УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Биљана М. Радичић

ПРИЛОГ ТЕОРИЈИ K-ЦИРКУЛАРНИХ МАТРИЦА

ДОКТОРСКА ДИСЕРТАЦИЈА

БЕОГРАД, 2016.

UNIVERSITY OF BELGRADE
FACULTY OF MATHEMATICS

Biljana M. Radičić

A CONTRIBUTION TO THE THEORY OF K-CIRCULANT MATRICES

DOCTORAL DISSERTATION

BELGRADE, 2016.

МЕНТОР:

др Зоран Петровић,

ванредни професор, Универзитет у Београду, Математички факултет

ЧЛАНОВИ КОМИСИЈЕ:

др Александар Липковски,

редовни професор, Универзитет у Београду, Математички факултет

др Зоран Петровић,

ванредни професор, Универзитет у Београду, Математички факултет

др Бранко Малешевић,

ванредни професор, Универзитет у Београду, Електротехнички факултет

др Горан Ђанковић,

доцент, Универзитет у Београду, Математички факултет

Датум одбране:

____

Захвалност

Захваљујем се ментору проф. др Зорану Петровићу на посвећеном времену и веома корисним сугестијама које су допринеле повећању квалитета дисертације. Желим такође да изразим захвалност и осталим члановима комисије.

Посебно се захваљујем породици на подршци коју су ми пружили током рада на дисертацији.

ПРИЛОГ ТЕОРИЈИ K-ЦИРКУЛАРНИХ МАТРИЦА

РЕЗИМЕ

Предмет изучавања ове дисертације су k-циркуларне матрице, при чему је k произвољан комплексан број. Представљен је, за произвољно $k \neq 0$, метод за одређивање инверза инвертибилне k-циркуларне матрице и коришћењем тог метода, одређен инверз инвертибилне k-циркуларне матрице са геометријским низом (са аритметичким низом), за произвољно $k \neq 0$ (за $k = 1$). Коришћењем факторизације пуног ранга матрице одређен је Мур-Пенроузов инверз сингуларне k-циркуларне матрице са геометријским низом (са аритметичким низом), за произвољно k (за k=1). Одређене су и, за произвољно k, сопствене вредности, детерминанта и Еуклидска норма k-циркуларне матрице са геометријским низом тј. са аритметичким низом, као и границе за спектралну норму k-циркуларне матрице са геометријским низом. Анализиране су и k-циркуларне матрице са првом врстом $(F_1, F_2, \ldots, F_n)$ тј. $(L_1, L_2, \ldots, L_n)$, где је F_n тј. L_n n-ти члан Фибоначијевог тј. Лукасовог низа, и за такве матрице одређене сопствене вредности и Еуклидска норма. Границе за спектралне норме Адамарових инверза претходно наведених матрица, за произвољно $k \neq 0$, су такође добијене. На крају, одређене су сопствене вредности, детерминанта и границе за спектралну норму k-циркуларне матрице са биномним коефицијентима, као и границе за спектралну норму Адамаровог инверза такве матрице, за произвољно $k \neq 0$.

Кључне речи: k-циркуларна матрица, сопствене вредности матрице, инверз матрице, генералисани инверзи матрице, Адамаров инверз матрице, норме матрице, геометријски и аритметички низ, Фибоначијеви и Лукасови бројеви, биномни коефицијенти

Научна област: Математика

Ужа научна област: Алгебра

УДК број: 512.643 (043.3)

АМС класификација: 15B05, 15A09, 15A18, 15A60, 11B25, 11B39, 11B65

A CONTRIBUTION TO THE THEORY OF K-CIRCULANT MATRICES

ABSTRACT

In this dissertation, k-circulant matrices are considered, where k is an arbitrary complex number. The method for obtaining the inverse of a nonsingular k-circulant matrix, for an arbitrary $k \neq 0$, is presented, and using that method, the inverse of a nonsingular k-circulant matrix with geometric sequence (with arithmetic sequence) is obtained, for an arbitrary $k \neq 0$ (for $k = 1$). Using the full rank factorization of a matrix, the Moore-Penrose inverse of a singular k-circulant matrix with geometric sequence (with arithmetic sequence) is determined, for an arbitrary k (for $k = 1$). For an arbitrary k, the eigenvalues, the determinant and the Euclidean norm of a k-circulant matrix with geometric sequence i.e. with arithmetic sequence are derived, and bounds for the spectral norm of a k-circulant matrix with geometric sequence are determined. Also, k-circulant matrices with the first row $(F_1, F_2, \ldots, F_n)$ i.e. $(L_1, L_2, \ldots, L_n)$, where F_n i.e. L_n is the n^{th} Fibonacci number i.e. Lucas number, are investigated and the eigenvalues and the Euclidean norms of such matrices are obtained. Bounds for the spectral norms of the Hadamard inverses of the above matrices, for an arbitrary $k \neq 0$, are also determined. At the end of this dissertation, the eigenvalues, the determinant and bounds for the spectral norm of a k-circulant matrix with binomial coefficients are derived, and bounds for the spectral norm of the Hadamard inverse of such matrix, for an arbitrary $k \neq 0$, are determined.

Keywords: k-circulant matrix, eigenvalues of a matrix, inverse of a matrix, generalized inverses of a matrix, Hadamard inverse of a matrix, norms of a matrix, geometric and arithmetic sequence, Fibonacci and Lucas numbers, binomial coefficients

Academic Expertise: Mathematics

Field of Academic Expertise: Algebra

UDC number: 512.643 (043.3)

AMS Subject Classification: 15B05, 15A09, 15A18, 15A60, 11B25, 11B39, 11B65

Садржај

ПРЕДГОВОР

У овој дисертацији анализирају се матрице облика:

$$\begin{bmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \dots & c_{n-2} & c_{n-1} \\ kc_{n-1} & c_0 & c_1 & \dots & c_{n-3} & c_{n-2} \\ kc_{n-2} & kc_{n-1} & c_0 & \dots & c_{n-4} & c_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ kc_2 & kc_3 & kc_4 & \dots & c_0 & c_1 \\ kc_1 & kc_2 & kc_3 & \dots & kc_{n-1} & c_0 \end{bmatrix},$$

где су k и c_i, $i = \overline{0, n-1}$, произвољни комплексни бројеви, које називамо *k-циркуларне матрице.* За $k = 1$, $k = -1$ и $k = 0$ користимо, редом, следеће називе циркуларне, косоциркуларне и полуциркуларне матрице. Ове матрице представљају специјалан случај Теплицових матрица и као такве припадају једној веома важној класи матрица коју називамо *структурне матрице* ([8], [12], [37] и [39]). Овој класи припадају и Ханкелове матрице, Вандермондове матрице, Кошијеве матрице, итд. Као најважнију карактеристику структурних матрица издвајамо чињеницу да је њихова структура одређена малим бројем параметара. Тако су, на пример, Вандермондове матрице реда n одређене са n параметара, Теплицове и Ханкелове матрице реда n одређене са $2n-1$ параметара, Кошијеве матрице реда n одређене са $2n$ параметара. Структура k-циркуларних матрица реда n одређена је, као што се може видети из њиховог облика, са $n+1$ параметара. Помоћу ових матрица могу се решити различити проблеми који се јављају у науци и техници.

Када је у питању организација дисертације треба истаћи да је дисертација подељена на *5* делова.

У *првом* делу наводимо појмове и ознаке, из теорије матрица, које користимо у дисертацији. Наиме, у питању су следећи појмови: транспонована и конјуговано-транспонована матрица, симетрична и персиметрична матрица, сопствене вредности, детерминанта и ранг матрице, инверз матрице, Мур-Пенроузов инверз матрице, групни инверз матрице, Адамаров инверз матрице, норме матрице (Еуклидска и спектрална норма, 1-норма и ∞-норма), итд. У вези са Мур-Пенроузовим инверзом матрице треба истаћи да је наведена, уз доказ, формула за његово рачунање (теорема 1.2) коју смо користили при одређивању Мур-Пенроузовог инверза k-циркуларних матрица са геометријским и аритметичким низом а које презентујемо у трећем делу ове дисертације.

У *другом* делу, имајући у виду да k-циркуларне матрице представљају специјалан случај Теплицових матрица, прво наводимо неке најважније особине Теплицових матрица и неколико тврђења (теорема 2.1-теорема 2.4) којима су дати потребни и довољни услови да би Теплицова матрица била инвертибилна, и показано како се, у случају инвертибилности Теплицове матрице, одређује њен инверз. Инверз Теплицове матрице не мора бити, као што је показано примером 2.1, Теплицова матрица. Међутим, теоремом 2.5, чији је и доказ наведен, дат је потребан и довољан услов да би инверз Теплицове матрице био такође Теплицова матрица. Као последица теореме 2.5 дато је, уз доказ, тврђење које показује, да уколико је инверз Теплицове матрице такође Теплицова матрица, реч је, у ствари, о k-циркуларној матрици. Лемом 2.4 показано је како се може одредити, ако постоји, инверз k-циркуларне матрице, где је k ненула комплексан број, док је теоремом 2.6 дата формула за одређивање Мур-Пенроузовог инверза произвољне сингуларне k-циркуларне матрице који, као што је показано примером 2.4, не мора бити k-циркуларна матрица. Потребан и довољан услов да би Мур-Пенроузов инверз сингуларне k-циркуларне матрице био такође k-циркуларна матрица дат је лемом 2.9. Напоменимо да су у овом делу такође наведене и формуле за одређивање сопствених вредности, детерминанте и позитивног степена k-циркуларне матрице.

Трећи део дисертације је подељен на два дела и посвећен је презентовању оригиналних резултата који се односе на k-циркуларне матрице са геометријским и аритметичким низом и који представљају уопштења (и побољшања) неких резултата до којих је, анализирајући циркуларне матрице са геометријским низом, дошао A.C.F. Bueno ([6]) тј. до којих су, анализирајући циркуларне матрице са аритметичким низом, дошли M. Bahsi и S. Solak ([1]).

Оригиналне резултате који се односе на k-циркуларне матрице са Фибоначијевим и Лукасовим низовима бројева презентујемо у *четвртом* делу дисертације. Реч је о сопственим вредностима, Еуклидској норми и границама за спектралну норму Адамаровог инверза поменутих матрица. Напоменимо да су у овом делу наведени и резултати до којих су анализирајући циркуларне матрице са Лукасовим бројевима дошли H. Civciv и R. Turkmen ([10]), као и резултати до којих су дошли S.Q. Shen, J.M. Cen и Y. Hao ([56]), односно Y. Gao, Z. Jiang и Y. Gong ([19]), анализирајући циркуларне, односно косоциркуларне, матрице са Фибоначијевим и Лукасовим бројевима.

Анализом циркуларних матрица са биномним коефицијентима бавио се J.F.T. Rabago ([44], [45]). У *петом* делу дисертације презентујемо оригиналне резултате који се односе на k-циркуларне матрице са биномним коефицијентима и којима се, између осталог, уопштавају неки резултати до којих је дошао Rabago.

Оригинални резултати презентовани у овој дисертацији добијени су у радовима [46]-[52].

1. Увод

У овом делу уводимо ознаке и појмове које користимо током целог рада.

Скуп свих природних, целих, реалних и комплексних бројева означавамо, редом, са $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$. Нека су $m, n \in \mathbb{N}$ и $\mathbb{F}$ произвољно поље. Са $\mathbb{F}^{m\times n}$ обележавамо скуп свих матрица димензија $m \times n$ са елементима из поља $\mathbb{F}$, при чему треба напоменути да ћемо се углавном (осим у општим тврђењима) бавити комплексним матрицама тј. $\mathbb{F} = \mathbb{C}$.

Комплексну матрицу A, са m врста и n колона, уместо

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \cdots & a_{3,n-1} & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m-1,1} & a_{m-1,2} & a_{m-1,3} & \cdots & a_{m-1,n-1} & a_{m-1,n} \\ a_{m,1} & a_{m,2} & a_{m,3} & \cdots & a_{m,n-1} & a_{m,n} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{m\times n}, \qquad (1)$$

краће обележавамо са $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{C}^{m\times n}$, односно $A_{m\times n}$ уколико желимо само да истакнемо димензије матрице A. Да бисмо обележили i-ту врсту, $i = \overline{1,m}$, и j-ту колону, $j = \overline{1,n}$, матрице $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{C}^{m\times n}$ користимо, редом, ознаке $A_{i\rightarrow}$ и $A_{\downarrow j}$.

Дакле,

$$A_{i\rightarrow} = (a_{i,1}, a_{i,2}, \ldots, a_{i,n}),\ i = 1, \ldots, m,$$

и

$$A_{\downarrow j} = \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ a_{2,j} \\ \vdots \\ a_{m,j} \end{pmatrix},\ j = 1, \ldots, n.$$

Матрицу $A_{m\times n}$ називамо вектором ако је једна од димензија једнака 1, и то вектор колоном ако је $n = 1$ и вектор врстом ако је $m = 1$. Ако је $m = n$ тј. број врста и број колона матрице исти, тада за матрицу кажемо да је квадратна (реда n). Дијагоналну матрицу (реда n) обележавамо са $\mathrm{diag}[a_{1,1}, a_{2,2}, a_{3,3}, \ldots, a_{n,n}]$. Јединичну матрицу реда n и нула матрицу димензије $m \times n$ обележавамо, редом, са I_n и $O_{m\times n}$. Ако су димензије матрица очигледне тада за јединичну и нула матрицу користимо, редом, ознаке I и O.

За матрицу $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{C}^{m\times n}$, транспонована и конјуговано-транспонована матрица су матрице које означавамо, редом, са A^T и A^* и за које важи $A^T = [a_{j,i}] \in \mathbb{C}^{n\times m}$ и $A^* = [\overline{a_{j,i}}] \in \mathbb{C}^{n\times m}$, где је $\overline{a_{i,j}}$ конјугат од $a_{i,j}$.

Дакле,

$$(A^T)_{j\rightarrow} = A_{\downarrow j},\ j = \overline{1,n} \quad \text{и} \quad (A^T)_{\downarrow i} = A_{i\rightarrow},\ i = \overline{1,m},$$

и

$$(A^*)_{j\rightarrow} = \overline{A_{\downarrow j}},\ j = \overline{1,n} \quad \text{и} \quad (A^*)_{\downarrow i} = \overline{A_{i\rightarrow}},\ i = \overline{1,m}.$$

Наравно, ако је у питању реална матрица A, тада је $A^T = A^*$. Матрицу A називамо симетричном (антисиметричном) матрицом ако је $A^T = A$

$(A^T = -A)$. Једина матрица која је и симетрична и антисиметрична је O. Дакле, за матрицу $A = [a_{i,j}]$ реда n кажемо да је симетрична ако су њени елементи симетрични у односу на главну дијагоналу. Међутим, ако су елементи матрице A симетрични у односу на анти-дијагоналу $(a_{1,n}, a_{2,n-1}, a_{3,n-2}, \ldots, a_{n,1})$, тада кажемо да је матрица A персиметрична. При томе треба истаћи да је матрица A персиметрична ако и само ако је матрица JA, односно матрица AJ, симетрична, где је J матрица код које су елементи дуж анти-дијагонале једнаки 1, док су сви остали елементи једнаки 0.

За матрицу A и скалар α важи:

$$(A^T)^T = A \quad \text{и} \quad (\alpha A)^T = \alpha A^T. \tag{2}$$

Такође, за матрице A и B, под условом да њихов збир односно производ постоји, важи:

$$(A + B)^T = A^T + B^T \quad \text{и} \quad (AB)^T = B^T A^T. \tag{3}$$

Наведене једнакости важе и када се транспоноване матрице замене конјуговано-транспонованим матрицама.

Сопствене вредности дате матрице $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ обележавамо са $\lambda_j(A)$, $j = \overline{0, n-1}$, док за њену детерминанту користимо ознаку $|A|$ и при томе важи: $|A| = \prod_{j=0}^{n-1} \lambda_j(A)$.

За матрице $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ важи:

$$|AB| = |A|\,|B|\,. \tag{4}$$

Такође, за матрицу $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ и скалар α важи:

$$|\alpha A| = \alpha^n |A|\,. \tag{5}$$

Ранг матрице $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, највећи број њених линеарно независних колона, односно врста, обележавамо са $r(A)$. Дакле, $0 \leq r(A) \leq \min\{m,n\}$, при томе је $r(A)=0$ ако и само ако је $A=O$. Наравно, када је реч о рангу матрице треба истаћи да се ранг матрице не мења применом елементарних трансформација. За матрицу $B \in \mathbb{C}^{m\times n}$ кажемо да је еквивалентна матрици $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, и пишемо $A \sim B$, ако смо матрицу B добили применом неке од елементарних трансформација на матрици A. С обзиром да се ранг матрице не мења применом елементарних трансформација, еквивалентне матрице имају исти ранг. Скуп свих комплексних матрица, димензија $m \times n$, ранга r обележавамо са $\mathbb{C}_r^{m\times n}$. Слично, $\mathbb{R}_r^{m\times n}$ обележава скуп свих реалних матрица, димензија $m \times n$, ранга r. Доказ следећег тврђење се може пронаћи у [3].

Лема 1.1. (Лема 4. [3], стр. 20) За матрицу $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ важи:

$$r(AA^*) = r(A) = r(A^*A)\,. \blacktriangledown \tag{6}$$

За матрицу $A_{m\times n}$ кажемо да је „пуног ранга врста” („пуног ранга колона”) ако је $r(A)=m$ ($r(A)=n$). У вези са тиме важи и следеће тврђење чији се доказ може пронаћи у [3] (видети такође [41] и [43]).

Лема 1.2. (Лема 5. [3], стр. 22) Нека је $A \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$, $r>0$. Тада постоје матрице $M \in \mathbb{C}_r^{m\times r}$ и $N \in \mathbb{C}_r^{r\times n}$, тако да је:

$$A = MN. \blacktriangledown \tag{7}$$

Факторизацију матрице A која је представљена у претходној леми називамо *факторизација пуног ранга матрице* A и може се добити тако што:

1) за колоне матрице M изаберемо било који максималан скуп линеарно независних колона матрице A, и тада је матрица N јединствено одређена са (7);

или
2) за врсте матрице N изаберемо било који максималан скуп линеарно независних врста матрице A, и тада је матрица M јединствено одређена са (7);

За добијање факторизације пуног ранга дате матрице A може се користити и њена сведена форма у односу на врсте.

Наиме, за матрицу $E \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$ кажемо да је у *сведеној форми у односу на врсте* ако има облик:

$$E = \left[\frac{N_{r\times n}}{O_{(m-r)\times n}} \right], \tag{8}$$

при чему за $N = [n_{i,j}] \in \mathbb{C}^{r\times n}$ важи:
1) $n_{i,j} = 0$, за $i > j$.
2) Први ненула елемент у свакој врсти матрице N је 1.
3) Ако је $n_{i,j} = 1$, први ненула елемент i-те врсте матрице N, тада је j-та колона матрице N јединични вектор e_i са јединицом на i-тој позицији.

Нека је E_A сведена форма матрице $A \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$ у односу на врсте тј. матрица облика (8) и нека се јединични вектори појављују у $i_1, i_2, \ldots, i_r$ колонама матрице E_A, тада одговарајуће колоне матрице A чине базу за $R(A)$, где је

$$R(A) = \left\{ Y \in \mathbb{C}^{m\times 1} \mid \text{постоји бар један } X \in \mathbb{C}^{n\times 1} \text{ тако да је } AX = Y \right\}, \tag{9}$$

и називамо их *истакнуте колоне* матрице A. Преостале колоне матрице A називамо *неистакнуте колоне* матрице A. Ако је матрица M формирана од истакнутих колона матрице A (у истом редоследу као што су у матрици A), тада је $A = MN$, где је $N = [n_{i,j}] \in \mathbb{C}^{r\times n}$ наведена подматрица матрице E_A ([7], стр. 15).

Инверз матрице $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$, ако постоји, је такође квадратна матрица реда n коју обележавамо са A^{-1} и за коју важи: $A^{-1}A = AA^{-1} = I$. Напоменимо да инверз матрице $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ постоји (и јединствен је) ако и само ако је $r(A) = n$ (тј. $|A| \neq 0$) и тада кажемо да је A регуларна тј. инвертибилна матрица. У супротном, за матрицу A кажемо да је сингуларна.

Да бисмо упоредили особине које важе за инверз квадратне матрице са особинама које важе за Мур-Пенроузов инверз (не обавезно квадратне) матрице и који ће бити дефинисан нешто касније у тексту, подсетимо да за инверз квадратне матрице важи следеће тврђење.

Теорема 1.1. За инвертибилне матрице A, B и $\alpha\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ важи:

а) $(\alpha A)^{-1}=\frac{1}{\alpha}A^{-1}$,

б) $(A^{-1})^{-1}=A$,

в) A^T је такође инвертибилна матрица и при томе је: $(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$,

г) A^* је такође инвертибилна матрица и при томе је: $(A^*)^{-1}=(A^{-1})^*$,

д) AB и BA су такође инвертибилне матрице и при томе је: $(AB)^{-1}= B^{-1}A^{-1}$. ♦

Нека је $A\in\mathbb{C}^{m\times n}$. *Мур-Пенроузов инверз* матрице A је матрица $X\in\mathbb{C}^{n\times m}$ која испуњава следеће једначине:

$$AXA = A, \tag{10}$$

$$XAX = X, \tag{11}$$

$$(AX)^* = AX, \tag{12}$$

$$(XA)^* = XA. \tag{13}$$

Мур-Пенроузов инверз матрице A обележавамо са $A^\dagger$. Јединствен је и увек постоји ([40]). Овај инверз је 1920. године дефинисао *E.H. Moore*

([35], видети и дефиницију дату у [36]) и независно од њега 1955. године, претходно наведеним системом матричних једначина, *R. Penrose* ([40]). Њихове дефиниције су еквивалентне (теорема 1.1.1 [7]). Отуда и потиче његов назив. Ако је матрица A инвертибилна, тада је $A^{\dagger} = A^{-1}$.

Факторизација пуног ранга матрице омогућава израчунавање њеног Мур-Пенроузовог инверза. *C.C. MacDuffee* је, очигледно први, 1959. године, указао да се помоћу факторизације пуног ранга матрице може израчунати њен Мур-Пенроузов инверз што су *A. Ben-Israel* и *T.N.E. Greville* презентовали у књизи [3]. Ово тврђење наводимо заједно са доказом јер смо користећи управо то тврђење одредили Мур-Пенроузов инверз за k-циркуларне матрице са геометријским и аритметичким низом о чему ће бити речи у трећем делу ове дисертације.

Теорема 1.2. (Теорема 5. [3], стр. 23) (MacDuffee) Ако матрица $A \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$, $r>0$, има факторизацију пуног ранга (7), тада је

$$A^{\dagger} = N^*(M^*MNN^*)^{-1}M^* \,. \tag{14}$$

Доказ. Уочимо да $M^*M, NN^* \in \mathbb{C}^{r\times r}$. Пошто је,

$$r(M^*M) \underbrace{=}_{\text{лема 1.1}} r(M) = r \qquad \text{и} \qquad r(NN^*) \underbrace{=}_{\text{лема 1.1}} r(N) = r,$$

M^*M и NN^* су инвертибилне матрице. Према томе, матрица M^*MNN^* је, као производ инвертибилних матрица, инвертибилна. Нека је $X = N^*(M^*MNN^*)^{-1}M^*$. Покажимо да X задовољава једначине (10)$-$(13).

$$\begin{aligned} AXA &= MNN^*(M^*MNN^*)^{-1}M^*MN \\ &= M\,\underbrace{NN^*(NN^*)^{-1}}_{(=I)}\,\underbrace{(M^*M)^{-1}M^*M}_{(=I)}\,N \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= MN \\
&= A.
\end{aligned}
$$

Дакле, X задовољава једначину (10).

$$
\begin{aligned}
XAX &= N^*(M^*MNN^*)^{-1}M^*MNN^*(M^*MNN^*)^{-1}M^* \\
&= N^*(NN^*)^{-1}\underbrace{(M^*M)^{-1}M^*M}_{(=I)}\underbrace{NN^*(NN^*)^{-1}}_{(=I)}(M^*M)^{-1}M^* \\
&= N^*(NN^*)^{-1}(M^*M)^{-1}M^* \\
&= N^*(M^*MNN^*)^{-1}M^* \\
&= X.
\end{aligned}
$$

Дакле, X задовољава једначину (11). С обзиром да је

$$
\begin{aligned}
AX &= MNN^*(M^*MNN^*)^{-1}M^* \\
&= M\underbrace{NN^*(NN^*)^{-1}}_{(=I)}(M^*M)^{-1}M^* \\
&= M(M^*M)^{-1}M^*
\end{aligned}
$$

и

$$
\begin{aligned}
(M(M^*M)^{-1}M^*)^* &= (M^*)^*((M^*M)^{-1})^*M^* \\
&= M((M^*M)^*)^{-1}M^* \\
&= M(M^*(M^*)^*)^{-1}M^* \\
&= M(M^*M)^{-1}M^*,
\end{aligned}
$$

закључујемо да X задовољава једначину (12). С обзиром да је

$$
\begin{aligned}
XA &= N^*(M^*MNN^*)^{-1}M^*MN \\
&= N^*(NN^*)^{-1}\underbrace{(M^*M)^{-1}M^*M}_{(=I)}N \\
&= N^*(NN^*)^{-1}N
\end{aligned}
$$

и

$$
\begin{aligned}
(N^*(NN^*)^{-1}N)^* &= N^*((NN^*)^{-1})^*(N^*)^* \\
&= N^*((NN^*)^*)^{-1}N \\
&= N^*((N^*)^*N^*)^{-1}N \\
&= N^*(NN^*)^{-1}N,
\end{aligned}
$$

закључујемо да X задовољава једначину (13). Имајући у виду јединственост Мур-Пенроузовог инверза, следи да је $A^\dagger = N^*(M^*MNN^*)^{-1}M^*$ што је и требало доказати. ♦

Илустрација ове теореме дата је следећим примером.

Пример 1.1. Нека је

$$
A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & -4 \\ 1 & 4 & 4 & -6 \\ -2 & -3 & 2 & 2 \end{bmatrix}.
$$

Из

$$
A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & -4 \\ 1 & 4 & 4 & -6 \\ -2 & -3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & 6 & -6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

видимо да је $r(A) = 2$ и да су прва и друга колона матрице A њене истакнуте колоне. Дакле, матрица A има факторизацију пуног ранга (7), при чему су M и N следеће матрице:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

На основу (14) добијамо да је

$$A^{\dagger} = \frac{1}{105} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -11 \\ 3 & 1 & -12 \\ 2 & 10 & 20 \\ -4 & -6 & 2 \end{bmatrix}. \Diamond$$

Теорема 1.3. За произвољну матрицу A и $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ важи:

а) $(\alpha A)^{\dagger} = \frac{1}{\alpha} A^{\dagger}$,

б) $(A^{\dagger})^{\dagger} = A$,

в) $(A^T)^{\dagger} = (A^{\dagger})^T$,

г) $(A^*)^{\dagger} = (A^{\dagger})^*$,

д) $(A^*A)^{\dagger} A^* = A^*(AA^*)^{\dagger} = A$. ♦

Пример који следи показује да, за дате матрице A и B, једнакост $(AB)^{\dagger} = B^{\dagger} A^{\dagger}$ не мора увек да важи. Наиме, једнакост $(AB)^{\dagger} = B^{\dagger} A^{\dagger}$ је испуњена само у специјалним случајевима (видети [24]).

Пример 1.2. Нека су матрице A и B дате на следећи начин:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Тада је $AB = 2$ тј. $(AB)^{\dagger} = \frac{1}{2}$, и

$$A^{\dagger} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ и } B^{\dagger} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{тј.} \quad B^{\dagger}A^{\dagger} = \frac{1}{4}\,. \quad \diamondsuit$$

У раду [53] смо, за матрице $A\in\mathbb{C}^{m\times n}$, $B\in\mathbb{C}^{p\times q}$ и $C\in\mathbb{C}^{m\times q}$, анализирали матричну једначину $AXB=C$, и користећи Пенроузов услов конзистентности матричне једначине $AXB=C$ (видети [40]), изражен преко $\{1\}$-инверза матрица A и B тј. решења једначине (10), одредили нови облик потребног и довољног услова њене конзистентности.

Нека је $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$. *Групни инверз* матрице A је матрица $X\in\mathbb{C}^{n\times n}$ која испуњава једначину (10), једначину (11) и једначину:

$$AX = XA. \tag{15}$$

Групни инверз матрице A обележавамо са $A^{\sharp}$. Назив „групни инверз" је дао *I. Erdelyi* ([16]) јер позитивни степени матрице A и матрице $A^{\sharp}$, заједно са $AA^{\sharp}$ као јединичним елементом, чине *Абелову групу* (*Niels Henrik Abel*) у односу на множење матрица (видети пример 1.3) и у тој групи је $A^\sharp$ инверз од A. За разлику од Мур-Перноузовог инверза, групни инверз (квадратне) матрице A не постоји увек. Потребан и довољан услов за егзистенцију групног инверза (квадратне) матрице A дат је следећом теоремом.

Теорема 1.4. (Теорема 1. [3], стр. 162) Групни инверз матрице $A \in \mathbb{C}_r^{n\times n}$ постоји (и јединствен је) ако и само ако је $r(A^2) = r$. ♦

У вези са групним инверзом матрице A важи и следећа теорема.

Теорема 1.5. (Теорема 2. [3], стр. 163) Нека матрица $A \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$, $r > 0$, има факторизацију пуног ранга (7). Групни инверз матрице A постоји ако и само ако је матрица NM инвертибилна, и тада је

$$A^\sharp = M(NM)^{-2}N \,. \blacklozenge \tag{16}$$

Илустрација ове теореме дата је следећим примером.

Пример 1.3. Нека је

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & -3 \\ -3 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & -3 \\ -3 & 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Лако се може видети, као у примеру 1.1, да матрица A има факторизацију пуног ранга (7), при чему су M и N следеће матрице:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \\ 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

С обзиром да је матрица $NM = 2\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ инвертибилна, на основу претходне теореме постоји групни инверз матрице A и при томе, на основу (16), добијамо да је

$$A^{\sharp} = -\frac{1}{32}\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Дакле, $AA^{\sharp} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Приметимо да је

$$\mathbf{\Gamma} = \left\{ \begin{bmatrix} a & b & a & b & \dots & a & b \\ b & a & b & a & \dots & b & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a & b & a & b & \dots & a & b \\ b & a & b & a & \dots & b & a \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n\times n} \,|\, a, b \in \mathbb{C},\ a \neq \pm b,\ n = 2k,\ k \in \mathbb{N},\ k > 1 \right\}$$

Абелова група, у односу на множење матрица, са јединичним елементом

$$G_{n\times n} = \frac{2}{n}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}. \Diamond$$

За матрицу $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ кажемо да је RH матрица ако је $R(A^*) = R(A)$ (видети [3], стр. 163, неки аутори је називају и EP матрица).

Потребан и довољан услов једнакости Мур-Перноузовог инверза дате квадратне матрице A и њеног групног инверза дат је следећим тврђењем чији се доказ може наћи у [3].

Теорема 1.6. (Теорема 3. [3], стр. 164) За матрицу $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ важи: $A^\sharp = A^\dagger$ ако и само ако је матрица A RH матрица. ♦

Напомена 1.1. Пошто је множење k-циркуларних матрица комутативно, групни инверз одређене k-циркуларне матрице, ако постоји, поклапа се са њеним Мур-Пенроузовим инверзом. $\triangledown$

За матрице $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{C}^{m\times n}$ и $B = [b_{i,j}] \in \mathbb{C}^{m\times n}$ са $A \circ B$ обележавамо њихов *Адамаров производ* (*Jacques Salomon Hadamard*) и при томе је $A \circ B = [a_{i,j}b_{i,j}] \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Адамаров производ матрица назива се још и *Шуров производ* (*Issai Schur*). За *Адамаров инверз* матрице A користимо ознаку $A^{\circ -1}$ при чему је $A^{\circ -1} = [a_{i,j}^{-1}] \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Дакле, за дату матрицу A, Адамаров инверз $A^{\circ -1}$ постоји ако и само ако је $a_{i,j} \neq 0$ за свако i, j. Имајући у виду дефиницију Адамаровог производа матрица, јасно је да је *Адамарова јединична матрица* управо матрица $H = [h_{i,j}]$, где је $h_{i,j} = 1$ за свако i, j.

Поред до сада наведених појмова, за дату матрицу $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{C}^{m\times n}$, наведимо дефиниције за Еуклидску норму, спектралну норму, 1-норму и ∞-норму матрице A. Наиме,

1) Еуклидска норма матрице A је:

$$\|A\|_E = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} |\, a_{i,j}\,|^2},$$

2) Спектрална норма матрице A је:

$$\|A\|_2 = \sqrt{\max_{1\le i\le n} \lambda_i(A^*A)},$$

3) 1-норма матрице A је:

$$\|A\|_1 = \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{m} |\, a_{i,j}\,|,$$

4) ∞-норма матрице A је:

$$\|A\|_\infty = \max_{1\le i\le m} \sum_{j=1}^{n} |\, a_{i,j}\,| \,.$$

Неједнакости које важе између наведених норми описане су у раду [59] (видети теорему 1 и табелу 1). Овде истичемо неједнакости које важе између Еуклидске и спектралне норме. Наиме, за Еуклидску и спектралну норму матрице $A \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$ важи:

$$\frac{\|A\|_E}{\sqrt{r}} \le \|A\|_2 \le \|A\|_E\,. \tag{17}$$

Имајући у виду да је $r(A) \le \min\{m, n\}$, следи да за Еуклидску и спектралну норму матрице $A \in \mathbb{C}_r^{n\times n}$ важи:

$$\frac{\|A\|_E}{\sqrt{n}} \le \|A\|_2 \le \|A\|_E\,. \tag{18}$$

Да бисмо одредили горњу границу спектралне норме неких k-циркуларних матрица, које ће бити разматране у овој дисертацији, користимо следеће тврђење доказано у [27].

Лема 1.3. ([27]) Нека су дате матрице $A=[a_{i,j}]\in\mathbb{C}^{m\times n}$ и $B=[b_{i,j}]\in\mathbb{C}^{m\times n}$. Тада важи следећа неједнакост:

$$\|A\circ B\|_2 \leq r_1(A)\cdot c_1(B), \tag{19}$$

где је

$$r_1(A) = \max_{1\leq i\leq m}\sqrt{\sum_{j=1}^{n} \mid a_{i,j}\mid^2} \quad \text{и} \quad c_1(B) = \max_{1\leq j\leq n}\sqrt{\sum_{i=1}^{m} \mid b_{i,j}\mid^2}. \;\blacktriangledown$$

На крају овог, уводног, дела подсетимо се неких чињеница и ознака у вези са n-тим кореном датог броја $k\in\mathbb{C}$. Наиме, n-ти корен датог комплексног броја k је решење једначине $x^n=k$. С обзиром да једначина $x^n=k$ има тачно n комплексних решења, и то n различитих комплексних решења ако је $k\neq 0$, и n истих решења који су једнаки 0 ако је $k=0$, број $k\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ има тачно n различитих n-тих корена. Било који n-ти корен броја $k\in\mathbb{C}$ обележимо са ψ. Нека су

$$k=\varrho(\cos\theta+i\sin\theta) \quad \text{и} \quad \psi=\rho(\cos\phi+i\sin\phi)$$

тригонометријски прикази комплексних бројева k и ψ. Користећи *Моаврову формулу* (*Abraham de Moivre*):

Ако је $z=a(\cos\alpha+i\sin\alpha)$, *тада је* $z^n=a^n(\cos(n\alpha)+i\sin(n\alpha))$,

и имајући у виду периодичност синусне и косинусне функције, добијамо да је

$$\psi=\varrho^{\frac{1}{n}}(\cos(\frac{\theta}{n}+\frac{2l\pi}{n})+i\sin(\frac{\theta}{n}+\frac{2l\pi}{n})), \quad l=\overline{0,n-1}.$$

Из претходно изложеног можемо видети да за било који n-ти корен јединице тј. било које решење једначине $x^n = 1$, које ћемо обележити са $\widehat{\omega}$, важи:

$$\widehat{\omega} = \cos(\frac{2l\pi}{n}) + i\sin(\frac{2l\pi}{n}), \quad l = \overline{0, n-1}.$$

Примитивни n-ти корен јединице, који ћемо обележавати са ω, је n-ти корен јединице за који важи $\omega^m \neq 1$, $m = \overline{1, n-1}$. Нека је Υ_n (мултипликативна) група свих n-тих корена јединице. Треба истаћи да је Υ_n генерисана једним елементом. Наиме, Υ_n је група која је генерисана (било којим) примитивним n-тим кореном јединице ω. Дакле, Υ_n је циклична група и то коначна циклична група реда n тј.

$$\Upsilon_n = \langle\omega\rangle = \{1, \omega, \omega^2, \ldots, \omega^{n-1}\}. \tag{20}$$

Као коначна циклична група реда n, Υ_n је изоморфна (адитивној) групи $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$.

Сваки n-ти корен неког комплексног броја k има облик $\psi\omega^j$, $j = \overline{0, n-1}$, али треба напоменути да се сваки n-ти корен неког комплексног броја k такође може представити и у облику $\psi\omega^{-j}$, $j = \overline{0, n-1}$. У дисертацији ће бити заступљена оба облика.

2. K-циркуларне матрице - дефиниција и нека важна својства

У овом делу дефинишемо k-циркуларне матрице и презентујемо нека важна тврђења која за њих важе.

С обзиром да k-циркуларне матрице представљају специјалан случај Теплицових матрица, прво наводимо дефиницију и нека важна својства Теплицових матрица.

Матрицу $T \in \mathbb{C}^{n\times n}$ називамо ***Теплицова матрица*** (*Otto Toeplitz*) ако има следећи облик:

$$T = \begin{bmatrix} t_0 & t_1 & t_2 & \dots & t_{n-2} & t_{n-1} \\ t_{-1} & t_0 & t_1 & \dots & t_{n-3} & t_{n-2} \\ t_{-2} & t_{-1} & t_0 & \dots & t_{n-4} & t_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ t_{-(n-2)} & t_{-(n-3)} & t_{-(n-4)} & \dots & t_0 & t_1 \\ t_{-(n-1)} & t_{-(n-2)} & t_{-(n-3)} & \dots & t_{-1} & t_0 \end{bmatrix}. \tag{21}$$

Теплицове матрице су, као што се може видети из (21), матрице које дуж дијагонала имају константне елементе и у потпуности су одређене својом првом врстом и првом колоном. Ове матрице припадају класи ***структурних матрица***. Овој веома значајној класи матрица, због велике присутности како у алгебри тако и у различитим научним дисциплинама (електротехника, комуникација, статистика), припадају такође: ***Ханкелове матрице*** (*Hermann Hankel*), ***Вандермондове матрице*** (*Alexandre-Theophile Vandermonde*), ***Кошијеве матрице*** (*Augustin-Louis Cauchy*), ***Силвестерове матрице*** (*James Joseph Sylvester*), ***Безуове матрице*** (*Étienne Bézout*), ***Фробенијусове матрице*** (*Ferdinand Georg Frobenius*), итд. Алгебра, топологија, алгебарска геометрија, теорија графова, анализа, диференцијална геометрија, вероватноћа, статистика, квантна механика, теорија репрезентације, обрада сигнала, обрада слика, теорија апроксимације су области у којима се појављују Теплицове матрице (видети [4], [11], [18], [23], [30], [33], [34], [42], [54], [57], [58]).

У вези са Теплицовим матрицама треба истаћи да:

⋇ је конјуговано-транспонована матрица Теплицове матрице Теплицова матрица;

⋇ је збир Теплицових матрица Теплицова матрица;

⋇ инверз Теплицове матрице, ако постоји, не мора бити Теплицова матрица;

Следи неколико тврђења у вези са инверзом Теплицових матрица. Пре тога напоменимо да симбол $\delta_{i,j}$, који се појављује у наредним тврђењима, представља Кронекеров симбол (*Leopold Kronecker*). Дакле,

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{за} \quad i = j \\ 0, & \text{за} \quad i \neq j \end{cases}.$$

Теорема 2.1. ([22]) Нека је T матрица облика (21). Ако је сваки од система линеарних једначина:

$$\sum_{q=0}^{n-1} t_{q-p} x_q = \delta_{p,0}, \quad p = \overline{0, n-1},$$

$$\sum_{q=0}^{n-1} t_{q-p} y_q = \delta_{p,n-1}, \quad p = \overline{0, n-1},$$

решив и $x_0 \neq 0$, тада је матрица T инвертибилна и при томе је

$$T^{-1} = \frac{1}{x_0} \left(\begin{bmatrix} x_0 & 0 & \dots & 0 \\ x_1 & x_0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n-1} & x_{n-2} & \dots & x_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{n-1} & y_{n-2} & \dots & y_0 \\ 0 & y_{n-1} & \dots & y_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & y_{n-1} \end{bmatrix} \right.$$

$$\left. - \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 \\ y_0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ y_{n-2} & \dots & y_0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & x_{n-1} & \dots & x_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & x_{n-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \right). \blacklozenge$$

Теорема 2.2. ([21]) Нека је T матрица облика (21). Ако је сваки од система линеарних једначина:

$$\sum_{q=0}^{n-1} t_{q-p} x_q = \delta_{p,0}, \quad p = \overline{0, n-1},$$

$$\sum_{q=0}^{n-1} t_{q-p} z_q = \delta_{p,1}, \quad p = \overline{0, n-1},$$

решив и $x_{n-1} \neq 0$, тада је матрица T инвертибилна и при томе је

$$T^{-1} = \frac{1}{x_{n-1}} \left(\begin{bmatrix} z_0 & 0 & \dots & 0 \\ z_1 & z_0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{n-1} & z_{n-2} & \dots & z_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & x_{n-1} & \dots & x_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & x_{n-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \right.$$

$$- \begin{bmatrix} x_0 & 0 & \dots & 0 \\ x_1 & x_0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n-1} & x_{n-2} & \dots & x_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & z_{n-1} & \dots & z_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & z_{n-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left. + \begin{bmatrix} x_0x_{n-1} & x_0x_{n-2} & \dots & x_0x_0 \\ x_1x_{n-1} & x_1x_{n-2} & \dots & x_1x_0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n-1}x_{n-1} & x_{n-1}x_{n-2} & \dots & x_{n-1}x_0 \end{bmatrix} \right). \blacklozenge$$

Међутим, инверз Теплицове матрице није могуће увек одредити било којим паром његових колона, као што је показано, у [21], на примеру матрице:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A. Ben-Artzi и *T. Shalom* су показали, у [2], да су за одређивање инверза Теплицове матрице увек довољне, уколико су адекватно изабране, три његове колоне.

Теорема 2.3. ([2]) Нека је T матрица облика (21). Ако је сваки од система линеарних једначина:

$$\sum_{q=0}^{n-1} t_{q-p} x_q = \delta_{p,0}, \quad p = \overline{0, n-1},$$

$$\sum_{q=0}^{n-1} t_{q-p} y_q = \delta_{p,n-1-l}, \quad p = \overline{0, n-1},$$

$$\sum_{q=0}^{n-1} t_{q-p} z_q = \delta_{p,n-l}, \quad p = \overline{0, n-1},$$

решив, и $x_l \neq 0$, за било који број l $(0 \leq l \leq n-1)$, тада је матрица T инвертибилна и при томе је

$$T^{-1} = \frac{1}{x_l} \left(\begin{bmatrix} x_0 & 0 & \dots & 0 \\ x_1 & x_0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n-1} & x_{n-2} & \dots & x_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{n-1} & y_{n-2} - z_{n-1} & \dots & y_0 - z_1 \\ 0 & y_{n-1} & \dots & y_1 - z_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & y_{n-1} \end{bmatrix} \right.$$

$$\left. + \begin{bmatrix} z_0 & \dots & 0 & 0 \\ z_1 - y_0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ z_{n-1} - y_{n-2} & \dots & z_1 - y_0 & z_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & x_{n-1} & \dots & x_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & x_{n-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \right). \blacklozenge$$

У раду [32] аутори су показали да се инверз Теплицове матрице може одредити преко две његове колоне и елемената прве врсте дате Теплицове матрице.

Теорема 2.4. ([32]) Нека је T матрица облика (21). Матрица T је инвертибилна ако и само ако су испуњени следећи услови:

а) Систем линеарних једначина:

$$\sum_{q=0}^{n-1} t_{q-p} x_q = \delta_{p,0}, \quad p = \overline{0, n-1},$$

је решив,

б) Нека је l такав број да је $x_l \neq 0$ и $x_q = 0$ за свако $q > l$. Тада је систем линеарних једначина:

$$\sum_{q=0}^{n-1} t_{q-p} z_q = \delta_{p,n-l}, \quad p = \overline{0, n-1},$$

решив.

При томе, ако је $l = n-1$, инверз је дат као у теореми 2.2, ако је $l < n-1$, инверз је дат као у теореми 2.3 за

$$\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{bmatrix} = \left(S - \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 & t_2 & \ldots & t_{n-1} & 0 \end{bmatrix} \right)^{n-1-l} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{bmatrix},$$

где је $S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \end{bmatrix}$. ♦

Модификација претходне теореме, уз краћи доказ, презентована је у [38].

Пример који следи илуструје теорему 2.1 и показује да инверз Теплицове матрице, ако постоји, не мора бити Теплицова матрица.

Пример 2.1. Одредити, ако постоји, инверз матрице

$$T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & 2 & 1 \\ -3 & -2 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Треба проверити да ли су системи линеарних једначина:

$$\begin{aligned} 2x_0 + x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 1 \\ -x_0 + 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 0 \\ -2x_0 - x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0 \\ -3x_0 - 2x_1 - x_2 + 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} 2y_0 + y_1 + 3y_2 + 4y_3 &= 0 \\ -y_0 + 2y_1 + y_2 + 3y_3 &= 0 \\ -2y_0 - y_1 + 2y_2 + y_3 &= 0 \\ -3y_0 - 2y_1 - y_2 + 2y_3 &= 1 \end{aligned}$$

решиви и, ако јесу, одредити њихова решења. Нека су T_1 и T_2 проширене матрице, редом, првог и другог система. Закључујемо, применом елементарних трансформација, да је $r(T_1) = r(T)(= 4)$. Дакле, на основу *Кронекер-Капелијеве теореме* (*Alfredo Capelli*), први систем има јединствено решење и лако се добија да је то $(x_0, x_1, x_2, x_3) = (\frac{1}{5}, -\frac{4}{25}, \frac{1}{25}, \frac{4}{25})$. На сличан начин закључујемо и да други систем има јединствено решење и лако добијамо да је то $(y_0, y_1, y_2, y_3) = (0, -\frac{1}{5}, -\frac{1}{5}, \frac{1}{5})$. На основу теореме 2.1, пошто је $x_0 \neq 0$, следи да је

$$T^{-1} = 5 \left(\begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{4}{25} & \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ \frac{1}{25} & -\frac{4}{25} & \frac{1}{5} & 0 \\ \frac{4}{25} & \frac{1}{25} & -\frac{4}{25} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \right.$$

$$\left. - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{4}{5} & \frac{1}{25} & -\frac{4}{25} \\ 0 & 0 & \frac{4}{5} & \frac{1}{25} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ -\frac{4}{25} & \frac{9}{25} & -\frac{1}{25} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{25} & -\frac{1}{25} & \frac{9}{25} & -\frac{1}{5} \\ \frac{4}{25} & -\frac{1}{25} & -\frac{4}{25} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} . \Diamond$$

⋇ производ Теплицових матрица не мора бити Теплицова матрица;

⋇ множење Теплицових матрица није комутативно.

Следећи пример потврђује последње две особине у вези са Теплицовим матрицама.

Пример 2.2. Нека су матрице T_1 и T_2 дате на следећи начин:

$$T_1 = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad T_2 = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Тада је,

$$T_1T_2 = \begin{bmatrix} 6 & -11 & 5 \\ 2 & 8 & -17 \\ -14 & 4 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad T_2T_1 = \begin{bmatrix} 4 & -17 & 5 \\ 4 & 8 & -11 \\ -14 & 2 & 6 \end{bmatrix}. \Diamond$$

Као што смо напоменули, инверз Теплицове матрице, ако постоји, не мора бити Теплицова матрица. У наставку наводимо тврђење, уз доказ, из рада [25] (уопштење рада [28]), које даје потребан и довољан услов да би инверз инвертибилне Теплицове матрице био такође Теплицова матрица. За доказ тог тврђења користе се леме из рада [25] које представљају општију форму тврђења наведених и доказаних у раду [28]. Због чињенице да су поменуте леме у раду [25] дате без доказа, овде ће бити дати и њихови докази.

Подсетимо, пре наставка, да за матрицу $A = [a_{i,j}]$ реда n кажемо да је *персиметрична матрица* ако су њени елементи симетрични у односу на анти-дијагоналу $(a_{1,n}, a_{2,n-1}, a_{3,n-2}, \ldots, a_{n,1})$ тј. ако и само ако је JA, односно AJ, симетрична матрица, где је J матрица код које су елементи дуж анти-дијагонале једнаки 1, док су сви остали елементи једнаки 0.

Лема 2.1. (Лема 1. [25]) Квадратна матрица је Теплицова ако и само ако су и цела матрица и подматрица која се добија брисањем прве колоне и прве врсте персиметричне.

Доказ.

$\Longrightarrow)$: Следи тривијално.

$\Longleftarrow)$: Претпоставимо да су матрица

$$T = \begin{bmatrix} t_{1,1} & t_{1,2} & \dots & t_{1,n-1} & t_{1,n} \\ t_{2,1} & t_{2,2} & \dots & t_{2,n-1} & t_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ t_{n-1,1} & t_{n-1,2} & \dots & t_{n-1,n-1} & t_{n-1,n} \\ t_{n,1} & t_{n,2} & \dots & t_{n,n-1} & t_{n,n} \end{bmatrix} \tag{22}$$

и подматрица

$$T_1 = \begin{bmatrix} t_{2,2} & t_{2,3} & \dots & t_{2,n-1} & t_{2,n} \\ t_{3,2} & t_{3,3} & \dots & t_{3,n-1} & t_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ t_{n-1,2} & t_{n-1,3} & \dots & t_{n-1,n-1} & t_{n-1,n} \\ t_{n,2} & t_{n,3} & \dots & t_{n,n-1} & t_{n,n} \end{bmatrix} \tag{23}$$

персиметричне. Из претпоставке да је матрица T персиметрична добијамо да је

$$t_{n-i,k} = t_{n-k+1,i+1}, \quad \text{за} \quad k = \overline{1, n-1},\ i = \overline{k, n-1}, \tag{24}$$

док из претпоставке да је матрица T_1 персиметрична добијамо да је

$$t_{n-j+1,l} = t_{n-l+2,j+1}, \quad \text{за} \quad l = \overline{2, n-1},\ j = \overline{l, n-1}. \tag{25}$$

Дакле, матрица T има облик:

$$T = \begin{bmatrix} t_{1,1} & t_{1,2} & \dots & t_{1,n-1} & t_{1,n} \\ t_{2,1} & t_{1,1} & \dots & t_{1,n-2} & t_{1,n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ t_{n-1,1} & t_{n-2,1} & \dots & t_{1,1} & t_{1,2} \\ t_{n,1} & t_{n-1,1} & \dots & t_{2,1} & t_{1,1} \end{bmatrix}. \tag{26}$$

Према томе, матрица T има константне елементе дуж дијагонала тј. T је Теплицова матрица што је и требало доказати. ▼

Лема 2.2. (Лема 2. [25]) Инверз персиметричне матрице дате у облику:

$$H = \begin{bmatrix} h_0 & f^T \\ g & M \end{bmatrix}, \tag{27}$$

при чему је $h_0 \neq 0$, је Теплицова матрица ако и само ако је

$$M - h_0^{-1} g f^T \tag{28}$$

такође персиметрична матрица.

Доказ. Нека је H^{-1} инверз матрице H дат у следећем облику:

$$H^{-1} = \begin{bmatrix} r_0 & u^T \\ v & N \end{bmatrix}. \tag{29}$$

Из $HH^{-1} = I$ добијамо, између осталог, да је

$$gu^T + MN = I \quad \text{и} \quad h_0 u^T + f^T N = O. \tag{30}$$

Дакле, $u^T = -h_0^{-1} f^T N$ тј.

$$(M - h_0^{-1} g f^T)N = I. \tag{31}$$

Према томе,

$$((M - h_0^{-1} g f^T)J)(JN) = I. \tag{32}$$

Из (32) следи да је $(M - h_0^{-1} g f^T)J$ симетрична матрица ако и само ако је JN симетрична матрица, односно да је $M - h_0^{-1} g f^T$ персиметрична матрица ако и само ако је N персиметрична матрица. Из претходно добијене еквиваленције, имајући у виду да је H^{-1} персиметрична матрица (као инверз персиметричне матрице), на основу леме 2.1, следи да је

$M - h_0^{-1} g f^T$ персиметрична матрица ако и само ако је H^{-1} Теплицова матрица што је и требало доказати. ▼

Лема 2.3. (Лема 3. [25]) Нека су $x \in \mathbb{C}^{n\times 1}$ и $y \in \mathbb{C}^{n\times 1}$. Квадратна матрица реда n облика yx^T је персиметрична ако и само ако матрица $Q = \begin{bmatrix} y & Jx \end{bmatrix}$ има ранг 0 или 1.

Доказ. Нека су

$$x^T = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_{n-1} & x_n \end{bmatrix} \tag{33}$$

и

$$y^T = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_{n-1} & y_n \end{bmatrix}. \tag{34}$$

$\Longrightarrow$) : Ако су оба вектора x и y нула вектори, тада је $yx^T = O$ и $Q = O$ тј. $r(Q) = 0$. Ако је само један од вектора x и y нула вектор, тада је $yx^T = O$ и матрица Q има једну нула колону и другу ненула колону тј. $r(Q) = 1$. Претпоставимо зато да су x и y ненула вектори и да је квадратна матрица облика yx^T персиметрична. Из претпоставке да је матрица yx^T персиметрична добијамо да је $y_l x_s = y_{n+1-s} x_{n+1-l}$ за свако $l, s = \overline{1, n}$, одакле следи да је ранг матрице

$$Q = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots \\ y_l & x_{n+1-l} \\ \vdots & \vdots \\ y_{n+1-s} & x_s \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix} \tag{35}$$

0 или 1, јер су све детерминанте реда 2 једнаке 0. Пошто су x и y ненула вектори, следи да је $r(Q) = 1$ што је и требало доказати.

$\Longleftarrow$) : Претпоставимо да је $r(Q) = 0$ или $r(Q) = 1$. Ако је $r(Q) = 0$, тада су оба вектора x и y нула вектори, па је $yx^T = O$, а O је персиметрична матрица. Ако је $r(Q) = 1$, тада је бар један од вектора x и y ненула вектор. Нека је, на пример, $y \neq O$. Из $r(Q) = 1$, следи да је $Jx = ry$, за неко r. Матрица yx^T, у том случају, има облик:

$$yx^T = \begin{bmatrix} ry_1y_n & ry_1y_{n-1} & \dots & ry_1y_2 & ry_1^2 \\ ry_2y_n & ry_2y_{n-1} & \dots & ry_2^2 & ry_2y_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ ry_{n-1}y_n & ry_{n-1}^2 & \dots & ry_{n-1}y_2 & ry_{n-1}y_1 \\ ry_n^2 & ry_ny_{n-1} & \dots & ry_ny_2 & ry_ny_1 \end{bmatrix} \tag{36}$$

тј. yx^T је персиметрична матрица што је и требало доказати. ▼

Сада можемо доказати тврђење које даје потребан и довољан услов да би инверз инвертибилне Теплицове матрице био такође Теплицова матрица.

Нека је T инвертибилна Теплицова матрица реда $n+1$ дата у облику:

$$T = \begin{bmatrix} t_0 & w^T \\ q & U \end{bmatrix}. \tag{37}$$

Тада важи следеће тврђење.

Теорема 2.5. (Теорема 1. [25]) Инверз инвертибилне Теплицове матрице T дате у облику (37) је Теплицова матрица ако и само ако матрица $W = \begin{bmatrix} q & Jw \end{bmatrix}$ има ранг 0 или 1.

Доказ. Нека је

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} s_0 & p^T \\ z & V \end{bmatrix}. \tag{38}$$

Пошто је матрица T Теплицова, следи да је и персиметрична. Матрица T^{-1}, као инверз персиметричне матрице, је такође персиметрична. На основу леме 2.1 матрица T^{-1} је Теплицова ако и само ако је матрица V персиметрична.

Из $TT^{-1} = T^{-1}T = I$ добијамо да је

$$s_0 q + Uz = O, \quad s_0 t_0 + p^T q = 1, \quad t_0 s_0 + w^T z = 1, \quad t_0 z + Vq = O, \tag{39}$$

$$s_0 w^T + p^T U = O, \quad qp^T + UV = I, \quad zw^T + VU = I, \quad t_0 p^T + w^T V = O. \tag{40}$$

Уочимо да из формуле $T^{-1} = \frac{1}{|T|}[T_{j,i}]$, где је $T_{i,j}$ кофактор елемента $t_{i,j}$, добијамо да је $s_0 = \frac{|U|}{|T|}$. Постоје два могућа случаја.

1) Матрица U је инвертибилна, одакле следи да је $s_0 \neq 0$. Пошто је $s_0 \neq 0$, применимо лему 2.2 на T^{-1}. Матрица T је Теплицова, па из леме 2.2 следи да је матрица $V - s_0^{-1} z p^T$ персиметрична. Према томе, матрица V је персиметрична ако и само ако је матрица zp^T персиметрична. Из

$$Uz = -s_0 q \quad \text{и} \quad p^T U = -s_0 w^T \tag{41}$$

добијамо да је $Uzp^T U = s_0^2 q w^T$. Дакле,

$$(JU)(zp^T J)(JU) = s_0^2 J q w^T. \tag{42}$$

Пошто је матрица T Теплицова, из леме 2.1 следи да је матрица U персиметрична. Дакле, матрица JU је симетрична и инвертибилна. Из (42) следи да је матрица $zp^T J$ симетрична ако и само ако је матрица Jqw^T симетрична. Према томе, матрица zp^T је персиметрична ако и само ако је матрица qw^T персиметрична што је, на основу леме 2.3, и требало доказати.

2) Матрица U је сингуларна, одакле следи да је $s_0 = 0$. Пошто је $s_0 = 0$, из (39) добијамо да је $p^T q = 1$, одакле закључујемо да је qp^T

идемпотентна матрица. Уочимо такође да је $r(qp^T) = 1$. Из (40) добијамо да је UV такође идемпотентна матрица и да је $r(UV) = n - 1$. Дакле, $r(U) \geq n - 1$. Међутим, пошто је U сингуларна матрица реда n, следи да је $r(U) = n - 1$. Из (39) и (40) добијамо да је

$$JUz = O \quad \text{и} \quad (p^T J)(JU) = O. \tag{43}$$

Из претходних једнакости, имајући у виду да је матрица JU симетрична и ранга за један мањи од њеног реда, закључујемо да, под условом да су z и p ненула вектори, важи $z^T = sp^T J$, за неко $s \neq 0$, одакле се лако проверава да је матрица zp^T персиметрична. Ако је бар један од вектора z и p нула вектор, тада је $zp^T = O$, а O је персиметрична матрица. Из (39) и (40) добијамо такође да је

$$Uz = O, \quad w^T z = 1 \quad \text{и} \quad w^T V = -t_0 p^T. \tag{44}$$

Нека су матрице A и B дефинисане на следећи начин:

$$A = U - qw^T \quad \text{и} \quad B = V + (t_0 - 1)zp^T. \tag{45}$$

На основу (40) и (44) добијамо да је

$$\begin{aligned} AB &= (U - qw^T)(V + (t_0 - 1)zp^T) \\ &= UV + t_0 qp^T - (t_0 - 1)qp^T \\ &= UV + qp^T = I. \end{aligned}$$

Према томе, $B = A^{-1}$. С обзиром да је матрица zp^T персиметрична, матрица V је персиметрична ако и само ако је матрица B персиметрична. Матрица B је персиметрична ако и само ако је матрица A (као њен инверз) персиметрична. Имајући у виду да је матрица U персиметрична, матрица A је персиметрична ако и само ако је матрица qw^T персиметрична, што је, на основу леме 2.3, и требало доказати. ⧫

Нека је $k \in \mathbb{C}$. Ако је за матрицу (21) испуњен услов:

$$t_{-i} = k t_{n-i},\ i = \overline{1, n-1}\,, \tag{46}$$

тада матрицу (21) називамо ***k-циркуларна матрица***.

Дакле, матрицу $C \in \mathbb{C}^{n \times n}$, са првом врстом $(c_0, c_1, c_2, \dots, c_{n-2}, c_{n-1})$, називамо *k-циркуларна матрица* ако испуњава следећи услов:

$$c_{i,j} = \begin{cases} c_{j-i}, & \text{за} \quad i \le j \\ k\, c_{n+j-i}, & \text{за} \quad i > j \end{cases},\ (i = \overline{2, n}, j = \overline{1, n}), \tag{47}$$

тј. ако има следећи облик:

$$C = \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \dots & c_{n-2} & c_{n-1} \\ kc_{n-1} & c_0 & c_1 & \dots & c_{n-3} & c_{n-2} \\ kc_{n-2} & kc_{n-1} & c_0 & \dots & c_{n-4} & c_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ kc_2 & kc_3 & kc_4 & \dots & c_0 & c_1 \\ kc_1 & kc_2 & kc_3 & \dots & kc_{n-1} & c_0 \end{bmatrix}. \tag{48}$$

K-циркуларна матрица је, као што се може видети из дефиниције, у потпуности одређена својом првом врстом, односно првом колоном, и бројем k, па ћемо матрицу C облика (48) краће обележавати са $C = \operatorname{circ}_n\{_k(c_0, c_1, c_2, \dots, c_{n-1})\}$. При томе ће, ако је ред матрице очигледан, ознака за ред матрице бити изостављен. За $k = 1$, $k = -1$ и $k = 0$, k-циркуларне матрице називамо, редом, циркуларне, косоциркуларне и полуциркуларне матрице. Циркуларну матрицу C са првом врстом $(c_0, c_1, c_2, \dots, c_{n-1})$, краће ћемо означавати са $C = \operatorname{circ}\{(c_0, c_1, c_2, \dots, c_{n-1})\}$, без истицања да је $k = 1$.

Из теореме 2.5 следи наредно тврђење.

Последица 2.1. Нека је T инвертибилна Теплицова матрица. Ако је њен инверз такође Теплицова матрица тада је T k-циркуларна матрица за неко k и при томе је њен инверз такође k-циркуларна матрица.

Доказ. Претпоставимо да су T и T^{-1} Теплицове матрице дате, редом, у облику (37) и (38). Тада, на основу теореме 2.5, матрица $\begin{bmatrix} q & Jw \end{bmatrix}$ има ранг 0 или 1. Претпоставимо, прво, да је $r(\begin{bmatrix} q & Jw \end{bmatrix}) = 0$ тј. оба вектора q и w су нула вектори. Тада, имајући у виду да је T Теплицова матрица, добијамо да је $T = t_0 I$. Дакле, T је k-циркуларна матрица за свако k. Претпоставимо, потом, да је $r(\begin{bmatrix} q & Jw \end{bmatrix}) = 1$ тј. бар један од вектора q и w је ненула вектор. Нека је, на пример, $w \neq O$. Из $r(\begin{bmatrix} q & Jw \end{bmatrix}) = 1$, следи да је $q = kJw$, за неко k. Тада, имајући у виду да је T Теплицова матрица, добијамо да је

$$T = \begin{bmatrix} t_0 & w_1 & \dots & w_{n-1} & w_n \\ kw_n & t_0 & \dots & w_{n-2} & w_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ kw_2 & kw_3 & \dots & t_0 & w_1 \\ kw_1 & kw_2 & \dots & kw_n & t_0 \end{bmatrix}.$$

Дакле, T је k-циркуларна матрица.

Претпоставимо да је $p = O$. Тада, из (39) и (40), добијамо да је

$$s_0 w^T = O \quad \text{и} \quad s_0 t_0 = 1. \tag{49}$$

С обзиром да је $w \neq O$, из прве једнакости следи да $s_0 = 0$, што је због друге једнакости немогуће. Дакле, из претпоставке да је $p = O$ дошли смо до контрадикције, одакле закључујемо да је $p \neq O$. На основу теореме 2.5 $r(\begin{bmatrix} z & Jp \end{bmatrix}) = 1$, одакле следи да је $z = sJp$, за неко s. Тада, имајући у виду да је T^{-1} Теплицова матрица, добијамо да је

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} s_0 & p_1 & \dots & p_{n-1} & p_n \\ sp_n & s_0 & \dots & p_{n-2} & p_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ sp_2 & sp_3 & \dots & s_0 & p_1 \\ sp_1 & sp_2 & \dots & sp_n & s_0 \end{bmatrix}.$$

Дакле, T^{-1} је s-циркуларна матрица.

Покажимо да је $k = s$. Заменом $q = kJw$ и $z = sJp$ у (39) добијамо да је

$$t_0 sJp + kVJw = O, \tag{50}$$

односно, имајући у виду да је $t_0 p^T = -w^T V$ тј. $t_0 p = -V^T w$, добијамо да је

$$-sJV^T w + kVJw = O. \tag{51}$$

Пошто је, на основу леме 2.1, матрица V персиметрична тј. VJ симетрична матрица, из (51) добијамо да је

$$(-s + k)w^T VJ = O. \tag{52}$$

Уочимо да из формуле $T = \frac{1}{|T^{-1}|}\left[T'_{j,i}\right]$, где је $T'_{i,j}$ кофактор елемента $t'_{i,j}$ ($T^{-1} = \left[t'_{i,j}\right]$), добијамо да је $t_0 = \frac{|V|}{|T^{-1}|}$. Постоје два могућа случаја.

1) Матрица V је инвертибилна, а тиме и $t_0 \neq 0$. Тада, из (52), следи да је $k = s$.

2) Матрица V је сингуларна, а тиме и $t_0 = 0$. Тада, из (39), следи да је $w^T z = p^T q = 1$. Заменом $q = kJw$ и $z = sJp$, добијамо да је $sw^T Jp = kp^T Jw = 1$, одакле такође следи да је $k = s$. $\triangle$

Према томе, инверз k-циркуларне матрице, ако постоји, је такође k-циркуларна матрица. У раду [48] смо представили метод за одређивање инверза (инвертибилне) k-циркуларне матрице, при чему је $k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Лема 2.4. (Лема 2.2. [48]) Нека је C инвертибилна комплексна матрица облика (48). Тада је, $C^{-1} = \mathrm{circ}\{_k(c'_0, c'_1, c'_2, \ldots, c'_{n-1})\}$, при чему је $(c'_0, c'_1, c'_2, \ldots, c'_{n-1})$ јединствено решење следећег система линеарних једначина:

$$C \begin{bmatrix} x_0 \\ kx_{n-1} \\ \vdots \\ kx_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{53}$$

Доказ. Из $CC^{-1} = I$ добијамо:

$$\begin{bmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \ldots & c_{n-2} & c_{n-1} \\ kc_{n-1} & c_0 & c_1 & \ldots & c_{n-3} & c_{n-2} \\ kc_{n-2} & kc_{n-1} & c_0 & \ldots & c_{n-4} & c_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ kc_2 & kc_3 & kc_4 & \ldots & c_0 & c_1 \\ kc_1 & kc_2 & kc_3 & \ldots & kc_{n-1} & c_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c'_0 & c'_1 & c'_2 & \ldots & c'_{n-2} & c'_{n-1} \\ kc'_{n-1} & c'_0 & c'_1 & \ldots & c'_{n-3} & c'_{n-2} \\ kc'_{n-2} & kc'_{n-1} & c'_0 & \ldots & c'_{n-4} & c'_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ kc'_2 & kc'_3 & kc'_4 & \ldots & c'_0 & c'_1 \\ kc'_1 & kc'_2 & kc'_3 & \ldots & kc'_{n-1} & c'_0 \end{bmatrix} = I.$$

Дакле, $(c'_0, c'_1, c'_2, \ldots, c'_{n-1})$ је решење система линеарних једначина (53). Пошто је инверз јединствен, следи да је $(c'_0, c'_1, c'_2, \ldots, c'_{n-1})$ јединствено решење система линеарних једначина (53). ▼

Пример 2.3. Одредити, ако постоји, инверз матрице

$$C = \mathrm{circ}\{_{\frac{1}{2}}(2, 1, 3, 4)\}$$

тј.

$$C=\begin{bmatrix}2&1&3&4\\2&2&1&3\\\frac{3}{2}&2&2&1\\\frac{1}{2}&\frac{3}{2}&2&2\end{bmatrix}.$$

Из

$$C=\begin{bmatrix}2&1&3&4\\2&2&1&3\\\frac{3}{2}&2&2&1\\\frac{1}{2}&\frac{3}{2}&2&2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}2&1&3&4\\0&1&-2&-1\\0&5&-1&-8\\0&5&5&4\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}2&1&3&4\\0&1&-2&-1\\0&0&-3&1\\0&0&5&3\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}2&1&3&4\\0&1&-2&-1\\0&0&-3&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

следи да је $r(C)=4$. Дакле, ранг матрице C једнак је њеном реду, одакле закључујемо да је матрица C инвертибилна. Према леми 2.4 потребно је одредити решење следећег система линеарних једначина:

$$\begin{aligned}2x_0+2x_1+\tfrac{3}{2}x_2+\tfrac{1}{2}x_3&=1\\2x_0+\tfrac{3}{2}x_1+\tfrac{1}{2}x_2+x_3&=0\\\tfrac{3}{2}x_0+\tfrac{1}{2}x_1+x_2+x_3&=0\\\tfrac{1}{2}x_0+x_1+x_2+\tfrac{3}{4}x_3&=0\,.\end{aligned}$$

Решење система је $(x_0,x_1,x_2,x_3)=(\frac{6}{21},\frac{2}{21},\frac{10}{21},-\frac{20}{21})$. Дакле,

$$C^{-1}=\frac{1}{21}\mathrm{circ}\{_{\frac{1}{2}}(6,2,10,-20)\}$$

тј.

$$C^{-1} = \frac{1}{21}\begin{bmatrix} 6 & 2 & 10 & -20 \\ -10 & 6 & 2 & 10 \\ 5 & -10 & 6 & 2 \\ 1 & 5 & -10 & 6 \end{bmatrix}. \ \Diamond$$

Пре наставка, напоменимо да ће k, уколико није другачије речено, бити ненула комплексан број.

У раду [9] *R.E. Cline*, *R.J. Plemmons* и *G. Worm* су, анализирајући k-циркуларне матрице, без доказа дали потребан и довољан услов да би комплексна квадратна матрица била k-циркуларна матрица. У наставку доказујемо ту еквиваленцију.

Лема 2.5. (Лема 2. [9]) Матрица $C \in \mathbb{C}^{n\times n}$ је k-циркуларна матрица ако и само ако комутира са матрицом $C_{n,k} = \mathrm{circ}_n\{_k(0,1,0,\dots,0)\}$. У том случају за матрицу C важи:

$$C = \sum_{i=0}^{n-1} c_i C_{n,k}^i, \tag{54}$$

где је $(c_0, c_1, c_2, \dots, c_{n-1})$ прва врста матрице C.

Доказ.

$\Longrightarrow)$: Претпоставимо да је C матрица облика (48). Тада је,

$$CC_{n,k} = C_{n,k}C = \mathrm{circ}\{_k(kc_{n-1}, c_0, c_1, \dots, c_{n-2})\}.$$

Дакле, матрица C комутира са матрицом $C_{n,k}$.

$\Longleftarrow)$: Претпоставимо да матрица $C = [c_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n\times n}$ комутира са матрицом $C_{n,k}$. Из

$$CC_{n,k} = \begin{bmatrix} kc_{1,n} & c_{1,1} & c_{1,2} & \cdots & c_{1,n-2} & c_{1,n-1} \\ kc_{2,n} & c_{2,1} & c_{2,2} & \cdots & c_{2,n-2} & c_{2,n-1} \\ kc_{3,n} & c_{3,1} & c_{3,2} & \cdots & c_{3,n-2} & c_{3,n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ kc_{n-1,n} & c_{n-1,1} & c_{n-1,2} & \cdots & c_{n-1,n-2} & c_{n-1,n-1} \\ kc_{n,n} & c_{n,1} & c_{n,2} & \cdots & c_{n,n-2} & c_{n,n-1} \end{bmatrix}$$

и

$$C_{n,k}C = \begin{bmatrix} c_{2,1} & c_{2,2} & c_{2,3} & \cdots & c_{2,n-1} & c_{2,n} \\ c_{3,1} & c_{3,2} & c_{3,3} & \cdots & c_{3,n-1} & c_{3,n} \\ c_{4,1} & c_{4,2} & c_{4,3} & \cdots & c_{4,n-1} & c_{4,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_{n,1} & c_{n,2} & c_{n,3} & \cdots & c_{n,n-1} & c_{n,n} \\ kc_{1,1} & kc_{1,2} & kc_{1,3} & \cdots & kc_{1,n-1} & kc_{1,n} \end{bmatrix}$$

добијамо да је

$$c_{i,j} = \begin{cases} c_{1,\,j-i+1}, & \text{за} \quad i \le j \\ k\,c_{1,\,n+j-i+1}, & \text{за} \quad i > j \end{cases}, \ (i = \overline{2,n}, j = \overline{1,n}).$$

Дакле, C је k-циркуларна матрица реда n.

С обзиром да је

$$C_{n,k}^2 = \left[\begin{array}{c|c} O_{(n-2)\times 2} & I_{n-2} \\ \hline kI_2 & O_{2\times(n-2)} \end{array}\right], \ C_{n,k}^3 = \left[\begin{array}{c|c} O_{(n-3)\times 3} & I_{n-3} \\ \hline kI_3 & O_{3\times(n-3)} \end{array}\right], \cdots \tag{55}$$

тј.

$$C_{n,k}^i = \left[\begin{array}{c|c} O_{(n-i)\times i} & I_{n-i} \\ \hline kI_i & O_{i\times(n-i)} \end{array}\right], \quad i = \overline{1, n-1}, \tag{56}$$

лако се види да је $C = \sum_{i=0}^{n-1} c_i C_{n,k}^i$. ▼

Подсетимо да ψ и ω означавају, редом, било који n-ти корен броја k и било који примитивни n-ти корен јединице. Користећи матрицу

$$W = \mathrm{diag}\left[1, \psi, \psi^2, \ldots, \psi^{n-1}\right], \tag{57}$$

аутори су у раду [9] доказали још једно тврђење које такође даје потребан и довољан услов да би комплексна квадратна матрица била k-циркуларна матрица.

Лема 2.6. (Лема 3. [9]) Матрица $C \in \mathbb{C}^{n\times n}$ је k-циркуларна матрица ако и само ако важи:

$$C = WMW^{-1}, \tag{58}$$

за неку циркуларну матрицу M реда n. ▼

У наставку доказујемо да је алгебра k-циркуларних матрица реда n над пољем $\mathbb{F}$, коју ћемо обележавати са $\mathcal{C}_{n,k}(\mathbb{F})$ тј. нека је

$$\mathcal{C}_{n,k}(\mathbb{F}) = \mathbb{F}[C_{n,k}] = \{p(C_{n,k}) \,|\, p(x) \in \mathbb{F}[x]\}, \tag{59}$$

изоморфна са $\mathbb{F}[x]/{<}x^n - k{>}$, и разматрамо дијагонализацију k-циркуларних матрица реда n, када је $\mathbb{F} = \mathbb{C}$.

С обзиром да је пресликавање $f_1 : \mathbb{F}[x] \to \mathbb{F}[C_{n,k}]$ дефинисано са

$$f_1(p(x)) = p(C_{n,k}), \tag{60}$$

хомоморфизам такав да је $\mathrm{Ker} f_1 = {<}\mu(x){>}$, при чему је $\mu(x)$ минимални полином за $C_{n,k}$, а то је $x^n - k$, на основу теореме о изоморфизму, следи да је

$$\mathbb{F}[x]/{<}x^n - k{>} \cong \mathbb{F}[C_{n,k}] = \mathcal{C}_{n,k}(\mathbb{F}). \tag{61}$$

Нека је $\mathbb{F}=\mathbb{C}$. Имајући у виду да за полином x^n-k важи

$$x^n-k=(x-\psi)(x-\psi\omega)(x-\psi\omega^2)\cdots(x-\psi\omega^{n-1}), \tag{62}$$

на основу кинеске теореме о остацима, добијамо да је

$$\mathbb{C}[x]/<x^n-k>\cong \mathbb{C}[x]/<x-\psi> \times \mathbb{C}[x]/<x-\psi\omega> \times\cdots\times \mathbb{C}[x]/<x-\psi\omega^{n-1}> .$$

Међутим, за неко $\alpha\in\mathbb{C}$, пресликавање $f_2\colon \mathbb{C}[x]\to\mathbb{C}$ дефинисано са

$$f_2(p(x))=p(\alpha), \tag{63}$$

је хомоморфизам такав да је $\mathrm{Ker} f_2=<x-\alpha>$, одакле такође на основу теореме о изоморфизму, следи да је

$$\mathbb{C}[x]/<x-\alpha>\cong\mathbb{C}. \tag{64}$$

Према томе,

$$\mathcal{C}_{n,k}(\mathbb{C})\ \cong\ \mathbb{C}\times\mathbb{C}\times\cdots\times\mathbb{C}\ \cong\ Diag_n(\mathbb{C}). \tag{65}$$

Заправо, изоморфизам $f\colon \mathcal{C}_{n,k}(\mathbb{C})\to Diag_n(\mathbb{C})$ је дефинисан са

$$f(C)=\mathrm{diag}\big[p(\psi),p(\psi\omega),p(\psi\omega^2),\ldots,p(\psi\omega^{n-1})\big]\,, \tag{66}$$

где је $p(x)=\sum\limits_{i=0}^{n-1}c_ix^i$, а $(c_0,c_1,c_2,\ldots,c_{n-1})$ прва врста матрице C.

Презентујемо такође и класичнији доказ у вези са дијагонализацијом комплексних k-циркуларних матрица.

Нека је $F=[f_{i,j}]$ Фуријеова матрица реда n дефинисана са

$$f_{i,j}=\frac{1}{\sqrt{n}}\,\omega^{(i-1)(j-1)},\quad i,j=\overline{1,n}, \tag{67}$$

тј.

$$F=\frac{1}{\sqrt{n}}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1\\ 1 & \omega & \omega^2 & \dots & \omega^{n-2} & \omega^{n-1}\\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \dots & \omega^{2(n-2)} & \omega^{2(n-1)}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 1 & \omega^{n-2} & \omega^{(n-2)2} & \dots & \omega^{(n-2)(n-2)} & \omega^{(n-2)(n-1)}\\ 1 & \omega^{n-1} & \omega^{(n-1)2} & \dots & \omega^{(n-1)(n-2)} & \omega^{(n-1)(n-1)}\end{bmatrix}, \tag{68}$$

и W матрица дата са (57). Докажимо да важи следеће тврђење.

Лема 2.7. Ако је C матрица облика (48), тада важи:

$$C = Q\,\mathrm{diag}[\lambda_0(C), \lambda_1(C), \lambda_2(C), \dots, \lambda_{n-1}(C)]\; Q^{-1}, \tag{69}$$

где је $Q = WF$ и $\lambda_j(C)=\sum_{i=0}^{n-1} c_i(\psi\omega^j)^i$, $j=\overline{0,\, n-1}$.

Доказ. Покажимо, прво, да важи:

$$C_{n,k} = Q\,\mathrm{diag}\left[\psi, \psi\omega, \psi\omega^2, \dots, \psi\omega^{n-1}\right] Q^{-1}, \tag{70}$$

при чему је $Q = WF$.

Нека је $\varphi(\lambda) =\mid C_{n,k} - \lambda I \mid$ карактеристични полином матрице $C_{n,k}$. Лако се може проверити да је $\varphi(\lambda) = (-1)^n(\lambda^n - k)$. Дакле, сопствене вредности матрице $C_{n,k}$ су решења једачине $\lambda^n = k$. Пошто је ψ било који n-ти корен броја k и ω било који примитивни n-ти корен јединице, тада су ψ, $\psi\omega$, $\psi\omega^2$,..., $\psi\omega^{n-1}$ управо n различити корени једначине $\lambda^n = k$. Потребно је одредити сопствене векторе за сваку од добијених сопствених вредности $\lambda_j(C_{n,k}) = \psi\omega^j, j = \overline{0, n-1}$. Одредимо сопствени вектор v_0 који одговара сопственој вредности λ_0 тј. решимо $(C_{n,k} - \psi I)v_0 = 0$.

Лако се добија да је $v_0 = [1, \psi, \psi^2, \ldots, \psi^{n-1}]^T$. На сличан начин добијамо да за $v_j, j = \overline{1, n-1}$, важи: $v_j = [1, \psi\omega^j, (\psi\omega^j)^2, \ldots, (\psi\omega^j)^{n-1}]^T$. Дакле, за матрицу $C_{n,k}$ важи:

$$C_{n,k} = Q \operatorname{diag}\big[\psi, \psi\omega, \psi\omega^2, \ldots, \psi\omega^{n-1}\big]\, Q^{-1},$$

при чему је $Q_{\downarrow j} = v_{j-1}$, $j = \overline{1, n}$.

Уочимо да, на основу леме 2.5 тј. (54), за матрицу C важи:

$$C = p(C_{n,k}), \tag{71}$$

где је $p(x) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i x^i$. Тада, из (70) и (71), добијамо да је

$$\begin{aligned} Q^{-1}CQ &= Q^{-1}p(C_{n,k})Q = p(Q^{-1}C_{n,k}Q) = p(\operatorname{diag}\big[\psi, \psi\omega, \psi\omega^2, \ldots, \psi\omega^{n-1}\big]) \\ &= \operatorname{diag}\big[p(\psi), p(\psi\omega), p(\psi\omega^2), \ldots, p(\psi\omega^{n-1})\big] \\ &= \operatorname{diag}\left[\sum_{i=0}^{n-1} c_i\psi^i, \sum_{i=0}^{n-1} c_i(\psi\omega)^i, \sum_{i=0}^{n-1} c_i(\psi\omega^2)^i, \ldots, \sum_{i=0}^{n-1} c_i(\psi\omega^{n-1})^i\right]. \end{aligned}$$

Дакле,

$$C = Q \operatorname{diag}\left[\sum_{i=0}^{n-1} c_i\psi^i, \sum_{i=0}^{n-1} c_i(\psi\omega)^i, \sum_{i=0}^{n-1} c_i(\psi\omega^2)^i, \ldots, \sum_{i=0}^{n-1} c_i(\psi\omega^{n-1})^i\right] Q^{-1},$$

што је и требало доказати. ▼

Дијагонализацију циркуларних и косоциркуларних матрица анализирао је *P.J. Davis* у [13], док су се дијагонализацијом и одређивањем формула за сопствене вредности k-циркуларних матрица бавили, између осталог, у раду [9] (видети лему 4).

Напомена 2.1. Из чињенице да су сопствене вредности горње-троугаоне матрице једнаке елементима главне дијагонале, закључујемо да су све сопствене вредности матрица облика (48), за $k=0$, једнаке c_0, јер су у питању горње-троугаоне матрице са c_0 дуж главне дијагонале. $\triangledown$

За разлику од инверза C^{-1} инвертибилне k-циркуларне матрице C који је увек k-циркуларна матрица, Мур-Пенроузов инверз $C^{\dagger}$ сингуларне k-циркуларна матрица C не мора бити k-циркуларна матрица. Наиме, важе следећа тврђења.

Лема 2.8. (Лема 5. [9]) Нека је C сингуларна матрица облика (48). Ако је $C^{\dagger}$ k'-циркуларна матрица, тада је $k' = \frac{1}{k}$. $\blacktriangledown$

Лема 2.9. (Теорема 3. [9]) Нека је C сингуларна матрица облика (48). Тада је $C^{\dagger}$ такође k-циркуларна матрица ако и само ако је $|k| = 1$. $\blacktriangledown$

Експлицитну формулу за Мур-Пенроузов инверз сингуларне k-циркуларне матрице одредио је *E. Boman* у [5].

Теорема 2.6. (Теорема 3. [5]) Нека је $C \in \mathbb{C}_r^{n\times n}$ сингуларна матрица облика (48), F и W матрице дате, редом, са (68) и (57). Без губљења на општости претпоставимо да је

$$F^*W^{-1}CWF = \begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

где је D дијагонална матрица реда (и ранга) r. Нека су, такође, ξ_r и C_r, подматрице реда (и ранга) r (на првих r врста и првих r колона), редом, матрице $(F^*\overline{W}WF)^{-1}$ и матрице $F^*\overline{W}WF$. Тада је,

$$C^{\dagger} = \overline{W^{-1}}F \begin{bmatrix} \xi_r^{-1}D^{-1}C_r^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} F^*\overline{W}\,.\blacklozenge \tag{72}$$

Следећи пример илуструје претходну теорему.

Пример 2.4. Нека је

$$C = \text{circ}\{\tfrac{1}{8}(-1, 1, 2)\}$$

тј.

$$C = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ \frac{1}{4} & -1 & 1 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & -1 \end{bmatrix}.$$

Тада је,

$$F = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3}) & -\frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3}) \\ 1 & -\frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3}) & -\frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3}) \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad W = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

Дакле,

$$F^* \overline{W} W F = \frac{1}{32} \begin{bmatrix} 14 & 9 + i\sqrt{3} & 9 - i\sqrt{3} \\ 9 - i\sqrt{3} & 14 & 9 + i\sqrt{3} \\ 9 + i\sqrt{3} & 9 - i\sqrt{3} & 14 \end{bmatrix}$$

и

$$F^* W^{-1} C W F = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

Према томе,

$$\xi_r = \begin{bmatrix} 7 & -(3+2i\sqrt{3}) \\ -(3-2i\sqrt{3}) & 7 \end{bmatrix}, \; D = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

и

$$C_r = \frac{1}{2^5}\begin{bmatrix} 14 & 9+i\sqrt{3} \\ 9-i\sqrt{3} & 14 \end{bmatrix}.$$

На основу претходне теореме добијамо:

$$C^{\dagger} = \overline{W^{-1}} F \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (C_r D \xi_r)^{-1} \end{bmatrix} F^* \overline{W} = \ldots = \tfrac{2}{3^2 7^2} \begin{bmatrix} -44 & 38 & -8 \\ 62 & -107 & 38 \\ 52 & 62 & -44 \end{bmatrix}. \Diamond$$

У раду [29] су такође анализиране k-циркуларне матрице и одређена је експлицитна формула за рачунање позитивног степена k-циркуларне матрице. Наиме, аутори су користећи лему 2.5 тј. (54) и мултиномијалну теорему, дошли до формуле за рачунање C^m, где је C матрица облика (48) и m произвољан позитиван природан број. Дакле, за матрицу C облика (48) и произвољан позитиван природан број m важи:

$$C^m = \sum_{i=0}^{n-1} c_i^{(m)} C_{n,k}^i, \tag{73}$$

где је

$$c_i^{(m)} = \sum_{\substack{j_1+2j_2+\cdots+(n-1)j_{n-1} \equiv i \,(\mathrm{mod}\, n) \\ j_0, j_1, \ldots, j_{n-1} = \overline{0,m}}} \tbinom{m}{j_0, j_1, \ldots, j_{n-1}} c_0^{j_0} c_1^{j_1} \cdots c_{n-1}^{j_{n-1}} k^p,$$

за $p=\lfloor\frac{j_1+2j_2+\cdots+(n-1)j_{n-1}}{n}\rfloor$.

Пример 2.5. Нека је

$$C=\mathrm{circ}\{_{-1}(-1,2,-3,4,-5)\}$$

тј.

$$C=\begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 & 4 & -5 \\ 5 & -1 & 2 & -3 & 4 \\ -4 & 5 & -1 & 2 & -3 \\ 3 & -4 & 5 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & -4 & 5 & -1 \end{bmatrix},$$

и $m=7$. Тада, за $q=j_1+2j_2+3j_3+4j_4$, добијамо да је

$$\begin{aligned} C^7 &= (-I_5+2C_{5,-1}-3C_{5,-1}^2+4C_{5,-1}^3-5C_{5,-1}^4)^7 \\ &= \sum_{\substack{q\,\equiv\,0\,(\mathrm{mod}\,5)\\ j_0,j_1,j_2,j_3,j_4=\overline{0,7}}} \binom{7}{j_0,j_1,j_2,j_3,j_4}(-1)^{j_0}2^{j_1}(-3)^{j_2}4^{j_3}(-5)^{j_4}\,(-1)^{\lfloor\frac{q}{5}\rfloor}I_5 \\ &+ \sum_{\substack{q\,\equiv\,1\,(\mathrm{mod}\,5)\\ j_0,j_1,j_2,j_3,j_4=\overline{0,7}}} \binom{7}{j_0,j_1,j_2,j_3,j_4}(-1)^{j_0}2^{j_1}(-3)^{j_2}4^{j_3}(-5)^{j_4}\,(-1)^{\lfloor\frac{q}{5}\rfloor}C_{5,-1} \\ &+ \sum_{\substack{q\,\equiv\,2\,(\mathrm{mod}\,5)\\ j_0,j_1,j_2,j_3,j_4=\overline{0,7}}} \binom{7}{j_0,j_1,j_2,j_3,j_4}(-1)^{j_0}2^{j_1}(-3)^{j_2}4^{j_3}(-5)^{j_4}\,(-1)^{\lfloor\frac{q}{5}\rfloor}C_{5,-1}^2 \end{aligned}$$

$$+\sum_{\substack{q\,\equiv\,3\,(\mathrm{mod}\,5)\\ j_0,j_1,j_2,j_3,j_4=\overline{0,7}}} \binom{7}{j_0,j_1,j_2,j_3,j_4}(-1)^{j_0}2^{j_1}(-3)^{j_2}4^{j_3}(-5)^{j_4}\,(-1)^{\lfloor\frac{q}{5}\rfloor}C_{5,-1}^{3}$$

$$+\sum_{\substack{q\,\equiv\,4\,(\mathrm{mod}\,5)\\ j_0,j_1,j_2,j_3,j_4=\overline{0,7}}} \binom{7}{j_0,j_1,j_2,j_3,j_4}(-1)^{j_0}2^{j_1}(-3)^{j_2}4^{j_3}(-5)^{j_4}\,(-1)^{\lfloor\frac{q}{5}\rfloor}C_{5,-1}^{4}$$

$$= 5^5(-10932I_5+10933C_{5,-1}-10937C_{5,-1}^2+10938C_{5,-1}^3-10935C_{5,-1}^4)$$

$$= 5^5\mathrm{circ}\{_{-1}(-10932,10933,-10937,10938,-10935)\}$$

тj.

$$C^7=5^5\begin{bmatrix} -10932 & 10933 & -10937 & 10938 & -10935\\ 10935 & -10932 & 10933 & -10937 & 10938\\ -10938 & 10935 & -10932 & 10933 & -10937\\ 10937 & -10938 & 10935 & -10932 & 10933\\ -10933 & 10937 & -10938 & 10935 & -10932 \end{bmatrix}.\ \Diamond$$

3. K-циркуларне матрице са геометријским и аритметичким низом

3.1. K-циркуларне матрице са геометријским низом

У овом делу ће бити презентовани оригинални резултати из радова [46], [47] и [48], којима се, између осталог, уопштавају (и побољшавају) неки резултати добијени у раду [6].

Наиме, подсетимо да је *геометријски низ* низ који има следећи облик:

$$g_0 = g,\ g_1 = gq,\ g_2 = gq^2,\ g_3 = gq^3, \dots \tag{74}$$

где је $g \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ и $q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ тј. $g_i = gq^i, i \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Ако је $q = 1$, (74) је константан низ. Ако је $q = -1$, (74) је алтернирајући низ.

Пример 3.1.1. Низ

а)
$$-2,\ -1,\ -\frac{1}{2},\ -\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \dots$$

је геометријски низ ($g = -2$, $q = \frac{1}{2}$). $\Diamond$

б)
$$-\frac{1}{3},\ -1,\ -3,\ -9,\ -27,\dots$$
је геометријски низ ($g=-\frac{1}{3}$, $q=3$). $\lozenge$

в)
$$\frac{3}{4},\ \frac{3}{2},\ 3,\ 6,\ 12,\dots$$
је геометријски низ ($g=\frac{3}{4}$, $q=2$). $\lozenge$

Добро је познато да је сума првих n чланова геометријског низа са првим чланом (g) и заједничким количником између чланова ($q\neq 0$ и $q\neq 1$) дата следећом формулом:
$$\sum_{i=0}^{n-1} g_i = g\frac{1-q^n}{1-q}\,. \tag{75}$$
Ако је $q=1$, тада је
$$\sum_{i=0}^{n-1} g_i = ng\,. \tag{76}$$
За сваки члан g_i геометријског низа важи:
$$g_i^2 = g_{i-1}g_{i+1}. \tag{77}$$

У раду [6] *A.C.F. Bueno* је анализирао матрице облика:
$$\mathrm{circ}\{(g, gq, gq^2, \dots, gq^{n-1})\}, \tag{78}$$
где је $g\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$ и $q\in\mathbb{R}\backslash\{0,1\}$, тј. матрице облика:
$$\begin{bmatrix} g & gq & gq^2 & \dots & gq^{n-2} & gq^{n-1} \\ gq^{n-1} & g & gq & \dots & gq^{n-3} & gq^{n-2} \\ gq^{n-2} & gq^{n-1} & g & \dots & gq^{n-4} & gq^{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ gq^2 & gq^3 & gq^4 & \dots & g & gq \\ gq & gq^2 & gq^3 & \dots & gq^{n-1} & g \end{bmatrix}, \tag{79}$$

и одредио:

1) Сопствене вредности таквих матрица.

Теорема 3.1.1. (Теорема 3.2. [6]) Нека је G матрица облика (78). Сопствене вредности матрице G су:

$$\lambda_0(G)=\sum_{i=0}^{n-1} g_i = g\frac{q^n-1}{q-1},\ \lambda_j(G)=\sum_{i=0}^{n-1} g_i\omega^{-ji} = g\frac{q^n-1}{q\omega^{-j}-1},\ j=\overline{1,n-1}\,.\ \blacklozenge \tag{80}$$

2) Детерминанту таквих матрица.

Теорема 3.1.2. (Теорема 3.1. [6]) Нека је G матрица облика (78). Детерминанта матрице G је:

$$|\,G\,| = g^n(1-q^n)^{n-1}\,.\ \blacklozenge \tag{81}$$

3) Еуклидску норму таквих матрица.

Теорема 3.1.3. (Теорема 3.3. [6]) Нека је G матрица облика (78). Еуклидска норма матрице G је:

$$\|G\|_E = |g|\sqrt{\frac{n(1-q^{2n})}{1-q^2}}\ .\ \blacklozenge \tag{82}$$

4) Спектралну норму таквих матрица.

Теорема 3.1.4. (Теорема 3.4. [6]) Нека је G матрица облика (78). Спектрална норма матрице G је:

$$\|G\|_2 = \max\{|\sum_{i=0}^{n-1} g_i|, \frac{|g(q^n-1)|}{\sqrt{q^2-2q\cos\frac{2\pi ij}{n}+1}},\ i=\sqrt{-1}, j=\overline{1,n-1}\}\ .\ \blacklozenge \tag{83}$$

Као последице претходно наведених теорема извео је слична тврђења за инверз циркуларне матрице са геометријским низом чији је експлицитни облик одредио.

Теорема 3.1.5. (Теорема 3.8. [6]) Нека је G матрица облика (78). Инверз матрице G је:

$$G^{-1} = \frac{1}{g(q^n-1)} \begin{bmatrix} -1 & q & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & q & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & q \\ q & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \end{bmatrix}. \blacklozenge \tag{84}$$

Напомена 3.1.1.

1) У теореми 3.1.1 нису анализирани случајеви када је именилац једнак 0, па добијеним формулама није могуће одредити све сопствене вредности. На пример, за матрице облика (78) када је $q=-1$ и n произвољан паран природан број, није могуће одредити $\lambda_{\frac{n}{2}}$. Побољшан резултат биће дат нешто касније у тексту при презентовању оригиналних резултата.

2) Теоремом 3.1.3 није могуће одредити Еуклидску норму за матрице облика (78) када је $q = -1$ и n произвољан природан број. Побољшан резултат биће дат нешто касније у тексту при презентовању оригиналних резултата.

3) Формулација теореме 3.1.5 садржи недостатак. Наиме, Bueno из формулације теореме није искључио матрице облика (78) када је $q=-1$ и n произвољан паран природан број, чија је детерминанта према теореми 3.1.2 једнака 0 па њихов инверз не постоји. $\triangledown$

Као што је наведено у претходној напомени, инверз за матрице облика:

$$\mathrm{circ}_n\{(g, -g, \dots, g, -g)\} \tag{85}$$

не постоји. У раду [46] смо одредили експлицитни облик Мур-Пенроузовог инверза за комплексне матрице облика (85).

Теорема 3.1.6. (Теорема 3.2. [46]) Нека je G комплексна матрица облика (85). Тада je,

$$G^{\dagger} = \frac{1}{n^2 g}\,\mathrm{circ}_n\{(1,-1,\dots,1,-1)\}. \tag{86}$$

Доказ. Уочимо да je $r(G)\!=\!1$ и $G_{\downarrow j}\!\neq\! O$, $j=\overline{1,n}$. Нека je $G\!=\![G_1|G_2]$, где je $G_1\in\mathbb{C}^{n\times 1}$ и $G_2\in\mathbb{C}^{n\times(n-1)}$. Пошто je $G_{\downarrow 1}\neq O$, следи да je $r(G_1)=1$. Према леми 1.2, матрица G има факторизацију (пуног ранга)

$$G = G_1 N,$$

где je

$$N\!=\![1,-1,\dots,1,-1]\!\in\!\mathbb{R}_1^{1\times n}.$$

Према томе,

$$G_1^* G_1 N N^* \!=\! [\overline{g},-\overline{g},\dots,\overline{g},-\overline{g}] \begin{bmatrix} g \\ -g \\ \vdots \\ g \\ -g \end{bmatrix} [1,-1,\dots,1,-1] \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ \vdots \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \!=\! n^2\overline{g}g.$$

На основу теореме 1.2 следи

$$\begin{aligned} G^{\dagger} &= N^*(G_1^* G_1 N N^*)^{-1} G_1^* \\ &= (n^2\overline{g}g)^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ \vdots \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} [\overline{g},-\overline{g},\dots,\overline{g},-\overline{g}] \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{n^2\overline{g}g}\,\mathrm{circ}_n\{(\overline{g},-\overline{g},\ldots,\overline{g},-\overline{g})\}$$

$$= \frac{1}{n^2\overline{g}g}\,\overline{g}\,\mathrm{circ}_n\{(1,-1,\ldots,1,-1)\}$$

$$= \frac{1}{n^2 g}\,\mathrm{circ}_n\{(1,-1,\ldots,1,-1)\}\ .\ \blacklozenge$$

Напомена 3.1.2. С обзиром да је $G^2 = \mathrm{circ}_n\{(ng^2,-ng^2,\ldots,ng^2,-ng^2)\}$ тј. $r(G)=r(G^2)=1$, на основу теореме 1.4, закључујемо да групни инверз матрице (85) постоји. Из напомене 1.1 следи да је матрица (86) такође и групни инверз за (85). $\triangledown$

Пример 3.1.2. Нека је

$$G=\mathrm{circ}\{(1-i\sqrt{2},-1+i\sqrt{2},1-i\sqrt{2},-1+i\sqrt{2},1-i\sqrt{2},-1+i\sqrt{2})\}$$

тј.

$$G=\begin{bmatrix} 1-i\sqrt{2} & -1+i\sqrt{2} & 1-i\sqrt{2} & -1+i\sqrt{2} & 1-i\sqrt{2} & -1+i\sqrt{2} \\ -1+i\sqrt{2} & 1-i\sqrt{2} & -1+i\sqrt{2} & 1-i\sqrt{2} & -1+i\sqrt{2} & 1-i\sqrt{2} \\ 1-i\sqrt{2} & -1+i\sqrt{2} & 1-i\sqrt{2} & -1+i\sqrt{2} & 1-i\sqrt{2} & -1+i\sqrt{2} \\ -1+i\sqrt{2} & 1-i\sqrt{2} & -1+i\sqrt{2} & 1-i\sqrt{2} & -1+i\sqrt{2} & 1-i\sqrt{2} \\ 1-i\sqrt{2} & -1+i\sqrt{2} & 1-i\sqrt{2} & -1+i\sqrt{2} & 1-i\sqrt{2} & -1+i\sqrt{2} \\ -1+i\sqrt{2} & 1-i\sqrt{2} & -1+i\sqrt{2} & 1-i\sqrt{2} & -1+i\sqrt{2} & 1-i\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

Пошто је $n=6$, $g=1-i\sqrt{2}$ и $q=-1$ тј. $g^n(1-q^n)^{n-1}=0$, G је сингуларна матрица (теорема 3.1.2). На основу претходне теореме и претходне напомене следи

$$G^{\dagger}=G^{\sharp}=\frac{1+i\sqrt{2}}{2^2 3^3}\,\mathrm{circ}\{(1,-1,1,-1,1,-1)\}$$

тј.

$$G^{\dagger} = G^{\sharp} = \frac{1+i\sqrt{2}}{2^2 3^3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}. \ \Diamond$$

У наставку презентујемо оригиналне резултате, добијене у радовима [47] и [48], који се односе на матрице облика:

$$\mathrm{circ}\{_k(g, gq, gq^2, \ldots, gq^{n-1})\}, \tag{87}$$

где је $k \in \mathbb{C}$, $g \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ и $q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, тј. матрице облика:

$$\begin{bmatrix} g & gq & gq^2 & \ldots & gq^{n-2} & gq^{n-1} \\ kgq^{n-1} & g & gq & \ldots & gq^{n-3} & gq^{n-2} \\ kgq^{n-2} & kgq^{n-1} & g & \ldots & gq^{n-4} & gq^{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ kgq^2 & kgq^3 & kgq^4 & \ldots & g & gq \\ kgq & kgq^2 & kgq^3 & \ldots & kgq^{n-1} & g \end{bmatrix}. \tag{88}$$

Теорема 3.1.7. ([47]) Нека је G матрица облика (87), при чему је $k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Сопствене вредности матрице G дате су следећим формулама:

1) Ако је $q\psi\omega^{-j} = 1$, тада је

$$\lambda_j(G) = ng, \tag{89}$$

2) Ако је $q\psi\omega^{-j} \neq 1$, тада је

$$\lambda_j(G) = g\frac{1-kq^n}{1-q\psi\omega^{-j}}\,. \tag{90}$$

Доказ. На основу леме 2.7 следи:

1) Претпоставимо да је $q\psi\omega^{-j}=1$. Тада је,

$$\lambda_j(G)=\sum_{i=0}^{n-1} g_i(\psi\omega^{-j})^i=\sum_{i=0}^{n-1} gq^i(\frac{1}{q})^i=g\sum_{i=0}^{n-1}1=ng,$$

2) Претпоставимо да је $q\psi\omega^{-j}\neq 1$. Тада је,

$$\lambda_j(G)=\sum_{i=0}^{n-1} g_i(\psi\omega^{-j})^i=g\sum_{i=0}^{n-1}(q\psi\omega^{-j})^i=g\frac{1-kq^n}{1-q\psi\omega^{-j}}\,.\blacklozenge$$

Напомена 3.1.3. Из претходне теореме, за $k=1$, добијамо побољшан резултат теореме 3.1.1. Ако је $k=0$, све сопствене вредности матрица облика (87) су, на основу напомене 2.1, једнаке g. $\triangledown$

Следећи оригинални резултат односи се на детерминанту матрице облика (87). Прво ћемо одредити детерминанту матрице облика:

$$\mathrm{circ}\{_k(1,q,q^2,\ldots,q^{n-1})\},\tag{91}$$

где је $k\in\mathbb{C}$ и $q\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$, тј. матрице облика:

$$\begin{bmatrix} 1 & q & q^2 & \ldots & q^{n-2} & q^{n-1}\\ kq^{n-1} & 1 & q & \ldots & q^{n-3} & q^{n-2}\\ kq^{n-2} & kq^{n-1} & 1 & \ldots & q^{n-4} & q^{n-3}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ kq^2 & kq^3 & kq^4 & \ldots & 1 & q\\ kq & kq^2 & kq^3 & \ldots & kq^{n-1} & 1 \end{bmatrix}.\tag{92}$$

Теорема 3.1.8. ([47]) Нека је Q матрица облика (91). Детерминанта матрице Q је:

$$|\,Q\,|=(1-kq^n)^{n-1}.\tag{93}$$

Доказ. Применом основних својстава детерминанти добијамо:

$$|Q|=\begin{vmatrix} 1 & q & q^2 & \dots & q^{n-2} & q^{n-1} \\ kq^{n-1} & 1 & q & \dots & q^{n-3} & q^{n-2} \\ kq^{n-2} & kq^{n-1} & 1 & \dots & q^{n-4} & q^{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ kq^2 & kq^3 & kq^4 & \dots & 1 & q \\ kq & kq^2 & kq^3 & \dots & kq^{n-1} & 1 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & q & q^2 & \dots & q^{n-2} & q^{n-1} \\ 0 & 1-kq^n & q(1-kq^n) & \dots & q^{n-3}(1-kq^n) & q^{n-2}(1-kq^n) \\ 0 & 0 & 1-kq^n & \dots & q^{n-4}(1-kq^n) & q^{n-3}(1-kq^n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1-kq^n & q(1-kq^n) \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1-kq^n \end{vmatrix}.$$

Дакле, $|Q|=(1-kq^n)^{n-1}$. ♦

Последица 3.1.1. ([47]) Нека је G матрица облика (87). Детерминанта матрице G је:

$$|G|=g^n(1-kq^n)^{n-1}. \tag{94}$$

Доказ. Следи из претходне теореме и (5). △

Еуклидска норма за матрице облика (87) дата је следећом теоремом. За њен доказ користимо следећу формулу:

За свако x важи:

$$\sum_{i=1}^{n-1} ix^i = \frac{x - nx^n + (n-1)x^{n+1}}{(1-x)^2}\,. \tag{95}$$

Наиме,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n-1} ix^i &= x\left[1 + 2x + 3x^2 + \cdots + (n-1)x^{n-2}\right] = x\frac{d}{dx}\left(\frac{x-x^n}{1-x}\right)\\ &= x\,\frac{(1-nx^{n-1})(1-x) + x - x^n}{(1-x)^2} = \frac{x - nx^n + (n-1)x^{n+1}}{(1-x)^2}\,.\end{aligned}$$

Теорема 3.1.9. ([47]) Нека је G матрица облика (87). Еуклидска норма матрице G је:

$$\|G\|_E = \begin{cases} |g|\sqrt{n\frac{1-q^{2n}}{1-q^2} + (|k|^2-1)\frac{q^2 - nq^{2n} + (n-1)q^{2(n+1)}}{(1-q^2)^2}}, & q \in \mathbb{R}\setminus\{-1,0,1\} \\ |g|\sqrt{n^2 + (|k|^2-1)\frac{(n-1)n}{2}}, & q=-1 \text{ или } q=1 \end{cases}. \tag{96}$$

Доказ. На основу дефиниције Еуклидске норме матрице добијамо:

$$\begin{aligned}(\|G\|_E)^2 &= n|g_0|^2 + \left[(n-1) + |k|^2\right]|g_1|^2 + \cdots + \left[1 + (n-1)|k|^2\right]|g_{n-1}|^2\\ &= \sum_{i=0}^{n-1}(n-i)|g_i|^2 + |k|^2\sum_{i=1}^{n-1} i|g_i|^2 = n\sum_{i=0}^{n-1}|g_i|^2 + (|k|^2-1)\sum_{i=1}^{n-1} i|g_i|^2\\ &= n|g|^2\sum_{i=0}^{n-1} q^{2i} + (|k|^2-1)|g|^2\sum_{i=1}^{n-1} iq^{2i}\,.\end{aligned}$$

Претпоставимо да је $q \in \mathbb{R}\setminus\{-1,0,1\}$. Тада је,

$$\begin{aligned}(\|G\|_E)^2 &= n|g|^2\frac{1-q^{2n}}{1-q^2} + (|k|^2-1)|g|^2\frac{q^2 - nq^{2n} + (n-1)q^{2(n+1)}}{(1-q^2)^2}\\ &= |g|^2\left[\frac{1-q^{2n}}{1-q^2} + (|k|^2-1)\frac{q^2 - nq^{2n} + (n-1)q^{2(n+1)}}{(1-q^2)^2}\right].\end{aligned}$$

Претпоставимо да је $q=-1$ или $q=1$. Тада је,

$$(\|G\|_E)^2 \;=\; n|g|^2\sum_{i=0}^{n-1}1+(|k|^2-1)|g|^2\sum_{i=1}^{n-1}i=|g|^2\left[n^2+(|k|^2-1)\frac{(n-1)n}{2}\right].$$

Дакле,

$$\|G\|_E=\begin{cases}|g|\sqrt{n\frac{1-q^{2n}}{1-q^2}+(|k|^2-1)\frac{q^2-nq^{2n}+(n-1)q^{2(n+1)}}{(1-q^2)^2}}, & q\in\mathbb{R}\backslash\{-1,0,1\}\\ |g|\sqrt{n^2+(|k|^2-1)\frac{(n-1)n}{2}}, & q=-1 \text{ или } q=1\end{cases}. \blacklozenge$$

Напомена 3.1.4. Из претходне теореме, за $k=1$, добијамо побољшан резултат теореме 3.1.3. $\triangledown$

Следећом теоремом одређујемо границе за спектралну норму матрица облика (87).

Теорема 3.1.10. ([47]) Нека је G матрица облика (87).

I) Ако је $q\in\mathbb{R}\backslash\{-1,0,1\}$ и

1) $|k|\geq 1$, тада је

$$|g|\sqrt{\frac{1-q^{2n}}{1-q^2}}\leq\|G\|_2\leq|g|\sqrt{(1+(n-1)|k|^2)\left(\frac{1-q^{2n}}{1-q^2}\right)}, \tag{97}$$

2) $|k|<1$, тада је

$$|kg|\sqrt{\frac{1-q^{2n}}{1-q^2}}\leq\|G\|_2\leq|g|\sqrt{n\frac{1-q^{2n}}{1-q^2}}\,. \tag{98}$$

II) Ако је $q=-1$ или $q=1$, и

1) $|k| \geq 1$, тада је

$$|g|\sqrt{n} \leq \|G\|_2 \leq |g|\sqrt{n\,(1+(n-1)|k|^2)}\ , \tag{99}$$

2) $|k| < 1$, тада је

$$|kg|\sqrt{n} \leq \|G\|_2 \leq n|g|\ . \tag{100}$$

Доказ. Из дефиниције Еуклидске норме следи:

I) Претпоставимо да је $q\in\mathbb{R}\setminus\{-1,0,1\}$ и

1) $|k| \geq 1$. Тада је,

$$\|G\|_E^2 \geq \sum_{i=0}^{n-1}(n-i)|g_i|^2 + \sum_{i=1}^{n-1} i|g_i|^2 = n\sum_{i=0}^{n-1}|g_i|^2 = n|g|^2\sum_{i=0}^{n-1}q^{2i} = n|g|^2\frac{1-q^{2n}}{1-q^2}.$$

Дакле,

$$\frac{\|G\|_E}{\sqrt{n}} \geq |g|\sqrt{\frac{1-q^{2n}}{1-q^2}}\,.$$

Из (18) закључујемо да је

$$\|G\|_2 \geq |g|\sqrt{\frac{1-q^{2n}}{1-q^2}}\,.$$

Одредимо сада горњу границу за спектралну норму матрице G. Нека су R и S следеће матрице:

$$R=\begin{bmatrix} g_0 & g_0 & g_0 & \dots & g_0 \\ kg_0 & g_0 & g_0 & \dots & g_0 \\ kg_0 & kg_0 & g_0 & \dots & g_0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ kg_0 & kg_0 & kg_0 & \dots & g_0 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad S=\begin{bmatrix} 1 & q & q^2 & \dots & q^{n-1} \\ q^{n-1} & 1 & q & \dots & q^{n-2} \\ q^{n-2} & q^{n-1} & 1 & \dots & q^{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q & q^2 & q^3 & \dots & 1 \end{bmatrix}. \tag{101}$$

Тада је,

$$\begin{aligned} r_1(R) &= \max_{1\le i\le n}\sqrt{\sum_{j=1}^{n} \mid r_{i,j}\mid^2} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \mid r_{n,j}\mid^2} = \sqrt{|g_0|^2 + \sum_{j=1}^{n-1}|kg_0|^2} \\ &= \sqrt{|g|^2+(n-1)|kg|^2} = |g|\sqrt{1+(n-1)|k|^2} \end{aligned}$$

и

$$c_1(S) = \max_{1\le j\le n}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \mid s_{i,j}\mid^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \mid s_{i,n}\mid^2} = \sqrt{\sum_{i=0}^{n-1} q^{2i}} = \sqrt{\tfrac{1-q^{2n}}{1-q^2}}\ .$$

Пошто је $G = R\circ S$, на основу леме 1.3, следи

$$\|G\|_2 \le r_1(R)\cdot c_1(S) = |g|\sqrt{(1+(n-1)|k|^2)\left(\frac{1-q^{2n}}{1-q^2}\right)}\ .$$

2) $|k| < 1$. Тада је,

$$\begin{aligned} \|G\|_E^2 &\ge |k|^2\sum_{i=0}^{n-1}(n-i)|g_i|^2 + |k|^2\sum_{i=1}^{n-1} i|g_i|^2 = n|k|^2\sum_{i=0}^{n-1}|g_i|^2 \\ &= n|kg|^2\sum_{i=0}^{n-1} q^{2i} = n|kg|^2\frac{1-q^{2n}}{1-q^2}. \end{aligned}$$

Дакле,

$$\frac{\|G\|_E}{\sqrt{n}} \ge |kg|\sqrt{\frac{1-q^{2n}}{1-q^2}}\ .$$

Из (18) закључујемо да је

$$\|G\|_2 \ge |kg|\sqrt{\frac{1-q^{2n}}{1-q^2}}\ .$$

Одредимо сада горњу границу за спектралну норму матрице G. Нека су M и N следеће матрице:

$$M=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ k & 1 & 1 & \dots & 1 \\ k & k & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k & k & k & \dots & 1 \end{bmatrix} \text{ и } N=\begin{bmatrix} g_0 & g_1 & g_2 & \cdots & g_{n-1} \\ g_{n-1} & g_0 & g_1 & \cdots & g_{n-2} \\ g_{n-2} & g_{n-1} & g_0 & \cdots & g_{n-} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_1 & g_2 & g_3 & \cdots & g_0 \end{bmatrix}. \tag{102}$$

Тада је,

$$r_1(M) = \max_{1 \le i \le n} \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \mid m_{i,j} \mid^2} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \mid m_{1,j} \mid^2} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} 1} = \sqrt{n}$$

и

$$\begin{aligned} c_1(N) &= \max_{1 \le j \le n} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \mid n_{i,j} \mid^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \mid n_{i,1} \mid^2} = \sqrt{\sum_{i=0}^{n-1} |g_i|^2} \\ &= \sqrt{|g|^2 \sum_{i=0}^{n-1} q^{2i}} = |g| \sqrt{\tfrac{1-q^{2n}}{1-q^2}}. \end{aligned}$$

Пошто је $G = M \circ N$, на основу леме 1.3, следи

$$\|G\|_2 \le r_1(M) \cdot c_1(N) = |g| \sqrt{n \frac{1-q^{2n}}{1-q^2}} \; .$$

II) Претпоставимо да је $q=-1$ или $q=1$, и

1) $|k| \ge 1$. Тада је,

$$\|G\|_E^2 \ge \sum_{i=0}^{n-1} (n-i)|g_i|^2 + \sum_{i=1}^{n-1} i|g_i|^2 = n \sum_{i=0}^{n-1} |g_i|^2 = n|g|^2 \sum_{i=0}^{n-1} 1 = n^2|g|^2.$$

Дакле,

$$\frac{\|G\|_E}{\sqrt{n}} \ge |g|\sqrt{n} \, .$$

Из (18) закључујемо да je

$$\|G\|_2 \geq |g|\sqrt{n}\,.$$

Одредимо сада горњу границу за спектралну норму матрице G. Нека су R и S матрице као у (101). Тада je,

$$\begin{aligned} r_1(R) &= \max_{1\leq i\leq n} \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \mid r_{i,j} \mid^2} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \mid r_{n,j} \mid^2} = \sqrt{|g_0|^2 + \sum_{j=1}^{n-1} |kg_0|^2} \\ &= \sqrt{|g|^2 + (n-1)|kg|^2} = |g|\sqrt{1+(n-1)|k|^2} \end{aligned}$$

и

$$c_1(S) = \max_{1\leq j\leq n} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \mid s_{i,j} \mid^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \mid s_{i,n} \mid^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} 1} = \sqrt{n}\ .$$

Пошто je $G = R \circ S$, на основу леме 1.3, следи

$$\|G\|_2 \leq r_1(M)\cdot c_1(N) = |g|\sqrt{n\,(1+(n-1)|k|^2)}\ .$$

2) $|k| < 1$. Тада je,

$$\begin{aligned} \|G\|_E^2 &\geq |k|^2 \sum_{i=0}^{n-1}(n-i)|g_i|^2 + |k|^2 \sum_{i=1}^{n-1} i|g_i|^2 = n|k|^2 \sum_{i=0}^{n-1} |g_i|^2 \\ &= n|kg|^2 \sum_{i=0}^{n-1} 1 = n^2|kg|^2. \end{aligned}$$

Дакле,

$$\frac{\|G\|_E}{\sqrt{n}} \geq |kg|\sqrt{n}.$$

Из (18) закључујемо да je

$$\|G\|_2 \geq |kg|\sqrt{n}.$$

Одредимо сада горњу границу за спектралну норму матрице G. Нека су M и N матрице као у (102). Тада је,

$$r_1(M) = \max_{1 \le i \le n} \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \mid m_{i,j} \mid^2} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \mid m_{1,j} \mid^2} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} 1} = \sqrt{n}$$

и

$$\begin{aligned} c_1(N) &= \max_{1 \le j \le n} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \mid n_{i,j} \mid^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \mid n_{i,1} \mid^2} = \sqrt{\sum_{i=0}^{n-1} |g_i|^2} \\ &= \sqrt{|g|^2 \sum_{i=0}^{n-1} 1} = |g|\sqrt{n}. \end{aligned}$$

Пошто је $G = M \circ N$, на основу леме 1.3, следи

$$\|G\|_2 \le r_1(M) \cdot c_1(N) = n|g| \ . \ \blacklozenge$$

У наставку одређујемо, ако постоји ($1-kq^n \neq 0$, теорема 3.1.8), инверз за матрице облика (91).

Теорема 3.1.11. (Теорема 2.2. [48]) Нека је n природан број већи од 1 и Q матрица облика (91), при чему је $k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Ако је $1-kq^n \neq 0$, тада је

$$Q^{-1} = \frac{1}{kq^n - 1} \operatorname{circ}_n\{_k(-1, q, 0, \ldots, 0)\} \ . \tag{103}$$

Доказ. Нека је $Q^{-1} = \operatorname{circ}\{_k(q'_0, q'_1, q'_2, \ldots, q'_{n-1})\}$. На основу леме 2.4 $(q'_0, q'_1, q'_2, \ldots, q'_{n-1})$ је јединствено решење следећег система линеарних једначина:

$$Q \begin{bmatrix} x_0 \\ kx_{n-1} \\ \vdots \\ kx_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} . \tag{104}$$

Нека је $y_i = kx_i$, $i = \overline{1, n-1}$. Треба решити следећи систем линеарних једначина:

$$Q \begin{bmatrix} x_0 \\ y_{n-1} \\ \vdots \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{105}$$

Применом елементарних трансформација над редовима проширене матрице добијамо:

$$\overline{Q} = \begin{bmatrix} 1 & q & q^2 & \dots & q^{n-2} & q^{n-1} & 1 \\ kq^{n-1} & 1 & q & \dots & q^{n-3} & q^{n-2} & 0 \\ kq^{n-2} & kq^{n-1} & 1 & \dots & q^{n-4} & q^{n-3} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ kq^2 & kq^3 & kq^4 & \dots & 1 & q & 0 \\ kq & kq^2 & kq^3 & \dots & kq^{n-1} & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & q & q^2 & \dots & q^{n-2} & q^{n-1} & 1 \\ 0 & 1-kq^n & q(1-kq^n) & \dots & q^{n-3}(1-kq^n) & q^{n-2}(1-kq^n) & -kq^{n-1} \\ 0 & 0 & 1-kq^n & \dots & q^{n-4}(1-kq^n) & q^{n-3}(1-kq^n) & -kq^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1-kq^n & q(1-kq^n) & -kq^2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1-kq^n & -kq \end{bmatrix}.$$

Дакле, систем линеарних једначина (105) је еквивалентан следећем систему линеарних једначина:

$$\begin{cases} x_0 + \sum_{i=1}^{n-1} q^i y_{n-i} = 1, \\ \sum_{i=1}^{j} q^{j-i}(1-kq^n) y_i = -kq^j, \; j = \overline{1, n-1}. \end{cases} \tag{106}$$

Решење система (106) је:

$$\begin{cases} x_0 = -\frac{1}{kq^n-1}, \\ y_1 = \frac{kq}{kq^n-1}, \\ y_i = 0,\ i = \overline{2, n-1}\ . \end{cases} \tag{107}$$

Пошто је систем (106) еквивалентан систему (105), следи да је (107) такође решење система (105). Преме томе, решење систем (104) је:

$$\begin{cases} x_0 = -\frac{1}{kq^n-1}, \\ x_1 = \frac{q}{kq^n-1}, \\ x_i = 0,\ i = \overline{2, n-1}\ . \end{cases} \quad \blacklozenge$$

Последица 3.1.2. (Последица 2.1. [48]) Нека је n природан број већи од 1 и G матрица облика (87), при чему је $k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Ако је $1 - kq^n \neq 0$, тада је

$$G^{-1} = \frac{1}{g(kq^n-1)} \operatorname{circ}_n\{_k(-1, q, 0, \ldots, 0)\}\ . \tag{108}$$

Доказ. Следи из претходне теореме и првог дела теореме 1.1. $\triangle$

Пример 3.1.3. Нека је

$$G = \operatorname{circ}\{_3(-18, -6, -2, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{9})\}$$

тј.

$$G = \begin{bmatrix} -18 & -6 & -2 & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{9} \\ -\frac{2}{3} & -18 & -6 & -2 & -\frac{2}{3} \\ -2 & -\frac{2}{3} & -18 & -6 & -2 \\ -6 & -2 & -\frac{2}{3} & -18 & -6 \\ -18 & -6 & -2 & -\frac{2}{3} & -18 \end{bmatrix}.$$

Пошто је $n=5$, $k=3$, $g=-18$ и $q=\frac{1}{3}$ тј. $g^n(1-kq^n)^{n-1}=-\frac{2^{21}5^4}{3^6}\neq 0$, G је инвертибилна матрица (последица 3.1.1). На основу претходне последице следи

$$G^{-1}=\frac{3^2}{2^5 5}\,\mathrm{circ}\{_3(-1,\frac{1}{3},0,0,0)\}$$

тј.

$$G^{-1}=\frac{3^2}{2^5 5}\begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \ \Diamond$$

Као што смо видели, инверз за матрице облика (91) постоји ако је $1-kq^n\neq 0$. Дакле, ако је $1-kq^n=0$ тј. $k=\frac{1}{q^n}$, тада је (91) сингуларна матрица. Следећим теоремама одређен је Мур-Пенроузов инверз за такве матрице.

Теорема 3.1.12. (Теорема 2.4. [48]) Нека је n природан број већи од 1, $q\in\mathbb{R}\setminus\{-1,0,1\}$ и

$$Q=\mathrm{circ}\{_{\frac{1}{q^n}}(1,q,q^2,\ldots,q^{n-1})\}. \tag{109}$$

Тада је,

$$Q^{\dagger}=q^{2(n-1)}(\frac{1-q^2}{1-q^{2n}})^2\,\mathrm{circ}\{_{q^n}(1,\frac{1}{q},\frac{1}{q^2},\ldots,\frac{1}{q^{n-1}})\}\ . \tag{110}$$

Доказ. Уочимо да је $r(Q)=1$ и $Q_{\downarrow j}\neq O$, $j=\overline{1,n}$. Нека је $Q=[Q_1|Q_2]$, где је $Q_1\in\mathbb{R}^{n\times 1}$ и $Q_2\in\mathbb{R}^{n\times(n-1)}$. Пошто је $Q_{\downarrow 1}\neq O$, следи да је $r(Q_1)=1$. Према леми 1.2, матрица Q има факторизацију (пуног ранга)

$$Q=Q_1N,$$

где je

$$N=[1,q,q^2,\dots,q^{n-1}]\in\mathbb{R}_1^{1\times n}.$$

Према томе,

$$\begin{aligned}
Q_1^*Q_1NN^* &= [1,\frac{1}{q},\frac{1}{q^2},\dots,\frac{1}{q^{n-1}}]\begin{bmatrix}1\\ \frac{1}{q}\\ \frac{1}{q^2}\\ \vdots\\ \frac{1}{q^{n-1}}\end{bmatrix}[1,q,q^2,\dots,q^{n-1}]\begin{bmatrix}1\\ q\\ q^2\\ \vdots\\ q^{n-1}\end{bmatrix}\\
&= \frac{1}{q^{2(n-1)}}(\sum_{m=0}^{n-1}q^{2m})^2.
\end{aligned}$$

На основу теореме 1.2 следи

$$\begin{aligned}
Q^{\dagger} &= N^*(Q_1^*Q_1NN^*)^{-1}Q_1^*\\
&= (\frac{1}{q^{2(n-1)}}(\sum_{m=0}^{n-1}q^{2m})^2)^{-1}\begin{bmatrix}1\\ q\\ q^2\\ \vdots\\ q^{n-1}\end{bmatrix}[1,\frac{1}{q},\frac{1}{q^2},\dots,\frac{1}{q^{n-1}}]\\
&= q^{2(n-1)}\frac{1}{(\sum_{m=0}^{n-1}q^{2m})^2}\ \mathrm{circ}\{_{q^n}(1,\frac{1}{q},\frac{1}{q^2},\dots,\frac{1}{q^{n-1}})\}\\
&= q^{2(n-1)}(\frac{1-q^2}{1-q^{2n}})^2\,\mathrm{circ}\{_{q^n}(1,\frac{1}{q},\frac{1}{q^2},\dots,\frac{1}{q^{n-1}})\}\ .\ \blacklozenge
\end{aligned}$$

Последица 3.1.3. Нека је n природан број већи од 1, $g \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $q \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$ и

$$G = \mathrm{circ}\{_{\frac{1}{q^n}}(g, gq, gq^2, \dots, gq^{n-1})\}. \tag{111}$$

Тада је,

$$G^{\dagger} = \frac{q^{2(n-1)}}{g}\left(\frac{1-q^2}{1-q^{2n}}\right)^2 \mathrm{circ}\{_{q^n}(1, \frac{1}{q}, \frac{1}{q^2}, \dots, \frac{1}{q^{n-1}})\}. \tag{112}$$

Доказ. Следи из претходне теореме и првог дела теореме 1.3. $\triangle$

Пример 3.1.4. Нека је

$$G = \mathrm{circ}\{_{-32}(2, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{8})\}$$

тј.

$$G = \begin{bmatrix} 2 & -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ -4 & 2 & -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 8 & -4 & 2 & -1 & \frac{1}{2} \\ -16 & 8 & -4 & 2 & -1 \\ 32 & -16 & 8 & -4 & 2 \end{bmatrix}.$$

Пошто је $n = 5$, $k = -32$, $g = 2$ и $q = -\frac{1}{2}$ тј. $g^n(1 - kq^n)^{n-1} = 0$, G је сингуларна матрица (последица 3.1.1). На основу претходне последице следи

$$G^{\dagger} = \frac{2^7}{11^2 31^2}\, \mathrm{circ}\{_{-\frac{1}{32}}(1, -2, 4, -8, 16)\}$$

тј.

$$G^{\dagger} = \frac{2^7}{11^2 31^2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 & -8 & 16 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -2 & 4 & -8 \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 1 & -2 & 4 \\ -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 1 & -2 \\ \frac{1}{16} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}. \ \Diamond$$

У претходном делу, одређен је Мур-Пенроузов инверз за матрице облика (111) где је $g\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ и $q\in\mathbb{R}\setminus\{-1,0,1\}$. Следећим тврђењима одређујемо Мур-Пенроузов инверз за матрице облика (111) када је $q=1$ и $q=-1$.

Теорема 3.1.13. (Теорема 3.5. [46]) Нека је n природан број већи од 1, $g\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ и

$$G=\mathrm{circ}_n\{(g,g,\ldots,g)\}\ . \tag{113}$$

Тада је,

$$G^{\dagger}=\frac{1}{n^2g}\,\mathrm{circ}_n\{(1,1,\ldots,1)\}\ . \tag{114}$$

Доказ. Пошто се применом елементарних операција $(-G_{1\rightarrow}+G_{i\rightarrow}, i=\overline{2,n})$ из матрице G добија матрица

$$G_1=\begin{bmatrix} g & g & g & \ldots & g & g \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{bmatrix}\in\mathbb{C}_1^{n\times n},$$

тада за

$$N=[g,g,\ldots,g]\in\mathbb{C}_1^{1\times n},$$

према леми 1.2, матрица G има факторизацију (пуног ранга)

$$G=MN,$$

где је

$$M = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_1^{n\times 1}.$$

Према томе,

$$M^*MNN^* = [1,1,\dots,1] \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} [g,g,\dots,g] \begin{bmatrix} \overline{g} \\ \overline{g} \\ \vdots \\ \overline{g} \end{bmatrix} = n^2 g\overline{g}.$$

На основу теореме 1.2 следи

$$\begin{aligned} G^\dagger &= N^*(M^*MNN^*)^{-1}M^* \\ &= (n^2 g\overline{g})^{-1} \begin{bmatrix} \overline{g} \\ \overline{g} \\ \vdots \\ \overline{g} \end{bmatrix} [1,1,\dots,1] \\ &= \frac{1}{n^2 g\overline{g}} \operatorname{circ}_n\{(\overline{g},\overline{g},\dots,\overline{g})\} \\ &= \frac{1}{n^2 g\overline{g}}\, \overline{g} \operatorname{circ}_n\{(1,1,\dots,1)\} \\ &= \frac{1}{n^2 g} \operatorname{circ}_n\{(1,1,\dots,1)\}\ . \ \blacklozenge \end{aligned}$$

Напомена 3.1.5. Слично као у напомени 3.1.2 закључујемо да је матрица (114) такође и групни инверз за (113). $\triangledown$

Пример 3.1.5. Нека је

$$G{=}\mathrm{circ}\{(\frac{i}{3},\frac{i}{3},\frac{i}{3},\frac{i}{3})\}$$

тј.

$$G=\begin{bmatrix} \frac{i}{3} & \frac{i}{3} & \frac{i}{3} & \frac{i}{3} \\ \frac{i}{3} & \frac{i}{3} & \frac{i}{3} & \frac{i}{3} \\ \frac{i}{3} & \frac{i}{3} & \frac{i}{3} & \frac{i}{3} \\ \frac{i}{3} & \frac{i}{3} & \frac{i}{3} & \frac{i}{3} \end{bmatrix}.$$

Пошто је $n = 4$, $k = 1$, $g = \frac{i}{3}$ и $q = 1$ тј. $g^n(1-kq^n)^{n-1} = 0$, G је сингуларна матрица (последица 3.1.1). На основу претходне теореме и претходне напомене следи

$$G^\dagger = G^\sharp = -\frac{3i}{2^4}\mathrm{circ}\{(1,1,1,1)\}$$

тј.

$$G^\dagger = G^\sharp = -\tfrac{3i}{2^4}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \ \Diamond$$

Када је $q = -1$ разликујемо два случаја:

1) Број n је паран природан број. Тада је Мур-Пенроузов инверз дат теоремом 3.1.6;

2) Број n је непаран природан број већи од 1. Тада је Мур-Пенроузов инверз дат следећом теоремом.

Теорема 3.1.14. (Теорема 2.5. [48]) Нека је n непаран природан број већи од 1 и

$$Q = \mathrm{circ}_n\{_{-1}(1,-1,1,\dots,-1,1)\}. \tag{115}$$

Тада је,

$$Q^\dagger = \frac{1}{n^2}\,\mathrm{circ}_n\{_{-1}(1,-1,1,\dots,-1,1)\}\ . \tag{116}$$

Доказ. Уочимо да је $r(Q)=1$ и $Q_{\downarrow j}\neq O$, $j=\overline{1,n}$. Нека је $Q=[Q_1|Q_2]$, где је $Q_1\in\mathbb{R}^{n\times 1}$ и $Q_2\in\mathbb{R}^{n\times(n-1)}$. Пошто је $Q_{\downarrow 1}\neq O$, следи да је $r(Q_1)=1$. Према леми 1.2, матрица Q има факторизацију (пуног ранга)

$$Q = Q_1 N,$$

где је

$$N=[1,-1,1,\dots,-1,1]\in\mathbb{R}_1^{1\times n}.$$

Према томе,

$$Q_1^* Q_1 N N^* = [1,-1,1,\dots,-1,1]\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\\vdots\\-1\\1\end{bmatrix}[1,-1,1,\dots,-1,1]\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\\vdots\\-1\\1\end{bmatrix} = n^2.$$

На основу теореме 1.2   следи

$$\begin{aligned}
Q^\dagger &= N^*(Q_1^*Q_1NN^*)^{-1}Q_1^* \\
&= (n^2)^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ \vdots \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}[1,-1,1,\ldots,-1,1] \\
&= \frac{1}{n^2}\operatorname{circ}_n\{_{-1}(1,-1,1,\ldots,-1,1)\}\ .\ \blacklozenge
\end{aligned}$$

Последица 3.1.4. Нека је n непаран природан број већи од 1, $g\in\mathbb{C}\backslash\{0\}$ и

$$G=\operatorname{circ}_n\{_{-1}(g,-g,g,\ldots,-g,g)\}. \tag{117}$$

Тада је,

$$G^\dagger=\frac{1}{n^2g}\operatorname{circ}_n\{_{-1}(1,-1,1,\ldots,-1,1)\}. \tag{118}$$

Доказ. Следи из претходне теореме и првог дела теореме 1.3. $\triangle$

Пример 3.1.6. Нека је

$$G=\operatorname{circ}\{_{-1}(\frac{1+i\sqrt{3}}{2},-\frac{1+i\sqrt{3}}{2},\frac{1+i\sqrt{3}}{2},-\frac{1+i\sqrt{3}}{2},\frac{1+i\sqrt{3}}{2})\}$$

тј.

$$G = \begin{bmatrix} \frac{1+i\sqrt{3}}{2} & -\frac{1+i\sqrt{3}}{2} & \frac{1+i\sqrt{3}}{2} & -\frac{1+i\sqrt{3}}{2} & \frac{1+i\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1+i\sqrt{3}}{2} & \frac{1+i\sqrt{3}}{2} & -\frac{1+i\sqrt{3}}{2} & \frac{1+i\sqrt{3}}{2} & -\frac{1+i\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1+i\sqrt{3}}{2} & -\frac{1+i\sqrt{3}}{2} & \frac{1+i\sqrt{3}}{2} & -\frac{1+i\sqrt{3}}{2} & \frac{1+i\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1+i\sqrt{3}}{2} & \frac{1+i\sqrt{3}}{2} & -\frac{1+i\sqrt{3}}{2} & \frac{1+i\sqrt{3}}{2} & -\frac{1+i\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1+i\sqrt{3}}{2} & -\frac{1+i\sqrt{3}}{2} & \frac{1+i\sqrt{3}}{2} & -\frac{1+i\sqrt{3}}{2} & \frac{1+i\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}.$$

Пошто је $n = 5$, $k = -1$, $g = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ и $q = -1$ тј. $g^n(1-kq^n)^{n-1} = 0$, G је сингуларна матрица (последица 3.1.1). На основу претходне последице следи

$$G^\dagger = \frac{1-i\sqrt{3}}{5^2 2} \operatorname{circ}\{\,_{-1}(1,-1,1,-1,1)\}$$

тј.

$$G^\dagger = \frac{1-i\sqrt{3}}{5^2 2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}. \ \Diamond$$

3.2. K-циркуларне матрице са аритметичким низом

У овом делу ће бити презентовани оригинални резултати из радова [46] и [49], којима се, између осталог, уопштавају неки резултати добијени у раду [1].

Наиме, подсетимо да је *аритметички низ* низ који има следећи облик:

$$a_0 = a,\ a_1 = a + d,\ a_2 = a + 2d,\ a_3 = a + 3d, \ldots \tag{119}$$

где су a и d константе. Разлика између узастопних чланова аритметичког низа је, као што видимо, константна.

Пример 3.2.1. Низ

а)

$$-3,\ -\frac{5}{2},\ -2,\ -\frac{3}{2},\ -1,\ \ldots$$

је аритметички низ ($a = -3$, $d = \frac{1}{2}$). $\Diamond$

б)

$$2,\ \frac{1}{2},\ -1,\ -\frac{5}{2},\ -4,\ \ldots$$

је аритметички низ ($a = 2$, $d = -\frac{3}{2}$). $\Diamond$

Добро је познато да је сума првих n чланова аритметичког низа са првим чланом (a) и заједничком разликом између чланова ($d \neq 0$) дата следећом формулом:

$$\sum_{i=0}^{n-1} a_i = \frac{n}{2}\left[2a + (n-1)d\right]. \tag{120}$$

Ако је $d = 0$, тада је

$$\sum_{i=0}^{n-1} a_i = na\,. \tag{121}$$

У раду [1] *M. Bahsi* и *S. Solak* су анализирали матрице облика:

$$\mathrm{circ}\{(a, a+d, a+2d, \ldots, a+(n-1)d)\}, \tag{122}$$

где је $a \in \mathbb{R}$ и $d \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, тј. матрице облика:

$$\begin{bmatrix} a & a{+}d & a{+}2d & \dots & a{+}(n{-}2)d & a{+}(n{-}1)d \\ a{+}(n{-}1)d & a & a{+}d & \dots & a{+}(n{-}3)d & a{+}(n{-}2)d \\ a{+}(n{-}2)d & a{+}(n{-}1)d & a & \dots & a{+}(n{-}4)d & a{+}(n{-}3)d \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a{+}2d & a{+}3d & a{+}4d & \dots & a & a{+}d \\ a{+}d & a{+}2d & a{+}3d & \dots & a{+}(n{-}1)d & a \end{bmatrix}, \quad (123)$$

и одредили су:

1) Сопствене вредности таквих матрица.

Теорема 3.2.1. (Теорема 2.1. [1]) Нека je A матрица облика (122). Сопствене вредности матрице A су:

$$\lambda_0(A) = na + \frac{n(n-1)}{2}\,d \quad \text{и} \quad \lambda_j(A) = \frac{n}{\omega^j - 1}\,d,\ j = \overline{1, n-1}\ .\ \blacklozenge \qquad (124)$$

2) Детерминанту таквих матрица.

Теорема 3.2.2. (Теорема 2.4. [1]) Нека je A матрица облика (122). Детерминанта матрице A je:

$$|\,A\,| = (-1)^{n-1}(nd)^{n-1}\left[a + \frac{(n-1)}{2}d\right].\ \blacklozenge \qquad (125)$$

3) Еуклидску норму таквих матрица.

Теорема 3.2.3. (Теорема 2.3. [1]) Нека je A матрица облика (122). Еуклидска норма матрице A je:

$$\|A\|_E = n\sqrt{a^2 + (n-1)ad + \frac{(n-1)(2n-1)}{6}\,d^2}\ .\ \blacklozenge \qquad (126)$$

4) Спектралну норму таквих матрица.

Теорема 3.2.4. (Теорема 2.2. [1]) Нека је A матрица облика (122). Спектрална норма матрице A је:

$$\|A\|_2 = \max\{|\sum_{i=0}^{n-1} a_i|, \frac{|nd|}{2\sin\frac{\pi}{n}}\}\ . \blacklozenge \tag{127}$$

Као последице претходно наведених теорема извели су слична тврђења за инверз циркуларне матрице са аритметичким низом чији су експлицитни облик одредили.

Теорема 3.2.5. (Теорема 2.6. [1]) Нека је A матрица облика (122). Инверз матрице A је:

$$A^{-1} = r\,\mathrm{circ}_n\{(\frac{(1-\frac{n(n-1)}{2})d - na}{d}, \frac{(1+\frac{n(n-1)}{2})d + na}{d}, 1, \ldots, 1)\}\,, \tag{128}$$

где је $r = \frac{1}{n^2(a+\frac{n-1}{2}d)}$.

У раду [49] смо одредили, ако постоји ($a + \frac{(n-1)}{2}d \neq 0$, теорема 3.2.2), инверз за матрице облика (122) користећи лему 2.4. Овде наводимо тај доказ.

Доказ. Нека је $A^{-1} = \mathrm{circ}\{(a'_0, a'_1, a'_2, \ldots, a'_{n-1})\}$. На основу леме 2.4 $(a'_0, a'_1, a'_2, \ldots, a'_{n-1})$ је јединствено решење следећег система линеарних једначина:

$$A \begin{bmatrix} x_0 \\ x_{n-1} \\ \vdots \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{129}$$

Применом елементарних трансформација над редовима проширене матрице добијамо:

$$\overline{A}=\begin{bmatrix} a & a+d & a+2d & \cdots & a+(n-2)d & a+(n-1)d & 1 \\ a+(n-1)d & a & a+d & \cdots & a+(n-3)d & a+(n-2)d & 0 \\ a+(n-2)d & a+(n-1)d & a & \cdots & a+(n-4)d & a+(n-3)d & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a+2d & a+3d & a+4d & \cdots & a & a+d & 0 \\ a+d & a+2d & a+3d & \cdots & a+(n-1)d & a & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim\begin{bmatrix} a & a+d & a+2d & \cdots & a+(n-3)d & a+(n-2)d & a+(n-1)d & 1 \\ -(n-1)d & d & d & \cdots & d & d & d & 1 \\ -nd & nd & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -nd & nd & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -nd & nd & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Дакле, систем линеарних једначина (129) је еквивалентан следећем систему линеарних једначина:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n-1}[a+id]x_{n-i} = 1 - ax_0, \\ \sum\limits_{i=1}^{n-1} dx_i = 1+(n-1)dx_0, \\ x_{n-1} - x_0 = \frac{1}{nd}, \\ x_i = x_{i+1},\ i = \overline{2, n-2}\,. \end{cases} \tag{130}$$

Решење система (130) је:

$$\begin{cases} x_0 = -\frac{na+\frac{n^2-n-2}{2}\,d}{dn^2(a+\frac{n-1}{2}\,d)}\,, \\ \\ x_1 = \frac{na+\frac{n^2-n+2}{2}\,d}{dn^2(a+\frac{n-1}{2}\,d)}\,, \\ \\ x_i = \frac{1}{n^2(a+\frac{n-1}{2}\,d)},\ i=\overline{2,n-1}\,. \end{cases} \tag{131}$$

Пошто је систем (129) еквивалентан систему (130), следи да је (131) такође решење система (129). ♦

Напомена 3.2.1. Формулација теореме 3.2.5 садржи недостатак. Наиме, Bahsi и Solak из формулације теореме нису искључили матрице облика (122) када је $a+\frac{n-1}{2}\,d=0$ (тј. $d=\frac{2a}{1-n}$), чија је детерминанта према теореми 3.2.2 једнака 0 па њихов инверз не постоји. ▽

Као што је наведено у претходној напомени, инверз за матрице облика (122) када је $a+\frac{n-1}{2}\,d=0$ не постоји. Експлицитни облик Мур-Пенроузовог инверза за такве матрице одредили смо у раду [46].

Теорема 3.2.6. (Теорема 3.4. [46]) Нека је n природан број већи од 1, $a\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$ и

$$A=\mathrm{circ}\{(a_0,a_1,\ldots,a_{n-1})\}, \tag{132}$$

где је $a_i=(\frac{1-n+2i}{1-n})\,a$, $i=\overline{0,n-1}$. Тада је,

$$A^{\dagger}=\frac{n-1}{2na}\mathrm{circ}_n\{(1,-1,0,\ldots,0)\}. \tag{133}$$

Доказ. Уочимо да је $A_{i\to}\neq O$, $i=\overline{1,n}$, и

$$A=a\begin{bmatrix} 1 & \frac{3-n}{1-n} & \frac{5-n}{1-n} & \cdots & \frac{n-3}{1-n} & -1 \\ -1 & 1 & \frac{3-n}{1-n} & \cdots & \frac{n-5}{1-n} & \frac{n-3}{1-n} \\ \frac{n-3}{1-n} & -1 & 1 & \cdots & \frac{n-7}{1-n} & \frac{n-5}{1-n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{5-n}{1-n} & \frac{7-n}{1-n} & \frac{9-n}{1-n} & \cdots & 1 & \frac{3-n}{1-n} \\ \frac{3-n}{1-n} & \frac{5-n}{1-n} & \frac{7-n}{1-n} & \cdots & -1 & 1 \end{bmatrix} \sim \ldots \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1-n & 3-n & 5-n & \cdots & n-7 & n-5 & n-3 & n-1 \\ 0 & 2-n & 4-n & \cdots & n-8 & n-6 & n-4 & n-2 \\ 0 & 0 & 3-n & \cdots & n-9 & n-7 & n-5 & n-3 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-10 & n-8 & n-6 & n-4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

тј. $r(A)=n-1$. Нека је $A=\begin{bmatrix} A_1 \\ \hline A_2 \end{bmatrix}$, где је $A_1\in\mathbb{R}^{(n-1)\times n}$ и $A_2\in\mathbb{R}^{1\times n}$. Пошто су $A_{i\to}$, $i=\overline{1,n-1}$, линеарно независне врсте матрице A, следи да је $r(A_1)=n-1$. Према леми 1.2, матрица A има факторизацију (пуног ранга)

$$A=MA_1, \tag{134}$$

где је

$$M=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_{n-1}^{n\times(n-1)}.$$

На основу теореме 1.2 следи

$$\begin{aligned} A^{\dagger} &= A_1^*(M^*MA_1A_1^*)^{-1}M^* \\ &= \dots \\ &= circ_n\{(\frac{n-1}{2na}, -\frac{n-1}{2na}, 0, \dots, 0)\} \\ &= \frac{n-1}{2na}\ circ_n\{(1, -1, 0, \dots, 0)\}. \ \blacklozenge \end{aligned}$$

Напомена 3.2.2. Слично као у напомени 3.1.2 закључујемо да је матрица (133) такође и групни инверз за (132). $\triangledown$

Пример 3.2.2. Нека је

$$A=\mathrm{circ}\{(-1, -\frac{3}{5}, -\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{3}{5}, 1)\}$$

тј.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -\frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & 1 \\ 1 & -1 & -\frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & 1 & -1 & -\frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & 1 & -1 & -\frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & 1 & -1 & -\frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Пошто је $n = 6$, $a = -1$ и $d = \frac{2}{5}$ тј. $(-1)^{n-1}(nd)^{n-1}\left[a + \frac{(n-1)}{2}d\right] = 0$, A је сингуларна матрица (теорема 3.2.2). На основу претходне теореме и претходне напомене следи

$$A^\dagger = A^\sharp = \frac{5}{2^2 3}\,\mathrm{circ}\{\,(-1, 1, 0, 0, 0, 0)\}$$

тј.

$$A^\dagger = A^\sharp = \tfrac{5}{2^2 3}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \ \Diamond$$

У наставку презентујемо оригиналне резултате, добијене у раду [49], који се односе на матрице облика:

$$\mathrm{circ}\{_k(a, a{+}d, a{+}2d, \ldots, a{+}(n{-}1)d)\}, \tag{135}$$

где је $k \in \mathbb{C}$, $a \in \mathbb{R}$ и $d \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, тј. матрице облика:

$$\begin{bmatrix} a & a{+}d & a{+}2d & \ldots & a{+}(n{-}2)d & a{+}(n{-}1)d \\ k[a{+}(n{-}1)d] & a & a{+}d & \ldots & a{+}(n{-}3)d & a{+}(n{-}2)d \\ k[a{+}(n{-}2)d] & k[a{+}(n{-}1)d] & a & \ldots & a{+}(n{-}4)d & a{+}(n{-}3)d \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ k[a{+}2d] & k[a{+}3d] & k[a{+}4d] & \ldots & a & a{+}d \\ k[a{+}d] & k[a{+}2d] & k[a{+}3d] & \ldots & k[a{+}(n{-}1)d] & a \end{bmatrix}. \tag{136}$$

Први оригинални резултат односи се на сопствене вредности матрица облика (135).

Теорема 3.2.7. ([49]) Нека је A матрица облика (135), при чему је $k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Сопствене вредности матрице A дате су следећим формулама:

1) Ако је $\psi\omega^j = 1$, тада је

$$\lambda_j(A) = \frac{n}{2}\left[2a + (n-1)d\right], \tag{137}$$

2) Ако је $\psi\omega^j \neq 1$, тада је

$$\lambda_j(A) = a\,\frac{k-1}{\psi\omega^j - 1} + d\,\frac{(1+nk-k)\psi\omega^j - nk}{(1-\psi\omega^j)^2}\,. \tag{138}$$

Доказ. На основу леме 2.7, користећи (95), следи:

1) Претпоставимо да је $\psi\omega^j = 1$. Тада је,

$$\lambda_j(A) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i(\psi\omega^j)^i = \sum_{i=0}^{n-1} a_i = \frac{n}{2}\left[2a + (n-1)d\right],$$

2) Претпоставимо да је $\psi\omega^j \neq 1$. Тада је,

$$\begin{aligned}
\lambda_j(A) &= \sum_{i=0}^{n-1} a_i(\psi\omega^j)^i = \sum_{i=0}^{n-1}(a+id)(\psi\omega^j)^i \\
&= a\sum_{i=0}^{n-1}(\psi\omega^j)^i + d\sum_{i=0}^{n-1} i(\psi\omega^j)^i \\
&= a\frac{(\psi\omega^j)^n - 1}{(\psi\omega^j) - 1} + d\,\frac{\psi\omega^j - n(\psi\omega^j)^n + (n-1)(\psi\omega^j)^{n+1}}{(1-\psi\omega^j)^2} \\
&= a\,\frac{k-1}{\psi\omega^j - 1} + d\,\frac{(1+nk-k)\psi\omega^j - nk}{(1-\psi\omega^j)^2}\,.\blacklozenge
\end{aligned}$$

Напомена 3.2.3. Ако је $k = 0$, све сопствене вредности матрица облика (135) су, на основу напомене 2.1, једнаке a. $\triangledown$

Следећи оригинални резултат односи се на детерминанте матрица облика (135).

Теорема 3.2.8. ([49]) Нека је A матрица облика (135). Детерминанта матрице A је:

$$|A| = aq^{n-1} + (-1)^{n-1}kd^2\left[\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{i-1} i r^{n-(i+1)} q^{i-1}\right], \qquad (139)$$

где је $q := (1-k)a - nkd$ и $r := (k-1)a + \left[1 + (n-1)k\right]d$.

Доказ. Применом основних својстава детерминанти добијамо:

$$|A|=\begin{vmatrix} a & a+d & a+2d & \dots & a+(n-2)d & a+(n-1)d \\ k\,[a+(n-1)d] & a & a+d & \dots & a+(n-3)d & a+(n-2)d \\ k\,[a+(n-2)d] & k\,[a+(n-1)d] & a & \dots & a+(n-4)d & a+(n-3)d \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ k\,[a+2d] & k\,[a+3d] & k\,[a+4d] & \dots & a & a+d \\ k\,[a+d] & k\,[a+2d] & k\,[a+3d] & \dots & k\,[a+(n-1)d] & a \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a & d & 2d & \dots & (n-2)d & (n-1)d \\ 0 & q & r & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & q & r \\ kd & 0 & 0 & \dots & 0 & q \end{vmatrix},$$

где је $q := (1-k)a - nkd$ и $r := (k-1)a + [1+(n-1)k]\,d$. Дакле,

$$\begin{aligned} |A| &= aq^{n-1}+(-1)^{n-1}kd^2\left[r^{n-2}-2r^{n-3}q+3r^{n-4}q^2+\cdots+(-1)^{n-2}(n-1)q^{n-2}\right] \\ &= aq^{n-1}+(-1)^{n-1}kd^2\left[\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{i-1}ir^{n-(i+1)}q^{i-1}\right].\ \blacklozenge \end{aligned}$$

У доказу следеће теореме, која се односи на Еуклидску норму матрица облика (135), користимо следеће формуле:

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^{n} i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2. \qquad (140)$$

Теорема 3.2.9. ([49]) Нека је A матрица облика (135). Еуклидска норма матрице A је:

$$\|A\|_E=\sqrt{\frac{n}{2}\,a^2[n+1+|k|^2(n-1)]+(n-1)nad\left[\frac{n+1}{3}+|k|^2\frac{2n-1}{3}\right]+\frac{(n-1)n^2}{4}\,d^2\left[\frac{n+1}{3}+|k|^2(n-1)\right]}. \quad (141)$$

Доказ. На основу дефиниције Еуклидске норме матрице добијамо:

$$\begin{aligned}
(\|A\|_E)^2 &= na^2+\left[(n-1)+|k|^2\right](a+d)^2+\cdots+\left[1+(n-1)|k|^2\right)\left[a+(n-1)d\right]^2\\
&= a^2\left[\sum_{i=1}^{n} i+|k|^2\sum_{i=1}^{n-1} i\right]+2ad\left[\sum_{i=1}^{n-1} i(n-i)+|k|^2\sum_{i=1}^{n-1} i^2\right]+\\
&\quad d^2\left[\sum_{i=1}^{n-1} i^2(n-i)+|k|^2\sum_{i=1}^{n-1} i^3\right]\\
&= a^2\left[\sum_{i=1}^{n} i+|k|^2\sum_{i=1}^{n-1} i\right]+2ad\left[n\sum_{i=1}^{n-1} i-\sum_{i=1}^{n-1} i^2+|k|^2\sum_{i=1}^{n-1} i^2\right]+\\
&\quad d^2\left[n\sum_{i=1}^{n-1} i^2-\sum_{i=1}^{n-1} i^3+|k|^2\sum_{i=1}^{n-1} i^3\right]\\
&= a^2\left[\frac{n(n+1)}{2}+|k|^2\frac{(n-1)n}{2}\right]+\\
&\quad 2ad\left[\frac{(n-1)n(n+1)}{6}+|k|^2\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}\right]+\\
&\quad d^2\left[\frac{(n-1)n^2(n+1)}{12}+|k|^2\frac{(n-1)^2n^2}{4}\right]\\
&= \frac{n}{2}\,a^2\left[n+1+|k|^2(n-1)\right]+(n-1)nad\left[\frac{n+1}{3}+|k|^2\frac{2n-1}{3}\right]+\\
&\quad \frac{(n-1)n^2}{4}\,d^2\left[\frac{n+1}{3}+|k|^2(n-1)\right].
\end{aligned}$$

Дакле,

$$\|A\|_E=\sqrt{\tfrac{n}{2}\,a^2[n+1+|k|^2(n-1)]+(n-1)nad\left[\tfrac{n+1}{3}+|k|^2\tfrac{2n-1}{3}\right]+\tfrac{(n-1)n^2}{4}\,d^2\left[\tfrac{n+1}{3}+|k|^2(n-1)\right]}.\ \blacklozenge$$

4. K-циркуларне матрице са Фибоначијевим и Лукасовим бројевима

У овом делу ће бити презентовани оригинални резултати из радова [50] и [51] који се односе на k-циркуларне матрице са првом врстом $(F_1, F_2, \ldots, F_n)$, односно $(L_1, L_2, \ldots, L_n)$, при чему је F_n, односно L_n, n-ти члан Фибоначијевог низа, односно Лукасовог низа.

Подсетимо се дефиниција наведених низова бројева.

Дефиниција 4.1. Низ *Фибоначијевих бројева* $\{F_n\}$ је низ дефинисан следећом рекурзивном релацијом:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad n \geqslant 2, \tag{142}$$

при чему је $F_0 = 0$ и $F_1 = 1$.

Дефиниција 4.2. Низ *Лукасових бројева* $\{L_n\}$ је низ дефинисан следећом рекурзивном релацијом:

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2}, \quad n \geqslant 2, \tag{143}$$

при чему је $L_0 = 2$ и $L_1 = 1$.

Из претходних дефиниција видимо да су оба низа дефинисана *истом* рекурзивном релацијом али са *другим* полазним условима.

Првих неколико чланова Фибоначијевог и Лукасовог низа дати су следећом табелом.

n	0	1	2	3	4	5	$\dots$
F_n	0	1	1	2	3	5	$\dots$
L_n	2	1	3	4	7	11	$\dots$

Нека су α и β корени једначине $x^2 - x - 1 = 0$ тј.

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \ \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \ \alpha\beta = -1, \ \alpha + \beta = 1 \quad \text{и} \quad \alpha - \beta = \sqrt{5}. \tag{144}$$

Бинеове формуле за Фибоначијеве и Лукасове бројеве су:

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right) \tag{145}$$

и

$$L_n = \alpha^n + \beta^n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n. \tag{146}$$

Касинијеве формуле за Фибоначијеве и Лукасове бројеве су:

$$F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n \tag{147}$$

и

$$L_{n+1}L_{n-1} - L_n^2 = 5(-1)^{n+1}. \tag{148}$$

Издвојимо још неке једнакости које важе за Фибоначијеве и Лукасове бројеве:

1)
$$\sum_{i=1}^{n} F_i = F_{n+2} - 1, \tag{149}$$

2)
$$\sum_{i=1}^{n} F_i^2 = F_n F_{n+1} \left[= \frac{L_{2n+1} - (-1)^n}{5}\right], \tag{150}$$

3)
$$L_n = F_{n-1} + F_{n+1} = F_{n+2} - F_{n-2}, \tag{151}$$

4)
$$\sum_{i=0}^{n} L_i = L_{n+2} - 1, \tag{152}$$

5)
$$\sum_{i=0}^{n} L_i^2 = L_n L_{n+1} + 2 \left[= L_{2n+1} + (-1)^n + 2\right]. \tag{153}$$

У раду [56] су анализиране матрице облика:

$$\mathrm{circ}\{(F_1, F_2, \ldots, F_n)\} \tag{154}$$

и

$$\mathrm{circ}\{(L_1, L_2, \ldots, L_n)\}, \tag{155}$$

и одређене детерминанте и инверзи таквих матрица.

Теорема 4.1. (Теорема 2.1. [56]) Нека је F матрица облика (154). Детерминанта матрице F је:

$$|\, F \,| = (1 - F_{n+1})^{n-1} + F_n^{n-2} \sum_{k=1}^{n-1} F_k \left(\frac{1 - F_{n+1}}{F_n}\right)^{k-1}. \ \blacklozenge \tag{156}$$

Теорема 4.2. (Теорема 2.3. [56]) Нека је F матрица облика (154) и $n > 2$. Инверз матрице F је:

$$F^{-1} = \mathrm{circ}\{(f_1, f_2, \ldots, f_n)\},$$

где је, за $g_n := F_1 - F_n + \sum_{k=1}^{n-2} F_k \left(\dfrac{F_n}{F_1 - F_{n+1}}\right)^{n-k-1}$,

$f_1 = \frac{1}{g_n}\left(1 + \sum_{k=1}^{n-2} \dfrac{F_{n-k}F_n^{k-1}}{(F_1 - F_{n+1})^k}\right)$;

$f_2 = \frac{1}{g_n}\left(-1 + \sum_{k=1}^{n-2} \dfrac{F_{n-k-1}F_n^{k-1}}{(F_1 - F_{n+1})^k}\right)$;

$f_i = -\frac{F_n^{i-3}}{g_n(F_1 - F_{n+1})^{i-2}}, \quad i = \overline{3, n}$. ♦

Теорема 4.3. (Теорема 3.1. [56]) Нека је L матрица облика (155). Детерминанта матрице L је:

$$|L| = (1 - L_{n+1})^{n-1} + (L_n - 2)^{n-2} \sum_{k=1}^{n-1} (L_{k+2} - 3L_{k+1}) \left(\frac{1 - L_{n+1}}{L_n - 2}\right)^{k-1}. \ \blacklozenge \quad (157)$$

Теорема 4.4. (Теорема 3.3. [56]) Нека је L матрица облика (155). Инверз матрице L је:

$$L^{-1} = \mathrm{circ}\{(l_1, l_2, \ldots, l_n)\},$$

где је, за $h_n := L_1 - 3L_n + \sum_{k=1}^{n-2} (L_{k+2} - 3L_{k+1}) \left(\dfrac{L_n - 2}{L_1 - L_{n+1}}\right)^{n-k-1}$,

$l_1 = \frac{1}{h_n}\left(1 + \sum_{k=1}^{n-2} \dfrac{(L_{n+2-k} - 3L_{n+1-k})(L_n - 2)^{k-1}}{(L_1 - L_{n+1})^k}\right)$;

$l_2 = \frac{1}{h_n}\left(-3 + \sum_{k=1}^{n-2} \dfrac{(L_{n+1-k} - 3L_{n-k})(L_n - 2)^{k-1}}{(L_1 - L_{n+1})^k}\right)$;

$l_i = \frac{5(L_n - 2)^{i-3}}{h_n(L_1 - L_{n+1})^{i-2}}, \quad i = \overline{3, n}$. ♦

Матрице облика (155) анализиране су и у раду [10], где је разматрана њихова Еуклидска и спектрална норма али и Еуклидска и спектрална норма Адамаровог инверза таквих матрица, и добијени следећи резултати.

Теорема 4.5. (Теорема 1. [10]) Нека је L матрица облика (155). Тада је,

$$\|L\|_E = \sqrt{nL_nL_{n+1} - 2n} \tag{158}$$

и

$$\sqrt{L_nL_{n+1} - 2} \leq \|L\|_2 \leq L_nL_{n+1} - 2\ . \quad \blacklozenge \tag{159}$$

Теорема 4.6. (Теорема 2. [10]) Нека је L матрица облика (155). Тада је,

$$n\sqrt{\frac{n}{L_nL_{n+1} - 2}} \leq \|L^{\circ -1}\|_E \leq \frac{5}{2}\sqrt{n} \tag{160}$$

и

$$n\sqrt{\frac{1}{L_nL_{n+1} - 2}} \leq \|L^{\circ -1}\|_2\ . \quad \blacklozenge \tag{161}$$

Осим матрица облика (154) и (155) и матрице облика:

$$\mathrm{circ}\{_{-1}(F_1, F_2, \ldots, F_n)\} \tag{162}$$

и

$$\mathrm{circ}\{_{-1}(L_1, L_2, \ldots, L_n)\} \tag{163}$$

су биле предмет изучавања.

У раду [19] су одређене детерминанте и инверзи матрица облика (162) и (163).

Теорема 4.7. (Теорема 6. [19]) Нека је F матрица облика (162). Детерминанта матрице F је:

$$|F| = (1+F_{n+1})^{n-1} + (-F_n)^{n-2} \sum_{k=1}^{n-1} (-F_k) \left(-\frac{1+F_{n+1}}{F_n} \right)^{k-1} . \ \blacklozenge \tag{164}$$

Теорема 4.8. (Теорема 9. [19]) Нека је F матрица облика (162) и $n \geq 2$. Инверз матрице F је:

$$F^{-1} = \mathrm{circ}\{_{-1}(f_1, f_2, \ldots, f_n)\},$$

где је, за $g_n := F_1 + F_n + \sum_{k=1}^{n-2} (-F_k) \left(-\frac{F_n}{F_1+F_{n+1}} \right)^{n-k-1}$,

$f_1 = \frac{1}{g_n} \left(1 - \sum_{k=1}^{n-2} \frac{F_{n-k}(-F_n)^{k-1}}{(F_1+F_{n+1})^k} \right);$

$f_2 = \frac{1}{g_n} \left(-1 - \sum_{k=1}^{n-2} \frac{F_{n-k-1}(-F_n)^{k-1}}{(F_1+F_{n+1})^k} \right);$

$f_i = -\frac{(-F_n)^{i-3}}{g_n(F_1+F_{n+1})^{i-2}}, \quad i = \overline{3,n} \ . \ \blacklozenge$

Теорема 4.9. (Теорема 10. [19]) Нека је L матрица облика (163). Детерминанта матрице L је:

$$|L| = (1+L_{n+1})^{n-1} + (-L_n-2)^{n-2} \sum_{k=1}^{n-1} (3L_{k+1} - L_{k+2}) \left(-\frac{1+L_{n+1}}{2+L_n} \right)^{k-1} . \ \blacklozenge \tag{165}$$

Теорема 4.10. (Теорема 13. [19]) Нека је L матрица облика (163). Инверз матрице L је:

$$L^{-1} = \mathrm{circ}\{_{-1}(l_1, l_2, \ldots, l_n)\},$$

где је, за $h_n := L_1 + 3L_n + \sum_{k=1}^{n-2}(3L_{k+1} - L_{k+2})\left(-\frac{2+L_n}{L_1+L_{n+1}}\right)^{n-k-1}$,

$l_1 = \frac{1}{h_n}\left(1 - \sum_{k=1}^{n-2}\frac{(L_{n+2-k} - 3L_{n+1-k})(-L_n-2)^{k-1}}{(L_1+L_{n+1})^k}\right)$;

$l_2 = \frac{1}{h_n}\left(-3 - \sum_{k=1}^{n-2}\frac{(L_{n+1-k} - 3L_{n-k})(-L_n-2)^{k-1}}{(L_1+L_{n+1})^k}\right)$;

$l_i = \frac{5(-L_n-2)^{i-3}}{h_n(L_1+L_{n+1})^{i-2}}, \quad i = \overline{3,n}$. ♦

У претходном делу су наведени одређени резултати који се односе на циркуларне и косоциркуларне матрице са првом врстом $(F_1, F_2, \ldots, F_n)$ тј. $(L_1, L_2, \ldots, L_n)$. У наставку презентујемо оригиналне резултате добијене у радовима [50] и [51] и који се односе на k-циркуларне матрице са првом врстом $(F_1, F_2, \ldots, F_n)$ тј. $(L_1, L_2, \ldots, L_n)$. Дакле, следе резултати који се односе на матрице облика:

$$\mathrm{circ}\{_k(F_1, F_2, \ldots, F_n)\} \tag{166}$$

и

$$\mathrm{circ}\{_k(L_1, L_2, \ldots, L_n)\}, \tag{167}$$

где је $k \in \mathbb{C}$.

Прво презентујемо резултате који се односе на матрице облика (166).

Теорема 4.11. (Теорема 4. [50]) Нека је F матрица облика (166), при чему је $k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Сопствене вредности матрице F дате су следећим формулама:

1) Ако je $\psi\omega^{-j} = \frac{1}{\alpha}$, тада je

$$\lambda_j(F) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[n\alpha + \frac{1-(-1)^n\beta^{2n}}{\sqrt{5}}\right], \tag{168}$$

2) Ако je $\psi\omega^{-j} = \frac{1}{\beta}$, тада je

$$\lambda_j(F) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{1-(-1)^n\alpha^{2n}}{\sqrt{5}} - n\beta\right], \tag{169}$$

3) Ако je $\psi\omega^{-j} \neq \frac{1}{\alpha}$ и $\psi\omega^{-j} \neq \frac{1}{\beta}$, тада je

$$\lambda_j(F) = \frac{kF_{n+1} - 1 + kF_n\psi\omega^{-j}}{(\psi\omega^{-j})^2 + \psi\omega^{-j} - 1}\,. \tag{170}$$

Доказ. На основу леме 2.7 и (145) следи:

1) Претпоставимо да je $\psi\omega^{-j} = \frac{1}{\alpha}$. Тада je,

$$\begin{aligned}\lambda_j(F) &= \sum_{i=0}^{n-1} F_{i+1}(\psi\omega^{-j})^i = \frac{1}{\sqrt{5}}\sum_{i=0}^{n-1}(\alpha^{i+1}-\beta^{i+1})(\frac{1}{\alpha})^i = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\alpha\sum_{i=0}^{n-1}1 - \beta\sum_{i=0}^{n-1}(\frac{\beta}{\alpha})^i\right]\\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[n\alpha - \beta\frac{1-(\frac{\beta}{\alpha})^n}{1-\frac{\beta}{\alpha}}\right] = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[n\alpha + \frac{1-(-1)^n\beta^{2n}}{\sqrt{5}}\right],\end{aligned}$$

2) Претпоставимо да je $\psi\omega^{-j} = \frac{1}{\beta}$. Тада je,

$$\begin{aligned}\lambda_j(F) &= \sum_{i=0}^{n-1} F_{i+1}(\psi\omega^{-j})^i = \frac{1}{\sqrt{5}}\sum_{i=0}^{n-1}(\alpha^{i+1}-\beta^{i+1})(\frac{1}{\beta})^i = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\alpha\sum_{i=0}^{n-1}(\frac{\alpha}{\beta})^i - \beta\sum_{i=0}^{n-1}1\right]\\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\alpha\frac{1-(\frac{\alpha}{\beta})^n}{1-\frac{\alpha}{\beta}} - n\beta\right] = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{1-(-1)^n\alpha^{2n}}{\sqrt{5}} - n\beta\right],\end{aligned}$$

3) Претпоставимо да je $\psi\omega^{-j} \neq \frac{1}{\alpha}$ и $\psi\omega^{-j} \neq \frac{1}{\beta}$. Тада je,

$$\begin{aligned}\lambda_j(F) &= \sum_{i=0}^{n-1} F_{i+1}(\psi\omega^{-j})^i = \frac{1}{\sqrt{5}}\sum_{i=0}^{n-1}(\alpha^{i+1}-\beta^{i+1})(\psi\omega^{-j})^i\\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\alpha\sum_{i=0}^{n-1}(\alpha\psi\omega^{-j})^i - \beta\sum_{i=0}^{n-1}(\beta\psi\omega^{-j})^i\right]\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\alpha\frac{(\alpha\psi\omega^{-j})^n-1}{\alpha\psi\omega^{-j}-1}-\beta\frac{(\beta\psi\omega^{-j})^n-1}{\beta\psi\omega^{-j}-1}\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\alpha\frac{k\alpha^n-1}{\alpha\psi\omega^{-j}-1}-\beta\frac{k\beta^n-1}{\beta\psi\omega^{-j}-1}\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{\sqrt{5}-k\left(\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}\right)-k\left(\alpha^n-\beta^n\right)\psi\omega^{-j}}{-(\psi\omega^{-j})^2-\psi\omega^{-j}+1}\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{\sqrt{5}-k\sqrt{5}F_{n+1}-k\sqrt{5}F_n\psi\omega^{-j}}{-(\psi\omega^{-j})^2-\psi\omega^{-j}+1}\right]=\frac{kF_{n+1}-1+kF_n\psi\omega^{-j}}{(\psi\omega^{-j})^2+\psi\omega^{-j}-1}\,. \quad \blacklozenge$$

Напомена 4.1. Ако је $k=0$, све сопствене вредности матрица облика (166) су, на основу напомене 2.1, једнаке 1. $\triangledown$

Пример 4.1. Нека је

$$F=\mathrm{circ}\{_{9-4\sqrt{5}}(1,1,2,3,5,8)\}$$

тј.

$$F=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 5 & 8\\ 8(9-4\sqrt{5}) & 1 & 1 & 2 & 3 & 5\\ 5(9-4\sqrt{5}) & 8(9-4\sqrt{5}) & 1 & 1 & 2 & 3\\ 3(9-4\sqrt{5}) & 5(9-4\sqrt{5}) & 8(9-4\sqrt{5}) & 1 & 1 & 2\\ 2(9-4\sqrt{5}) & 3(9-4\sqrt{5}) & 5(9-4\sqrt{5}) & 8(9-4\sqrt{5}) & 1 & 1\\ 9-4\sqrt{5} & 2(9-4\sqrt{5}) & 3(9-4\sqrt{5}) & 5(9-4\sqrt{5}) & 8(9-4\sqrt{5}) & 1 \end{bmatrix}.$$

Пошто је $n=6$ и $k=9-4\sqrt{5}$ тј. $\psi=\beta$ и $\omega=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$, на основу претходне теореме (теорема 4.11) следи:

$\divideontimes$: $\psi\omega^{-3} = \frac{1}{\alpha}$, па λ_3 добијамо применом првог дела теореме 4.11: $\lambda_3 = -29 + 15\sqrt{5}$;

$\divideontimes$: $\psi\omega^{-j} \neq \frac{1}{\alpha}$ и $\psi\omega^{-j} \neq \frac{1}{\beta}$, за $j = 0, 1, 2, 4, 5$, па λ_j, за $j = 0, 1, 2, 4, 5$, добијамо применом трећег дела теореме 4.11: $\lambda_0 = 72 - 32\sqrt{5}$, $\lambda_{1,4} = 7 - 3\sqrt{5} \pm i\sqrt{3}(29 - 13\sqrt{5})$, $\lambda_{2,5} = -\frac{1}{2}\left[51 - 23\sqrt{5} \pm i\sqrt{3}(29 - 13\sqrt{5})\right]$.

Пошто је $\mid F \mid = \prod_{j=0}^{n-1} \lambda_j$, следи да је

$$\mid F \mid = -238\,300\,041\,216 \; - \; 106\,571\,018\,240\sqrt{5} \, . \, \Diamond$$

Након теореме којом су одређене сопствене вредности матрица облика (166), наводимо теорему којом је дата експлицитна формула за Еуклидску норму матрица облика (166).

Теорема 4.12. (Теорема 5. [50]) Нека је F матрица облика (166). Еуклидска норма матрице F је:

$$\|F\|_E = \sqrt{\frac{1}{5}\left\{n\left[L_{2n+1} - (-1)^n\right] + (|k|^2 - 1)\left[-L_{2n} + (n-1)L_{2n+1} + \frac{5}{2} + \frac{1-2n}{2}(-1)^n\right]\right\}}. \qquad (171)$$

Доказ. На основу дефиниције Еуклидске норме, користећи (95) и (145), добијамо:

$$\begin{aligned}
(\|F\|_E)^2 &= nF_1^2 + \left[(n-1) + |k|^2\right] F_2^2 + \cdots + \left[1 + (n-1)|k|^2\right] F_n^2 \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} (n-i)F_{i+1}^2 + |k|^2 \sum_{i=1}^{n-1} iF_{i+1}^2 = n\sum_{i=0}^{n-1} F_{i+1}^2 + (|k|^2 - 1)\sum_{i=1}^{n-1} iF_{i+1}^2 \\
&= \frac{1}{5}\left[n\left[L_{2n+1} - (-1)^n\right] + (|k|^2 - 1)\sum_{i=1}^{n-1} i\left[\alpha^{2i+2} - 2(\alpha\beta)^{i+1} + \beta^{2i+2}\right]\right]
\end{aligned}$$

$$= \frac{n}{5}\left[L_{2n+1}-(-1)^n\right]+\frac{|k|^2-1}{5}(\alpha^2\,\frac{\alpha^2-n\alpha^{2n}+(n-1)\alpha^{2n+2}}{\alpha^2}$$

$$+2\,\frac{-1-n(-1)^n+(n-1)(-1)^{n+1}}{4}+\beta^2\,\frac{\beta^2-n\beta^{2n}+(n-1)\beta^{2n+2}}{\beta^2})$$

$$= \frac{n}{5}\left[L_{2n+1}-(-1)^n\right]+\frac{|k|^2-1}{5}\left[-nL_{2n}+(n-1)L_{2n+2}+\frac{5}{2}+\frac{1-2n}{2}(-1)^n\right]$$

$$= \frac{n}{5}\left[L_{2n+1}-(-1)^n\right]+\frac{|k|^2-1}{5}\left[-L_{2n}+(n-1)L_{2n+1}+\frac{5}{2}+\frac{1-2n}{2}(-1)^n\right].$$

Дакле,

$$\|F\|_E=\sqrt{\tfrac{1}{5}\left\{n\left[L_{2n+1}-(-1)^n\right]+(|k|^2-1)\left[-L_{2n}+(n-1)L_{2n+1}+\tfrac{5}{2}+\tfrac{1-2n}{2}(-1)^n\right]\right\}}\,.\blacklozenge$$

Границе за спектралну норму Адамаровог инверза матрица облика (166), где је $k\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$, одређене су следећом теоремом.

Теорема 4.13. (Теорема 6. [50]) Нека је F матрица облика (166), при чему је $k\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$.

1) Ако је $|k|\geq 1$, тада је

$$\sqrt{\frac{5n}{L_{2n+1}-(-1)^n}}\leq \|F^{\circ-1}\|_2\leq \sqrt{n(1+(n-1)|k|^2)}\,, \tag{172}$$

2) Ако је $|k|<1$, тада је

$$|k|\sqrt{\frac{5n}{L_{2n+1}-(-1)^n}}\leq \|F^{\circ-1}\|_2\leq n\,. \tag{173}$$

Доказ. Из дефиниције Еуклидске норме следи:

$$\|F^{\circ -1}\|_E^2 = \sum_{i=0}^{n-1}(n-i)\frac{1}{F_{i+1}^2} + |k|^2\sum_{i=1}^{n-1} i\frac{1}{F_{i+1}^2}\,. \tag{174}$$

1) Претпоставимо да је $|k| \geq 1$. Тада је,

$$\|F^{\circ -1}\|_E^2 \geq \sum_{i=0}^{n-1}(n-i)\frac{1}{F_{i+1}^2} + \sum_{i=1}^{n-1} i\frac{1}{F_{i+1}^2} = n\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{F_{i+1}^2} = n\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{F_i^2}$$

$$\geq n\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{F_n^2} = \left(\frac{n}{F_n}\right)^2 \geq \frac{n^2}{F_nF_{n+1}} = \frac{5n^2}{L_{2n+1}-(-1)^n}\,.$$

Дакле,

$$\frac{\|F^{\circ -1}\|_E}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{\frac{5n}{L_{2n+1}-(-1)^n}}\,.$$

Из (18) закључујемо да је

$$\|F^{\circ -1}\|_2 \geq \sqrt{\frac{5n}{L_{2n+1}-(-1)^n}}\,.$$

Одредимо сада горњу границу за спектралну норму матрице $F^{\circ -1}$. Нека су R и S следеће матрице:

$$R = \begin{bmatrix} \frac{1}{F_1} & \frac{1}{F_2} & \frac{1}{F_3} & \cdots & \frac{1}{F_n} \\ k & \frac{1}{F_1} & \frac{1}{F_2} & \cdots & \frac{1}{F_{n-1}} \\ k & k & \frac{1}{F_1} & \cdots & \frac{1}{F_{n-2}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k & k & k & \cdots & \frac{1}{F_1} \end{bmatrix} \text{ и } S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \frac{1}{F_n} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \frac{1}{F_{n-1}} & \frac{1}{F_n} & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{F_2} & \frac{1}{F_3} & \frac{1}{F_4} & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Тада је,

$$r_1(R) = \max_{1 \le i \le n} \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \mid r_{i,j} \mid^2} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \mid r_{n,j} \mid^2} = \sqrt{1 + (n-1)|k|^2}$$

и

$$c_1(S) = \max_{1 \le j \le n} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \mid s_{i,j} \mid^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \mid s_{i,n} \mid^2} = \sqrt{n} \ .$$

Пошто је $F^{\circ -1} = R \circ S$, на основу леме 1.3, следи

$$\|F^{\circ -1}\|_2 \le r_1(R) \cdot c_1(S) = \sqrt{n(1 + (n-1)|k|^2)} \ .$$

2) Претпоставимо да је $|k| < 1$. Тада је,

$$\|F^{\circ -1}\|_E^2 \ge \ |k|^2 \sum_{i=0}^{n-1} (n-i) \frac{1}{F_{i+1}^2} + |k|^2 \sum_{i=1}^{n-1} i \frac{1}{F_{i+1}^2} = n|k|^2 \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{F_{i+1}^2} = n|k|^2 \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{F_i^2}$$

$$\ge \ n|k|^2 \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{F_n^2} = |k|^2 \left(\frac{n}{F_n} \right)^2 \ge |k|^2 \frac{n^2}{F_n F_{n+1}} = |k|^2 \frac{5n^2}{L_{2n+1} - (-1)^n} \ .$$

Дакле,

$$\frac{\|F^{\circ -1}\|_E}{\sqrt{n}} \ge |k| \sqrt{\frac{5n}{L_{2n+1} - (-1)^n}} \ .$$

Из (18) закључујемо да је

$$\|F^{\circ -1}\|_2 \ \ge |k| \sqrt{\frac{5n}{L_{2n+1} - (-1)^n}} \ .$$

Одредимо сада горњу границу за спектралну норму матрице $F^{\circ -1}$. Нека су M и N следеће матрице:

$$M = \begin{bmatrix} \frac{1}{F_1} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \frac{k}{F_n} & \frac{1}{F_1} & 1 & \cdots & 1 \\ \frac{k}{F_{n-1}} & \frac{k}{F_n} & \frac{1}{F_1} & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{k}{F_2} & \frac{k}{F_3} & \frac{k}{F_4} & \cdots & \frac{1}{F_1} \end{bmatrix} \text{ и } N = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{F_2} & \frac{1}{F_3} & \cdots & \frac{1}{F_n} \\ 1 & 1 & \frac{1}{F_2} & \cdots & \frac{1}{F_{n-1}} \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & \frac{1}{F_{n-2}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Тада је,

$$r_1(M) = \max_{1 \le i \le n} \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \mid m_{i,j} \mid^2} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \mid m_{1,j} \mid^2} = \sqrt{n}$$

и

$$c_1(N) = \max_{1 \le j \le n} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \mid n_{i,j} \mid^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \mid n_{i,1} \mid^2} = \sqrt{n} \ .$$

Пошто је $F^{\circ -1} = M \circ N$, на основу леме 1.3, следи

$$\|F^{\circ -1}\|_2 \le r_1(M) \cdot c_1(N) = n \ . \blacklozenge$$

Напомена 4.2. Ако је $k=0$, јасно је, на основу дефиниције Адамаровог инверза, да Адамаров инверз за матрице облика (166) не постоји. $\triangledown$

Следе резултати који се односе на матрице облика (167).

Теорема 4.14. ([51]) Нека је L матрица облика (167), при чему је $k \in \mathbb{C} \backslash \{0\}$. Сопствене вредности матрице L дате су следећим формулама:

1) Ако је $\psi\omega^{-j} = \frac{1}{\alpha}$, тада је

$$\lambda_j(L) = n\alpha - \frac{1 - (-1)^n \beta^{2n}}{\sqrt{5}}, \tag{175}$$

2) Ако је $\psi\omega^{-j}=\frac{1}{\beta}$, тада је

$$\lambda_j(L) = \frac{1-(-1)^n\alpha^{2n}}{\sqrt{5}} + n\beta, \tag{176}$$

3) Ако је $\psi\omega^{-j}\neq\frac{1}{\alpha}$ и $\psi\omega^{-j}\neq\frac{1}{\beta}$, тада је

$$\lambda_j(L) = \frac{kL_{n+1}-1-(2-kL_n)\,\psi\omega^{-j}}{(\psi\omega^{-j})^2+\psi\omega^{-j}-1}\,. \tag{177}$$

Доказ. На основу леме 2.7 и (146) следи:

1) Претпоставимо да је $\psi\omega^{-j}=\frac{1}{\alpha}$. Тада је,

$$\begin{aligned}\lambda_j(L) &= \sum_{i=0}^{n-1} L_{i+1}(\psi\omega^{-j})^i = \sum_{i=0}^{n-1}\left(\alpha^{i+1}+\beta^{i+1}\right)(\frac{1}{\alpha})^i = \alpha\sum_{i=0}^{n-1}1+\beta\sum_{i=0}^{n-1}(\frac{\beta}{\alpha})^i\\ &= n\alpha+\beta\frac{1-(\frac{\beta}{\alpha})^n}{1-\frac{\beta}{\alpha}} = n\alpha-\frac{1-(-1)^n\beta^{2n}}{\sqrt{5}}\,,\end{aligned}$$

2) Претпоставимо да је $\psi\omega^{-j}=\frac{1}{\beta}$. Тада је,

$$\begin{aligned}\lambda_j(L) &= \sum_{i=0}^{n-1} L_{i+1}(\psi\omega^{-j})^i = \sum_{i=0}^{n-1}\left(\alpha^{i+1}+\beta^{i+1}\right)(\frac{1}{\beta})^i = \alpha\sum_{i=0}^{n-1}(\frac{\alpha}{\beta})^i+\beta\sum_{i=0}^{n-1}1\\ &= \alpha\frac{1-(\frac{\alpha}{\beta})^n}{1-\frac{\alpha}{\beta}}+n\beta = \frac{1-(-1)^n\alpha^n}{\sqrt{5}}+n\beta\,,\end{aligned}$$

3) Претпоставимо да је $\psi\omega^{-j}\neq\frac{1}{\alpha}$ и $\psi\omega^{-j}\neq\frac{1}{\beta}$. Тада је,

$$\begin{aligned}\lambda_j(L) &= \sum_{i=0}^{n-1} L_{i+1}(\psi\omega^{-j})^i = \sum_{i=0}^{n-1}\left(\alpha^{i+1}+\beta^{i+1}\right)(\psi\omega^{-j})^i\\ &= \alpha\sum_{i=0}^{n-1}(\alpha\psi\omega^{-j})^i+\beta\sum_{i=0}^{n-1}(\beta\psi\omega^{-j})^i = \alpha\frac{(\alpha\psi\omega^{-j})^n-1}{\alpha\psi\omega^{-j}-1}+\beta\frac{(\beta\psi\omega^{-j})^n-1}{\beta\psi\omega^{-j}-1}\\ &= \alpha\frac{k\alpha^n-1}{\alpha\psi\omega^{-j}-1}+\beta\frac{k\beta^n-1}{\beta\psi\omega^{-j}-1}\end{aligned}$$

$$= \frac{1-k\left(\alpha^{n+1}+\beta^{n+1}\right)+2\psi\omega^{-j}-k\left(\alpha^{n}+\beta^{n}\right)\psi\omega^{-j}}{-(\psi\omega^{-j})^2-\psi\omega^{-j}+1}$$

$$= \frac{1-kL_{n+1}+2\psi\omega^{-j}-kL_n\psi\omega^{-j}}{-(\psi\omega^{-j})^2-\psi\omega^{-j}+1}=\frac{kL_{n+1}-1-\left(2-kL_n\right)\psi\omega^{-j}}{(\psi\omega^{-j})^2+\psi\omega^{-j}-1}\,. \quad \blacklozenge$$

Напомена 4.3. Ако је $k=0$, све сопствене вредности матрица облика (167) су, на основу напомене 2.1, једнаке 1. $\triangledown$

Пример 4.2. Нека је

$$L=\operatorname{circ}\{_{9+4\sqrt{5}}(1,3,4,7,11,18)\}$$

тј.

$$L=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 7 & 11 & 18 \\ 18(9+4\sqrt{5}) & 1 & 3 & 4 & 7 & 11 \\ 11(9+4\sqrt{5}) & 18(9+4\sqrt{5}) & 1 & 3 & 4 & 7 \\ 7(9+4\sqrt{5}) & 11(9+4\sqrt{5}) & 18(9+4\sqrt{5}) & 1 & 3 & 4 \\ 4(9+4\sqrt{5}) & 7(9+4\sqrt{5}) & 11(9+4\sqrt{5}) & 18(9+4\sqrt{5}) & 1 & 3 \\ 3(9+4\sqrt{5}) & 4(9+4\sqrt{5}) & 7(9+4\sqrt{5}) & 11(9+4\sqrt{5}) & 18(9+4\sqrt{5}) & 1 \end{bmatrix}.$$

Пошто је $n=6$ и $k=9+4\sqrt{5}$ тј. $\psi=\alpha$ и $\omega=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$, на основу претходне теореме (теорема 4.14) следи:

$\divideontimes$: $\psi\omega^{-3}=\frac{1}{\beta}$, па λ_3 добијамо применом другог дела теореме 4.14: $\lambda_3=-69-35\sqrt{5}$;

$\divideontimes$: $\psi\omega^{-j}\neq\frac{1}{\alpha}$ and $\psi\omega^{-j}\neq\frac{1}{\beta}$, за $j=0,1,2,4,5$, па λ_j, за $j=0,1,2,4,5$, добијамо применом трећег дела теореме 4.14: $\lambda_0=160+72\sqrt{5}$, $\lambda_{1,4}=15+7\sqrt{5}\pm i\sqrt{3}(65+29\sqrt{5})$, $\lambda_{2,5}=-\frac{1}{2}\left[115+51\sqrt{5}\mp i\sqrt{3}(65+29\sqrt{5})\right]$.

Пошто је $\mid L \mid = \prod_{j=0}^{n-1} \lambda_j$, следи да је

$$\mid L \mid = -31\,367\,216\,640\,000 \,-\, 14\,027\,845\,734\,400\sqrt{5}\,.\ \diamondsuit$$

Теорема 4.15. ([51]) Нека је L матрица облика (167). Еуклидска норма матрице L је:

$$\|L\|_E = \sqrt{n\left[L_{2n+1} + (-1)^n - 2\right] + (|k|^2 - 1)\left[-L_{2n} + (n-1)L_{2n+1} + \frac{7}{2} + \frac{2n-1}{2}(-1)^n\right]}. \qquad (178)$$

Доказ. На основу дефиниције Еуклидске норме, користећи (95) и (146), добијамо:

$$\begin{aligned}
(\|L\|_E)^2 &= nL_1^2 + \left[(n-1) + |k|^2\right] L_2^2 + \cdots + \left[1 + (n-1)|k|^2\right] L_n^2 \\
&= \sum_{i=0}^{n-1}(n-i)L_{i+1}^2 + |k|^2 \sum_{i=1}^{n-1} iL_{i+1}^2 = n\sum_{i=0}^{n-1} L_{i+1}^2 + (|k|^2-1)\sum_{i=1}^{n-1} iL_{i+1}^2 \\
&= n\left[L_{2n+1} + (-1)^n - 2\right] + (|k|^2-1)\sum_{i=1}^{n-1} i\left[\alpha^{2i+2} + 2(\alpha\beta)^{i+1} + \beta^{2i+2}\right] \\
&= n\left[L_{2n+1} + (-1)^n - 2\right] + (|k|^2-1)(\alpha^2\,\frac{\alpha^2 - n\alpha^{2n} + (n-1)\alpha^{2n+2}}{\alpha^2} \\
&\qquad -2\,\frac{-1-n(-1)^n+(n-1)(-1)^{n+1}}{4} + \beta^2\,\frac{\beta^2 - n\beta^{2n} + (n-1)\beta^{2n+2}}{\beta^2}) \\
&= n[L_{2n+1}+(-1)^n-2]+(|k|^2-1)\left[-nL_{2n}+(n-1)L_{2n+2}+\frac{7}{2}+\frac{2n-1}{2}(-1)^n\right] \\
&= n[L_{2n+1}+(-1)^n-2]+(|k|^2-1)\left[-L_{2n}+(n-1)L_{2n+1}+\frac{7}{2}+\frac{2n-1}{2}(-1)^n\right].
\end{aligned}$$

Дакле,

$$\|L\|_E = \sqrt{n\left[L_{2n+1}+(-1)^n-2\right]+(|k|^2-1)\left[-L_{2n}+(n-1)L_{2n+1}+\tfrac{7}{2}+\tfrac{2n-1}{2}(-1)^n\right]}\,.\ \blacklozenge$$

Теорема 4.16. ([51]) Нека је L матрица облика (167), при чему је $k \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$.

1) Ако је $|k| \geq 1$, тада је

$$\sqrt{\frac{n}{L_{2n+1}+(-1)^n}} \leq \|L^{\circ-1}\|_2 \leq \sqrt{n(1+(n-1)|k|^2)}\ , \tag{179}$$

2) Ако је $|k| < 1$, тада је

$$|k|\sqrt{\frac{n}{L_{2n+1}+(-1)^n}} \leq \|L^{\circ-1}\|_2 \leq n\ . \tag{180}$$

Доказ. Из дефиниције Еуклидске норме следи:

$$\|L^{\circ-1}\|_E^2 = \sum_{i=0}^{n-1}(n-i)\frac{1}{L_{i+1}^2} + |k|^2\sum_{i=1}^{n-1} i\frac{1}{L_{i+1}^2}\,. \tag{181}$$

1) Претпоставимо да је $|k| \geq 1$. Тада је,

$$\begin{aligned}\|L^{\circ-1}\|_E^2 \geq & \sum_{i=0}^{n-1}(n-i)\frac{1}{L_{i+1}^2} + \sum_{i=1}^{n-1} i\frac{1}{L_{i+1}^2} = n\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{L_{i+1}^2} = n\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{L_i^2} \\ \geq &\ n\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{L_n^2} = \left(\frac{n}{L_n}\right)^2 > \frac{n^2}{L_nL_{n+1}} = \frac{n^2}{L_{2n+1}+(-1)^n}\,.\end{aligned}$$

Дакле,

$$\frac{\|L^{\circ-1}\|_E}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{\frac{n}{L_{2n+1}+(-1)^n}}\,.$$

Из (18) закључујемо да је

$$\|L^{\circ-1}\|_2 \geq \sqrt{\frac{n}{L_{2n+1}+(-1)^n}}\,.$$

Одредимо сада горњу границу за спектралну норму матрице $L^{\circ-1}$. Нека су R и S следеће матрице:

$$R=\begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} & \frac{1}{L_2} & \frac{1}{L_3} & \cdots & \frac{1}{L_n} \\ k & \frac{1}{L_1} & \frac{1}{L_2} & \cdots & \frac{1}{L_{n-1}} \\ k & k & \frac{1}{L_1} & \cdots & \frac{1}{L_{n-2}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k & k & k & \cdots & \frac{1}{L_1} \end{bmatrix} \text{ и } S=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \frac{1}{L_n} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \frac{1}{L_{n-1}} & \frac{1}{L_n} & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{L_2} & \frac{1}{L_3} & \frac{1}{L_4} & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Тада је,

$$r_1(R)=\max_{1\le i\le n}\sqrt{\sum_{j=1}^{n} \mid r_{i,j}\mid^2}=\sqrt{\sum_{j=1}^{n} \mid r_{n,j}\mid^2}=\sqrt{1+(n-1)|k|^2}$$

и

$$c_1(S)=\max_{1\le j\le n}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \mid s_{i,j}\mid^2}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \mid s_{i,n}\mid^2}=\sqrt{n}\ .$$

Пошто је $L^{\circ-1}=R\circ S$, на основу леме 1.3, следи

$$\|L^{\circ-1}\|_2\le r_1(R)\cdot c_1(S)=\sqrt{n(1+(n-1)|k|^2)}\ .$$

2) Претпоставимо да је $|k|<1$. Тада је,

$$\|L^{\circ-1}\|_E^2\ge\ |k|^2\sum_{i=0}^{n-1}(n-i)\frac{1}{L_{i+1}^2}+|k|^2\sum_{i=1}^{n-1}i\frac{1}{L_{i+1}^2}=n|k|^2\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{L_{i+1}^2}=n|k|^2\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{L_i^2}$$

$$\ge\ n|k|^2\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{L_n^2}=|k|^2\left(\frac{n}{L_n}\right)^2>|k|^2\frac{n^2}{L_nL_{n+1}}=|k|^2\frac{n^2}{L_{2n+1}+(-1)^n}\ .$$

Дакле,

$$\frac{\|L^{\circ -1}\|_E}{\sqrt{n}} \geq |k| \sqrt{\frac{n}{L_{2n+1}+(-1)^n}}\,.$$

Из (18) закључујемо да је

$$\|L^{\circ -1}\|_2 \geq |k| \sqrt{\frac{n}{L_{2n+1}+(-1)^n}}\,.$$

Одредимо сада горњу границу за спектралну норму матрице $L^{\circ -1}$. Нека су M и N следеће матрице:

$$M = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \frac{k}{L_n} & \frac{1}{L_1} & 1 & \cdots & 1 \\ \frac{k}{L_{n-1}} & \frac{k}{L_n} & \frac{1}{L_1} & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{k}{L_2} & \frac{k}{L_3} & \frac{k}{L_4} & \cdots & \frac{1}{L_1} \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad N = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{L_2} & \frac{1}{L_3} & \cdots & \frac{1}{L_n} \\ 1 & 1 & \frac{1}{L_2} & \cdots & \frac{1}{L_{n-1}} \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & \frac{1}{L_{n-2}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Тада је,

$$r_1(M) = \max_{1\leq i\leq n} \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \mid m_{i,j} \mid^2} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \mid m_{1,j} \mid^2} = \sqrt{n}$$

и

$$c_1(N) = \max_{1\leq j\leq n} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \mid n_{i,j} \mid^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \mid n_{i,1} \mid^2} = \sqrt{n}\;.$$

Пошто је $L^{\circ -1} = M \circ N$, на основу леме 1.3, следи

$$\|L^{\circ -1}\|_2 \leq r_1(M) \cdot c_1(N) = n\;.\blacklozenge$$

Напомена 4.4. Ако је $k=0$, јасно је, на основу дефиниције Адамаровог инверза, да Адамаров инверз за матрице облика (167) не постоји. $\triangledown$

5. K-циркуларне матрице са биномним коефицијентима

У овом делу ће бити презентовани оригинални резултати из рада [52] којима се, између осталог, уопштавају неки резултати добијени у радовима [44] и [45].

Подсетимо се прво дефиниције биномних коефицијената.

Дефиниција 5.1. Биномни коефицијент $\binom{n}{i}$ је коефицијент уз моном x^i у развоју $(1+x)^n$ тј.

$$(1+x)^n = \sum_{i\geq 0} \tbinom{n}{i} x^i\,.$$

Наиме,

$$\tbinom{n}{i} = \begin{cases} \frac{n!}{i!\,(n-i)!}\,, & \text{за } 0 \leq i \leq n \\ 0\,, & \text{за } i > n \end{cases}\,, \tag{182}$$

где је, за $m \in \mathbb{N}$, $m! = \prod\limits_{j=1}^{m} j$, и $0! = 1$.

Неке једнакости и неједнакости које важе за биномне коефицијенте дате су у следећој теореми.

Теорема 5.1. За биномни коефицијент $\binom{n}{i}$ дефинисан са (182) важи:

1) $\binom{n}{i} = \binom{n}{n-i}$, 2) $\binom{n}{i} = \frac{n}{i}\binom{n-1}{i-1}$, 3) $\binom{n}{i} = \binom{n-1}{i-1} + \binom{n-1}{i}$,

4) $\sum\limits_{i=0}^{n}\binom{n}{i} = 2^n$, 5) $\sum\limits_{i=1}^{n} i\binom{n}{i} = n2^{n-1}$, 6) $\sum\limits_{i=0}^{n}\binom{n}{i}^2 = \binom{2n}{n}$,

7) а) Ако је n паран природан број, тада је:

$$\binom{n}{0} < \binom{n}{1} < \binom{n}{2} < \cdots < \binom{n}{\frac{n}{2}} > \cdots > \binom{n}{n-2} > \binom{n}{n-1} > \binom{n}{n},$$

б) Ако је n непаран природан број, тада је:

$$\binom{n}{0} < \binom{n}{1} < \binom{n}{2} < \cdots < \binom{n}{\frac{n-1}{2}} = \binom{n}{\frac{n+1}{2}} > \cdots > \binom{n}{n-2} > \binom{n}{n-1} > \binom{n}{n}.$$

Дакле, највећи међу бројевима $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \ldots, \binom{n}{n}$ је $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} = \binom{n}{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$,

где је $\lfloor n \rfloor = \max\{m \in \mathbb{Z} \,|\, m \le n\}$ и $\lceil n \rceil = \min\{m \in \mathbb{Z} \,|\, m \ge n\}$. ♦

Анализирајући, у радовима [44] и [45], матрице облика:

$$\mathrm{circ}\{(\binom{n-1}{0}, \binom{n-1}{1}, \binom{n-1}{2}, \ldots, \binom{n-1}{n-1})\} \tag{183}$$

тј. матрице облика:

$$\begin{bmatrix} \binom{n-1}{0} & \binom{n-1}{1} & \binom{n-1}{2} & \cdots & \binom{n-1}{n-2} & \binom{n-1}{n-1} \\ \binom{n-1}{n-1} & \binom{n-1}{0} & \binom{n-1}{1} & \cdots & \binom{n-1}{n-3} & \binom{n-1}{n-2} \\ \binom{n-1}{n-2} & \binom{n-1}{n-1} & \binom{n-1}{0} & \cdots & \binom{n-1}{n-4} & \binom{n-1}{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \binom{n-1}{2} & \binom{n-1}{3} & \binom{n-1}{4} & \cdots & \binom{n-1}{0} & \binom{n-1}{1} \\ \binom{n-1}{1} & \binom{n-1}{2} & \binom{n-1}{3} & \cdots & \binom{n-1}{n-1} & \binom{n-1}{0} \end{bmatrix}, \tag{184}$$

Rabago је одредио:

1) Сопствене вредности таквих матрица.

Теорема 5.2. (Лема 2.1. [45]) Нека је B матрица облика (183). Сопствене вредности матрице B дате су следећим формулама:

$$\lambda_0(B) = 2^{n-1} \quad \text{и} \quad \lambda_j(B) = (1+\omega^j)^{n-1},\ j = \overline{1,\, n-1}\,. \quad \blacklozenge \tag{185}$$

2) Детерминанту таквих матрица.

Теорема 5.3. (Теорема 2.1. [45]) Нека је B матрица облика (183). Детерминанта матрице B је:

$$|B| = (1+(-1)^{n-1})2^{n-2}\,. \quad \blacklozenge \tag{186}$$

Последица 5.1. Из претходне теореме следи да су циркуларне матрице реда n са биномним коефицијентима сингуларне ако и само ако је n паран природан број. $\triangle$

3) Еуклидску норму таквих матрица.

Теорема 5.4. (Последица II. 12. [44]) Нека је B матрица облика (183). Еуклидска норма матрице B је:

$$\|B\|_E = \sqrt{n\tbinom{2n-2}{n-1}}\,. \quad \blacklozenge \tag{187}$$

4) Спектралну норму таквих матрица.

Теорема 5.5. (Теорема II. 7. [44]) Нека је B матрица облика (183). Спектрална норма матрице B је:

$$\|B\|_2 = \max\{\, 2^{n-1}\,, |2\cos\frac{\pi}{n}|^{n-1}\}\,. \quad \blacklozenge \tag{188}$$

5) 1-норму и ∞-норму таквих матрица.

Теорема 5.6. (Последица II. 8. [44]) Нека је B матрица облика (183). 1-норма и ∞-норма матрице B су:

$$\|B\|_1 = \|B\|_\infty = 2^{n-1}\,. \quad \blacklozenge \tag{189}$$

Уопштења неких од наведених резултата добијена су у раду [52] у коме су анализиране матрице облика:

$$\mathrm{circ}\{_k(\binom{n-1}{0}, \binom{n-1}{1}, \binom{n-1}{2}, \ldots, \binom{n-1}{n-1})\} \tag{190}$$

тј. матрице облика:

$$\begin{bmatrix} \binom{n-1}{0} & \binom{n-1}{1} & \binom{n-1}{2} & \ldots & \binom{n-1}{n-2} & \binom{n-1}{n-1} \\ k\binom{n-1}{n-1} & \binom{n-1}{0} & \binom{n-1}{1} & \ldots & \binom{n-1}{n-3} & \binom{n-1}{n-2} \\ k\binom{n-1}{n-2} & k\binom{n-1}{n-1} & \binom{n-1}{0} & \ldots & \binom{n-1}{n-4} & \binom{n-1}{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ k\binom{n-1}{2} & k\binom{n-1}{3} & k\binom{n-1}{4} & \ldots & \binom{n-1}{0} & \binom{n-1}{1} \\ k\binom{n-1}{1} & k\binom{n-1}{2} & k\binom{n-1}{3} & \ldots & k\binom{n-1}{n-1} & \binom{n-1}{0} \end{bmatrix}, \tag{191}$$

где је $k \in \mathbb{C}$.

У наставку презентујемо резултате из рада [52]. Први уопштени резултат односи се на сопствене вредности матрица облика (190).

Теорема 5.7. ([52]) Нека је B матрица облика (190), при чему је $k \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Сопствене вредности матрице B су:

$$\lambda_j(B) = (1 + \psi\omega^j)^{n-1},\ j = \overline{0,\, n-1}\,. \tag{192}$$

Доказ. Имајући у виду да су $\lambda_j(C_{n,k}) = \psi\omega^j$, $j = \overline{0,\, n-1}$, где је $C_{n,k} = circ_n\{_k(0, 1, 0, \ldots, 0)\}$, и чињеницу да, на основу (71), за матрицу B важи:

$$B = (I + C_{n,k})^{n-1}, \tag{193}$$

закључујемо да су $\lambda_j(B) = (1 + \psi\omega^j)^{n-1}$, $j = \overline{0,\, n-1}$, што је и требало доказати. ♦

Напомена 5.1. Ако је $k = 0$, све сопствене вредности матрица облика (190) су, на основу напомене 2.1, једнаке 1. ▽

Следећом теоремом одређујемо детерминанту за матрице облика (190).

Теорема 5.8. ([52]) Нека је B матрица облика (190). Детерминанта матрице B је:

$$|B| = \begin{cases} (1-k)^{n-1}, & \text{ако је } n \text{ паран природан број} \\ (1+k)^{n-1}, & \text{ако је } n \text{ непаран природан број} \end{cases}. \tag{194}$$

Доказ. Пошто је

$$|\, I + C_{n,k} \,| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ k & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1-(-1)^n k \end{vmatrix},$$

закључујемо да је $|\, I + C_{n,k} \,| = 1 - (-1)^n k$. Дакле, на основу (4) и (193), следи да је $|\, B \,| = (1 - (-1)^n k)^{n-1}$, што је и требало доказати. ♦

Последица 5.2. Из претходне теореме следи да су косоциркуларне матрице реда n са биномним коефицијентима сингуларне ако и само ако је n непаран природан број. △

Напомена 5.2. При одређивању сопствених вредности и детерминанте матрица облика (183), Rabago није користио једнакост (193). ▽

Осим наведених резултата, у раду [52], одређене су границе за спектралну норму матрица облика (190) као и за спектралну норму Адамаровог инверза за матрице облика (190), где је $k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Прво наводимо теорему у којој су одређене границе за спектралну норму матрица облика (190).

Теорема 5.9. ([52]) Нека је B матрица облика (190).

1) Ако је $|k| \geq 1$, тада је

$$\sqrt{\binom{2n-2}{n-1}} \leq \|B\|_2 \leq \sqrt{\left(1+|k|^2\left(\binom{2n-2}{n-1}-1\right)\right)\binom{2n-2}{n-1}}\ , \tag{195}$$

2) Ако је $|k| < 1$, тада је

$$|k|\sqrt{\binom{2n-2}{n-1}} \leq \|B\|_2 \leq \sqrt{n\binom{2n-2}{n-1}}\ . \tag{196}$$

Доказ. Из дефиниције Еуклидске норме добијамо:

$$\|B\|_E^2 = \sum_{i=0}^{n-1}(n-i)\binom{n-1}{i}^2 + |k|^2\sum_{i=1}^{n-1} i\binom{n-1}{i}^2 . \tag{197}$$

1) Ако је $|k| \geq 1$, из (197) следи

$$\|B\|_E^2 \geq \sum_{i=0}^{n-1}(n-i)\binom{n-1}{i}^2 + \sum_{i=1}^{n-1} i\binom{n-1}{i}^2 = n\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}^2 = n\binom{2n-2}{n-1}.$$

Дакле,

$$\frac{\|B\|_E}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{\binom{2n-2}{n-1}}\,.$$

Из (18) закључујемо да је

$$\|B\|_2 \geq \sqrt{\binom{2n-2}{n-1}}\,.$$

У наставку одређујемо горњу границу за спектралну норму матрице B.

Нека су R и S следеће матрице:

$$R = \begin{bmatrix} \binom{n-1}{0} & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ k\binom{n-1}{n-1} & \binom{n-1}{0} & 1 & \dots & 1 & 1 \\ k\binom{n-1}{n-2} & k\binom{n-1}{n-1} & \binom{n-1}{0} & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ k\binom{n-1}{2} & k\binom{n-1}{3} & k\binom{n-1}{4} & \dots & \binom{n-1}{0} & 1 \\ k\binom{n-1}{1} & k\binom{n-1}{2} & k\binom{n-1}{3} & \dots & k\binom{n-1}{n-1} & \binom{n-1}{0} \end{bmatrix}$$

и

$$S=\begin{bmatrix} 1 & \binom{n-1}{1} & \binom{n-1}{2} & \dots & \binom{n-1}{n-2} & \binom{n-1}{n-1} \\ 1 & 1 & \binom{n-1}{1} & \dots & \binom{n-1}{n-3} & \binom{n-1}{n-2} \\ 1 & 1 & 1 & \dots & \binom{n-1}{n-4} & \binom{n-1}{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & \binom{n-1}{1} \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Тада je,

$$\begin{aligned} r_1(R) &= \max_{1\le i\le n}\sqrt{\sum_{j=1}^{n} \mid r_{i,j}\mid^2} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \mid r_{n,j}\mid^2} = \sqrt{\binom{n-1}{0}^2 + |k|^2\sum_{j=1}^{n-1}\binom{n-1}{j}^2} \\ &= \sqrt{1+|k|^2\left(\binom{2n-2}{n-1}-1\right)} \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} c_1(S) &= \max_{1\le j\le n}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \mid s_{i,j}\mid^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \mid s_{i,n}\mid^2} = \sqrt{1+\sum_{i=1}^{n-1}\binom{n-1}{i}^2} \\ &= \sqrt{\binom{2n-2}{n-1}}\,. \end{aligned}$$

Пошто je $B = R\circ S$, на основу леме 1.3, следи

$$\|B\|_2 \le r_1(R)\cdot c_1(S) = \sqrt{\left(1+|k|^2\left(\binom{2n-2}{n-1}-1\right)\right)\binom{2n-2}{n-1}}\,.$$

2) Ако je $|k|<1$, из (197) следи

$$\begin{aligned} \|B\|_E^2 &\ge |k|^2\sum_{i=0}^{n-1}(n-i)\binom{n-1}{i}^2 + |k|^2\sum_{i=1}^{n-1} i\binom{n-1}{i}^2 \\ &= n|k|^2\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}^2 = n|k|^2\binom{2n-2}{n-1}. \end{aligned}$$

Дакле,

$$\frac{\|B\|_E}{\sqrt{n}} \ge |k|\sqrt{\binom{2n-2}{n-1}}.$$

Из (18) закључујемо да је

$$\|B\|_2 \geq |k|\sqrt{\binom{2n-2}{n-1}}.$$

У наставку одређујемо горњу границу за спектралну норму матрице B. Нека су M и N следеће матрице:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ k & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ k & k & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ k & k & k & \dots & 1 & 1 \\ k & k & k & \dots & k & 1 \end{bmatrix}$$

и

$$N = \begin{bmatrix} \binom{n-1}{0} & \binom{n-1}{1} & \binom{n-1}{2} & \dots & \binom{n-1}{n-2} & \binom{n-1}{n-1} \\ \binom{n-1}{n-1} & \binom{n-1}{0} & \binom{n-1}{1} & \dots & \binom{n-1}{n-2} & \binom{n-1}{n-3} \\ \binom{n-1}{n-2} & \binom{n-1}{n-1} & \binom{n-1}{0} & \dots & \binom{n-1}{n-3} & \binom{n-1}{n-4} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \binom{n-1}{2} & \binom{n-1}{3} & \binom{n-1}{4} & \dots & \binom{n-1}{0} & \binom{n-1}{1} \\ \binom{n-1}{1} & \binom{n-1}{2} & \binom{n-1}{3} & \dots & \binom{n-1}{n-1} & \binom{n-1}{0} \end{bmatrix}.$$

Тада је,

$$r_1(M) = \max_{1 \leq i \leq n} \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |\ m_{i,j}\ |^2} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |\ m_{1,j}\ |^2} = \sqrt{n}$$

и

$$c_1(N) = \max_{1 \leq j \leq n} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |\ n_{i,j}\ |^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |\ n_{i,1}\ |^2} = \sqrt{\sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i}^2} = \sqrt{\binom{2n-2}{n-1}}\ .$$

Пошто је $B = M \circ N$, на основу леме 1.3, следи

$$\|B\|_2 \leq r_1(M) \cdot c_1(N) = \sqrt{n\binom{2n-2}{n-1}} \,. \quad \blacklozenge$$

У следећој теореми су одређене границе за спектралну норму Адамаровог инверза за матрице облика (190), где је $k \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$.

Теорема 5.10. ([52]) Нека је B матрица облика (190), при чему је $k \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$.

1) Ако је $|k| \geq 1$, тада је

$$\frac{(\frac{n-1}{2} + \{\frac{n-1}{2}\})!\,\sqrt{n}}{\prod_{i=1}^{\frac{n-1}{2}+\{\frac{n-1}{2}\}} \left(\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor + i\right)} \leq \|B^{\circ -1}\|_2 \leq \sqrt{n(1+(n-1)|k|^2)} \,, \tag{198}$$

2) Ако је $|k| < 1$, тада је

$$|k| \, \frac{(\frac{n-1}{2} + \{\frac{n-1}{2}\})!\,\sqrt{n}}{\prod_{i=1}^{\frac{n-1}{2}+\{\frac{n-1}{2}\}} \left(\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor + i\right)} \leq \|B^{\circ -1}\|_2 \leq n \,, \tag{199}$$

где је $\{n\} = n - \lfloor n \rfloor$.

Доказ. Из (197) следи

1) Ако је $|k| \geq 1$, тада је

$$\|B^{\circ -1}\|_E^2 \;\; \geq \;\; \sum_{i=0}^{n-1}(n-i)\frac{1}{\binom{n-1}{i}^2} + \sum_{i=1}^{n-1} i \frac{1}{\binom{n-1}{i}^2} = n \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{\binom{n-1}{i}^2}$$

$$\geqslant n \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{\binom{n-1}{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor}^2} = n^2 \, \frac{1}{\binom{n-1}{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor}^2} = n^2 \left(\frac{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor ! \, (n-1-\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor)!}{(n-1)!} \right)^2$$

$$= n^2 \left(\frac{(\frac{n-1}{2} + \{\frac{n-1}{2}\})!}{(\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor + 1)(\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor + 2) \cdots (n-1)} \right)^2 .$$

Дакле,

$$\frac{\|B^{\circ -1}\|_E}{\sqrt{n}} \geq \frac{\left(\frac{n-1}{2} + \{\frac{n-1}{2}\}\right)!\,\sqrt{n}}{\displaystyle\prod_{i=1}^{\frac{n-1}{2}+\{\frac{n-1}{2}\}} \left(\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor + i\right)} .$$

Из (18) закључујемо да је

$$\|B^{\circ -1}\|_2 \geq \frac{\left(\frac{n-1}{2} + \{\frac{n-1}{2}\}\right)!\,\sqrt{n}}{\displaystyle\prod_{i=1}^{\frac{n-1}{2}+\{\frac{n-1}{2}\}} \left(\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor + i\right)} .$$

У наставку одређујемо горњу границу за спектралну норму матрице $B^{\circ -1}$. Нека су R и S следеће матрице:

$$R = \begin{bmatrix} \frac{1}{\binom{n-1}{0}} & \frac{1}{\binom{n-1}{1}} & \frac{1}{\binom{n-1}{2}} & \cdots & \frac{1}{\binom{n-1}{n-2}} & \frac{1}{\binom{n-1}{n-1}} \\ k & \frac{1}{\binom{n-1}{0}} & \frac{1}{\binom{n-1}{1}} & \cdots & \frac{1}{\binom{n-1}{n-3}} & \frac{1}{\binom{n-1}{n-2}} \\ k & k & \frac{1}{\binom{n-1}{0}} & \cdots & \frac{1}{\binom{n-1}{n-4}} & \frac{1}{\binom{n-1}{n-3}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ k & k & k & \cdots & \frac{1}{\binom{n-1}{0}} & \frac{1}{\binom{n-1}{1}} \\ k & k & k & \cdots & k & \frac{1}{\binom{n-1}{0}} \end{bmatrix}$$

и

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \frac{1}{\binom{n-1}{n-1}} & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \frac{1}{\binom{n-1}{n-2}} & \frac{1}{\binom{n-1}{n-1}} & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{\binom{n-1}{2}} & \frac{1}{\binom{n-1}{3}} & \frac{1}{\binom{n-1}{4}} & \cdots & 1 & 1 \\ \frac{1}{\binom{n-1}{1}} & \frac{1}{\binom{n-1}{2}} & \frac{1}{\binom{n-1}{3}} & \cdots & \frac{1}{\binom{n-1}{n-1}} & 1 \end{bmatrix} .$$

Тада је,

$$r_1(R) = \max_{1 \le i \le n} \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \mid r_{i,j} \mid^2} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \mid r_{n,j} \mid^2} = \sqrt{1 + (n-1)|k|^2}$$

и

$$c_1(S) = \max_{1 \le j \le n} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \mid s_{i,j} \mid^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \mid s_{i,n} \mid^2} = \sqrt{n} \ .$$

Пошто је $B^{\circ -1} = R \circ S$, на основу леме 1.3, следи

$$\|B^{\circ -1}\|_2 \le r_1(R) \cdot c_1(S) = \sqrt{n(1 + (n-1)|k|^2)} \ .$$

2) Ако је $|k| < 1$, тада је

$$\|B^{\circ -1}\|_E^2 \ge |k|^2 \sum_{i=0}^{n-1} (n-i) \frac{1}{\binom{n-1}{i}^2} + |k|^2 \sum_{i=1}^{n-1} i \frac{1}{\binom{n-1}{i}^2} = n|k|^2 \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{\binom{n-1}{i}^2}$$

$$\geqslant n|k|^2 \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{\binom{n-1}{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor}} = n^2|k|^2 \frac{1}{\binom{n-1}{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor}} = n^2|k|^2 \left(\frac{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor! \, (n-1-\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor)!}{(n-1)!} \right)^2$$

$$= n^2|k|^2 \left(\frac{(\frac{n-1}{2} + \{\frac{n-1}{2}\})!}{(\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor + 1)(\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor + 2) \cdots (n-1)} \right)^2 .$$

Дакле,

$$\frac{\|B^{\circ -1}\|_E}{\sqrt{n}} \ge |k| \, \frac{(\frac{n-1}{2} + \{\frac{n-1}{2}\})! \, \sqrt{n}}{\prod\limits_{i=1}^{\frac{n-1}{2} + \{\frac{n-1}{2}\}} \left(\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor + i \right)} .$$

Из (18) закључујемо да је

$$\|B^{\circ -1}\|_2 \ge |k| \, \frac{(\frac{n-1}{2} + \{\frac{n-1}{2}\})! \, \sqrt{n}}{\prod\limits_{i=1}^{\frac{n-1}{2} + \{\frac{n-1}{2}\}} \left(\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor + i \right)} .$$

У наставку одређујемо горњу границу за спектралну норму матрице $B^{\circ -1}$. Нека су M и N следеће матрице:

$$M=\begin{bmatrix} \frac{1}{\binom{n-1}{0}} & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \frac{k}{\binom{n-1}{n-1}} & \frac{1}{\binom{n-1}{0}} & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \frac{k}{\binom{n-1}{n-2}} & \frac{k}{\binom{n-1}{n-1}} & \frac{1}{\binom{n-1}{0}} & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{k}{\binom{n-1}{2}} & \frac{k}{\binom{n-1}{3}} & \frac{k}{\binom{n-1}{4}} & \cdots & \frac{1}{\binom{n-1}{0}} & 1 \\ \frac{k}{\binom{n-1}{1}} & \frac{k}{\binom{n-1}{2}} & \frac{k}{\binom{n-1}{3}} & \cdots & \frac{k}{\binom{n-1}{n-1}} & \frac{1}{\binom{n-1}{0}} \end{bmatrix}$$

и

$$N=\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{\binom{n-1}{1}} & \frac{1}{\binom{n-1}{2}} & \cdots & \frac{1}{\binom{n-1}{n-2}} & \frac{1}{\binom{n-1}{n-1}} \\ 1 & 1 & \frac{1}{\binom{n-1}{1}} & \cdots & \frac{1}{\binom{n-1}{n-3}} & \frac{1}{\binom{n-1}{n-2}} \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & \frac{1}{\binom{n-1}{n-4}} & \frac{1}{\binom{n-1}{n-3}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & \frac{1}{\binom{n-1}{1}} \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Тада је,

$$r_1(M)=\max_{1\leq i\leq n}\sqrt{\sum_{j=1}^{n} \mid m_{i,j} \mid^2}=\sqrt{\sum_{j=1}^{n} \mid m_{1,j} \mid^2}=\sqrt{n}$$

и

$$c_1(N)=\max_{1\leq j\leq n}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \mid n_{i,j} \mid^2}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \mid n_{i,1} \mid^2}=\sqrt{n}\ .$$

Пошто је $B^{\circ -1} = M \circ N$, на основу леме 1.3, следи

$$\|B^{\circ -1}\|_2 \leq r_1(M) \cdot c_1(N) = n \ . \quad \blacklozenge$$

Напомена 5.3. Ако је $k = 0$, јасно је, на основу дефиниције Адамаровог инверза, да Адамаров инверз за матрице облика (190) не постоји. $\triangledown$

Литература

[1] M. Bahsi, S. Solak, *On the Circulant Matrices with Arithmetic Sequence*, Int. J. Contemp. Math. Sci. **5**(25) (2010), 1213-1222.

[2] A. Ben-Artzi, T. Shalom, *On inversion of Toeplitz and close to Toeplitz matrices*, Linear Algebra Appl. **75** (1986), 173-192.

[3] A. Ben-Israel, T.N.E. Greville, *Generalized Inverses: Theory and Applications*, A Wiley-Interscience Publication, Pure and Applied Mathematics. John Wiley and Sons, NY, 1974.

[4] J. Bernik, R. Drnovšek, D. Kokol Bukovšek, T. Košir, M. Omladič, H. Radjavi, *On semitransitive Jordan algebras of matrices*, J. Algebra Appl. **10**(2) (2011), 319-333.

[5] E. Boman, *The Moore-Penrose Pseudoinverse of an Arbitrary, Square, k-circulant Matrix*, Linear Multilinear Algebra **50**(2) (2002), 175-179.

[6] A.C.F. Bueno, *Right Circulant Matrices With Geometric Progression*, Int. J. Appl. Math. Res. **1**(4) (2012), 593-603.

[7] S.L. Campbell, C.D. Meyer, *Generalized Inverses of Linear Transformations*, SIAM, Philadelphia, 2009.

[8] J. Chun, *Fast array algorithms for structured matrices*, PhD thesis, Stanford University, 1989.

[9] R.E. Cline, R.J. Plemmons, G. Worm, *Generalized Inverses of Certain Toeplitz Matrices*, Linear Algebra Appl. **8**(1) (1974), 25-33.

[10] H. Civciv, R. Turkmen, *Notes on norms of circulant matrices with Lucas number*, Int. J. Inf. Syst. Sci. **4**(1) (2008), 142-147.

[11] W.K. Cochran, R.J. Plemmons, T.C. Torgersen, *Exploiting Toeplitz structure in atmospheric image restoration*, pp. 177-189, Structured Matrices in Mathematics, Computer Science, and Engineering I, Contemp. Math., 280, AMS, Providence, RI, 2001.

[12] P. Comon, *Structured matrices and inverses*, Linear Algebra for Signal Processing, IMA, **69** (1995).

[13] P.J. Davis, *Circulant Matrices*, Wiley, New York, 1979.

[14] A. Dembo, C.L. Mallows, L.A. Shepp, *Embedding nonnegative definite Toeplitz matrices in nonnegative definite circulant matrices, with application to covariance estimation*, IEEE Trans. Inform. Theory **35**(6) (1989), 1206-1212.

[15] E. Eisenberg, A. Baram, M. Baer, *Calculation of the density of states using discrete variable representation and Toeplitz matrices*, J. Phys. A **28**(16)(1995), L433-L438.

[16] I. Erdelyi, *On the matrix equation* $Ax = \lambda Bx$, J. Math. Anal. Appl. **17** (1967), 119-132.

[17] R. Euler, *Characterizing bipartite Toeplitz graphs*, Theoret. Comput. Sci. **263**(1-2) (2001), 47-58.

[18] M. Engliš, *Toeplitz operators and group representations*, J. Fourier Anal. Appl. **13**(3) (2007), 243-265.

[19] Y. Gao, Z. Jiang, Y. Gong, *On the Determinants and Inverses of Skew Circulant and Skew Left Circulant Matrices with Fibonacci and Lucas Numbers*, WSEAS Trans. Math. **12**(4) (2013), 472-481.

[20] D. Geller, I. Kra, S. Popescu, S. Simanca, *On Circulant Matrices*, State University of New York at Stony Brook, Stony Brook, NY 11794.

[21] I.C. Gohherg, N.Ya. Krupnik, *A formula for the inversion of finite Toeplitz matrices* (in Russian), Mat. lsslcrl. **7**(2) (1972), 272-283.

[22] I.C. Gohberg, A.A. Semencul, *On the inversion of finite Toeplitz matrices and their continuous analogs* (in Russian), Mat. Issled. **7**(2) (1972), 201-223.

[23] U. Grenander, G. Szegö, *Toeplitz Forms and Their Applications*, 2nd Ed., Chelsea Publishing, New York, NY, 1984.

[24] T.N.E. Greville, *Note on the Generalized Inverse of a Matrix Product*, SIAM Review **8**(4) (1966), 518-521.

[25] T.N.E. Greville, *Toeplitz matrices with Toeplitz inverses revisited*, Linear Algebra Appl. **55** (1983), 87-92.

[26] C. He, J. Ma, K. Zhang, Z. Wang, *The upper bound estimation on the spectral norm of r-circulant matrices with the Fibonacci and Lucas numbers*, J. Inequal. Appl. **2015**(72), 2015.

[27] R.A. Horn, C.R. Johnson, *Topics in Matrix Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, 1991.

[28] N.M. Huang, R.E. Cline, *Inversion of persymmetric matrices having Toeplitz inverses*, J. Assoc. Comput. Mach. **19**(3) (1972), 437-444.

[29] Z. Jiang, H. Xin, H. Wang, *On computing of positive integer powers for r-circulant matrices*, Appl. Math. Comput. **265** (2015), 409-413.

[30] M. Kac, *Some combinatorial aspects of the theory of Toeplitz matrices*, pp. 199–208, Proc. IBM Sci. Comput. Sympos. Combinatorial Problems, IBM Data Process. Division, White Plains, NY, 1964.

[31] I. Kra, S. Popescu, S.R. Simanca, *On Circulant Matrices*, Notices of the AMS **59**(3) (2012) 368-377.

[32] G. Labahn, T. Shalom, *Inversion of Toeplitz matrices with only two standard equations*, Linear Algebra Appl. **175** (1992), 143-158.

[33] X. Ma, G. Marinescu, *Toeplitz operators on symplectic manifolds*, J. Geom. Anal. **18**(2) (2008), 565-611.

[34] R.J. Milgram, *The structure of spaces of Toeplitz matrices*, Topology **36**(5) (1997), 1155-1192.

[35] E.H. Moore, *On the reciprocal of the general algebraic matrix* (Abstract), Bull. Amer. Math. Soc. **26** (1920), 394-395.

[36] E.H. Moore, R.W. Barnard, *General Analysis*, Memoirs. Amer. Philos. Soc. **1** (1935), See secially Part 1 197-209.

[37] G. Rama Murthy, *Novel Structured Matrices*, Int. J. Algorithm Comput. Math. **2**(4) (2009), 19-32.

[38] Michael K. Ng, Karla Rost, You-Wei Wen, *On inversion of Toeplitz matrices*, Linear Algebra Appl. **348**(1-3) (2002), 145-151.

[39] V. Olshevsky, *Fast Algorithms for Structured Matrices: Theory and Applications*, Contemp. Math. **323** (2003).

[40] R. Penrose, *A generalized inverse for matrices*, Proc. Camb. Philos. Soc. **51** (1955), 406-413.

[41] R. Piziak, P.L. Odell, *Full Rank Factorization of Matrices*, Math. Mag. **72**(3) (1999), 193-201.

[42] D. Poland, *Toeplitz matrices and random walks with memory*, Phys. A **223**(1-2) (1996), 113-124.

[43] S. Puntanen, G.P.H. Styan, J. Isotalo, *Matrix Tricks for Linear Statistical Models*, Springer, 2011.

[44] J.F.T. Rabago, *A Note on Spectral Norms of Circulant Matrices with Binomial Coefficients*, Int. J. Math. Scientific Comput. **2**(2) (2012), 20-22.

[45] J.F.T. Rabago, *Circulant Determinant Sequence with Binomial Coefficients*, Scientia Magna **9**(1) (2013), 31-35.

[46] B. Radičić, *Circulant matrices with a special (geometric and arithmetic) sequence*, Indian J. Math. **58**(1) (2016), 1-16.

[47] B. Radičić, *On k-circulant matrices involving geometric sequence*, under review

[48] B. Radičić, *On k-circulant matrices (with geometric sequence)*, Quaest. Math. **39**(1) (2016), 135-144.

[49] B. Radičić, *On k-circulant matrices with arithmetic sequence*, under review

[50] B. Radičić, *On k-circulant matrices involving the Fibonacci numbers*, accepted for publication in Miskolc Math. Notes

[51] B. Radičić, *On k-circulant matrices involving the Lucas numbers*, preprint

[52] B. Radičić, *On k-circulant matrices with binomial coefficients*, under review

[53] B. Radičić, B. Malešević, *Some considerations in relation to the matrix equation $AXB=C$*, Mediterr. J. Math. **11**(3) (2014), 841-856.

[54] K. Rietsch, *Totally positive Toeplitz matrices and quantum cohomology of partial flag varieties*, J. Amer. Math. Soc. **16**(2) (2003), 363-392.

[55] S.Q. Shen, J.M. Cen, *On the bounds for the norms of r-circulant matrices with the Fibonacci and Lucas numbers*, Appl. Math. Comput. **216**(10) (2010), 2891-2897.

[56] S.Q. Shen, J.M. Cen, Y. Hao, *On the determinants and inverses of circulant matrices with Fibonacci and Lucas numbers*, Appl. Math. Comput. **217**(23) (2011), 9790-9797.

[57] U. Steimel, *Fast computation of Toeplitz forms under narrowband conditions with applications to statistical signal processing*, Signal Process. **1**(2) (1979), 141-158.

[58] G. Strang, *The discrete cosine transform, block Toeplitz matrices, and wavelets*, pp. 517–536, Advances in Computational Mathematics, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, 202, Dekker, New York, NY, 1999.

[59] G. Zielke, *Some remarks on matrix norms, condition numbers, and error estimates for linear equations*, Linear Algebra Appl. **110** (1988), 29-41.

Биографија аутора

Радичић Биљана је рођена 05.10.1979. године у Осијеку, Република Хрватска. Основну школу је похађала у родном месту а завршила у Београду где, потом, уписује IX гимназију „Михаило Петровић – Алас”. По завршетку средње школе уписује Математички факултет Универзитета у Београду, смер професор математике и рачунарства. Дипломирала је почетком 2004. године, након чега, исте године, такође на Математичком факултету Универзитета у Београду, уписује постдипломске студије, смер Алгебра. Магистарску тезу под називом „Регуларност у бимодулу хомоморфизама”, и менторством проф. др Зорана Петровића, одбранила је 2010. године. Радила је у Угоститељско-туристичкој школи (Београд), Првој економској школи (Београд) и на Грађевинском факултету (Београд).

Прилог 1.

Изјава о ауторству

Потписани-а Биљана Радичић

број уписа

Изјављујем

да је докторска дисертација под насловом

ПРИЛОГ ТЕОРИЈИ К-ЦИРКУЛАРНИХ МАТРИЦА

- резултат сопственог истраживачког рада,
- да предложена дисертација у целини ни у деловима није била предложена за добијање било које дипломе према студијским програмима других високошколских установа,
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио/ла ауторска права и користио интелектуалну својину других лица.

Потпис докторанда

У Београду, 11.04.2016.

Биљана Радичић

Прилог 2.

Изјава о истоветности штампане и електронске верзије докторског рада

Име и презиме аутора Биљана Радичић

Број уписа ______________________________

Студијски програм ______________________________

Наслов рада ПРИЛОГ ТЕОРИЈИ К-ЦИРКУЛАРНИХ МАТРИЦА

Ментор проф. др Зоран Петровић, ванредни професор

Потписани Биљана Радичић

изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предао/ла за објављивање на порталу **Дигиталног репозиторијума Универзитета у Београду.**

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Београду.

Потпис докторанда

У Београду, 11.04.2016.

Биљана Радичић

Прилог 3.

Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом:

ПРИЛОГ ТЕОРИЈИ К-ЦИРКУЛАРНИХ МАТРИЦА

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство

2. Ауторство - некомерцијално

3. Ауторство – некомерцијално – без прераде

4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима

5. Ауторство – без прераде

6. Ауторство – делити под истим условима

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци, кратак опис лиценци дат је на полеђини листа).

Потпис докторанда

У Београду, 11.04.2016.

Биљана Радичић

1. Ауторство - Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце, чак и у комерцијалне сврхе. Ово је најслободнија од свих лиценци.

2. Ауторство – некомерцијално. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела.

3. Ауторство - некомерцијално – без прераде. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела. У односу на све остале лиценце, овом лиценцом се ограничава највећи обим права коришћења дела.

4. Ауторство - некомерцијално – делити под истим условима. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада.

5. Ауторство – без прераде. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела.

6. Ауторство - делити под истим условима. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада. Слична је софтверским лиценцама, односно лиценцама отвореног кода.