor gravitacione sile

$\mathbf{F}^L$ - vektor otpora oslonaca pri kretanju na lanseru

$$\boldsymbol{\omega}_{en}^n = \begin{pmatrix} \dot{\lambda} \cos \varphi & -\dot{\varphi} & -\dot{\lambda} \sin \varphi \end{pmatrix}^T \quad 1-3$$

gde su:

φ - geografska širina

λ - geografska dužina

$$\dot{\varphi} = \frac{V_N}{(M+h)} \text{ i } \dot{\lambda} = \frac{V_E}{(N+h)} \cos \varphi$$

$$\boldsymbol{\omega}_{en}^n = \begin{bmatrix} \frac{V_E}{N+h} \\ \frac{-V_N}{M+h} \\ \frac{-V_E \tan \varphi}{N+h} \end{bmatrix} \quad 1-4$$

gde su:

V_E, V_N - brzine rakete u navigacionom koordinatnom sistemu u smeru istoka i severa,

respektivno

h - visina u odnosu na referentni Zemljin elipsoid

M, N - radijusi meridijana i osnovne paralele

$$N = \frac{a}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{0.5}}$$

$$M = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{1.5}}$$

gde su:

a - prečnik glavne ose referentnog Zemljinog elipsoida

e - linearni ekscentricitet referentnog Zemljinog elipsoida

Za opisivanje rotacionog kretanja koristi se Ojlerov zakon sa 4 stepena slobode:

$$\mathbf{I} \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{I} \boldsymbol{\omega} = \mathbf{M}^{F_b} + \mathbf{M}^{F_m} + \mathbf{M}^{R_A} + \mathbf{M}^{F_L} + \mathbf{M}^v \quad 1-5$$

gde su:

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p \\ q \\ r \end{bmatrix} \quad - \text{vektor ugaonih brzina}$$

$\mathbf{M}^{F_b}$ - poremećajni moment od buster motora

$\mathbf{M}^{F_m}$ - poremećajni moment od marš motora

$\mathbf{M}^{R_A}$ - aerodinamički moment

$\mathbf{M}^{F_L}$ - moment otpora oslonaca pri kretanju na lanseru

$\mathbf{M}^v$ - prigušni moment usled viskoznog trenja u ležaju

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_{x_1 x_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ 0 & I_{xy} & I_{yy} & I_{yz} \\ 0 & I_{xz} & I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix} \quad - \text{tenzor inercije}$$

Kako bi se izbegli mogući numerički problemi za izračunavanje ugaonih položaja projektila koristiće se kvaternioni pa je neophodno definisati kinematsku jednačinu kvaterniona:

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_0 \\ \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \dot{e}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -p & -q & -r \\ p & 0 & r & -q \\ q & -r & 0 & p \\ r & q & -p & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_0 \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} \quad 1-6$$

Na osnovu izračunatog kvaterniona moguće je odrediti matricu transformacije iz vezanog u navigacioni koordinatni sistem.

$$\mathbf{C}_n^b = \begin{bmatrix} (e_0^2 + e_1^2 - e_2^2 - e_3^2) & 2(e_1e_2 + e_0e_3) & 2(e_1e_3 - e_0e_2) \\ 2(e_1e_2 - e_0e_3) & (e_0^2 - e_1^2 + e_2^2 - e_3^2) & 2(e_2e_3 + e_0e_1) \\ 2(e_1e_3 + e_0e_2) & 2(e_2e_3 - e_0e_1) & (e_0^2 - e_1^2 - e_2^2 + e_3^2) \end{bmatrix} \quad 1-7$$

Sada je moguće izračunati i brzinu u navigacionom koordinatnom sistemu i vektor položaja u navigacionom koordinatnom sistemu:

$$\mathbf{V}^n = \begin{bmatrix} V_N \\ V_E \\ V_D \end{bmatrix} = (\mathbf{C}_n^b)^T \mathbf{V}^b \quad 1-8$$

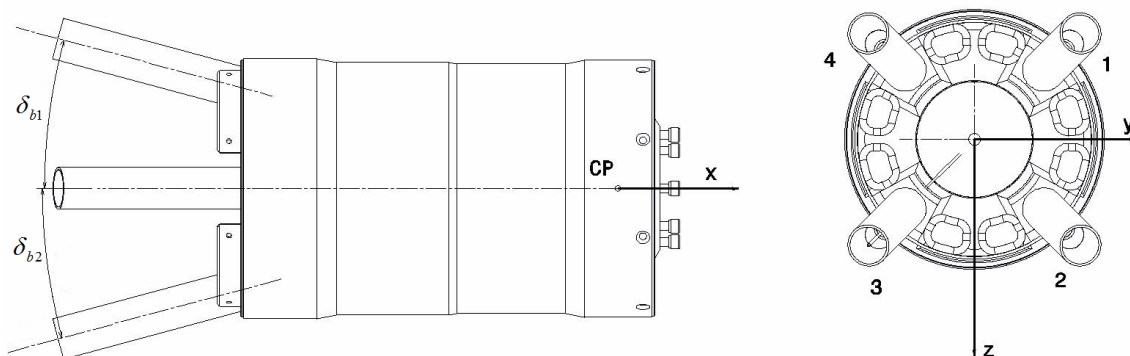
$$\mathbf{X}^n = \int \mathbf{V}^n dt$$

Uglovi azimuta ψ , elevacije θ i valjanja oko obe posmatrane ose (ϕ_1 ugao valjanja prednje sekcije, ϕ ugao valjanja zadnje sekcije), mogu se odrediti iz koeficijenata u matrici transformacije iz navigacionog u vezani koordinatni sistem.

$$\begin{aligned} \psi &= \arctan\left(\frac{C_{12}}{C_{11}}\right), & \psi &\in [-\pi, \pi] \\ \theta &= -\arcsin(C_{13}), & \theta &\in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ \phi &= \arctan\left(\frac{C_{23}}{C_{33}}\right), & \phi &\in [-\pi, \pi] \\ \phi_1 &= \int p_1 dt, & \phi_1 &\in [0, 2k\pi] \end{aligned} \quad 1-9$$

1.3 Matematički model potiska buster motora i poremećajnih momenata

Buster motor je konstruisan kao motor sa četiri mlaznika pod uglom od 15° u odnosu na Ox osu. Mlaznici su u X konfiguraciji. Na prikazu Slika 1-19 definisani su uglovi ugradnje mlaznika buster motora potrebni za analizu.



Slika 1-19 Buster motor u projekcijama

Za modeliranje buster motora usvojene su sledeće pretpostavke:

- Centar potiska buster motora leži na Ox osi
- Intenzitet sile potiska bustera je $F_{bx} = F_{bx0} + (p_{iz} - p_{atm})A_{eb}$
- Potisak svakog pojedinačnog mlaznika je $F_{bi} = \frac{F_{bx}}{4\cos(15^\circ)}$

gde su:

F_{bx0} - sila potiska bustera, teorijska kriva potiska u vremenu, Slika 1-2

$p_{iz} = 10^5 Pa$ - izlazni pritisak

p_{atm} - atmosferski pritisak

A_{eb} - efektivni poprečni presek mlaznika buster motora

Na osnovu prikazane geometrije (Slika 1-19) mogu se odrediti projekcije sile potiska i poremećajnih momenata. Projekcije pojedinačnih sila na ose vezanog koordinatnog sistema su:

$$\begin{aligned}
F_{bx_i} &= F_{bi} \cos(\delta_{bi}) \\
F_{by_i} &= F_{bi} \sin(\delta_{bi}) \cos(45^\circ) \\
F_{bz_i} &= F_{bi} \sin(\delta_{bi}) \sin(45^\circ)
\end{aligned}
\tag{1-10}$$

Projekcije ukupne sile buster motora na ose vezanog koordinatnog sistema:

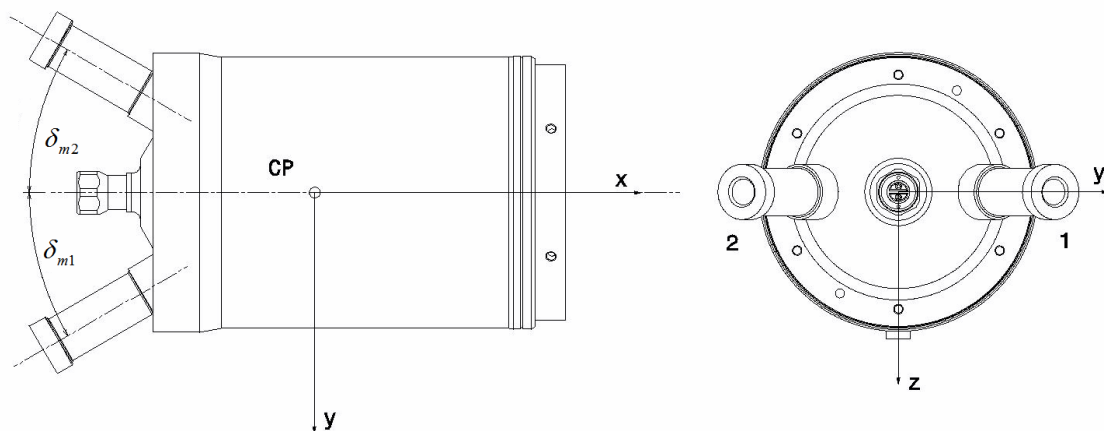
$$\begin{aligned}
F_{bx} &= \sum_{i=1}^4 F_{bx_i} \\
F_{by} &= -F_{by_1} - F_{by_2} + F_{by_3} + F_{by_4} \\
F_{bz} &= F_{bz_1} - F_{bz_2} + F_{bz_3} - F_{bz_4}
\end{aligned}
\tag{1-11}$$

Projekcije poremećajnog momenta na ose proširenog vezanog koordinatnog sistema:

$$\begin{aligned}
L_1^{F_b} &= 0 \\
L_b^{F_b} &= 0 \\
M^{F_b} &= F_{bz} (x_b - x_{CM}) \\
N^{F_b} &= -F_{by} (x_b - x_{CM})
\end{aligned}
\tag{1-12}$$

1.4 Matematički model potiska marš motora i poremećajnih momenata

Sa stanovišta konstruktivnih zahteva marš motor je konfigurisan tako da ima dva horizontalna mlaznika pod uglom od 30° u odnosu na Ox osu. Mlaznici praktično leže na Oy osi. Na prikazu Slika 1-20 definisani su uglovi ugradnje mlaznika marš motora potrebni za analizu.



Slika 1-20 Marš motor u projekcijama

Za modeliranje marš motora usvojene su sledeće pretpostavke:

- Centar potiska marš motora leži na Ox osi
- Intenzitet sile potiska marš motora je $F_{mx} = F_{mx0} + (p_{iz} - p_{atm})A_{em}$
- Potisak svakog pojedinačnog mlaznika je $F_{mi} = \frac{F_{mx}}{2\cos(30^\circ)}$

gde su:

F_{mx0} - sila potiska marš motora, teorijska kriva potiska u vremenu, Slika 1-3

A_{em} - efektivni poprečni presek mlaznika marš motora

Na osnovu definisane geometrije (Slika 1-20) mogu se odrediti projekcije sile potiska i poremećajnih momenata. Projekcije pojedinačnih sila na ose vezanog koordinatnog sistema su:

$$\begin{aligned} F_{mx_i} &= F_{mi} \cos(\delta_{mi}) \\ F_{my_i} &= F_{mi} \sin(\delta_{mi}) \\ F_{mz_i} &= 0 \end{aligned} \quad \mathbf{1-13}$$

Projekcije ukupne sile marš motora na ose vezanog koordinatnog sistema su:

$$\begin{aligned} F_{mx} &= \sum_{i=1}^2 F_{mx_i} \\ F_{my} &= -F_{my_1} + F_{my_2} \\ F_{mz} &= 0 \end{aligned} \quad \mathbf{1-14}$$

Projekcije poremećajnog momenta na ose proširenog vezanog koordinatnog sistema su:

$$\begin{aligned} L_1^{F_m} &= 0 \\ L^{F_m} &= 0 \\ M^{F_m} &= 0 \\ N^{F_m} &= -F_{my}(x_m - x_{CM}) \end{aligned} \quad \mathbf{1-15}$$

1.5 Matematički model aerodinamičkih sila i momenata

U ovom poglavlju biće definisane aerodinamičke sile i momenti u proširenom vezanom koordinatnom sistemu. Obzirom da je i upravljanje raketom aerodinamičkog tipa, i upravljačke sile i momenti će biti uključeni u ovaj model. Treba naglasiti da se upravljanje uglom valjanja odnosi samo na prednju sekciju, dakle preko momenta valjanja oko ose Ox_1 , a uticaj momenta se prenosi na zadnju sekciju putem viskoznog trenja u ležaju. Za standard atmosfere korišćen je standard COESA 1976, čiji su osnovni izvodi dati u Prilog 2. Standardna atmosfera.

Kao što je poznato aerodinamičke sile i momenti se mogu odrediti pomoću koeficijenata aerodinamičkih sila i momenata:

$$\mathbf{R}^A = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_x \\ C_y \\ C_z \end{bmatrix} q S_r$$

$$\mathbf{M}^{R_A} = \begin{bmatrix} L_1 \\ L \\ M \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{l_1} \\ C_l \\ C_m \\ C_n \end{bmatrix} q S_r d$$

1-16

gde su:

$$q = \frac{\rho V^2}{2} \text{ - dinamički pritisak}$$

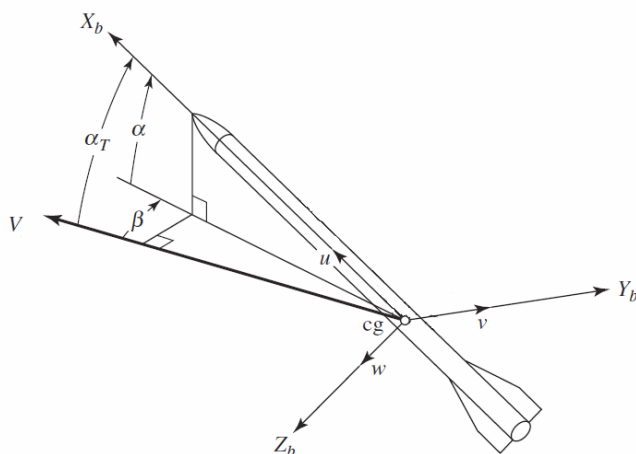
$$S_r = \frac{d^2 \pi}{4} \text{ - referentna površina}$$

d - referentna dužina, kalibar rakete

$$\begin{bmatrix} C_x \\ C_y \\ C_z \end{bmatrix} \text{ - aerodinamički koeficijenti sila po osama } Ox, Oy \text{ i } Oz$$

$$\begin{bmatrix} C_{l_1} \\ C_l \\ C_m \\ C_n \end{bmatrix} \text{ - aerodinamički koeficijenti momenata po osama } Ox_1, Ox, Oy \text{ i } Oz$$

Aerodinamički koeficijenti se mogu dobiti u funkciji aerodinamičkih derivativa. U ovom razmatranju nisu uključeni nelinearni aerodinamički derivativi napadnih uglova i otklona upravljačkih površina. Pre definisanja koeficijenata potrebno je definisati napadne uglove i efektivne otklone upravljačkih površina.



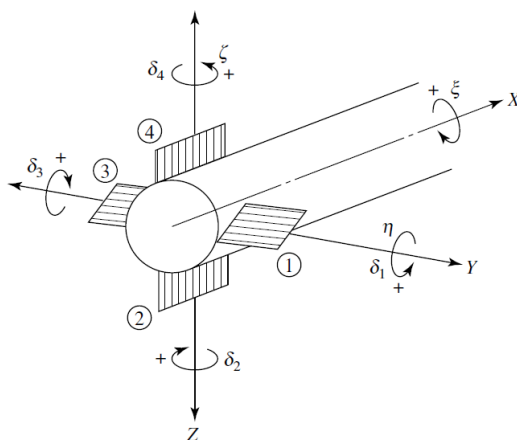
Slika 1-21 Napadni uglovi i komponente brzine rakete, [8]

Na osnovu prikaza Slika 1-21 Napadni uglovi i komponente brzine rakete, [8] sledi:

$$\alpha = \arctan\left(\frac{w}{U}\right) - \text{napadni ugao}$$

$$\beta = \arcsin\left(\frac{v}{V}\right) - \text{ugao klizanja}$$

$$V = \sqrt{U^2 + v^2 + w^2} - \text{intenzitet vektora brzine rakete}$$



Slika 1-22 Definicija otklona upravljačkih površina, [8]

Na osnovu prikaza Slika 1-22 Definicija otklona upravljačkih površina, [8] sledi:
Efektivni otklon upravljačkih površina za komandu propinjanja

$$\eta = \frac{1}{2}(\delta_1 - \delta_3)$$

Efektivni otklon upravljačkih površina za komandu skretanja

$$\zeta = \frac{1}{2}(\delta_2 - \delta_4)$$

Efektivni otklon upravljačkih površina za komandu valjanja

$$\xi = \frac{1}{2}(\delta_2 + \delta_4)$$

Na osnovu prethodno definisanih veličina moguće je definisati aerodinamičke koeficijente sila:

$$\begin{aligned} C_X &= C_{xoff} \\ C_Y &= C_{z\alpha} \sin \beta - C_{z\eta} \zeta + C_{zq} \frac{rd}{V} \\ C_Z &= C_{z\alpha} \sin \alpha + C_{z\eta} \eta + C_{zq} \frac{qd}{V} \end{aligned} \quad 1-17$$

I momenata:

$$\begin{aligned} C_{l_1} &= C_{l_1\xi} \xi + C_{l_1p} \frac{p_1 d}{V} \\ C_l &= C_{l_0} \delta_0 + C_{lp} \frac{pd}{V} + C_{l\alpha\xi} (\eta \sin \alpha + \zeta \sin \beta) + C_{l\xi} \xi \\ C_m &= C_{m\alpha} \sin \alpha + C_{m\eta} \eta + C_{mq} \frac{qd}{V} + C_{mp\alpha} \frac{pd}{V} \sin \alpha \\ C_n &= -C_{m\alpha} \sin \beta + C_{m\eta} \zeta + C_{mq} \frac{rd}{V} - C_{mp\alpha} \frac{pd}{V} \sin \beta \end{aligned} \quad 1-18$$

gde su:

$C_{z\alpha}$ - derivativ normalne sile u funkciji napadnog ugla

$C_{z\eta}$ - derivativ normalne sile u funkciji efektivnog otklona upravljačkih površina po propinjanju ili skretanju

C_{zq} - derivativ normalne sile kao posledica ugaone brzine propinjanja ili skretanja

$C_{l_1\xi}$ - derivativ valjanja prednje sekcije od efektivnog otklona valjanja

$C_{l\xi}$ - derivativ valjanja zadnje sekcije od efektivnog otklona valjanja

C_{l_p} - prigušni derivativ valjanja prednje sekcije

C_{l_0} - derivativ valjanja zadnje sekcije od uticaja ugradnje stabilizatora

C_{l_p} - prigušni derivativ valjanja zadnje sekcije

$C_{l_{\alpha\zeta}}$ - derivativ valjanja od skretanja ili propinjanja za zadnju sekciju

$C_{m\alpha}$ - derivativ statičke stabilnosti

$C_{m\eta}$ - derivativ upravljivosti

C_{mq} - prigušni derivativ momenta skretanja ili propinjanja

$C_{m_{p\alpha}}$ - derivativ Magnusovog momenta

Treba još uzeti u obzir da su kao ulazni podaci dati derivativi momenata sračunati za referentnu tačku, pa se radi korekcije koriste sledeće relacije:

$$\Delta x = x_{Cr} - x_{CM}$$
$$\Delta \bar{x} = \frac{\Delta x}{d}$$

1-19

$$C_{m\alpha} = C_{m\alpha 0} + C_{z\alpha} \Delta \bar{x}$$
$$C_{m\eta} = C_{m\eta 0} + C_{z\eta} \Delta \bar{x}$$
$$C_{mq} = C_{mq 0} + C_{m\alpha 0} \Delta \bar{x} + C_{z\alpha} \Delta \bar{x}^2$$

1.6 Matematički model gravitacione sile

Gravitaciona sila određena je modelom gravitacionog polja Zemlje. Kao što je ranije pomenuto za standard Zemlje je usvojen WGS84 čiji su osnovni izvodi dati u Prilog 3. Geografski standard Zemlje . Obzirom da se uticaj rotacije Zemlje ne razmatra, gravitaciono ubrzanje će imati samo jednu projekciju u navigacionom koordinatnom sistemu pa će tako i gravitaciona sila biti određena sledećim vektorom:

$$\mathbf{G}^n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{G}^b = \mathbf{C}_n^b \mathbf{G}^n$$

1-20

1.7 Matematički model sila i momenata pri kretanju rakete na lanseru

Raketa koja se razmatra ima dva klizača, u položajima datim na prikazu Slika 1-23. Obzirom na postojanje dva klizača, kretanje po lanseru će biti podeljeno u dve faze:

- kretanje oba klizača po lanseru

$$s \leq L_l - L_r + x_A$$

- kretanje nakon izlaska prvog klizača iz lansirne šine.

$$s > L_l - L_r + x_A \quad \wedge \quad s < L_l - L_r + x_B$$

gde su:

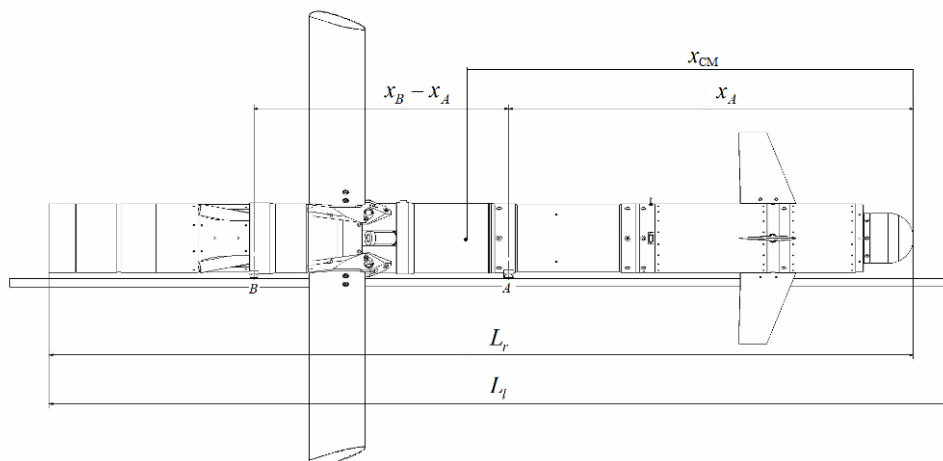
s - pređeni put rakete

L_l - dužina lansera od baze rakete

L_r - dužina rakete

x_A - položaj prednjeg klizača meren od nosa rakete

x_B - položaj zadnjeg klizača meren od nosa rakete



Slika 1-23 Položaj klizača na raketi

Treba još naglasiti da kretanje počinje tek od momenta kada je komponenta aksijalne sile veća od sile brave, koja je određena tako da pri svim uglovima elevacije ne dozvoli kretanje rakete pre starta buster motora:

$$F_{bx} + F_{mx} - mg \sin(El_0) > 400N \quad 1-21$$

Iz uslova ravnoteže, pod pretpostavkom da se mogu zanemariti aerodinamičke sile, obzirom na malu brzinu, pojedinačno su izračunati otpori oslonaca i njihovi momenti. Ukupna sila otpora oslonaca i moment dati su izrazom:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^L &= \mathbf{F}^{kA} + \mathbf{F}^{kB} \\ \mathbf{M}^{\mathbf{F}^L} &= \mathbf{M}^{\mathbf{F}^{kA}} + \mathbf{M}^{\mathbf{F}^{kB}} \end{aligned} \quad 1-22$$

Za slučaj kretanja oba klizača po lanseru važe sledeće relacije:

$$\begin{aligned} F_{kAx} &= F_{kBx} = 0 \\ F_{kAy} &= \frac{N^{F_b} + N^{F_m} + (F_{by} + F_{my})(x_B - x_{CM})}{x_B - x_A} \\ F_{kBy} &= \frac{-N^{F_b} - N^{F_m} + (F_{by} + F_{my})(x_{CM} - x_A)}{x_B - x_A} \\ F_{kAz} &= \frac{-M^{F_b} - M^{F_m} + (F_{bz} + F_{mz} + mg \cos(El_0))(x_B - x_{CM})}{x_B - x_A} \\ F_{kBz} &= \frac{M^{F_b} + M^{F_m} + (F_{bz} + F_{mz} + mg \cos(El_0))(x_{CM} - x_A)}{x_B - x_A} \\ M^{kA} &= F_{kAz}(x_{CM} - x_A) \\ M^{kB} &= -F_{kBz}(x_B - x_{CM}) \\ N^{kA} &= -F_{kAy}(x_{CM} - x_A) \\ N^{kB} &= F_{kBy}(x_B - x_{CM}) \end{aligned} \quad 1-23$$

Za slučaj kretanja zadnjeg klizača po lanseru važe sledeće relacije:

$$\begin{aligned} F_{kAx} &= F_{kBx} = 0 \\ F_{kAy} &= F_{kAz} = 0 \\ F_{kBy} &= F_{by} + F_{my} \\ F_{kBz} &= F_{bz} + F_{mz} + mg \cos(El_0) \\ M^{kA} &= N^{kA} = 0 \\ M^{kB} &= -F_{kBz}(x_B - x_{CM}) \\ N^{kB} &= F_{kBy}(x_B - x_{CM}) \end{aligned} \quad 1-24$$

1.8 Matematički model uticaja viskoznog trenja u ležaju

Trenje u ležaju se može podeliti na statičko i viskozno trenje, [9]. Statičko trenje ima manji uticaj i u ovoj analizi će biti zanemareno. Viskozno trenje koje se javlja u ležaju između sekcija ima prigušujući efekat na ugaonu brzinu valjanja, pa kao takvo dodatno utiče i na dinamiku autopilota valjanja.

Ovo trenje se manifestuje kao moment oko Ox ose pa važe sledeće relacije:

$$\begin{aligned}L_1^v &= v(p - p_1) \\L^v &= v(p_1 - p) \\M^v &= N^v = 0\end{aligned}\tag{1-25}$$

gde je:

v - koeficijent viskoznog prigušenja u ležaju

1.9 Matematički model poremećaja usled otvaranja krila

Poremećaj usled otvaranja stabilizatora, Slika 1-24, je poremećaj koji je najteže egzaktno matematički predstaviti. Ne uzimajući u obzir deformacije u materijalu, poremećaj koji utiče na stabilnost autopilota i zakona vođenja može se objasniti pomoću kinematskih zavisnosti. Pod pretpostavkom da na svako pojedinačno krilo u centru mase deluje inercijalna sila, kao posledica kretanja rakete, i gravitaciono ubrzanje moguće je odrediti vreme potrebno da se krilo otvori, odnosno zarotira za 90° . Iz graničnog uslova moguće je odrediti kinetičku energiju koja se troši na zabravljivanje krila i odatle proceniti silu udara krila o oplatu rakete. Još jedna od pretpostavki na kojoj se model otvaranja krila zasniva je da se u trenutku otvaranja krila može zanemariti ugao valjanja zadnje sekcije.



Slika 1-24 Otvaranje krila, letni test

Na osnovu uvedenih pretpostavki važi sledeće:

$$\begin{aligned}\dot{\omega}_{ki=1,2} &= \frac{a_x}{R_k \sin(\theta_{k0} + \theta_{ki})} + \frac{g \cos(\theta) \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{R_k \cos(\theta_{k0} + \theta_{ki})} \\ \dot{\omega}_{ki=1,2} &= \frac{a_x}{R_k \sin(\theta_{k0} + \theta_{ki})} - \frac{g \cos(\theta) \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{R_k \cos(\theta_{k0} + \theta_{ki})} \\ R_k &= \sqrt{b_k^2 + l_k^2} \\ \theta_{k0} &= \arctan\left(\frac{b_k}{l_k}\right)\end{aligned}\tag{1-26}$$

gde su:

b_k - tetiva krila

l_k - dužina pojedinačnog krila

Granični uslov za svako krilo je:

$$\begin{aligned}\theta_{kiu} &= \int \left(\int \omega_{ki} dt \right) dt = \frac{\pi}{2} \\ \Rightarrow \omega_{kiu}\end{aligned}\tag{1-27}$$

Obzirom da se i a_x menja u vremenu, analitičko rešenje je nemoguće izvesti, međutim u simulaciji leta, gde se jednačine rešavaju numerički, moguće je doći do trenutka otvaranja krila i relativne ugaone brzine krila u tom trenutku. Iz toga je sada moguće izračunati i kinetičku energiju koja se troši na zabravljivanje i silu udara:

$$\begin{aligned}E_{ki} &= \frac{1}{2} J_k \omega_{kiu}^2 = F_i s_k \\ \Rightarrow \\ F_i &= \frac{J_k \omega_{kiu}^2}{2 s_k}\end{aligned}\tag{1-28}$$

gde su:

F_i - sila udara krila i u trenutku zabravljivanja

s_k - zaustavni hod krila pri zabravljivanju

Treba napomenuti da su izračunate sile samo sile u samom trenutku udara i da će se prelazni proces predstaviti prigušenom sinusoidom u vremenskom intervalu od 0.25s na osnovu merenja ubrzanja i ugaonih brzina iz letnih testova koji su rađeni.

Na osnovu prethodnog moguće je odrediti projekcije sila i momenata u vremenskom intervalu dejstva poremećaja koji deluju u centru mase rakete:

$$\begin{aligned}
 F_{Kx} &= 0 \\
 F_{Ky} &= (-F_1 + F_2 + F_3 - F_4) \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \\
 F_{Kz} &= (-F_1 + F_2 + F_3 - F_4) \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\
 L_1^K &= L^K = 0 \\
 M^K &= (x_K - x_{CM}) F_{Kz} \\
 N^K &= -(x_K - x_{CM}) F_{Ky}
 \end{aligned}
 \tag{1-29}$$

1.10 Matematički model poremećaja usled vetra

Svi poremećaji do sada navedeni mogu se smatrati unutrašnjim poremećajima, odnosno poremećajima usled nesavršenosti konstrukcije. Uticaj vetra je spoljni poremećaj i njegov efekat se ogleda u poremećaju na napadnim uglovima rakete. Obzirom na dužinu rada motora marševske faze razmatraće se vetar kao vetar u aktivnoj fazi. Na prikazu Slika 1-25 Uticaj vetra u aktivnoj fazi, date su komponente vetra u odnosu na brzinu rakete.



Slika 1-25 Uticaj vetra u aktivnoj fazi

Vetar je obično određen po intenzitetu, pravcu i smeru u funkciji visine. Vetar je najčešće poznat u navigacionom koordinatnom sistemu. Da bi se izračunali napadni uglovi kao posledica vetra potrebno je izvršiti transformaciju vetra iz navigacionog u vezani koordinatni sistem:

$$\begin{aligned} \mathbf{W}^b &= \mathbf{C}_n^b \mathbf{W}^n \\ \mathbf{V}^b &= \mathbf{V}_K^b - \mathbf{W}^b \end{aligned} \quad \mathbf{1-30}$$

Sada je moguće odrediti priraštaje napadnih uglova koji su posledica vetra:

$$\begin{aligned} \alpha_w &= \arctan\left(\frac{W_{bz}}{U_K - W_{bx}}\right) \\ \beta_w &= \arcsin\left(\frac{W_{by}}{V}\right) \end{aligned} \quad \mathbf{1-31}$$

2 Analiza dinamičkih osobina rakete

U prethodnom poglavlju definisan je matematički model kretanja rakete i poremećaja koji na nju deluju koji će biti korišćen kao 7DOF simulacija u SIMULINK -u radi kasnije analize uticaja pojedinih poremećaja i uticaja poremećaja na autopilot i zakon vođenja. Kako bi se izvršila sinteza autopilota potrebno je prethodno izanalizirati dinamičke karakteristike rakete kao objekta upravljanja. Iz prethodno navedenih razloga ovo poglavlje je posvećeno analizi dinamičkih osobina rakete, maksimalnih normalnih opterećenja pri maksimalnom otklonu upravljačkih površina i analizi međusobnog uticaja prednje i zadnje sekcije pri poremećajima koji utiču na valjanje, i pri komandi valjanja.

2.1 Linearizacija jednačina kretanja

Kako bi se od jednačina kretanja, prethodno definisanih, dobile linearizovane jednačine kretanja, [10],[11] potrebno je uvesti određene pretpostavke:

- Aksijalna brzina rakete je približno konstantna i jednaka brzini rakete. Pretpostavka o približno konstantnoj brzini rakete je u ovom konkretnom primeru, pretpostavka koja može da se smatra tačnom od kraja buster faze, obzirom da potisak marš motora ima funkciju da anulira dejstvo aerodinamičkog otpora.
- Pretpostavlja se da je raketa osnosimetrična, čime tenzor inercije

postaje dijagonalna matrica
$$\begin{bmatrix} I_{x_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_z \end{bmatrix}$$

- Posmatra se kretanje pod dejstvom aerodinamičkih sila i momenata, gravitacije i viskoznog trenja u ležaju između sekcija. Ostali uticaji smatraće se spoljnim poremećajima.

Na osnovu navedenih pretpostavki važi sledeće:

$$\begin{aligned}
 \Delta \dot{v} &= z_w \Delta v - (U + z_q) \Delta r - z_\eta \Delta \zeta + g \cos \theta \Delta \phi + y_{dist} \\
 \Delta \dot{w} &= z_w \Delta w + (U + z_q) \Delta q + z_\eta \Delta \eta - g \sin \theta \Delta \phi + z_{dist} \\
 \Delta \dot{p}_1 &= l_{\xi_1} \Delta \xi + l_{p_1} \Delta p_1 + l_{v_1} \Delta p - l_{v_1} \Delta p_1 \\
 \Delta \dot{p} &= l_p \Delta p - l_v \Delta p + l_v \Delta p_1 + l_{\delta_0} \Delta \delta_0 + l_\xi \Delta \xi \\
 \Delta \dot{q} &= m_w \Delta w + m_q \Delta q + m_\eta \Delta \eta + m_p \Delta r + m_{p_1} \Delta r \\
 \Delta \dot{r} &= -m_w \Delta v + m_q \Delta r + m_\eta \Delta \zeta - m_p \Delta q - m_{p_1} \Delta q
 \end{aligned}$$

2-1

gde su:

$$z_w = \frac{qS_r}{m} \cdot \frac{1}{V} \cdot C_{z\alpha} - \text{dinamički derivativ normalnog ubrzanja po napadnom uglu,}$$

$$z_q = \frac{qS_r}{m} \cdot \frac{d}{V} \cdot C_{zq} - \text{dinamički derivativ normalnog ubrzanja od ugaone brzine}$$

propinjanja

$$z_\eta = \frac{qS_r}{m} \cdot C_{z\eta} - \text{dinamički derivativ normalnog ubrzanja od komande propinjanja}$$

$$m_w = \frac{qS_r d}{I_z} \cdot \frac{1}{V} \cdot C_{m\alpha} - \text{dinamički derivativ propinjanja od promene napadnog ugla}$$

$$m_q = \frac{qS_r d}{I_z} \cdot \frac{d}{V} \cdot C_{mq} - \text{prigušni dinamički derivativ propinjanja}$$

$$m_\eta = \frac{qS_r d}{I_z} \cdot C_{m\eta} - \text{dinamički derivativ propinjanja od komande propinjanja}$$

$$m_p = \frac{I_x - I_z}{I_z} p - \text{dinamički derivativ propinjanja od ugaone brzine valjanja zadnje}$$

sekcije

$$m_{p_1} = \frac{I_{x_1} - I_z}{I_z} p_1 - \text{dinamički derivativ propinjanja od ugaone brzine valjanja prednje}$$

sekcije

$$l_{\xi_1} = \frac{qS_r d}{I_{x_1}} \cdot C_{l_{\xi_1}} - \text{dinamički derivativ valjanja prednje sekcije po komandi valjanja}$$

$$l_\xi = \frac{qS_r d}{I_x} \cdot C_{l_\xi} - \text{dinamički derivativ valjanja krilne sekcije po komandi valjanja}$$

$$l_{p_1} = \frac{qS_r d}{I_{x_1}} \cdot \frac{d}{V} \cdot C_{lp_1} - \text{prigušni dinamički derivativ valjanja prednje sekcije}$$

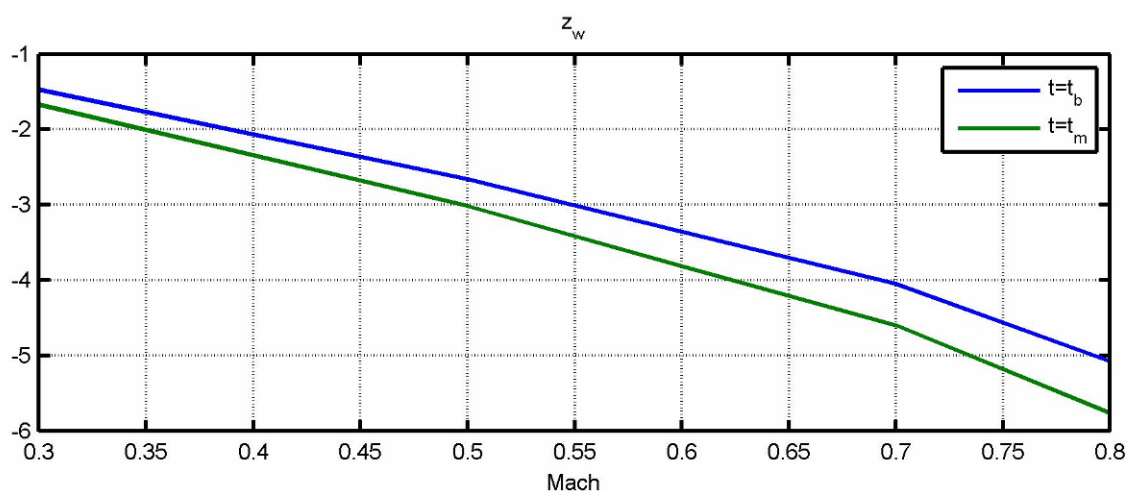
$$l_p = \frac{qS_r d}{I_x} \cdot \frac{d}{V} \cdot C_{lp} - \text{prigušni dinamički derivativ valjanja zadnje sekcije}$$

$$l_v = \frac{v}{I_x} - \text{prigušni dinamički derivativ valjanja zadnje sekcije od viskoznosti u ležaju}$$

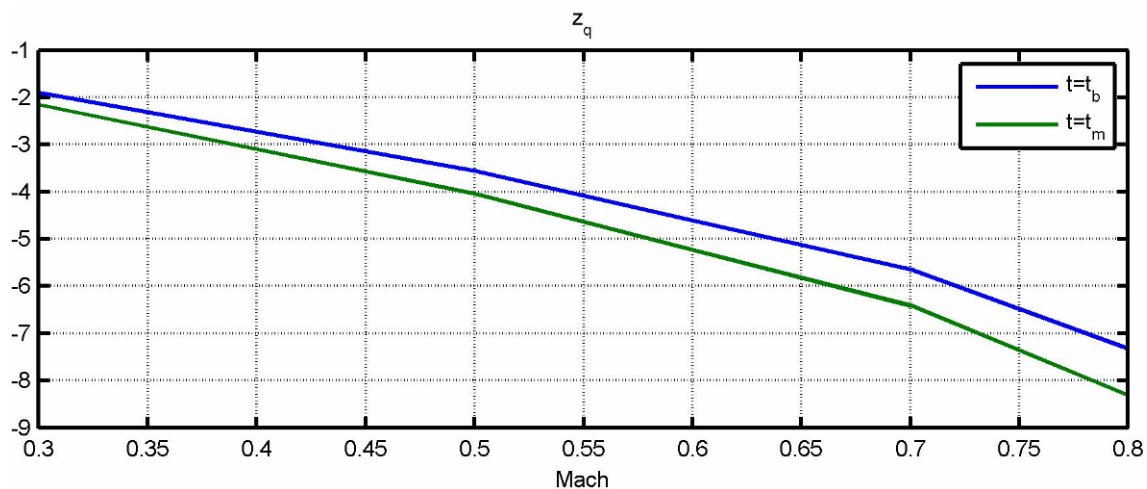
$$l_{v_1} = \frac{v}{I_{x_1}} - \text{prigušni dinamički derivativ valjanja prednje sekcije od viskoznosti u ležaju}$$

$$l_{\delta_0} = \frac{qS_r d}{I_x} \cdot C_{l_0} - \text{poremećajni dinamički derivativ usled greške ugradnje stabilizatora}$$

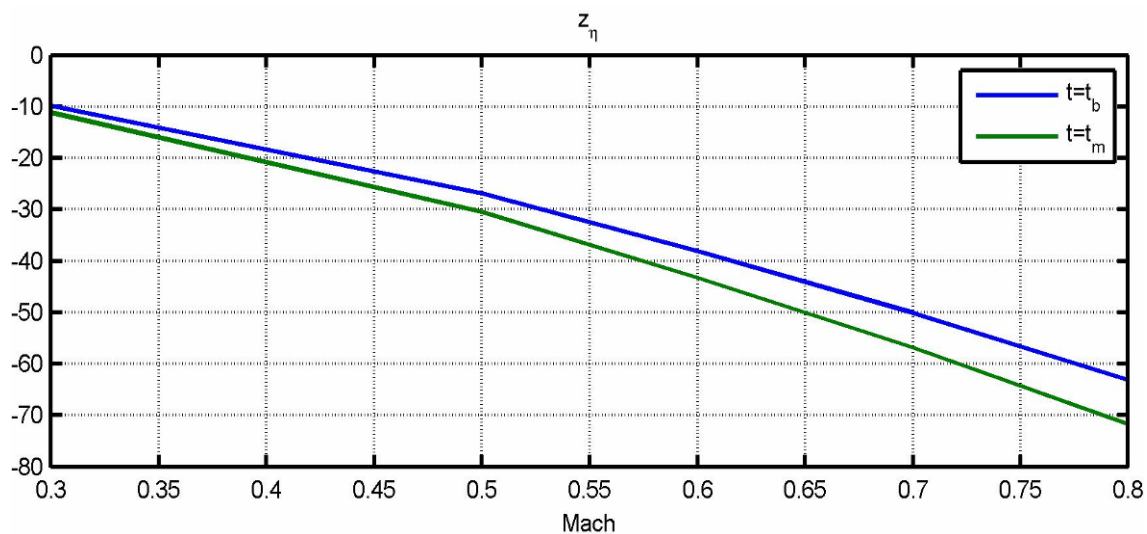
Derivativi m_p i m_{p_1} biće zanemareni u daljoj analizi kako bi bilo moguće zasebno posmatrati poprečno kretanje od valjanja. Njihov uticaj biće uključen u ukupnoj analizi na osnovu 7DOF simulacije. Promene dinamičkih derivativa u funkciji Mahovog broja za tačku kraja rada buster motora i tačku kraja rada marševskog motora prikazane su na dijagramima: Slika 2-1 Dinamički derivativ normalnog ubrzanja od promene napadnog ugla, Slika 2-2 Dinamički derivativ normalnog ubrzanja od ugaone brzine propinjanja, Slika 2-3 Dinamički derivativ normalnog ubrzanja po komandi propinjanja, Slika 2-4 Dinamički derivativ propinjanja od promene napadnog ugla, Slika 2-5 Dinamički derivativ propinjanja od komande propinjanja, Slika 2-6 Prigušni dinamički derivativ propinjanja, Slika 2-7 Dinamički derivativ valjanja prednje sekcije od komande valjanja, Slika 2-8 Dinamički derivativ valjanja krilne sekcije od komande valjanja, Slika 2-9 Poremećajni dinamički derivativ usled greške ugradnje stabilizatora, Slika 2-10 Prigušni dinamički derivativ valjanja zadnje sekcije i Slika 2-11 Prigušni dinamički derivativ valjanja prednje sekcije



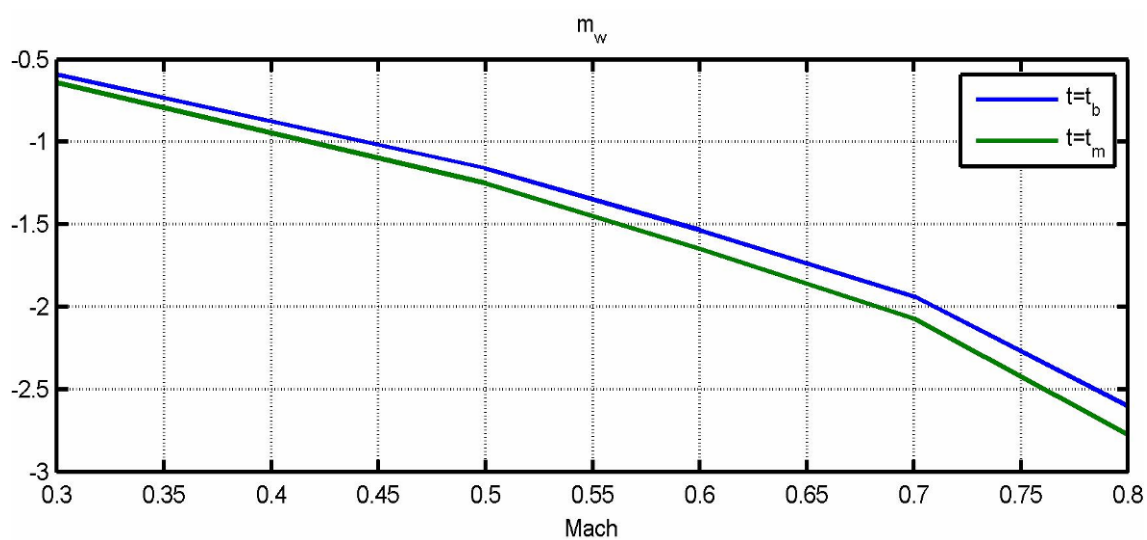
Slika 2-1 Dinamički derivativ normalnog ubrzanja od promene napadnog ugla



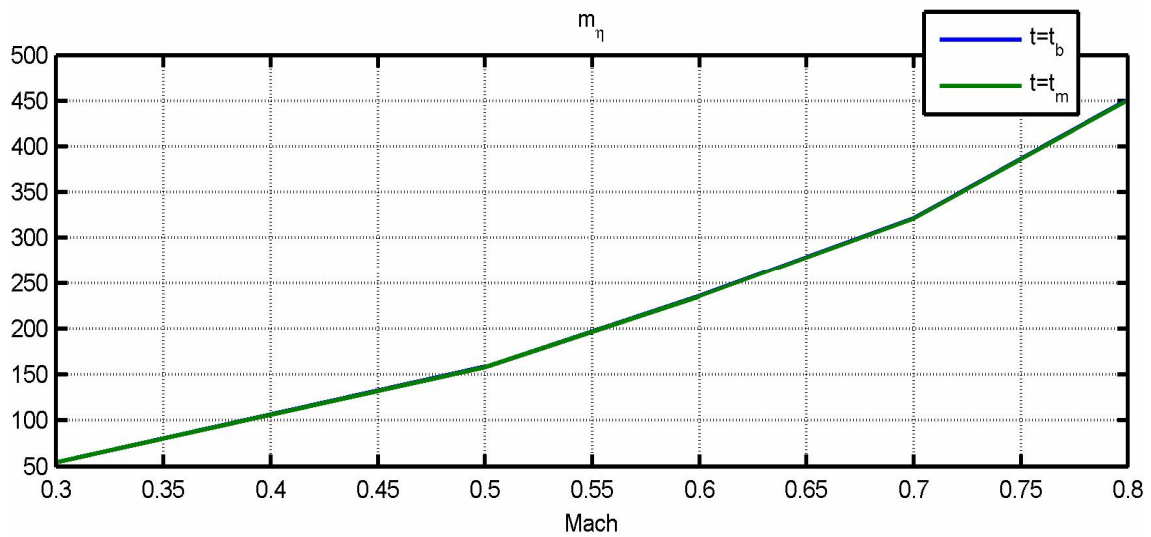
Slika 2-2 Dinamički derivativ normalnog ubrzanja od ugaone brzine propinjanja



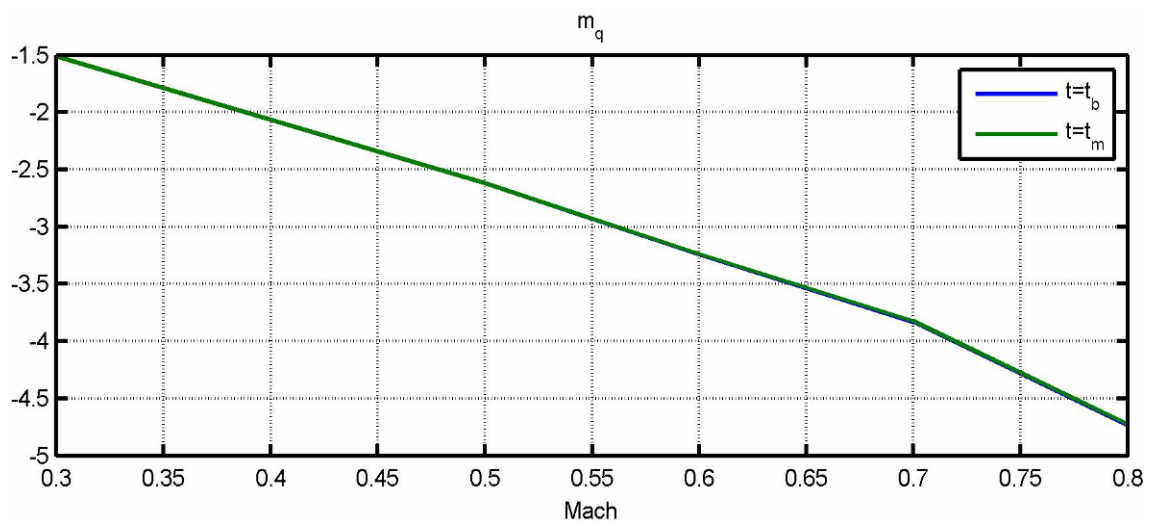
Slika 2-3 Dinamički derivativ normalnog ubrzanja po komandi propinjanja



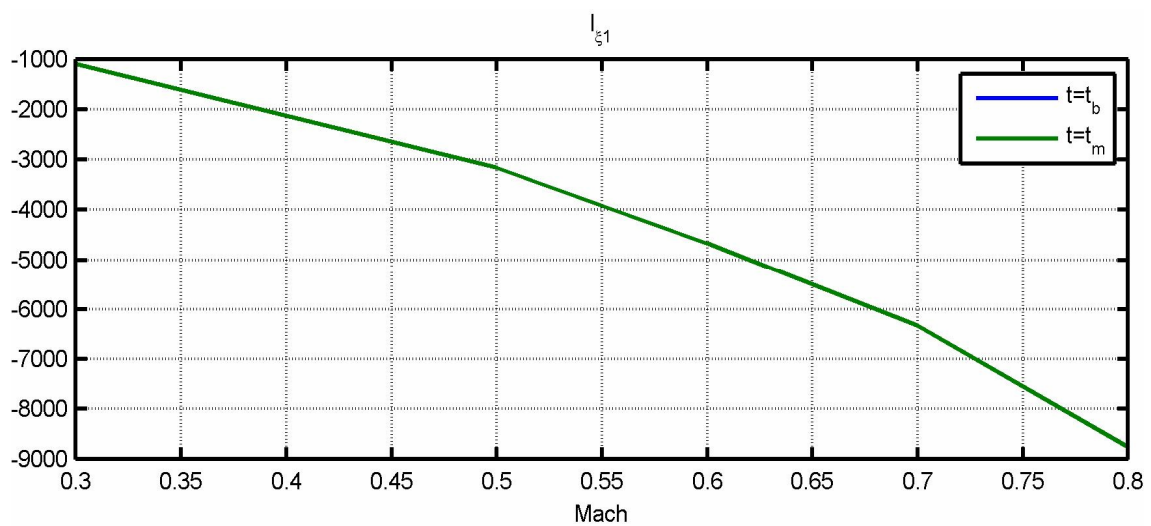
Slika 2-4 Dinamički derivativ propinjanja od promene napadnog ugla



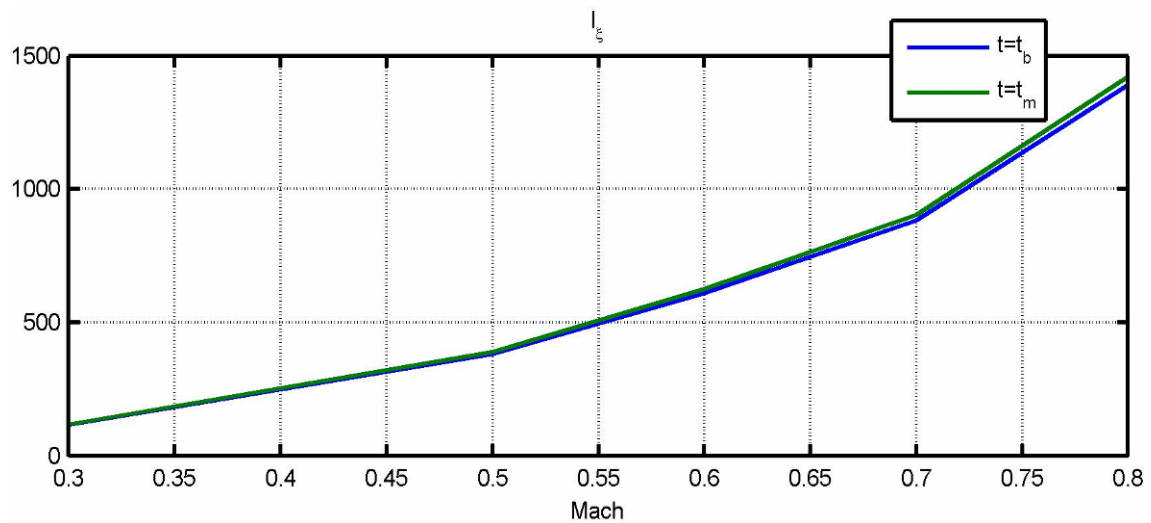
Slika 2-5 Dinamički derivativ propinjanja od komande propinjanja



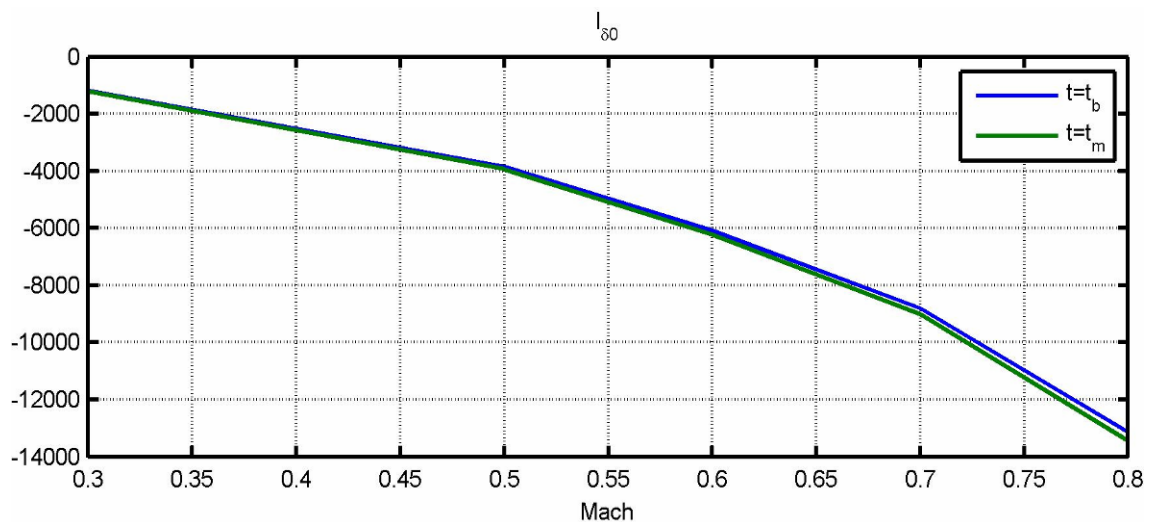
Slika 2-6 Prigušni dinamički derivativ propinjanja



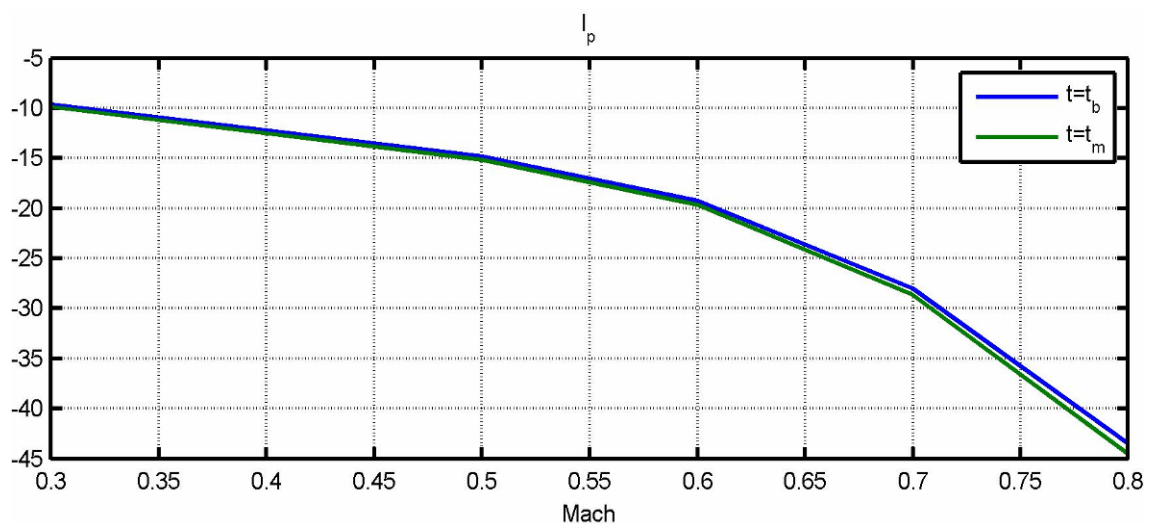
Slika 2-7 Dinamički derivativ valjanja prednje sekcije od komande valjanja



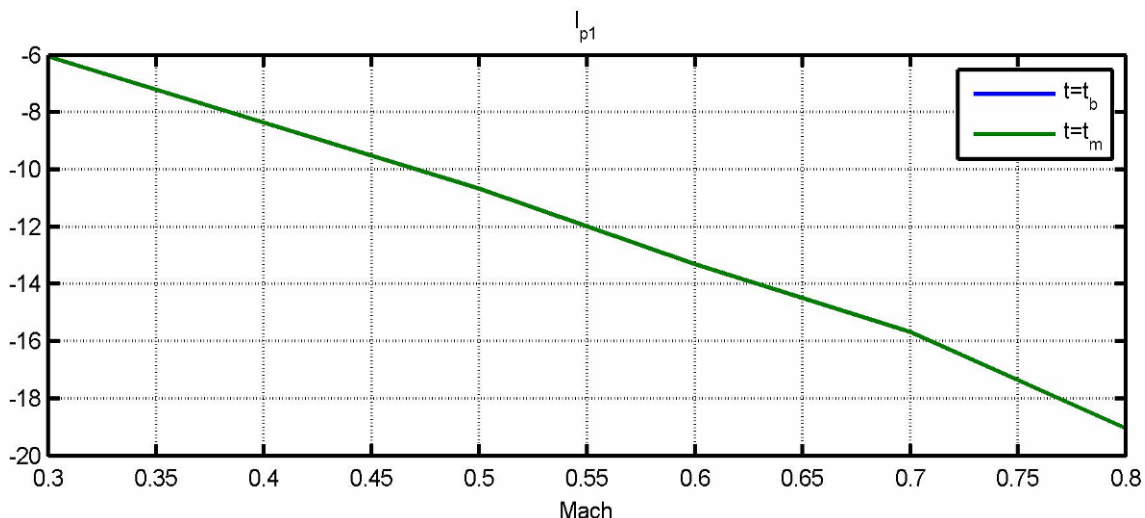
Slika 2-8 Dinamički derivativ valjanja krilne sekcije od komande
valjanja



Slika 2-9 Poremećajni dinamički derivativ usled greške ugradnje stabilizatora



Slika 2-10 Prigušni dinamički derivativ valjanja zadnje sekcije



Slika 2-11 Prigušni dinamički derivativ valjanja prednje sekcije

2.2 Analiza kretanja oko Ox i Ox_1 ose – valjanje rakete

Iz prethodno napisanih linearizovanih jednačina kretanja vidi se da je moguće odvojeno posmatrati valjanje:

$$\begin{aligned}\Delta \dot{p}_1 &= l_{\xi_1} \Delta \xi + l_{p_1} \Delta p_1 + l_{v_1} \Delta p - l_{v_1} \Delta p_1 \\ \Delta \dot{p} &= l_p \Delta p - l_v \Delta p + l_v \Delta p_1 + l_{\delta_0} \Delta \delta_0 + l_{\xi} \Delta \xi\end{aligned}\quad 2-2$$

Jednačina u vektorskom obliku:

$$\begin{bmatrix} \Delta \dot{p}_1 \\ \Delta \dot{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{p_1} - l_{v_1} & l_{v_1} \\ l_v & l_p - l_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta p_1 \\ \Delta p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_{\xi_1} & 0 \\ l_{\xi} & l_{\delta_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \xi \\ \Delta \delta_0 \end{bmatrix}\quad 2-3$$

Primenom Laplasove transformacije dobija se rešenje po ugaonim brzinama valjanja u sledećem obliku:

$$\begin{bmatrix} \Delta p_1 \\ \Delta p \end{bmatrix} = \frac{1}{s^2 + 2\omega_{np}\zeta_{np}s + \omega_{np}^2} \begin{bmatrix} l_{\xi_1}(s - l_p + l_v) + l_{\xi}l_{v_1} & l_{v_1}l_{\delta_0} \\ l_v l_{\xi_1} + l_{\xi}(s - l_{p_1} + l_{v_1}) & l_{\delta_0}(s - l_{p_1} + l_{v_1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \xi \\ \Delta \delta_0 \end{bmatrix}\quad 2-4$$

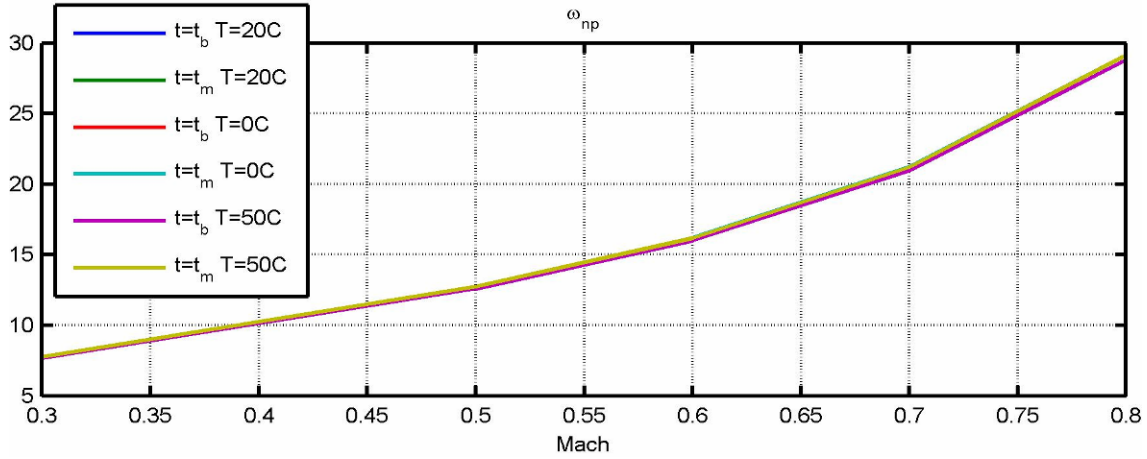
gde su:

$$\omega_{np} = \sqrt{l_p l_{p_1} - l_{p_1} l_v - l_p l_{v_1}} \quad \text{- sopstvena učestanost valjanja}$$

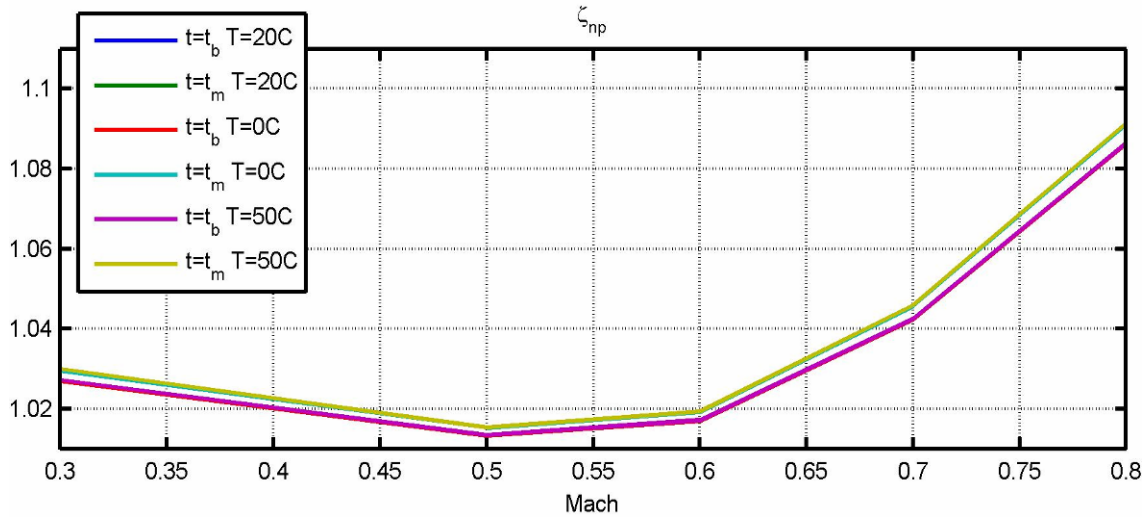
$$\zeta_{np} = \frac{l_v + l_{v_1} - l_p - l_{p_1}}{2\omega_{np}} \quad \text{- prigušenje valjanja}$$

Obzirom na prisustvo dinamičkog derivativa prigušenja usled viskoznosti analiziran je i uticaj temperature na sopstvenu učestanost i prigušenje valjanja. Iz

dijagrama: Slika 2-12 Sopstvena učestanost valjanja sa promenom temperature u funkciji Mahovog broja i Slika 2-13 Prigušenje valjanja sa promenom temperature u funkciji Mahovog broja, se vidi da sama promena koeficijenta viskoznosti nema značajnijeg efekta, pa će se dalja analiza raditi na nominalnoj temperaturi.



Slika 2-12 Sopstvena učestanost valjanja sa promenom temperature u funkciji Mahovog broja



Slika 2-13 Prigušenje valjanja sa promenom temperature u funkciji Mahovog broja

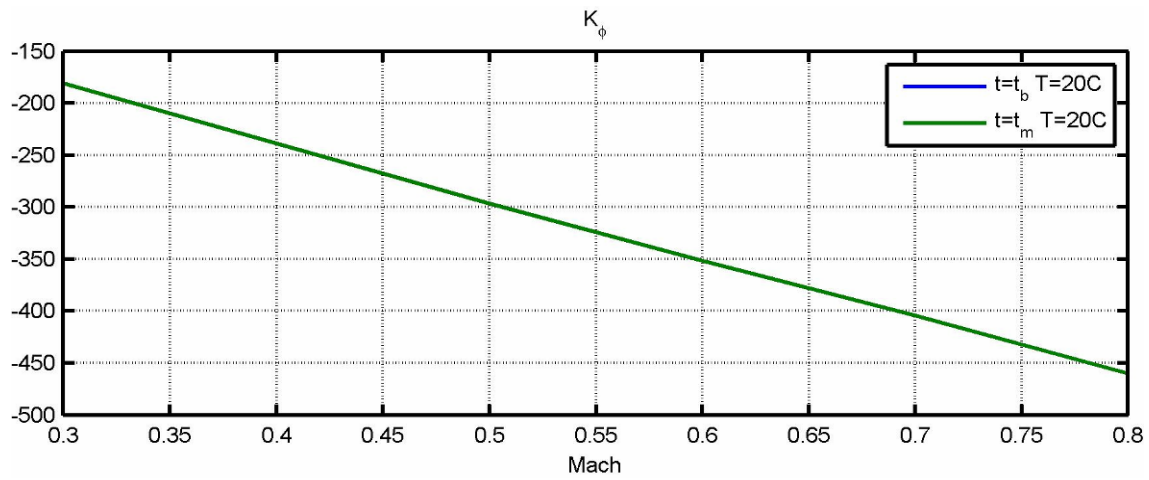
Iz vektorske jednačine valjanja u s domenu moguće je izvesti funkciju prenosa ugaone brzine valjanja prednje sekcije od komande valjanja, koja će kasnije biti korišćena u sintezi autopilota valjanja:

$$\frac{\Delta p_1}{\Delta \xi} = \frac{\omega_{np}^2 K_\phi (T_\phi s + 1)}{s^2 + 2\zeta_{np} \omega_{np} s + \omega_{np}^2} \quad 2-5$$

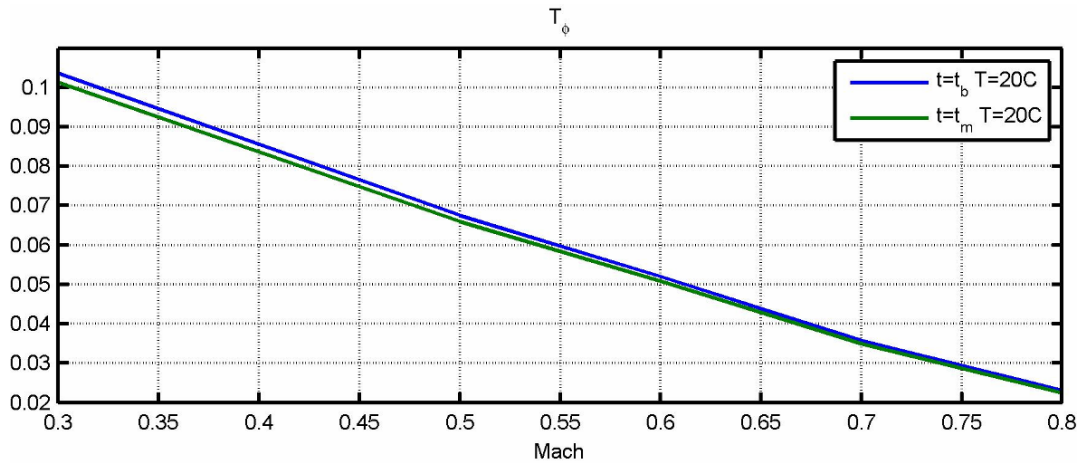
gde su:

$$K_{\phi} = \frac{l_{\xi_1} l_v - l_{\xi_1} l_p + l_{\xi} l_{v_1}}{\omega_{np}^2} - \text{faktor pojaćanja po ugaonoj brzini valjanja, Slika 2-14}$$

$$T_{\phi} = \frac{l_{\xi_1}}{l_{\xi_1} l_v - l_{\xi_1} l_p + l_{\xi} l_{v_1}} - \text{vremenska konstanta valjanja, Slika 2-15}$$



Slika 2-14 Faktor pojaćanja po ugaonoj brzini valjanja



Slika 2-15 Vremenska konstanta valjanja

Kako bi se izvršila analiza u zavisnosti od efekta viskoznog trenja u ležaju, funkcija prenosa definisana jednačinom 2-5 biće zapisana u drugom obliku:

$$\frac{\Delta p_1}{\Delta \xi} = \frac{K_{\phi} (T_{\phi} s + 1)}{(T_{n_1} s + 1)(T_{n_2} s + 1)} \quad 2-6$$

gde su:

$$T_{n_1} = \frac{\zeta_{np} - \sqrt{\zeta_{np}^2 - 1}}{\omega_{np}}, T_{n_2} = \frac{\zeta_{np} + \sqrt{\zeta_{np}^2 - 1}}{\omega_{np}} \text{ koreni sopstevnog polinoma}$$

Za slučaj idealnog ležaja, bez trenja važi sledeće:

$$\begin{aligned} l_{v_1} &= l_v = 0 \\ \omega_{np}^2 &= l_p l_{p_1} \\ \zeta_{np} &= \frac{-l_p - l_{p_1}}{2\sqrt{l_p l_{p_1}}} \end{aligned} \quad 2-7$$

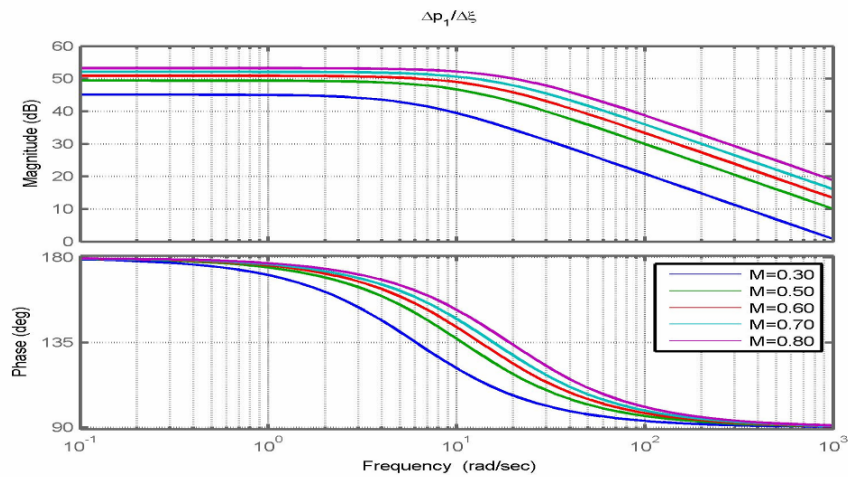
Kada se izrazi 2-7 zamene u jednačinu 2-6 i izraze za faktor pojačanja i vremensku konstantu valjanja dobija se:

$$\begin{aligned} K_\phi &= -\frac{l_{\xi_1}}{l_{p_1}} \\ T_\phi &= T_{n_2} = -\frac{1}{l_p} \\ T_{n_1} &= -\frac{1}{l_{p_1}} \end{aligned} \quad 2-8$$

Odnosno funkcija prenosa dobija oblik jednak obliku funkcije prenosa ugaone brzine valjanja kod standardne rakete, bez odvojenih sekcija:

$$\frac{\Delta p_1}{\Delta \xi} = \frac{K_\phi}{T_{n_1}s + 1} = \frac{-\frac{l_{\xi_1}}{l_p}}{-\frac{1}{l_p}s + 1} \quad 2-9$$

Iz prethodnog se dolazi do zaključka da će sa postojanjem viskoznog trenja u ležaju odnos vremenskih konstanti T_ϕ / T_{n_2} uticati na promenu dinamike valjanja.

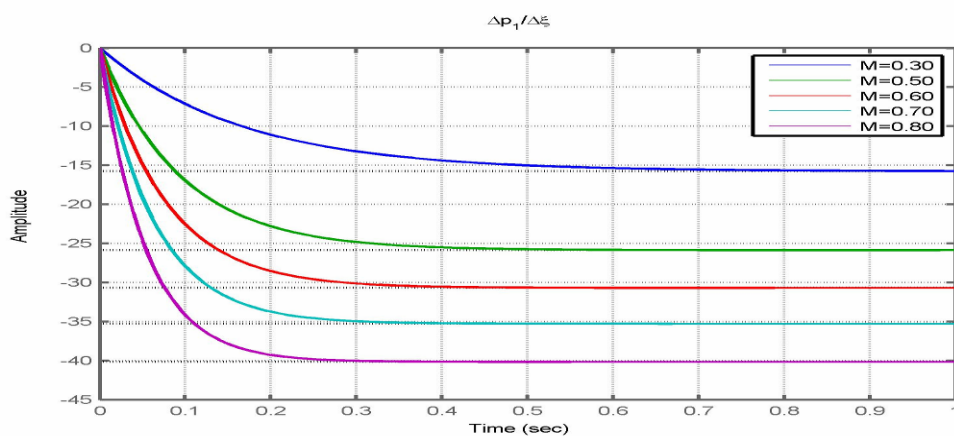


Slika 2-16 Bode dijagram funkcije prenosa ugaone brzine valjanja prednje sekcije od komande valjanja

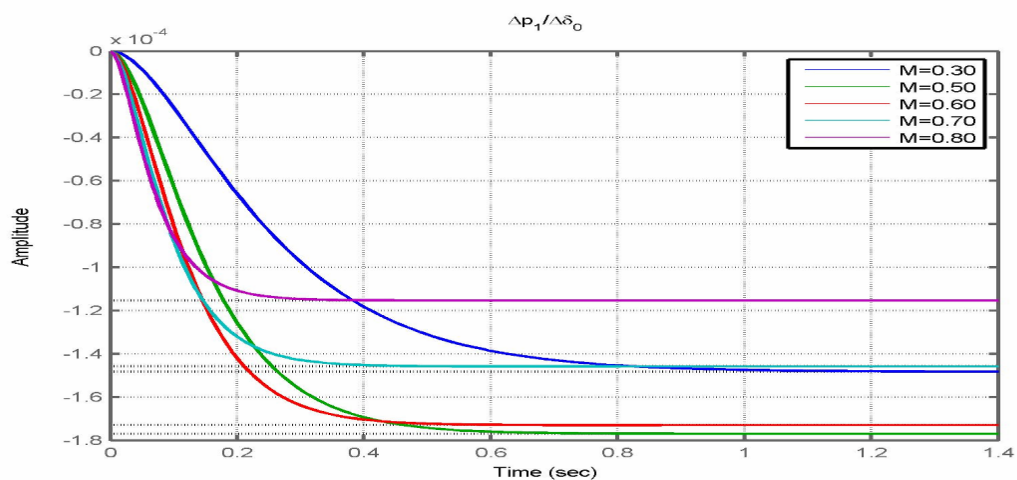
Na dijagramima Slika 2-16 i Slika 2-17 prikazane su dinamičke karakteristike funkcije prenosa ugaone brzine valjanja prednje sekcije od komande valjanja.

Obzirom na međusobni uticaj valjanja od interesa je i analiza uticaja poremećaja u ugradnji stabilizatora na valjanje prednje sekcije.

$$\frac{\Delta p_1}{\Delta \delta_0} = \frac{l_{v_1} l_{\delta_0}}{s^2 + 2\zeta_{np} \omega_{np} s + \omega_{np}^2} \quad 2-10$$



Slika 2-17 Odgovor u vremenu funkcije prenosa ugaone brzine valjanja prednje sekcije od komande valjanja za maksimalnu komandu valjanja



Slika 2-18 Odgovor u vremenu funkcije prenosa ugaone brzine valjanja prednje sekcije od greške u ugradnji stabilizatora

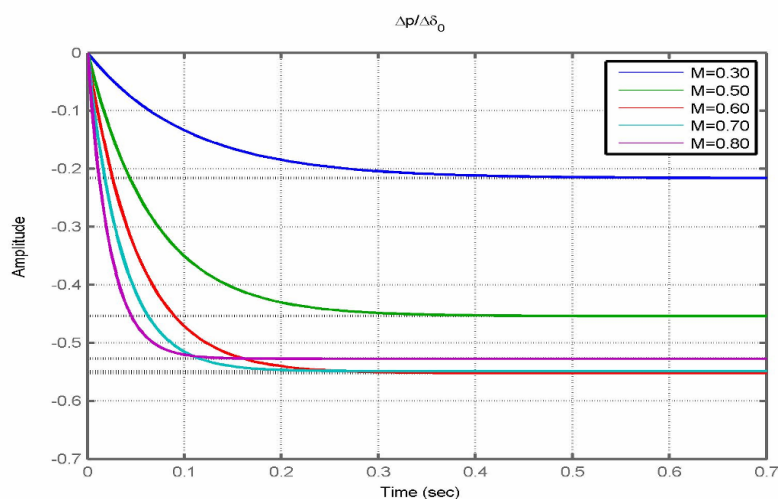
Sa dijagrama Slika 2-18 odgovora u vremenskom domenu vidi se da se i za maksimalnu grešku u ugradnji krila ovaj uticaj može zanemariti.

Kako se centar mase cele rakete nalazi na zadnjoj sekciji zbog analize kretanja u vertikalnoj ravni potrebno je proceniti maksimalnu ugaonu brzinu valjanja te sekcije. Funkcije prenosa ugaone brzine valjanja zadnje sekcije od greške ugradnje stabilizatora i odklona upravljačkih površina predstavljene su sledećim izrazima:

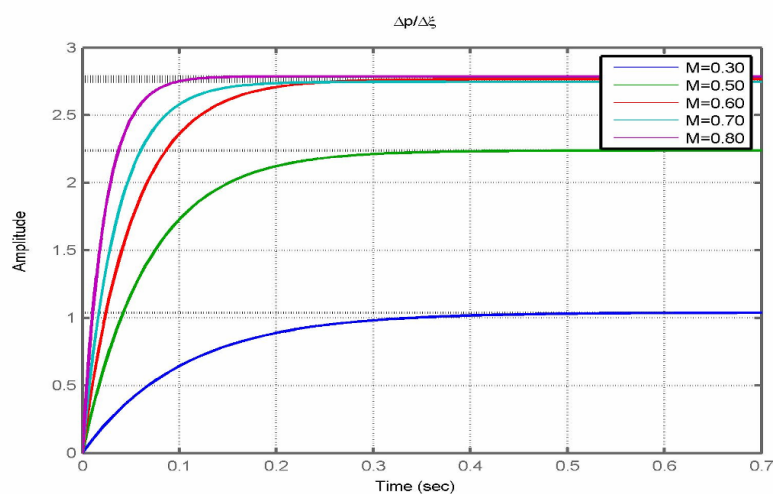
$$\frac{\Delta p}{\Delta \delta_0} = \frac{l_{\delta_0}(s - l_{p_1} + l_{v_1})}{s^2 + 2\zeta_{np}\omega_{np} + \omega_{np}^2}$$

2-11

$$\frac{\Delta p}{\Delta \xi} = \frac{l_v l_{\xi_1} + l_{\xi}(s - l_{p_1} + l_{v_1})}{s^2 + 2\zeta_{np}\omega_{np} + \omega_{np}^2}$$



Slika 2-19 Odgovor u vremenu funkcije prenosa ugaone brzine valjanja zadnje sekcije od greške u ugradnji stabilizatora



Slika 2-20 Odgovor u vremenu funkcije prenosa ugaone brzine valjanja zadnje sekcije od komande valjanja za maksimalnu komandu valjanja

Sa dijagrama: Slika 2-19 Odgovor u vremenu funkcije prenosa ugaone brzine valjanja zadnje sekcije od greške u ugradnji stabilizatora i Slika 2-20 Odgovor u vremenu funkcije prenosa ugaone brzine valjanja zadnje sekcije od komande valjanja za maksimalnu komandu valjanja, može se zaključiti da će maksimalna brzina zadnje sekcije biti oko $40 \frac{^{\circ}}{s}$.

2.3 Analiza kretanja u vertikalnoj ravni

Na osnovu prethodne analize kretanja valjanja, uz pretpostavku da je prednja sekcija stabilisana po uglu valjanja i da je maksimalna ugaona brzina valjanja zadnje sekcije dovoljno mala da se u ovoj analizi može zanemariti, dolazimo do sledećih jednačina:

$$\begin{aligned}\Delta \dot{v} &= z_w \Delta v - (U + z_q) \Delta r - z_\eta \Delta \zeta + g \cos \theta \Delta \phi \\ \Delta \dot{w} &= z_w \Delta w + (U + z_q) \Delta q + z_\eta \Delta \eta - g \sin \theta \Delta \phi \\ \Delta \dot{q} &= m_w \Delta w + m_q \Delta q + m_\eta \Delta \eta \\ \Delta \dot{r} &= -m_w \Delta v + m_q \Delta r + m_\eta \Delta \zeta\end{aligned}\tag{2-12}$$

Iz jednačina se vidi da je uz usvojene pretpostavke moguće odvojeno posmatrati propinjanje od skretanja, pa tako dolazimo do jednačina kretanja u vertikalnoj ravni u vektorskom obliku:

$$\begin{bmatrix} \Delta \dot{w} \\ \Delta \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_w & (U + z_q) \\ m_w & m_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta w \\ \Delta q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} z_\eta \\ m_\eta \end{bmatrix} \Delta \eta\tag{2-13}$$

Primenom Laplasove transformacije na prethodnu jednačinu, i zanemarivanjem veličine z_q u odnosu na aksijalnu komponentu brzine rakete, dolazi se do sledećeg oblika:

$$\begin{bmatrix} \Delta w \\ \Delta q \end{bmatrix} = \frac{1}{s^2 + 2\zeta_n \omega_n s + \omega_n^2} \begin{bmatrix} s - m_q & U \\ m_w & s - z_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_\eta \\ m_\eta \end{bmatrix} \Delta \eta\tag{2-14}$$

gde su:

$$\omega_n = \sqrt{z_w m_q - U m_w} \quad \text{- sopstvena učestanost, Slika 2-21}$$

$$\zeta_n = -\frac{m_q + z_w}{2\omega_n} \quad \text{- faktor relativnog prigušenja, Slika 2-22}$$

Iz prethodne jednačine se može odrediti aerodinamička funkcija prenosa za napadni ugao

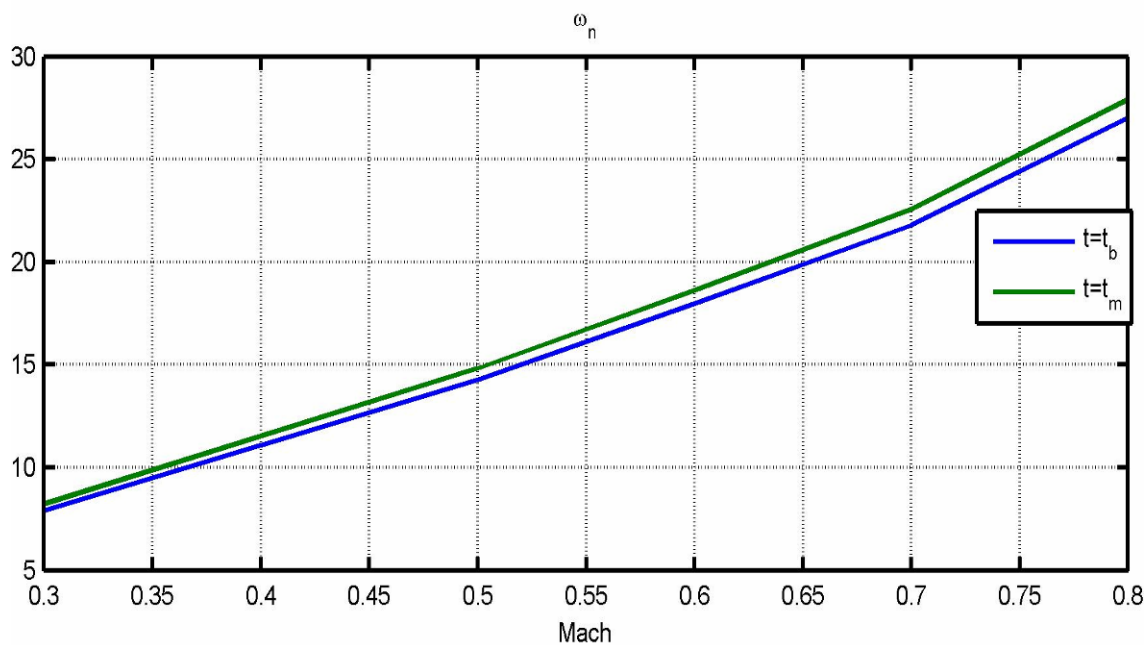
$$\frac{\Delta \alpha}{\Delta \eta} = \frac{1}{U} \cdot \frac{\Delta w}{\Delta \eta} = \frac{\omega_n^2 K_\alpha (T_\alpha s + 1)}{s^2 + 2\zeta_n \omega_n s + \omega_n^2}\tag{2-15}$$

Dinamičke osobine aerodinamičke funkcije prenosa za napadni ugao date su na dijagramima Slika 2-25 i Slika 2-26

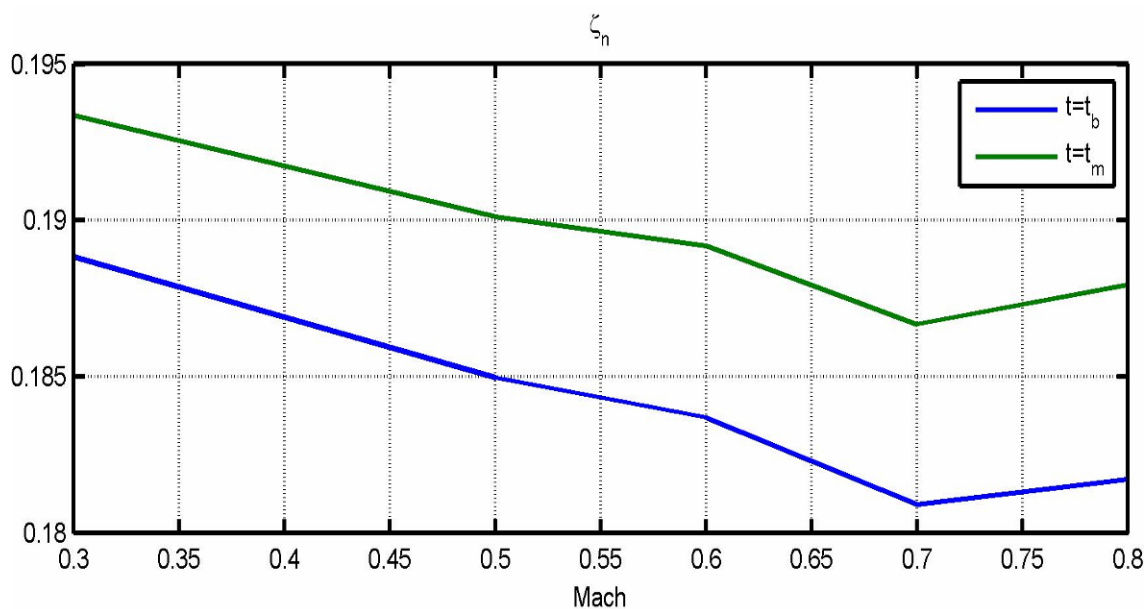
gde su:

$$K_\alpha = \frac{1}{U} \cdot \frac{m_\eta U - m_q z_\eta}{\omega_n^2} - \text{faktor pojačanja napadnog ugla, Slika 2-23}$$

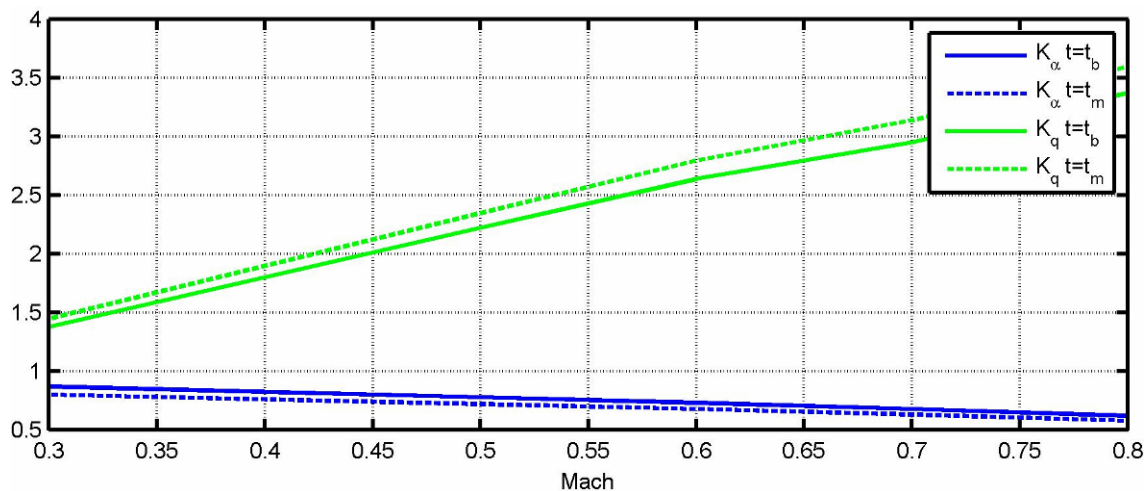
$$T_\alpha = \frac{z_\eta}{m_\eta U - m_q z_\eta} - \text{vremenska konstanta napadnog ugla, Slika 2-24}$$



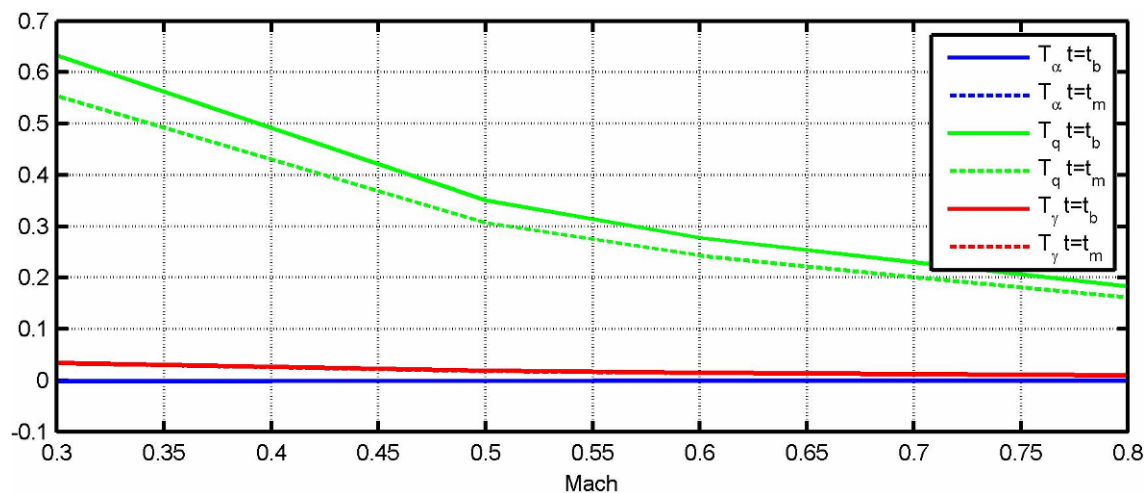
Slika 2-21 Sopstvena učestanost propinjanja



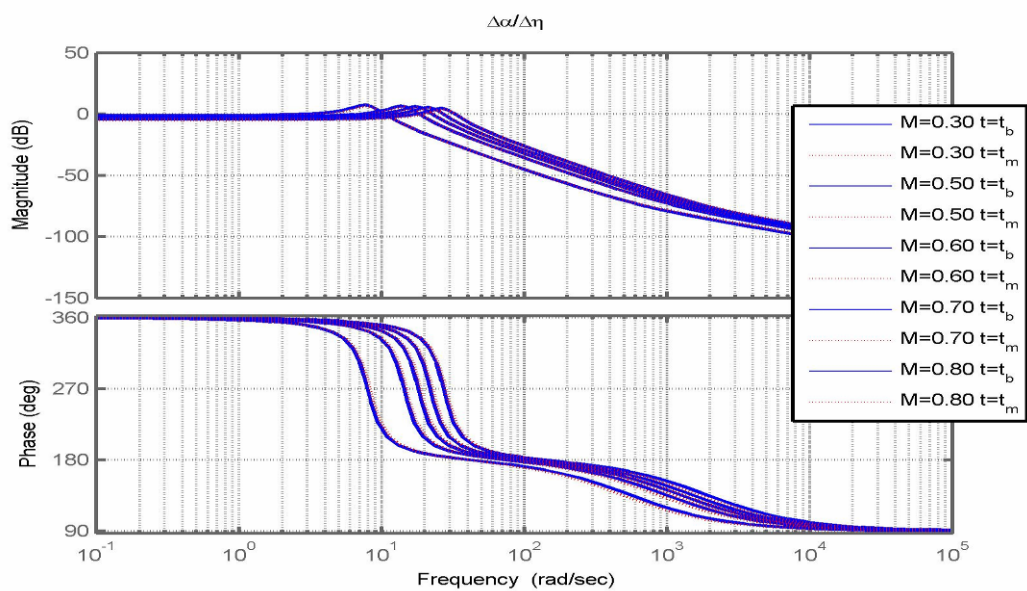
Slika 2-22 Faktor relativnog prigušenja propinjanja



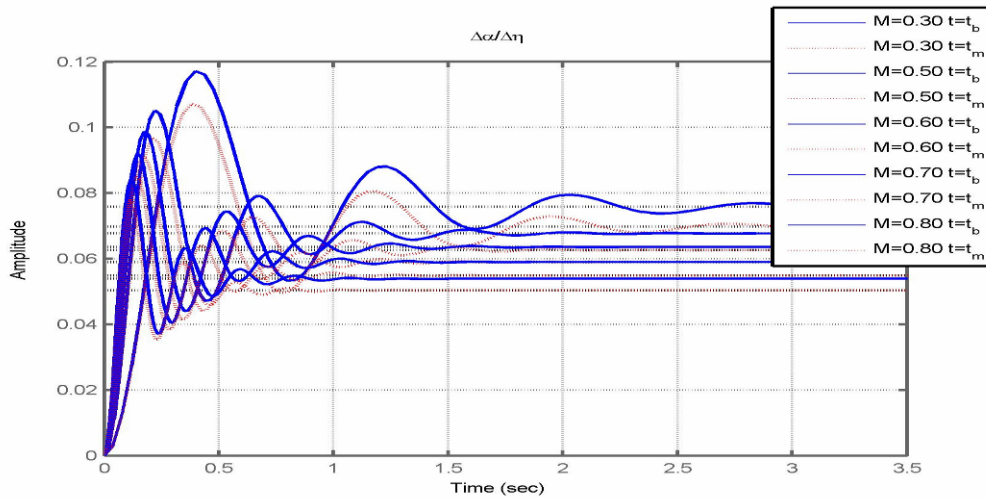
Slika 2-23 Pojaćanja napadnog ugla i ugaone brzine propinjanja



Slika 2-24 Vremenske konstante: napadnog ugla, ugaone brzine propinjanja i ugla brzine



Slika 2-25 Bode dijagram aerodinamičke funkcije prenosa za napadni ugao



Slika 2-26 Odgovor u vremenu aerodinamičke funkcije prenosa za napadni ugao

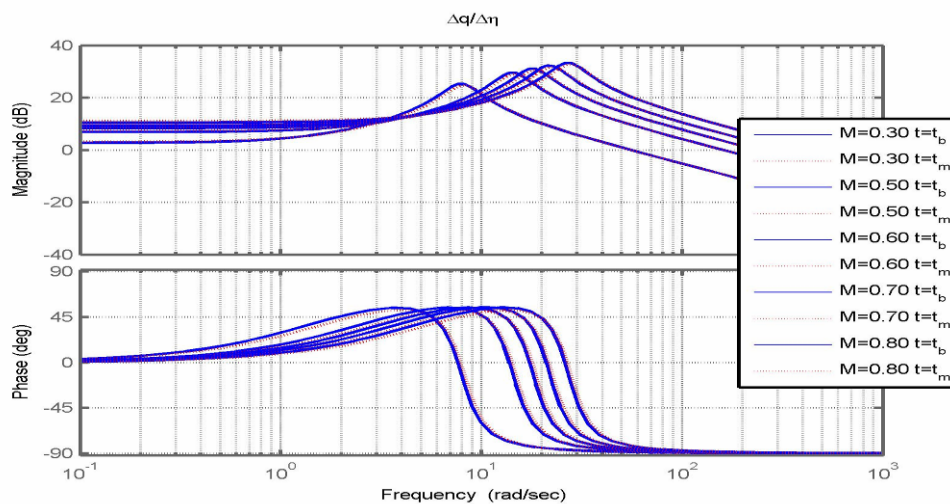
Na sličan način kao za napadni ugao može se odrediti i aerodinamička funkcija prenosa ugaone brzine propinjanja (Slika 2-27 i Slika 2-28 dinamičke karakteristike):

$$\frac{\Delta q}{\Delta \eta} = \frac{\omega_n^2 K_q (T_q s + 1)}{s^2 + 2\zeta_n \omega_n s + \omega_n^2} \quad 2-16$$

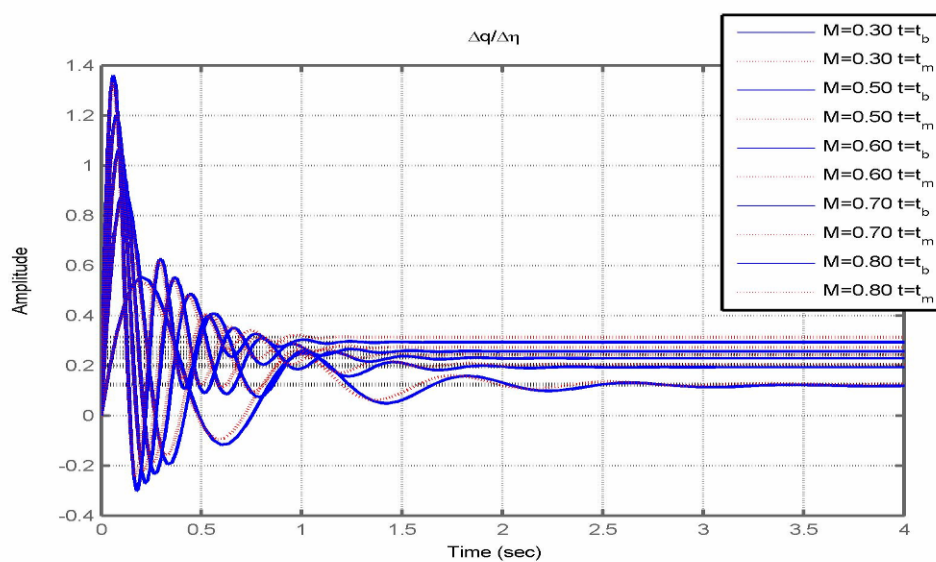
gde su:

$$K_q = \frac{z_\eta m_w - z_w m_\eta}{\omega_n^2} \text{ - faktor manevarske sposobnosti rakete, Slika 2-23}$$

$$T_q = \frac{m_\eta}{z_\eta m_w - z_w m_\eta} \text{ - vremenska konstanta kašnjenja ugla putanje u odnosu na ugao propinjanja, Slika 2-24}$$



Slika 2-27 Bode dijagram aerodinamičke funkcije prenosa ugaone brzine propinjanja



Slika 2-28 Odgovor u vremenu aerodinamičke funkcije prenosa ugaone brzine propinjanja

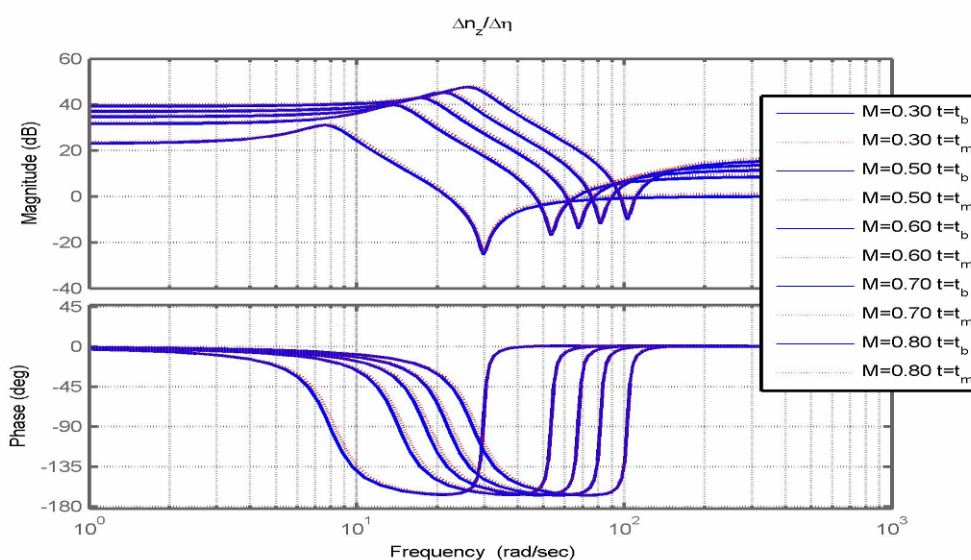
Koristeći prethodno izvedene aerodinamičke funkcije prenosa moguće je odrediti i aerodinamičku funkciju prenosa normalnog opterećenja:

$$\frac{\Delta n_z}{\Delta \eta} = \frac{\Delta \dot{w} - \Delta q U}{g} = \frac{U \omega_n^2 K_q (T_\gamma^2 s^2 + 2\zeta_\gamma T_\gamma s + 1)}{s^2 + 2\zeta_n \omega_n s + \omega_n^2}$$

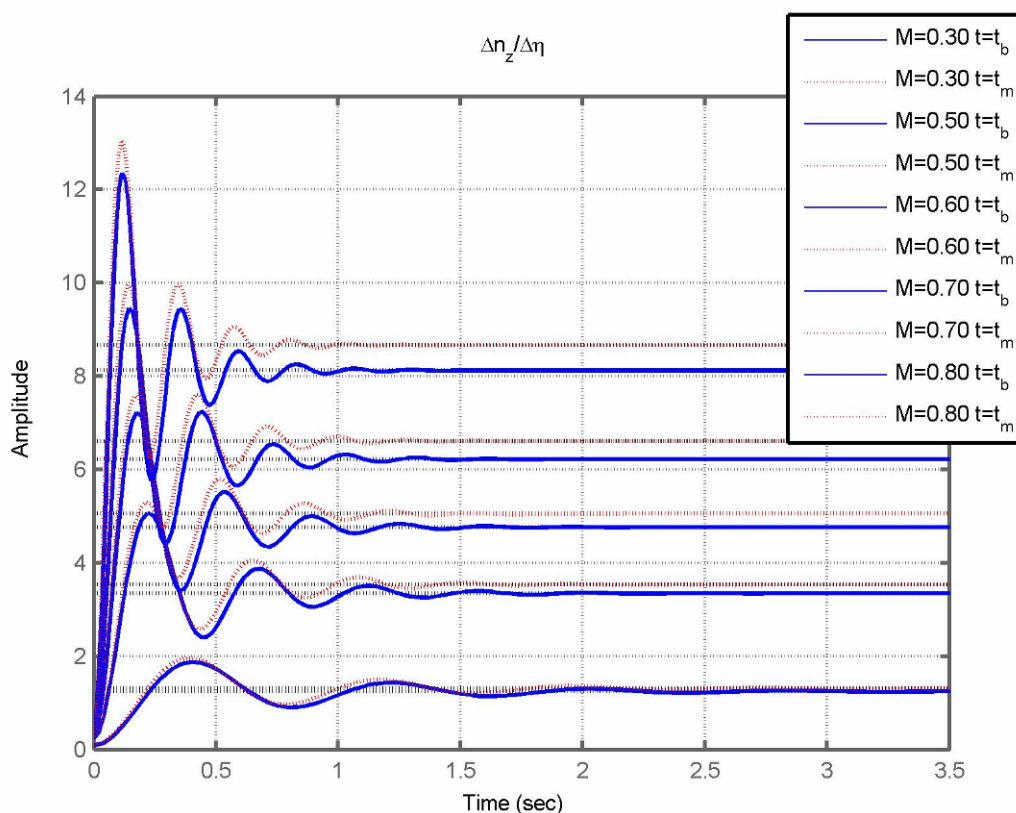
$$T_\gamma = \sqrt{\frac{K_\alpha}{K_q}} \cdot T_\alpha$$

2-17

$$\zeta_\gamma = \frac{1}{2T_\gamma} \left(\frac{K_\alpha}{K_q} - T_q \right)$$



Slika 2-29 Bode dijagram aerodinamičke funkcije prenosa normalnog opterećenja



Slika 2-30 Odgovor u vremenu aerodinamičke funkcije prenosa normalnog opterećenja

Na dijagramima Slika 2-29 i Slika 2-30 prikazane su dinamičke karakteristike aerodinamičke funkcije prenosa normalnog opterećenja.

U skladu sa pretpostavkom o osnosimetričnosti rakete, prethodno izvedene aerodinamičke funkcije prenosa u vertikalnoj ravni, odnosno po propinjanju važe i za kratkoperiodično kretanje skretanja.

Maksimalno normalno ubrzanje je dobijeno kao ubrzanje za maksimalan moguć otklon upravljačkih površina $\eta = 5^\circ$.

Imajući u vidu primenu vođene rakete protiv sporo manevrišućih (brzina cilja $\leq 80 \frac{km}{h}$) ili statičkih ciljeva, raspoloživo normalno ubrzanje od 3 do 5g u toku leta, je dovoljno za kompenzaciju gravitacionog ubrzanja i svih ostalih poremećaja koji deluju na raketu.

3 Sinteza autopilota

U ovom poglavlju opisana je sinteza autopilota za poznate aerodinamičke karakteristike objekta. Urađena je sinteza autopilota valjanja, čija je funkcija stabilizacija ugla valjanja. Sinteza je rađena podešavanjem stabilnosti, i ovakav autopilot predstavlja osnovu za kasniju adaptivnu nadgradnju. Takođe je izvršena sinteza autopilota propinjanja i skretanja, na bazi sintetičke povratne veze, [12]. Sinteza je rađena na osnovu poznatih aerodinamičkih karakteristika objekta, prvo bez uticaja dinamike aktuatora a zatim je usklađena sa ograničenjima koje podsistem aktuatora unosi u ceo sistem. Ovako sintetisan autopilot propinjanja, odnosno skretanja takođe se koristi kao osnova za kasniju adaptivnu modifikaciju.

3.1 *Autopilot propinjanja sa zanemarenom dinamikom aktuatora*

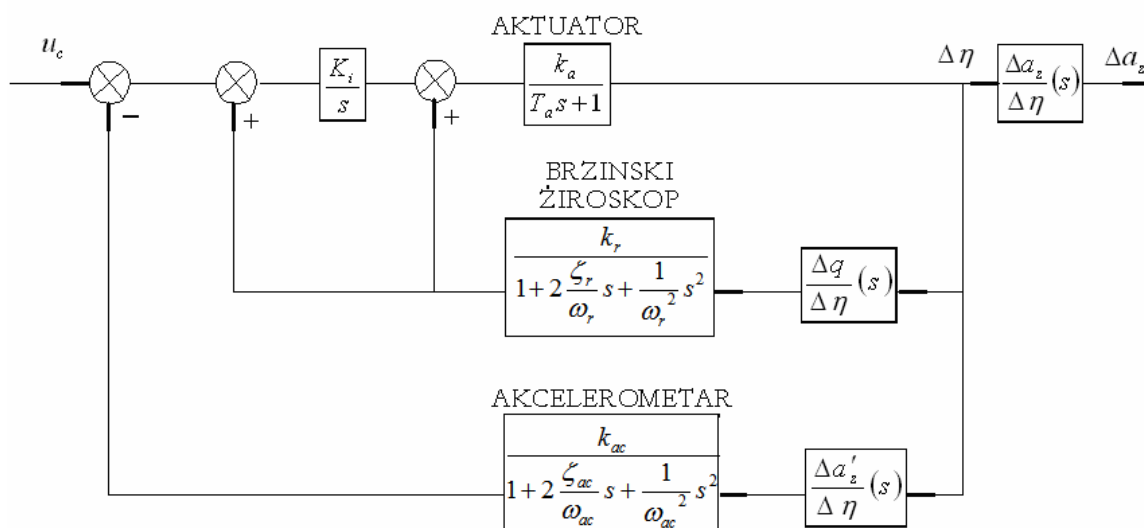
Pri sintezi autopilota zanemarena je dinamika aktuatora i mernih instrumenata.

Sinteza autopilota izvršava se primenom akcelometra i brzinskog žiroskopa.

Sinteza autopilota propinjanja rakete rađena je za slučaj autopilota sa sintetičkom povratnom vezom, Slika 3-1 Blok dijagram autopilota propinjanja sa sintetičkom povratnom vezom. Na ovaj način rađena sinteza autopilota je pogodna za raketu sa izrazito nestacionarnim dinamičkim parametrima koji obuhvataju i mogućnost statičke nestabilnosti aerodinamičke konfiguracije. Sintetička povratna veza omogućava da statička greška u odgovoru autopilota bude u granicama od 15%.

Kako se akcelometar nalazi ispred centra mase na rastojanju Δl , aerodinamička funkcija prenosa normalnog ubrzanja je: $\frac{\Delta a'_z}{\Delta \eta}(s) = \frac{\Delta a_z}{\Delta \eta}(s) - s \frac{\Delta q}{\Delta \eta} \Delta l$.

Blok-dijagram autopilota sa sintetičkom povratnom vezom ima četiri pojačanja: k_a, k_r, k_{ac}, K_i . Zanemarivanjem dinamike aktuatora i mernih instrumenata transformiše se u oblik prikazan na blok dijagramu Slika 3-2.



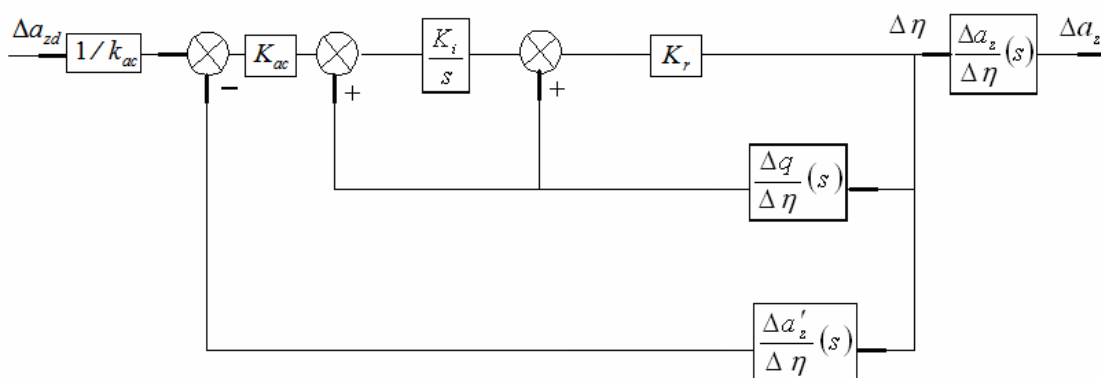
Slika 3-1 Blok dijagram autopilota propinjanja sa sintetičkom povratnom vezom

Novi faktori pojačanja su:

$$K_r = k_a k_r$$

$$K_{ac} = \frac{k_{ac}}{k_r}$$

3-1



Slika 3-2 Blok dijagram autopilota propinjanja sa zanemarenom dinamikom aktuatora i mernih instrumenata

Faktor pojačanja otvorenog kola je:

$$K_O = -K_r K_i K_q K_{ac} U_k \left(1 + \frac{1}{K_{ac} U_k} \right)$$

3-2

Funkcija prenosa otvorenog kola automatskog upravljanja je:

$$W_o = \frac{T_o^2 s^2 + 2\zeta_o T_o s + 1}{s(T_n^2 s^2 + 2\zeta_n T_n s + 1)} \quad 3-3$$

gde su:

$$2\zeta_o T_o = \frac{2T_\gamma' \zeta_\gamma' + \frac{T_q + \frac{1}{K_i}}{K_{ac} U_k}}{1 + \frac{1}{K_{ac} U_k}}$$

$$T_o^2 = \frac{T_\gamma'^2 + \frac{T_q}{K_{ac} U_k K_i}}{1 + \frac{1}{K_{ac} U_k}}$$

Funkcija prenosa normalnog ubrzanja u odnosu na zahtevano normalno ubrzanje:

$$\frac{\Delta a_z}{\Delta a_{zd}}(s) = K \frac{T_\gamma^2 s^2 + 2\zeta_\gamma T_\gamma s + 1}{\frac{T_n^2}{K_o} s^3 + \left(\frac{2\zeta_n T_n}{K_o} + T_o^2 \right) s^2 + \left(\frac{1}{K_o} + 2\zeta_o T_o \right) s + 1} \quad 3-4$$

Kako je raketa aerodinamički upravljana, funkcija prenosa autopilota se karakteriše jednim realnim polom koji je određen vremenskom konstantom τ_e i parom kompleksno-konjugovanih polova koji su određeni faktorom relativnog prigušenja ζ_e i frekvencijom ω_e . Iz toga može se zapisati autopilot trećeg reda u sledećem obliku:

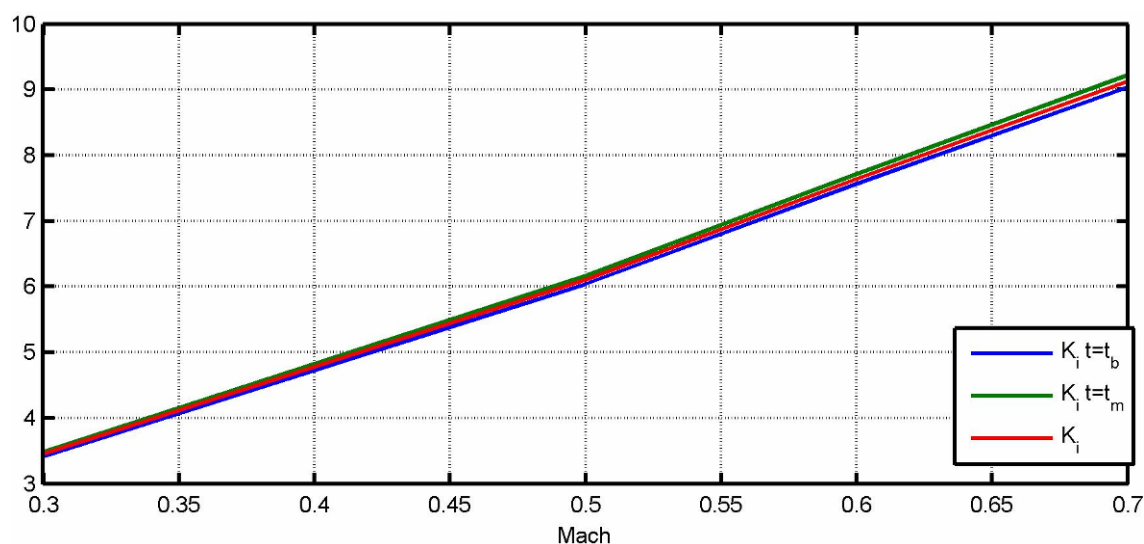
$$\frac{\Delta a_z}{\Delta a_{zd}}(s) = K \frac{T_\gamma^2 s^2 + 2\zeta_\gamma T_\gamma s + 1}{\frac{\tau_e}{\omega_e^2} s^3 + \left(\frac{2\zeta_e \tau_e}{\omega_e} + \frac{1}{\omega_e^2} \right) s^2 + \left(\frac{2\zeta_e}{\omega_e} + \tau_e \right) s + 1} \quad 3-5$$

Pošto se umesto frekvencije ω_e koristi presečna frekvencija otvorenog kola sistema automatskog upravljanja ω_c , može se izračunati uz aproksimaciju prenosne funkcije otvorenog kola:

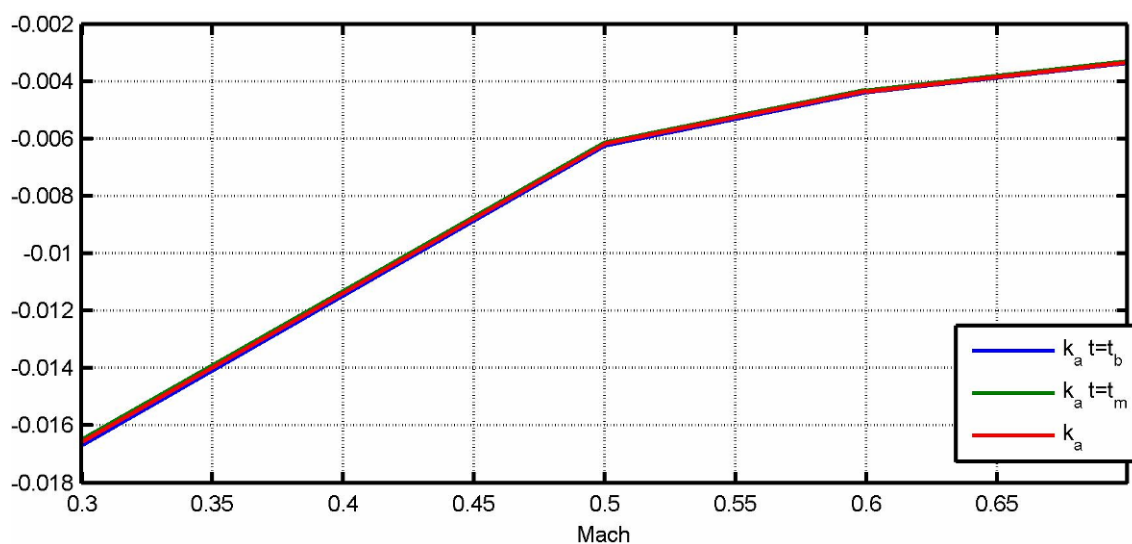
$$K_o W_o(s) \approx K_o \frac{T_o^2}{T_n^2 s} \text{ i uslov za presečnu frekvenciju } |K_o W_o(j\omega)| = 1.$$

Algebarskim izjednačavanjem koeficijenata u funkciji prenosa i korišćenjem veze za presečnu frekvenciju mogu se sračunati nepoznati faktori pojačanja na osnovu poznatih $\tau_e, \omega_c, \zeta_e$.

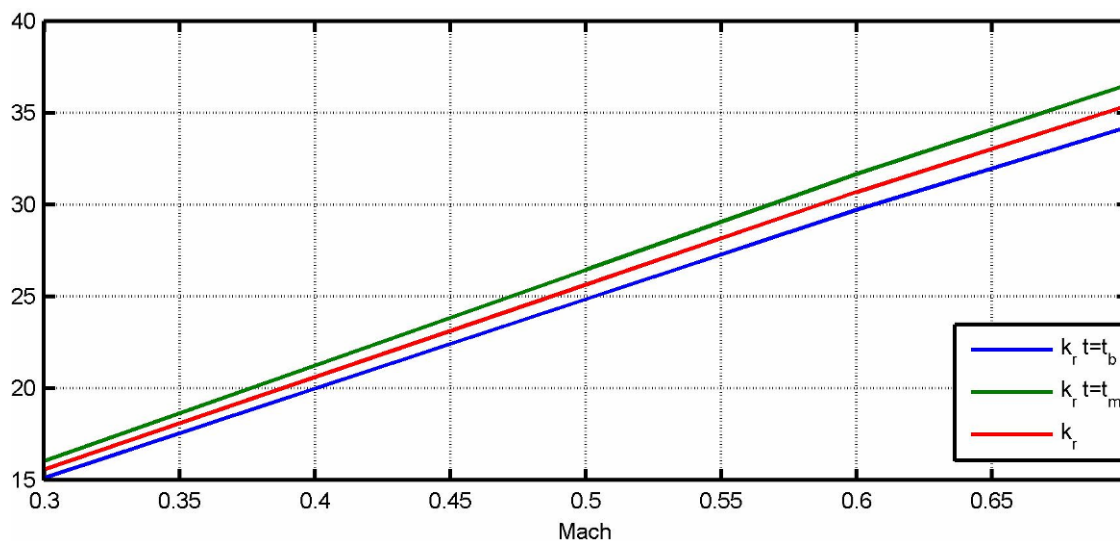
Ulazni podaci za sintezu autopilota su dinamički derivativi rakete, željene karakteristike autopilota: vremenska konstanta aperiodičnog kašnjenja, faktor relativnog prigušenja i presečna frekvencija pojačanja otvorenog kola. Presečna frekvencija pojačanja otvorenog kola se usvaja da je oko dva puta veća od sopstvene učestanosti rakete, usvaja se da je $\tau_e \omega_c = 1.5$ i $\zeta_e = 0.6$. Sinteza autopilota je rađena za trenutak kraja buster faze i za kraj rada marš motora. Na dijagramima: Slika 3-3, Slika 3-4, Slika 3-5 i Slika 3-6 prikazane su dobijene vrednosti pojačanja u fukciji Mahovog broja za tačku kraja rada buster motora, za tačku kraja rada marš motora i usvojene vrednosti.



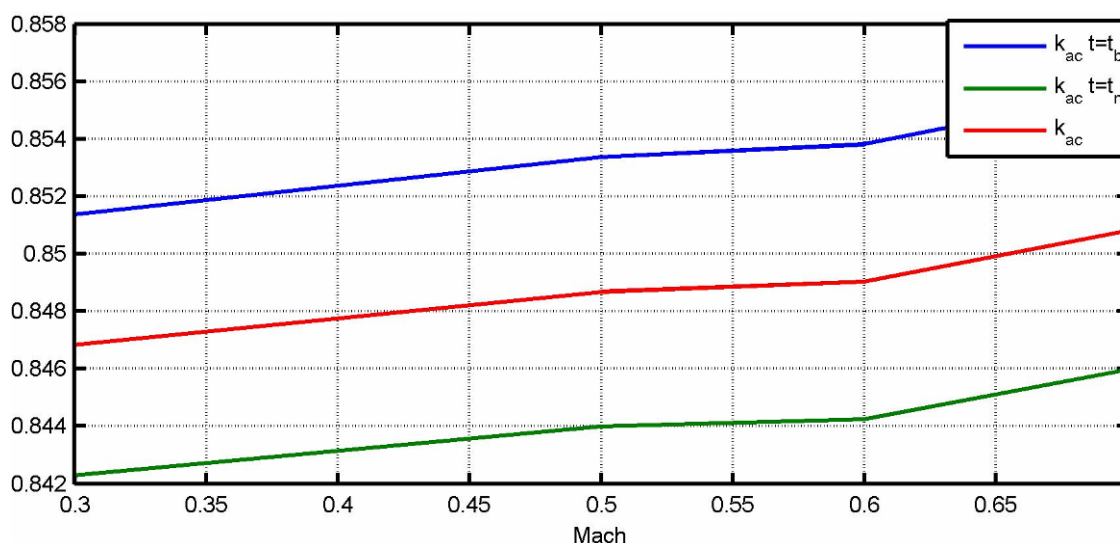
Slika 3-3 Vrednosti pojačanja K_i dobijenih sintezom za kraj buster faze i za kraj marš faze i usvojena vrednost



Slika 3-4 Vrednosti pojačanja k_a dobijenih sintezom za kraj buster faze i za kraj marš faze i usvojena vrednost

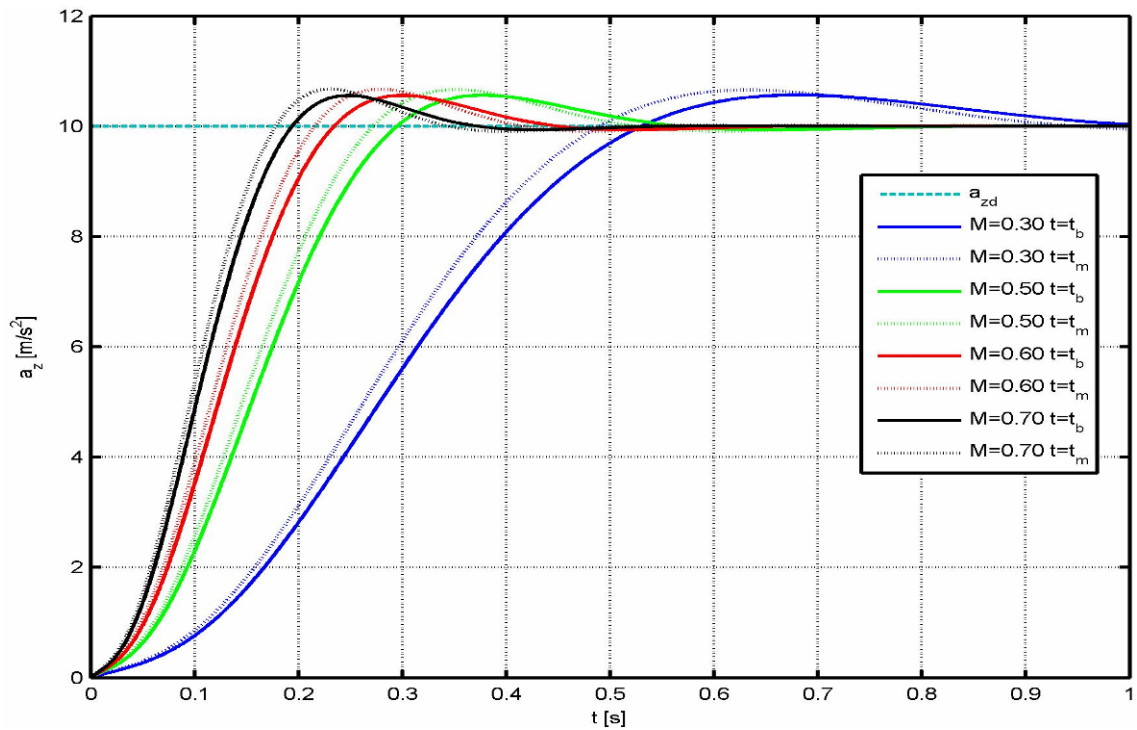


Slika 3-5 Vrednosti pojačanja k_r dobijenih sintezom za kraj buster faze i za kraj marš faze i usvojena vrednost

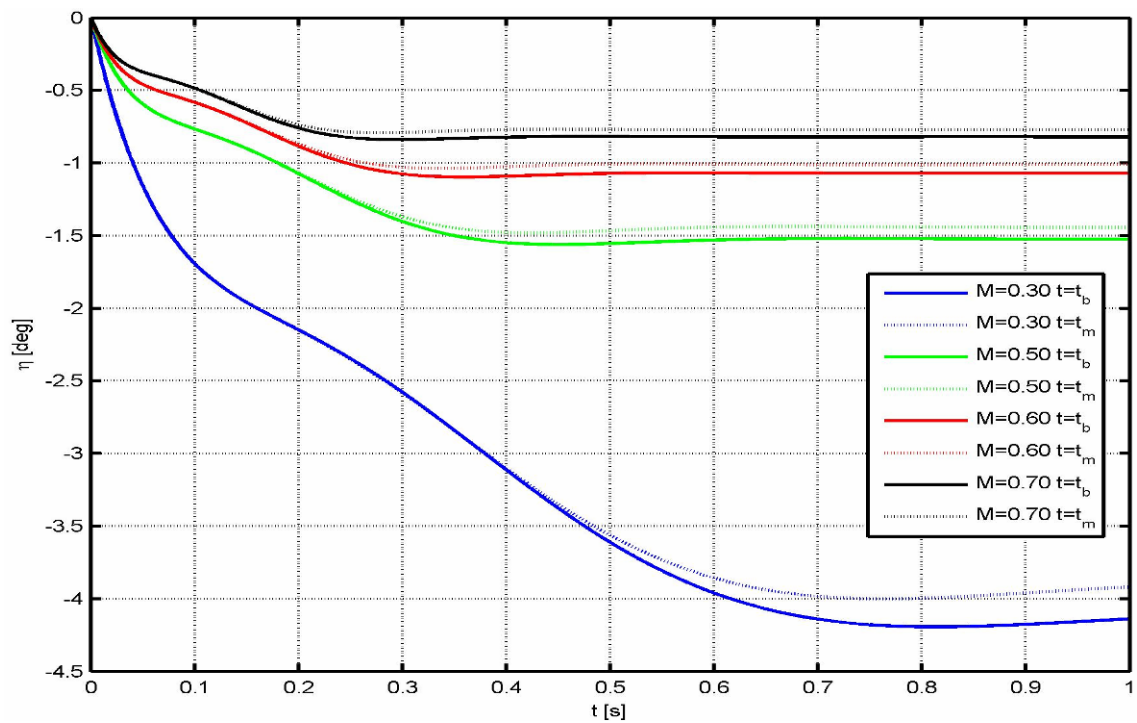


Slika 3-6 Vrednosti pojačanja k_{ac} dobijenih sintezom za kraj buster faze i za kraj marš faze i usvojena vrednost

Odgovori autopilota na jedinični ulaz, željeno normalno ubrzanje od $1g$, u zavisnosti od kontrolnih tački, sa zanemarenom dinamikom aktuatora, Slika 3-7 Odgovor autopilota propinjanja za usvojena pojačanja i Slika 3-8 Otklon krmila pri željenom normalnom ubrzanju, dobijeni su simulacijom blok dijagrama autopilota propinjanja (Slika 3-1) u SIMULINK -u.



Slika 3-7 Odgovor autopilota propinjanja za usvojena pojačanja

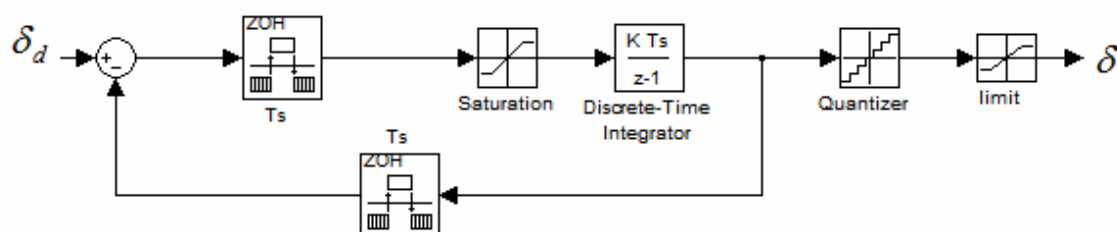


Slika 3-8 Otklon krmila pri željenom normalnom ubrzanju

3.2 Uticaj dinamike aktuatora na ponašanje autopilota propinjanja

Aktuatorsku sekciju rakete čine četiri nezavisna pokretača na bazi petofaznih step motora sa reduktorom. Ovim aktuatorima se upravlja impulsnim signalom, što podrazumeva jedan impuls za jedan step, pri čemu je rezolucija jednog stepa 0.036° . Širina impulsa određuje brzinu kretanja step motora. Jedan od osnovnih problema kod ovakvog upravljanja je što je ugaono ubrzanje obrnuto proporcionalno sa kvadratom širine impulsa i proporcionalno struji koju kontroler treba da obezbedi, a koja je limitirana veličina. Ovo upravljanje je dodatno ograničeno i vremenskim korakom rada autopilota. Jedno od rešenja primenjenih za upravljanje step motorima je upravljanje sa konstantnom brzinom, ovo rešenje je najjednostavnije ali sa stanovišta performansi aktuatorskog sistema najlošije jer je ograničeno konstantnom brzinom koja je reda veličine 30% od maksimalne brzine (zavisi od maksimalne struje). U skladu sa gore navedenim, umesto aproksimacije rada aktuatora funkcijom prenosa prvog ili drugog reda, njegov rad je izmodeliran u SIMULINK -u na bazi upravljanja sa konstantnom brzinom aktuatora, Slika 3-9 Blok šema dinamike aktuatora.

Ovaj model se može koristiti i za analizu rada aktuatora pri upravljanju sa promenljivom brzinom aktuatora ako se u simulaciji ova konstantna ugaona brzina zameni sa prosečnom brzinom u tom vremenskom intervalu. Predstavljanje dinamike aktuatora na ovaj način je pogodno i za kasniju analizu ograničenja performansi vođenja rakete usled dinamike aktuatora.



Slika 3-9 Blok šema dinamike aktuatora

$$\begin{aligned}\delta_k(T_{s\text{act}}) &= \delta_{k-1}(T_{s\text{act}}) + K T_{s\text{act}} e_j(T_{s\text{ap}}) \\ e_j(T_{s\text{ap}}) &= \delta_{dj}(T_{s\text{ap}}) - \delta_{j-1}(T_{s\text{ap}}) \\ K &= \frac{1}{2} T_{s\text{ap}}\end{aligned}$$

3-6

gde su:

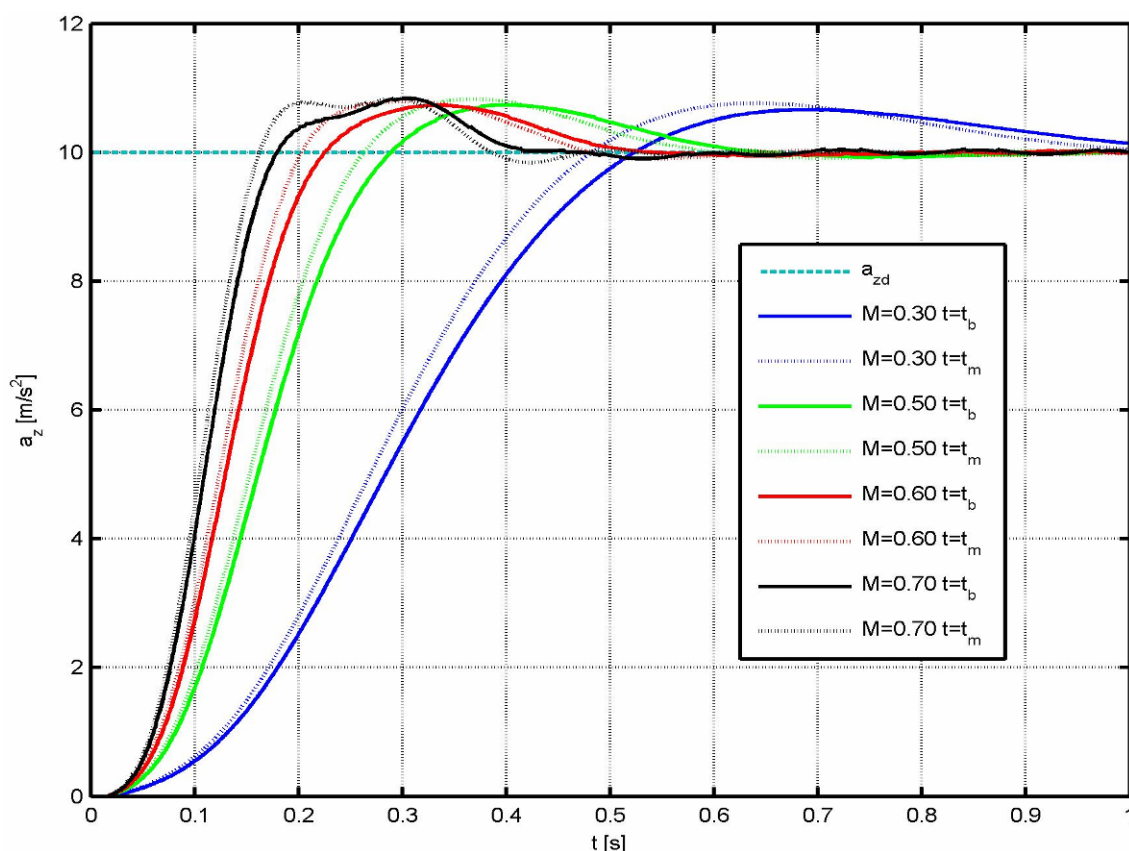
$T_{s\text{ap}}$ - vremenski korak rada autopilota

$T_{s\text{act}}$ - širina impulsa signala upravljanja aktuatorom

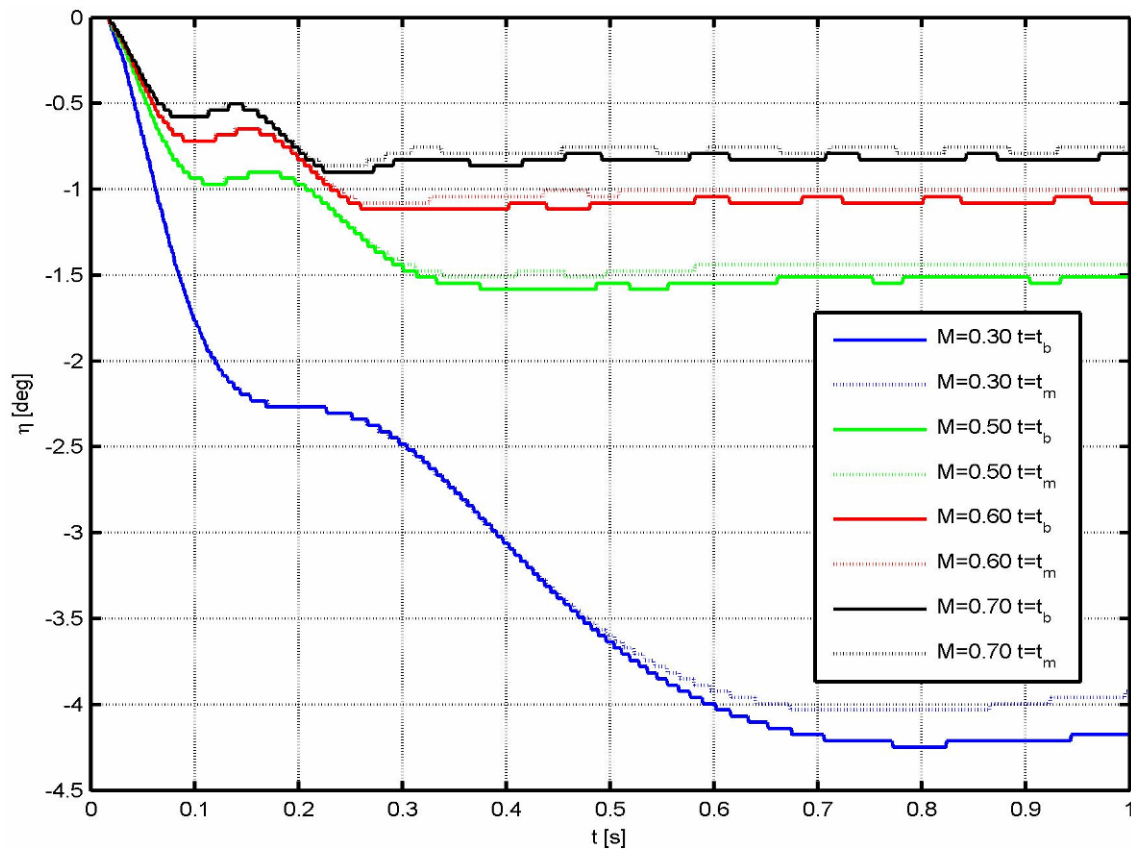
$\delta_{dj}(T_{s\text{ap}})$ - željena komanda dobijena od strane autopilota

$e_{\text{max}} = \frac{T_{s\text{ap}}}{T_{s\text{act}}}$ - maksimalan broj stepova koji mogu da se izvrše u intervalu $T_{s\text{ap}}$

Odgovori autopilota na jedinični ulaz, željeno normalno ubrzanje od $1g$, u zavisnosti od kontrolnih tački, uključujući dinamiku aktuatora, dobijeni su simulacijom (Slika 3-10 Odgovor autopilota propinjanja za usvojena pojačanja i Slika 3-11 Otklon krmila pri željenom normalnom ubrzanju) u SIMULINK-u.



Slika 3-10 Odgovor autopilota propinjanja za usvojena pojačanja



Slika 3-11 Otklon krmila pri željenom normalnom ubrzanju

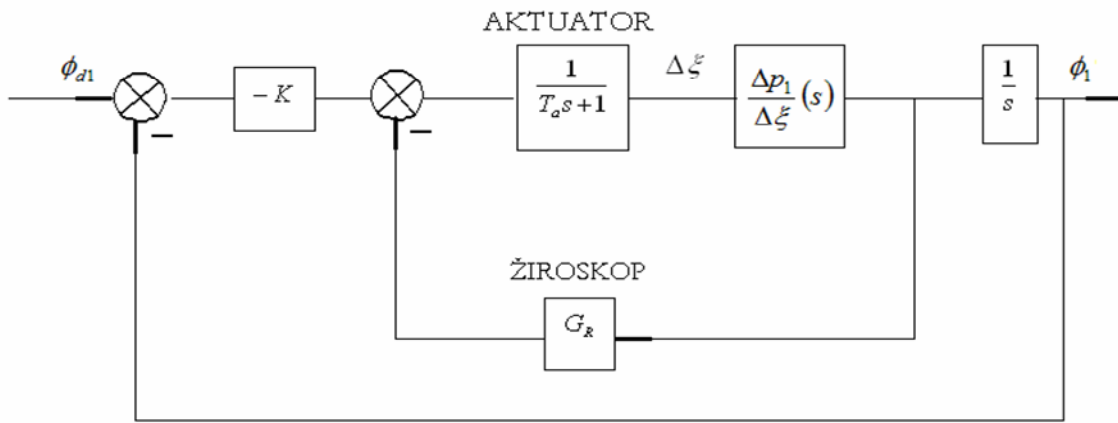
Na osnovu dobijenih odgovora može se zaključiti da dinamika aktuatora ne utiče značajno na ponašanje autopilota. Kašnjenje aktuatora izaziva nešto veću oscilatornost u promeni otklona upravljačkih površina i premašaje u odgovoru autopilota.

Kako dinamika aktuatora ne menja bitno odziv autopilota na jedinični ulaz, nisu izvršene korekcije faktora pojačanja.

3.3 Autopilot valjanja sa zanemarenom dinamikom aktuatora

Pri sintezi autopilota zanemarena je dinamika aktuatora i mernih instrumenata. Obzirom da rad raketnih motora ne utiče na promenu aerodinamičke funkcije prenosa po ugaonoj brzini valjanja sinteza se vrši za nominalne vrednosti, nakon trenutka otvaranja stabilizatora.

Sinteza autopilota izvršava se primenom brzinskog žiroskopa i sintetičke povratne veze po uglu valjanja, Slika 3-12 Blok šema autopilota valjanja.



Slika 3-12 Blok šema autopilota valjanja

Na osnovu blok šeme autopilota valjanja može se izvesti funkcija prenosa autopilota valjanja, odnosno ostvarenog ugla valjanja u odnosu na željeni ugao valjanja.

Radi jednostavnije analize usvojeno je $K_{\phi n} = -K_{\phi}$ odnosno $\frac{\Delta p_1}{\Delta \xi} = \frac{-\omega_{np}^2 K_{\phi n} (T_{\phi} s + 1)}{s^2 + 2\zeta_{np} \omega_{np} + \omega_{np}^2}$.

$$\frac{\Delta \phi_1}{\Delta \phi_{1d}}(s) = \frac{\omega_{np}^2 K_{\phi n} K (T_{\phi} s + 1)}{s^3 + s^2 (2\zeta_{np} \omega_{np} - \omega_{np}^2 K_{\phi n} T_{\phi} G_R) + s \omega_{np}^2 (1 - K_{\phi n} G_R + K K_{\phi n} T_{\phi}) + \omega_{np}^2 K K_{\phi n}} \quad 3-7$$

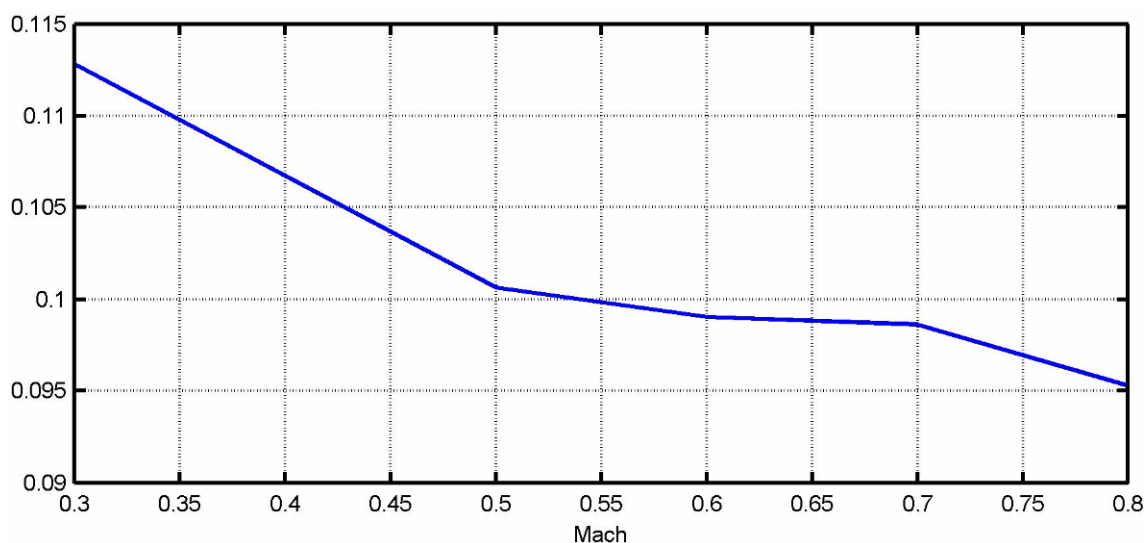
Analizom funkcije prenosa dolazimo do sledećih zaključaka:

- funkcija prenosa ima jedinično pojačanje za svako K
- iz uslova stabilnosti na osnovu Hurvitzovog kriterijuma:
- $K > 0$ i $G_R < \frac{2\zeta_{np}}{\omega_{np} K_{\phi n} T_{\phi}}$

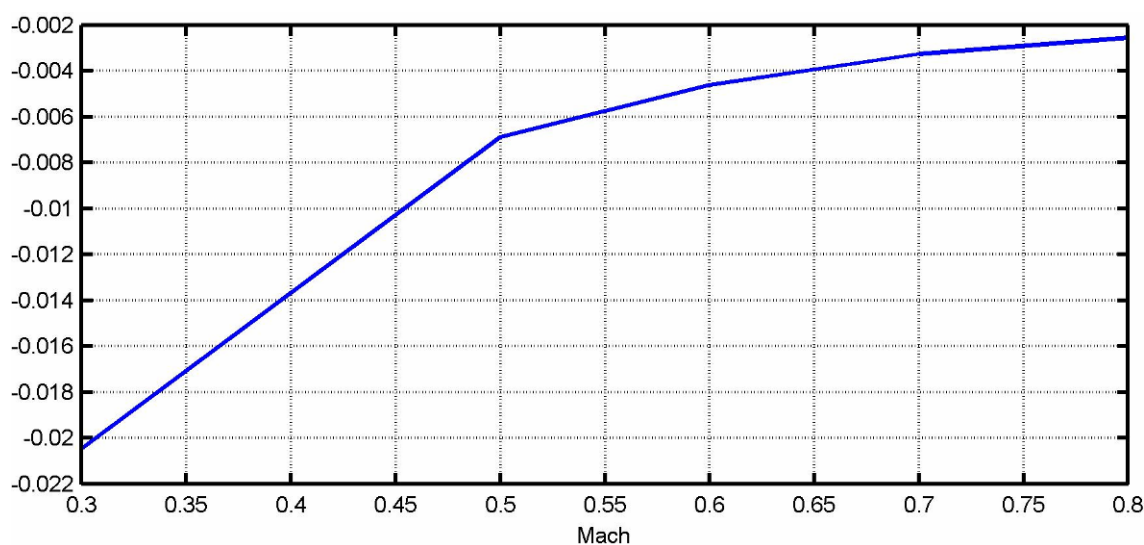
Kako je raketa aerodinamički upravljana, funkcija prenosa autopilota se karakteriše jednim realnim polom koji je određen vremenskom konstantom τ_e i parom kompleksno-konjugovanih polova koji su određeni faktorom relativnog prigušenja ζ_e i frekvencijom ω_e . Pa se iz toga može zapisati autopilot trećeg reda u sledećem obliku:

$$\frac{\Delta\phi_1}{\Delta\phi_{1d}}(s) = \frac{T_\phi s + 1}{\frac{\tau_e}{\omega_e^2} s^3 + \left(\frac{2\zeta_e \tau_e}{\omega_e} + \frac{1}{\omega_e^2} \right) s^2 + \left(\frac{2\zeta_e}{\omega_e} + \tau_e \right) s + 1} \quad 3-8$$

Algebarskim izjednačavanjem koeficijenata u funkciji prenosa i korišćenjem uslova stabilnosti iterativnom metodom se mogu odrediti pojačanja autopilota na osnovu sledećih postavki $\tau_e \omega_e = 1.5$ i $\zeta_e = 0.8$.



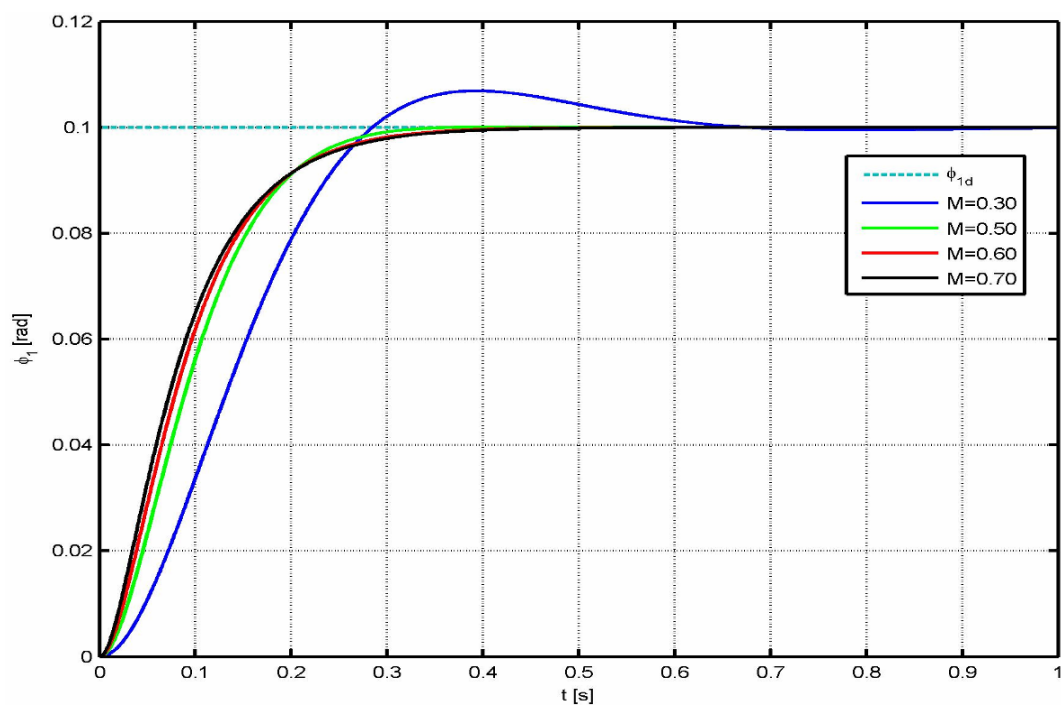
Slika 3-13 Pojačanje po uglu valjanja



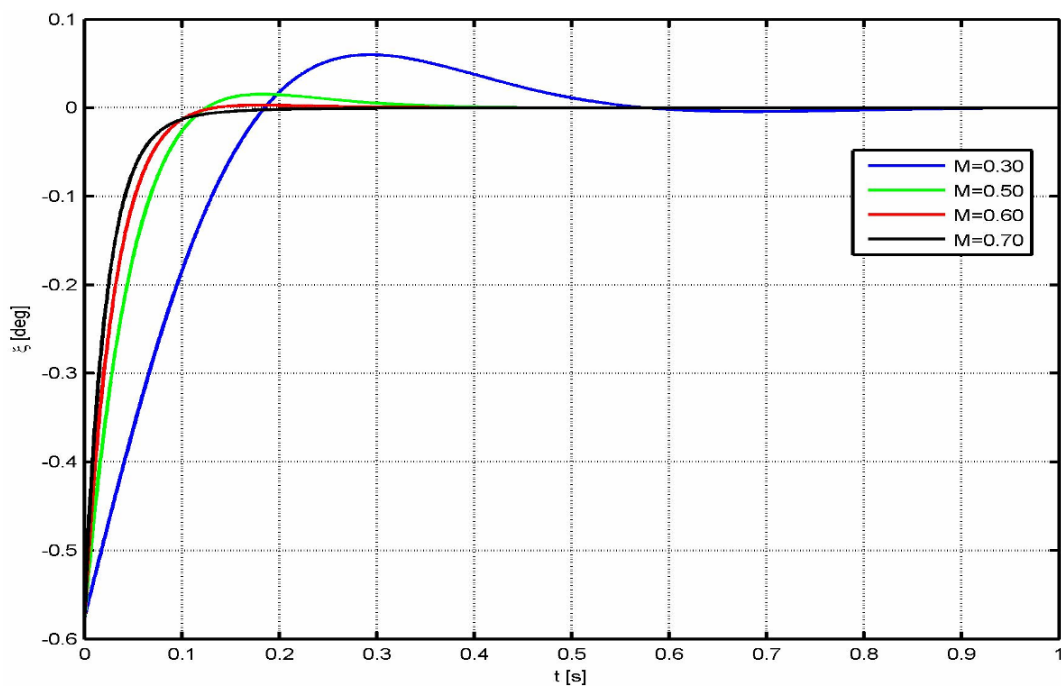
Slika 3-14 Pojačanje po ugaonoj brzini valjanja

Izračunata pojačanja prikazana su na dijagramima Slika 3-13 Pojačanje po uglu valjanja i Slika 3-14 Pojačanje po ugaonoj brzini valjanja

Odgovori autopilota na ulaz od 0.1 rad , u zavisnosti od Mahovog broja, dobijeni su simulacijom u SIMULINK -u, Slika 3-15 i Slika 3-16.



Slika 3-15 Odgovor autopilota valjanja za usvojena pojačanja

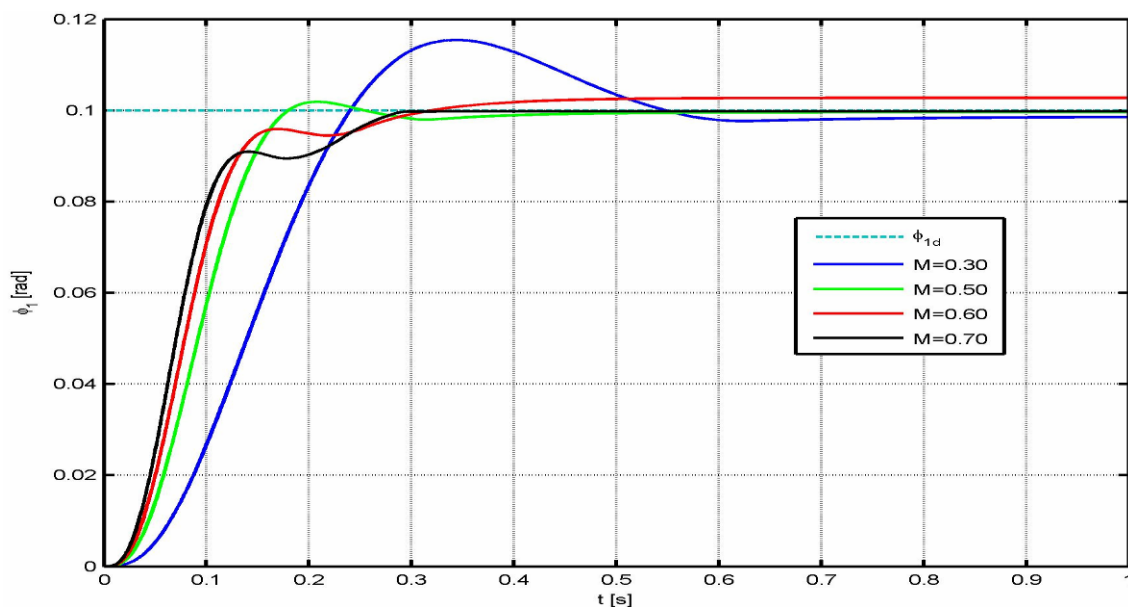


Slika 3-16 Komanda valjanja pri željenoj vrednosti ugla valjanja

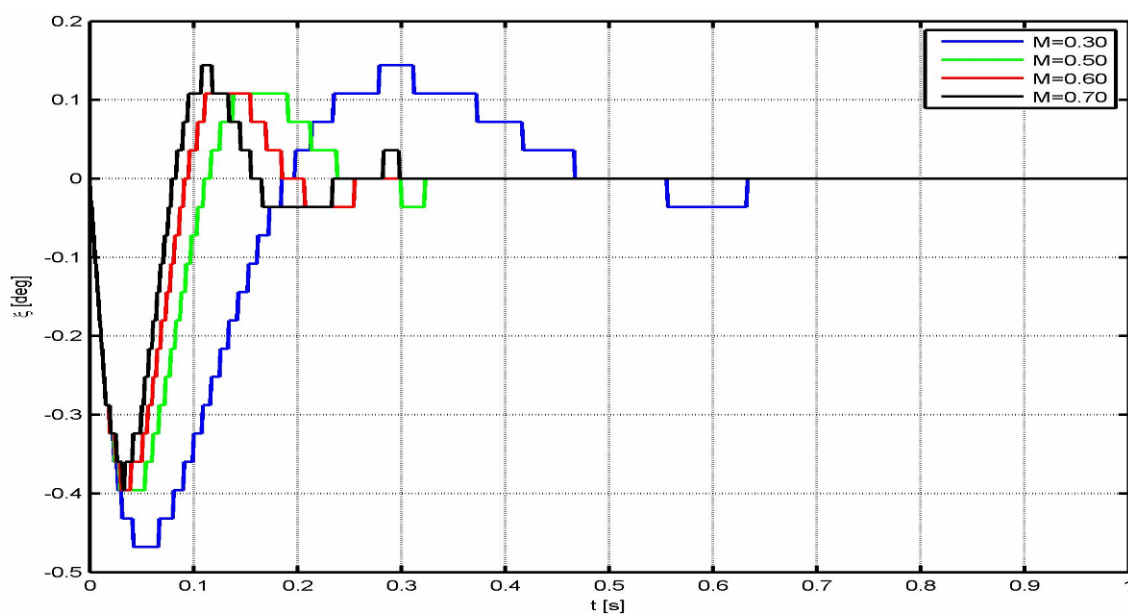
3.4 Uticaj dinamike aktuatora na autopilot valjanja

Kako bi se analizirao uticaj dinamike aktuatora u simulaciju rada autopilota ponovo je uključena i simulacija rada aktuatorskog sistema.

Odgovori autopilota na ulaz od 0.1 rad, u zavisnosti od Mahovog broja, dobijeni su simulacijom u SIMULINK -u, Slika 3-17 i Slika 3-18.

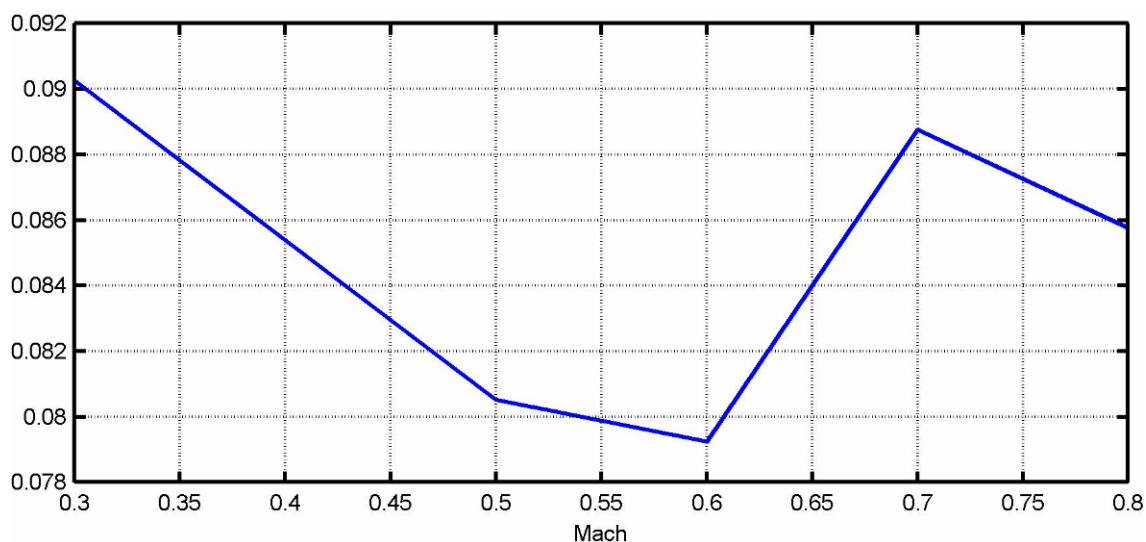


Slika 3-17 Odgovor autopilota valjanja sa dinamikom aktuatora za usvojena pojačanja

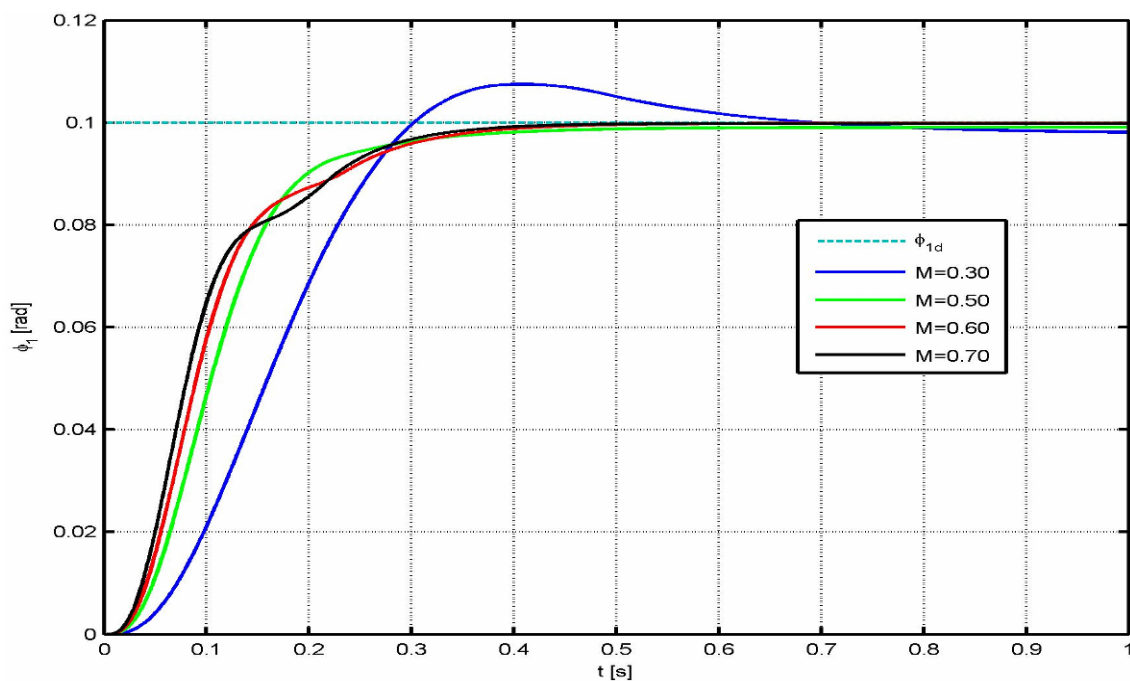


Slika 3-18 Komanda valjanja za željeni ugao valjanja autopilota sa uticajem dinamike aktuatora

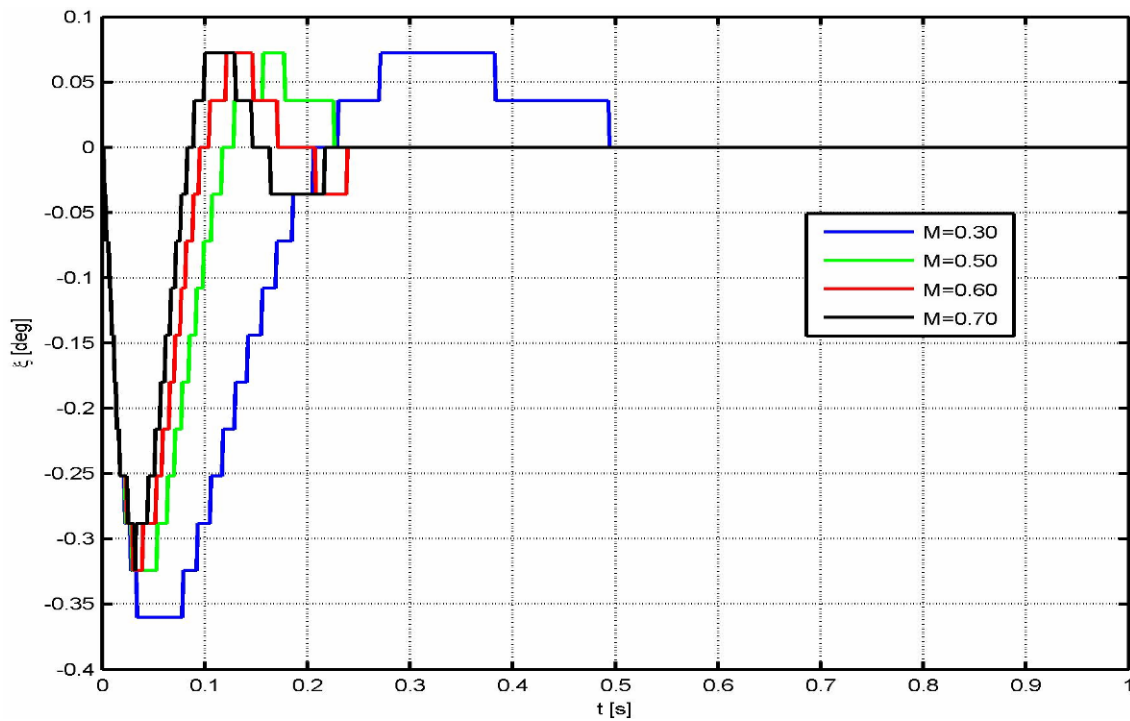
Sa dijagrama dobijenih kao odgovor autopilota u kom je uključena i dinamika aktuatora vidi se da su premašaji veći nego u slučaju sa zanemarenom dinamikom aktuatora. Takođe se vidi da je uticaj dinamike aktuatora izraženiji pri manjim brzinama, odnosno Mahovim brojevima. U skladu sa prethodno navedenim izvršena je korekcija pojačanja po uglu valjanja tako da se obezbedi veće prigušenje pri manjim brzinama, Slika 3-19 Pojačanje po uglu valjanja usklađeno sa dinamikom aktuatora.



Slika 3-19 Pojačanje po uglu valjanja usklađeno sa dinamikom aktuatora



Slika 3-20 Odgovor autopilota valjanja sa dinamikom aktuatora za korigovana pojačanja



Slika 3-21 Komanda valjanja za željeni ugao valjanja autopilota sa uticajem dinamike aktuatora i korigovanim pojačanjima

Odgovori autopilota na ulaz od 0.1rad , u zavisnosti od Mahovog broja, sa korigovanim pojačanjem po uglu valjanja dobijeni su simulacijom u SIMULINK -u, Slika 3-20 i Slika 3-21.

4 Navigacioni algoritam

Potreba za navigacionim algoritmom posledica je jedne od faze vođenja rakete, vođenja po trajektoriji. Obzirom da i sam navigacioni algoritam unosi u zakone vođenja greške i određena ograničenja ovo poglavlje se bavi optimizovanjem navigacionog algoritma na osnovu ograničenja usled tačnosti i stabilnosti signala sa senzora i ograničenja koja su posledica veličine koraka integracije i brzine procesora koji se koristi u računaru vođenja i autopilota. Inerciona navigacija koja se ovde primenjuje je „strapdown“ inerciona navigacija (SINS) što podrazumeva fiksnu inercionu mernu sekciju (IMU), gde se na osnovu integracije brzinskih žiroskopa dobija analitička slika navigacionog sistema. U ovom konkretnom slučaju koristi se IMU baziran na mikro-elektro-mehaničkim senzorima (MEMS, Prilog 5. IMU senzor) pre svega zbog svoje cene, veličine i dostupnosti.

4.1 Osnovi inercione navigacije

Osnovna ideja inercione navigacije bazira se na integraciji ubrzanja koje mere akcelerometri. Akcelerometri mere specifičnu silu koja se može predstaviti kao:

$$\mathbf{f} = \mathbf{a} - \mathbf{g} \quad 4-1$$

gde su:

$\mathbf{a}$ - apsolutno ubrzanje, ubrzanje u odnosu na inercioni koordinatni sistem

$\mathbf{g}$ - gravitaciono ubrzanje

Obzirom da se u ovom slučaju zanemaruje uticaj rotacije Zemlje, u skladu sa vremenom leta i dometom, važi sledeća relacija između ubrzanja i brzine u odnosu na inercioni koordinatni sistem

$$\mathbf{a} = \left. \frac{d\mathbf{V}}{dt} \right|_I \quad 4-2$$
$$\left. \frac{d\mathbf{V}}{dt} \right|_I = \left. \frac{d\mathbf{V}}{dt} \right|_N + \boldsymbol{\omega}_N \times \mathbf{V}$$

gde su:

$\left. \frac{dV}{dt} \right|_N$ - izvod brzine u odnosu na navigacioni koordinatni sistem

ω_N - apsolutna ugaona brzina navigacionog koordinatnog sistema

U algoritmu inercione navigacije usvojen je navigacioni koordinatni sistem koji se u odnosu na jednačine opisane u matematičkom modelu kretanja rakete razlikuje i po orijentaciji. Ovaj izbor je posledica želje da koordinata visine bude pozitivne veličina. Sa druge strane radi numerički tačnijeg određivanja azimuta pravca ovde se pod navigacionim koordinatnim sistemom smatra Azimutni koordinatni sistem. (Prilog 1. Definicije koordinatnih sistema).

U skladu sa ENUp koordinatnim sistemom važe sledeće relacije:

$$\begin{aligned} f_E &= \frac{dV_E}{dt} + \omega_N V_{up} - \omega_{up} V_N \\ f_N &= \frac{dV_N}{dt} - \omega_E V_{up} + \omega_{up} V_E \\ f_{up} &= \frac{dV_{up}}{dt} + \omega_E V_N - \omega_N V_E + g \end{aligned} \quad 4-3$$

Obzirom je usvojen WGS84 standard za oblik Zemlje (Prilog 3. Geografski standard Zemlje) projekcije ugaonih brzina ENUp koordinatnog sistema se mogu dati u sledećem obliku:

$$\begin{aligned} \omega_E &= -\frac{V_N}{R_\varphi + h} \\ \omega_N &= \frac{V_E}{R_\lambda + h} \\ \omega_{up} &= \frac{V_E}{R_\lambda + h} \tan \varphi \end{aligned} \quad 4-4$$

gde su:

h - visina iznad referentnog elipsoida

R_φ, R_λ - radijusi krivine referentnog elipsoida u pravcu sever-jug i istok-zapad, respektivno

$$R_{\varphi} = \frac{R_e(1-e^2)}{(1-e^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}$$

$$R_{\lambda} = \frac{R_e}{(1-e^2\sin^2\varphi)^{\frac{1}{2}}}$$
4-5

gde su:

R_e - je ekvatorijalni radijus Zemlje

$e^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2}$ - ekscentricitet referentnog elipsoida

Kako akcelerometri mere ubrzanja u koordinatnom sistemu vezanom za raketu potrebno je odrediti matricu transformacije iz vezanog koordinatnog sistema u navigacioni koordinatni sistem, i pri tom se koriste informacije sa žiroskopa.

Navigacioni algoritam koji je ovde usvojen može se podeliti u dva dela,[13],[14],[15]. Prvi deo koji radi sa većom učestanošću $500Hz$ ima ulogu da odredi inkremente brzine i uglova dok drugi deo algoritma koji radi osam puta sporije, $62.5Hz$, obezbeđuje informacije o položaju i brzini u navigacionom koordinatnom sistemu, koji su potrebni zakonu vođenja. Ovakav algoritam je povoljan sa stanovišta optimizacije računskog vremena u računarima vođenja koji je na osnovu istog takođe podeljen u osam celina.

Takođe ovaj algoritam SINS-a se pokazao matematički stabilniji u odnosu na druge, u određivanju kvaterniona položaja pri istom vremenu sempliranja. Naime pri integraciji ugaonih brzina u cilju da se dobije ugaoni položaj u zavisnosti od vremena sempliranja greška u normi kvaterniona raste sa vremenom, pa i pored renormalizacije utiče i na ukupnu grešku u položaju i brzini. Kod ovog algoritma ta greška se ne javlja,[16],[17].

4.2 Određivanje inkremenata uglova i matrice transformacije

Prvi korak u određivanju matrice transformacije je određivanje ugaonih inkremenata, i kao što je gore objašnjeno ovaj proces se ponavlja sa osnovnim korakom integracije koji je u ovom slučaju $t_s = 2ms$.

$$\alpha_{x_b, y_b, z_b} = \int_{t_k}^{t_k + t_s} \omega_{x_b, y_b, z_b} dt \quad 4-6$$

gde su:

ω_{x_b, y_b, z_b} - signali sa žiroskopa u vezanom koordinatnom sistemu

Proces izračunavanja kvaterniona položaja, odnosno matrice transformacije podeljen je takođe u dva koraka. Prvi koji izračunava kvaternion između navigacionog koordinatnog sistema i vezanog koordinatnog sistema, pod pretpostavkom da se navigacioni koordinatni sistem može smatrati inercionim tokom jednog koraka integracije i drugi korak u kome se vrši korekcija kvaterniona usled rotacije navigacionog koordinatnog sistema. Ako uporedimo ove dve transformacije možemo da zaključimo kako je prva transformacija rotacija „brzog“ kretanja. Jedan od razloga zašto se ovaj algoritam pokazao numerički stabilniji je upravo i odvajanje priraštaja „brze“ rotacije od priraštaja „spore“ rotacije. Spora rotacija je ako uporedimo intenzitete ugaonih brzina oko četiri puta i više manja od brze rotacije, što dovodi do grešaka u numeričkom integraljenju kada se ove dve rotacije kombinuju.

U skladu sa prethodno navedenim važe sledeće relacije:

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_{n+1}^I &= \mathbf{q}_n \Delta \mathbf{q}_f \\ \mathbf{q}_{n+1} &= \Delta \mathbf{q}_s \mathbf{q}_{n+1}^I \end{aligned} \quad 4-7$$

gde su:

$\mathbf{q}^I$ - kvaternion rotacije iz vezanog u inercioni koordinatni sistem

$\mathbf{q}$ - kvaternion rotacije iz vezanog u navigacioni koordinatni sistem

$\Delta \mathbf{q}_f$ - priraštaj kvaterniona brze rotacije

$\Delta \mathbf{q}_s$ - priraštaj kvaterniona spore rotacije

Kvaternion brze rotacije može se predstaviti u obliku rotacionog vektora na sledeći način:

$$\Delta \mathbf{q}_f = \begin{bmatrix} \Delta q_{f0} \\ \Delta q_{f1} \\ \Delta q_{f2} \\ \Delta q_{f3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \frac{\Delta \Phi}{2} \\ \frac{\Delta \Phi_{xb}}{\Delta \Phi} \sin \frac{\Delta \Phi}{2} \\ \frac{\Delta \Phi_{yb}}{\Delta \Phi} \sin \frac{\Delta \Phi}{2} \\ \frac{\Delta \Phi_{zb}}{\Delta \Phi} \sin \frac{\Delta \Phi}{2} \end{bmatrix} \quad 4-8$$

Za male uglove važi sledeća relacija:

$$\Delta \Phi = \int_{t_n}^{t_n+t_m} \omega dt + \frac{1}{2} \int_{t_n}^{t_n+t_m} (\Phi \times \omega) dt \quad 4-9$$

gde je $t_m = 8t_s$ - korak spore integracije

Za rešavanje prethodne jednačine koristiće se algoritam u 4 koraka

$$\begin{aligned} \Delta \Phi = \begin{bmatrix} \Delta \Phi_{xb} \\ \Delta \Phi_{yb} \\ \Delta \Phi_{zb} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^4 \alpha_{xb}(j) \\ \sum_{j=1}^4 \alpha_{yb}(j) \\ \sum_{j=1}^4 \alpha_{zb}(j) \end{bmatrix} + \frac{2}{3} \left(P_1 \begin{bmatrix} \alpha_{xb}(2) \\ \alpha_{yb}(2) \\ \alpha_{zb}(2) \end{bmatrix} + P_3 \begin{bmatrix} \alpha_{xb}(4) \\ \alpha_{yb}(4) \\ \alpha_{zb}(4) \end{bmatrix} \right) + \\ &+ \frac{1}{2} (P_1 + P_2) \begin{bmatrix} \alpha_{xb}(3) \\ \alpha_{yb}(3) \\ \alpha_{zb}(3) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_{xb}(4) \\ \alpha_{yb}(4) \\ \alpha_{zb}(4) \end{bmatrix} + \frac{1}{30} (P_1 - P_2) \begin{bmatrix} \alpha_{xb}(3) \\ \alpha_{yb}(3) \\ \alpha_{zb}(3) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \alpha_{xb}(4) \\ \alpha_{yb}(4) \\ \alpha_{zb}(4) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad 4-10$$

gde su:

$$\alpha(j) = \alpha^k(t_s) + \alpha^{k-1}(t_s)$$

$$P_j = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha_{zb}(j) & \alpha_{yb}(j) \\ \alpha_{zb}(j) & 0 & -\alpha_{xb}(j) \\ -\alpha_{yb}(j) & \alpha_{xb}(j) & 0 \end{bmatrix}$$

Ako se vratimo sada na kvaternion spore rotacije važi sledeća relacija:

$$\Delta \mathbf{q}_s = \begin{bmatrix} \cos \frac{\Omega t_m}{2} \\ -\frac{\Omega_x}{\Omega} \sin \frac{\Omega t_m}{2} \\ -\frac{\Omega_y}{\Omega} \sin \frac{\Omega t_m}{2} \\ -\frac{\Omega_z}{\Omega} \sin \frac{\Omega t_m}{2} \end{bmatrix} \quad 4-11$$

gde su:

$\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z$ - projekcije apsolutne ugaone brzine navigacionog koordinatnog sistema na njegove ose

Ako zanemarimo rotaciju Zemlje važi sledeće:

$$\begin{aligned} \Omega_x &= -\frac{V_y}{R_y} - \frac{V_x}{a} e^2 b_{13} b_{23} \\ \Omega_y &= \frac{V_x}{R_x} + \frac{V_y}{a} e^2 b_{13} b_{23} \\ \Omega_z &= 0 \\ \frac{1}{R_x} &= \frac{1}{a} \left(1 - e^2 \frac{b_{33}^2}{2} + e^2 b_{13}^2 - \frac{h}{a} \right) \\ \frac{1}{R_y} &= \frac{1}{a} \left(1 - e^2 \frac{b_{33}^2}{2} + e^2 b_{23}^2 - \frac{h}{a} \right) \end{aligned} \quad 4-12$$

Pri čemu su b_{ij} članovi matrice transformacije iz koordinatnog sistema vezanog za Zemlju (ECEF) u navigacioni koordinatni sistem $\mathbf{B}_{ECEF}^n$.

Puasonova jednačina za matricu transformacije iz koordinatnog sistema vezanog za Zemlju (ECEF) u navigacioni koordinatni sistem može se napisati u sledećem obliku:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{B}}_n^{ECEF} &= \mathbf{B}_n^{ECEF} \Delta \boldsymbol{\omega}_{n-ECEF} \\ \mathbf{B}_{ECEF}^n &= \left(\mathbf{B}_n^{ECEF} \right)^T \\ \Delta \boldsymbol{\omega}_{n-ECEF} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \Omega_y \\ 0 & 0 & -\Omega_x \\ -\Omega_y & \Omega_x & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad 4-13$$

Rekurzivno rešenje Puasonove jednačine se može predstaviti na sledeći način:

$$\begin{aligned}
 b_{12}(N) &= b_{12}(N-1) - \Omega_y b_{32}(N-1) t_m \\
 b_{22}(N) &= b_{22}(N-1) + \Omega_x b_{32}(N-1) t_m \\
 b_{32}(N) &= b_{32}(N-1) + (\Omega_y b_{12}(N-1) - \Omega_x b_{22}(N-1)) t_m \\
 b_{13}(N) &= b_{13}(N-1) - \Omega_y b_{33}(N-1) t_m \\
 b_{23}(N) &= b_{23}(N-1) + \Omega_x b_{33}(N-1) t_m \\
 b_{33}(N) &= b_{33}(N-1) + (\Omega_y b_{13}(N-1) - \Omega_x b_{23}(N-1)) t_m \\
 b_{31}(N) &= b_{12}(N) b_{23}(N) - b_{22}(N) b_{13}(N)
 \end{aligned} \tag{4-14}$$

Kako su gore definisani i kvaternion brze i spore rotacije, na osnovu jednačine 4-7 može se odrediti kvaternion ukupne rotacije a sa njim i direktna kosinusna matrica koja predstavlja transformaciju iz vezanog u navigacioni koordinatni sistem. Ova matrica će biti ažurirana sa vremenskim korakom spore integracije.

$$\mathbf{C}_b^n = \begin{bmatrix} 1 - 2(q_2^2 + q_3^2) & 2(q_1 q_2 - q_0 q_3) & 2(q_0 q_2 + q_1 q_3) \\ 2(q_1 q_2 + q_0 q_3) & 1 - 2(q_1^2 + q_3^2) & 2(q_2 q_3 - q_0 q_1) \\ 2(q_1 q_3 - q_0 q_2) & 2(q_0 q_1 + q_2 q_3) & 1 - 2(q_1^2 + q_2^2) \end{bmatrix} \tag{4-15}$$

4.3 Određivanje brzine i položaja u prostoru

Kao što je ranije definisan priraštaj uglova na osnovu merenih signala sa žiroskopa, na isti način sada se definiše i priraštaj brzina na osnovu merenih signala sa akcelometra. Ovi priraštaji se takođe određuju sa brzim korakom integracije t_s .

$$\Delta W_{x_b, y_b, z_b} = \int_{t_k}^{t_k + t_s} a_{x_b, y_b, z_b} dt \tag{4-16}$$

gde su:

a_{x_b, y_b, z_b} - signali sa akcelometra u vezanom koordinatnom sistemu

Apsolutno ubrzanje može se napisati u sledećem obliku:

$$\left. \frac{d\mathbf{V}}{dt} \right|_I = \left. \frac{d\mathbf{V}}{dt} \right|_b + \boldsymbol{\omega}_b \times \mathbf{V} \tag{4-17}$$

gde su:

$\left. \frac{d\mathbf{V}}{dt} \right|_b$ -ukupni izvod brzine u odnosu na vezani koordinatni sistem

$\left. \frac{d\mathbf{V}}{dt} \right|_I$ -ukupni izvod brzine u odnosu na inercijalni koordinatni sistem

$\boldsymbol{\omega}_b$ - apsolutna ugaona brzina vezanog koordinatnog sistema

Projekcije specifične sile koje deluju u vezanom koordinatnom sistemu se dobijaju sa akcelometra, u skladu sa tim integracija će se vršiti u vezanom koordinatnom sistemu pa se prethodna jednačina može drugačije zapisati:

$$\left. \frac{d\mathbf{V}}{dt} \right|_b = \left. \frac{d\mathbf{V}}{dt} \right|_I - \boldsymbol{\omega}_b \times \mathbf{V} \quad 4-18$$

Ako primenimo integraciju, sa sporim korakom integracije na prethodnu jednačinu dobijamo sledeće:

$$\begin{aligned} \int_{t_k}^{t_k+t_m} \frac{d\tilde{V}_{x_b}}{dt} dt &= \int_{t_k}^{t_k+t_m} \frac{d\bar{V}_{x_b}}{dt} dt + \int_{t_k}^{t_k+t_m} (\omega_{z_b} V_{y_b} - \omega_{y_b} V_{z_b}) dt \\ \int_{t_k}^{t_k+t_m} \frac{d\tilde{V}_{y_b}}{dt} dt &= \int_{t_k}^{t_k+t_m} \frac{d\bar{V}_{y_b}}{dt} dt + \int_{t_k}^{t_k+t_m} (\omega_{x_b} V_{z_b} - \omega_{z_b} V_{x_b}) dt \\ \int_{t_k}^{t_k+t_m} \frac{d\tilde{V}_{z_b}}{dt} dt &= \int_{t_k}^{t_k+t_m} \frac{d\bar{V}_{z_b}}{dt} dt + \int_{t_k}^{t_k+t_m} (\omega_{y_b} V_{x_b} - \omega_{x_b} V_{y_b}) dt \end{aligned} \quad 4-19$$

Rekurzivno rešenje prethodnih jednačina obavlja se u 8 koraka iz čega je i usvojen korak spore integracije $t_m = 8t_s$.

$$\begin{aligned} W_{x_b,k} &= W_{x_b,k-1} + W_{y_b,k-1} \alpha_{z_b,k} - W_{z_b,k-1} \alpha_{y_b,k} + \Delta W_{x_b,k} \\ W_{y_b,k} &= W_{y_b,k-1} + W_{z_b,k-1} \alpha_{x_b,k} - W_{x_b,k-1} \alpha_{z_b,k} + \Delta W_{y_b,k} \\ W_{z_b,k} &= W_{z_b,k-1} + W_{x_b,k-1} \alpha_{y_b,k} - W_{y_b,k-1} \alpha_{x_b,k} + \Delta W_{z_b,k} \\ W_{z_b,k} &= W_{z_b,k-1} + W_{x_b,k} \alpha_{y_b,k} - W_{y_b,k} \alpha_{x_b,k} + \Delta W_{z_b,k} \\ W_{y_b,k} &= W_{y_b,k-1} + W_{z_b,k} \alpha_{x_b,k} - W_{x_b,k} \alpha_{z_b,k} + \Delta W_{y_b,k} \\ W_{x_b,k} &= W_{x_b,k-1} + W_{y_b,k} \alpha_{z_b,k} - W_{z_b,k} \alpha_{y_b,k} + \Delta W_{x_b,k} \end{aligned} \quad 4-20$$

Za početne vrednosti pri svakom novom koraku spore integracije uzima se sledeće: $W_{x_b} = W_{y_b} = W_{z_b} = 0$

Nakon izračunavanja priraštaja brzine u vezanom koordinatnom sistemu može se odrediti i priraštaj brzine u navigacionom koordinatnom sistemu, obzirom da je već

definisana i matrica transformacije između vezanog i navigacionog koordinatnog sistema.

$$\begin{bmatrix} \Delta W_x \\ \Delta W_y \\ \Delta W_z \end{bmatrix} = \mathbf{C}_b^n \begin{bmatrix} W_{x_b} \\ W_{y_b} \\ W_{z_b} \end{bmatrix} \quad 4-21$$

Brzine rakete u odnosu na Zemlju u navigacionom koordinatnom sistemu mogu se sad predstaviti sledećim relacijama, uz napomenu da je rotacija Zemlje zanemarena.

$$\begin{aligned} V_x &= W_x - \int_{t_0}^t V_z \Omega_y dt \\ V_y &= W_y + \int_{t_0}^t V_z \Omega_x dt \\ V_z &= W_z - \int_{t_0}^t (V_y \Omega_x - V_x \Omega_y + g) dt \end{aligned} \quad 4-22$$

gde su:

$\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z$ - projekcije apsolutne ugaone brzine navigacionog koordinatnog sistema na njegove ose

W_x, W_y, W_z - sume priraštaja projekcija brzina u navigacionom koordinatnom sistemu

Određivanje položaja u navigacionom koordinatnom sistemu može se rešavati na dva načina: integracijom brzina, što je slučaj u određivanju visine, ili vezom između matrice definisane Puasonovom jednačinom i njene definicije:

$$\mathbf{B}_{ECEF}^n = \begin{bmatrix} -\sin \varphi \cos \lambda \sin \varepsilon - \sin \lambda \cos \varepsilon & \sin \varphi \sin \lambda \sin \varepsilon + \cos \lambda \cos \varepsilon & \cos \varphi \sin \varepsilon \\ -\sin \varphi \cos \lambda \cos \varepsilon + \sin \lambda \sin \varepsilon & -\sin \varphi \sin \lambda \cos \varepsilon - \cos \lambda \sin \varepsilon & \cos \varphi \cos \varepsilon \\ \cos \varphi \cos \lambda & \cos \varphi \sin \lambda & \sin \varphi \end{bmatrix} \quad 4-23$$

gde su:

φ - geografska širina

λ - geografska dužina

ε - azimut pravca

Iz relacije prethodne jednačine i jednačine 4-14 mogu se odrediti geografski navigacioni parametri:

$$\begin{aligned}
 \varphi &= \arctan \frac{b_{33}}{b_0} & [-90, +90] \\
 \lambda &= \arctan \frac{b_{32}}{b_{31}} & [-180, 180] \\
 \varepsilon &= \arctan \frac{b_{13}}{b_{23}} & [0, 360] \\
 b_0 &= \sqrt{b_{13}^2 + b_{23}^2}
 \end{aligned}
 \tag{4-24}$$

Kako je sada određen i azimut pravac mogu se odrediti i projekcije brzine u ENUp koordinatnom sistemu:

$$\begin{aligned}
 V_N &= V_y \cos \varepsilon + V_x \sin \varepsilon \\
 V_E &= -V_y \sin \varepsilon + V_x \cos \varepsilon
 \end{aligned}
 \tag{4-25}$$

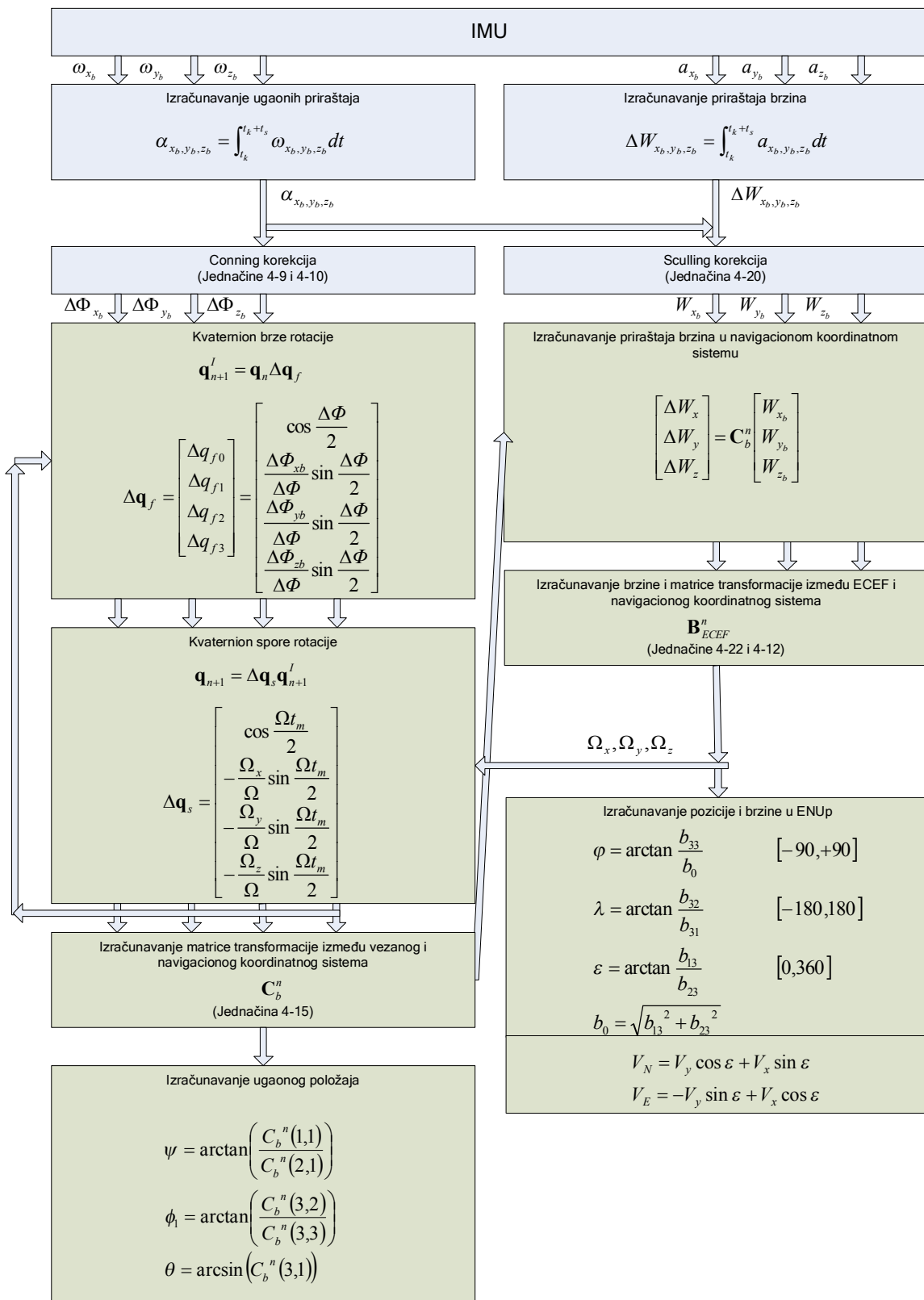
I položaj u ENUp koordinatnom sistemu:

$$\begin{aligned}
 E &= \frac{180}{\pi} (\lambda - \lambda_0) \cos(\varphi_0) a \\
 N &= \frac{180}{\pi} (\varphi - \varphi_0) a \\
 h &= \int_{t_0}^t V_z dt
 \end{aligned}
 \tag{4-26}$$

Na sličan način koristeći definiciju matrice iz navigacionog koordinatnog sistema u vezani možemo doći i do relacija za ugaone položaje:

$$\begin{aligned}
 \psi &= \arctan \left(\frac{C_b^n(1,1)}{C_b^n(2,1)} \right) \\
 \phi_1 &= \arctan \left(\frac{C_b^n(3,2)}{C_b^n(3,3)} \right) \\
 \theta &= \arcsin(C_b^n(3,1))
 \end{aligned}
 \tag{4-27}$$

Na Slici 4-1 dat je blok dijagram algoritma navigacije.



Slika 4-1 Blok dijagram SINS algoritma

5 Faze vođenja rakete i izbor osnovnih algoritama vođenja

Kao što je ranije pomenuto razmatraju se tri različita tipa vođenja: vođenje po trajektoriji, manuelno vođenje i završno samonavođenje na cilj putem TV glave. Ovo poglavlje ima za cilj usvajanje osnovnih algoritama vođenja po različitim fazama vođenja. Kako se faze vođenja smenjuju tokom leta rakete od ispravljanja u horizontalni let preko ručnog vođenja do završne faze samonavođenja, istim redom će ovde biti i opisani pojedinačni algoritmi.

5.1 Vođenje po trajektoriji

Osnovna uloga vođenja po trajektoriji je da što pre prevede raketu u horizontalni let na željenoj visini kako bi operater imao dovoljno vremena da detektuje cilj pomoću TV glave. Druga uloga vođenja po trajektoriji odnosi se više na vođenje u horizontalnoj ravni i može biti održavanje pravca gađanja, kako bi se ispravili uticaji spoljnih poremećaja kao što je vetar ili poremećaji usled nesavršenosti izrade raketnih motora, ili vođenje u horizontalnoj ravni kao posledica ograničenja lansera u zauzimanju pravca gađanja ili drugih taktičkih zahteva.

Vođenje po trajektoriji zasniva se na poređenju trenutne trajektorije sa željenom trajektorijom u svakom koraku integracije, i određivanju potrebnog normalnog ubrzanja kako bi se greška ispravila. Postoji veliki broj raznih tipova vođenja po trajektoriji koji pored greške u putanji, prilikom izračunavanja potrebnog normalnog ubrzanja koriste i grešku u brzini ili njenom uglu.

Obzirom na olakšavajuću okolnost da je brzina rakete približno konstantna i da se raketa vodi tokom celog vremena leta i kako bi se smanjio broj informacija koje se šalju raketi pred lansiranje, odnosno upisuju u memoriju letnog računara, a time povećala i brzina pripreme, ovde će biti korišćen algoritam koji koristi samo grešku po putanji i to u funkciji od pređenog puta,[18].

Odabrani algoritam je dosta jednostavan, ne zahteva optimizaciju pojačanja zbog promenljivih dinamičkih osobina rakete i zasnovan je na razmatranju geometrije prelaska iz trenutne pozicije u željenu, Slika 5-1 Geometrija vođenja u referentnu tačku.

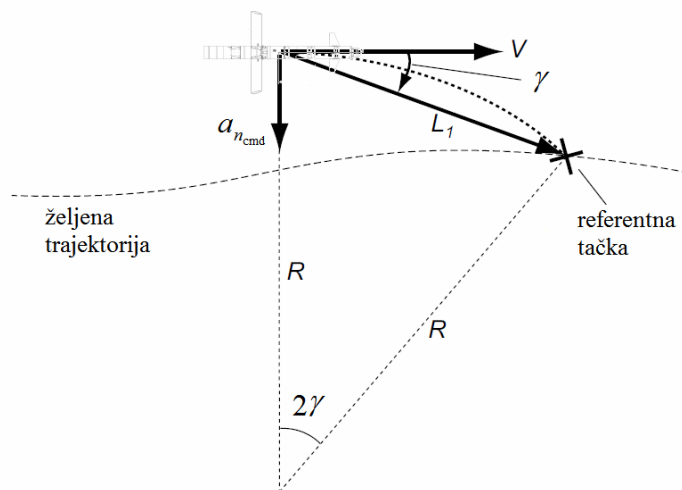
$$a_{n_{cmd}} = 2 \frac{V^2}{L_1} \sin \gamma \quad 5-1$$

Osobine algoritma vođenja:

- Pravac normalnog ubrzanja zavisi od znaka ugla između pravca L_1 i vektora brzine, iz čega sledi važna osobina zakona vođenja da brzina rakete teži pravcu L_1 .
- Normalno ubrzanje je ekvivalentno centripetalnom ubrzanju potrebnom da se raketa prevede iz trenutne pozicije u referentnu po krivini određenoj radijusom R

$$a_{cp} = \frac{V^2}{R} = 2 \frac{V^2}{L_1} \sin \gamma = a_{n_{cmd}} \quad 5-2$$

$$L_1 = 2R \sin \gamma$$



Slika 5-1 Geometrija vođenja u referentnu tačku

Usvojeni algoritam je izmenjen, odnosno prilagođen načinu zadavanja trajektorije koji se zahteva ovim radom. Pod pretpostavkom da je trajektorija poznata u azimutnom koordinatnom sistemu i zadata u funkciji pređenog puta, $h = h(D)$, $y = y(D)$, važe sledeće relacije u vertikalnoj ravni:

$$L_1 = \sqrt{\Delta h^2(D) + \Delta x^2}$$

$$\gamma_v = \arcsin\left(\frac{w_{Az}}{U_{Az}}\right) - \arctan\left(\frac{\Delta h(D)}{\Delta x}\right) \quad 5-3$$

Za horizontalnu ravan izvode se sledeći izrazi:

$$L_1 = \sqrt{\Delta y^2(D) + \Delta x^2}$$

$$\gamma_h = \arctan\left(\frac{-v_{Az}}{U_{Az}}\right) - \arctan\left(\frac{\Delta y(D)}{\Delta x}\right) \quad 5-4$$

Obzirom na prethodno razmatranje razloga vođenja po trajektoriji i tipova trajektorija usvojeno je da je rezolucija zadavanja trajektorije od 200m dovoljna, pa je vođenje pojednostavljeno tako da je $\Delta x = \text{const} = 200m$, čime se izbegava numerička nestabilnost pri približavanju referentnoj tački, a greške po visini i pravcu se određuju tako što se koristi interpolacija vektora trajektorije za vrednost $D = \sqrt{(x + \Delta x)^2 + y^2}$. Pošto je greška po daljini konstantna, željena ubrzanja su izmenjena čime se ostvaruje brže i tačnije prilaženje rakete referentnoj tački. U vertikalnoj ravni je uvedena i kompenzacija gravitacionog ubrzanja kako bi se obezbedila dodatna stabilnost rakete.

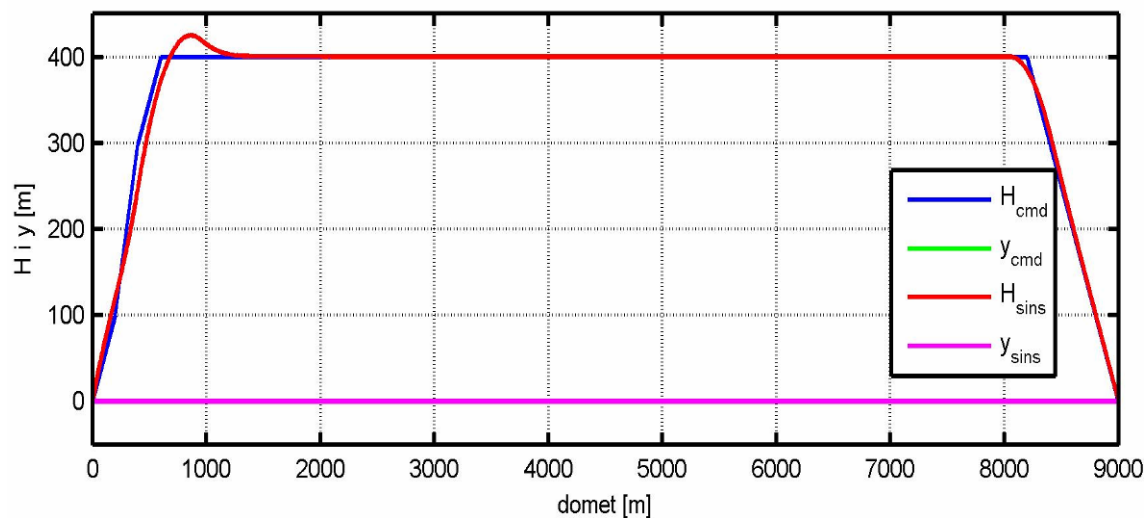
$$a_{y_{cmd}} = -3 \frac{V^2}{L_1} \sin \gamma_h$$

$$a_{z_{cmd}} = -3 \frac{V^2}{L_1} \sin \gamma_v + g_z \quad 5-5$$

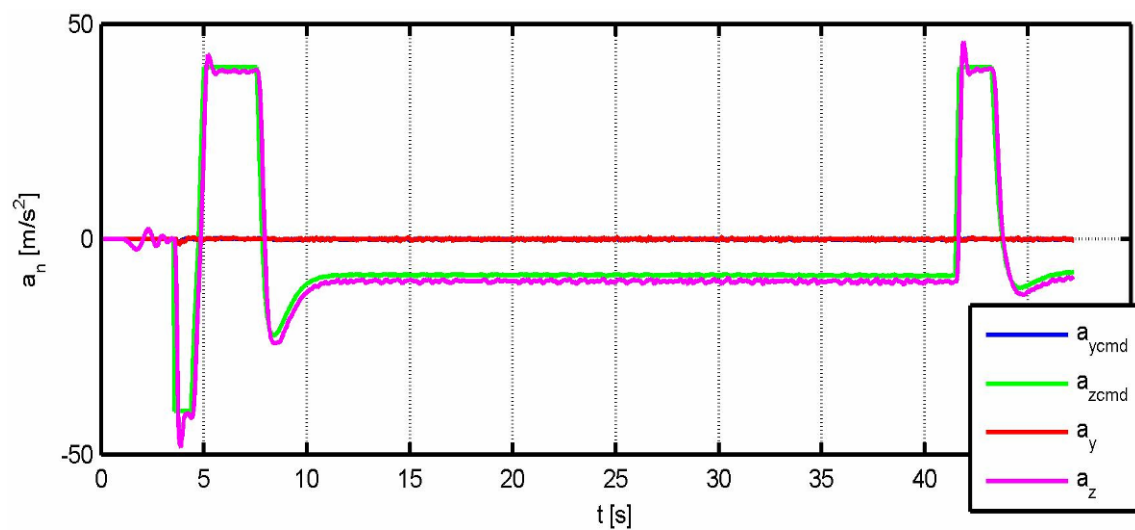
Na sledećim dijagramima: Slika 5-2 do Slika 5-13 prikazani su rezultati dobijeni 7DOF simulacijom pod pretpostavkama:

- aktivan autopilot valjanja
- željena ubrzanja zakona vođenja su ulazi u autopilote propinjanja i skretanja koji su izučavani u poglavlju 4;
- vođenje počinje nakon završetka rada buster motora;
- obuhvaćena je dinamika aktuatora;
- uzima se u obzir pozicija IMU senzora, ograničenja merenja, rezolucija i njihove deklarirane greške (Prilog 5. IMU senzor);
- dozvoljeno maksimalno normalno ubrzanje iznosi

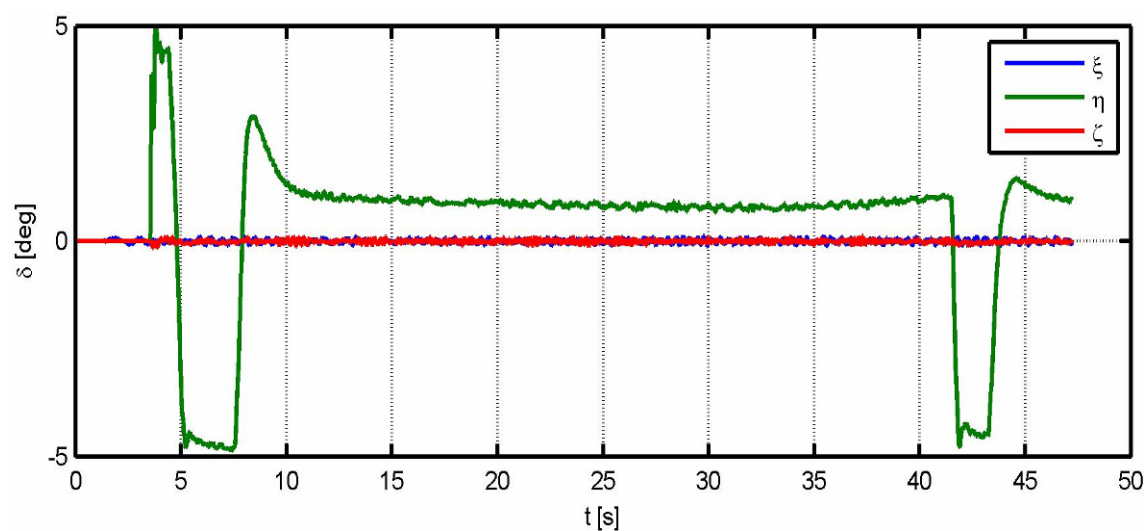
$$a_{nmax} = 40 \frac{m}{s^2}$$



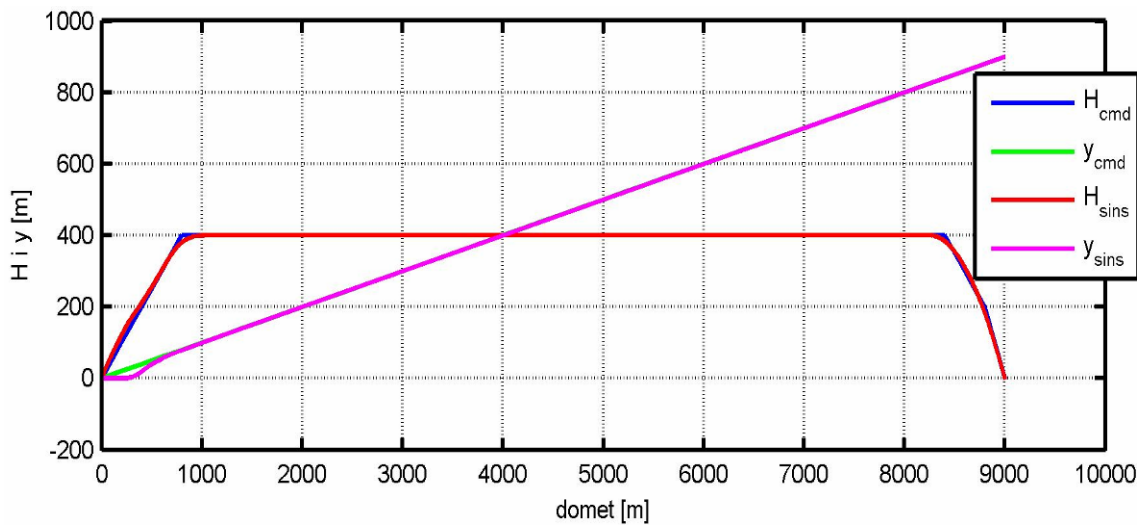
Slika 5-2 Vođenje po trajektoriji konstantne visine i osnovnog azimuta pravca



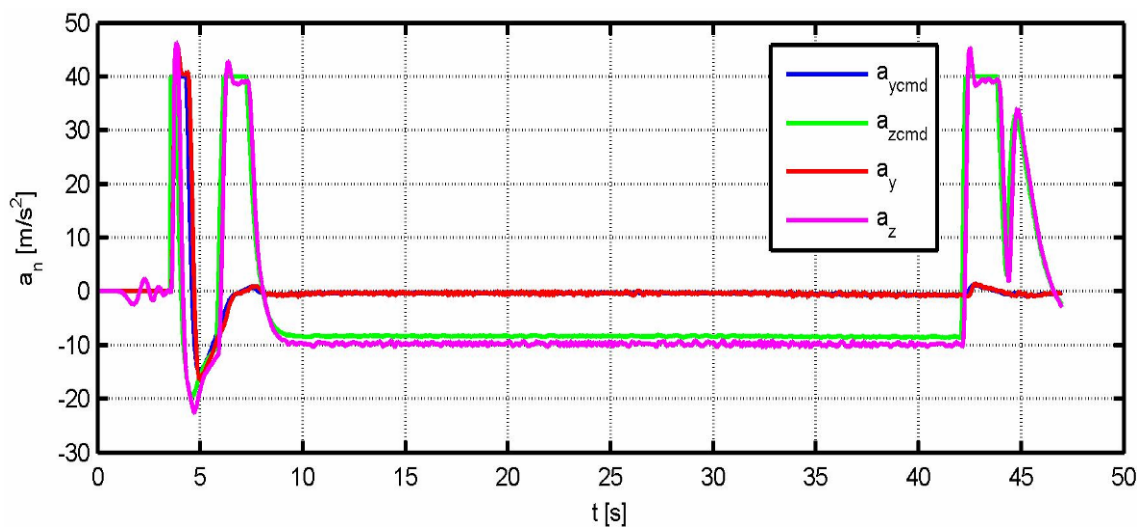
Slika 5-3 Željena i ostvarena normalna ubrzanja za trajektoriju sa Slika 5-2



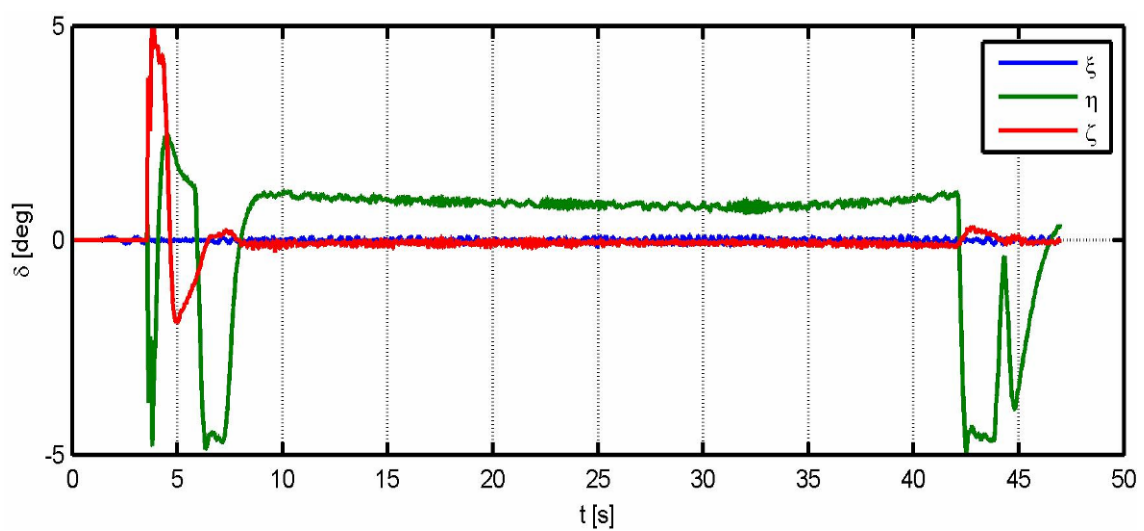
Slika 5-4 Efektivni otkloni krmila po valjanju, propinjanju i skretanju za trajektoriju sa Slika 5-2



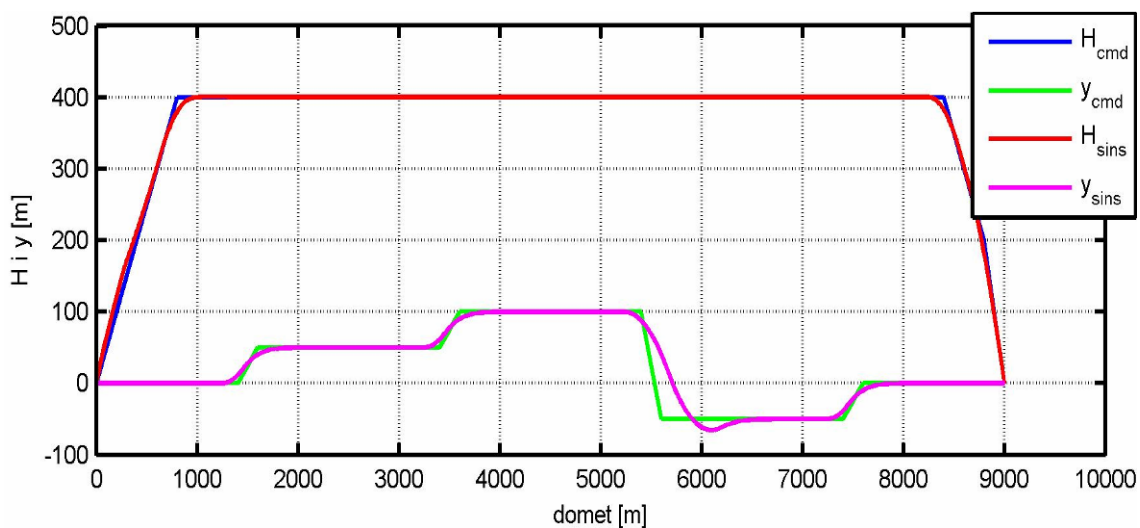
Slika 5-5 Vodenje po trajektoriji konstantne visine i zadatog azimuta pravca



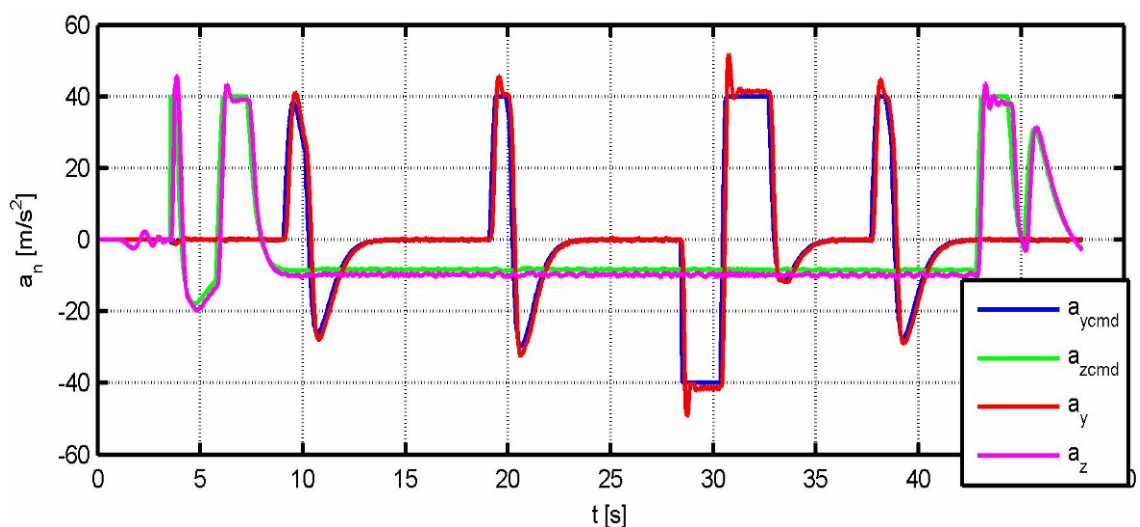
Slika 5-6 Željena i ostvarena normalna ubrzanja za trajektoriju sa Slika 5-5



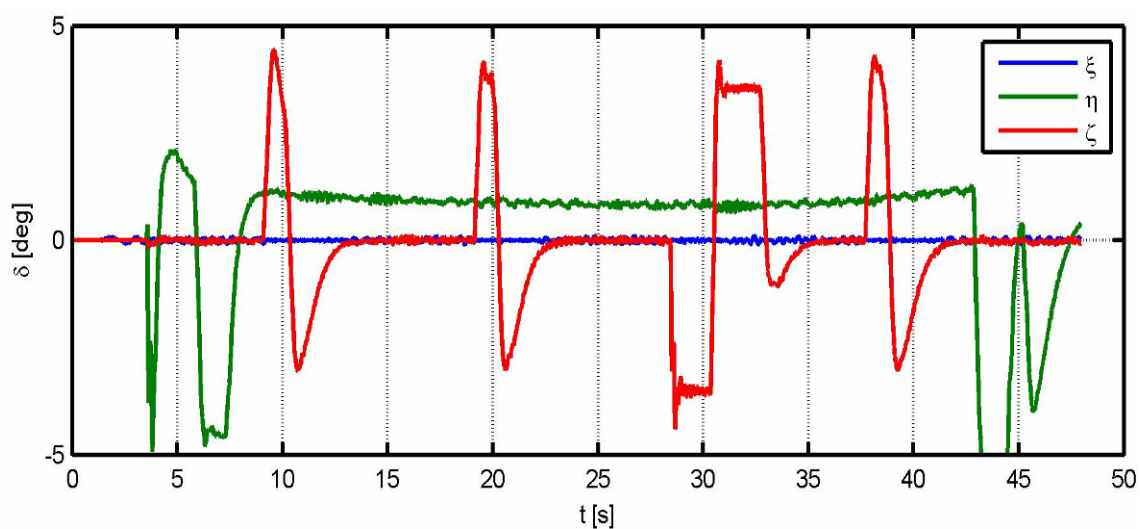
Slika 5-7 Efektivni otkloni krmila po valjanju, propinjanju i skretanju za trajektoriju sa Slika 5-5



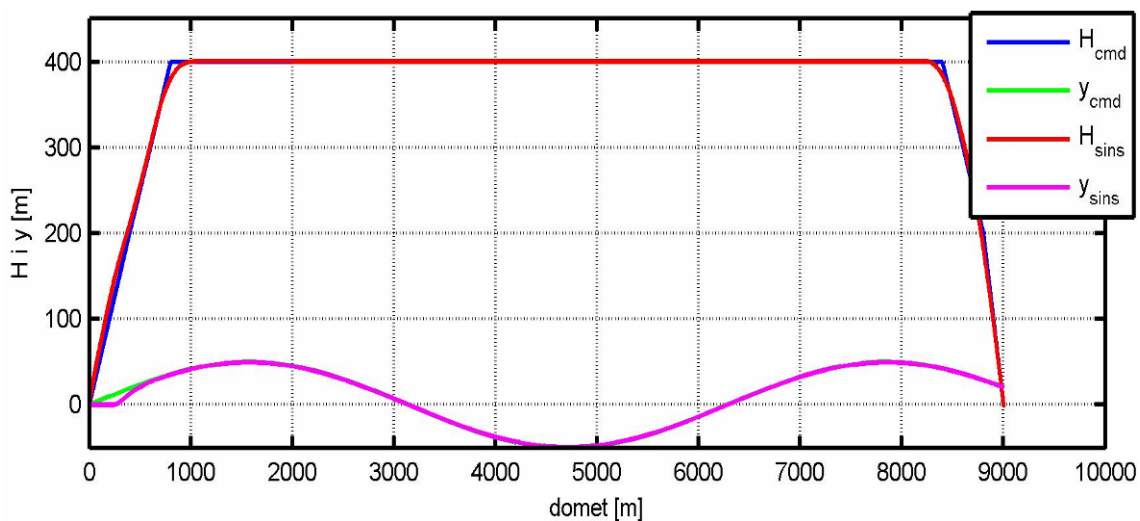
Slika 5-8 Vodenje po trajektoriji konstantne visine i stepenasto promenljivim pravcem



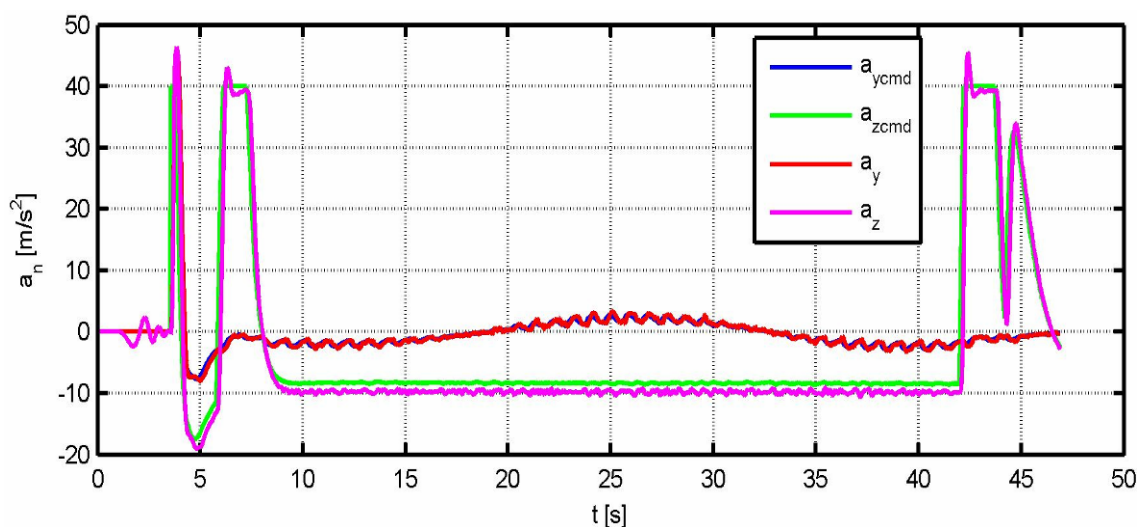
Slika 5-9 Željena i ostvorena normalna ubrzanja za trajektoriju sa Slika 5-8



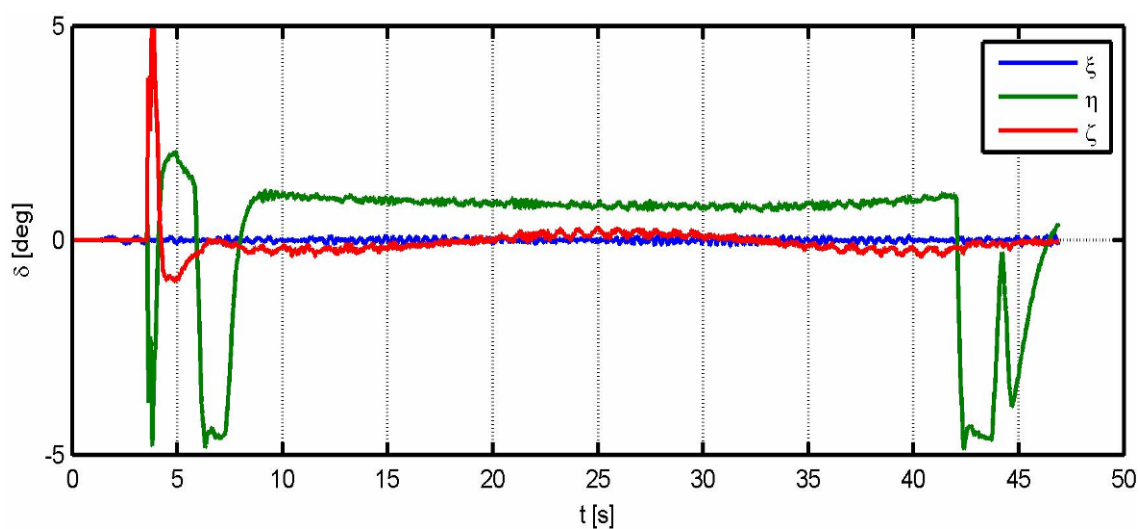
Slika 5-10 Efektivni otkloni krmila po valjanju, propinjanju i skretanju za trajektoriju sa Slika 5-8



Slika 5-11 Vodenje po trajektoriji konstantne visine i harmonijske promene pravca



Slika 5-12 Željena i ostvarena normalna ubrzanja za trajektoriju sa Slika 5-11



Slika 5-13 Efektivni otkloni krmila po valjanju, propinjanju i skretanju za trajektoriju sa Slika 5-11

Analizom prethodnih dijagrama može se zaključiti da zakon vođenja veoma dobro prati zadate trajektorije. Ako se posmatra vođenje u vertikalnoj ravni može se videti da su komande vođenja u vertikalnoj ravni maksimalne na početku vođenja. Maksimalne komande su posledica dve stvari, s jedne strane vođenje počinje tek od momenta kraja rada buster motora s druge strane zavise i od same željene trajektorije. Ako se uporede komande sa dijagrama Slika 5-4 i Slika 5-7 može se primetiti da je u drugom slučaju vođenje u vertikalnoj ravni bez premašaja i sa manjim komandama. Razlika u ova dva slučaja je upravo u željenoj trajektoriji, u drugom slučaju nagib krive odgovara nagibu balističke trajektorije za taj ugao elevacije, pa su i komande na startu manje. Može se primetiti i da je odgovor zakona vođenja na odskočne promene brz ali ga zbog toga takođe karakterišu maksimalne komande. Ako se pogleda vođenje u horizontalnoj ravni za harmonijsku promenu pravca može se videti da zakon vođenja jako dobro prati harmonijske promene i pri takvim promenama se takođe vidi da su komande takođe harmonijskog tipa.

Brzina odgovora zakona vođenja može se podešavati odabirom rezolucije zadavanja željene trajektorije. Sa povećanjem rezolucije se dobija i brži odgovor ali kako ta veličina figuriše u deliocu $\arctan\left(\frac{\Delta y(D)}{\Delta x}\right)$ treba voditi računa da odnos greške i rezolucije bude takav da greška bude manja od rezolucije kako ne bi došlo do oscilovanja u zakonu vođenja.

Ovde je u skladu sa očekivanim željenim trajektorijama i u skladu sa dinamikom objekta usvojena vrednost od $200m$, koja približno odgovara pređenom putu u jednoj sekundi, i ta vrednost je dala dobre rezultate.

5.2 Manuelno vođenje

Obzirom na mogućnost manualnog vođenja rakete putem optičkog kabla potrebno je razmotriti oscilacije koje su posledica reakcije operatera. Ovim problemom su se bavili autori, koji su razmatrali uticaj reakcija pilota koji upravlja avionom, [19]. Model se može primeniti i na rakete kod kojih se signal vođenja prenosi kablom. Međutim, treba imati u vidu da se očekuje veće kašnjenje i veća ograničenja u donošenju odluke operatera koji upravlja raketom koristeći informacije preko slike u odnosu na pilota koji upravlja avionom. Prvi problem je matematičko modeliranje, dok se drugi odnosi na psihološke efekte u realnoj situaciji i kojima se ovde nećemo baviti.

Kako bi se analizirao samo efekat kašnjenja koje operater unosi u sistem, u simulaciji će se pretpostaviti da su „odluke operatera“ posledica zakona vođenja po trajektoriji ali da su reakcije operatera takve da unose transportno i aperiodičko kašnjenje. Matematički model predstavljen je sledećom funkcijom prenosa:

$$\frac{a_{n_{op}}}{a_{n_{cmd}}}(s) = \frac{e^{-sT_D}}{1 + T_N s} \quad 5-6$$

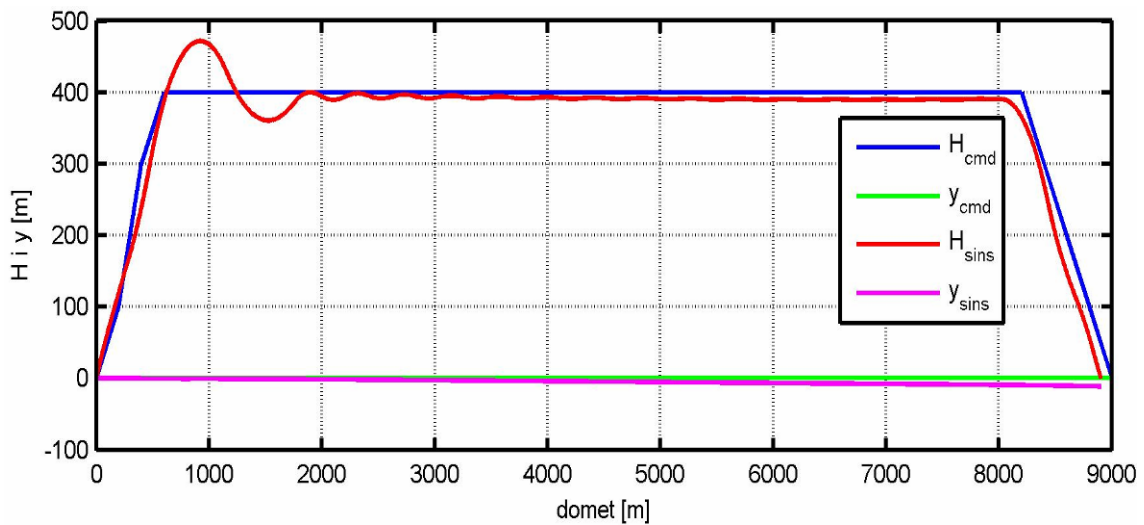
gde su:

T_D - transportno kašnjenje, $T_D = 0.1s$

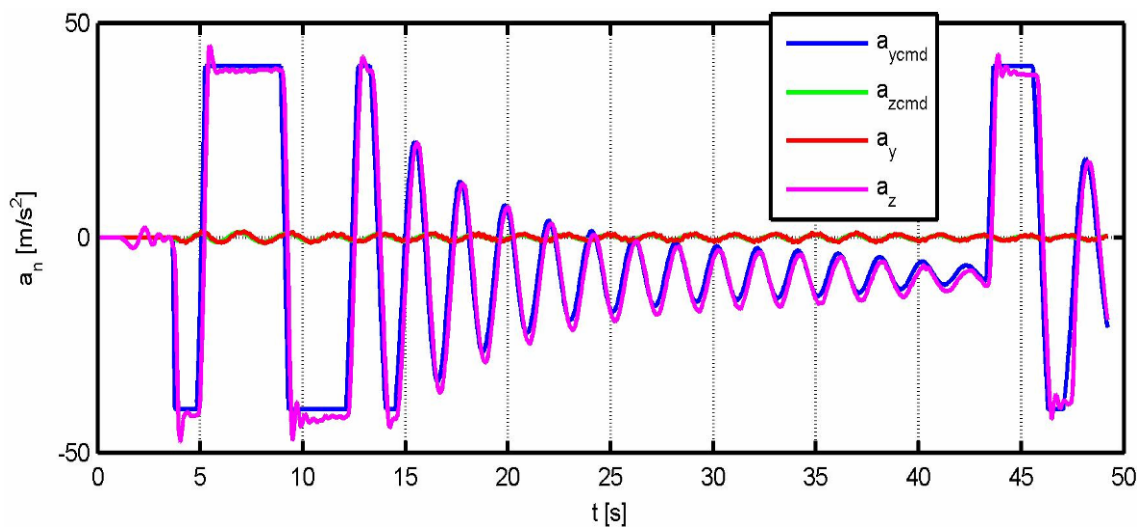
T_N - aperiodičko kašnjenje, $T_N = 0.2s$

Uticaj funkcije prenosa pilota (operatera) prikazane su na sledećim dijagramima. Za analizu su korišćene iste željene trajektorije kao i u prethodnom poglavlju, s tim što je funkcija prenosa pilota uvedena u direktnu granu između zakona vođenja i autopilota. Takođe, treba napomenuti da autopilot valjanja radi nezavisno od operatera, odnosno mora da obezbedi da nema valjanja kako bi operater uopšte mogao da koristi sliku u formiranju komande.

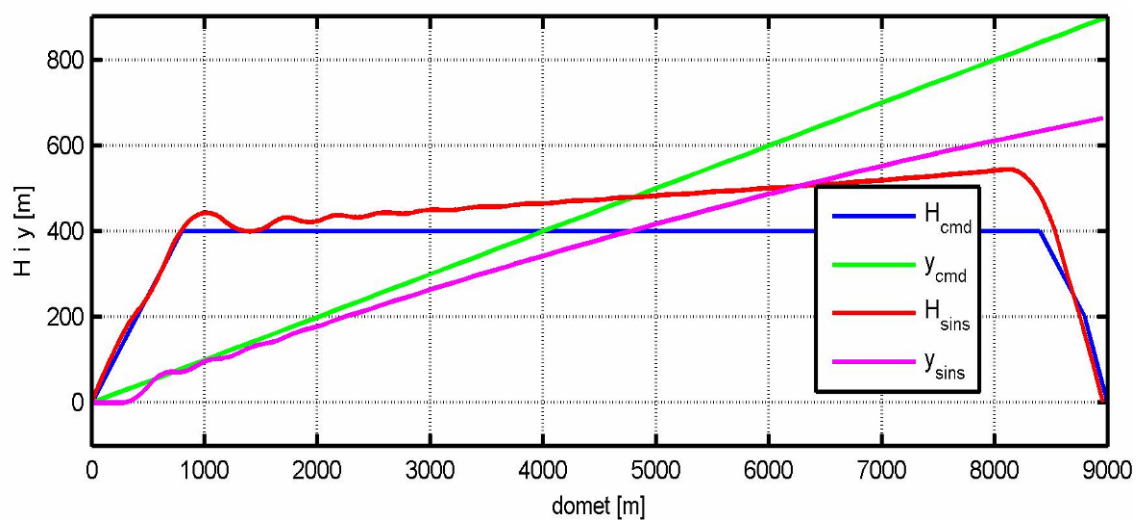
Na dijagramima: Slika 5-14 do Slika 5-21 prikazani su rezultati dobijeni 7DOF simulacijom.



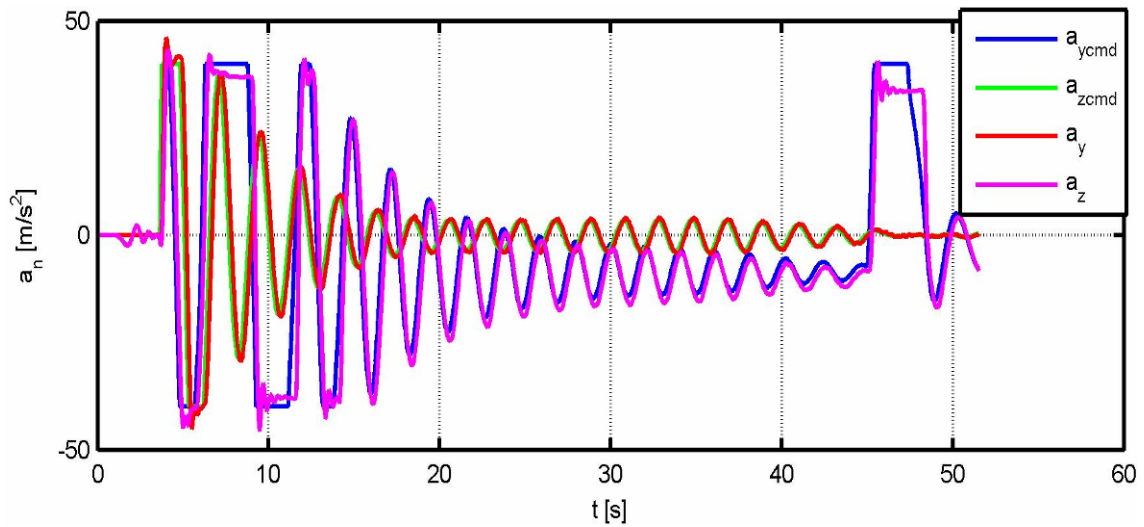
Slika 5-14 Manuelno vođenje po trajektoriji konstantne visine i osnovnog azimuta pravca



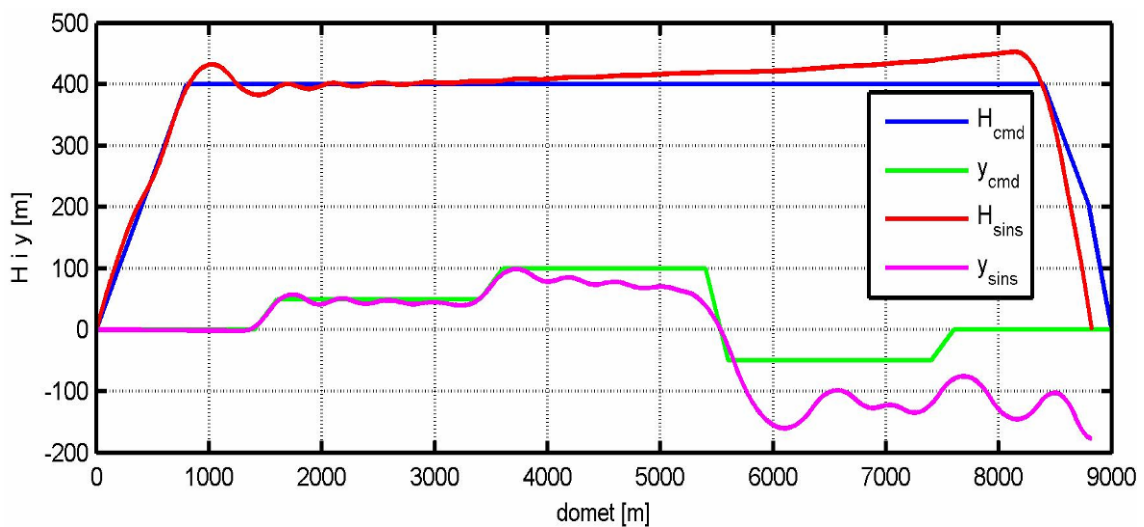
Slika 5-15 Željena i ostvarena normalna ubrzanja za trajektoriju sa Slika 5-14



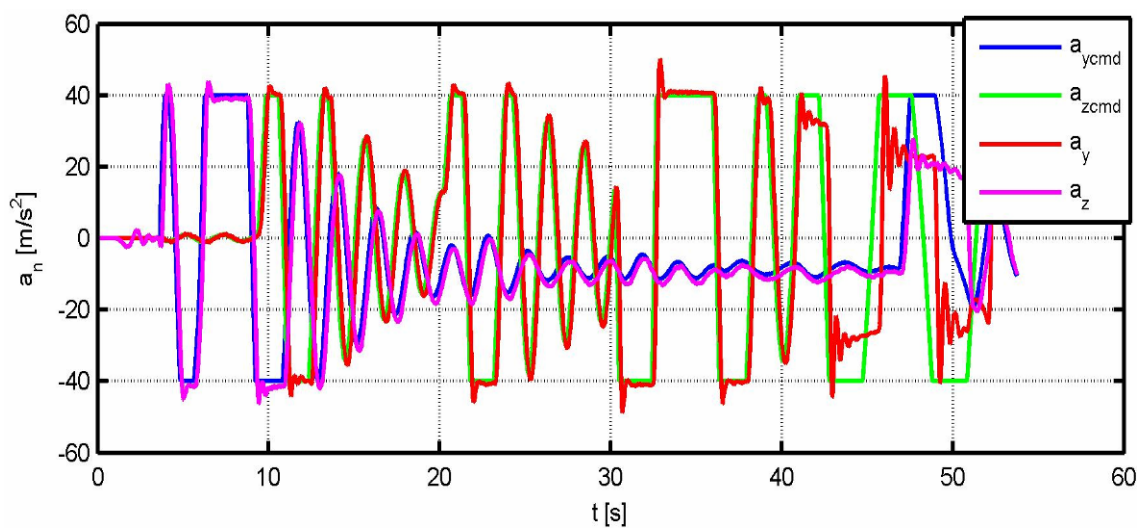
Slika 5-16 Manuelno vođenje po trajektoriji konstantne visine i zadatog azimuta pravca



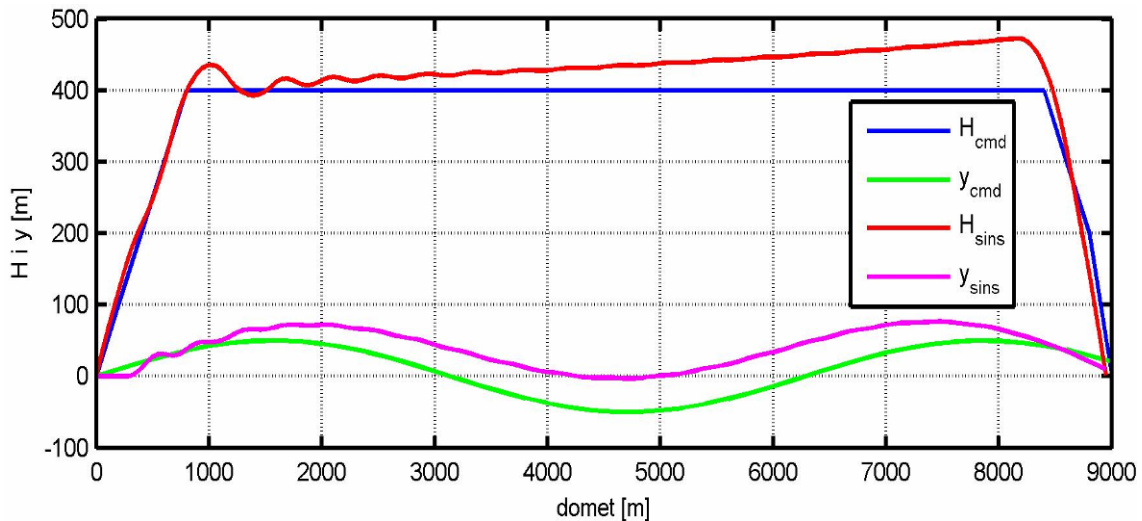
Slika 5-17 Željena i ostvorena normalna ubrzanja za trajektoriju sa Slika 5-16



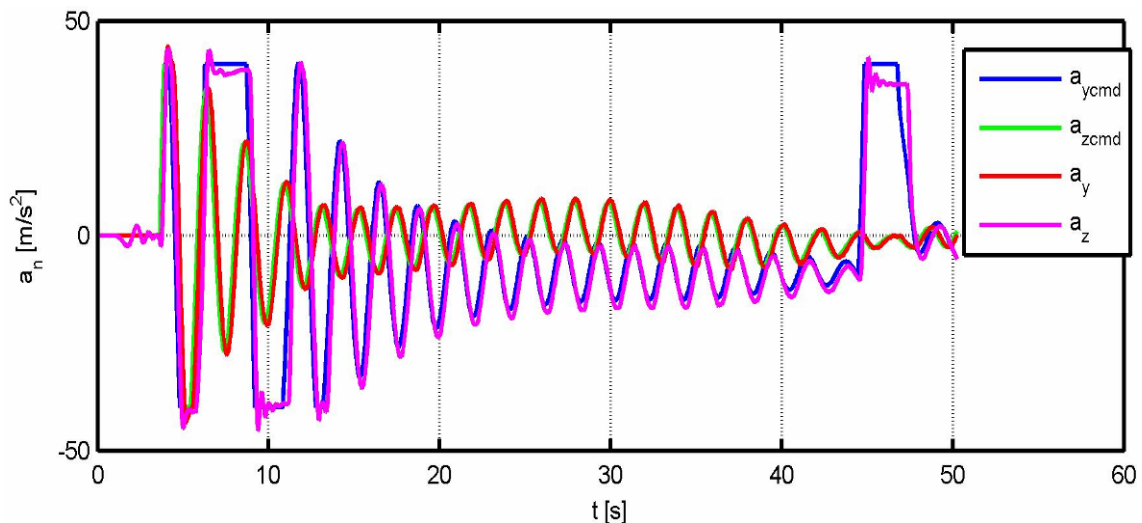
Slika 5-18 Manuelno vođenje po trajektoriji konstantne visine i stepenasto promenljivim pravcem



Slika 5-19 Željena i ostvorena normalna ubrzanja za trajektoriju sa Slika 5-18



Slika 5-20 Manuelno vođenje po trajektoriji konstantne visine i kontinualno promenljivim pravcem



Slika 5-21 Željena i ostvarena normalna ubrzanja za trajektoriju sa Slika 5-20

Polazeći od dijagrama zaključuje se da stabilnost sistema nije ugrožena iako postoje oscilacije koje su posledica dinamičkog kašnjenja operatera. Ovaj problem se može eliminisati prigušivanjem autopilota, odnosno optimizacijom autopilota uzimanjem u obzir očekivanog kašnjenja operatera. Kako se manuelno vođenje primenjuje samo u slučajevima otkaza nekih podsistema i imajući u vidu da je osnovna uloga operatera prepoznavanje cilja na osnovu slike, zadržaćemo već sintetizovanu dinamiku autopilota zbog svojih boljih manevarskih sposobnosti.

5.3 Proporcionalna navigacija

Proporcionalna navigacija se zasniva na principu da ugaona brzina promene pravca putanje $\dot{\gamma}$ bude k - puta veća od ugaone brzine linije viziranja cilja $\dot{\phi}$ koja se meri pomoću glave za samonavođenje (Prilog 4. Matematički model glave za samonavođenje).

$$\dot{\gamma} = k\dot{\phi} \quad 5-7$$

gde je k - konstanta proporcionalne navigacije

$$a_n = K\dot{\phi} \quad 5-8$$

gde je $a_n = \dot{\gamma}U_m$ - normalno ubrzanje rakete.

Ako zakon vođenja zapišemo preko kinematičkog faktora pojačanja $N \in (3.5 \div 4)$

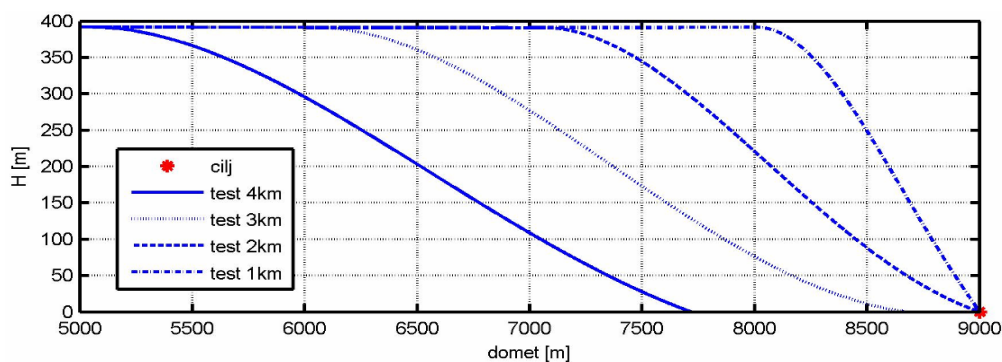
$$N = \frac{K}{U_r} \cos \varepsilon$$

gde su U_r - relativna brzina približavanja rakete i cilja i $\varepsilon = \gamma - \phi$ - tačan ugao preticanja, dobija se

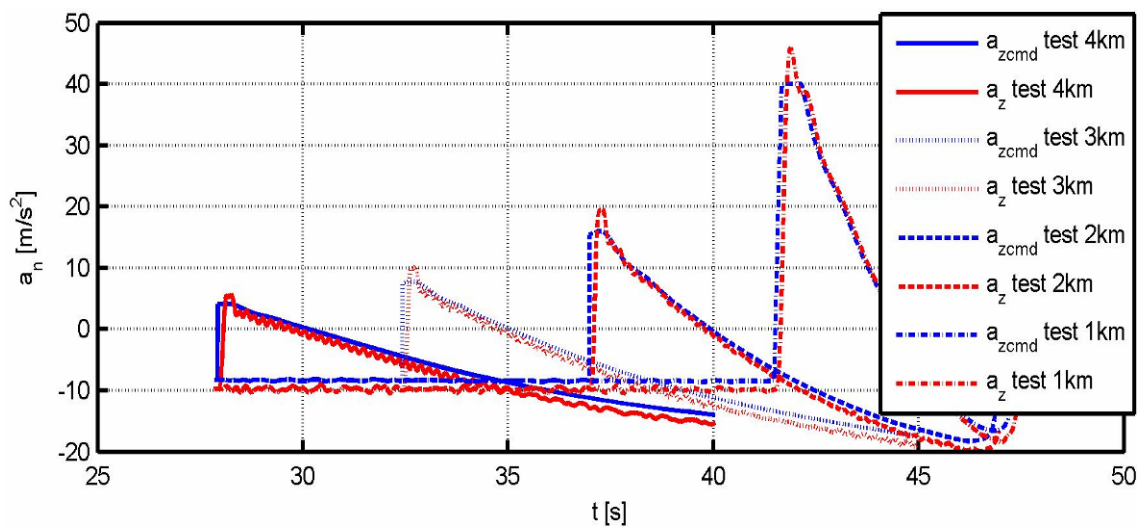
$$a_n = \frac{NU_r}{\cos \varepsilon} \dot{\phi} \quad 5-9$$

Ovaj oblik zakona proporcionalne navigacije je korišćen u simulaciji leta u vertikalnoj ravni pri čemu je vrednost kinematičkog faktora pojačanja bila $N = 3.5$.

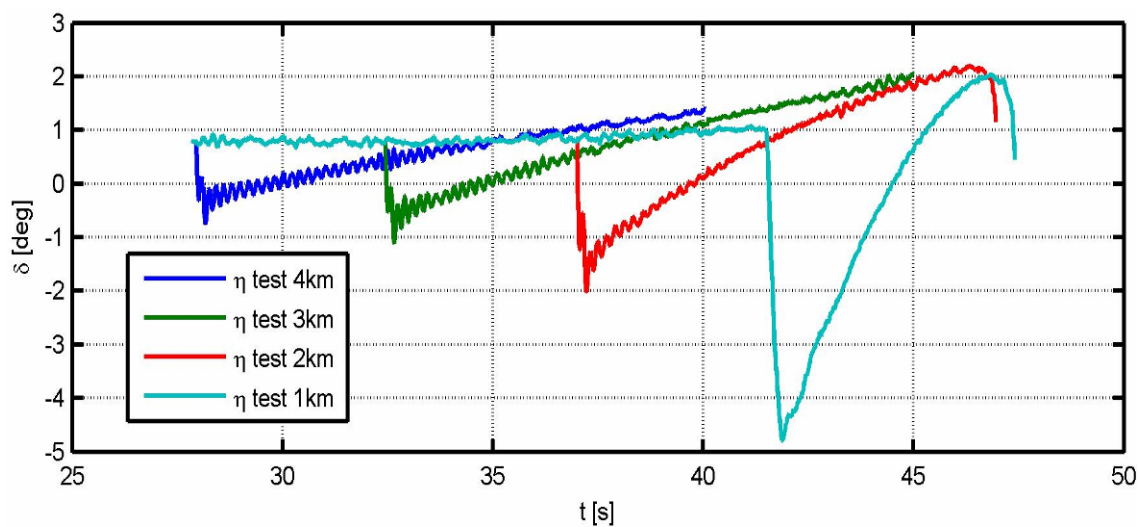
Simulacija leta je rađena za nepokretan cilj uočen na rastojanju $4km$, $3km$, $2km$ i $1km$ i visinu krstarenja rakete od $400m$, rezultati su prikazani na dijagramima Slika 5-22 do Slika 5-25.



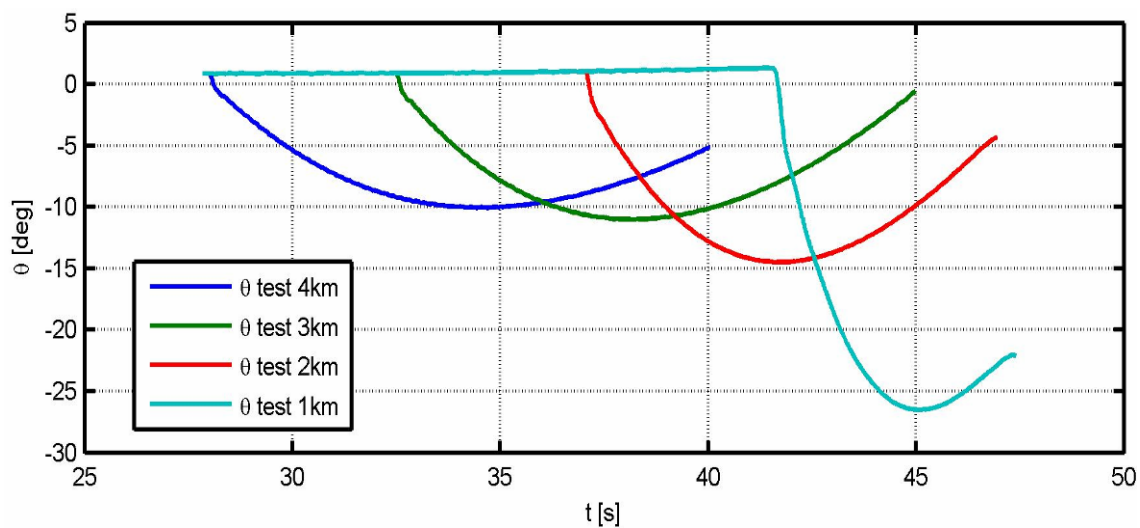
Slika 5-22 Geometrija susreta u vertikalnoj ravni za PN



Slika 5-23 Željena i ostvarena ubrzanja za algoritam vođenja PN



Slika 5-24 Otkloni krmila po propinjanju za algoritam vođenja PN



Slika 5-25 Ugao elevacije za algoritam vođenja PN

Dijagrami na Slika 5-22 pokazuju da proporcionalna navigacija ne ispunjava zahteve minimalnog promašaja u svim mogućim slučajevima. Uticaj gravitacionog ubrzanja kod proporcionalne navigacije je takav da raketa pri manjim uglovima linije viziranja udari u zemlju pre nego što stigne do cilja. Zato će se poboljšanje algoritma vođenja zasnivati na kompenzaciji ubrzanja sile zemljine teže kako bi se povećala tačnost pogađanja cilja.

5.3.1 Kompenzacija sistematskog poremećaja kod samonavođenih raketa

Na osnovu literature [20],[21],[22],[23], razmatran je algoritam vođenja kod koga se komanda formira u odnosu na referentno stanje $\dot{\phi}^*(t)$, koje se može odrediti po različitim kriterijumima.

$$\dot{\gamma} = k[\dot{\phi}(t) - \dot{\phi}^*(t)] \quad 5-10$$

ili drugačije zapisano:

$$a_n = \frac{NU_r}{\cos \varepsilon} [\dot{\phi}(t) - \dot{\phi}^*(t)] \quad 5-11$$

Referentno stanje $\dot{\phi}^*(t)$ se određuje iz sledećih uslova:

a) $M = 0$ $a_n = 0$ -tekući promašaj je nula i nulto normalno ubrzanje

$$\dot{\phi}_a^*(t) = \frac{1}{2U_r} (a_t \sin \varepsilon - g \cos \varphi - a_{Ct} \sin \varepsilon_c - a_{Cn} \cos \varepsilon_c) \quad 5-12$$

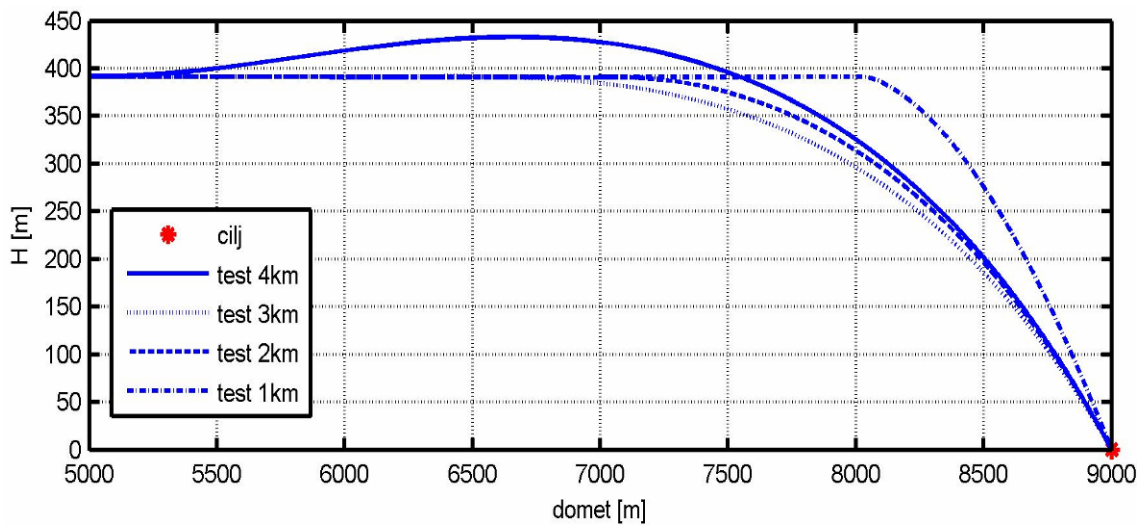
b) $M = 0$ $\dot{\phi} = 0$ - tekući promašaj je nula i nulta ugaona brzina linije viziranja cilja

$$\dot{\phi}_a^*(t) = \frac{1}{kU} (a_t \sin \varepsilon - g \cos \varphi - a_{Ct} \sin \varepsilon_c - a_{Cn} \cos \varepsilon_c) \quad 5-13$$

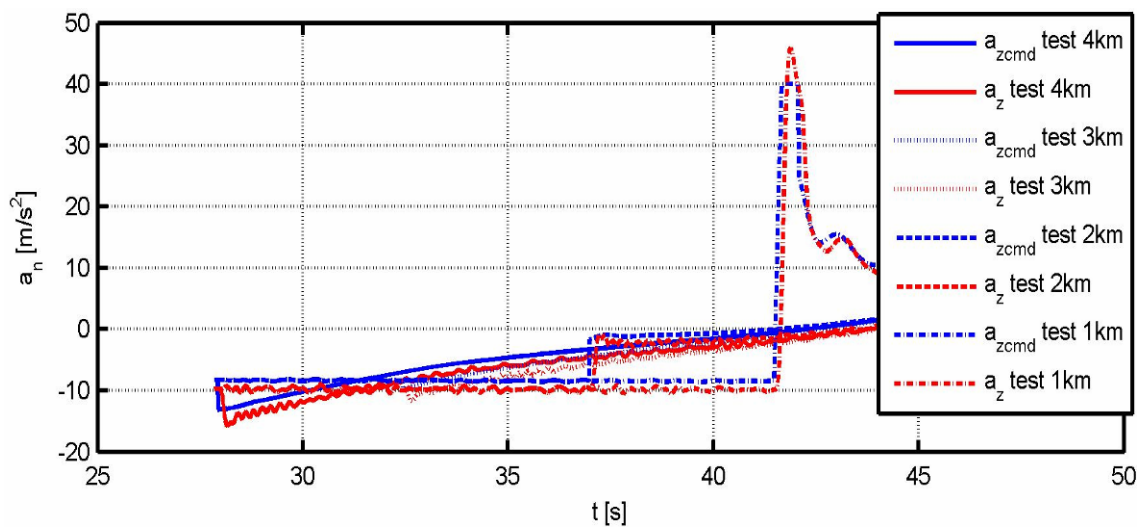
Kako se ovde razmatra gađanje nepokretnog ili sporo pokretnog cilja, može se zanemariti uticaj tangencijalnog ubrzanja rakete. Simulacija leta je rađena za nepokretni cilj uočen na rastojanju 4km , 3km , 2km i 1km i visinu krstarenja rakete od 400m (visina krstarenja optimalna za zahvat TV glavom).

$$a) \quad \dot{\phi}_a^*(t) = \frac{1}{2U_r} (-g \cos \varphi) \quad \text{odnosno} \quad \boxed{a_n = \frac{NU_r}{\cos \varepsilon} \left[\dot{\phi}(t) - \frac{1}{2U_r} (-g \cos \varphi) \right]} \quad 5-14$$

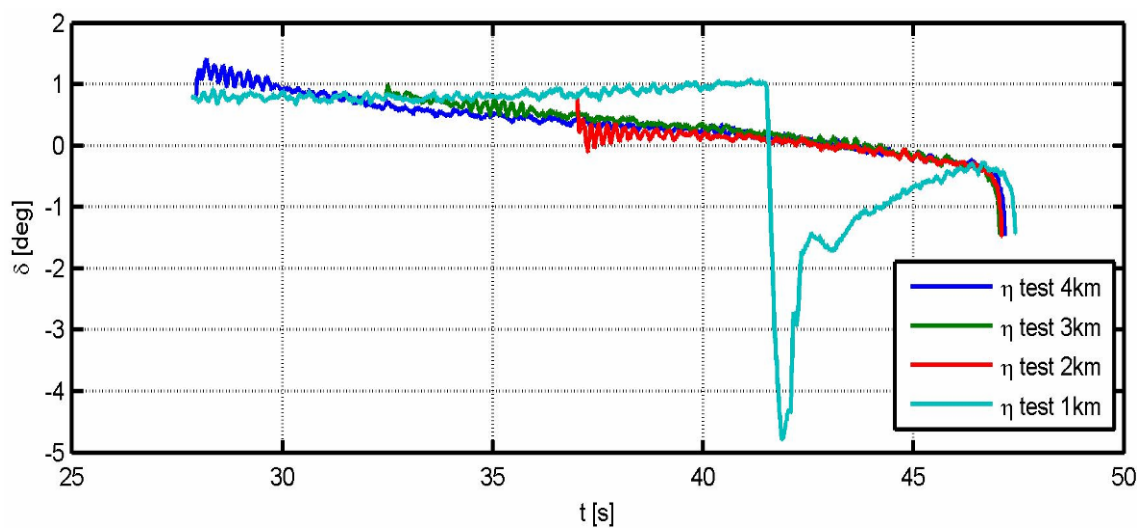
PN - SPa



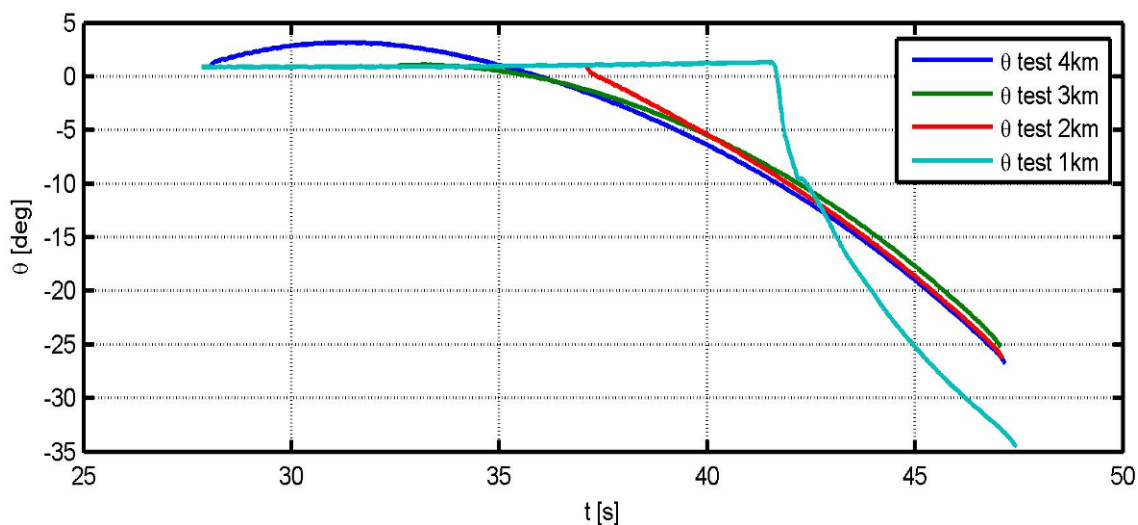
Slika 5-26 Geometrija susreta u vertikalnoj ravni za PN - SPa



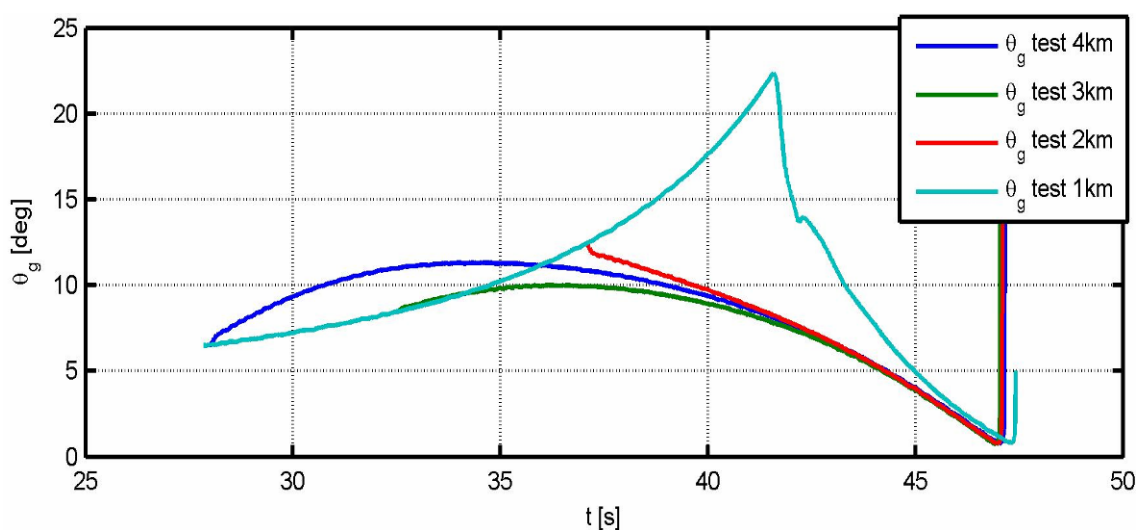
Slika 5-27 Željena i ostvarena ubrzanja za algoritam vođenja PN - SPa



Slika 5-28 Otkloni krmila po propinjanju za algoritam vođenja PN - SPa



Slika 5-29 Ugao elevacije za algoritam vođenja PN - SPa

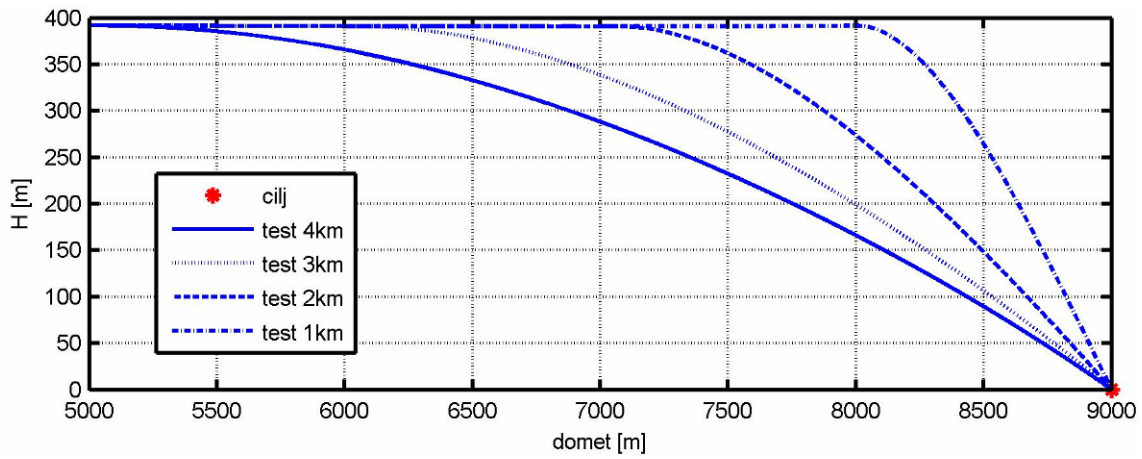


Slika 5-30 Ugao TV glave za algoritam vođenja PN - SPa

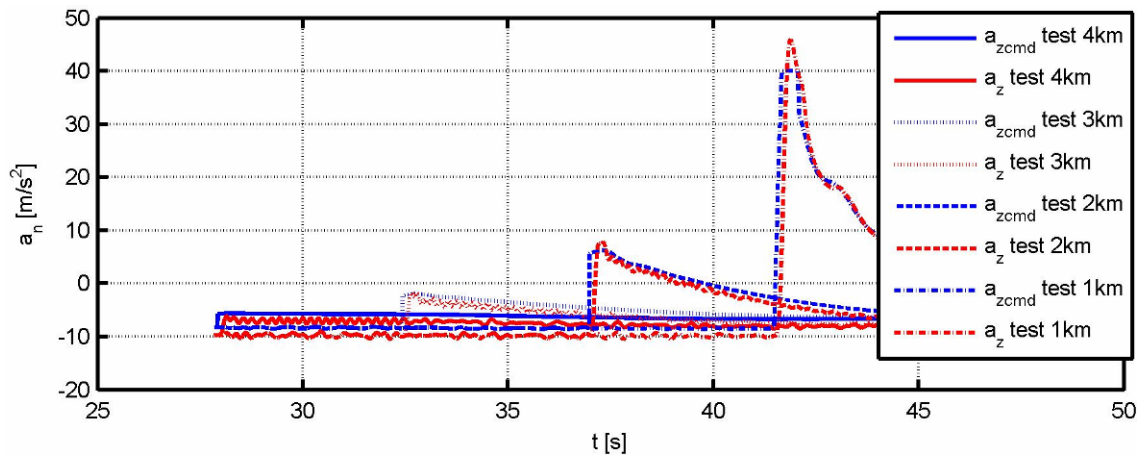
Na osnovu dijagrama, Slika 5-26 do Slika 5-30, dobijenih simulacijom algoritma vođenja PN - SPa u vertikalnoj ravni, može se zaključiti da algoritam zadovoljava za sve uslove geometrije susreta rakete i cilja, ali da postoji mogućnost dostizanja maksimalnog ugla TV glave u slučajevima kasnijeg otkrivanja cilja. Takođe, može se primetiti da su padni uglovi veći nego u slučaju PN algoritma, što je prednost kod PT raketa. Međutim, zbog mogućeg problema sa gubljenjem cilja zbog premašaja maksimalnog ugla TV glave, ovaj algoritam koji se zasniva na minimizaciji normalnog ubrzanja rakete pri susretu s ciljem neće se usvojiti.

b)

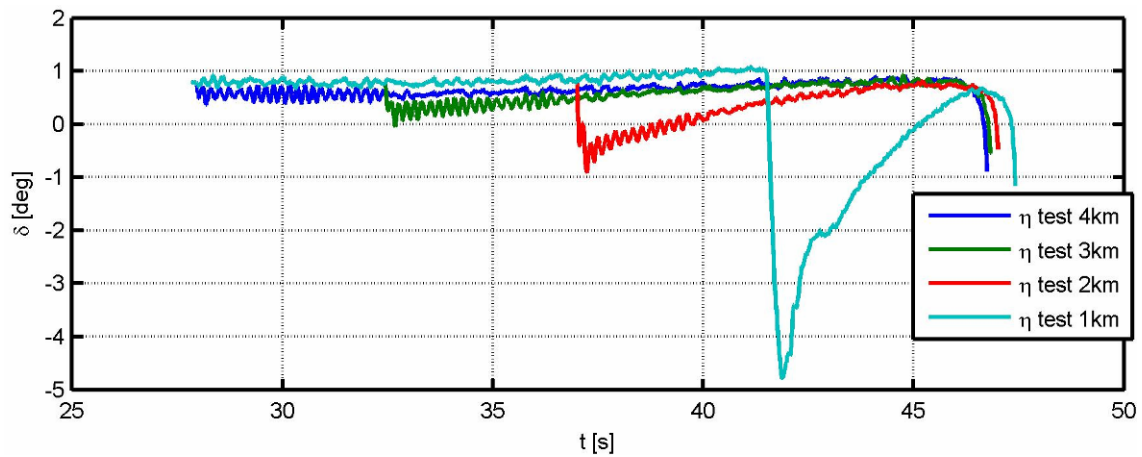
$$\dot{\phi}_b^*(t) = \frac{1}{kU}(-g \cos \varphi) \text{ odnosno } a_n = \frac{NU_r}{\cos \varepsilon} \left[\dot{\phi}(t) - \frac{\cos \varepsilon}{NU_r}(-g \cos \varphi) \right] \text{ PN - SPb} \quad 5-15$$



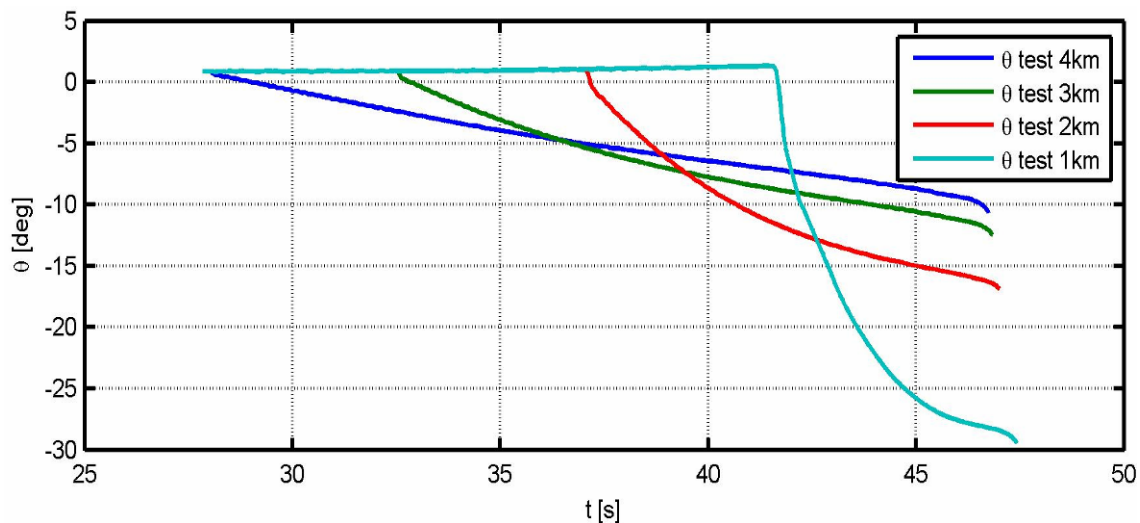
Slika 5-31 Geometrija susreta u vertikalnoj ravni za PN - SPb



Slika 5-32 Željena i ostvarena ubrzanja za algoritam vođenja PN - SPb



Slika 5-33 Otkloni krmila po propinjanju za algoritam vođenja PN - SPb



Slika 5-34 Ugao elevacije za algoritam vođenja PN - SPb

Na osnovu dijagrama, Slika 5-31 do Slika 5-34 dobijenih simulacijom algoritma vođenja PN - SPb u vertikalnoj ravni, može se zaključiti da algoritam zadovoljava za sve uslove u smislu susreta rakete i cilja. Takođe može se primetiti da su padni uglovi veći nego u slučaju PN algoritma, ali manji nego u slučaju PN - SPa algoritma. Na osnovu prethodne analize ovaj algoritam, koji se zasniva na minimizaciji ugaone brzine linije viziranja cilja, biće usvojen kao algoritam samonavođenja u završnoj fazi.

6 Optimizacija vođenja i autopilota

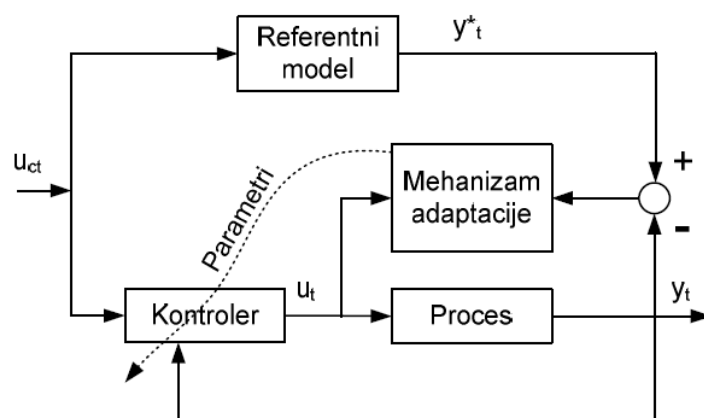
Ovo poglavlje posvećeno je razmatranju različitih algoritama autopilota i vođenja, odnosno pre svega modifikaciji osnovnih algoritama, kako bi sistem bio pouzdaniji pri nedovoljno tačnom poznavanju aerodinamičkih koeficijenata, pri ograničenjima u aktuatorskom sistemu i delovanju nepoznatih poremećaja u letu rakete. Osnovna ideja modifikacije je korišćenje adaptivnog upravljanja sa referentnim modelom (MRAC), kako bi ponašanje realnog sistema vođenja i upravljanja rakete bilo blisko idealno podešenom sistemu.

6.1 *Adaptivno upravljanje sa referentnim modelom*

Osnovna ideja za upotrebu adaptivnog upravljanja u ovom radu javila se kao posledica nedovoljne pouzdanosti u informaciji o aerodinamičkim koeficijentima, posebno u slučaju autopilota valjanja. Obezbeđivanje stabilnog ugla valjanja je kod rakete koja ima TV glavu od krucijalne važnosti, s druge strane sam koncept upravljanja kanarima, odnosno aerodinamička šema „patka“ unosi sama po sebi poremećaj po kanalu valjanja. Jedna od ideja da se taj problem reši i jeste uvođenje nezavisno rotirajućeg zadnjeg dela, odnosno odvajanje kretanja pomoću ležaja, međutim letni test je pokazao da tu postoje razni problemi oko saosnosti i ugradnje samog ležaja a samim tim i nove nepoznate koje utiču na autopilot valjanja.

Adaptivni sistem upravljanja obezbeđuje sistemu da promeni svoju performansu kako bi kompenzovao nepredviđene promene u dinamici procesa ili poremećajima koji deluju na sistem, [24],[25],[26]. Osnova potrebe za korišćenjem adaptivnih sistema je linearizacija modela procesa, odnosno odstupanje radnih uslova procesa od radne tačke za koju je izvršena linearizacija. Adaptivni sistem upravljanja nastaje zatvaranjem još jedne povratne sprege u sistemu po izlazu procesa, čime se regulišu sami parametri procesa.

Postoji više različitih tipova adaptivnih sistema međutim ovde je usvojen tip adaptivnog upravljanja sa referentnim modelom, Slika 6-1, kako bi se zadržale sve pozitivne osobine osnovnih kontrolera uz povećanje njihove pouzdanosti.



Slika 6-1 Adaptivni sistem sa referentnim modelom

Osnovna odlika MRAC su dve zatvorene povratne sprege, jedna unutrašnja koju obezbeđuje sam kontroler i jedna spoljašnja koja pruža podatke mehanizmu adaptacije koji na odgovarajući način menja parametre kontrolera, [27],[28],[29]. Adaptivno upravljanje sa referentnim modelom se može podeliti u dve grupe: indirektno adaptivno upravljanje, zasnovano na eksplicitnoj estimaciji parametara modela procesa i direktno adaptivno upravljanje, zasnovano na reparametrizaciji kontrolera tako da se direktno mogu estimirati parametri kontrolera. U radu je usvojen direktan MRAC .

Zbog postojanja mehanizma adaptacije adaptivni sistem je nelinearan sistem i osetljiv je sa stanovišta stabilnosti, [30]. U pogledu rešavanja stabilnosti postoji više postupaka koji imaju svoje prednosti i mane: stabilnost u smislu neke, unapred zadate funkcije Ljapunova (ne postoji sistematičan način za generisanje funkcija Ljapunova), teorija hiperstabilnosti, teorija pasivnosti i druge teorije. Iako su ove teorije dale neku generalizaciju u smislu stabilnosti sistema i dalje je ostao nerešen problem brzine konvergencije parametara i on se podešava od slučaja do slučaja.

Obzirom da su u radu MRAC algoritmi zatvoreni po jednom parametru autopilota ovde će se razmotriti samo skalarni slučajevi MRAC algoritma i prvo će biti predstavljen jedan jednostavniji slučaj radi boljeg razumevanja, a zatim i uopšten slučaj koji odgovara postavljenom problemu u radu.

6.1.1 Uprošćen direktan MRAC algoritam: Adaptivno praćenje

Na primeru modela funkcije prenosa prvog reda biće definisan MRAC algoritam i dokazana njegova stabilnost.

$$\dot{x} = ax + bu \quad 6-1$$

U prethodno definisanom modelu smatra se da su a, b nepoznati parametri gde je poznat znak parametra b . Osnovni problem se ogleda u tome što treba izabrati zakon upravljanja u tako da svi signali u povratnoj sprezi ostanu ograničeni i da x prati stanja x_m referentnog modela datog sledećim izrazom:

$$\dot{x}_m = -a_m x_m + b_m r \quad 6-2$$

Za bilo koji delimično ograničen signal $r(t)$, gde su a_m, b_m poznati parametri i $a_m > 0$ i $x_m(t), r(t)$ su poznati u svakom trenutku vremena. Pretpostavka je da su a_m, b_m i $r(t)$ usvojeni tako da x_m predstavlja željene odgovore modela.

Da bi x pratio x_m za neki referentni ulazni signal $r(t)$, zakon upravljanja treba da obezbedi da povratna sprega modela bude jednaka referentnoj. Ako se usvoji zakon upravljanja tako da zavisi od odziva sistema i od referentnog signala tada važi sledeće:

$$u = -k^* x + l^* r \quad 6-3$$

gde parametri k^*, l^* treba da zadovolje sledeće:

$$\frac{x(s)}{r(s)} = \frac{bl^*}{s - a + bk^*} = \frac{b_m}{s + a_m} = \frac{x_m(s)}{r(s)} \quad 6-4$$

što je ispunjeno u slučaju da:

$$l^* = \frac{b_m}{b}, \quad k^* = \frac{a_m + a}{b} \quad 6-5$$

Obzirom da su parametri a, b nepoznati, prethodna relacija se ne može upotrebiti i umesto toga zakon upravljanja dobija sledeći oblik:

$$u = -k(t)x + l(t)r \quad 6-6$$

gde $k(t), l(t)$ estimiraju k^*, l^* u svakom trenutku vremena na bazi adaptivnog zakona. Takav problem je ekvivalentan identifikaciji u realnom vremenu nepoznatih

konstanti k^*, l^* . Korišćenjem prethodnih relacija zakona upravljanja i referentnog modela, funkciju prenosa objekta možemo zapisati kao:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -a_m x + b_m r + b(k^* x - l^* r + u) \\ x &= \frac{b_m}{s + a_m} r + \frac{b}{s + a_m} (k^* x - l^* r + u)\end{aligned}\quad 6-7$$

Kako je $x_m = \frac{b_m}{s + a_m} r$ poznat ograničen signal greška praćenja se može izraziti

na sledeći način:

$$\begin{aligned}e &= x - x_m \\ e &= \frac{b}{s + a_m} (k^* x - l^* r + u)\end{aligned}\quad 6-8$$

Estimirana greška bi imala oblik:

$$\hat{e} = \frac{1}{s + a_m} \hat{b}(kx - lr + u) = \frac{1}{s + a_m} (0) \quad 6-9$$

Na osnovu prethodne jednačine se vidi da estimirana greška može da se zameni greškom praćenja $\varepsilon_1 = e$ i da nije potrebno generisati $\hat{e}$ a samim tim ni $\hat{b}$.

Ako se parametri greške definišu kao: $\bar{k} = k - k^*, \bar{l} = l - l^*$ dobija se sledeće:

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 = e &= \frac{b}{s + a_m} (-\bar{k}x + \bar{l}r) \\ \dot{\varepsilon}_1 &= -a_m \varepsilon_1 + b(-\bar{k}x + \bar{l}r), \quad \varepsilon_1 = e = x - x_m\end{aligned}\quad 6-10$$

Dalje se pretpostavlja da je struktura adaptivnog zakona data sa

$$\dot{k} = f_1(\varepsilon_1, x, r, u), \quad \dot{l} = f_2(\varepsilon_1, x, r, u) \quad 6-11$$

gde treba odrediti nepoznate funkcije.

Kao što je ranije napomenuto ove funkcije se mogu odrediti na više načina ali ovde će se koristiti teorija pasivnosti odnosno SPR -Ljapunov pristup bez normalizacije (Prilog 6. Teorija pasivnosti).

Dalje se razmatra Ljapunova funkcija

$$V(\varepsilon_1, \bar{k}, \bar{l}) = \frac{\varepsilon_1^2}{2} + \frac{\bar{k}^2}{2\gamma_1} |b| + \frac{\bar{l}^2}{2\gamma_2} |b| \quad 6-12$$

gde su $\gamma_1, \gamma_2 > 0$ Ljapunovi kandidati za razmatran sistem.

Izvod u vremenu duž bilo koje trajektorije razmatranog sistema je dat sa:

$$\dot{V} = -a_m \varepsilon_1^2 - b \bar{k} \varepsilon_1 x + b \bar{l} \varepsilon_1 r + \frac{\bar{k}}{\gamma_1} |b| f_1 + \frac{\bar{l}}{\gamma_2} |b| f_2 \quad 6-13$$

Kako je $|b| = b \operatorname{sgn}(b)$, da bi se izbegli neodređeni članovi u prethodnom izrazu uvodi se, $f_1 = \gamma_1 \varepsilon_1 x \operatorname{sgn}(b)$, $f_2 = \gamma_2 \varepsilon_1 r \operatorname{sgn}(b)$. Iz prethodnog sledi da za adaptivan zakon

$$\dot{k} = \gamma_1 \varepsilon_1 x \operatorname{sgn}(b), \quad \dot{l} = \gamma_2 \varepsilon_1 r \operatorname{sgn}(b) \quad 6-14$$

važi

$$\dot{V} = -a_m \varepsilon_1^2 \quad 6-15$$

Ako se vratimo na to da su $x_m(t), r(t)$ ograničene funkcije vremena, na osnovu izraza 6-12 i 6-15 sledi da je V Ljapunova funkcija za sistem diferencijalnih jednačina trećeg reda 6-10 i 6-14, čije je ravnotežno stanje $\varepsilon_{1e} = e_e = 0, \bar{k}_e = 0, \bar{l}_e = 0$. Takođe važi da su $\varepsilon_1, \bar{k}, \bar{l} \in \mathcal{O}_\infty$ i $\varepsilon_1 \in \mathcal{O}_2$. Kako je $\varepsilon_1 = e = x - x_m$ i $x_m \in \mathcal{O}_\infty$ važi i $x \in \mathcal{O}_\infty$ i $u \in \mathcal{O}_\infty$, odnosno svi signali u povratnoj sprezi su ograničeni. Iz jednačine (10) sada sledi i $\dot{\varepsilon}_1 \in \mathcal{O}_\infty$ što zajedno sa $\varepsilon_1 \in \mathcal{O}_2$ znači da $\varepsilon_1(t) = e(t) \rightarrow 0$ kada $t \rightarrow \infty$.

Ova analiza razmatra samo stabilnost MRAC sistema, koja je adekvatnim izborom funkcija pokazana, konvergencija parametara zavisi i od tipa ulaznih signala.

6.1.2 Direktan MRAC sa nenormalizovanim adaptivnim zakonom za sisteme relativnog reda $n^* = 1$

U osnovi izmena autopilota propinjanja/skretanja nalazi se upravo ovaj algoritam MRAC -a. Ovde će biti predstavljene osnovne pretpostavke i tok algoritma. Izvođenje algoritma i dokazi vezani za ovaj algoritam mogu se naći u literaturi [31] i taj deo će biti izostavljen iz ovog teksta, a za prikaz teorije je i iskorišćen primer uprošćenog direktnog MRAC algoritma.

Osnovna pretpostavka je da je relativni stepen objekta upravljanja $n^* = 1$.

$$y_p = G_p(s)u_p = k_p \frac{Z_p(s)}{R_p(s)}u_p \quad 6-16$$

Referentan model je izabran tako da je istog relativnog stepena kao i objekat upravljanja.

$$y_m = W_m(s)r = k_m \frac{Z_m(s)}{R_m(s)}u_m \quad 6-17$$

Funkcija prenosa objekta upravljanja zadovoljava sledeće pretpostavke:

1. $Z_p(s)$ je moničan Hurvicov polinom reda m_p
2. Gornja granica polinoma $R_p(s)$, reda n_p , je poznata i jednaka n (Rouche teorema)
3. Relativan stepen funkcije prenosa $G_p(s)$ je $n^* = n_p - m_p = 1$
4. Znak pojačanja k_p , koji je posledica osnovnog kontrolera, je poznat

Referentan model zadovoljava sledeće pretpostavke:

1. $Z_m(s), R_m(s)$ su monični Hurvicovi polinomi reda q_m, p_m respektno i važi $p_m \leq n$
2. Relativni red referentnog modela jednak je relativnom redu objekta upravljanja $n_m^* = p_m - q_m = n^*$
3. Funkcija prenosa referentnog modela $W_m(s)$ je izabrana tako da bude SPR (striktno pozitivno realna funkcija – Prilog 6. Teorija pasivnosti)

Zakon upravljanja:

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_1 &= F\omega_1 + gu_p, & \omega_1(0) &= 0 \\ \dot{\omega}_2 &= F\omega_2 + gu_p, & \omega_2(0) &= 0 \\ u_p &= \theta^T \omega \\ \omega &= \begin{bmatrix} \omega_1^T & \omega_2^T & y_p & r \end{bmatrix}^T, \omega_1 \in \mathfrak{R}^{n-1}, \omega_2 \in \mathfrak{R}^{n-1} \end{aligned} \quad 6-18$$

Parametri F, g se biraju tako da zadovolje sledeće relacije:

$$\begin{aligned} (sI - F)^{-1}g &= \frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)}, \alpha(s) = [s^{n-2}, s^{n-3}, \dots, s, 1]^T \\ \Lambda &= \Lambda_0 Z_m \text{ Hurvicov polinom} \\ \Lambda_0(s) &\text{ je reda } n-1-q_m \end{aligned} \quad 6-19$$

Adaptivni zakon:

$$\begin{aligned}\dot{\theta} &= -\Gamma e_1 \omega \operatorname{sgn}(\rho^*) \\ e_1 &= y_p - y_m \\ \operatorname{sgn}(\rho^*) &= \operatorname{sgn}\left(\frac{k_p}{k_m}\right)\end{aligned}\tag{6-20}$$

Parametar Γ se bira proizvoljno tako da važi, $\Gamma = \Gamma^T > 0$. Sa porastom ovog parametra objekat „brže uči“ ali takođe dovodi do većih grešaka, odnosno premašaja na početku adaptacije. U radu je ovaj parametar usvajan tako da obezbedi konvergenciju parametara u ne više od $5s$ a da pri tome početni premašaji ostanu u granicama tolerancije.

6.1.3 Direktan MRAC sa nenormalizovanim adaptivnim zakonom za sisteme relativnog reda $n^* = 2$

Ovde će biti predstavljene osnovne pretpostavke i tok algoritma. Izvođenje algoritma i dokazi vezani za ovaj algoritam mogu se naći u literaturi [31] i taj deo će biti izostavljen iz ovog teksta. Za prikaz teorije iskorišćen je primer uprošćenog direktnog MRAC algoritma.

Osnovna pretpostavka je da je relativni stepen objekta upravljanja $n^* = 2$.

$$y_p = G_p(s)u_p = k_p \frac{Z_p(s)}{R_p(s)}u_p\tag{6-21}$$

Referentan model je izabran tako da je istog relativnog stepena kao i objekat upravljanja:

$$y_m = W_m(s)r = k_m \frac{Z_m(s)}{R_m(s)}u_m\tag{6-22}$$

Funkcija prenosa objekta upravljanja zadovoljava sledeće pretpostavke:

1. $Z_p(s)$ je moničan Hurvicov polinom reda m_p
2. Gornja granica polinoma $R_p(s)$, reda n_p , je poznata i jednaka n (Rouche teorema)
3. Relativni stepen funkcije prenosa $G_p(s)$ je $n^* = n_p - m_p = 2$

4. Znak pojačanja k_p , koji je posledica osnovnog kontrolera, je poznat

Referentni model zadovoljava sledeće pretpostavke:

1. $Z_m(s), R_m(s)$ su monični Hurvicovi polinomi reda q_m, p_m respektno i važi

$$p_m \leq n$$
2. Relativni red referentnog modela jednak je relativnom redu objekta

$$n_m^* = p_m - q_m = n^*$$

Zakon upravljanja:

$$\begin{aligned}\dot{\omega}_1 &= F\omega_1 + gu_p, & \omega_1(0) &= 0 \\ \dot{\omega}_2 &= F\omega_2 + gu_p, & \omega_2(0) &= 0 \\ \dot{\phi} &= -p_0\phi + \omega, & \phi(0) &= 0 \\ u_p &= \theta^T \omega + \dot{\theta}^T \phi = \theta^T \omega - \phi^T \Gamma \phi e_1 \operatorname{sgn}\left(\frac{k_p}{k_m}\right) \\ \omega &= \begin{bmatrix} \omega_1^T & \omega_2^T & y_p & r \end{bmatrix}^T, \omega_1 \in \mathfrak{R}^{n-1}, \omega_2 \in \mathfrak{R}^{n-1}\end{aligned}\tag{6-23}$$

Parametri F, g se biraju tako da zadovolje sledeće relacije:

$$\begin{aligned}(sI - F)^{-1}g &= \frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)}, \alpha(s) = [s^{n-2}, s^{n-3}, \dots, s, 1]^T \\ \Lambda &= \Lambda_0 Z_m \text{ Hurvicov polinom} \\ \Lambda_0(s) &\text{ je reda } n-1-q_m\end{aligned}\tag{6-24}$$

$W_m(s)(s + p_0)$ je SPR i striktno pravilna funkcija prenosa

Adaptivni zakon:

$$\begin{aligned}\dot{\theta} &= -\Gamma e_1 \phi \operatorname{sgn}(\rho^*) \\ e_1 &= y_p - y_m \\ \operatorname{sgn}(\rho^*) &= \operatorname{sgn}\left(\frac{k_p}{k_m}\right)\end{aligned}\tag{6-25}$$

Parametar Γ se bira proizvoljno tako da važi, $\Gamma = \Gamma^T > 0$. Sa porastom ovog parametra objekat „brže uči“ ali takođe dovodi do većih grešaka, odnosno premašaja na početku adaptacije, tako da se zapravo bira optimalno u zavisnosti od zahtevane konstrukcije kontrolera.

6.1.4 Modifikacije MRAC algoritma

Kao što je ranije napomenuto osim stabilnosti koju MRAC algoritam treba da zadovolji ostaje problem konvergencije parametara. Jedan od problema koji može da utiče na konvergenciju parametara je šum u merenom signalu, koji obzirom na integralnu prirodu parametara može da dovede do neželjene divergencije parametara.

Jedno od jednostavnijih rešenja je modifikacija „zone neosetljivosti“. Princip se zasniva na „isključivanju“ adaptacije u zoni malih grešaka:

$$\dot{\theta} = \begin{cases} -\Gamma e_1 \omega \operatorname{sgn}(\rho^*), & |e_1| > \varepsilon \\ 0, & |e_1| \leq \varepsilon \end{cases} \quad 6-26$$
$$e_1 = y_p - y_m$$

Ovakva modifikacija obezbeđuje da se u sistemu ne pojavi drift parametara kao posledica u šumu merenja. Još jedna od pozitivnih posledica ovakve modifikacije je smanjenje premašaja sistema na ulazne signale tipa sporopromenljivih četvrtki. Mana modifikacije „zone neosetljivosti“ je postojanje statičke greške koja je manja ili jednaka veličini „zone neosetljivosti“.

Još jedan od načina da se parametri održe ograničeni je σ - modifikacija ili slična e - modifikacija, koje su opisane sledećim relacijama:

σ - modifikacija:

$$\dot{\theta} = -\Gamma(e_1 \omega + \sigma \theta) \operatorname{sgn}(\rho^*) \quad 6-27$$

e - modifikacija:

$$\dot{\theta} = -\Gamma(e_1 \omega + \sigma |e| \theta) \operatorname{sgn}(\rho^*) \quad 6-28$$

Mana ove modifikacije je što unosi prigušenje u adaptivni zakon, samim tim nije dobro primenjivati je kod sistema u kojima je brzina adaptacije imperativ, kao što je slučaj sa autopilotom rakete čije je ukupno vreme leta manje od 60s .

Problemi koji značajno utiču na performanse adaptivnog upravljanja, a u nekim slučajevima dovode i do nestabilnosti celog sistema, su ograničenja aktuatorskog

sistema, bilo u brzini odgovora bilo u maksimalnom otklonu upravljačkih površina. Obzirom da oba ograničenja postoje u aktuatorskom sistemu rakete, sledeća modifikacija je veoma važna za performanse adaptivnog upravljanja. Osnovna ideja primene pozitivne μ - modifikacija je ograničenje, posledica ograničenja po izvršnim organima, koje se uvodi u referentan model. Primena ove modifikacije će biti razmotrena na uprošćenom MRAC algoritmu radi boljeg razumevanja.

Dakle u osnovi imamo dinamiku sistema predstavljenu izrazom:

$$\dot{x}(t) = ax(t) + bu(t) \quad 6-29$$

gde su a, b nepoznate, pri čemu je poznat znak upravljanja. Međutim sada razmatramo ograničenje po otklonu upravljačkih površina pa važi:

$$u(t) = u_{\max} \text{sat}\left(\frac{u_c}{u_{\max}}\right) = \begin{cases} u_c(t), & |u_c(t)| \leq u_{\max} \\ u_{\max} \text{sgn}(u_c(t)), & |u_c(t)| > u_{\max} \end{cases} \quad 6-30$$

„Idealan“ referentan model je predstavljen kao i ranije:

$$\dot{x}_m(t) = -a_m x_m(t) + b_m r(t) \quad 6-31$$

U implicitnom obliku problem se može rešiti na sledeći način:

- usvoji se veličina „sigurne zone“

$$u_{\max}^{\delta} = u_{\max} - \delta, \quad 0 < \delta < u_{\max} \quad 6-32$$

- deficit upravljačkog signala je definisan kao

$$\Delta u_c = u_{\max}^{\delta} \text{sat}\left(\frac{u_c}{u_{\max}^{\delta}}\right) - u_c \quad 6-33$$

- adaptivno upravljanje sa implicitnom μ -modifikacijom

$$u_c = kx + lr + \mu \Delta u_c \quad 6-34$$

Ovakva modifikacija menja samo upravljački signali ali ne menja i referentni model pa i dalje postoji mogućnost divergencije parametara upravljanja usled poređenja sa referentnim modelom. Ovaj problem se može izbeći uvođenjem eksplicitne μ modifikacije koja osim upravljačkog signala menja i odziv referentnog modela u skladu sa realnim ograničenjima.

Adaptivno upravljanje je dato kao kombinacija linearnog dela upravljanja i saturacije upravljačkog signala

$$u_{lin} = kx + lr$$

$$u_c = \frac{1}{1+\mu} \left(u_{lin} + \mu u_{\max}^{\delta} \operatorname{sat} \left(\frac{u_{lin}}{u_{\max}^{\delta}} \right) \right) = \begin{cases} u_{lin}, & |u_{lin}| \leq u_{\max}^{\delta} \\ \frac{1}{1+\mu} (u_{lin} + \mu u_{\max}^{\delta}), & u_{lin} > u_{\max}^{\delta} \\ \frac{1}{1+\mu} (u_{lin} - \mu u_{\max}^{\delta}), & u_{lin} < -u_{\max}^{\delta} \end{cases} \quad 6-35$$

gde je μ proizvoljno izabran pozitivan skalar.

Posmatranje sistema u zatvorenom obliku intuitivno dovodi do uvođenja adaptacije i u referentni model

$$\dot{x}_m(t) = -a_m x_m(t) + b_m (r(t) + k_u \Delta u_{lin}), \quad |r(t)| \leq r_{\max} \quad 6-36$$

gde je:

$$\dot{k}_u = \gamma_3 \varepsilon_1 \Delta u_{lin} \operatorname{sgn}(b)$$

$$\Delta u_{lin} = u_{\max} \operatorname{sat} \left(\frac{u_c}{u_{\max}} \right) - u_{lin} \quad 6-37$$

Na ovaj način obezbeđena je i adaptacija referentnog modela tako da odgovara ograničenjima u sistemu aktuatora i sama adaptacija upravljačkog signala kako ne bi izlazio iz fizički izvodljivih granica.

6.2 Adaptivno upravljanje sa referentnim modelom primenjeno na autopilot valjanja

Algoritam MRAC je primenjen na autopilot valjanja tako što je zatvoren samo po jednoj povratnoj sprezi, po uglu valjanja, Slika 6-4. Za referentan model je izabrana dinamika sistema koja odgovara „idealno“ podešenom autopilotu valjanja bez uticaja dinamike aktuatora za referentni Mahov broj. Ovim je obezbeđeno da dinamika referentnog modela što više odgovara realnom sistemu. Takođe zadržan je i osnovni kontroler, odnosno autopilot valjanja, koji je određen u poglavlju 4, uz napomenu da se koriste konstantna pojačanja koja odgovaraju referentnom Mahovom broju. MRAC je

korišćen u modifikovanom obliku sa modifikacijom „zone neosetljivosti“, kako bi se smanjio drift parametara adaptacije, i pozitivnom μ - modifikacijom.

Prva faza u projektovanju MRAC autopilota valjanja bilo je usvajanje referentnog modela. Iako je relativni stepen autopilota $n^* = 2$, u osnovi funkcija prenosa je takva da je $p_m = 3, q_m = 1$, usvojena je redukcija, [32],[33] tako da se dobije relativni stepen $n^* = 1$. Kako bi se pojednostavio i software u autopilotu prvo je urađena redukcija reda funkcije prenosa, korišćenjem Pade-ovog algoritma, a zatim je ona modifikovana tako da bude SPR.

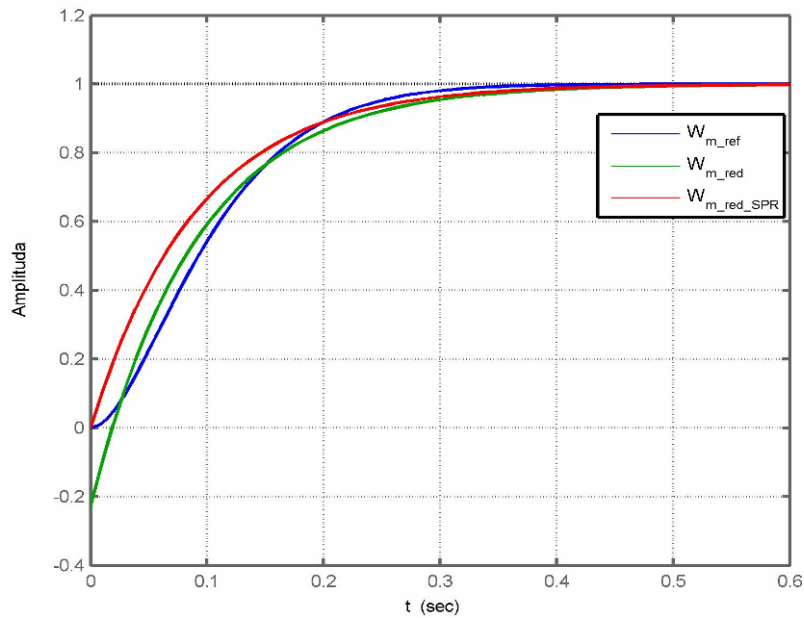
Na dijagramima Slika 6-2 i Slika 6-3 dat je uporedni prikaz odgovora autopilota predstavljenog funkcijom prenosa autopilota valjanja za $M = 0.5$, funkcijom prenosa redukovanog reda, i SPR funkcijom redukovanog reda koja je i usvojena kao referentni model.

$$W_{m_ref}(s) = \frac{310.9s + 4711}{s^3 + 48.55s^2 + 816.9s + 4711}$$

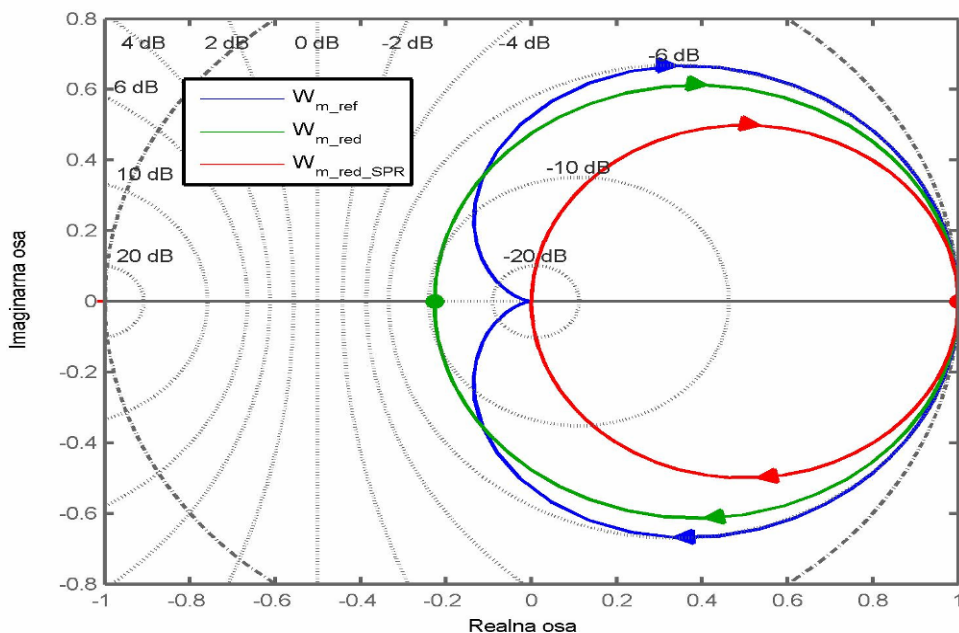
$$W_{m_red}(s) = \frac{-0.2272s + 11.03}{s + 11.03}$$

6-38

$$W_{m_red_SPR}(s) = \frac{11.03}{s + 11.03}$$



Slika 6-2 Odskočni odziv funkcije prenosa autopilota valjanja, funkcije prenosa autopilota valjanja redukovanog reda i SPR funkcije prenosa autopilota valjanja redukovanog reda



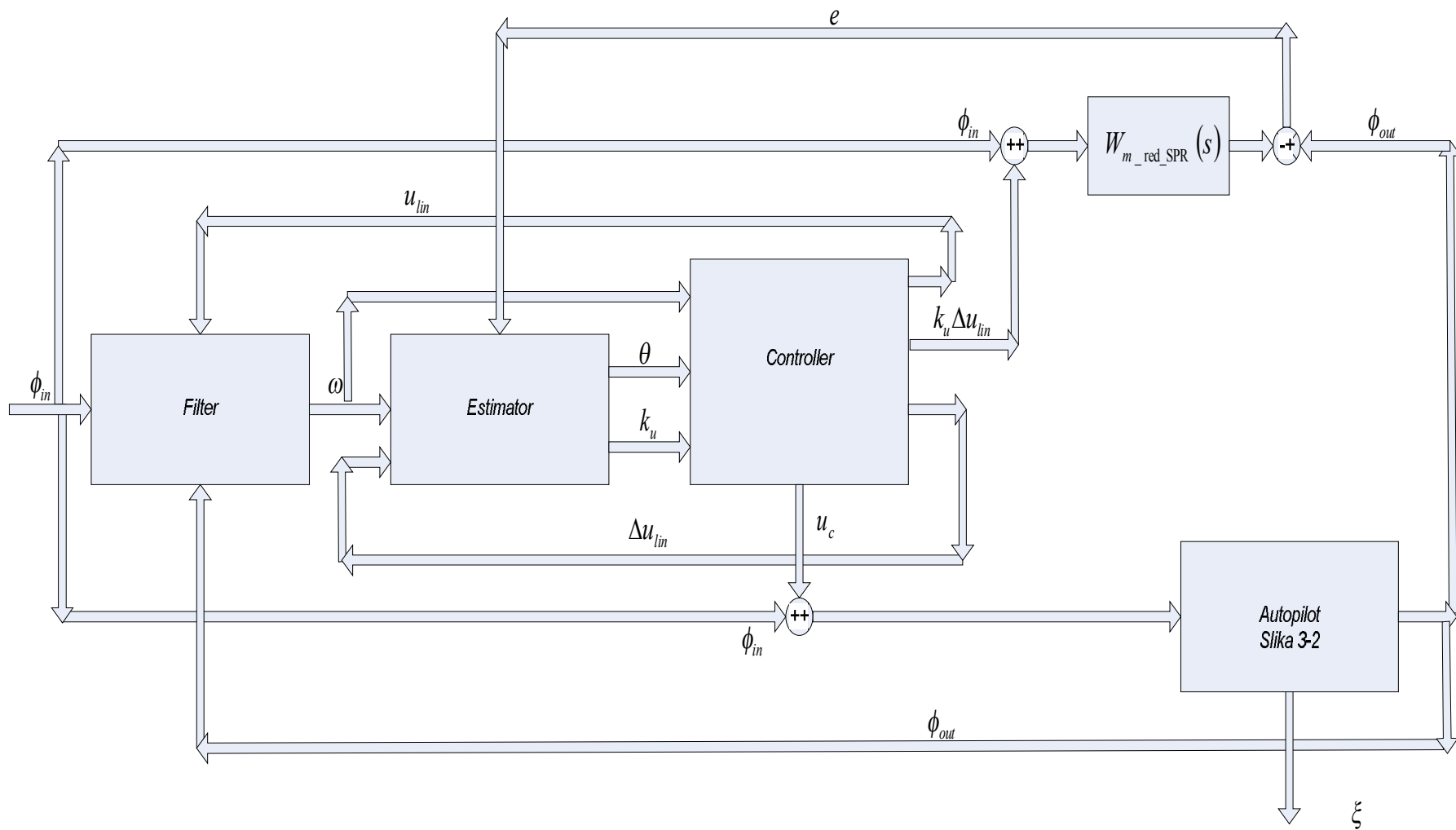
Slika 6-3 Najkvistov dijagram funkcije prenosa autopilota valjanja, funkcije prenosa autopilota valjanja redukovano red i SPR funkcije prenosa autopilota valjanja redukovano red

U radu je korišćena i modifikacija „zone neosetljivosti“ i μ modifikacija. Za veličinu „zone neosetljivosti“ je usvojeno $\varepsilon = 0.1^\circ$, a parametar $\mu = 10$. Ograničenja koja se koriste u μ modifikaciji su posledica ograničenja po otklonu krmila i pojačanja u osnovnom obliku autopilota, i izvedena su za referentni Mahov broj pod pretpostavkom da u normalnom radu autopilota valjanja nije potrebno koristiti više od 1° po otklonu krmila. Ostali parametri koji se koriste u MRAC algoritmu dati su u tabeli.

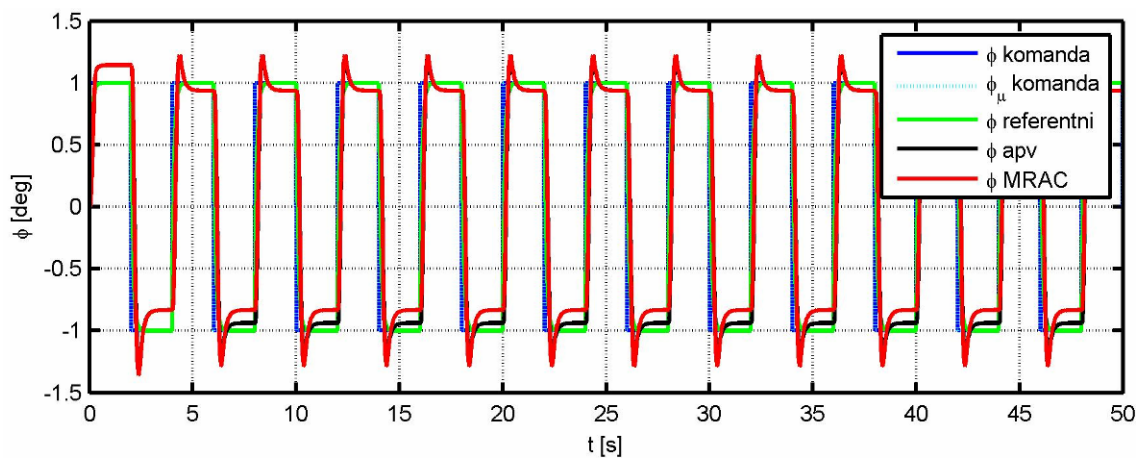
F	Γ	k_u	g
$[-2 \quad -2]^T$	$[80 \quad 1 \quad 80 \quad 8]^T$	50	40

Tabela 6-1 Osnovni parametric korišćeni u MRAC algoritmu primenjenom na autopilot valjanja

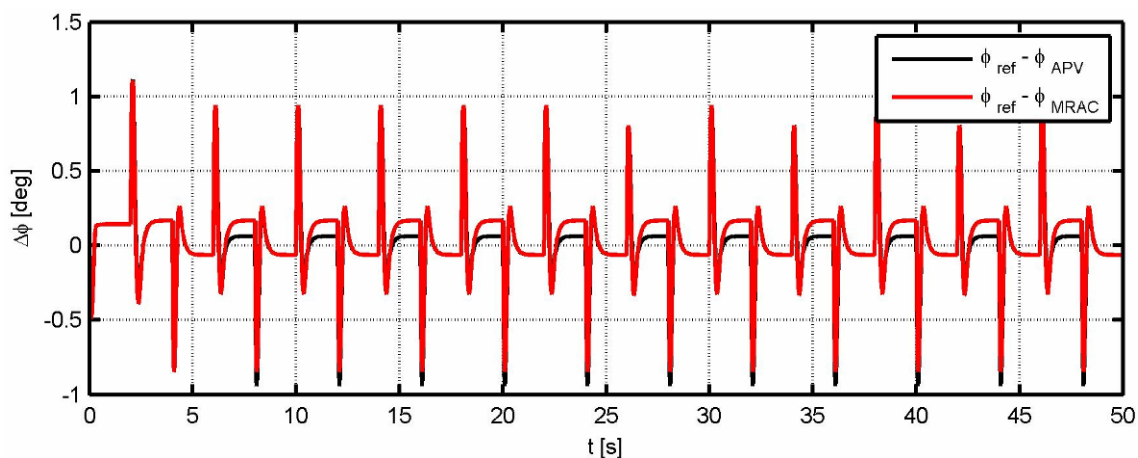
Osnovna provera MRAC algoritma na autopilotu valjanja izvršena je variranjem Mahovog broja u odnosu na referentni. Na dijagramima Slika 6-5 do Slika 6-40 dat je uporedan prikaz odgovora autopilota sa pojačanjima sintetisanim za referentni Mahov broj i MRAC autopilota na različite ulazne signale.



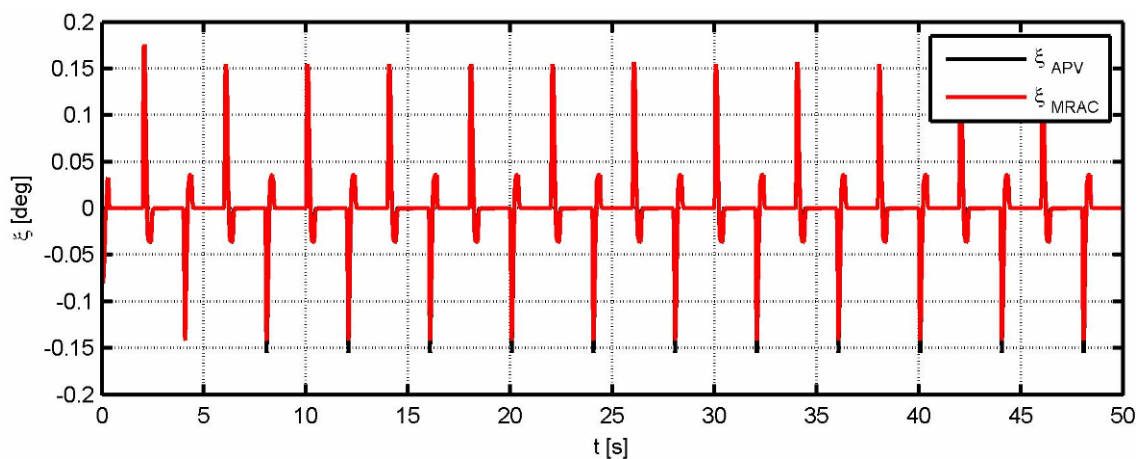
Slika 6-4 Blok dijagram *MRAC* autopilota valjanja



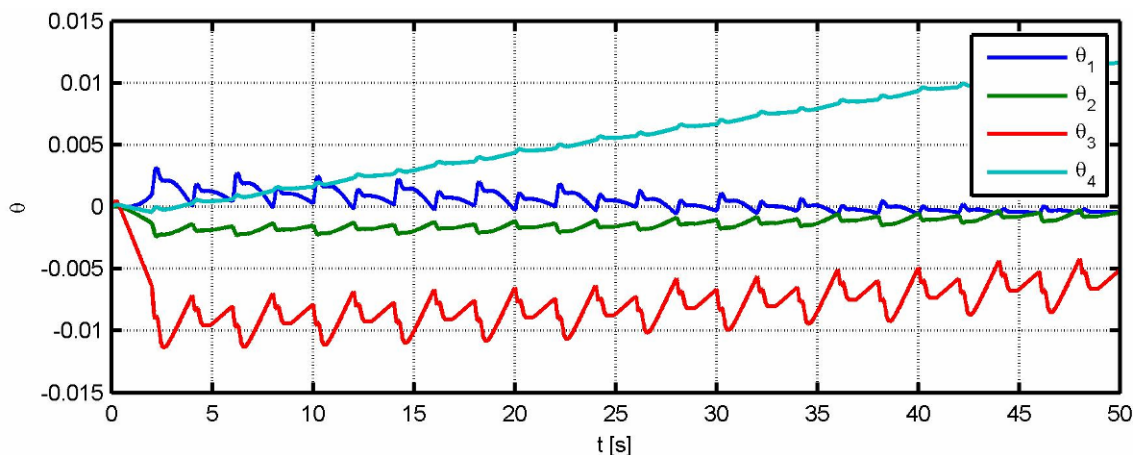
Slika 6-5 Odgovor autopilota valjanja optimisanog za referentni Mahov broj i autopilota sa MRAC algoritmom u uslovima $M = 0.3$ na ulazni signal četvrtki učestanosti 0.25Hz



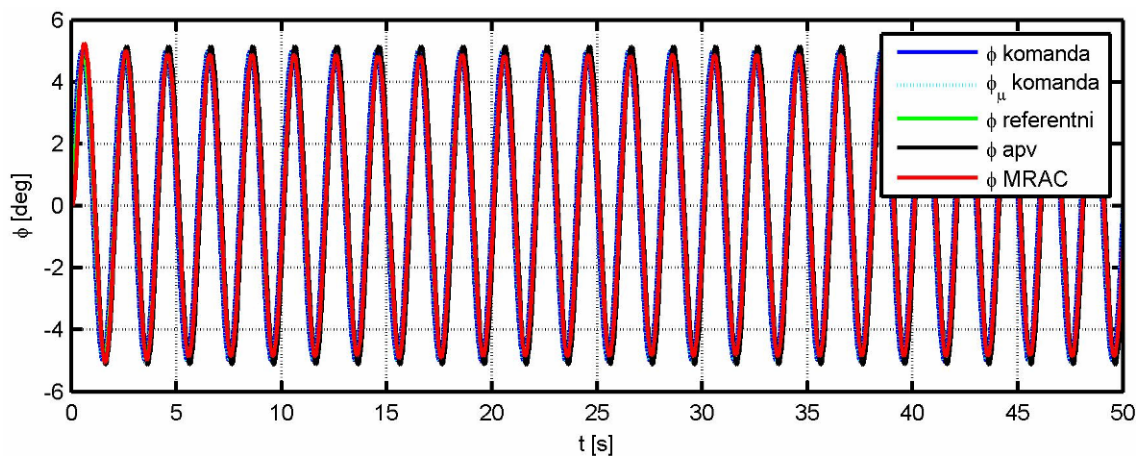
Slika 6-6 Odstupanje odgovora autopilota valjanja optimisanog za referentni Mahov broj i autopilota sa MRAC algoritmom u uslovima $M = 0.3$ u odnosu na referentan model pri ulaznom signalu četvrtki učestanosti 0.25Hz



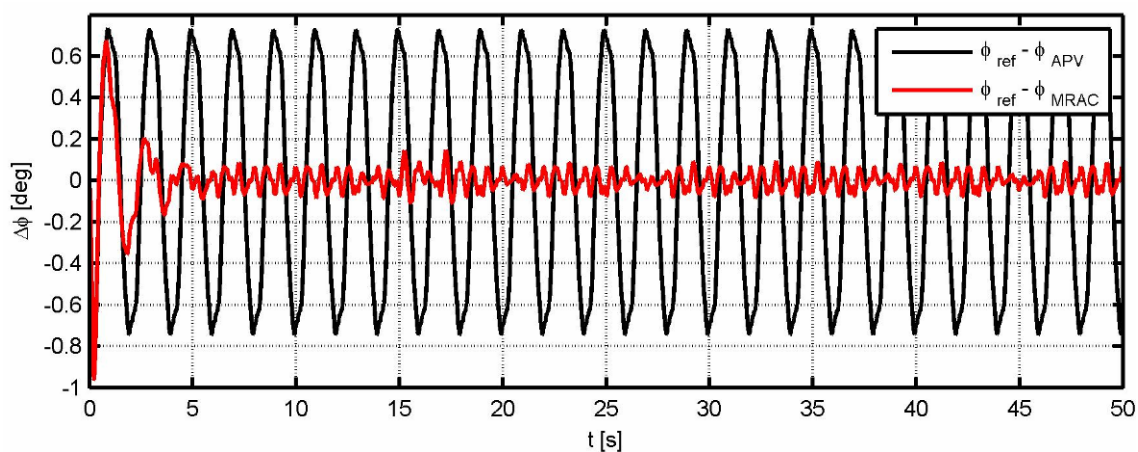
Slika 6-7 Otklon krmila autopilota valjanja optimisanog za referentni Mahov broj i autopilota sa MRAC algoritmom u uslovima $M = 0.3$ pri ulaznom signalu četvrtki učestanosti 0.25Hz



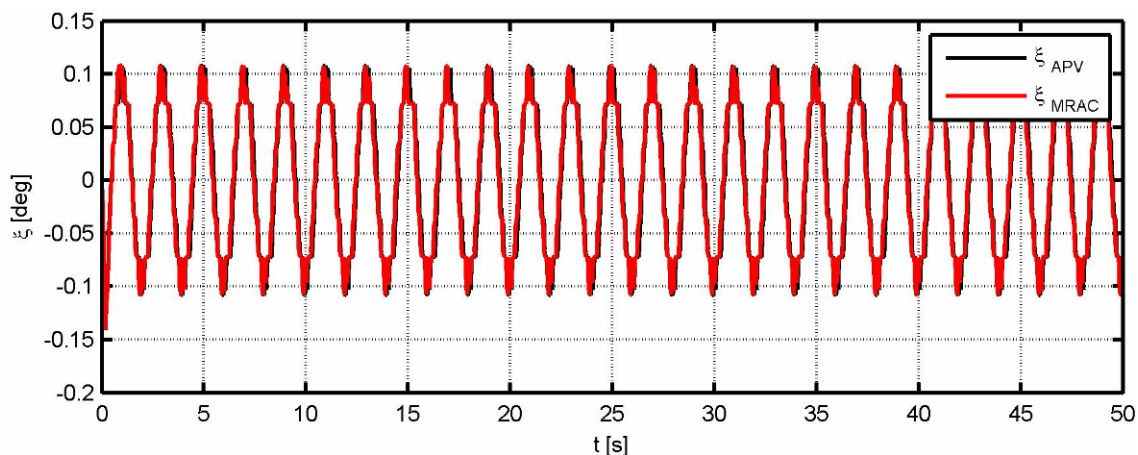
Slika 6-8 Promena parametara MRAC adaptivnog algoritma sa vremenom u uslovima $M = 0.3$ pri ulaznom signalu četvrtki učestanosti 0.25Hz



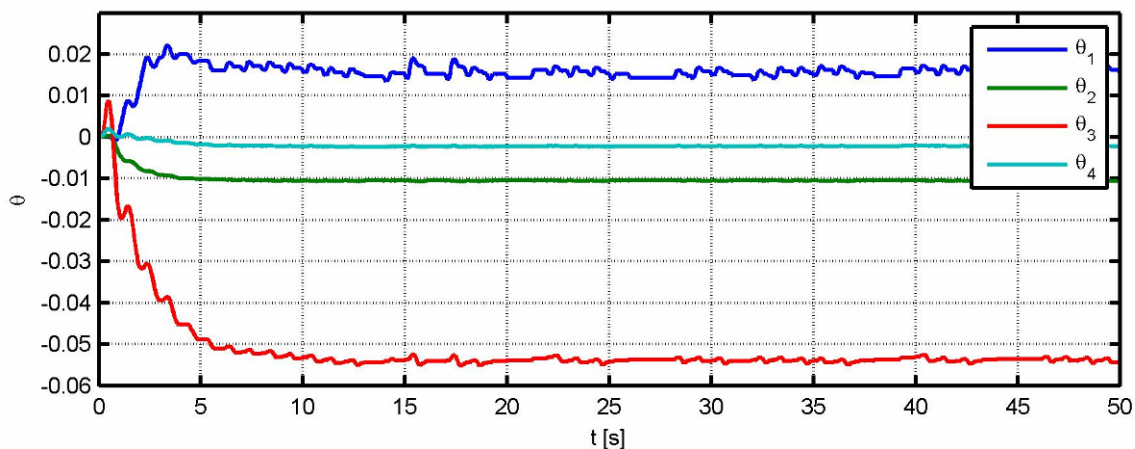
Slika 6-9 Odgovor autopilota valjanja optimisanog za referentni Mahov broj i autopilota sa MRAC algoritmom u uslovima $M = 0.3$ na sinusoidni ulazni signal učestanosti 0.5Hz



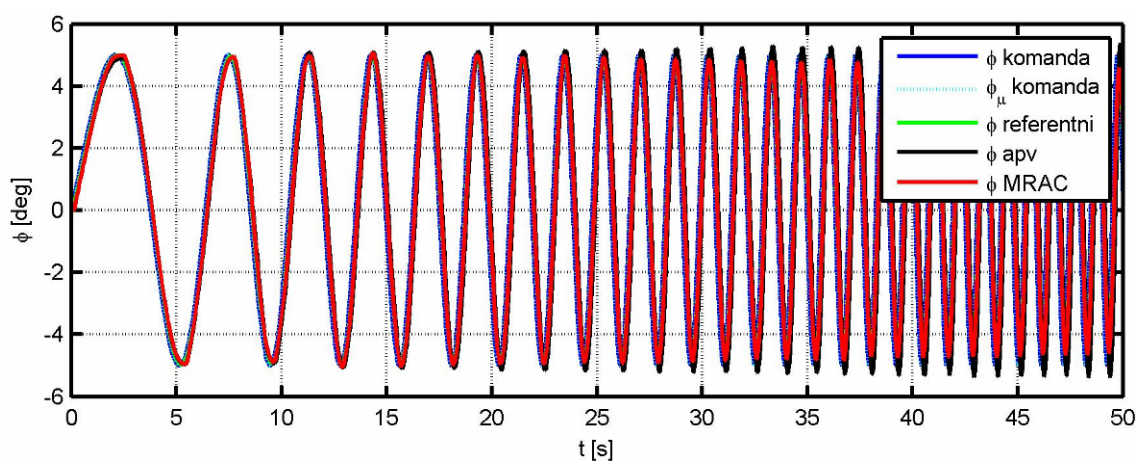
Slika 6-10 Odstupanje odgovora autopilota valjanja optimisanog za referentni Mahov broj i autopilota sa MRAC algoritmom u uslovima $M = 0.3$ u odnosu na referentan model pri sinusoidnom ulaznom signalu učestanosti 0.5Hz



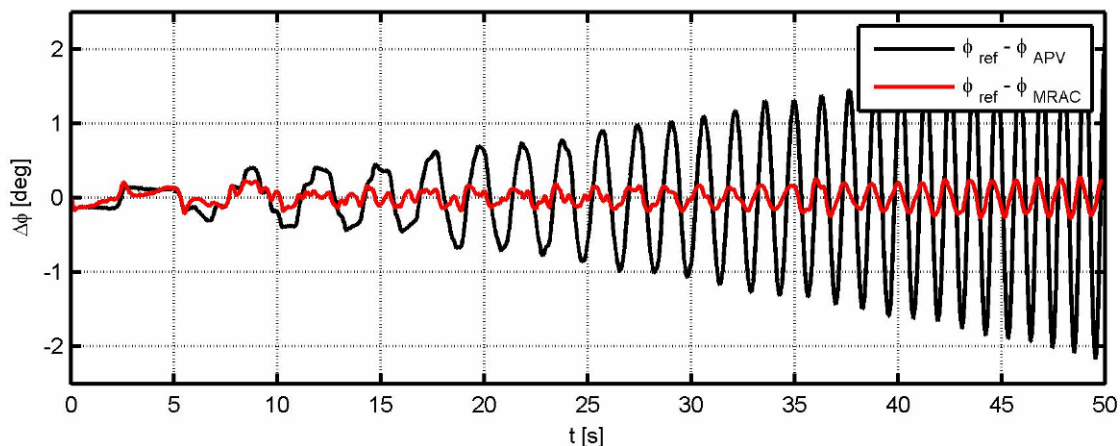
Slika 6-11 Otklon krmila autopilota valjanja optimisanog za referentni Mahov broj i autopilota sa MRAC algoritmom u uslovima $M = 0.3$ pri sinusoidnom ulaznom signalu učestanosti 0.5Hz



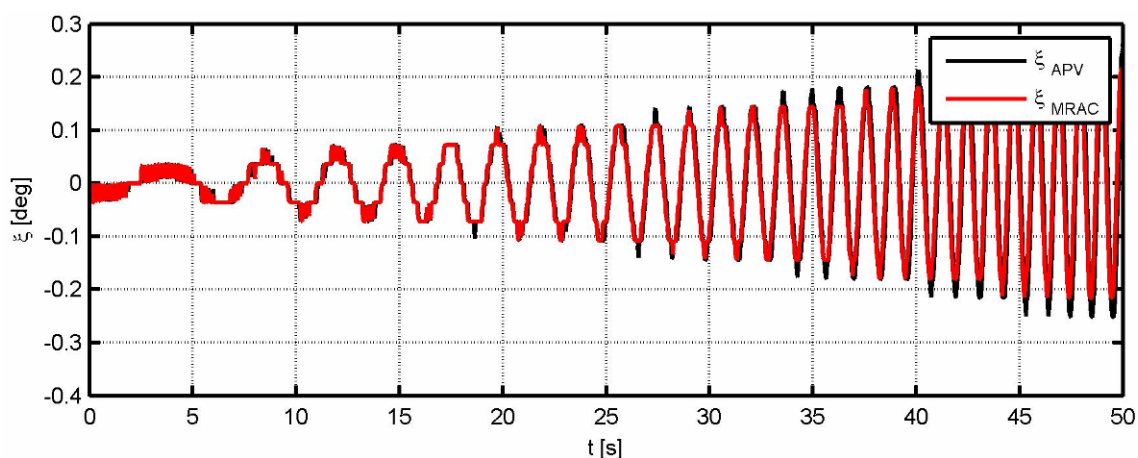
Slika 6-12 Promena parametara MRAC adaptivnog algoritma sa vremenom u uslovima $M = 0.3$ pri sinusoidnom ulaznom signalu učestanosti 0.5Hz



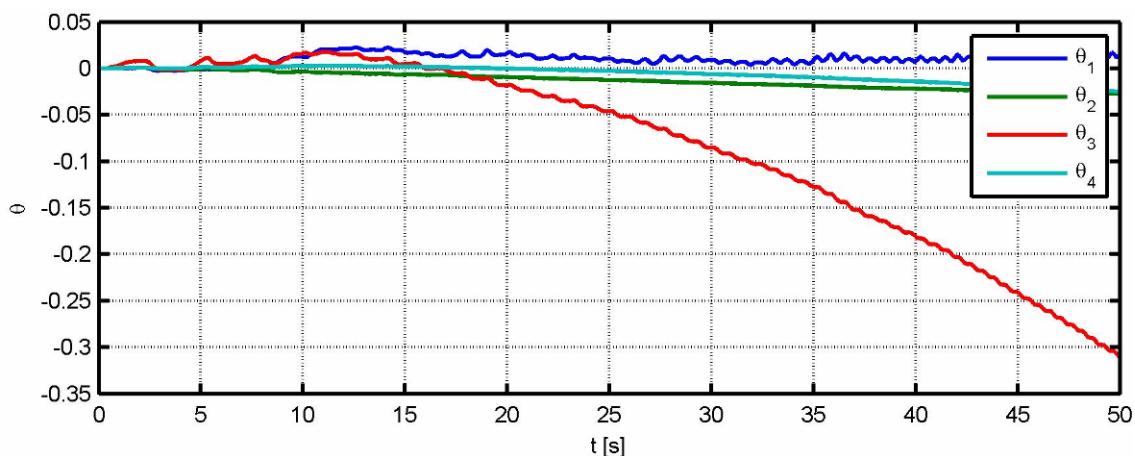
Slika 6-13 Odgovor autopilota valjanja optimisanog za referentni Mahov broj i autopilota sa MRAC algoritmom u uslovima $M = 0.3$ na sinusoidni ulazni signal promenljive učestanosti



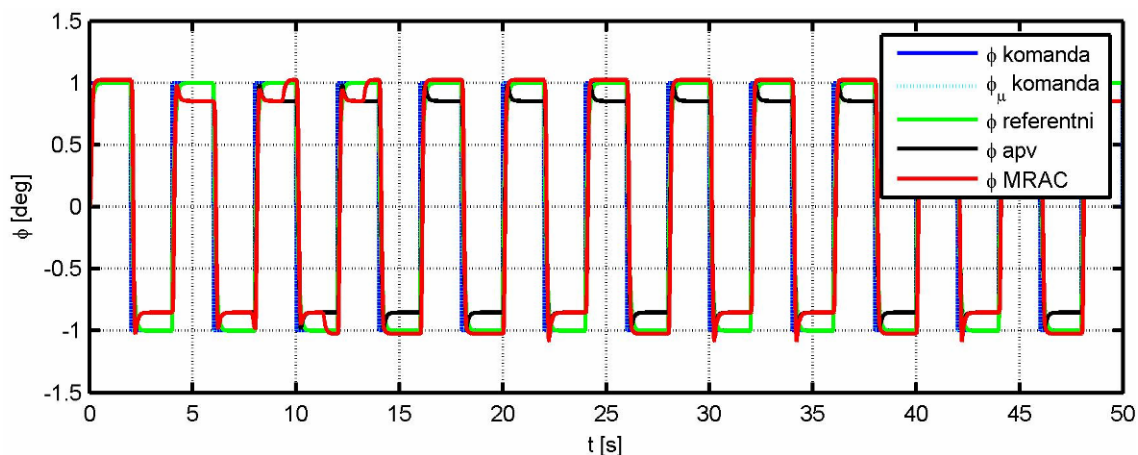
Slika 6-14 Odstupanje odgovora autopilota valjanja optimisanog za referentni Mahov broj i autopilota sa MRAC algoritmom u uslovima $M = 0.3$ u odnosu na referentan model pri sinusoidnom ulaznom signalu promenljive učestanosti



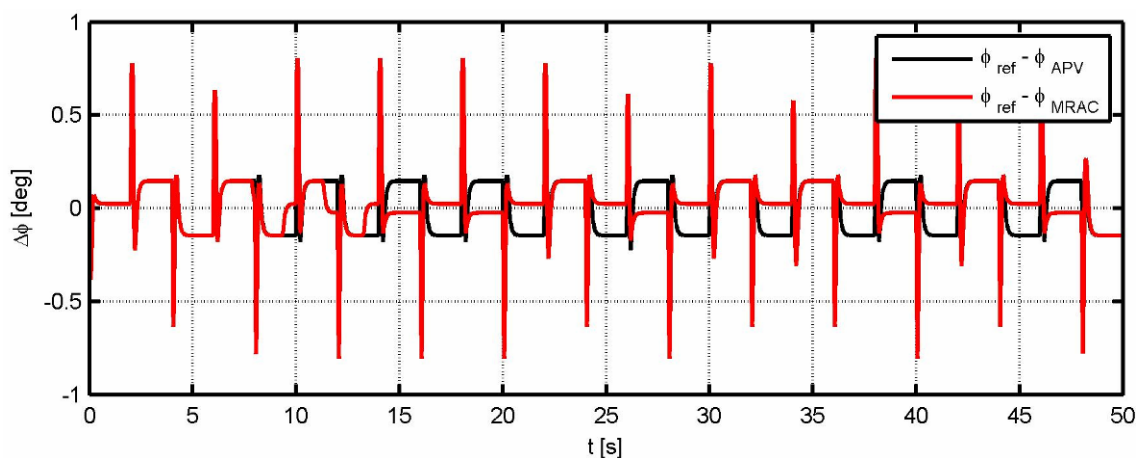
Slika 6-15 Otklon krmila autopilota valjanja optimisanog za referentni Mahov broj i autopilota sa MRAC algoritmom u uslovima $M = 0.3$ pri sinusoidnom ulaznom signalu promenljive učestanosti



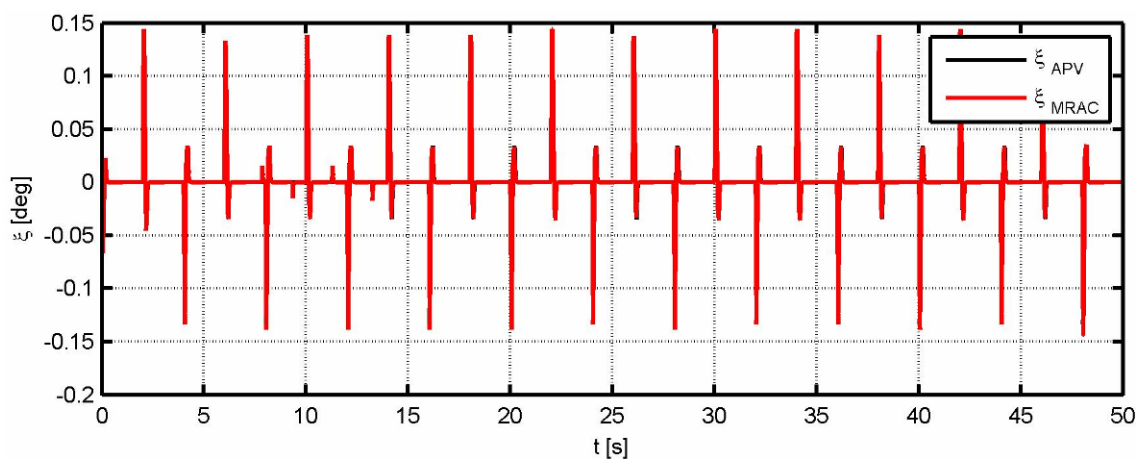
Slika 6-16 Promena parametara MRAC adaptivnog algoritma sa vremenom u uslovima $M = 0.3$ pri sinusoidnom ulaznom signalu promenljive učestanosti



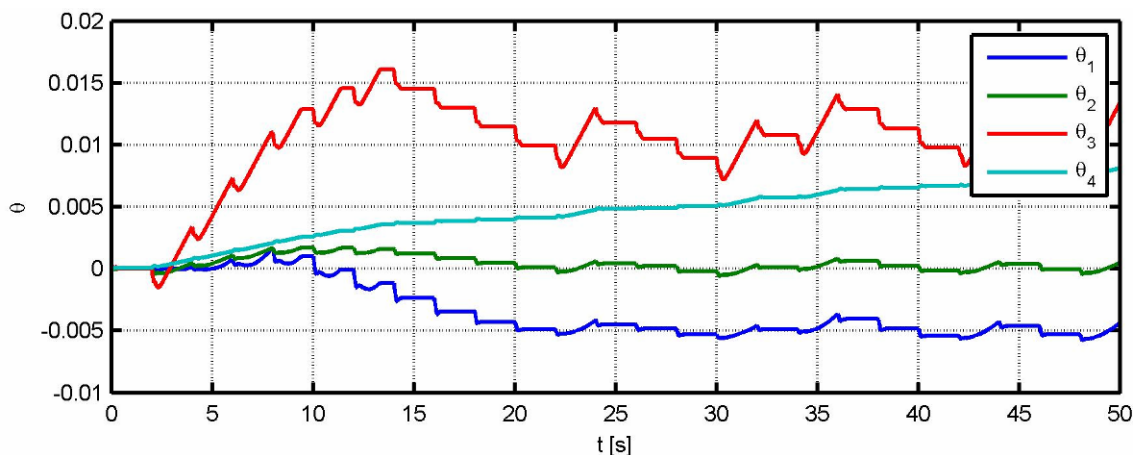
Slika 6-17 Odgovor autopilota valjanja optimisanog za referentni Mahov broj i autopilota sa MRAC algoritmom pri referentnim uslovima na ulazni signal četvrtki učestanosti 0.25Hz



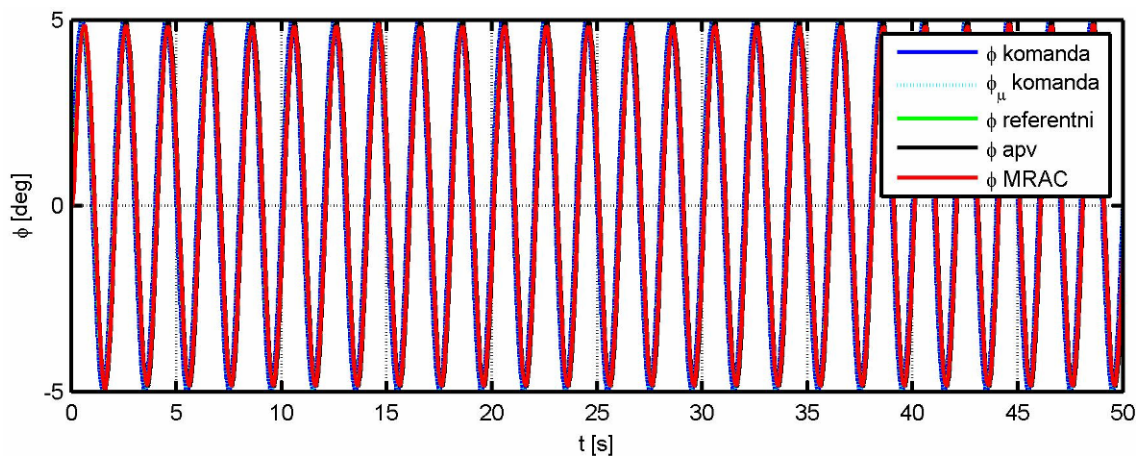
Slika 6-18 Odstupanje odgovora autopilota valjanja optimisanog za referentni Mahov broj i autopilota sa MRAC algoritmom pri referentnim uslovima u odnosu na referentan model pri ulaznom signalu četvrtki učestanosti 0.25Hz



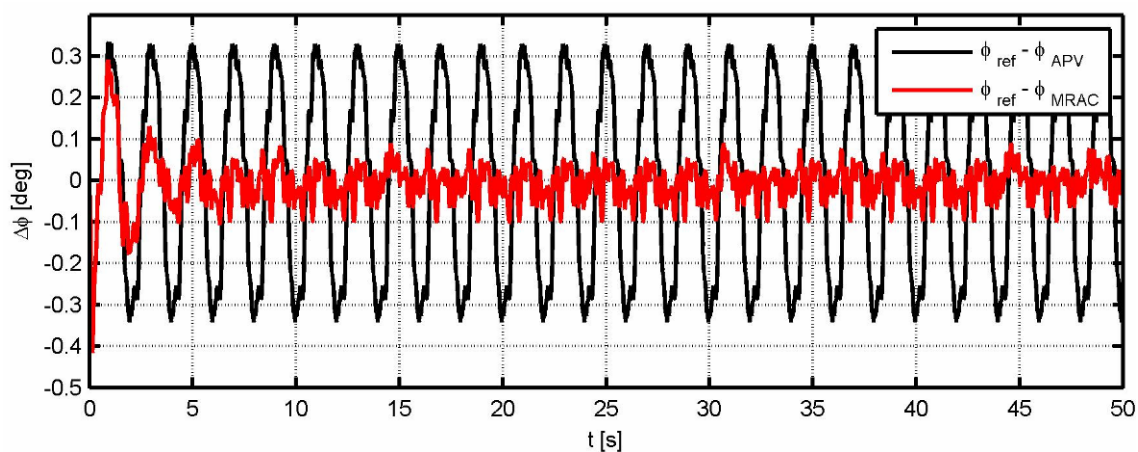
Slika 6-19 Otklon krmila autopilota valjanja optimisanog za referentni Mahov broj i autopilota sa MRAC algoritmom pri referentnim uslovima, pri ulaznom signalu četvrtki učestanosti 0.25Hz



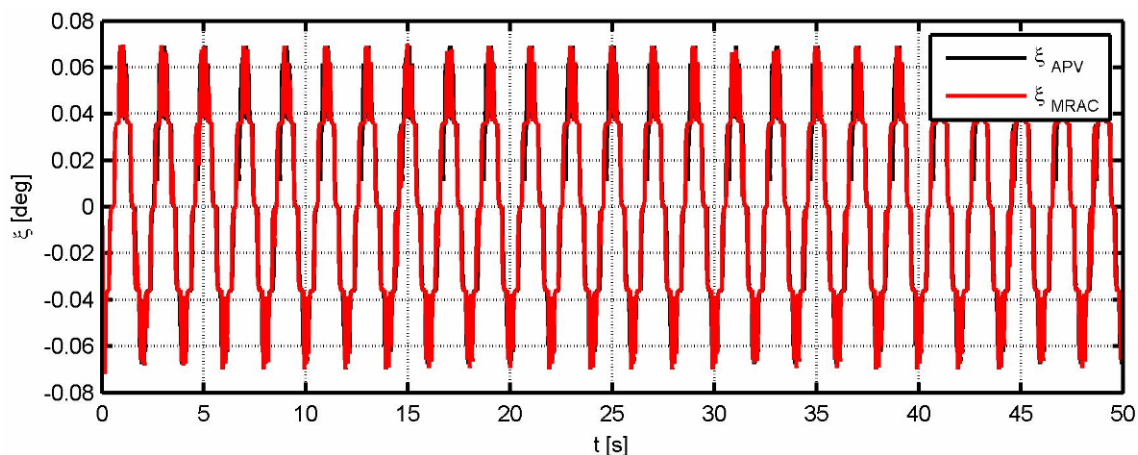
Slika 6-20 Promena parametara MRAC adaptivnog algoritma sa vremenom u uslovima $M = 0.5$ pri ulaznom signalu četvrtki učestanosti 0.25Hz



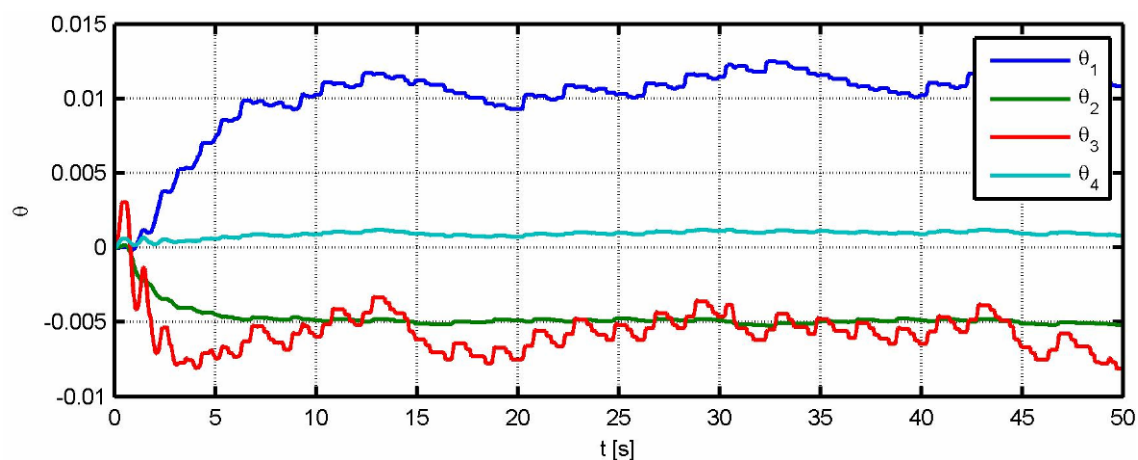
Slika 6-21 Odgovor autopilota valjanja optimisanog za referentni Mahov broj i autopilota sa MRAC algoritmom pri referentnim uslovima na sinusoidni ulazni signal učestanosti 0.5Hz



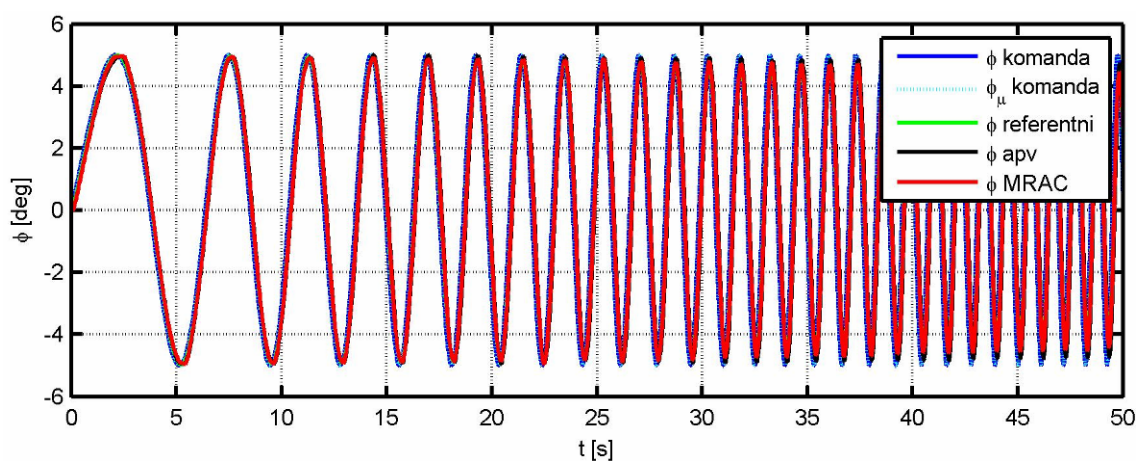
Slika 6-22 Odstupanje odgovora autopilota valjanja optimisanog za referentni Mahov broj i autopilota sa MRAC algoritmom pri referentnim uslovima u odnosu na referentan model pri sinusoidnom ulaznom signalu učestanosti 0.5Hz



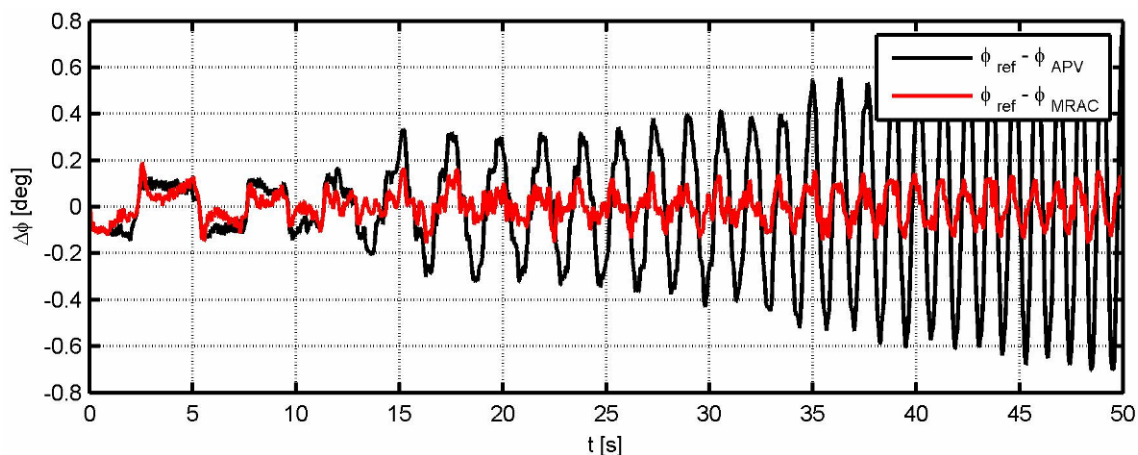
Slika 6-23 Otklon krmila autopilota valjanja optimisanog za referentni Mahov broj i autopilota sa MRAC algoritmom u referentnim uslovima pri sinusoidnom ulaznom signalu učestanosti 0.5Hz



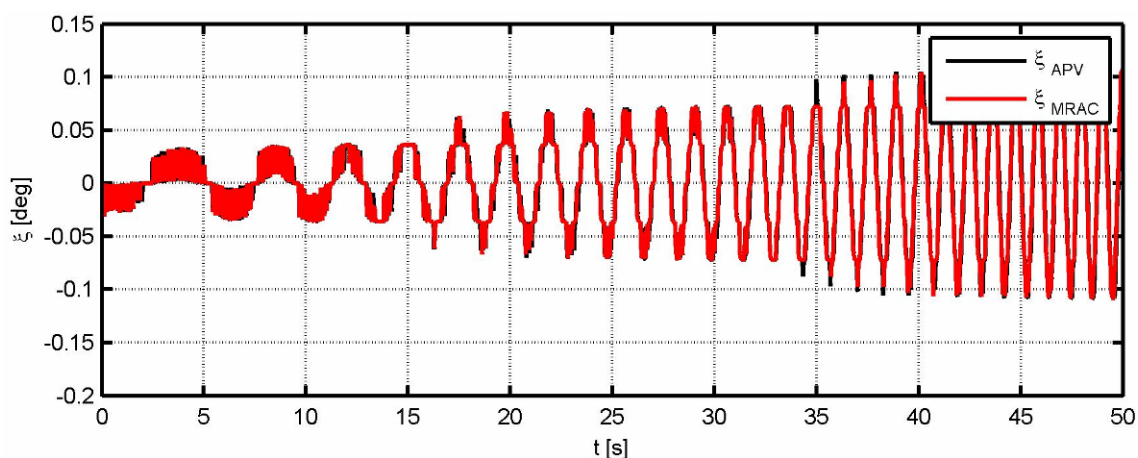
Slika 6-24 Promena parametara MRAC adaptivnog algoritma sa vremenom u uslovima $M = 0.5$ pri sinusoidnom ulaznom signalu učestanosti 0.5Hz



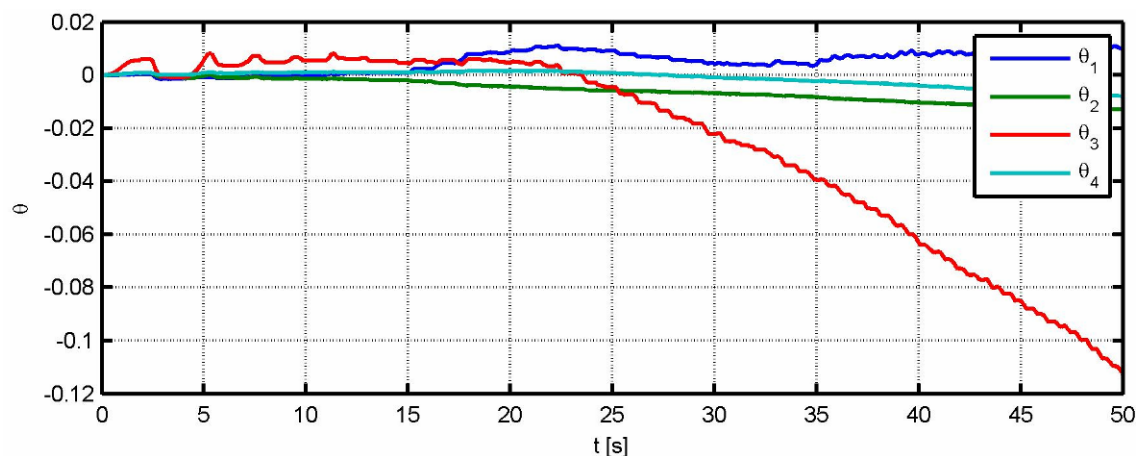
Slika 6-25 Odgovor autopilota valjanja optimisanog za referentni Mahov broj i autopilota sa MRAC algoritmom pri referentnim uslovima na sinusoidni ulazni signal promenljive učestanosti



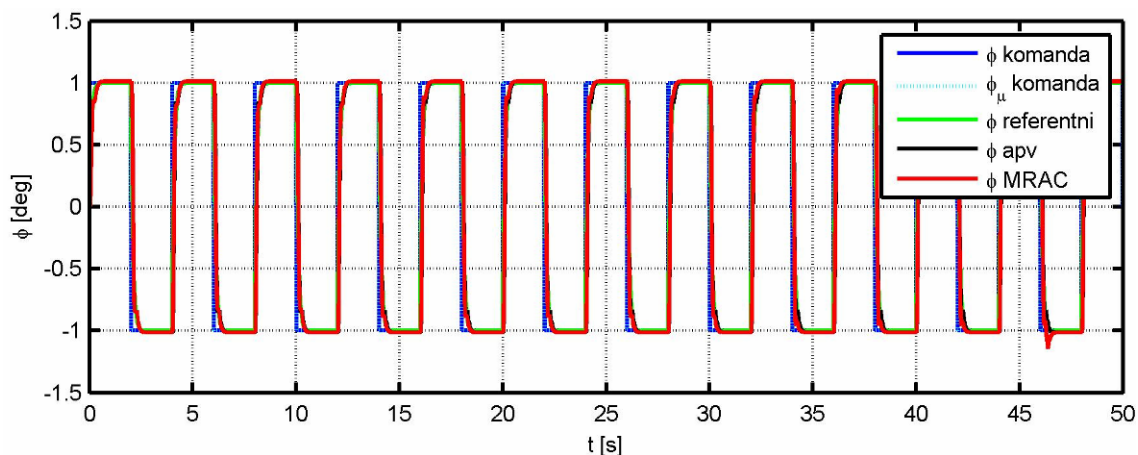
Slika 6-26 Odstupanje odgovora autopilota valjanja optimisanog za referentni Mahov broj i autopilota sa MRAC algoritmom u referentnim uslovima u odnosu na referentan model pri sinusoidnom ulaznom signalu promenljive učestanosti



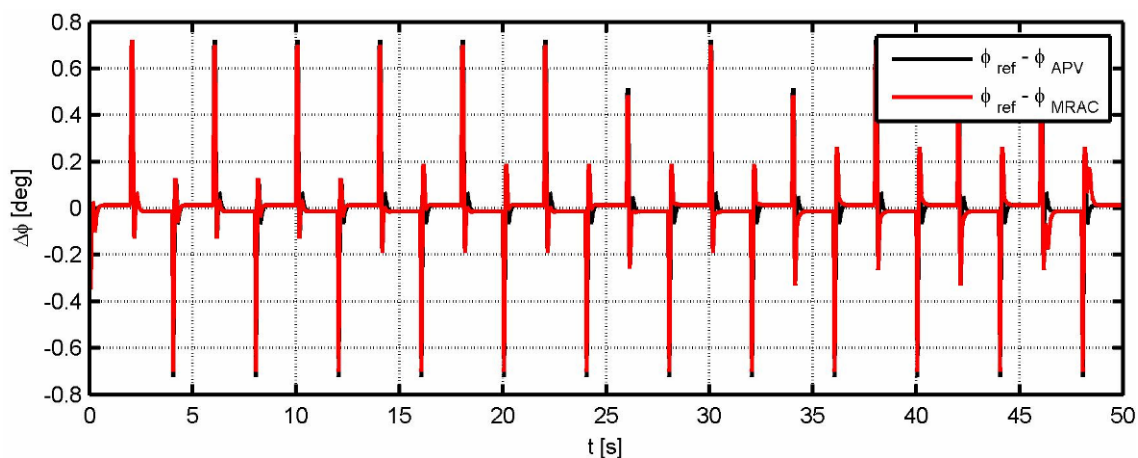
Slika 6-27 Otklon krmila autopilota valjanja optimisanog za referentni Mahov broj i autopilota sa MRAC algoritmom u referentnim uslovima pri sinusoidnom ulaznom signalu promenljive učestanosti



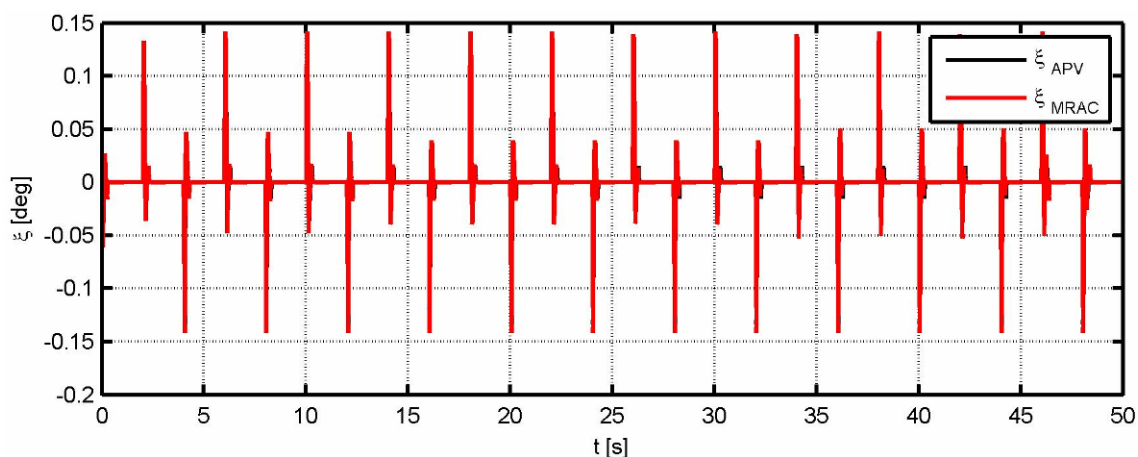
Slika 6-28 Promena parametara MRAC adaptivnog algoritma sa vremenom u uslovima $M = 0.5$ pri sinusoidnom ulaznom signalu promenljive učestanosti



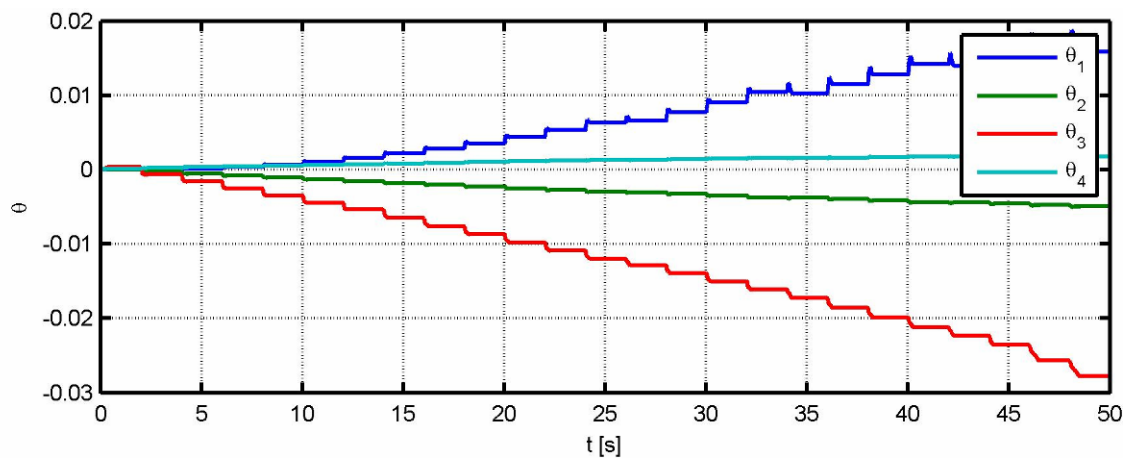
Slika 6-29 Odgovor autopilota valjanja optimisanog za referentni Mahov broj i autopilota sa MRAC algoritmom u uslovima $M = 0.7$ na ulazni signal četvrtki učestanosti 0.25Hz



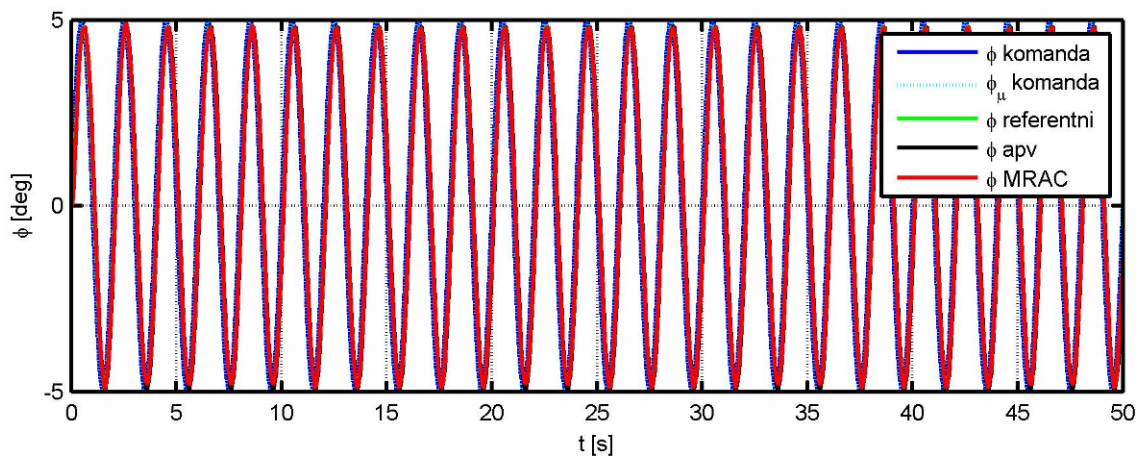
Slika 6-30 Odstupanje odgovora autopilota valjanja optimisanog za referentni Mahov broj i autopilota sa MRAC algoritmom u uslovima $M = 0.7$ u odnosu na referentan model pri ulaznom signalu četvrtki učestanosti 0.25Hz



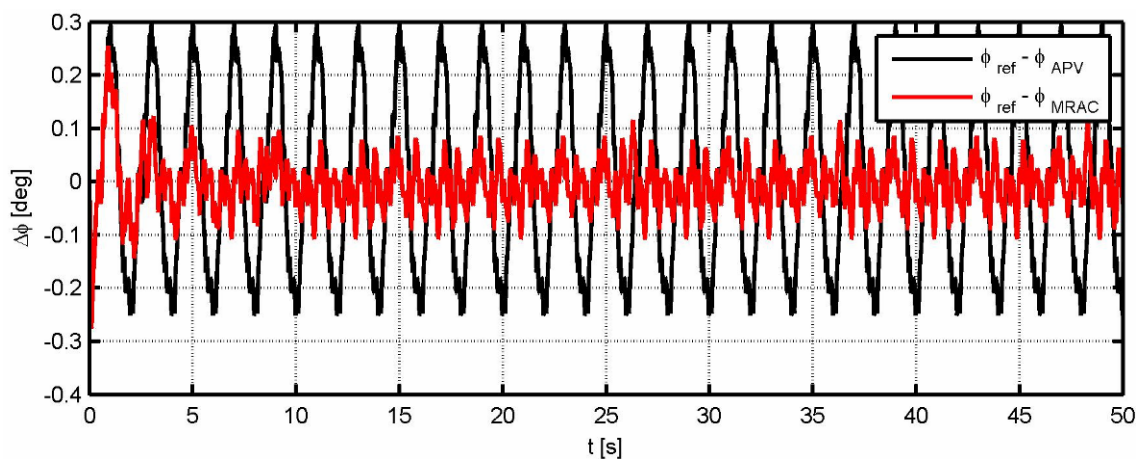
Slika 6-31 Otklon krmila autopilota valjanja optimisanog za referentni Mahov broj i autopilota sa MRAC algoritmom u uslovima $M = 0.7$ pri ulaznom signalu četvrtki učestanosti 0.25Hz



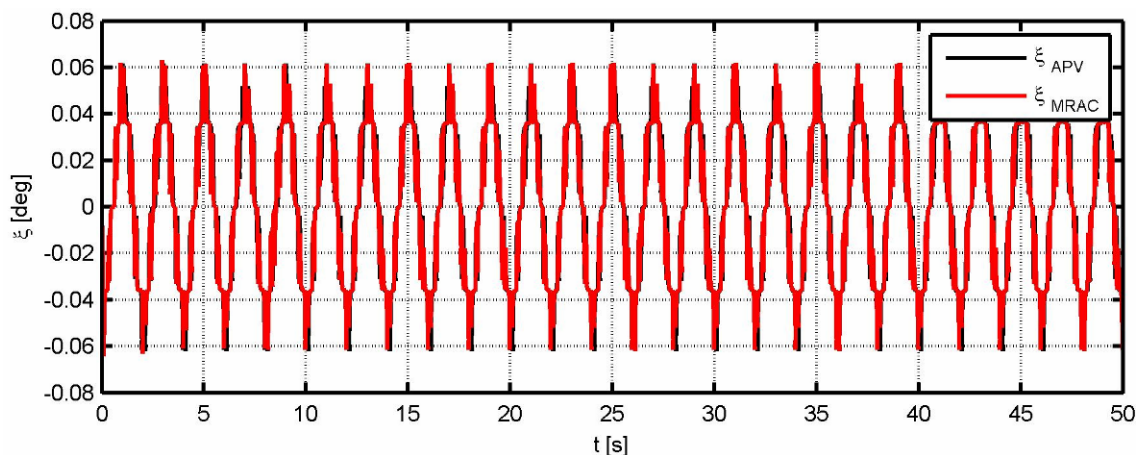
Slika 6-32 Promena parametara MRAC adaptivnog algoritma sa vremenom u uslovima $M = 0.7$ pri ulaznom signalu četvrtki učestanosti 0.25Hz



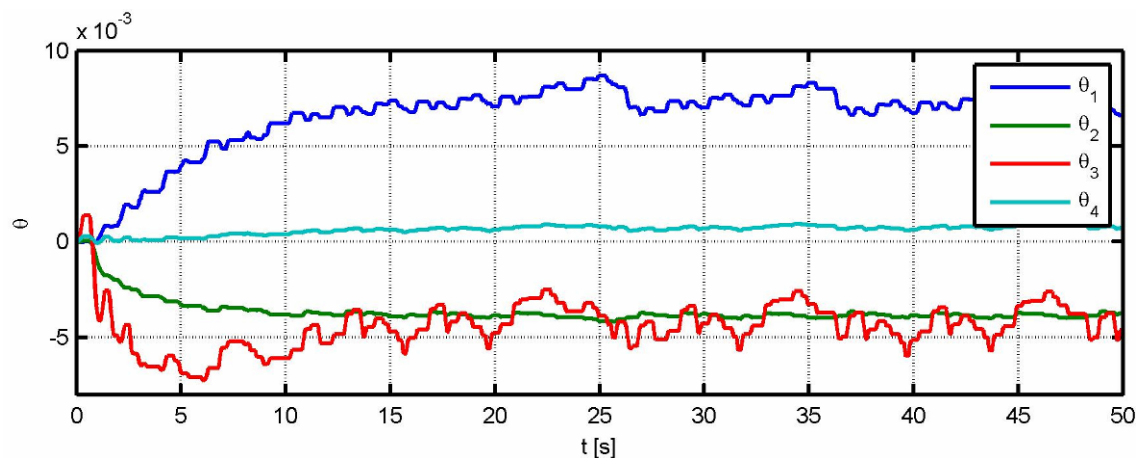
Slika 6-33 Odgovor autopilota valjanja optimisanog za referentni Mahov broj i autopilota sa MRAC algoritmom u uslovima $M = 0.7$ na sinusoidni ulazni signal učestanosti 0.5Hz



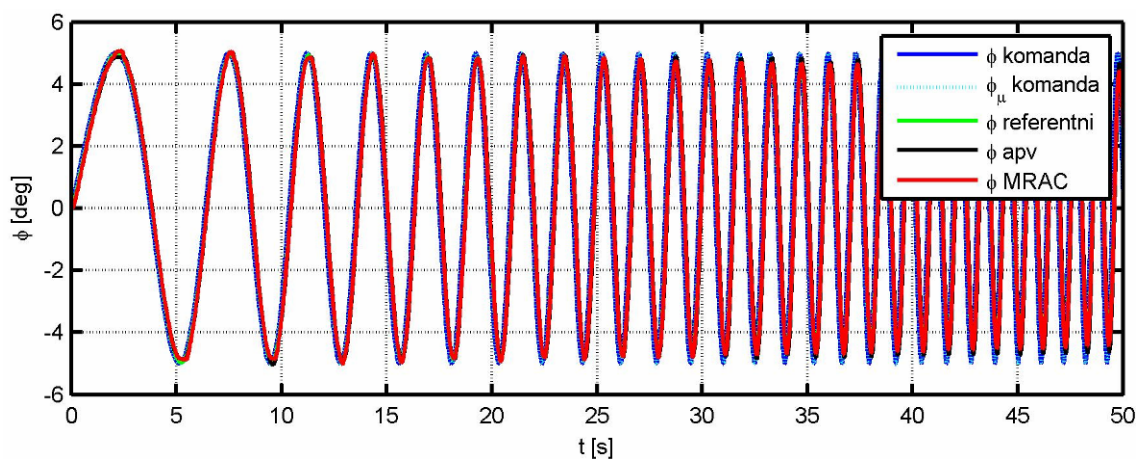
Slika 6-34 Odstupanje odgovora autopilota valjanja optimisanog za referentni Mahov broj i autopilota sa MRAC algoritmom u uslovima $M = 0.7$ u odnosu na referentan model pri sinusoidnom ulaznom signalu učestanosti 0.5Hz



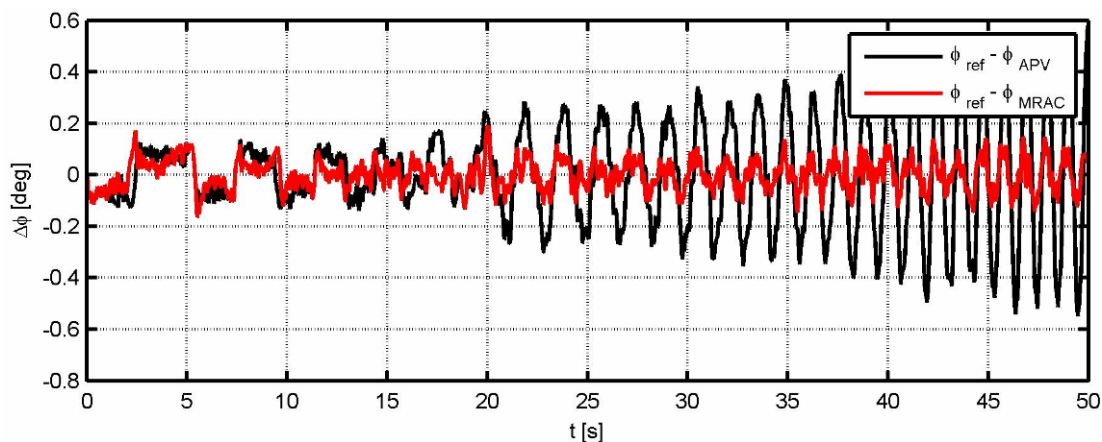
Slika 6-35 Otklon krmila autopilota valjanja optimisanog za referentni Mahov broj i autopilota sa MRAC algoritmom u uslovima $M = 0.7$ pri sinusoidnom ulaznom signalu učestanosti 0.5Hz



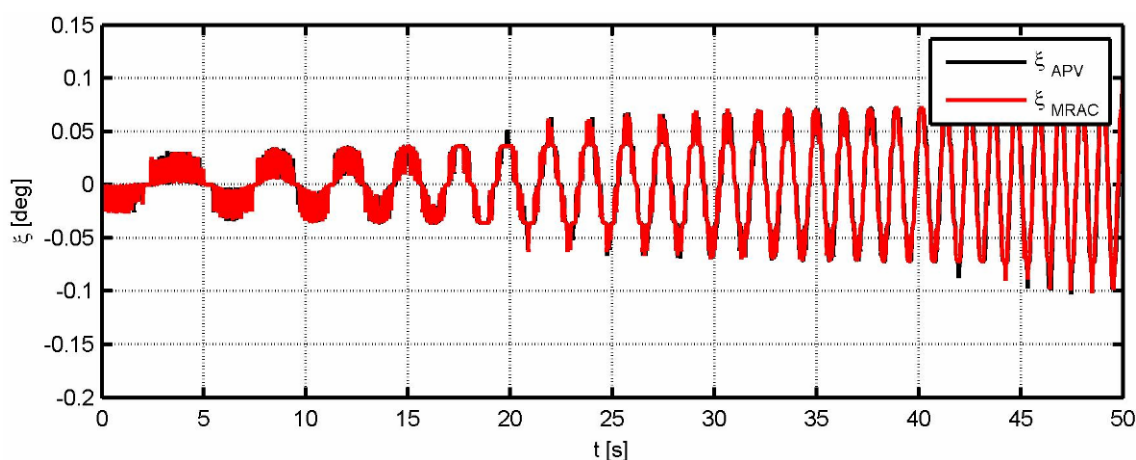
Slika 6-36 Promena parametara MRAC adaptivnog algoritma sa vremenom u uslovima $M = 0.7$ pri sinusoidnom ulaznom signalu učestanosti 0.5Hz



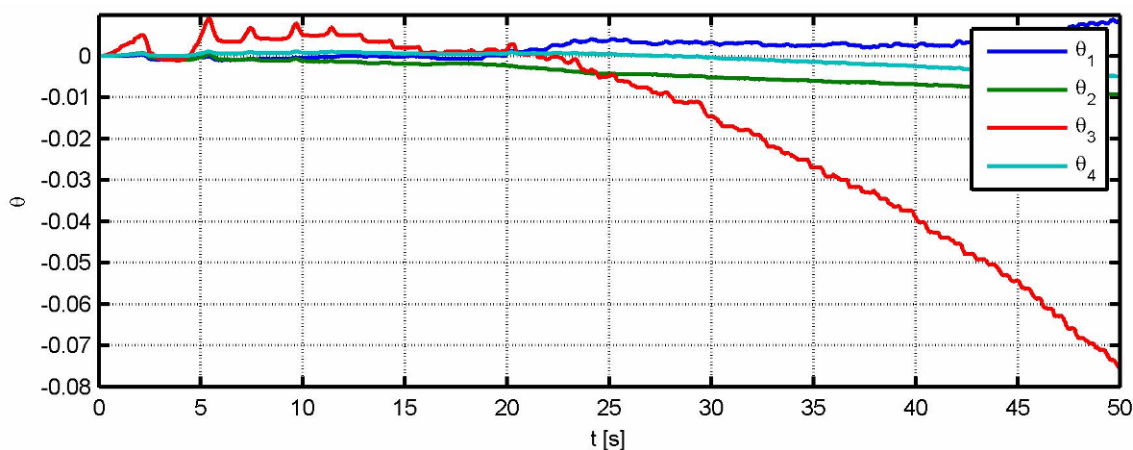
Slika 6-37 Odgovor autopilota valjanja optimisanog za referentni Mahov broj i autopilota sa MRAC algoritmom u uslovima $M = 0.7$ na sinusoidni ulazni signal promenljive učestanosti



Slika 6-38 Odstupanje odgovora autopilota valjanja optimisanog za referentni Mahov broj i autopilota sa MRAC algoritmom u uslovima $M = 0.7$ u odnosu na referentan model pri sinusoidnom ulaznom signalu promenljive učestanosti



Slika 6-39 Otklon krmila autopilota valjanja optimisanog za referentni Mahov broj i autopilota sa MRAC algoritmom u uslovima $M = 0.7$ pri sinusoidnom ulaznom signalu promenljive učestanosti



Slika 6-40 Promena parametara MRAC adaptivnog algoritma sa vremenom u uslovima $M = 0.7$ pri sinusoidnom ulaznom signalu promenljive učestanosti

Poređenjem odgovora adaptivnog autopilota valjanja i osnovnog autopilota valjanja na ulazni signal tip četvrtki može se zaključiti da MRAC algoritam nema značajnije efekte kod ovakvog ulaznog signala već samo utiče na smanjenje statičke greške u odgovoru. Razlog za postojanje statičke greške je ograničenje u rezoluciji aktuatorskog sistema i sa porastom rezolucije ova greška bi se smanjila. Poređenjem odgovora na ulaz četvrtki može se primetiti i da pri malim greškama dolazi do rasta parametara u vremenu što ukazuje na to da bi se zona neosetljivosti mogla proširiti.

Sa druge strane poređenjem odgovora autopilota na harmonijske ulazne signale, konstantne ili promenljive učestanosti, uviđa se značajno smanjenje greške, 3 do 10 puta u slučaju adaptivnog algoritma. Poređenjem dijagrama parametara MRAC algoritma u vremenu može se primetiti da parametri najbolje konvergiraju u slučaju harmonijskog ulaznog signala konstantne učestanosti. Kod signala promenljivih učestanosti se primećuje da se parametri menjaju sa promenama učestanosti pa se tu ne može razmatrati konvergencija obzirom da se i uslovi menjaju.

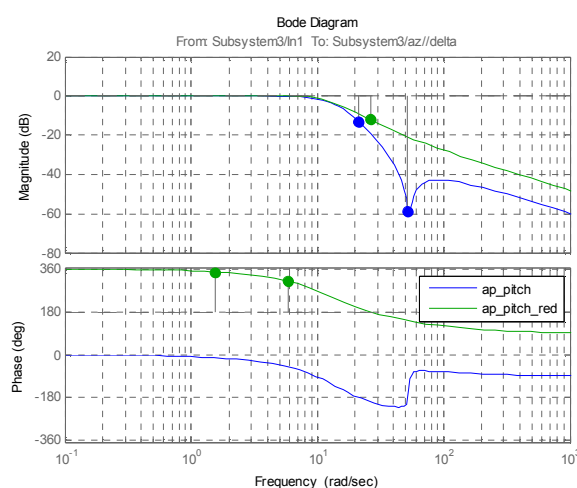
Treba napomenuti da će odgovor MRAC algoritma u simulacijama leta biti značajno drugačiji od ovde predstavljenih jer se u regularnim uslovima leta i algoritma vođenja ne očekuju signali tipa ponovljivih četvrtki ili harmonijske oscilacije. Ipak očekuje se da će u slučajevima poremećaja ili nedovoljnog poznavanja aerodinamičkih derivativa MRAC algoritam poboljšati odgovor u odnosu na osnovni autopilot valjanja.

Problem sa adaptivnim upravljanjem je što je za dobru adaptaciju potrebno i dovoljno vremena što u primeni na autopilote rakete nije slučaj.

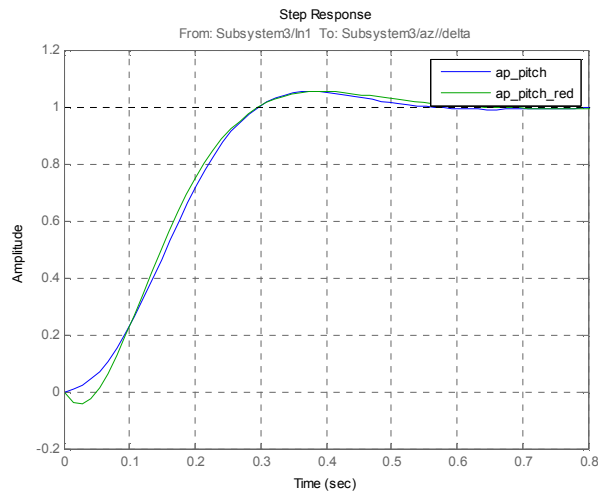
6.3 Adaptivno upravljanje sa referentnim modelom primenjeno na autopilot propinjanja/skretanja

Algoritam MRAC je primenjen na autopilot propinjanja/skretanja tako što je zatvoren samo po spoljnoj povratnoj sprezi, po normalnom ubrzanju, Slika 6-45. Za referentan model je izabrana dinamika sistema koja odgovara „idealno“ podešenom autopilotu propinjanja bez uticaja dinamike aktuatora za referentan Mahov broj. Ovim je obezbeđeno da dinamika referentnog modela odgovara realnom sistemu. Takođe zadržan je i osnovni kontroler, odnosno pojačanja autopilota propinjanja, koja su određena u poglavlju 4, uz napomenu da se koriste konstantna pojačanja koja odgovaraju referentnom Mahovom broju. MRAC je korišćen u modifikovanom obliku sa modifikacijom „zone neosetljivosti“ kako bi se smanjio drift parametara adaptacije.

Prva faza u projektovanju MRAC autopilota isto kao i kod primene na autopilotu valjanja bilo je usvajanje referentnog modela. Iako je relativni stepen autopilota $n^* = 1$, u osnovi funkcija prenosa je takva da je $p_m = 3, q_m = 2$. Kako bi se pojednostavio i software u autopilotu prvo je urađena redukcija reda funkcije prenosa, korišćenjem Pade-ovog algoritma. Na dijagramima Slika 6-41 i Slika 6-42 prikazan je uporedno odgovor funkcije prenosa autopilota valjanja za $M = 0.5$ i funkcije prenosa redukovanoog reda $p_m = 2, q_m = 1$, i dat je Bodeov dijagram obe funkcije.



Slika 6-41 Bode dijagram funkcije prenosa autopilota propinjanja i funkcije prenosa autopilota propinjanja redukovanoog reda



Slika 6-42 Odskočni odziv funkcije prenosa autopilota propinjanja i funkcije prenosa autopilota propinjanja redukovanog reda

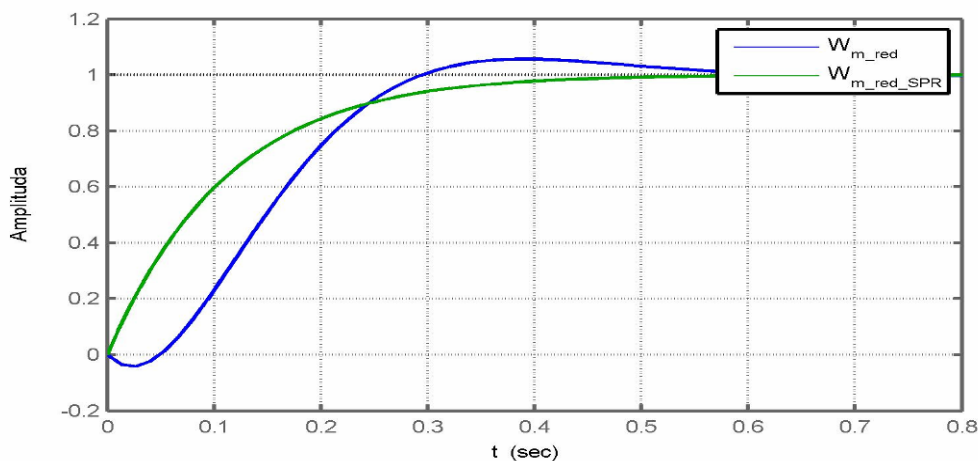
Ono što je sledeći korak u izboru referentnog modela je provera i modifikacija funkcije prenosa referentnog modela tako da zadovolji uslov da je njegova funkcija SPR.

Obzirom da redukovani model nije zadovoljavao kriterijum SPR izmenjen je tako da zadovolji taj uslov. Uporedni prikaz osnovnog redukovanog modela i modifikovanog tako da bude SPR prikazan je na dijagramima Slika 6-43 i Slika 6-44.

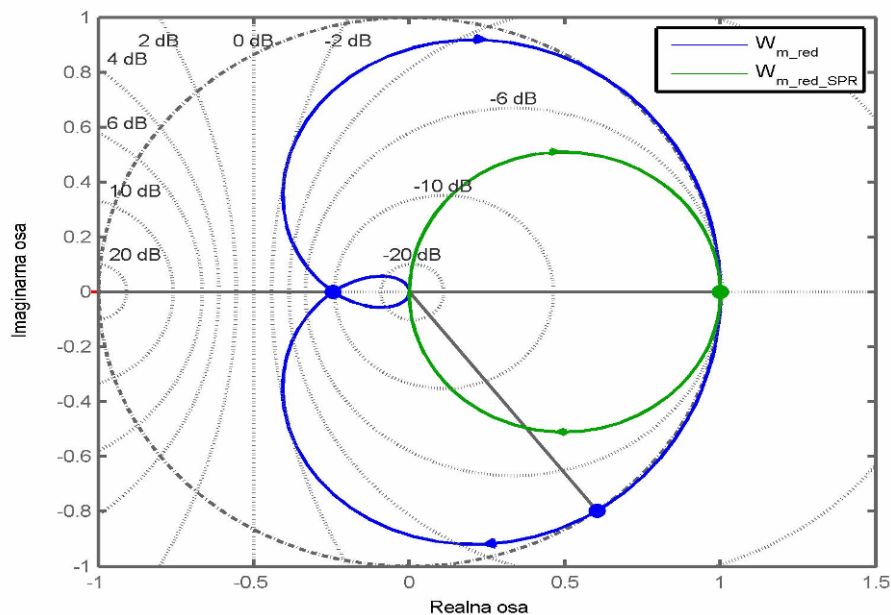
$$W_{m_red}(s) = \frac{-3.885s + 135.8}{s^2 + 15.85s + 135.8}$$

$$W_{m_red_SPR}(s) = \frac{8.827s + 135.8}{s^2 + 23.5s + 135.8} = \frac{8.827(s + 15.38)}{(s + 13.25)(s + 10.25)}$$

6-39



Slika 6-43 Odskočni odziv funkcije prenosa autopilota propinjanja redukovanog reda i SPR funkcije prenosa autopilota propinjanja redukovanog reda



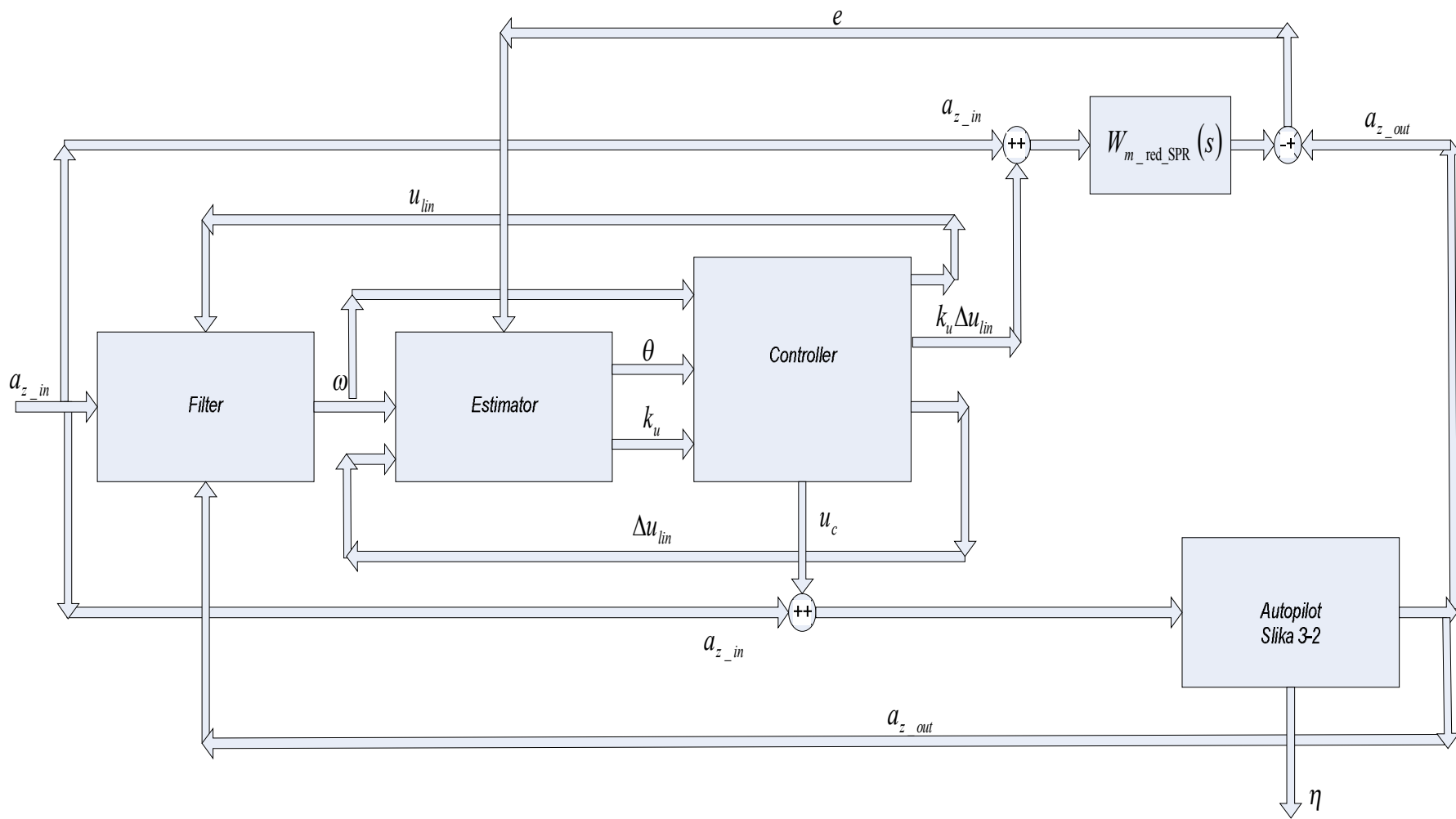
Slika 6-44 Najkvistov dijagram funkcije prenosa autopilota propinjanja redukovano
reda i SPR funkcije prenosa autopilota propinjanja redukovano
reda

U radu je korišćena i modifikacija „zone neosetljivosti“ i μ modifikacija. Za veličinu „zone neosetljivosti“ je usvojeno $\varepsilon = 0.1 \frac{m}{s^2}$, a parametar $\mu = 10$. Ograničenja koja se koriste u μ modifikaciji su posledica ograničenja po otklonu krmila i pojačanja u osnovnom obliku autopilota, i izvedena su za slučaj $M = 0.3$ iako je referentni Mahov broj $M = 0.5$ radi dodatne stabilnosti adaptivnog algoritma. Ostali parametri koji se koriste u MRAC algoritmu dati su u Tabeli 6-1.

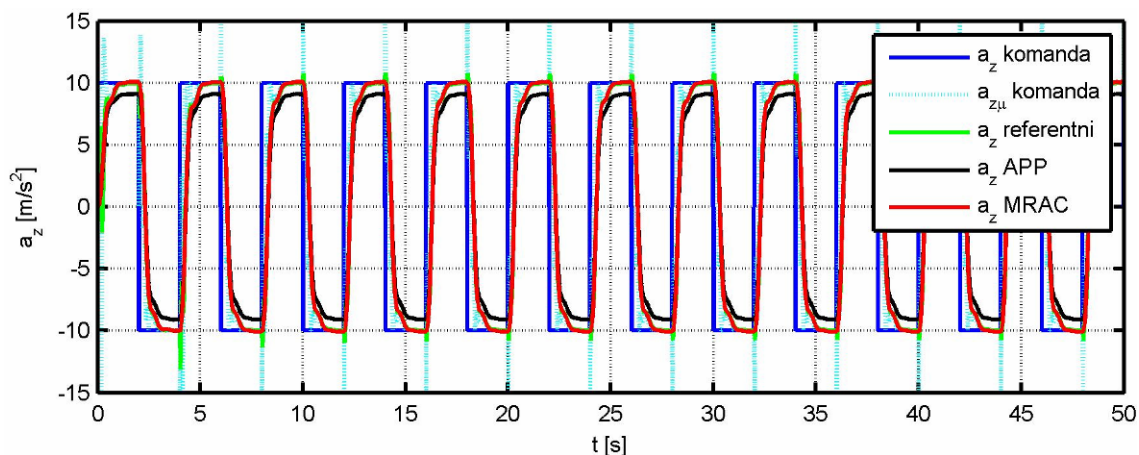
F	Γ	k_u	g
$[-2 \quad -2]^T$	$[40 \quad 0.6 \quad 0.15 \quad 0.12]^T$	1	1

Tabela 6-2 parametri korišćeni u MRAC algoritmu

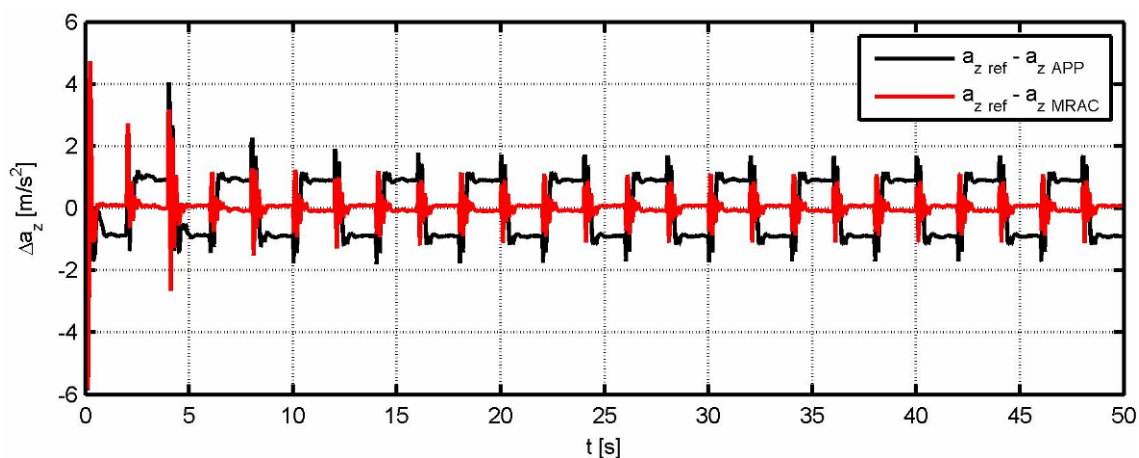
Osnovna provera MRAC algoritma na autopilotu propinjanja/skretanja izvršena je variranjem Mahovog broja u odnosu na referentni. Na dijagramima Slika 6-46 do Slika 6-81 dat je uporedan prikaz odgovora autopilota sa pojačanjima sintetisanim za referentni Mahov broj i MRAC autopilota na različite ulazne signale.



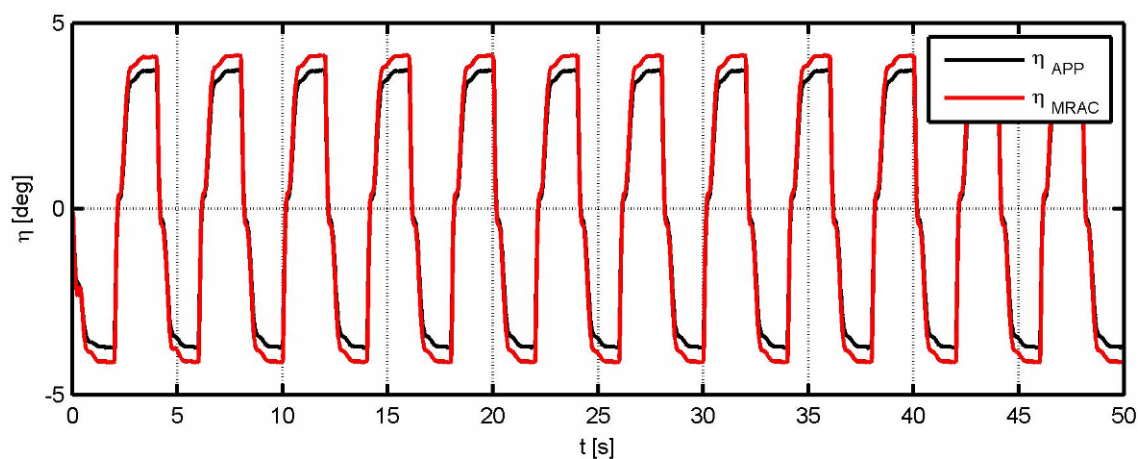
Slika 6-45 Blok dijagram *MRAC* autopilota propinjanja/skretanja



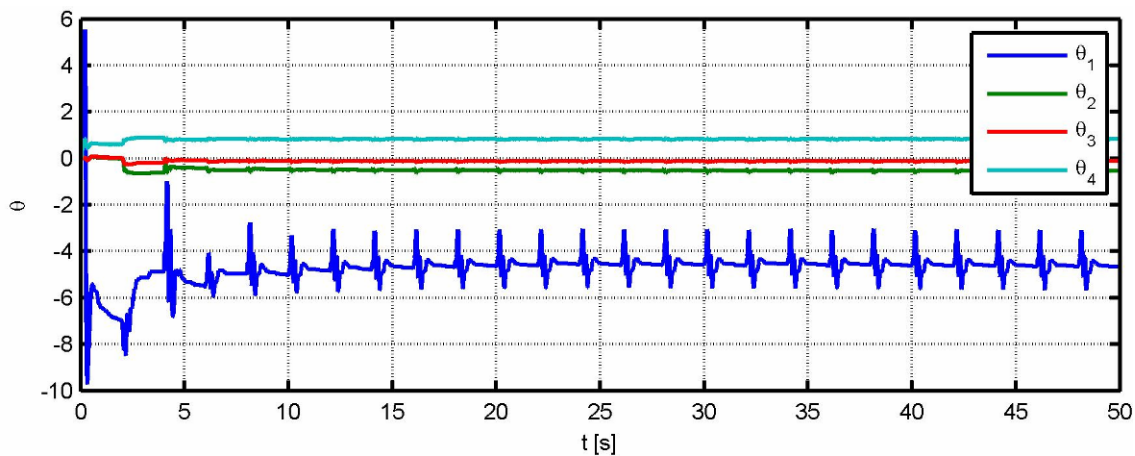
Slika 6-46 Odgovor autopilota propinjanja optimisanog za referentni Mahov broj i autopilota sa MRAC algoritmom u uslovima $M = 0.3$ na ulazni signal četvrtki učestanosti 0.25Hz



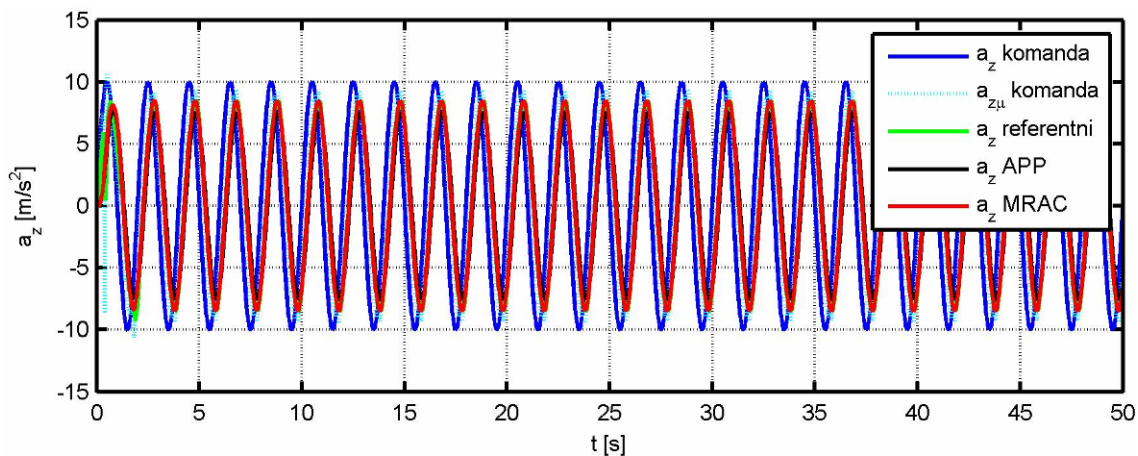
Slika 6-47 Odstupanje odgovora autopilota propinjanja optimisanog za referentni Mahov broj i autopilota sa MRAC algoritmom u uslovima $M = 0.3$ u odnosu na referentan model pri ulaznom signalu četvrtki učestanosti 0.25Hz



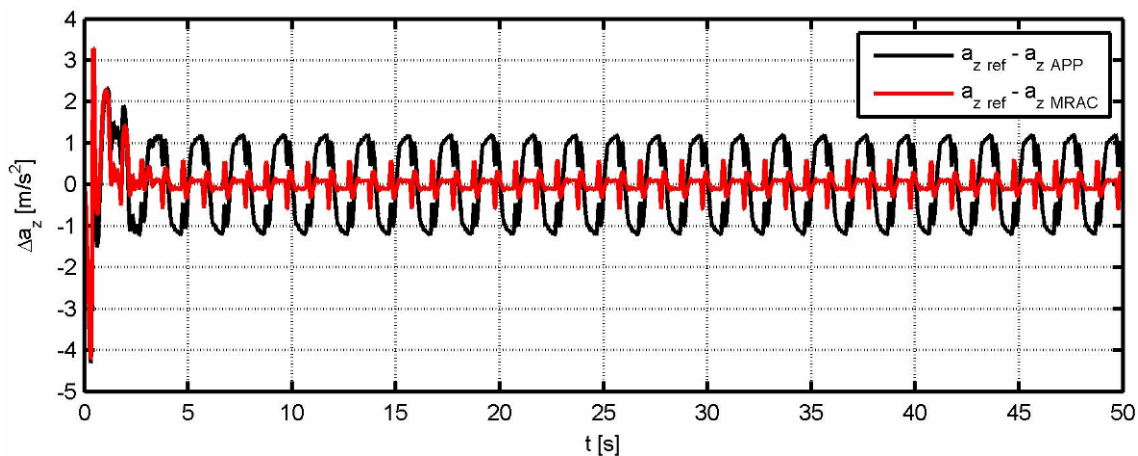
Slika 6-48 Otklon krmila autopilota propinjanja optimisanog za referentni Mahov broj i autopilota sa MRAC algoritmom u uslovima $M = 0.3$ pri ulaznom signalu četvrtki učestanosti 0.25Hz



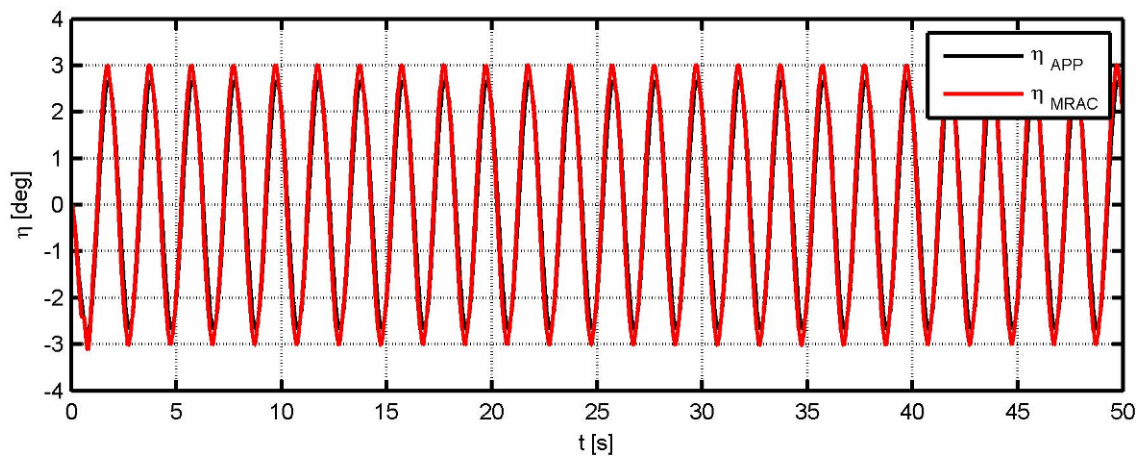
Slika 6-49 Promena parametara MRAC adaptivnog algoritma sa vremenom u uslovima $M = 0.3$ pri ulaznom signalu četvrtki učestanosti 0.25Hz



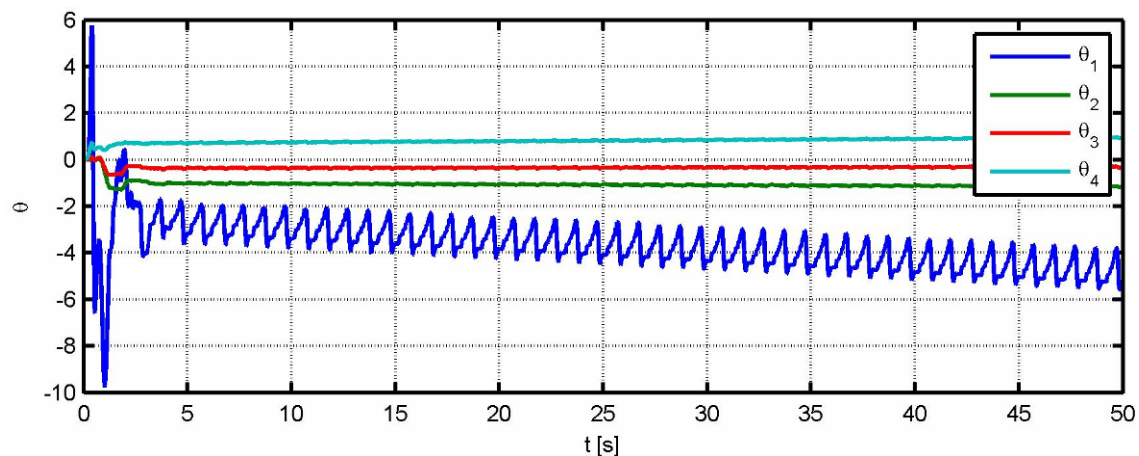
Slika 6-50 Odgovor autopilota propinjanja optimisanog za referentni Mahov broj i autopilota sa MRAC algoritmom u uslovima $M = 0.3$ na sinusoidni ulazni signal učestanosti 0.5Hz



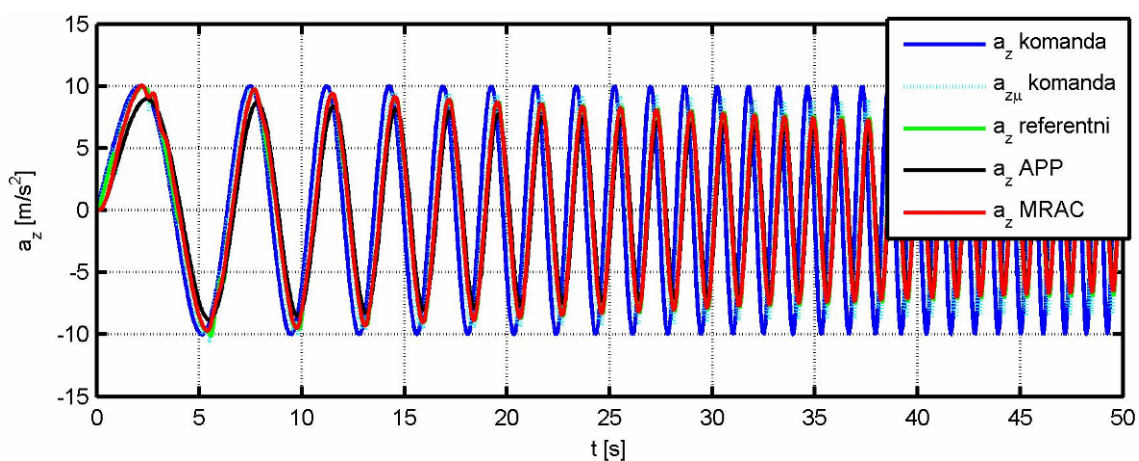
Slika 6-51 Odstupanje odgovora autopilota propinjanja optimisanog za referentni Mahov broj i autopilota sa MRAC algoritmom u uslovima $M = 0.3$ u odnosu na referentan model pri sinusoidnom ulaznom signalu učestanosti 0.5Hz



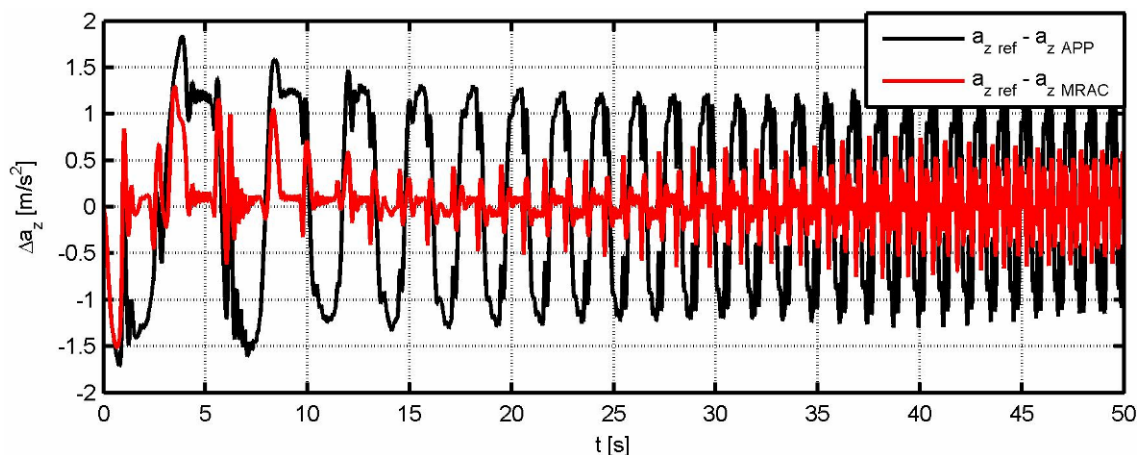
Slika 6-52 Otklon krmila autopilota propinjanja optimisanog za referentni Mahov broj i autopilota sa MRAC algoritmom u uslovima $M = 0.3$ pri sinusoidnom ulaznom signalu učestanosti 0.5Hz



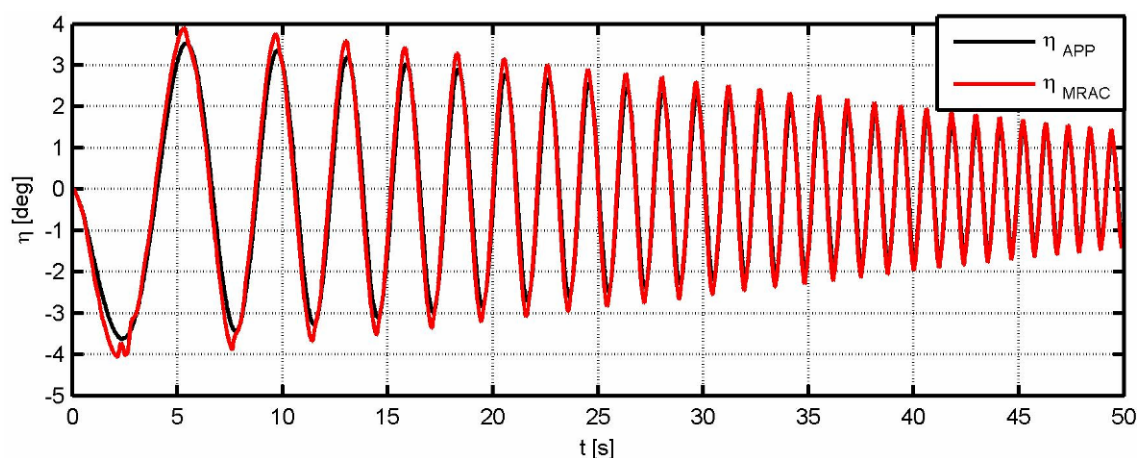
Slika 6-53 Promena parametara MRAC adaptivnog algoritma sa vremenom u uslovima $M = 0.3$ pri sinusoidnom ulaznom signalu učestanosti 0.5Hz



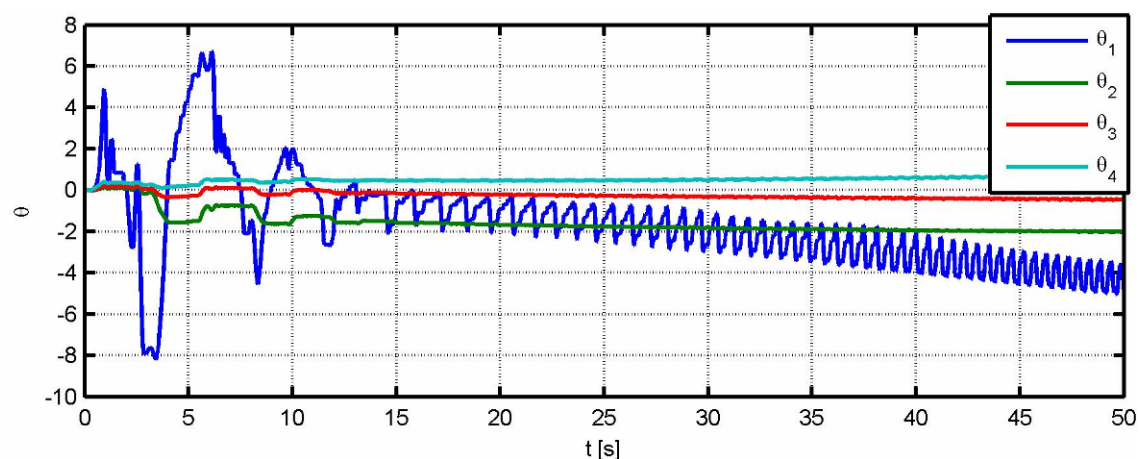
Slika 6-54 Odgovor autopilota propinjanja optimisanog za referentni Mahov broj i autopilota sa MRAC algoritmom u uslovima $M = 0.3$ na sinusoidni ulazni signal promenljive učestanosti



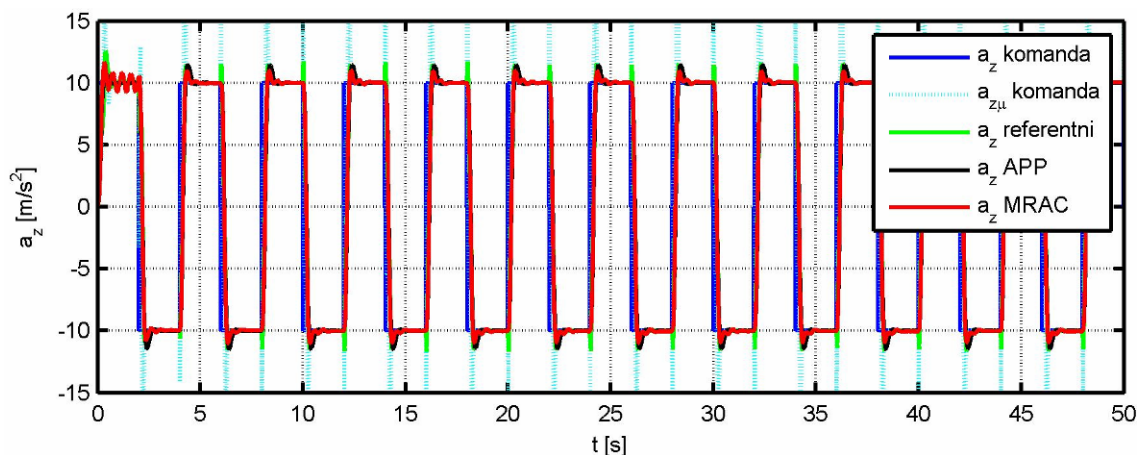
Slika 6-55 Odstupanje odgovora autopilota propinjanja optimisanog za referentni Mahov broj i autopilota sa MRAC algoritmom u uslovima $M = 0.3$ u odnosu na referentan model pri sinusoidnom ulaznom signalu promenljive učestanosti



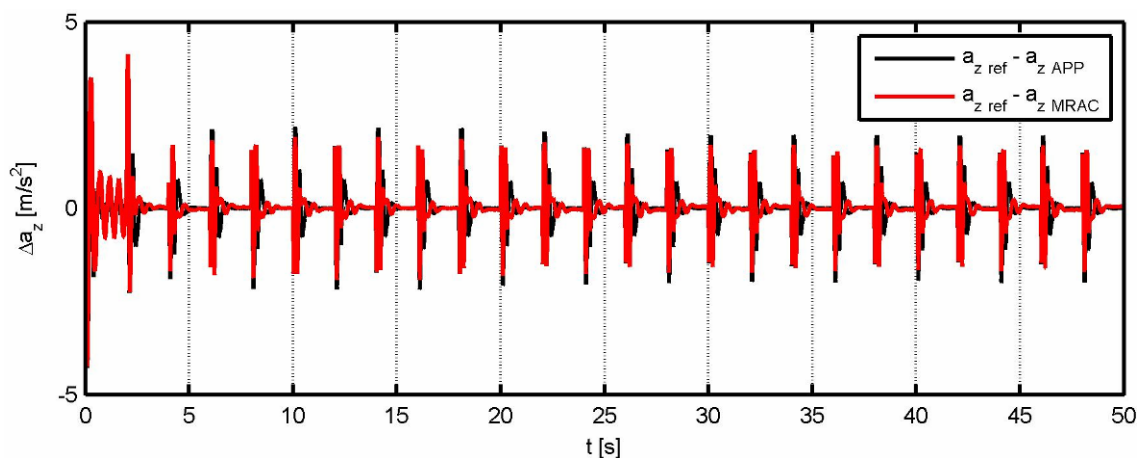
Slika 6-56 Otklon krmila autopilota propinjanja optimisanog za referentni Mahov broj i autopilota sa MRAC algoritmom u uslovima $M = 0.3$ pri sinusoidnom ulaznom signalu promenljive učestanosti



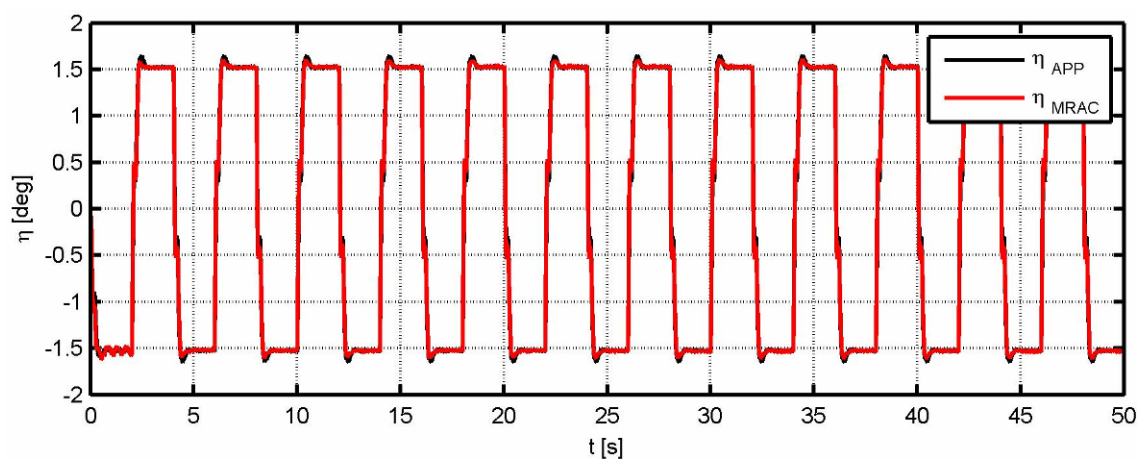
Slika 6-57 Promena parametara MRAC adaptivnog algoritma sa vremenom u uslovima $M = 0.3$ pri sinusoidnom ulaznom signalu promenljive učestanosti



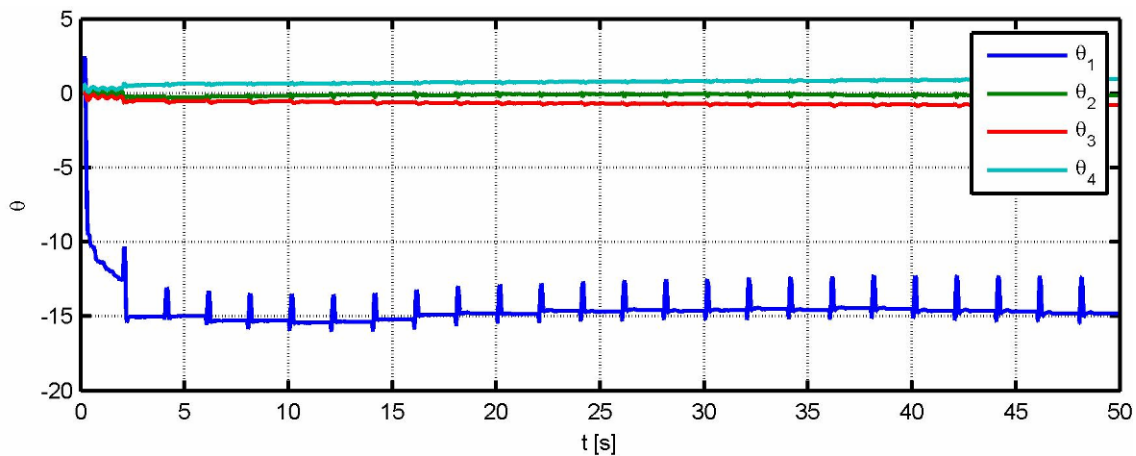
Slika 6-58 Odgovor autopilota propinjanja optimisanog za referentni Mahov broj i autopilota sa MRAC algoritmom pri referentnim uslovima na ulazni signal četvrtki učestanosti 0.25Hz



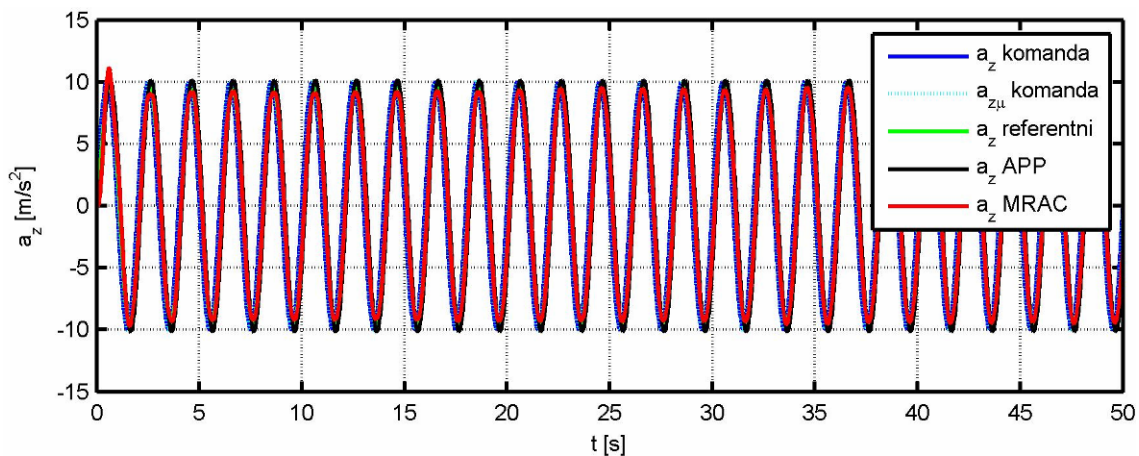
Slika 6-59 Odstupanje odgovora autopilota propinjanja optimisanog za referentni Mahov broj i autopilota sa MRAC algoritmom pri referentnim uslovima u odnosu na referentan model pri ulaznom signalu četvrtki učestanosti 0.25Hz



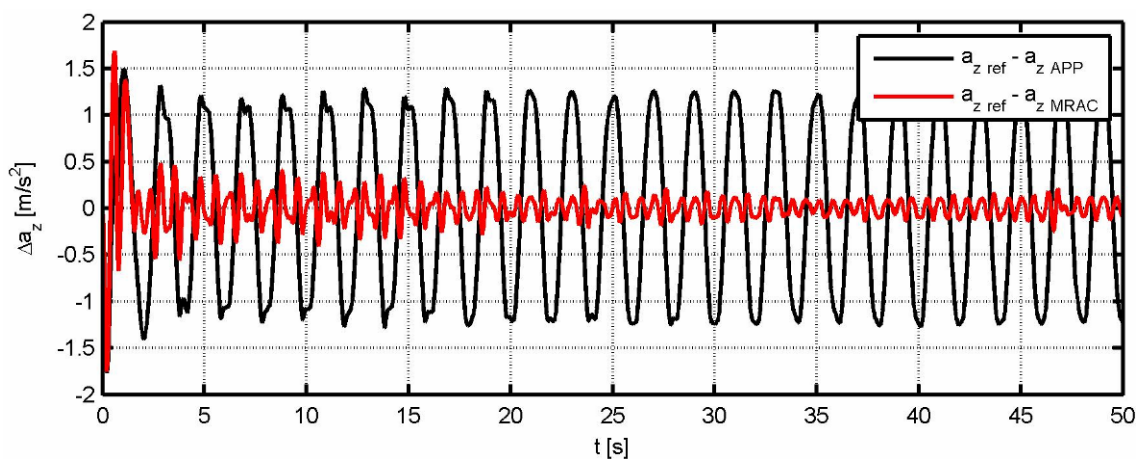
Slika 6-60 Otklon krmila autopilota propinjanja optimisanog za referentni Mahov broj i autopilota sa MRAC algoritmom pri referentnim uslovima, pri ulaznom signalu četvrtki učestanosti 0.25Hz



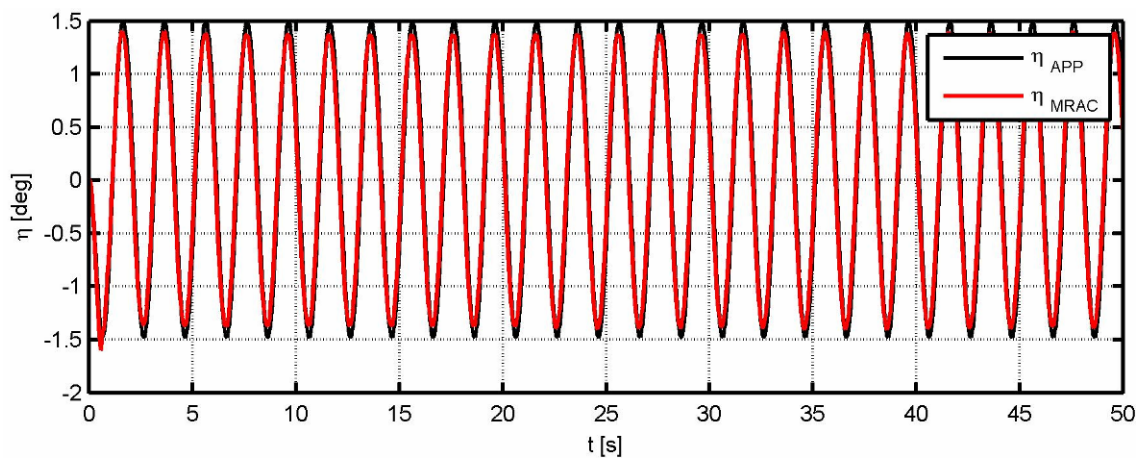
Slika 6-61 Promena parametara MRAC adaptivnog algoritma sa vremenom u uslovima $M = 0.5$ pri ulaznom signalu četvrtki učestanosti 0.25Hz



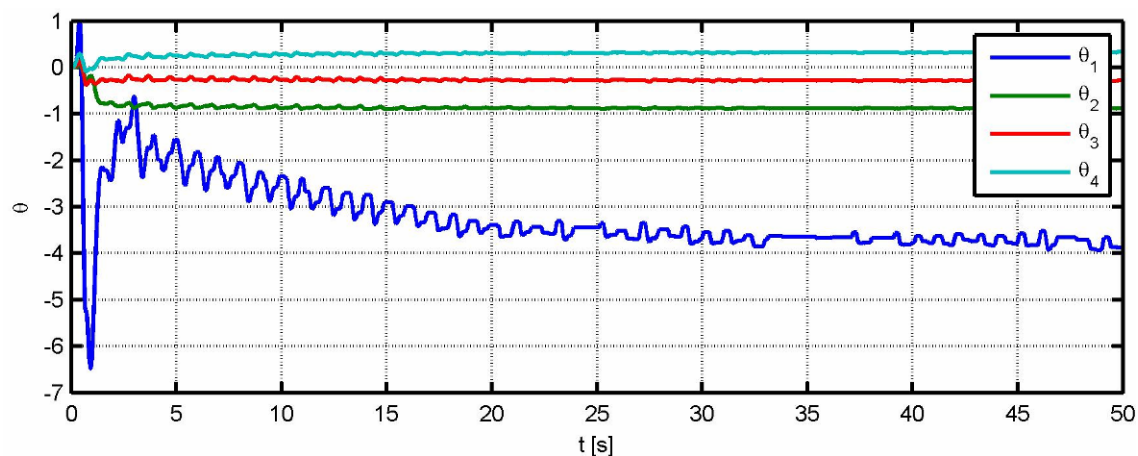
Slika 6-62 Odgovor autopilota propinjanja optimisanog za referentni Mahov broj i autopilota sa MRAC algoritmom pri referentnim uslovima na sinusoidni ulazni signal učestanosti 0.5Hz



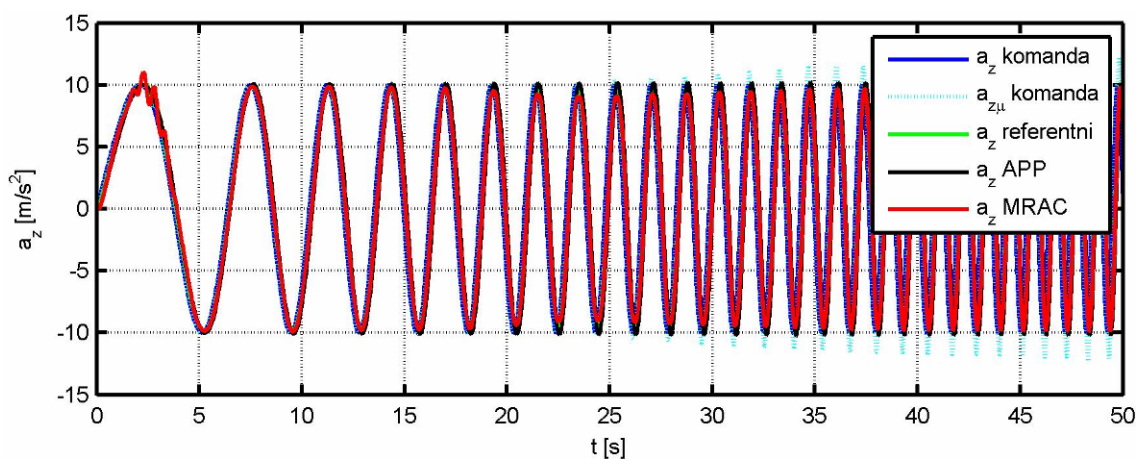
Slika 6-63 Odstupanje odgovora autopilota propinjanja optimisanog za referentni Mahov broj i autopilota sa MRAC algoritmom pri referentnim uslovima u odnosu na referentan model pri sinusoidnom ulaznom signalu učestanosti 0.5Hz



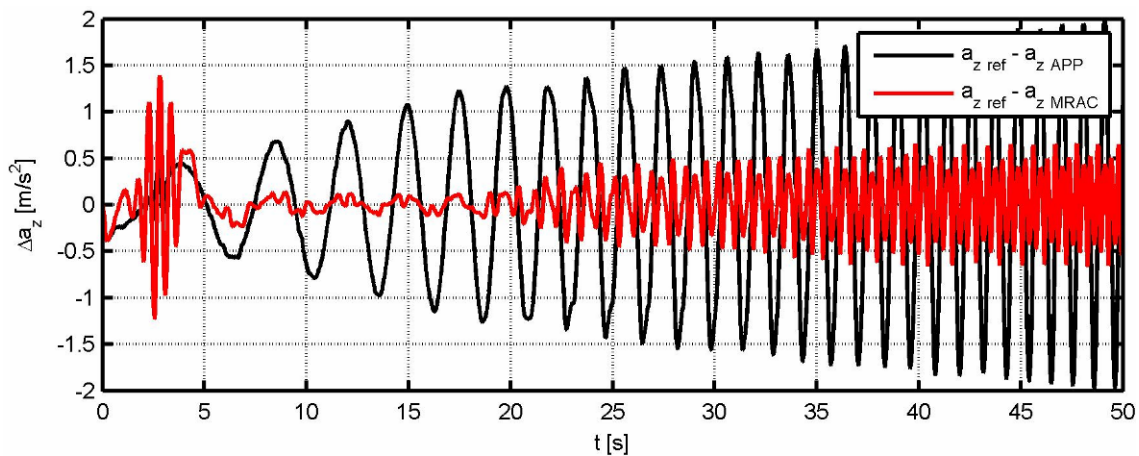
Slika 6-64 Otklon krmila autopilota propinjanja optimisanog za referentni Mahov broj i autopilota sa MRAC algoritmom u referentnim uslovima pri sinusoidnom ulaznom signalu učestanosti 0.5Hz



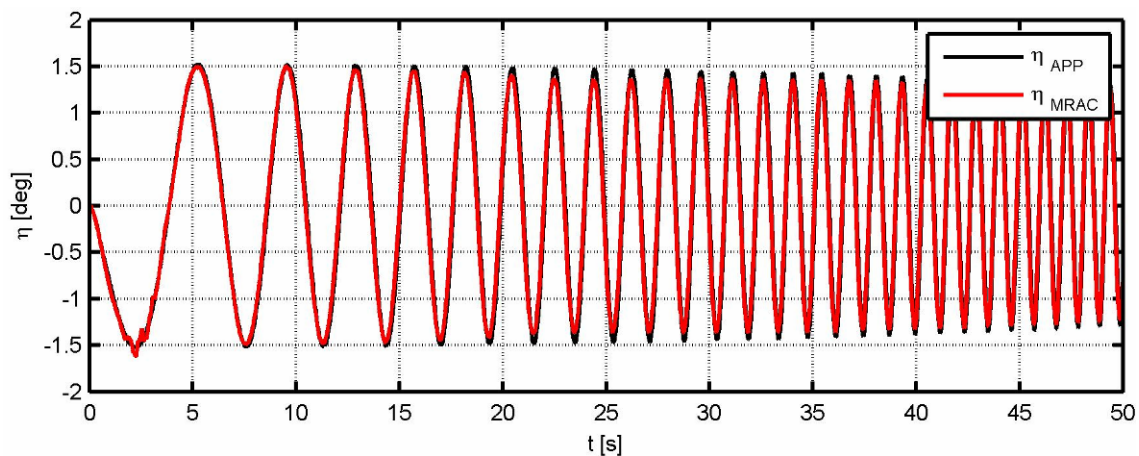
Slika 6-65 Promena parametara MRAC adaptivnog algoritma sa vremenom u uslovima $M = 0.5$ pri sinusoidnom ulaznom signalu učestanosti 0.5Hz



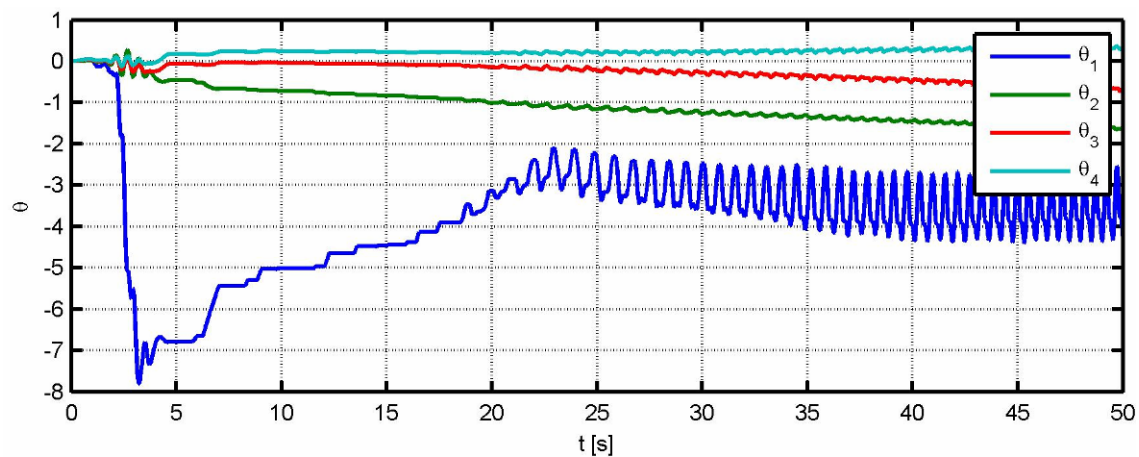
Slika 6-66 Odgovor autopilota propinjanja optimisanog za referentni Mahov broj i autopilota sa MRAC algoritmom pri referentnim uslovima na sinusoidni ulazni signal promenljive učestanosti



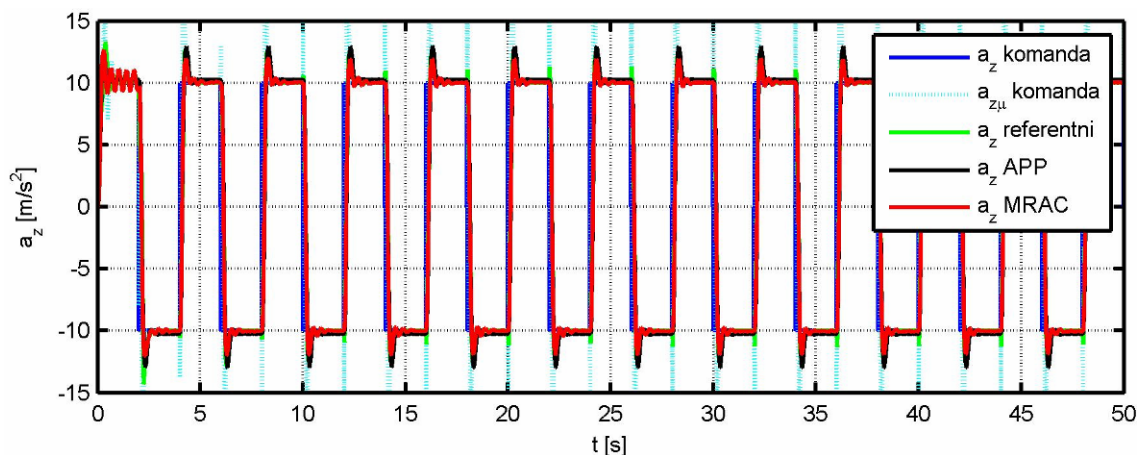
Slika 6-67 Odstupanje odgovora autopilota propinjanja optimisanog za referentni Mahov broj i autopilota sa MRAC algoritmom u referentnim uslovima u odnosu na referentan model pri sinusoidnom ulaznom signalu promenljive učestanosti



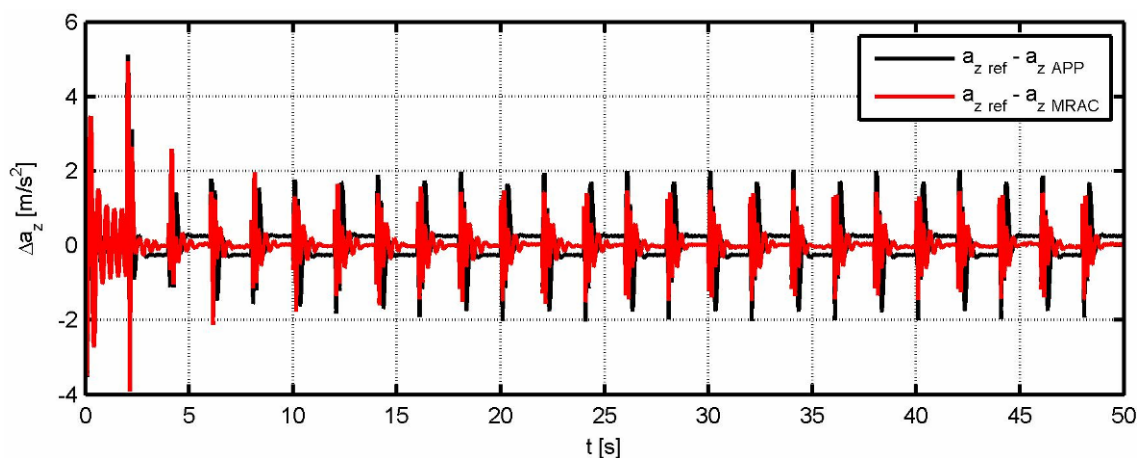
Slika 6-68 Otklon krmila autopilota propinjanja optimisanog za referentni Mahov broj i autopilota sa MRAC algoritmom u referentnim uslovima pri sinusoidnom ulaznom signalu promenljive učestanosti



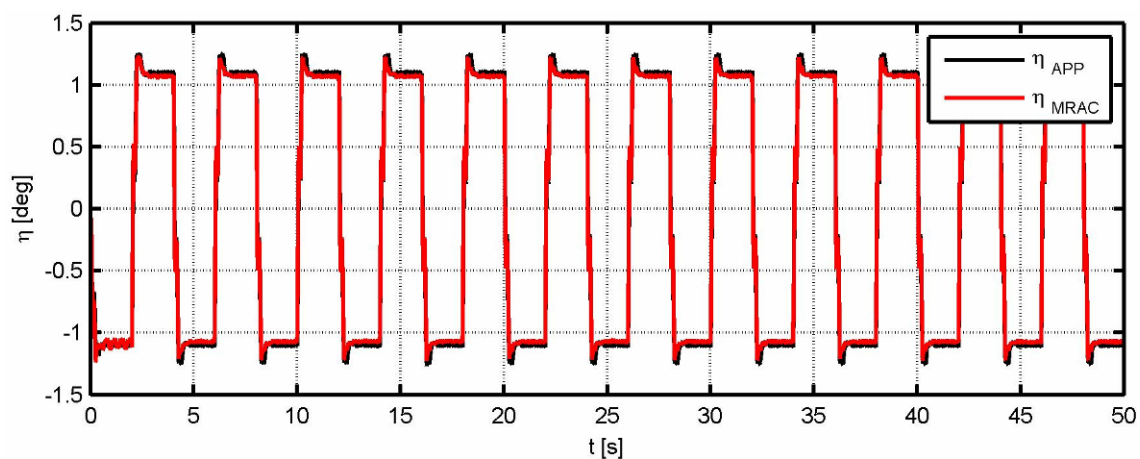
Slika 6-69 Promena parametara MRAC adaptivnog algoritma sa vremenom u uslovima $M = 0.5$ pri sinusoidnom ulaznom signalu promenljive učestanosti



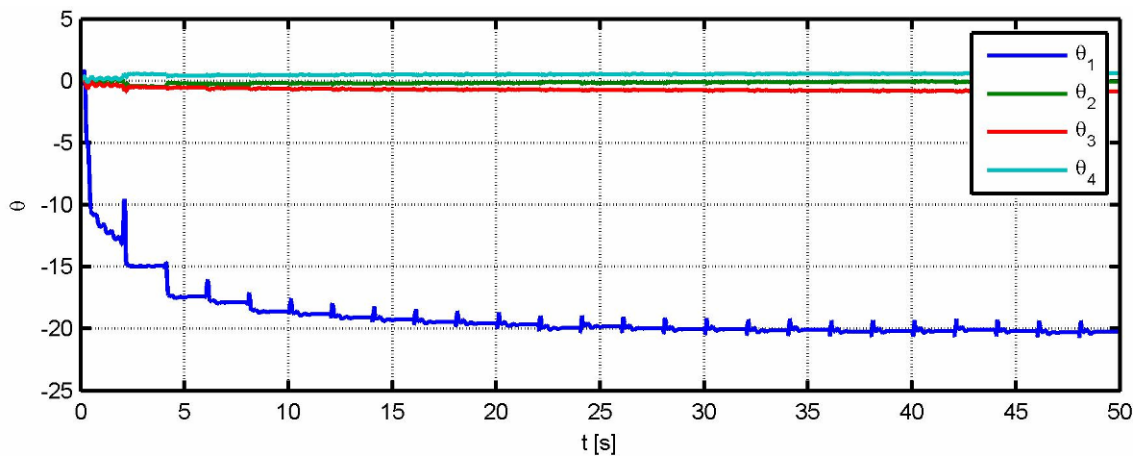
Slika 6-70 Odgovor autopilota propinjanja optimisanog za referentni Mahov broj i autopilota sa MRAC algoritmom u uslovima $M = 0.7$ na ulazni signal četvrтки učestanosti 0.25Hz



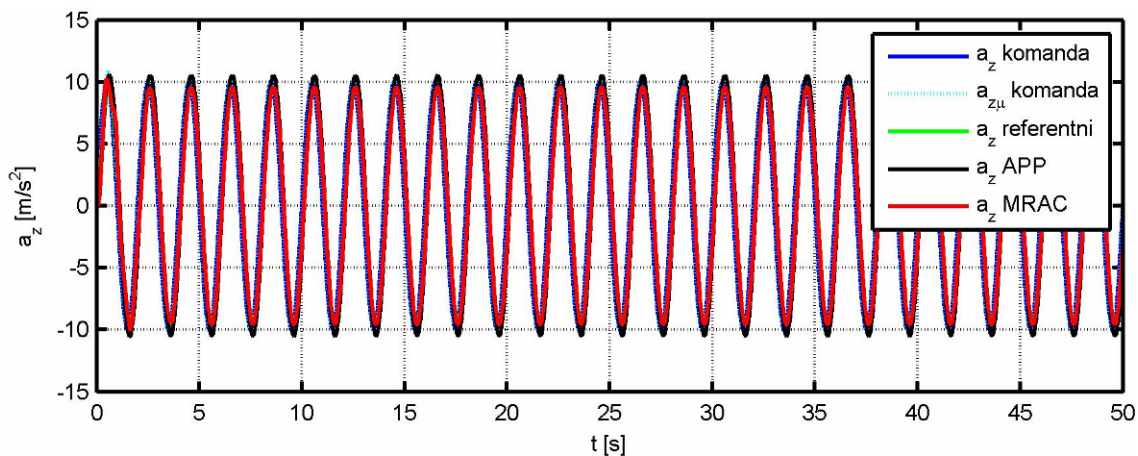
Slika 6-71 Odstupanje odgovora autopilota propinjanja optimisanog za referentni Mahov broj i autopilota sa MRAC algoritmom u uslovima $M = 0.7$ u odnosu na referentan model pri ulaznom signalu četvrтки učestanosti 0.25Hz



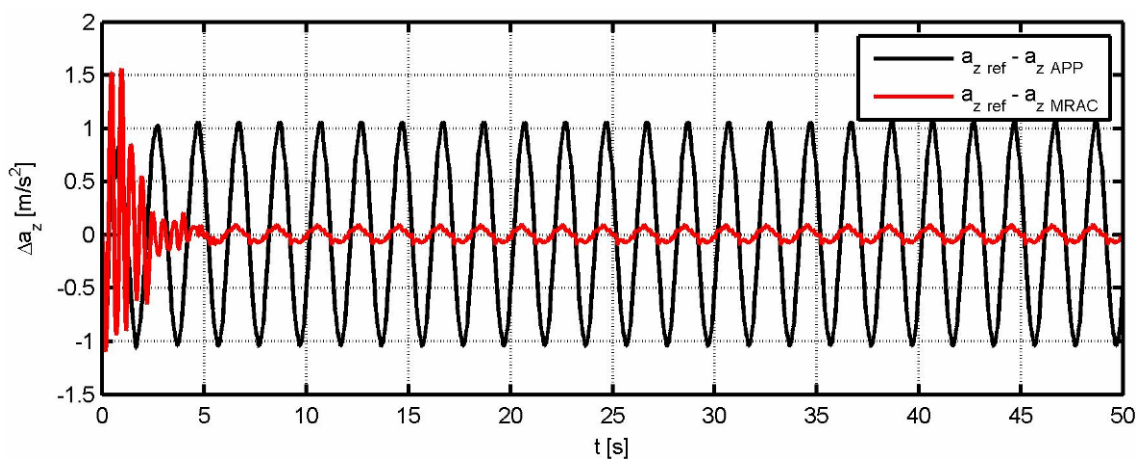
Slika 6-72 Otklon krmila autopilota propinjanja optimisanog za referentni Mahov broj i autopilota sa MRAC algoritmom u uslovima $M = 0.7$ pri ulaznom signalu četvrтки učestanosti 0.25Hz



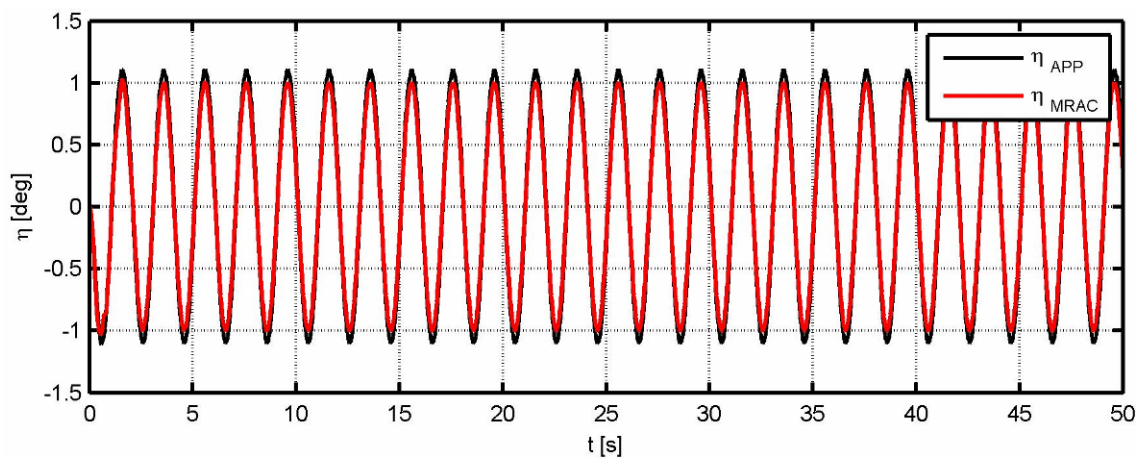
Slika 6-73 Promena parametara MRAC adaptivnog algoritma sa vremenom u uslovima $M = 0.7$ pri ulaznom signalu četvrtki učestanosti 0.25Hz



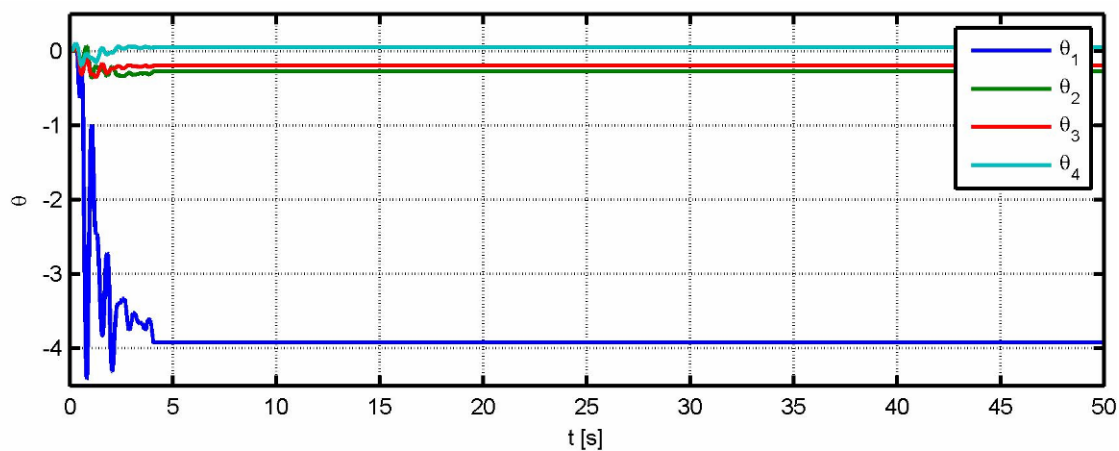
Slika 6-74 Odgovor autopilota propinjanja optimisanog za referentni Mahov broj i autopilota sa MRAC algoritmom u uslovima $M = 0.7$ na sinusoidni ulazni signal učestanosti 0.5Hz



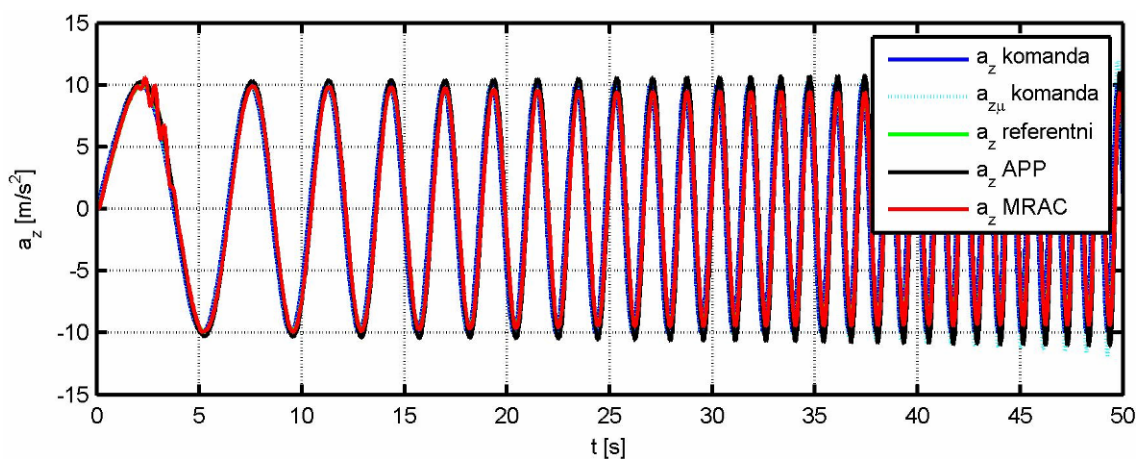
Slika 6-75 Odstupanje odgovora autopilota propinjanja optimisanog za referentni Mahov broj i autopilota sa MRAC algoritmom u uslovima $M = 0.7$ u odnosu na referentan model pri sinusoidnom ulaznom signalu učestanosti 0.5Hz



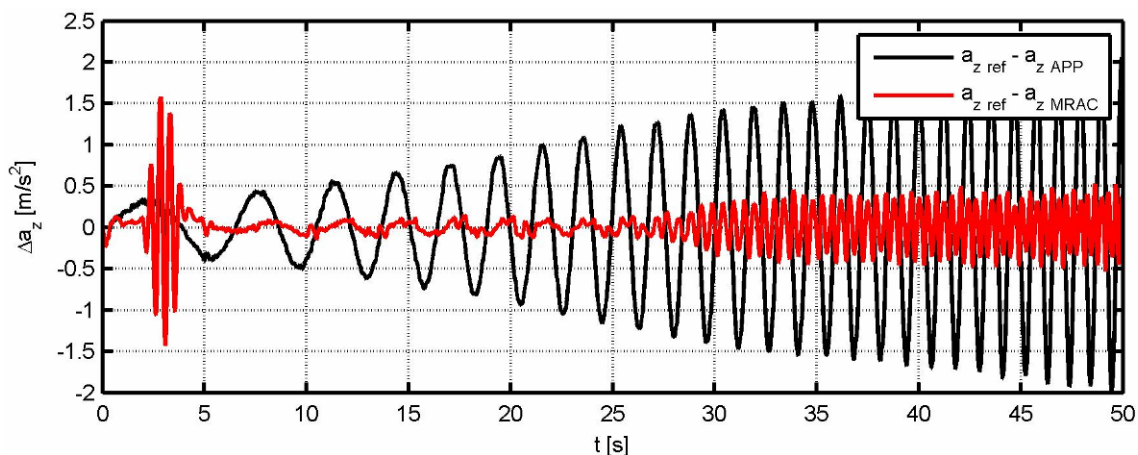
Slika 6-76 Otklon krmila autopilota propinjanja optimisanog za referentni Mahov broj i autopilota sa MRAC algoritmom u uslovima $M = 0.7$ pri sinusoidnom ulaznom signalu učestanosti 0.5Hz



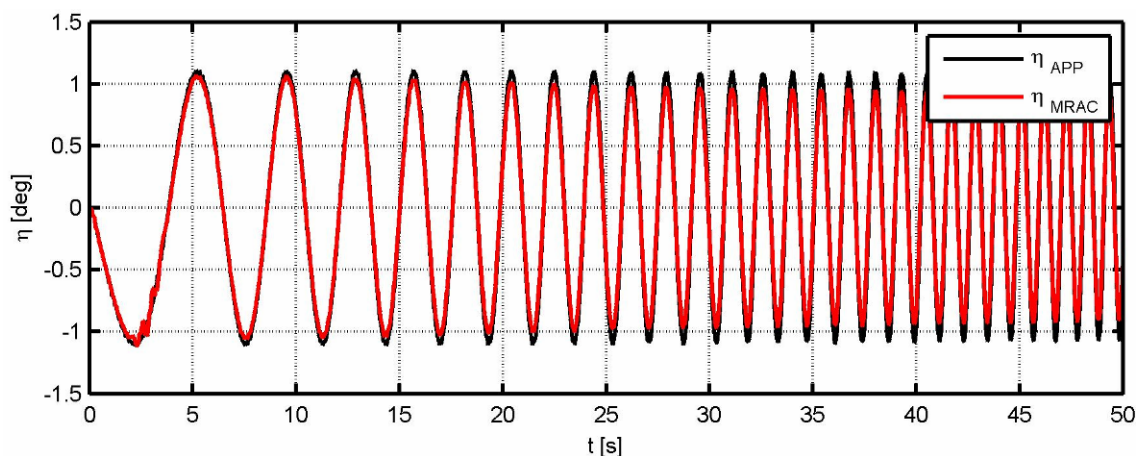
Slika 6-77 Promena parametara MRAC adaptivnog algoritma sa vremenom u uslovima $M = 0.7$ pri sinusoidnom ulaznom signalu učestanosti 0.5Hz



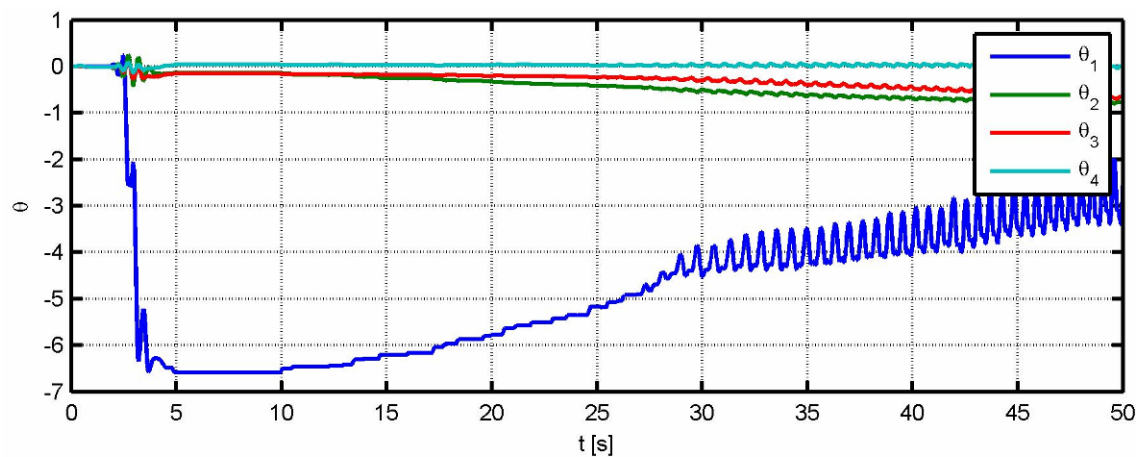
Slika 6-78 Odgovor autopilota propinjanja optimisanog za referentni Mahov broj i autopilota sa MRAC algoritmom u uslovima $M = 0.7$ na sinusoidni ulazni signal promenljive učestanosti



Slika 6-79 Odstupanje odgovora autopilota propinjanja optimisanog za referentni Mahov broj i autopilota sa MRAC algoritmom u uslovima $M = 0.7$ u odnosu na referentan model pri sinusoidnom ulaznom signalu promenljive učestanosti



Slika 6-80 Otklon krmila autopilota propinjanja optimisanog za referentni Mahov broj i autopilota sa MRAC algoritmom u uslovima $M = 0.7$ pri sinusoidnom ulaznom signalu promenljive učestanosti



Slika 6-81 Promena parametara MRAC adaptivnog algoritma sa vremenom u uslovima $M = 0.7$ pri sinusoidnom ulaznom signalu promenljive učestanosti

Poređenjem odgovora adaptivnog autopilota propinjanja/skretanja i osnovnog autopilota propinjanja/skretanja na različite ulazne signale uviđa se prednost adaptivnog algoritma primenjenog na autopilot propinjanja/skretanja.

Ako se uporede odgovori na signale tipa četvrtki vidi se da MRAC algoritam nema značajnije efekte kod ovakvog ulaznog signala ali utiče na smanjenje statičke greške u odgovoru i smanjuje premašaje. Takođe se može primetiti da u ovom slučaju primene MRAC algoritma za razliku od primene kod autopilota valjanja i parametri algoritma brže i bolje konvergiraju. Pojačanja u MRAC algoritmu su usvajana tako da u 5s parametri počnu da konvergiraju. Ovakav izbor utiče na povećanje grešaka na startu ali kako let rakete traje kratko kako bi adaptivni algoritam imao efekta bilo je neophodno uvesti veća pojačanja i pored inicijalnih grešaka koje su posledica istih.

Poređenjem odgovora autopilota pri sinusoidnim ulazima konstantne i promenljive učestanosti može se videti da MRAC autopilot ima i do 10 puta manju grešku.

I u ovoj analizi kao i u analizi primene MRAC na autopilot valjanja treba istaći da će odgovor MRAC algoritma u simulacijama leta biti značajno drugačiji od ovde predstavljenih jer se u regularnim uslovima leta i algoritma vođenja ne očekuju signali tipa ponovljivih četvrtki ili harmonijske oscilacije. Ipak očekuje se da će u slučajevima poremećaja ili nedovoljnog poznavanja aerodinamičkih derivativa MRAC algoritam poboljšati odgovor u odnosu na osnovni autopilot propinjanja/skretanja.

Primena adaptivnog upravljanja po spoljnoj petlji omogućila je da se iskoriste prednosti oba tipa autopilota, odnosno da se u slučajevima dobrog poznavanja aerodinamičkih derivativa i objekta u celini iskoriste prednosti autopilota sintetisanog za referentni model a da se u slučajevima poremećaja i/ili nedovoljnog poznavanja objekta omogući adaptacija.

Ukupan efekat MRAC autopilota u celom sistemu biće predstavljena u sledećem poglavlju gde će biti izvršena statistička analiza poremećaja na sistem.

7 Statistička analiza uticaja poremećaja na sistem

Ovo poglavlje je posvećeno analizi uticaja poremećaja na sistem u celosti. Za analizu je korišćena simulacija koja obuhvata $7DOF$ sa algoritmima $SINS$ -a, autopilota sa aktuatorskim sistemom i vođenja u diskretnom domenu prilagođeno koraku odabiranja na stvarnom hardveru. U analizi nije obuhvaćena mogućnost manualnog vođenja, već postoji vođenje po trajektoriji do zone $1km$ od cilja i vođenje metodom proporcionalne navigacije sa redukcijom sistematskog poremećaja od prestanka vođenja po trajektoriji do padne tačke. U simulacijama je uzeto da se cilj nalazi na maksimalnom dometu odnosno na $9km$. Statistička analiza je rađena korišćenjem metode Monte Carlo za tipske poremećaje predstavljene normalnom raspodelom, a zatim su varirani i aerodinamički derivativi za svaki tipski poremećaj. Za jednake aerodinamičke derivative po svakom tipskom poremećaju izvršeno je po 200 simulacija.

7.1 Analiza uticaja poremećaja potiska

Za analizu poremećaja potiska uzeti su poremećaji u intenzitetu sile potiska oba motora i u ekscentricitetu. Poremećaji intenziteta potiska zadavani su normalnom raspodelom $\mathcal{N}(0, (0.01F_{bx0})^2)$ i $\mathcal{N}(0, (0.01F_{mx0})^2)$, za buster i marš motor respektivno. Poremećaji ekscentriciteta zadavani su kao greške ugla ugradnje mlaznika i varirani su po svakom mlazniku, za oba motora, takođe normalnom raspodelom $\mathcal{N}(0, (0.01\delta_{bi})^2)$ i $\mathcal{N}(0, (0.01\delta_{mi})^2)$. U simulacije su uključeni i drugi sistemski poremećaji, kao što su greške u inicijalnim uglovima od 0.05° po svakom uglu, razdešenosti senzora $0.033 \frac{m}{s^2}$, za akcelerometre i $0.0125 \frac{^\circ}{s}$ za žiroskope, greška ugla ugradnje krila i upravljačkih površina po 0.1° , zazor u aktuatorima od 0.1° , ali su njihove vrednosti u ovoj analizi konstantne.

Rezultati analize za set nominalnih aerodinamičkih derivativa prikazani su na dijagramima: Slika 7-1 Elipsa rasturanja padne tačke u horizontalnoj ravni, Slika 7-2 Elipsa rasturanju trajektorije u vertikalnoj ravni, Slika 7-3 Dijagram normalne verovatnoće za srednju grešku u vremenu *SINS* algoritma po pravcu, Slika 7-4 Dijagram normalne verovatnoće za srednju grešku u vremenu *SINS* algoritma po visini i Slika 7-5 Dijagram normalne verovatnoće za srednju vrednost u vremenu ugla valjanja.

Poluose elipse rasturanja a_d, b_p su određene prema sledećim izrazima:

$$\begin{aligned} V_d &= 0.6745\sigma_d \\ V_p &= 0.6745\sigma_p \\ a_d &= 1.75V_d \\ b_p &= 1.75V_p \end{aligned} \quad 7-1$$

gde su:

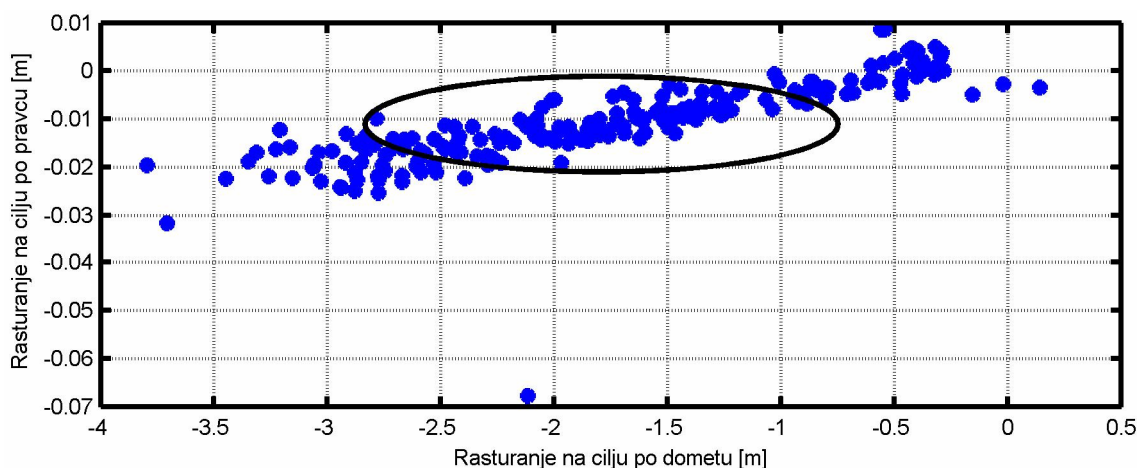
σ_d, σ_p - standardna devijacija padnih tačaka po dometu i pravcu respektivno

V_d, V_p - verovatno rasturanje po dometu i pravcu respektivno,

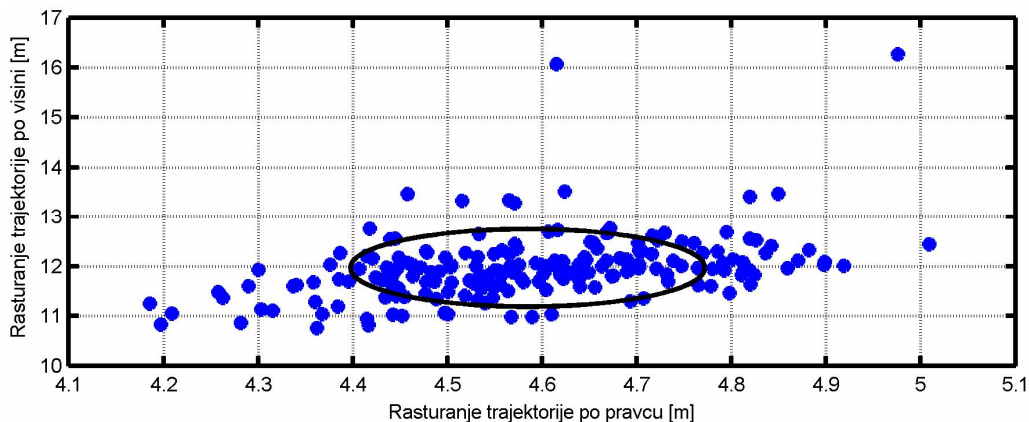
a_d, b_p - poluose elipse rasturanja po dometu i pravcu respektivno, definisane tako da elipsa rasturanja predstavlja verovatnoću od 50% pogodaka.

Koordinata centra elipse rasturanja određena je srednjom vrednošću vektora padnih tačaka po dometu i po pravcu.

Elipsa rasturanja trajektorije u vertikalnoj ravni određena je na isti način kao i elipsa rasturanja padnih tačaka u horizontalnoj ravni.

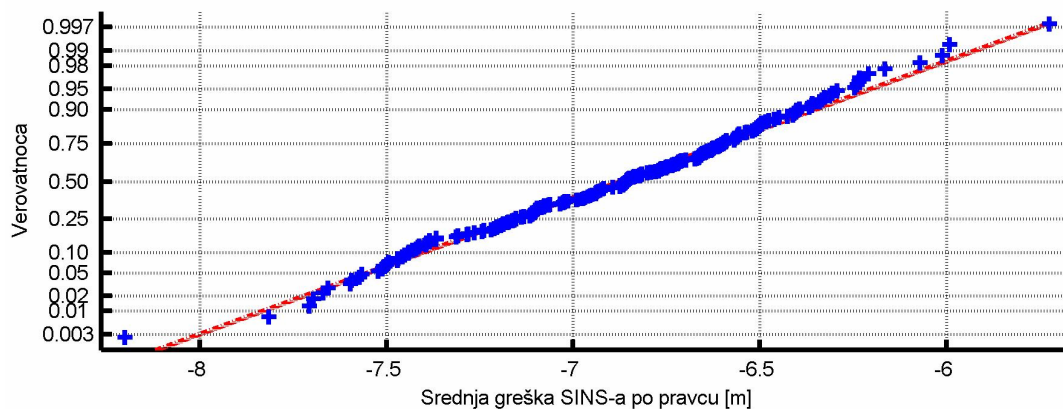


Slika 7-1 Elipsa rasturanja padne tačke u horizontalnoj ravni

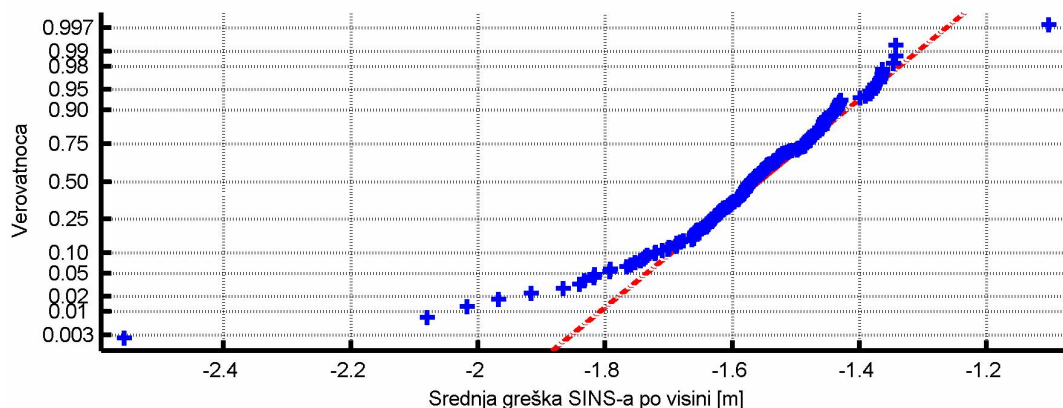


Slika 7-2 Elipsa rasturanju trajektorije u vertikalnoj ravni

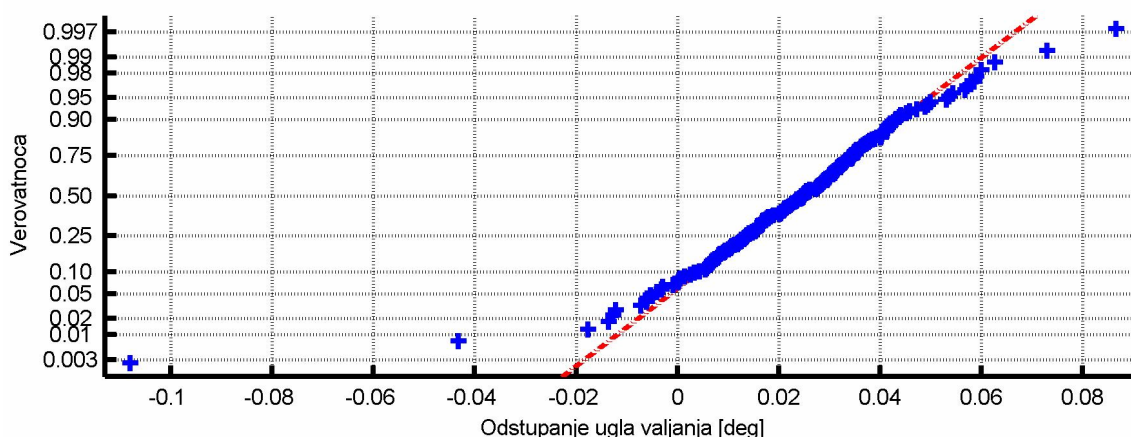
Sa dijagrama elipse rasturanja padne tačke u horizontalnoj ravni vidi se da je rasturanju po pravcu značajno manje od rasturanju po dometu, što je i osnovni razlog zašto je rasturanje predstavljeno elipsom a ne kružnom raspodelom. Takođe može se zaključiti da je veličina elipse rasturanja manja od veličine tipičnih ciljeva (navedenih u uvodnom poglavlju) čime je obezbeđen pogodak.



Slika 7-3 Dijagram normalne verovatnoće za srednju grešku u vremenu *SINS* algoritma po pravcu



Slika 7-4 Dijagram normalne verovatnoće za srednju grešku u vremenu *SINS* algoritma po visini



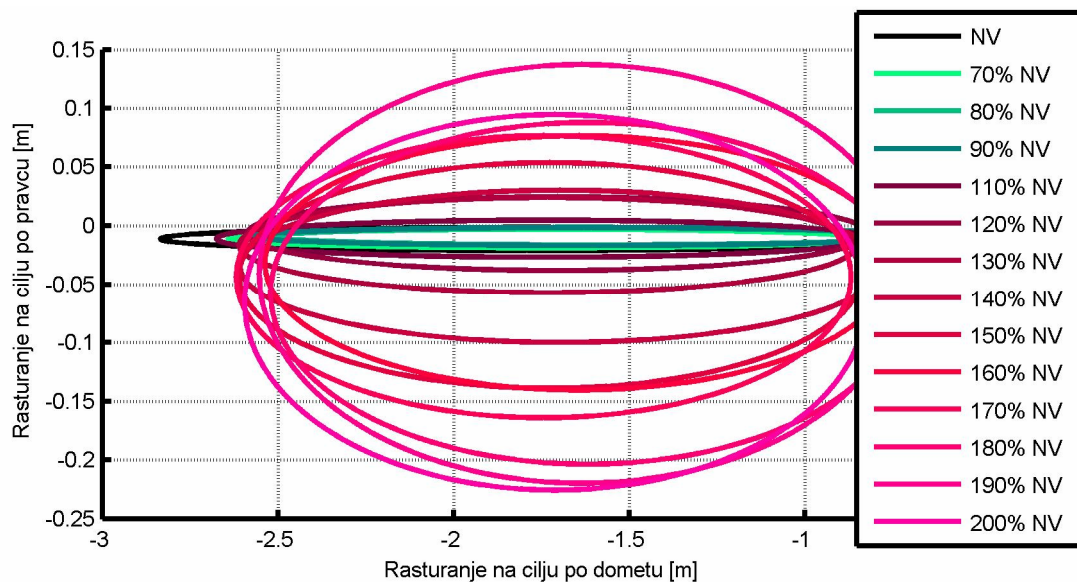
Slika 7-5 Dijagram normalne verovatnoće za srednju vrednost u vremenu ugla valjanja

Elipsa rasturanja trajektorije u vertikalnoj ravni posledica je greške *SINS* algoritma i greške vođenja po trajektoriji. Obzirom da se pri ovim simulacijama nije varirala greška na sensorima, već se uzimala konstantna vrednost, može se primetiti da je centar elipse rasturanja trajektorije u vertikalnoj ravni pomeren u tačku koja je posledica ove fiksne sistematske greške. U prilog prethodnom idu i dijagrami normalne verovatnoće *SINS* algoritma po pravcu i visini, gde se može videti da postoji grešku algoritmu navigacije čime se stvara greška i u zakonu vođenja. Uzak dijapazon grešaka *SINS* algoritma prikazan na dijagramima raspodele verovatnoće grešaka *SINS* algoritma takođe ukazuje na konstantne vrednosti grešaka na sensorima.

Dijagrami normalne verovatnoće za srednju vrednost greške ugla valjanja su pokazatelj efikasnosti autopilota valjanja. Analizu po autopilotu valjanja je posledica načina vođenja rakete. Kao što je u uvodnom poglavlju objašnjeno raketa se vodi po trajektoriji do zone uočavanja cilja kada operater treba da izabere i „zaključa“ cilj. Kako bi operater mogao da prepozna cilj na osnovu slike iz *TV* glave, neophodno je obezbediti stabilizaciju po uglu valjanja rakete.

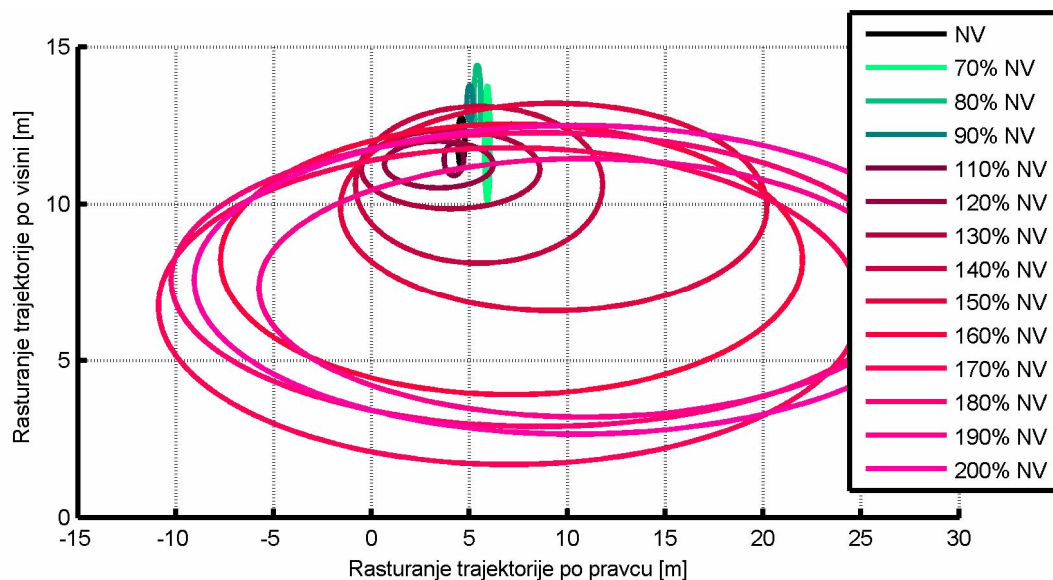
Kako bi se proverile granice efikasnosti MRAC modifikacije autopilota za isti tip i iste normalne raspodele poremećaja, rađene su simulacije sa skupom aerodinamičkih derivativa variranih u opsegu 70% od nominalnih vrednosti do 200% od nominalnih vrednosti. Rezultati simulacija su prikazani uporedo na sledećim dijagramima: Slika 7-6 Elipse rasturanja padne tačke u horizontalnoj ravni, Slika 7-7 Elipse rasturanju trajektorije u vertikalnoj ravni i Slika 7-8 Dijagram normalne verovatnoće za srednje vrednosti ugla valjanja.

Obzirom da odstupanje aerodinamičkih derivativa ne utiče neposredno na greške *SINS* algoritma, dijagrami grešaka *SINS* algoritma nisu prikazani.

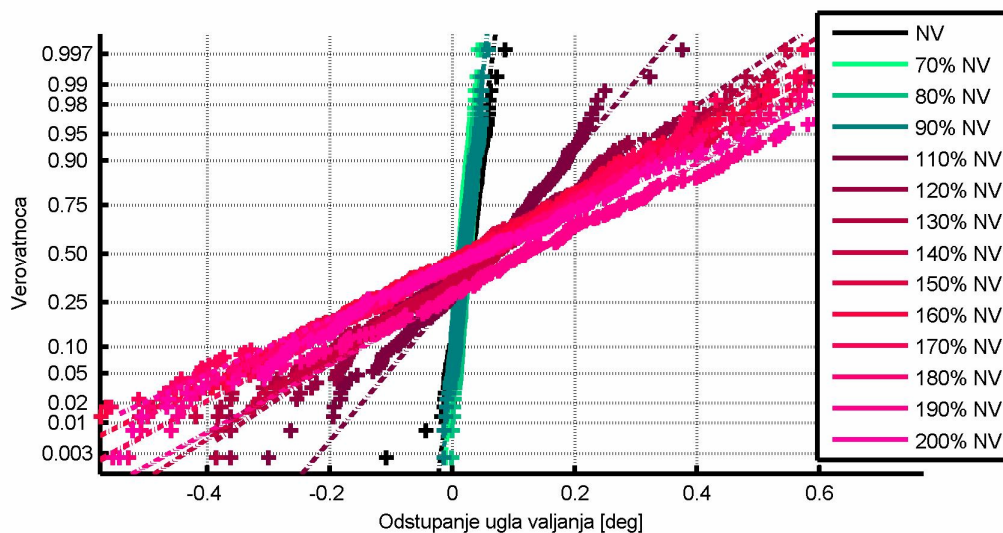


Slika 7-6 Elipse rasturanja padne tačke u horizontalnoj ravni

Sa dijagrama elipse rasturanja padne tačke u horizontalnoj ravni vidi se povećanje grešaka po pravcu sa porastom netačnosti aerodinamičkih derivativa, međutim veličina elipse rasturanja i dalje zadovoljava kriterijum da je manja od veličine tipičnih ciljeva.



Slika 7-7 Elipse rasturanju trajektorije u vertikalnoj ravni

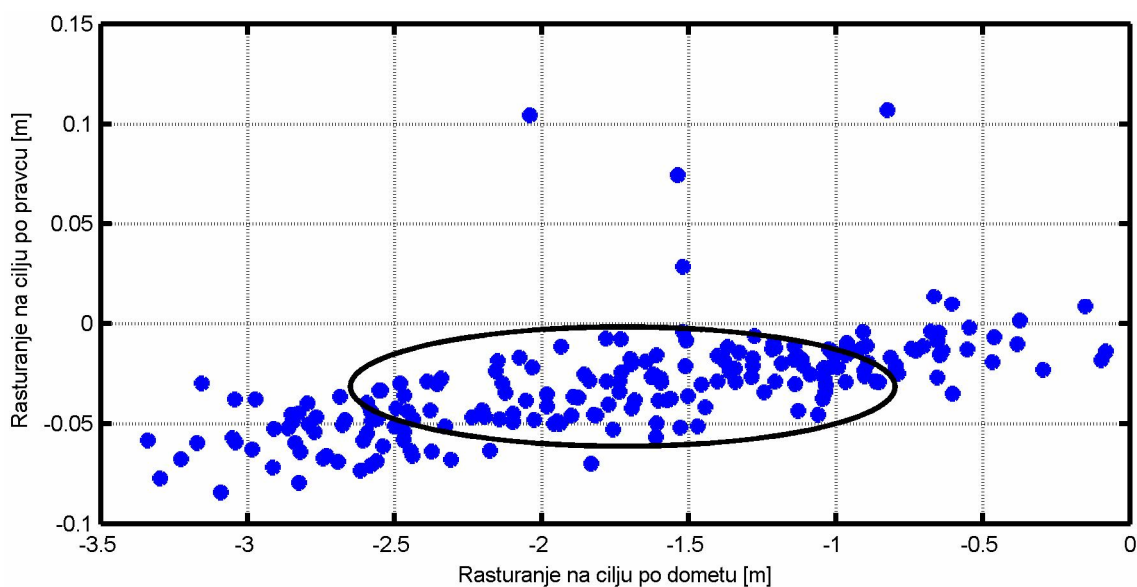


Slika 7-8 Dijagram normalne verovatnoće za srednje vrednosti ugla valjanja

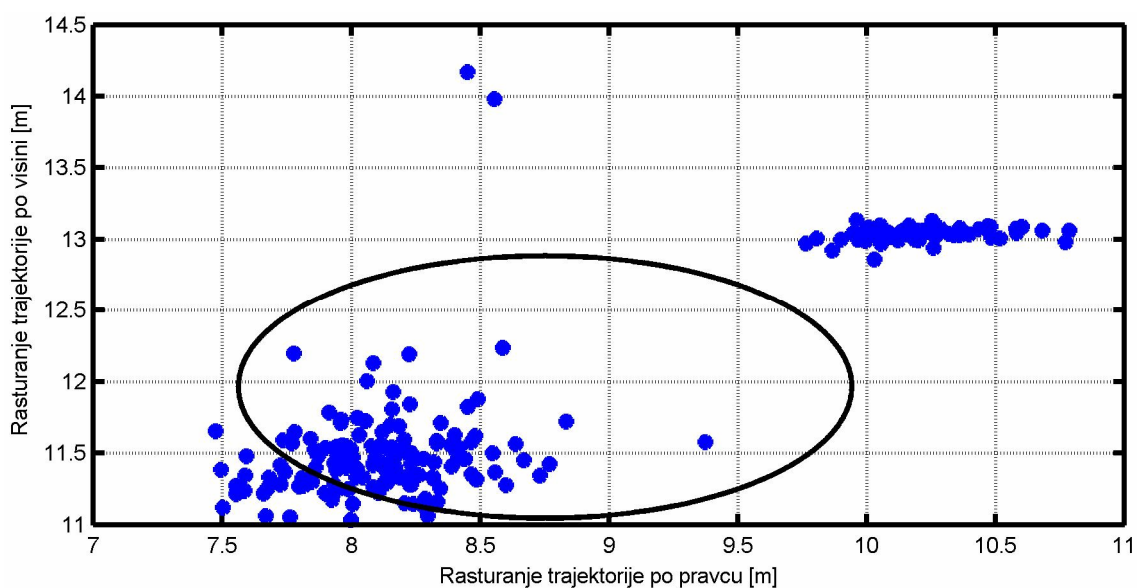
7.2 Analiza uticaja poremećaja po valjanju

Za analizu poremećaja po valjanju uzeti su poremećaji u uglu ugradnje stabilizatora i krmila, uticaj viskoznog trenja u ležaju i zazor u aktuatorskom sistemu. Poremećaji u uglu ugradnje i zazor u aktuatorskom sistemu zadavani su normalnom raspodelom $\mathcal{N}(0, (0.01 \cdot 0.1^\circ)^2)$. Poremećaji usled viskoznosti u ležaju zadavani su, normalnom raspodelom $\mathcal{N}(0, (0.20 \cdot v)^2)$, obzirom da koeficijent viskoznosti značajno varira sa temperaturom. U simulacije su uključeni i drugi sistemski poremećaji ali su njihove vrednosti u ovoj analizi konstantne kao što je ranije objašnjeno.

Rezultati analize za set nominalnih aerodinamičkih derivativa prikazani su na dijagramima: Slika 7-9 Elipsa rasturanja padne tačke u horizontalnoj ravni, Slika 7-10 Elipsa rasturanja trajektorije u vertikalnoj ravni, Slika 7-11 Dijagram normalne verovatnoće srednje greške u vremenu *SINS* algoritma po pravcu, Slika 7-12 Dijagram normalne verovatnoće srednje greške u vremenu *SINS* algoritma po visini, Slika 7-13 Dijagram normalne verovatnoće srednje vrednosti u vremenu ugla valjanja.



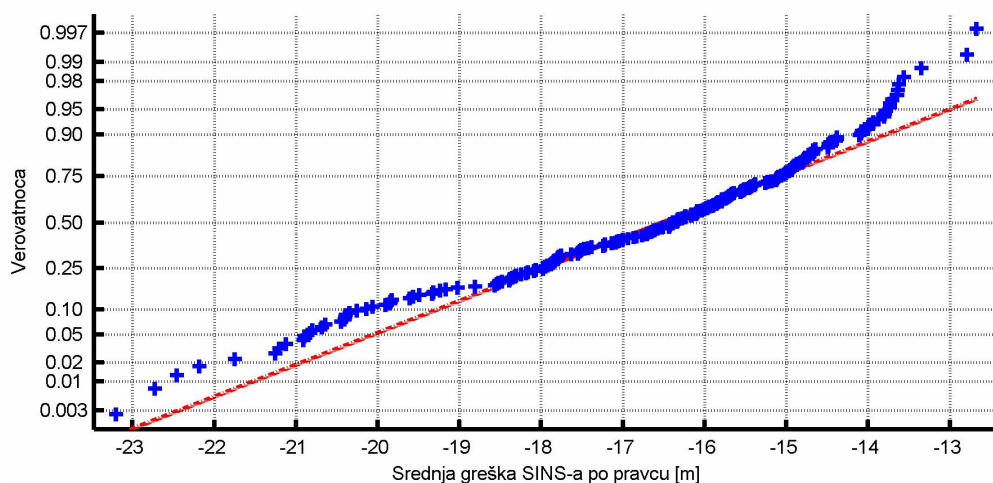
Slika 7-9 Elipsa rasturanja padne tačke u horizontalnoj ravni



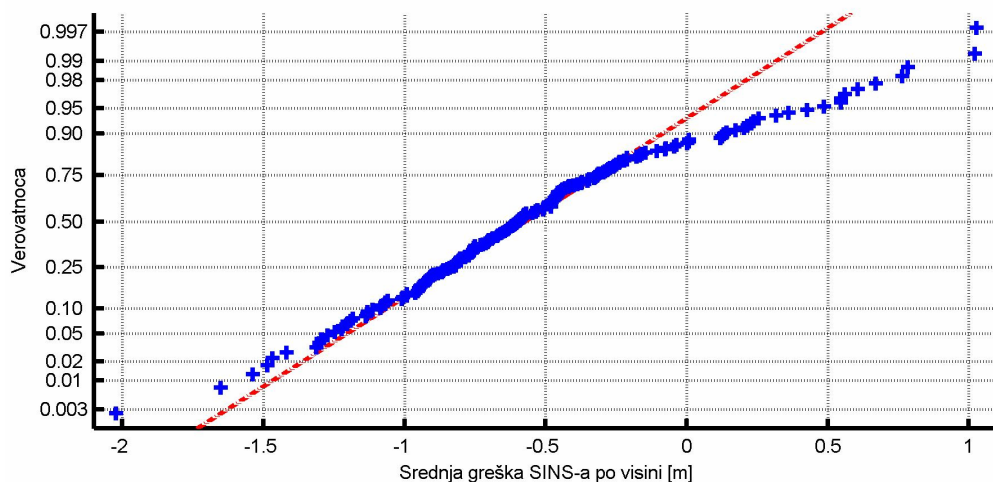
Slika 7-10 Elipsa rasturanja trajektorije u vertikalnoj ravni

Poređenjem elipse rasturanja padne tačke za poremećaje valjanja i poremećaje potiska može se doći do zaključka da poremećaji valjanja manje utiču na rasturanje po dometu nego poremećaji potiska, dok nešto više utiču na rasturanje po pravcu.

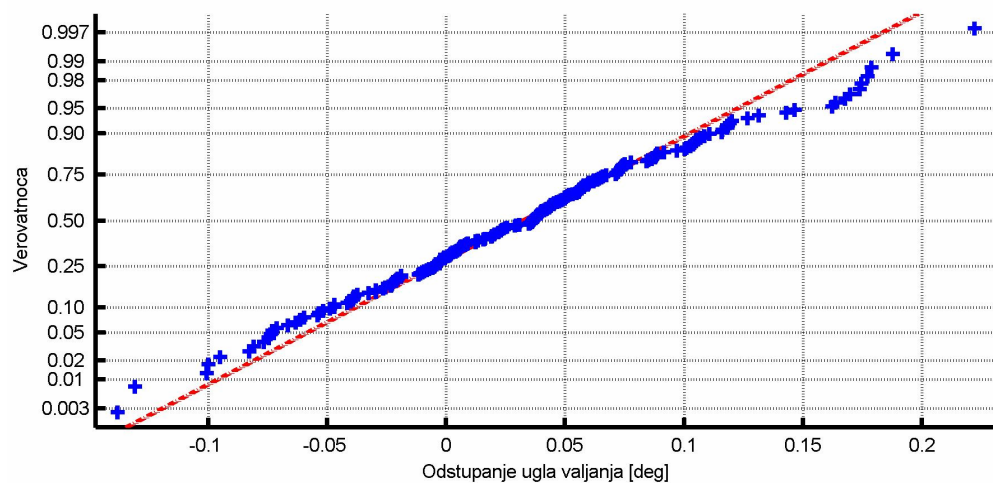
Na osnovu veličine elipse rasturanja takođe se može zaključiti da zadovoljava kriterijum pogotka cilja.



Slika 7-11 Dijagram normalne verovatnoće srednje greške u vremenu *SINS* algoritma po pravcu



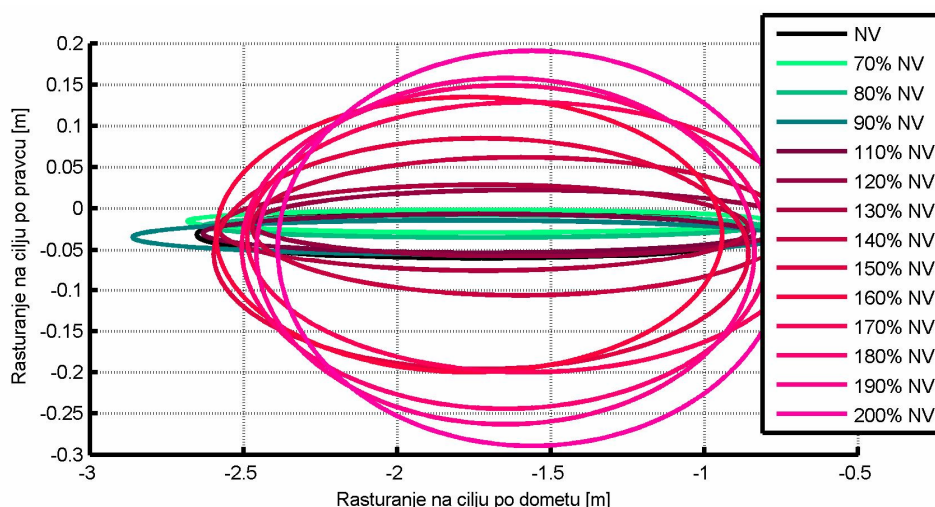
Slika 7-12 Dijagram normalne verovatnoće srednje greške u vremenu *SINS* algoritma po visini



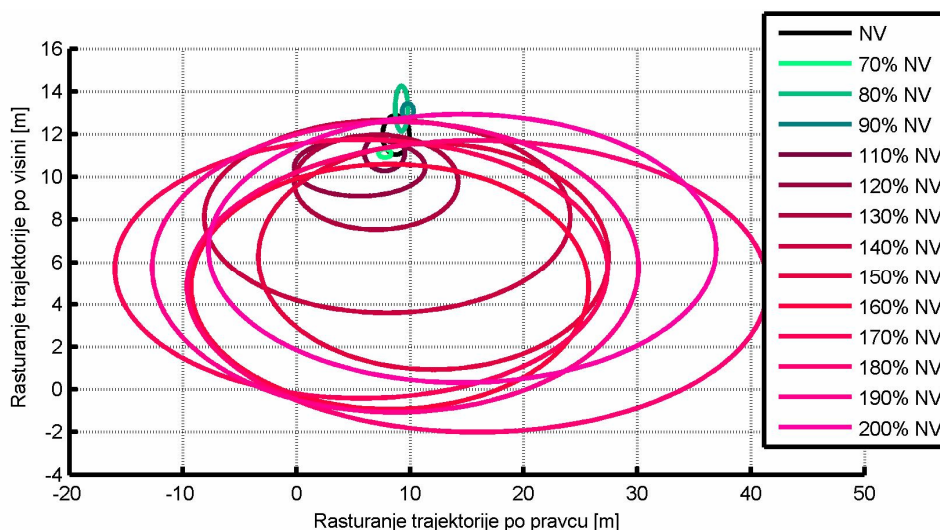
Slika 7-13 Dijagram normalne verovatnoće srednje vrednosti u vremenu ugla valjanja

Poređenjem dijagrama normalne verovatnoće greške ugla valjanja, takođe se vidi veći uticaj pri variranju poremećaja po valjanju što je i očekivano.

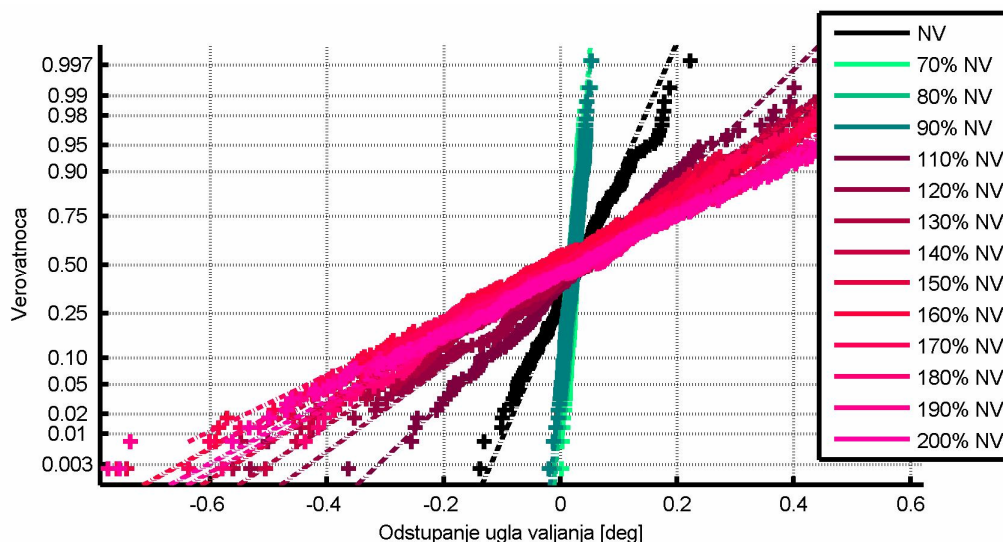
Kako bi se proverile granice efikasnosti MRAC modifikacije autopilota za isti tip i iste normalne raspodele poremećaja, rađene su simulacije sa skupom aerodinamičkih derivativa variranih u opsegu 70% od nominalnih vrednosti do 200% od nominalnih vrednosti. Obzirom da odstupanje aerodinamičkih derivativa ne utiče neposredno na greške *SINS* algoritma, dijagrami grešaka *SINS* algoritma nisu prikazani. Rezultati su prikazani uporedo na dijagramima: Slika 7-14 Elipse rasturanja padne tačke u horizontalnoj ravni, Slika 7-15 Elipse rasturanja trajektorije u vertikalnoj ravni i Slika 7-16 Dijagram normalne verovatnoće srednje greške ugla valjanja u vremenu.



Slika 7-14 Elipse rasturanja padne tačke u horizontalnoj ravni



Slika 7-15 Elipse rasturanja trajektorije u vertikalnoj ravni



Slika 7-16 Dijagram normalne verovatnoće srednje greške ugla valjanja u vremenu

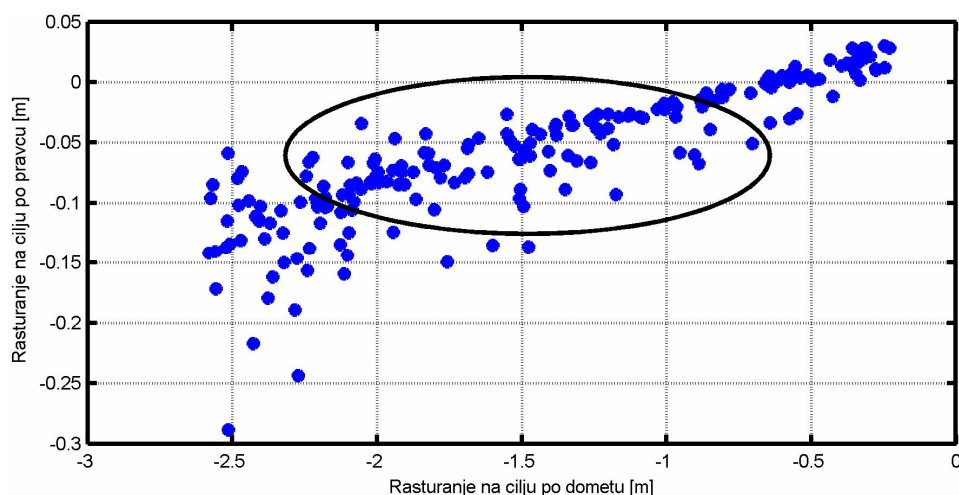
Sa dijagrama elipse rasturanja padne tačke u horizontalnoj ravni vidi se povećanje grešaka po pravcu sa porastom netačnosti aerodinamičkih derivativa, međutim veličina elipse rasturanja i dalje zadovoljava kriterijum da je manja od veličine tipičnih ciljeva. Sa dijagrama elipse rasturanja trajektorije u vertikalnoj ravni vidi se porast odstupanja pri netačnosti aerodinamičkih derivativa međutim elipse rasturanja se i dalje nalaze u zoni koja obezbeđuje zahvat cilja ($\pm 500m$ po pravcu i $\pm 50m$ po visini), a koja je određena vidnim uglom kamere i pelengom glave za samonavođenje.

7.3 Analiza uticaja poremećaja SINS -a

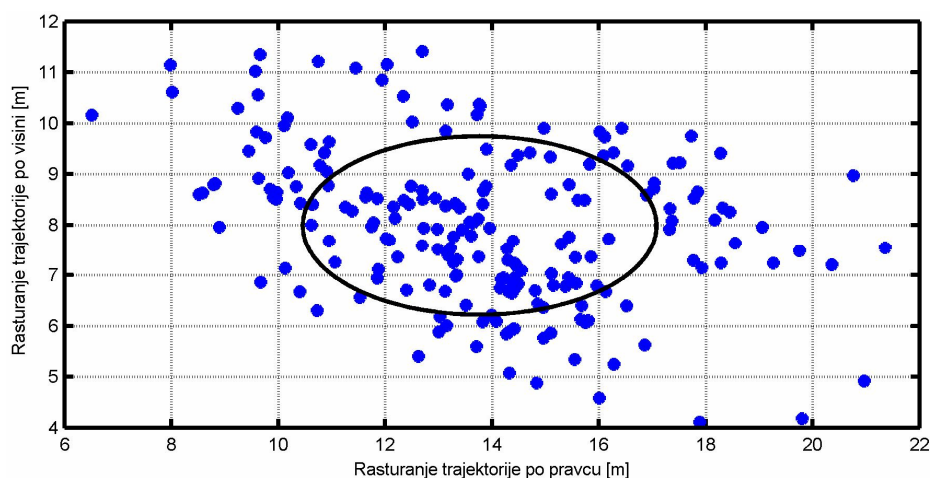
Za analizu poremećaja SINS -a uzete su greške u inicijalnim uglovima azimuta, elevacije i valjanja, i razdešenosti (sistematski poremećaji) IMU senzora. Poremećaji su zadavani normalnom raspodelom $\mathcal{N}\left(0, \left(0.20 \cdot 0.1^\circ\right)^2\right)$ za inicijalne uglove, $\mathcal{N}\left(0, \left(0.20 \cdot 0.0125 \frac{^\circ}{s}\right)^2\right)$ za razdešenost žiroskopa i $\mathcal{N}\left(0, \left(0.20 \cdot 0.033 \frac{m}{s^2}\right)^2\right)$ za razdešenost akcelometra. U simulacije su uključeni i drugi sistemski poremećaji ali su njihove vrednosti u ovoj analizi konstantne.

Rezultati analize za set nominalnih aerodinamičkih derivativa prikazani su na dijagramima: Slika 7-17 Elipsa rasturanja padne tačke u horizontalnoj ravni, Slika 7-18

Elipsa rasturanja trajektorije u vertikalnoj ravni, Slika 7-19 Dijagram normalne verovatnoće srednje greške u vremenu *SINS* algoritma po pravcu, Slika 7-20 Dijagram normalne verovatnoće srednje greške u vremenu *SINS* algoritma po visini i Slika 7-21 Dijagram normalne verovatnoće srednje greške ugla valjanja.



Slika 7-17 Elipsa rasturanja padne tačke u horizontalnoj ravni

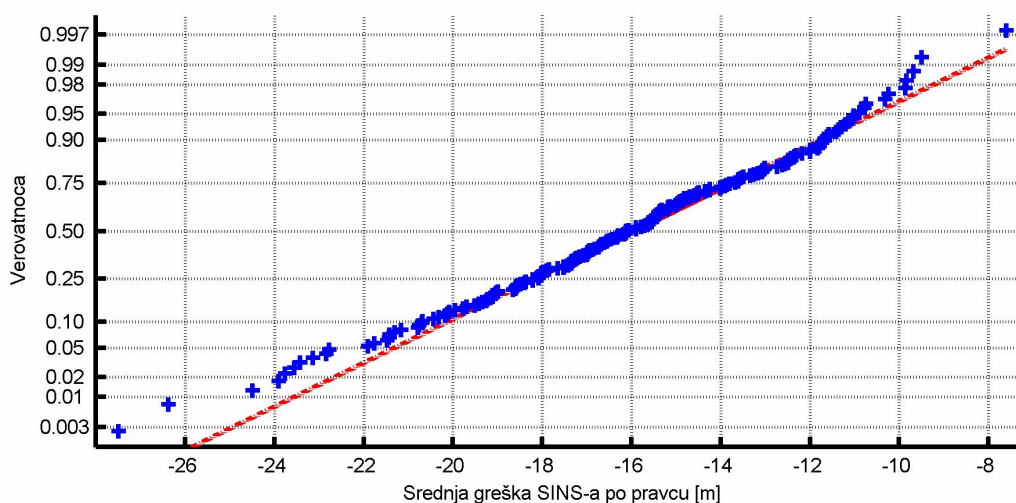


Slika 7-18 Elipsa rasturanja trajektorije u vertikalnoj ravni

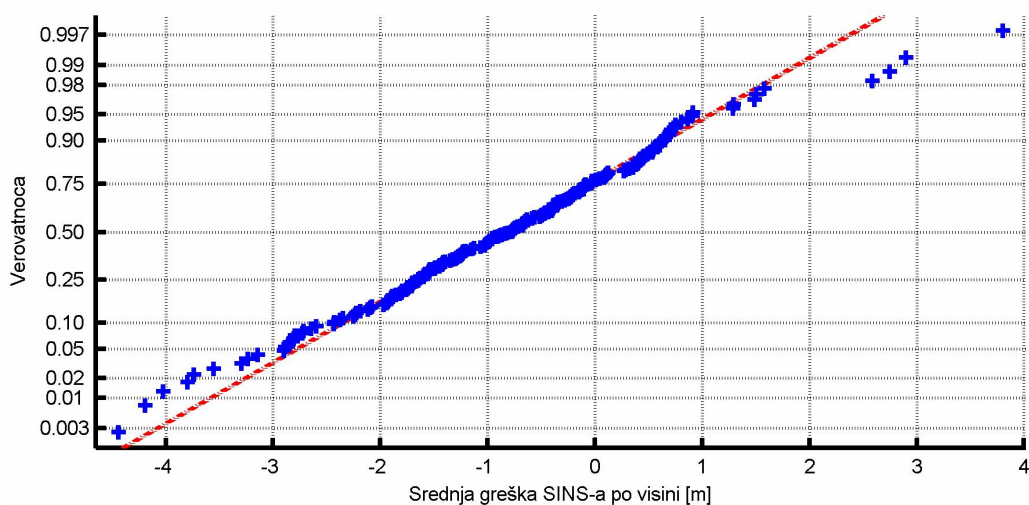
Poređenjem elipse rasturanja padne tačke sa prethodnim slučajevima može se zaključiti da greške IMU senzora utiču na povećanje elipse rasturanja padne tačke, međutim ona i dalje zadovoljava kriterijum pogotka cilja.

Poređenjem elipse rasturanja trajektorije u vertikalnoj ravni sa prethodnim slučajevima kao i dijagrama normalne verovatnoće grešaka *SINS* algoritma vidi se direktan uticaj grešaka IMU senzora na *SINS* algoritam.

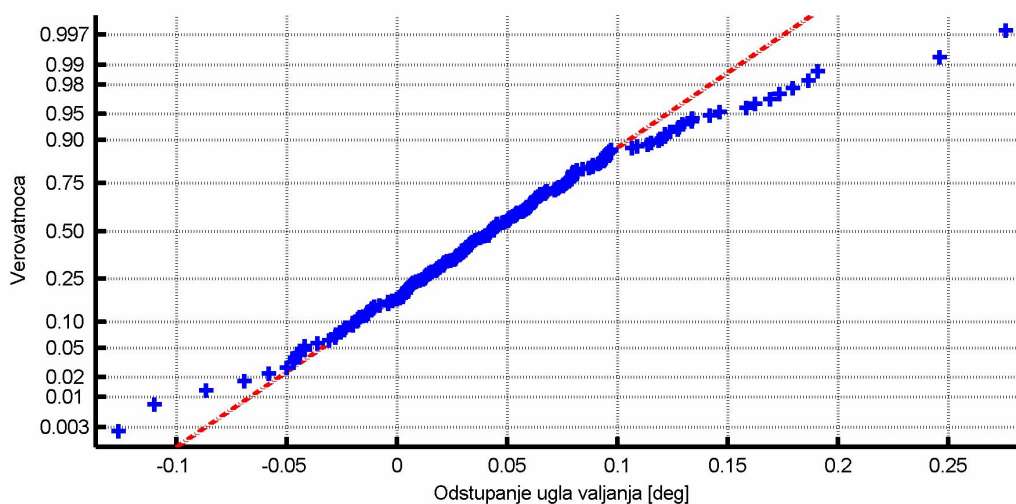
Takođe poređenjem dijagrama normalne verovatnoće greške ugla valjanja vidi se uticaj grešaka senzora na grešku ugla valjanja.



Slika 7-19 Dijagram normalne verovatnoće srednje greške u vremenu *SINS* algoritma po pravcu

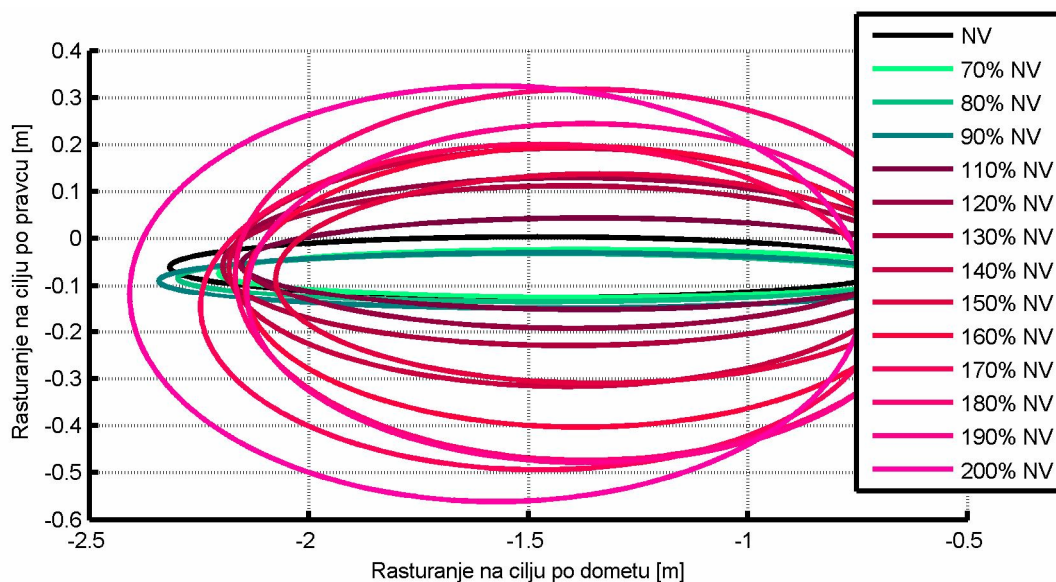


Slika 7-20 Dijagram normalne verovatnoće srednje greške u vremenu *SINS* algoritma po visini

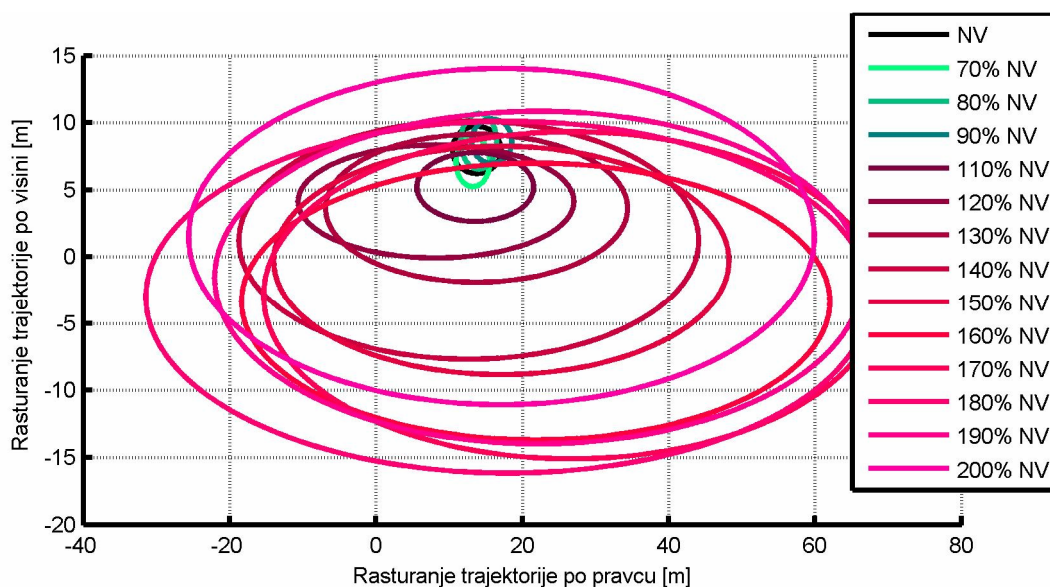


Slika 7-21 Dijagram normalne verovatnoće srednje greške ugla valjanja

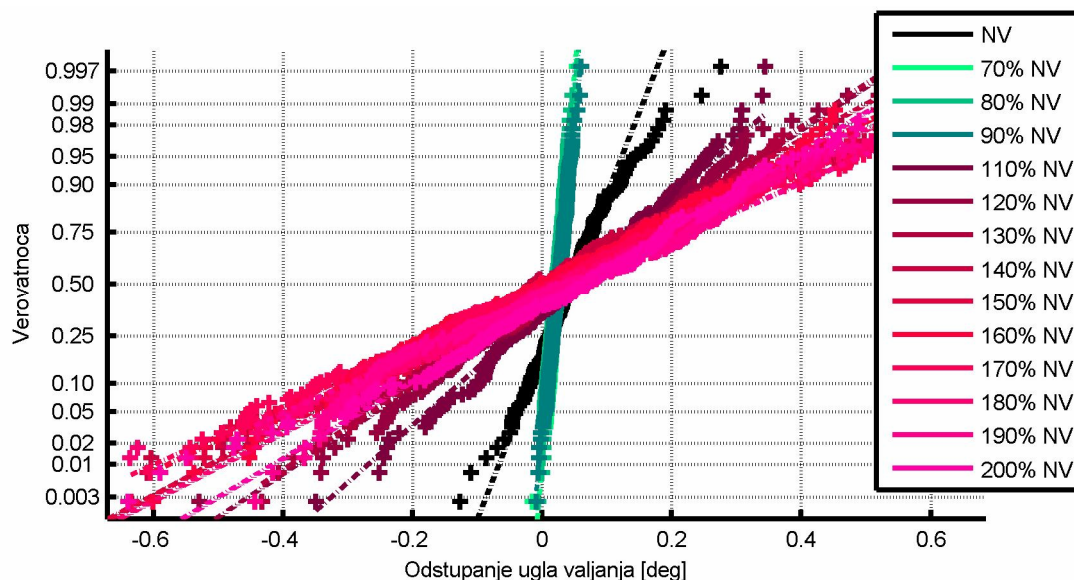
Kako bi se proverile granice efikasnosti MRAC modifikacije autopilota za isti tip i iste normalne raspodele poremećaja, rađene su simulacije sa skupom aerodinamičkih derivativa variranih u opsegu 70% od nominalnih vrednosti do 200% od nominalnih vrednosti. Obzirom da odstupanje aerodinamičkih derivativa ne utiče neposredno na greške *SINS* algoritma, dijagrami grešaka *SINS* algoritma nisu prikazani. Rezultati su prikazani uporedo na dijagramima: Slika 7-22 Elipse rasturanja padne tačke u horizontalnoj ravni, Slika 7-23 Elipse rasturanja trajektorije u vertikalnoj ravni i Slika 7-24 Dijagram normalne verovatnoće grešaka ugla valjanja.



Slika 7-22 Elipse rasturanja padne tačke u horizontalnoj ravni



Slika 7-23 Elipse rasturanja trajektorije u vertikalnoj ravni



Slika 7-24 Dijagram normalne verovatnoće grešaka ugla valjanja

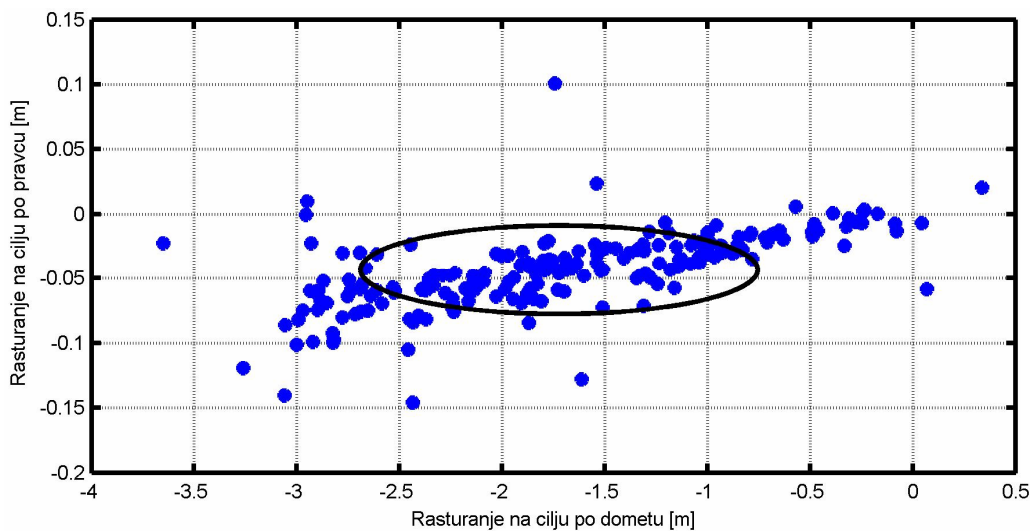
Sa dijagrama elipse rasturanja padne tačke u horizontalnoj ravni vidi se povećanje grešaka po pravcu sa porastom netačnosti aerodinamičkih derivativa, međutim veličina elipse rasturanja i dalje zadovoljava kriterijum da je manja od veličine tipičnih ciljeva. Sa dijagrama elipse rasturanja trajektorije u vertikalnoj ravni vidi se porast odstupanja pri netačnosti aerodinamičkih derivativa međutim elipse rasturanja se i dalje nalaze u zoni koja obezbeđuje zahvat cilja.

7.4 Analiza uticaja vetra

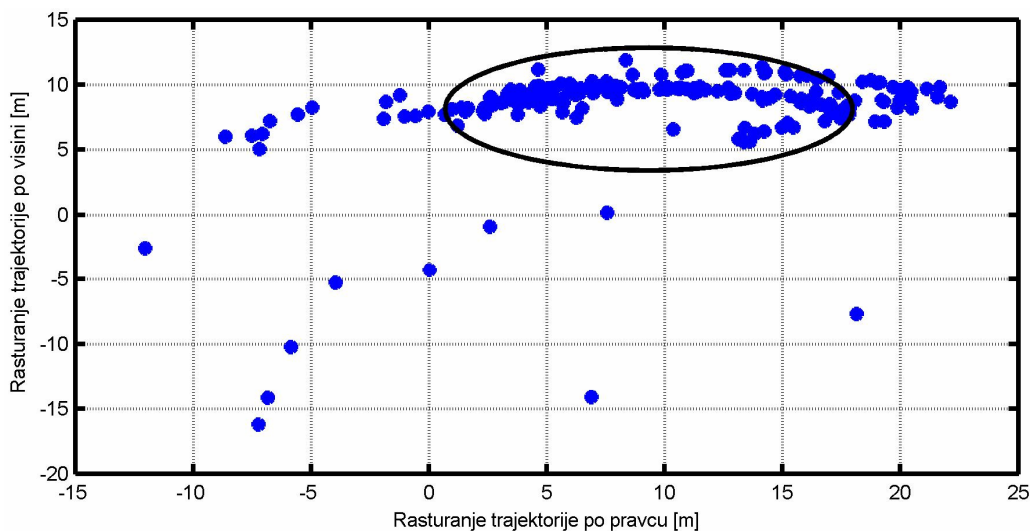
Za analizu uticaja vetra variran je intenzitet i smer bočnog vetra. Vetar je predstavljen normalnom raspodelom $\mathcal{N}\left(0, \left(3 \frac{m}{s}\right)^2\right)$. U simulacije su uključeni i drugi sistemski poremećaji ali su njihove vrednosti u ovoj analizi konstantne.

Rezultati analize za set nominalnih aerodinamičkih derivativa prikazani su na dijagramima: Slika 7-25 Elipsa rasturanja padne tačke u horizontalnoj ravni, Slika 7-26 Elipsa rasturanja trajektorije u vertikalnoj ravni, Slika 7-27 Dijagram normalne verovatnoće srednje greške u vremenu *SINS* algoritma po pravcu, Slika 7-28 Dijagram

normalne verovatnoće srednje greške u vremenu *SINS* algoritma po visini i Slika 7-29
Dijagram normalne verovatnoće srednje greške valjanja



Slika 7-25 Elipsa rasturanja padne tačke u horizontalnoj ravni

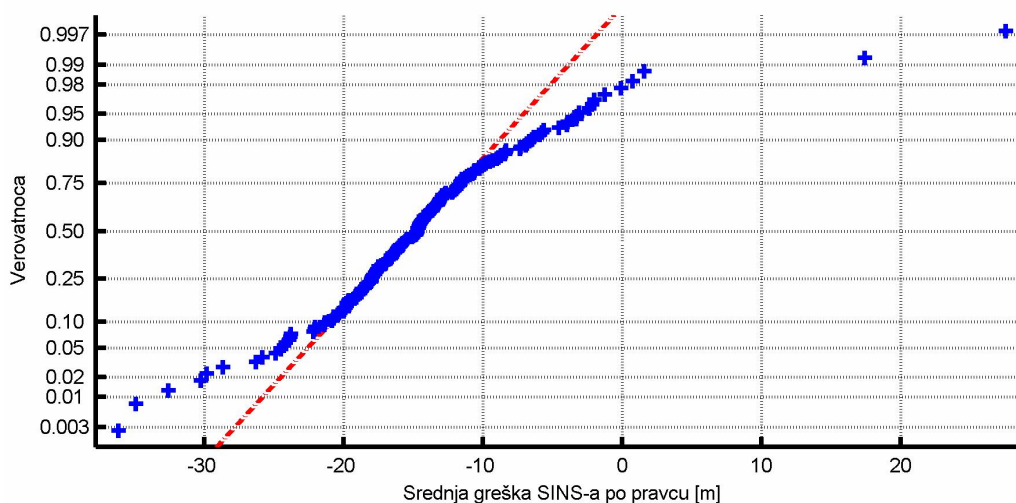


Slika 7-26 Elipsa rasturanja trajektorije u vertikalnoj ravni

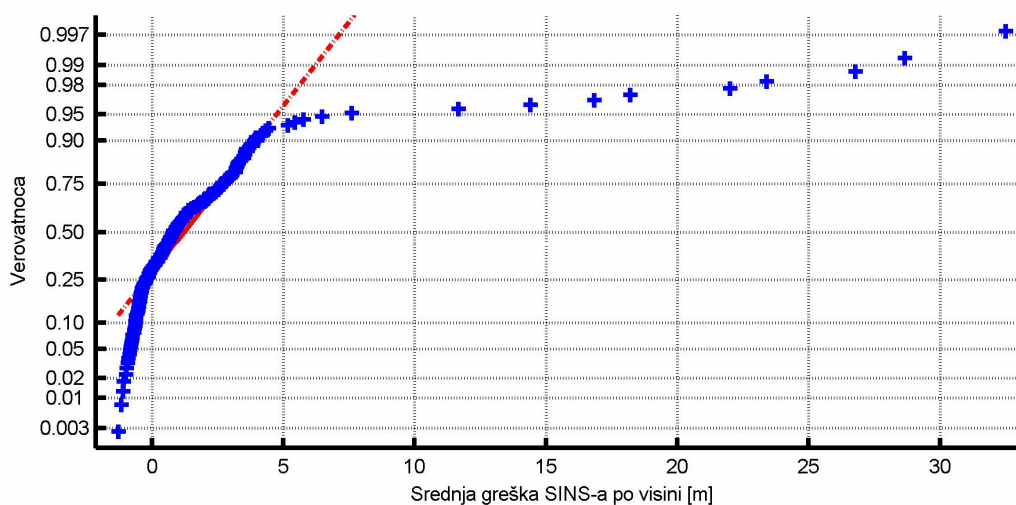
Poređenjem elipse rasturanja padne tačke sa prethodnim slučajevima može se zaključiti da je efekat vetra na padnu tačku približan efektu grešaka senzora.

Poređenjem elipse rasturanja trajektorije u vertikalnoj ravni sa prethodnim slučajevima kao i dijagrama normalne verovatnoće grešaka *SINS* algoritma vidi se da vetar ima najveći uticaj na porast elipse rasturanja trajektorije u vertikalnoj ravni.

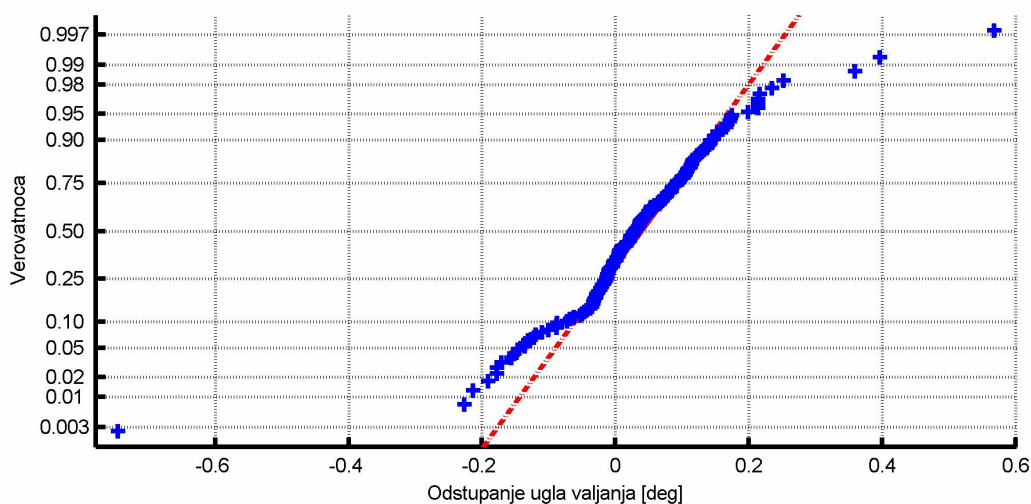
Takođe poređenjem dijagrama normalne verovatnoće greške ugla valjanja vidi se i uticaj na porast greške ugla valjanja.



Slika 7-27 Dijagram normalne verovatnoće srednje greške u vremenu *SINS* algoritma po pravcu

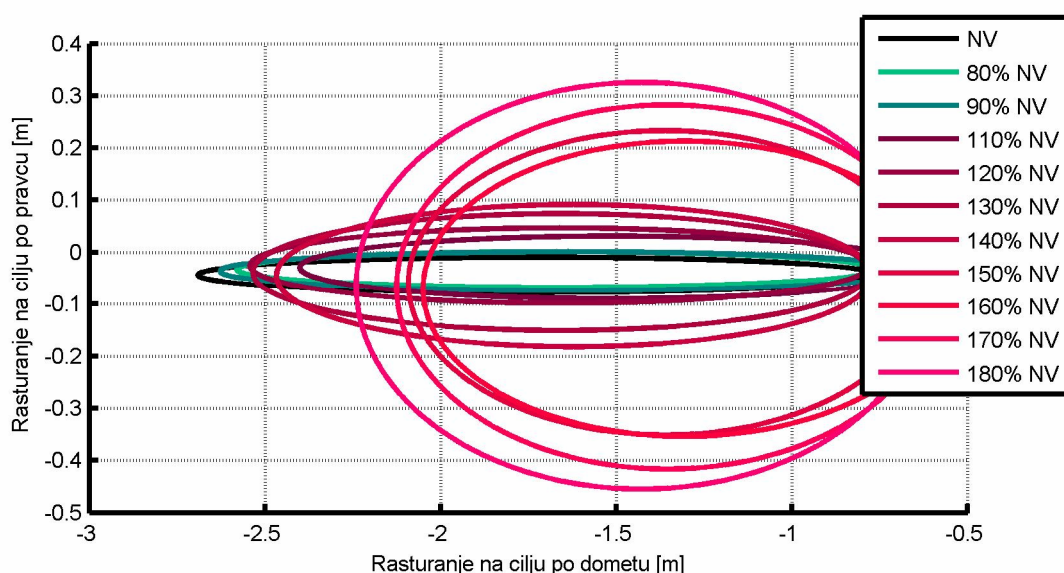


Slika 7-28 Dijagram normalne verovatnoće srednje greške u vremenu *SINS* algoritma po visini

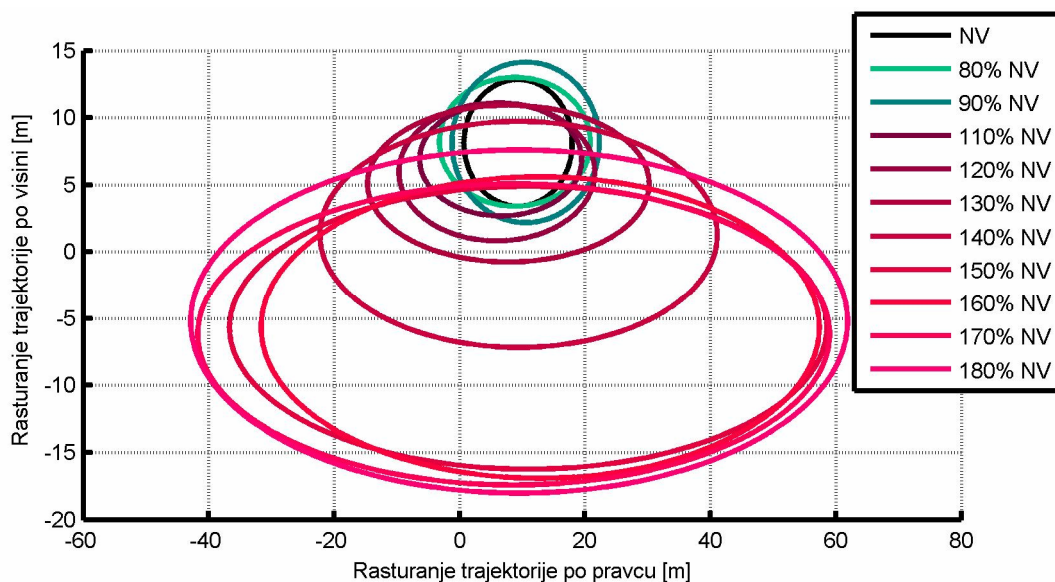


Slika 7-29 Dijagram normalne verovatnoće srednje greške valjanja

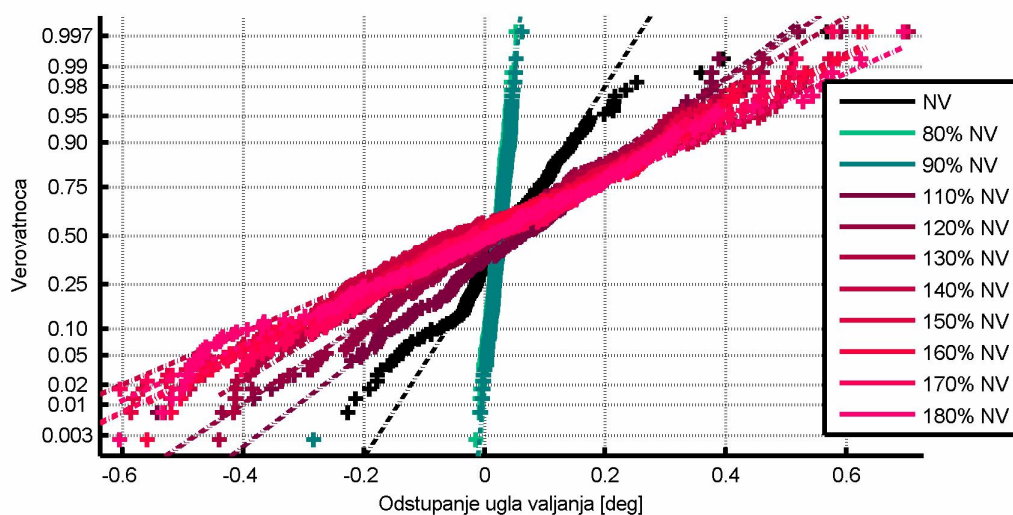
Kako bi se proverile granice efikasnosti MRAC modifikacije autopilota za isti tip i iste normalne raspodele poremećaja, rađene su simulacije sa skupom aerodinamičkih derivativa variranih u opsegu 70% od nominalnih vrednosti do 180% od nominalnih vrednosti. Obzirom da odstupanje aerodinamičkih derivativa ne utiče neposredno na greške *SINS* algoritma, dijagrami grešaka *SINS* algoritma nisu prikazani. Rezultati su prikazani uporedo na dijagramima: Slika 7-30 Elipse rasturanja padne tačke u horizontalnoj ravni, Slika 7-31 Elipse rasturanja trajektorije u vertikalnoj ravni i Slika 7-32 Dijagram normalne verovatnoće srednjih grešaka valjanja.



Slika 7-30 Elipse rasturanja padne tačke u horizontalnoj ravni



Slika 7-31 Elipse rasturanja trajektorije u vertikalnoj ravni



Slika 7-32 Dijagram normalne verovatnoće srednjih grešaka valjanja

Sa dijagrama elipse rasturanja padne tačke u horizontalnoj ravni vidi se povećanje grešaka po pravcu sa porastom netačnosti aerodinamičkih derivativa, međutim veličina elipse rasturanja i dalje zadovoljava kriterijum da je manja od veličine tipičnih ciljeva. Sa dijagrama elipse rasturanja trajektorije u vertikalnoj ravni vidi se porast odstupanja pri netačnosti aerodinamičkih derivativa međutim elipse rasturanja se i dalje nalaze u zoni koja obezbeđuje zahvat cilja.

Treba primetiti da je analiza uticaja vetra rađena za raspon 70% do 180% od nominalnih vrednosti za aerodinamičke derivative, za vrednosti van tog opsega greška je bila veća od dozvoljene.

Zaključak

U radu je izložen problem sinteze zakona vođenja i autopilota na primeru rakete kod koje postoji nekoliko različitih tipova vođenja i koja je svojom geometrijom poslužila kao dobar primer za analizu poremećaja koji se javljaju u letu.

Rad je obuhvatio analizu kretanja objekta pri čemu je razmatrano kretanje opisano sa 7 stepeni slobode kako bi se efekat kretanja slobodnorotirajuće sekcije, koji se prenosi putem ležaja, mogao analizirati u odnosu na upravljačku sekciju. Kao posledica ove analize izvedena je funkcija prenosa rotacionog kretanja koja uzima u obzir viskozno trenje u ležaju kao faktor prigušenja i kao takva se dalje koristi u sintezi autopilota. Ovom analizom se pokazuje da je funkcija prenosa drugog reda, dok je kod osnovne verzije, kod koje ne postoje ležajem odvojene sekcije ova funkcija prvog reda. Posmatranjem izvedene funkcije prenosa za ovaj slučaj pri zanemarivanju viskoznog trenja funkcija prenosa bi dobila isti oblik kao u osnovnom slučaju. Iz ovakve funkcije prenosa može se vršiti i analiza uticaja promene prigušenja u odnosu na promenu temperature, što je zanimljivo sa stanovišta standarda koje rakete sa svojim podsistemima treba da zadovolje.

U radu je za navigacioni algoritam izabran *SINS* algoritam u 8 koraka koji se pokazao kao dobar izbor u situacijama u kojima su vreme odabiranja i brzina procesora ograničavajući faktori. Takođe ovakav algoritam se pokazao i matematički stabilniji obzirom da ne zahteva renormalizaciju kvaterniona čime se pravi manja greška po uglovima, odnosno kumulativno i po putanji. Korišćenjem ovakvog algoritma utiče se i na povećanje tačnosti *SINS* -a baziranog na jeftinim *MEMS* senzorima.

Doprinos u radu se odnosi i na modifikaciju nelinearnog zakona vođenja koji je korišćen u fazi vođenja po trajektoriji. Ovaj tip vođenja se pokazao kao interesantan jer ne zahteva smeštaj derivativa po putanji u memoriju autopilota radi vođenja po putanji i samim tim ne uključuje promene aerodinamike objekta. Ono što karakteriše ovakav tip vođenja je vođenje po trajektoriji koje se zasniva na vođenju u sledeću tačku trajektorije. Zakon vođenja je modifikovan tako da se vođenje u tačku trajektorije i odabir tačaka radi u funkciji brzine objekta.

Urađena je i primena *MRAC* adaptivnog upravljanja, tako što je *MRAC* algoritam uveden u spoljnu povratnu spregu autopilota kako bi se iskoristile prednosti i osnovnog autopilota sintetisanog za referentnu tačku i mogućnost adaptacije istog na osnovu poremećaja i promena dinamike objekta tokom leta. Posebno treba istaći urađene modifikacije *MRAC* adaptivnog upravljanja koje dodatno povećavaju stabilnost, definišući granice sistema. Posebno μ modifikacija koja je uzela u obzir i mehanička ograničenja sistema, odnosno ograničenja aktuatorске sekcije.

Na osnovu statističke analize poremećaja na sistem može se zaključiti da sistem u celini veoma dobro odgovara na poremećaje i ostaje u granicama tolerancije grešaka, u smislu grešaka vođenja po trajektoriji, greške ugla valjanja i najvažnije, zone padne tačke. Iz iste analize se može uočiti da je rasturanje na padnoj tački po dometu približno konstantno kod svih tipova poremećaja čak i pri variranju aerodinamičkih derivativa. Za razliku od rasturanja po dometu rasturanje na padnoj tački po pravcu zavisi od tipa poremećaja i primećuje se da najveći uticaj imaju greške razdešenosti senzora i bočni vetar. Takođe se primećuje da rasturanje na padnoj tački po pravcu raste sa porastom dinamike objekta u odnosu na referentni. Greške vođenja po trajektoriji su posledica greške navigacionog algoritma i grešaka autopilota i ovde se iz analize vidi da su dominantni uticaji na rasturanje trajektorije takođe greške razdešenosti senzora i bočni vetar.

Statistička analiza poremećaja je rađena u uslovima referentnog objekta i u uslovima promenjene dinamike objekta u rasponu 70% do 200% od nominalne. Za vrednosti van tog opsega dobijaju se rezultati koji ne zadovoljavaju tolerancije grešaka po trajektoriji i/ili rasturanja na cilju. Međutim iako su u ovom opsegu greške u zonama tolerancije treba se ograditi od upotrebe u celom rasponu zbog još jednog problema koji ovde nije u potpunosti razmatran, a odnosi se na uticaj operatera u prepoznavanju i odabiranju cilja korišćenjem slike iz glave. Iz simulacija rađenih u statističkoj analizi se vidi da će srednja greška ugla valjanja biti bliska nuli, međutim ne vidi se kolike će biti oscilacije oko ove vrednosti. Pojedinačnim simulacijama za variranje dinamike objekta može se videti da postoje oscilacije oko srednje vrednosti maksimalnih amplituda do 10° i to u slučajevima promenjene dinamike objekta više od 130%. Kako se ne može pouzdano reći da efekat tih oscilacija ne utiče na prepoznavanje i odabir cilja od strane

operatera predlaže se da se raspon upotrebe suzi na 70% do 130% od referentne dinamike objekta.

U daljem istraživanju bilo bi zanimljivo uraditi geometrijsku analizu uticaja nebalansiranosti ležajem odvojenih sekcija i uticaj greške u ugradnji u smislu saosnosti sekcija. Ovaj efekat bi takođe bilo zanimljivo uvesti i u linearizovane jednačine kretanja kako bi se bolje shvatila dinamika objekta a samim tim preciznije izvršila sinteza autopilota.

Takođe, kao pravac daljeg istraživanja moglo bi biti i korišćenje, odnosno analiza korišćenja nelinearnog zakona vođenja po trajektoriji primenjeno na taktičke rakete zemlja-zemlja i tu bi takođe trebalo izvesti zaključke o mogućnosti korišćenja *MRAC* modifikovanih autopilota obzirom na izraziti nestacionarne dinamičke osobine ovih letelica.

I na kraju posebno bi bio interesantno uvesti na neki način pogodnosti μ - modifikacije u same zakone vođenja kako bi i zakoni vođenja ostali unutar granica sistema, u smislu mehaničkih ograničenja, i kako bi se prilagodili tako da izlazi iz zakona vođenja ne indukuju saturaciju na organima upravljanja.

Prilog 1. Definicije koordinatnih sistema

Vezani koordinatni sistem

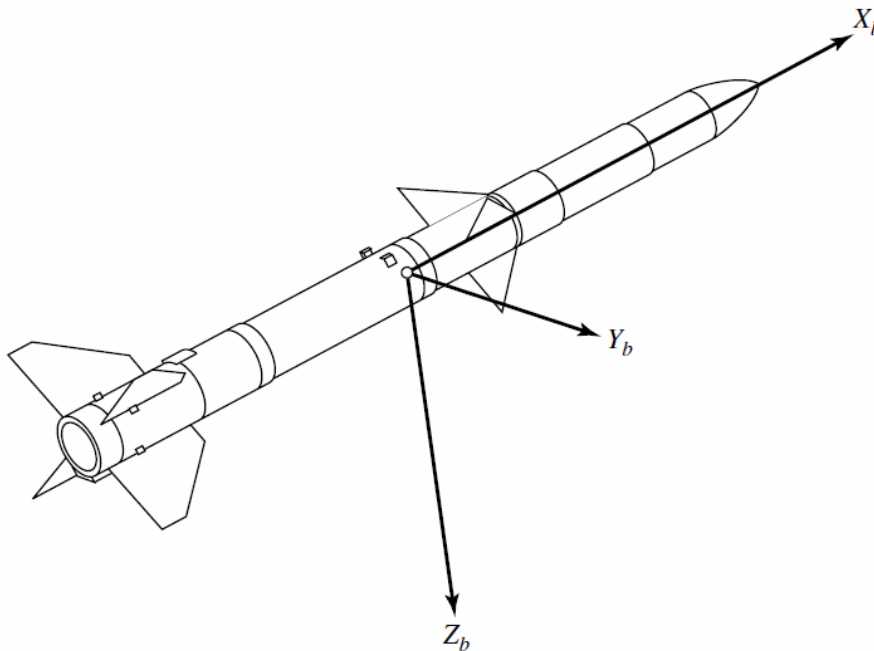
Sistem vezan za projektil, prikazan je na Slici P1-1:

O - u centru masa projektila

x - koincidentna sa glavnim (uzdužnom) osom projektila (glavnom inercionom osom)

y - koincidentna sa poprečnom osom projektila (pozitivan smer - desno)

z - koincidentna sa normalnom osom projektila (smer takav da formira desni trijedar)



Slika P1-0-1 Vezani koordinatni sistem

Navigacioni koordinatni sistem, NED

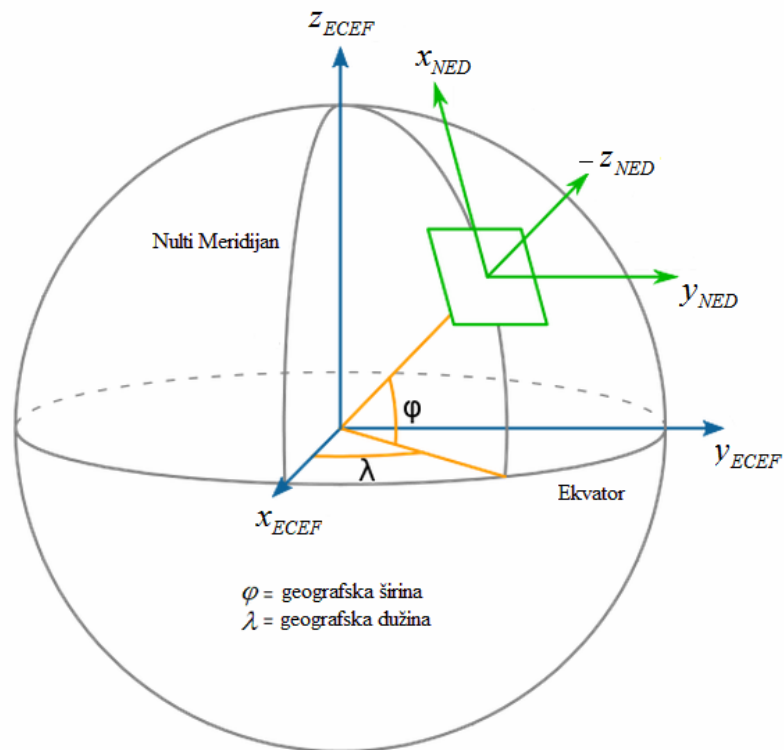
Navigacioni koordinatni sistem usvojen u radu je zapravo Normalni sistem vezan za Zemlju, odnosno NED (North East Down), [34], i prikazan je na Slici P1-2:

0 - u projekciji centra masa projektila na zemljinu površinu

x_{NED} - horizontalna, u pravcu severa,

y_{NED} - horizontalna, u pravcu istoka

z_{NED} - vertikalna, u pravcu centra Zemlje



Slika P1-0-2 Navigacioni koordinatni system

Azimutni koordinatni sistem

Azimutni koordinatni sistem ima koordinatni početak u istoj tački kao i NED koordinatni sistem,

- orijentacija x_{Az} ose zaklapa ugao azimuta sa x_{NED} osom,
- z_{Az} osa je u pravcu centar Zemlje i usmerena na gore (suprotno gravitacionom ubrzanju)
- y_{Az} osa čini desni trijedar

Geocentrični koordinatni sistem vezan za Zemlju, ECEF

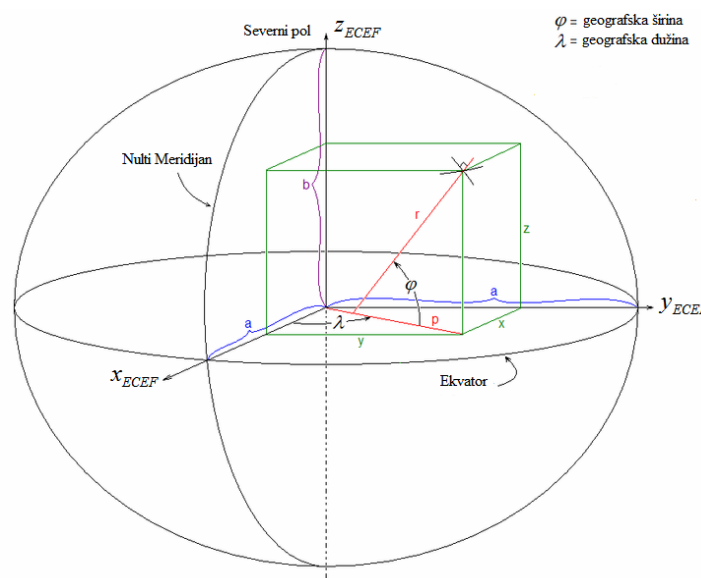
Koordinatni sistem vezan za Zemlju koji rotira zajedno sa Zemljom (Earth Centered Earth Fixed), prikazan je na Slici P1-3 i definiše se na sledeći način:

0 - u centru Zemlje

x_{ECEF} - prolazi kroz presek ekvatora i nultog meridijana ili meridijana lansirne tačke u pravcu neba

y_{ECEF} - kompletira desni trijedar

z_{ECEF} - koincidentna sa Zemljinom glavnom (obrotnom) osom u pravcu severa



Slika P1-0-3 Geocentrični koordinatni sistem vezan za Zemlju

Prilog 2. Standardna atmosfera COESA

Standardna atmosfera COESA je US . model standardne atmosfere usvojen 1976. godine, koji definiše atmosfersku temperaturu, pritisak, gustinu i druge karakteristike u funkciji nadmorske visine. U ovom modelu standardne atmosfere vazduh se tretira kao idealan gas, pa na osnovu toga važi jednačina stanja idealnog gasa. Na osnovu geopotencijalne nadmorske visine atmosfera je podeljena na osam zona čije su karakteristike predstavljene u Tabeli P2-1.

$h_{tab} [km]$	0.0	11.0	20.0	32.0	47.0	51.0	71.0	84.852
$T_{tab} [K]$	288.15	216.65	216.65	228.65	270.65	270.65	214.65	186.946
$p_{tab} [Pa]$	101325	22632.1	5474.89	868.019	110.906	66.9389	3.95642	0.36850
ΔT_{tab}	-6.5	0.0	1.0	2.8	0.0	-2.8	-2.0	0.0

Tabela P2-0-1 Karakteristike atmosfere po slojevima

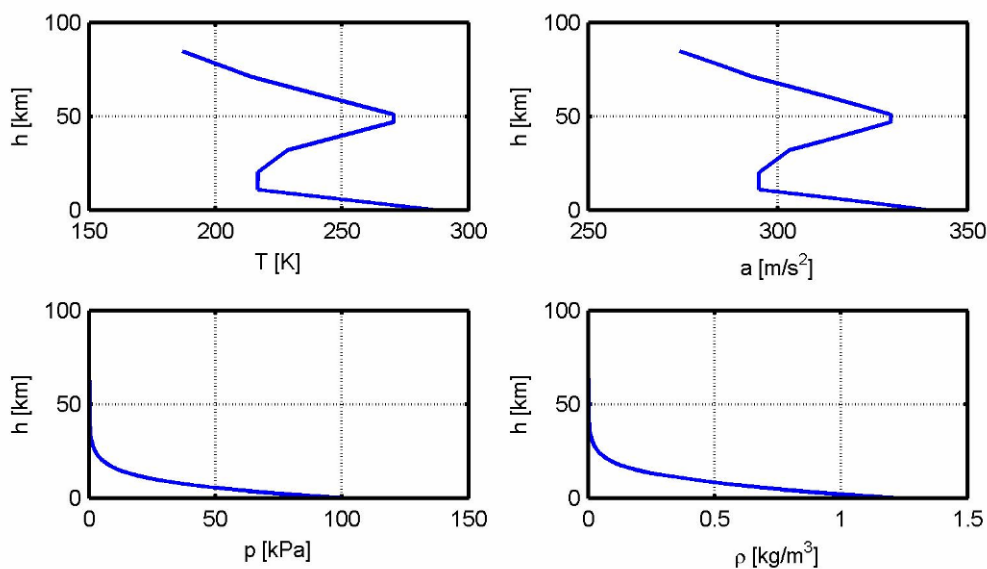
Temperatura se računa na osnovu priraštaja po zonama u zavisnosti od visine. Pritisak se dobija iz sledeće relacije:

$$p(h) = \begin{cases} p_{tab} e^{-\gamma_{mr} \frac{\Delta h}{T_{tab}}}, & \Delta T_{tab} = 0 \\ p_{tab} \left(\frac{T_{tab}}{T(h)} \right)^{\frac{\gamma_{mr}}{\Delta T_{tab}}}, & \Delta T_{tab} \neq 0 \end{cases} \quad \text{P2-1}$$

gde je

$\gamma_{mr} = 34.163195$ - hidrostatička konstanta

Raspodela temperature, brzine zvuka, gustine i pritiska u funkciji od visine prikazana je na Slici P2-1.

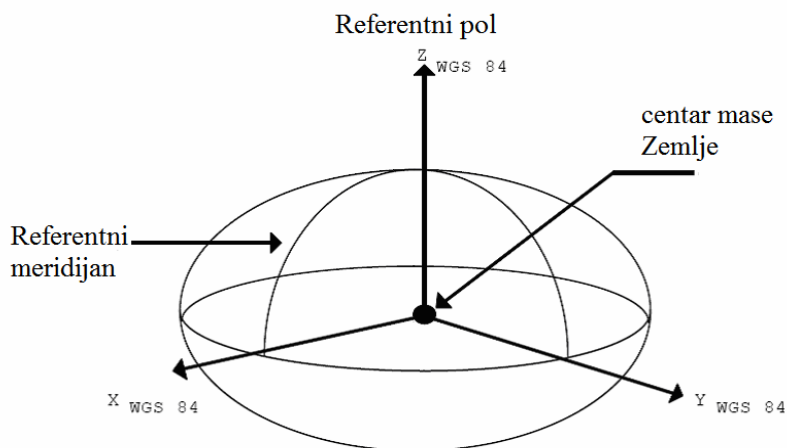


Slika P2-0-1 Prikaz promene temperature, pritiska, gustine i brzine zvuka u funkciji nadmorske visine

Prilog 3. Geografski standard Zemlje WGS84

Geografski standard Zemlje WGS84 je važeći standard koji definiše osnovne geometrijske parametre, odnosno oblik Zemlje, magnetizam Zemljinog polja, rotaciju Zemlje i gravitaciju.

WGS84 koordinatni sistem je desno orjentisan, vezan za Zemlju i ortogonalan koordinatni sistem, prikazan je na Slici P3-1.



Slika P3-0-1 WGS84 koordinatni sistem

Parametri koji definišu WGS84 :

- velika poluosa elipsoida

$$a = 6378137.0 \text{ m}$$

- spljoštenost

$$1/f = 298.257223563$$

- gravitaciona konstanta Zemlje koja uključuje masu atmosfere

$$\gamma_m = (3986004.418 \pm 0.008) \cdot 10^8 \frac{\text{m}^3}{\text{s}^2}$$

- gravitaciona konstanta Zemlje bez uticaja atmosfere

$$\gamma'_m = (3986000.9 \pm 0.1) \cdot 10^8 \frac{\text{m}^3}{\text{s}^2}$$

- ugaona brzina rotacije Zemlje

$$\omega = 7292115 \cdot 10^{-11} \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

U tabelama P3-1, P3-2 i P3-3 date su relevantne veličine koje definišu WGS84 standard.

Konstanta	Oznaka	Vrednost
Zonalni harmonik drugog reda	$\epsilon 2.0$	$-0.484166774985 \cdot 10^{-3}$
Mala poluosa	b	6356752.3142 m
Prvi ekscentricitet	e	$8.1819190842622 \cdot 10^{-2}$
Kvadrat prvog ekscentriciteta	e^2	$6.69437999014 \cdot 10^{-3}$
Drugi ekscentricitet	e'	$8.2094437949696 \cdot 10^{-2}$
Kvadrat drugog ekscentriciteta	e'^2	$6.73949674228 \cdot 10^{-3}$
Linearni ekscentricitet	E	$5.2185400842339 \cdot 10^5$
Polarni radijus krivine	c	6399593.6258 m
Odnos osa	b/a	0.996647189335
Srednji radijus poluosa	$R1$	6371008.7714 m
Radijus sfere ekvivalentne površine	$R2$	6371007.1809 m
Radiju sfere ekvivalentne zapremine	$R3$	6371000.7900 m

Tabela P3-1 Izvedene geometrijske konstante

Konstanta	Oznaka	Vrednost
Teoretski (Normalni) Gravitacioni potencijal Elipsoida	U_0	$62636851.7146 \text{ m}^2/\text{s}^2$
Teoretski (Normalni) Gravitacioni potencijal na Ekvatoru	Y_e	$9.7803253359 \text{ m/s}^2$
Teoretski (Normalni) Gravitacioni potencijal na polovima	Y_p	$9.8321849378 \text{ m/s}^2$
Srednja vrednost teoretskog (normalnog) gravitacionog potencijala	Y	$9.7976432222 \text{ m/s}^2$
Konstanta formule teoretskog (normalnog) gravitacionog potencijala	k	0.00193185265241
Masa Zemlje (uključuje masu atmosfere)	M	$5.9733328 \cdot 10^{24} \text{ kg}$

Tabela P3-2 Izvedene fizičke veličine

Konstanta	Oznaka	Vrednost
Brzina svetlosti u vakuumu	c	299792458 m/s
Dinamički elipticitet	H	$1/305.4413$
Univerzalna gravitaciona konstanta	G	$6.673 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg s}^2$
Momenti inercije Zemlje	A	$8.0091029 \cdot 10^{37} \text{ kg m}^2$
	B	$8.0092559 \cdot 10^{37} \text{ kg m}^2$
	C	$8.0354872 \cdot 10^{37} \text{ kg m}^2$

Tabela P3-3 Druge relevantne konstante

Prilog 4. Matematički model glave za samonavođenje

Kao što je već i ranije pomenuto osnovna funkcija glave za samonavođenje je da meri ugaonu brzinu linije viziranja cilja. Merenje se ostvaruje pomoću servo-sistema koji usmerava osu glave za samonavođenje prema cilju. Servo sistem glave za samonavođenje treba da ima veliki propusni opseg da bi se obezbedila zadovoljavajuća tačnost praćenja cilja.

Glava za samonavođenje je u ovom radu usvojena kao dinamički element drugog reda čija je prenosna funkcija:

$$W_g(s) = \frac{s}{\frac{s^2}{\omega_{nh}^2} + \frac{2\mu_h s}{\omega_{nh}} + 1} = \frac{\Delta\dot{\varphi}}{\Delta\varphi}(s) \quad \text{P4-1}$$

gde su $\Delta\dot{\varphi}_m$ izmerena ugaona brzina linije viziranja i $\Delta\varphi$ greška praćenja cilja

U radu je usvojeno da je vrednost faktora relativnog prigušenja glave za samonavođenje $\mu_h = 1$ a učestanost $\omega_{nh} = 10 \frac{rad}{s}$.

Za potrebe numeričke simulacije u vremenskom domenu, funkcija prenosa se pomoću Ojlerove metode transformiše u:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= \Delta\varphi(t) - \omega_{nh}^2 z_1 - 2\mu_h \omega_{nh} z_2 \end{aligned} \quad \text{P4-2}$$

pa je izlazna veličina iz glave za samonavođenje: $\Delta\dot{\varphi} = \omega_{nh}^2 z_2$

Tačnost određivanja ugaone brzine linije viziranja se dobija poređenjem sa stvarnom ugaonom brzinom linije viziranja cilja:

$$\begin{aligned} r\dot{\varphi} &= V_c \sin \varepsilon_c - V \sin \varepsilon \Rightarrow \dot{\varphi} = \frac{1}{r} (V_c \sin \varepsilon_c - V \sin \varepsilon) \\ \dot{r} &= V_c \cos \varepsilon_c - V \cos \varepsilon = V_r \end{aligned} \quad \text{P4-3}$$

Prilog 5. IMU senzor

Tip IMU senzora korišćenog u modelu je MEMS senzor ADIS16405, sa 3 integrisana žiroskopa, akcelerometra i magnetometra.

Osnovne karakteristike prikazane su u tabeli.

Parameter	Test Conditions	Min	Typ	Max	Unit
GYROSCOPES					
Dynamic Range		±300	±350		°/sec
Initial Sensitivity	Dynamic range = ±300°/sec	0.0495	0.05	0.0505	°/sec/LSB
	Dynamic range = ±150°/sec		0.025		°/sec/LSB
	Dynamic range = ±75°/sec		0.0125		°/sec/LSB
Sensitivity Temperature Coefficient	ADIS16400: -40°C ≤ T _A ≤ +85°C		±250		ppm/°C
	ADIS16405: -40°C ≤ T _A ≤ +85°C		±40		ppm/°C
Misalignment	Axis-to-axis, Δ = 90° ideal		±0.05		Degrees
	Axis-to-frame (package)		±0.5		Degrees
Nonlinearity	Best fit straight line		0.1		% of FS
Initial Bias Error	1 σ		±3		°/sec
In-Run Bias Stability	1 σ, SMPL_PRD = 0x01		0.007		°/sec
Angular Random Walk	1 σ, SMPL_PRD = 0x01		2.0		°/√hr
Bias Temperature Coefficient	ADIS16400: -40°C ≤ T _A ≤ +85°C		±0.025		°/sec/°C
	ADIS16405: -40°C ≤ T _A ≤ +85°C		±0.01		°/sec/°C
Linear Acceleration Effect on Bias	Any axis, 1 σ (MSC_CTRL, Bit 7 = 1)		0.05		°/sec/g
Bias Voltage Sensitivity	VCC = 4.75 V to 5.25 V		0.32		°/sec/V
Output Noise	±300°/sec range, no filtering		0.9		°/sec rms
Rate Noise Density	f = 25 Hz, ±300°/sec, no filtering		0.05		°/sec/√Hz rms
3 dB Bandwidth			330		Hz
ACCELEROMETERS					
Dynamic Range		±18			g
Initial Sensitivity		3.285	3.33	3.38	mg/LSB
Sensitivity Temperature Coefficient	ADIS16400: -40°C ≤ T _A ≤ +85°C		±120		ppm/°C
	ADIS16405: -40°C ≤ T _A ≤ +85°C		±50		ppm/°C
Misalignment	Axis-to-axis, Δ = 90° ideal		0.2		Degrees
	Axis-to-frame (package)		±0.5		Degrees
Nonlinearity	Best fit straight line, ±17 g		0.1		% of FS
Initial Bias Error	1 σ		±50		mg
In-Run Bias Stability	1 σ		0.2		mg
Velocity Random Walk	1 σ		0.2		m/sec/√hr
Bias Temperature Coefficient	ADIS16400: -40°C ≤ T _A ≤ +85°C		±1.35		mg/°C
	ADIS16405: -40°C ≤ T _A ≤ +85°C		±0.3		mg/°C
Bias Voltage Sensitivity	VCC = 4.75 V to 5.25 V		2.5		mg/V
Output Noise	No filtering		9		mg rms
Noise Density	No filtering		0.5		mg/√Hz rms
3 dB Bandwidth			330		Hz
MAGNETOMETER					
Dynamic Range		±2.5	±3.5		gauss
Initial Sensitivity	25°C	0.49	0.5	0.51	mgauss/LSB
Sensitivity Temperature Coefficient	25°C, 1 σ		600		ppm/°C
Axis Nonorthogonality	25°C, axis-to-axis		0.25		Degrees
Axis Misalignment	25°C, axis-to-base plate and guide pins		0.5		Degrees
Nonlinearity	Best fit straight line		0.5		% of FS
Initial Bias Error	25°C, 0 gauss stimulus		±4		mgauss
Bias Temperature Coefficient			0.5		mgauss/°C
Output Noise	25°C, no filtering		1.25		mgauss rms
Noise Density	25°C, no filtering, rms		0.066		mgauss/√Hz
3 dB Bandwidth			1540		Hz

Tabela P5-1 Osnovne karakteristike ADIS16405 senzora

Prilog 6. Teorija pasivnosti

Pozitivno realne funkcije prenosa - kontinualni sistemi

Ako posmatramo $H(s)$, matricu funkcije prenosa linearnog stacionarnog sistema sa jednakim brojem ulaza i izlaza tada važi da je $H(s)$ pozitivno realna PR funkcija ako su ispunjeni sledeći zahtevi:

1. $\forall s \in \Re \Rightarrow H(s) \in \Re^{m \times m}$
2. $\forall s \in \Re, \operatorname{Re}(s) \geq 0 \Rightarrow \operatorname{Re}(H(s)) \geq 0$
3. Ako je $H(s - \varepsilon)$ pozitivno realna funkcija za neku vrednost $\varepsilon > 0$, tada je $H(s)$ striktno pozitivno realna funkcija SPR
4. Elementi matrice $H(s)$ nemaju polove izvan leve poluravni s-ravni
5. Ukoliko postoje polovi na imaginarnoj osi, oni su prosti i njihovi reziduumi su nenegativne hermitske forme
6. u svim tačkama na imaginarnoj osi, koje nisu polovi sistema važi
za PR funkciju $\forall s \in \mathbb{C}^n, x^H [H(j\omega) + H^H(j\omega)] x \geq 0$
za SPR funkciju pošto nema polova na imaginarnoj osi uslov važi za svaku tačku na imaginarnoj osi $\forall s \in \mathbb{C}^n, x^H [H(j\omega) + H^H(j\omega)] x > 0$

Pozitivni sistemi – kontinualni sistemi

Za linearan kontinualni, kontrolabilan i observabilan sistem sa jednakim brojem ulaza i izlaza, opisan modelom

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu, A(t) \in \Re^{n \times n}, B(t) \in \Re^{n \times m} \\ \dot{y} &= Cx + Du, C(t) \in \Re^{m \times n}, D(t) \in \Re^{m \times m}\end{aligned}$$

P6-1

Kažemo da je pozitivno realan PR ako važe sledeće ekvivalentne tvrdnje:

Postoji simetrična pozitivno definitna matrica $P(t)$ ko je rešenje Rikartijeve jednačine i proizvoljne matrice $L(t)$ i $W(t)$ takve da važi:

$$\begin{aligned}\dot{P} + A^T P + P A &= -L L^T \\ B^T P + W^T L^T &= C \\ W^T W &= D + D^T\end{aligned}\quad \text{P6-2}$$

Tada svako rešenje sistema zadovoljava sledeći uslov

$$2 \int_0^t y^T(\tau) u(\tau) d\tau = x^T(t) P(t) x(t) - x^T(0) P(0) x(0) + \int_0^t (x^T(\tau) Q(\tau) x(\tau) + 2u^T(\tau) S(\tau) x(\tau)) d\tau \quad \text{P6-3}$$

gde su $Q(t)$, $R(t)$ i $S(t)$ takve da je matrica $\begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix}$ pozitivno semidefinitna.

Ovaj uslov je ispunjen ako je :

$$Q = L L^T; S = L W; R = W^T W$$

Takođe može se doći do zaključka

$$x(0) = 0 \Rightarrow \forall t, \int_0^t y^T(\tau) u(\tau) d\tau \geq 0$$

Da bi sistem bio striktno pozitivno realan SPR u svim navedenim zahtevima umesto semidefinitnosti se zahteva pozitivna definitnost, odnosno matrica funkcije prenosa treba da bude SPR i $L L^T; W^T W$ treba da budu pozitivno definitne.

Teorema pasivnosti

Za sistem opisan relacijama

$$\begin{aligned}e &= u - H y \\ y &= G e\end{aligned}\quad \text{P6-4}$$

Ako je G ulazno i izlazno striktno pasivan sistem i H pasivan sistem tada je posmatrani BIBO sistem stabilan.

Ukoliko su G i H linearni sistemi tada je dovoljno da G bude striktno pozitivna funkcija a H pozitivno realna funkcija.

Literatura

1. Costello, M.F. and Peterson, A.A., "Linear Theory of a Dual-Spin Projectile in Atmospheric Flight", *Army Research Laboratory, Aberdeen Proving Ground, MD 21005-5066*, ARL-CR-448, Feb. 2000
2. Tsui, R., "Resonance Capture in Unbalanced Dual-Spin Spacecraft", *Master Thesis, Faculty of the Graduate School OF Engineering of the Air Force Institute of Technology, Air University*, AFIT/GA/ENY/94M-3, Mar. 1994
3. Flatley, T.W., "Equilibrium States for a Class of Dual-Spin Spacecraft", *National Aeronautics and Space Administration, Washington D.C.*, NASA TR R-362, Mar. 1971
4. Blair Jr., A.B., "Remote Control Canard Missile with a Free-Rolling Tail Brake Torque System", *J. Spacecraft, AIAA 81-0146R*, Vol. 18, No. 6, pp. 550-555, Nov.-Dec. 1981
5. Simon Hsu-Sheng Fu and Chi-Cheng Cheng, "Direct adaptive feedback design for linear discrete-time uncertain systems", *Asian Journal of Control*, Vol. 6, No. 3, pp. 421-427, Sep. 2004
6. Rusnak, I. Weiss, H. and Barkana, I, "Improving the Performance of Existing Missile Autopilot Using Simple Adaptive Control", *Preprints of the 18th IFAC World Congress*, pp.6567-6572, Sep. 2011
7. Burchett, B., Peterson, A. and Costello, M., "Prediction of Swerving Motion of a Dual-Spin Projectile With Lateral Pulsejets in Atmospheric Flight", *Army Research Laboratory, Aberdeen Proving Ground, MD 21005-5066*, ARL-CR-570, Nov. 2005
8. Siouris, G.M., "Missile Guidance and Control Systems", *Springer*, ISBN 0-387-00726-1, 2004
9. Olsson, H., Aström, K.J., Canudas de Wit, C., Gäfvert, M. and Lischinsky, P., "Friction Model and Friction Compensation", *European Journal of Control*, Dec. 1998, No.4, pp.176-195.

10. Özkan, B., "Dynamic Modeling, Guidance, and Control of Homing Missiles", *Ph.D. Thesis, The Graduate School of Natural and Applied Sciences of Middle East Technical University*, Sep. 2005
11. Botez, R.M., Chelaru, V., Parvu, P. and Cheorghe C., "Calculus Model for a Rolling Guided Missile", *Journal of Vibration and Control, Sage*, No.7, pp. 863-889, 2001
12. Ćuk, D., Mandić, S.: "Sinteza autopilota propinjanja rakete sa izrazito nestacionarnim dinamičkim parametrima", *Naučnotehnički PREGLED*, vol.L, br.3, 2000
13. Titterton, D.H. and Weston, J.L., "Strapdown Inertial Navigation Technology – 2nd edition", *IEE Radar, Sonar, Navigation and Avionic Series 17*, ISPB 0-86341-358-7, 2004
14. Savage, P.G., "Strapdown Inertial Navigation Integration Algorithm Design Part 1: Attitude Algorithms", *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 21, No. 1, pp. 19-28, Jan.-Feb. 1998
15. Savage, P.G., "Strapdown Inertial Navigation Integration Algorithm Design Part 2: Velocity and Position Algorithms", *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 21, No. 2, pp. 208-221, Mar.-Apr. 1998
16. Salychev, O., "Inertial Systems in Navigation and Geophysics", *Bauman MSTU Press*, ISBN 5-7038-1346-8, MOSCOW 1998
17. Salychev, O., "Applied Inertial Navigation: Problems and Solutions", *Bauman MSTU Press*, ISBN 5-7038-2395-1, MOSCOW 2004
18. Park, S., Deyst, J. and How, J.P., "A New Nonlinear Guidance Logic for Trajectory Tracking", *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference*, Providence, RI, Aug. 2004
19. Katayanagi, R., "Pilot-Induced Oscillation Analysis with Actuator Rate Limiting and feedback Control Loop", *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference*, Providence, RI, Aug. 2004
20. Ćurčin, M.: "Sinteza algoritma vođenja za raketu sa nestacionarnim dinamičkim parametrima i slučajnim poremećajima u letu", *doktorska disertacija, Mašinski fakultet*, 2006

21. Ćuk, D., Mandić, S.: “Analiza mogućih zakona vođenja besplatformnih sistema samonavodenih raketa”, *Naučnotehnički PREGLED*, vol.XLIX, br.5, 1999
22. Ćuk, D., Mandić, S.: “Uticaj različitih metoda optimalnog vođenja na trajektorije besplatformnih samonavodenih raketa”, *Naučnotehnički PREGLED*, vol.XLIX, br.6, 1999
23. Ćuk, D., Mandić, S.: “Izbor algoritma vođenja kod samonavodenih raketa sa promenljivom brzinom leta”, *Naučnotehnički PREGLED*, vol.XL, br.8-9, 1990
24. Zhongshan Wu, “Simulation study and instability of adaptive control”, *Master Thesis, Graduate Faculty of the Louisiana State University and Agricultural and Mechanical Collage*, Dec. 2001
25. Tay, T.T., Mareels, I.M.Y. and Moore, J.B., “High performance control”, *Birkhäuser Boston*, ISPB 3-7643-4404-5, 1998
26. Hayakawa, T, Haddad, W.M. and Lonessa, A., “A Lyapunov-based adaptive control framework for discrete-time non-linear systems with exogenous disturbances”, *Int. J. Control*, Vol. 77, No.3, pp. 250-263, Feb.2004
27. Anderson, B.D.O., “Failures of Adaptive Control Theory and Their Resolution”, *Communications In Information and Systems*, Vol. 5, No. 1, pp. 1-20, 2005
28. Stepanyan, V and Krishnakumar, K, “ Indirect M-MRAC for Systems with Time Varying Parameters and Bounded Disturbances”, *Intelligent Control (ISIC), 2012 IEEE International Symposium*, pp. 1232-1237, Oct. 2012
29. Anderson, B.D.O. and Moore, J.B., “Optimal Control”, *Prentice-Hall International, Inc.*, ISBN 0-13-638651-2, 1989
30. Landau, I.D., Lozano, R., M'Saad, M., Karimi, A., “Adaptive Control Algorithms, Analysis and Applications”, *Springer*, ISBN 978-0-85729-663-4, 2011
31. Ioannou P. and J. Sun, “Robust Adaptive Control”, *Prentice Hall, Inc* , 1996
32. Freund, R.W., “On Padé-type model order reduction of J-Hermitian linear dynamical systems”, *Linear Algebra and its Applications*, Nov. 2008

33. Feldmann, P., "Model order reduction techniques for linear systems with large numbers of terminals", *Design, Automation and Test in Europe Conference and Exhibition, 2004. Proceedings*, Vol. 2, pp. 944-947
34. Boiffier, J.L., "The Dynamic of Flight The Equations", *John Wiley & Sons Ltd. England*, ISBN 0-471-94237-5, 1998

Biografija

Ivana Todić je rođena 05.01.1983. godine u Beogradu. Gimnaziju prirodno matematičkog usmerenja pohađala je najpre u I Beogradskoj gimnaziji u periodu 1997-1999, a završila u IX Beogradskoj gimnaziji 2001. Nakon završetka gimnazije upisuje Prirodno Matematički fakultet, smer programiranje. Posle završetka prve godine studija, 2002. godine upisuje Mašinski fakultet u Beogradu.

Godine 2006. diplomirala je ocenom 10 na smeru Vojno mašinstvo, sa temom diplomskog rada „Sinteza sistema samonavođenja za protivoklopnu raketu”. Prosečna ocena u toku studiranja je 9.51. Tokom studija osvojila je jedno prvo mesto i dva druga mesta na takmičenju iz programiranja na Mašinijadama (2003, 2004 i 2005). Godine 2006. dobija stipendiju Eurobank EFG i stipendiju Ministarstva prosvete i sporta, Fond za mlade talente Republike Srbije. Godine 2007. dobija nagradu „Prof. dr Vojislav K. Stojanović” za rekordno završene studije u roku od 4 (od ukupno 5 godina) i prosečnu ocenu na svim položenim ispitima 9.51.

Doktorske studije, na smeru Sistemi naoružanja, upisala je 2007. godine. Kao student doktorskih studija – saradnik u nastavi učestvovala je u održavanju nastave na Osnovnim akademskim studijama na predmetima: Uvod u sisteme naoružanja, Mehanika leta projektila, Osnovi konstruisanja sistema naoružanja; i na Diplomskim akademskim studijama na predmetima: Dinamika leta projektila i Aerodinamika projektila. Takođe drži nastavu za strane studente i to sledeće kurseve: TVC Systems – Basis of Actuator Technique – Part II: Electromechanical actuators, Fundamentals of Actuating Systems, Design of Actuating Systems, Guidance, Navigation and Control.

Od marta 2007. godine do 2010. godine zaposlena je u Inovacionom centru Mašinskog fakulteta iz Beograda, kao stručni saradnik. Tokom tog perioda učestvovala je na sledećim projektima:

2007-2008 TD7041 „Studija izvodljivosti restrukturiranja odabranih kapaciteta vojne industrije”

2008-2009 „Razvoj ekoloških i ekonomski prihvatljivih sistema bez integracije čvrstih materijala u privredi”

TP-35044 „Kosmički transportni sistemi niske cene”

035013 „Razvoj i projektovanje hardvera i softvera za komunikaciju između personalnog računara i elektronske upravljačke jedinice na vozilima”

U periodu od 2007- 2009 radi kao honorarni saradnik u privatnoj firmi Nimico, d.o.o. na razvoju elektromehaničkog aktuatorskog sistema i razvoju inercijalno navigacionog sistema. Od 2009. godine radi kao honorarni saradnik za firmu EDePro d.o.o. na razvoju autopilota i sistema vođenja za nekoliko različitih raketnih sistema.

Od 2010, godine zaposlena je kao asistent na katedri za Sisteme naoružanja.

Svoj naučni doprinos do sada je verifikovala kroz naučne radove i tehnička rešenja:

Kategorija M23:

1. Khan, M. A., **Todić, I.**, Miloš, M., Stefanović, Z., and Blagojević, Đ., “Control of Electro-Mechanical Actuator for Aerospace Applications”, *Strojarstvo*, vol. 52, No. 3, pp. 303-313, 2010 (IF=0.222)(ISSN: 0562-1887)
2. Stefanović, Z., Miloš, M., and **Todić, I.**, “Investigation of the Pressure Distribution in 2D Rocket Nozzle with Mechanical System for Thrust Vector Control (TVC)”, *Strojarstvo*, vol. 53, No. 4, pp. 287-292, 2011(IF=0.222)(ISSN: 0562-1887)
3. **Todić, I.**, Miloš, M., and Pavišić, M., “Velocity And Position Control of Electromechanical Actuator For Aerospace Applications“, *Tehnički Vjesnik* , vol.20, No. 5, pp. 853-860, 2013 (IF=0.601)(ISSN: 1330-3651)

Kategorija M33:

1. Jojić, B., Blagojević, Đ., Memon, G., Miloš, M. and **Todić, I.**, „Tactical Missile System LORANA“, Proceedings of 4th International Scientific Conference *OTEH 2011*, pp. 224-227, Belgrade, 2011.(ISBN 978-86-81123-50-8)

Kategorija M82:

1. Đorđe Blagojević, Marko Miloš, Milan Kovačević, Dragan Lazić, **Ivana Todić**, “*GNC-3 Guidance, Navigation and Control System*”, 2010, Rešenje broj 411/2 od 30.06.2010. (**M82**)
2. Branislav Jojić, Đorđe Blagojević, Goran Memon, Marko Miloš, **Ivana Todić**, Nikola Davidović, Predrag Miloš, „*Tehničko rešenje sistema vođenja i upravljanja projektila LORANA*“, 2010, Rešenje broj 412/2 od 30.06.2010. (**M82**)
3. Marko Miloš, **Ivana Todić**, Đorđe Blagojević, “*TECHNICAL SOLUTION Of Electro-mechanical Actuator (EMA) For Aerospace Applications*”, 2010, Rešenje broj 511/2 od 30.06.2010. (**M82**)
4. Marko Miloš, **Ivana Todić**, Đorđe Blagojević, “*TECHNICAL SOLUTION Of Test Bench for Electro-mechanical Actuator (EMA)*”, 2010, Rešenje broj 512/2 od 30.06.2010. (**M82**)

Izjava o autorstvu

Potpisani-a Ivana S. Todić
broj indeksa D11-06

Izjavljujem

da je doktorska disertacija pod naslovom

Optimalno vođenje u uslovima velikih poremećaja i ograničenih performansi leta rakete

-
- rezultat sopstvenog istraživačkog rada,
 - da predložena disertacija u celini ni u delovima nije bila predložena za dobijanje bilo koje diplome prema studijskim programima drugih visokoškolskih ustanova,
 - da su rezultati korektno navedeni i
 - da nisam kršio/la autorska prava i koristio intelektualnu svojinu drugih lica.

Potpis doktoranta

U Beogradu, 26.11.2013

Todić Iva

Izjava o istovetnosti štampane i elektronske verzije doktorskog rada

Ime i prezime autora Ivana S. Todić

Broj indeksa D11/06

Studijski program Doktorske studije

Naslov rada Optimalno vođenje u uslovima velikih poremećaja i ograničenih performansi leta rakete

Mentor dr. Slobodan Jaramaz

Potpisani/a Ivana S. Todić

Izjavljujem da je štampana verzija mog doktorskog rada istovetna elektronskoj verziji koju sam predao/la za objavljivanje na portalu **Digitalnog repozitorijuma Univerziteta u Beogradu**.

Dozvoljavam da se objave moji lični podaci vezani za dobijanje akademskog zvanja doktora nauka, kao što su ime i prezime, godina i mesto rođenja i datum odbrane rada.

Ovi lični podaci mogu se objaviti na mrežnim stranicama digitalne biblioteke, u elektronskom katalogu i u publikacijama Univerziteta u Beogradu.

Potpis doktoranta

U Beogradu, 26.11.2013

Ivana S. Todić

Izjava o korišćenju

Ovlašćujem Univerzitetsku biblioteku „Svetozar Marković” da u Digitalni repozitorijum Univerziteta u Beogradu unese moju doktorsku disertaciju pod naslovom:

Optimalno vođenje u uslovima velikih poremećaja i ograničenih

performansi leta rakete

koja je moje autorsko delo.

Disertaciju sa svim prilogima predao/la sam u elektronskom formatu pogodnom za trajno arhiviranje.

Moju doktorsku disertaciju pohranjenu u Digitalni repozitorijum Univerziteta u Beogradu mogu da koriste svi koji poštuju odredbe sadržane u odabranom tipu licence Kreativne zajednice (Creative Commons) za koju sam se odlučio/la.

1. Autorstvo
2. Autorstvo - nekomercijalno
3. Autorstvo – nekomercijalno – bez prerade
4. Autorstvo – nekomercijalno – deliti pod istim uslovima
5. Autorstvo – bez prerade
6. Autorstvo – deliti pod istim uslovima

(Molimo da zaokružite samo jednu od šest ponuđenih licenci, kratak opis licenci dat je na poledini lista).

Potpis doktoranta

U Beogradu, 26. 11. 2013



1. Autorstvo - Dozvoljavate umnožavanje, distribuciju i javno saopštavanje dela, i prerade, ako se navede ime autora na način određen od strane autora ili davaoca licence, čak i u komercijalne svrhe. Ovo je najslobodnija od svih licenci.
2. Autorstvo – nekomercijalno. Dozvoljavate umnožavanje, distribuciju i javno saopštavanje dela, i prerade, ako se navede ime autora na način određen od strane autora ili davaoca licence. Ova licenca ne dozvoljava komercijalnu upotrebu dela.
3. Autorstvo - nekomercijalno – bez prerade. Dozvoljavate umnožavanje, distribuciju i javno saopštavanje dela, bez promena, preoblikovanja ili upotrebe dela u svom delu, ako se navede ime autora na način određen od strane autora ili davaoca licence. Ova licenca ne dozvoljava komercijalnu upotrebu dela. U odnosu na sve ostale licence, ovom licencom se ograničava najveći obim prava korišćenja dela.
4. Autorstvo - nekomercijalno – deliti pod istim uslovima. Dozvoljavate umnožavanje, distribuciju i javno saopštavanje dela, i prerade, ako se navede ime autora na način određen od strane autora ili davaoca licence i ako se prerada distribuira pod istom ili sličnom licencom. Ova licenca ne dozvoljava komercijalnu upotrebu dela i prerada.
5. Autorstvo – bez prerade. Dozvoljavate umnožavanje, distribuciju i javno saopštavanje dela, bez promena, preoblikovanja ili upotrebe dela u svom delu, ako se navede ime autora na način određen od strane autora ili davaoca licence. Ova licenca dozvoljava komercijalnu upotrebu dela.
6. Autorstvo - deliti pod istim uslovima. Dozvoljavate umnožavanje, distribuciju i javno saopštavanje dela, i prerade, ako se navede ime autora na način određen od strane autora ili davaoca licence i ako se prerada distribuira pod istom ili sličnom licencom. Ova licenca dozvoljava komercijalnu upotrebu dela i prerada. Slična je softverskim licencama, odnosno licencama otvorenog koda.